UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS COM AUXÍLIO DE SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA COMO UMA METODOLOGIA DE ENSINO PARA A GEOMETRIA

WAGNER DE OLIVEIRA DELATORRE

Vitória/ES

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Demonstrações Geométricas com Auxílio de Softwares de Geometria Dinâmica como uma Metodologia de Ensino para a Geometria"

Wagner Delatorre

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 11/04/2013 por:

Florêncio Guimarães Filho

Florêncio Ferreira Guimarães Filho - UFES

Moacir Rosado Filho

Moacir Rosado Filho - UFES

Orlando Santos Pereira

Orlando dos Santos Pereira – UFRRJ/RJ

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, à minha esposa Márcia que tanto me ajudou na organização dos trabalhos e no incentivo ao estudo, aos meus filhos Gabriella e Guilherme que entenderam e respeitaram os momentos de estudo do pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de poder estudar e completar minha graduação com este excelente curso. Agradeço também ao professor e orientador Florêncio Guimarães, pela dedicação e atenção dispensada sempre que solicitado, tendo sempre boa vontade em nos atender e nos ajudar nas dúvidas em relação à elaboração deste trabalho e aos professores Moacir, Valmecir, Etereldes e Fábio Júlio pelas excelentes aulas que tanto me ajudaram na elaboração desse trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo associar o estudo da Geometria com os recursos computacionais dos softwares de Geometria dinâmica Geogebra e Régua e Compasso. A ideia é organizar um projeto, para que professores de Matemática dos Ensinos médio e fundamental, possam usar para desenvolver atividades na sala de informática e utilizando recursos básicos dos programas citados acima para investigação de propriedades geométricas e demonstrações das mesmas em aulas expositivas, de forma que os alunos entendam o que é uma prova ou demonstração em Matemática.

Palavras–chave: Ensino da Geometria; Informática; Geometria Dinâmica.

Abstract

This paper aims to link the study of geometry with computational resources of dynamic geometry software Geogebra and Ruler and compass. The idea is to organize a project for teachers of mathematics at middle and fundamental can use to develop activities in the computer room and using basic features of the programs mentioned above to investigate and geometric properties of these statements in lectures, so that students understand what a proof or demonstration in Mathematics.

Key words: Teaching Geometry; Computing; Dynamic Geometry.

SUMÁRIO

1. Introdução

Será que nossos alunos sabem o que é uma prova ou demonstração em Matemática? Será que já provaram ou viram a prova de alguma propriedade geométrica, por exemplo? Sabem o que significam os termos usados numa demonstração tais como: Lema, proposição, teorema, corolário, hipótese, tese? E os Métodos de prova, como o direto, por contraposição, por redução ao absurdo ou por Indução Matemática, será que já ouviram falar? Certamente teríamos que fazer uma pesquisa em nível nacional se quiser saber as respostas para estas perguntas. Por outro lado acredito que as respostas não serão muito satisfatórias para nós professores de Matemática, e sabendo disso, este trabalho pretende organizar atividades que possibilitem ao professor mostrar aos alunos o que é uma demonstração Matemática, quais os elementos abordados numa demonstração, quais as etapas de uma demonstração. É claro que precisamos que os alunos tenham noções de lógica, isto é, sejam apresentados a linguagem lógico-matemática para que possam acompanhar as aulas expositivas das demonstrações das propriedades que serão propostas na sala de informática.

A propósito, a sala de informática terá um papel fundamental na aplicação deste projeto. Os alunos serão levados à sala de informática e lá serão apresentados a dois softwares de Geometria Dinâmica, o Geogebra e o Régua e Compasso (ReC). Antes da execução das atividades, os aprendizes terão aulas com o monitor sobre o funcionamento das ferramentas básicas destes programas e após estarem familiarizados com estas ferramentas o professor dará início às aulas de investigação de determinadas propriedades geométricas. O trabalho seguirá um caráter investigativo, isto é, os alunos manipularão os softwares citados acima para investigar propriedades geométricas, fazendo conjecturas e tentando descobrir que resultado aparente a figura na tela do computador está sugerindo. Em contrapartida, o professor os confrontará com perguntas do tipo: “Estas investigações são suficientes para garantir a veracidade da propriedade que vocês perceberam”? “O computador consegue varrer todas as possibilidades permitindo concluir que é verdade o que está sendo observado”? “Será que podemos descartar de agora para frente as aulas expositivas sobre determinados assuntos usando o computador para testar as verdades que estamos estudando”. Estas perguntas, com certeza, vão gerar um bom debate sobre demonstrações matemáticas versus programa de computadores.

O foco principal do trabalho são as demonstrações. Queremos que os alunos entendam as fases de uma prova e consigam provar outros resultados e desenvolvam o raciocínio lógico dedutivo, sabendo questionar e interferir quando uma demonstração não está correta ou que esteja faltando algum detalhe para sua conclusão. Os programas servirão apenas como um suporte para as averiguações dos resultados que iremos propor. Não teremos como objetivo principal que os alunos aprofundem os conhecimentos dos comandos dos softwares e sim, queremos que consigam executar as tarefas com as ferramentas básicas.

Voltando ao objetivo principal, cabe uma inevitável pergunta. Para que demonstrar? Não basta falar qual a propriedade ou fórmula e aplicá-la nas resoluções dos problemas? Os alunos não conseguirão atingir o objetivo esperados sem as explicações de tais propriedades ou fórmulas? Decorar não seria suficiente para a compreensão da Matemática? Certamente estas perguntas já renderam belos debates nos departamentos de Matemática de todo país e entre os educadores e uma dúvida provavelmente ainda persiste. O que é mais interessante: passar as propriedades sem demonstrá-las, demonstrar todas independentemente do grau de abstração ou demonstrar algumas propriedades? Se somente iremos demonstrar algumas coisas, quais? Não pretendemos discutir este assunto aqui, isto é outro debate para outro trabalho. Nossa intenção, como já foi dito, é usar a computação para auxiliar nas demonstrações geométricas, desenvolvendo no aluno habilidades de conseguir pensar por si só, de maneira lógico-dedutiva.

> É inegável que submeter principiantes a áridas demonstrações sobre temas excessivamente abstratos, utilizando não raro uma linguagem peculiar e pedante, como se fazia no passado, certamente produz efeitos traumáticos. Muitas pessoas detestam a Matemática, julgam-se incapazes de aprendê-la e afastam-se dela exatamente devido a isso. Mas parece-me também um grave erro perder-se qualquer oportunidade que surja de se ensinar os jovens a deduzir por meio de raciocínio lógico algumas fórmulas importantes e simples... (Garbi Gilberto, C.Q.D, p.10).

Como está dito acima, não podemos deixar de apresentar aos jovens dos ensinos Médio e Fundamental uma Matemática mais rigorosa e formal e que a Geometria não é uma simples coleção de fatos e fórmulas. Os alunos devem perceber que na Geometria as definições, os axiomas e os teoremas estão em perfeita sincronia. "A geometria euclidiana é, não somente um sistema lógico, como também o primeiro e grande exemplo de tal sistema, que outras ciências têm tentado, e continuam tentando, imitar." (Polya, G., A Arte de Resolver Problemas, 7ª edição, p.133).

> Se o estudante houver passado pelas aulas de Matemática sem ter realmente entendido algumas demonstrações..., ele terá todo direito de fazer as mais cáusticas censuras sua escola e a seus professores. De fato, se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não houver familiarizado com as demonstrações geométricas, terá deixado escapar os mais simples exemplos das verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a ideia do raciocínio rigoroso. Sem esta ideia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se apresentam na moderna vida cotidiana.
>
> Em suma, se a educação pretende incutir no estudante as noções da prova intuitiva e do raciocínio lógico, ela deverá reservar um lugar para as demonstrações geométricas. (Polya, G., A arte de Resolver Problemas, 7ª edição, p. 132).

Independente do resultado do debate que as ideias acima podem gerar, a proposta é fazer com os alunos todas as demonstrações formais das propriedades verificadas no Geogebra e no ReC, possibilitando ao educando um maior ganho intelectual favorecendo um desenvolvimento melhor de sua estrutura cognitiva e mostrando que a Matemática é uma ciência que possui uma estrutura lógica perfeita que permite verificar as veracidades das propriedades sem o uso dos programas educacionais. Na verdade, por um lado se apresentará uma nova metodologia de ensino, e por outro lado, quando se fazem as deduções, mostra-se que as aulas expositivas são importantes para o aprendiz e que estas não serão descartadas do currículo escolar. Mas, sem dúvidas que o uso da sala de informática deve ser mais rotineiro nos nossos planejamentos.

Enfim, aulas com recursos computacionais e aulas expositivas com certas doses de rigor formam um par perfeito para novas metodologias que estamos expondo neste trabalho.

1.1 Justificativa

É um tema muito importante para se discutir novas formas de aprendizagem da Geometria, dando uma maior ênfase nos problemas de demonstrações e na aplicação da lógica-matemática dedutiva, sendo unida com os aplicativos computacionais. As novas tecnologias não podem ficar de fora das salas de aula, por outro lado não podemos abandonar completamente o formalismo da matemática principalmente nas aulas de Geometria. O desafio maior será juntar aulas expositivas com aulas na sala de informática e com a motivação do professor que será peça fundamental para a movimentação das engrenagens do trabalho, sendo o orientador que dará real significado na aprendizagem da Geometria levando os alunos a enxergarem a matemática como algo que não vem pronto e acabado e sim, como uma ciência onde as afirmações precisam ser provadas por meio de deduções lógicas, sendo possível utilizar vários métodos para organização destas demonstrações.

Os ambientes computacionais são ferramentas indispensáveis, nos dias atuais, uma forma de atrair os alunos para as aulas de Matemática. Não se pode esquecer que os estudantes têm muita facilidade e habilidade de, em questões de minutos, decifrar e entender os mais recentes lançamentos de aparelhos de celular, IPod, Smartphone, etc. Os professores precisam aproveitar este fato e com os softwares de Geometria dinâmica, criar situações em que os alunos possam aprender e desenvolver habilidades para o aprendizado significativo da Geometria. Os softwares de Geometria Dinâmica possibilitam a exploração das principais figuras geométricas, dando a oportunidade ao estudante, através da manipulação do programa, de desenvolver sua intuição e, a partir daí, com experimentações conjecturar e formalizar resultados. Outro fator importante, em aulas com o recurso da informática, é a postura do estudante que não é mais um mero espectador. Não é aquele que fica assistindo passivamente a construção do raciocínio e dos desenhos no quadro por parte do professor, onde este é o detentor de todo o conhecimento. O estudante não mais apenas observa, tentando assimilar todo o conteúdo despejado no quadro. Os softwares permitem uma dinâmica maior nas aulas de geometria, onde o aluno acaba tendo uma participação maior na construção de seu conhecimento podendo construir as figuras e detendo um poder maior sobre elas, modificando-as quando achar necessário e com isso facilitando através de uma rapidez maior no processo de ensino e aprendizagem. Considera-se que esta autonomia gere ao educando um interesse maior pelo estudo da Geometria, tornando-o independente nas suas ações, passando de um simples expectador a um construtor de ideais.

1.2 Objetivos

Objetivos Gerais

Os objetivos gerais do projeto são de adquirir e estimular a produção de conhecimentos através das novas ideias e métodos de aprendizagem de tópicos em Geometria com a utilização de aplicativos em Geometria Dinâmica. Como ponto de partida, será adotada uma linha pedagógica aliada ao uso de construções feitas em programas como o ReC, (Régua e Compasso) e o Geogebra. Espera-se também a promoção de uma nova perspectiva sobre os tópicos de Geometria na educação básica com a efetiva participação dos alunos e professores em capacitação. Objetiva-se inclusive avaliar o verdadeiro valor do contato dos estudantes com as novas tecnologias e sua importância no processo de ensino e aprendizagem no espaço escolar. O estudante de hoje, inserido em tantas redes sociais, já não adere ao ensino pragmático tradicional.

Objetivos específicos

- Mostrar que a Geometria é uma importante área da Matemática e que seu ensino deve ser resgatado nas escolas.
- As demonstrações Geométricas são essenciais para um melhor aprendizado.
- Provar que a geometria dinâmica é um grande aliado para os estudos da Geometria.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do ReC e do Geogebra.
- Usar o ReC e o Geogebra para comprovar propriedades geométricas.
- Saber demonstrar propriedades geométricas básicas.
- Entender que a Matemática principalmente a Geometria não é uma Ciência experimental e que suas afirmações precisam ser provadas.
- Entender as etapas básicas de uma demonstração tais como hipóteses e teses.
- Saber noções básicas de lógica.

1.3 Metodologia

A informática está, nos dias atuais, cada vez mais atuante e presente no cotidiano das pessoas. Os alunos, mais do que ninguém, conhecem os recursos dos aparatos tecnológicos que os rodeiam, estão muito à frente na área de informática do que a grande maioria dos professores. É preciso que os professores se informatizem para dialogar em pé de igualdade com os jovens e poder usar na escola este recurso que esta ficando indispensável na educação. Precisa-se mostrar aos estudantes que o professor também sabe usar as ferramentas básicas da computação, e mais, que pode preparar boas aulas mostrando que esta máquina também serve para ensinar e que está preparado para usá-las para esta finalidade.

A ideia é aliar os recursos dos softwares educacionais com o ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente o ensino e aprendizagem da Geometria. São inúmeros programas de Geometria Dinâmica à disposição dos professores para serem usados nas salas de informática. Aqui, neste trabalho trataremos do programa conhecido como Régua e Compasso e do programa Geoegebra. São softwares simples de manipular e que possuem vários recursos para desenvolver e aprimorar o estudo da Geometria. Os alunos serão levados a aprender as ferramentas básicas destes softwares e com isto desenvolver o raciocínio para estimular o estudo da Geometria.

Não se quer que os alunos aprendam as ferramentas e fiquem brincando com o programa sem objetivos. Seria extremamente desmotivador levar o aluno para a sala de informática sem planejamento e sem objetivos. A aula seria tão ruim quanto uma aula expositiva sem os devidos objetivos e planejamentos. Os alunos devem ser orientados e direcionados sobre a tarefa que realizarão com os programas educacionais, só desta maneira que realmente o uso dos aplicativos computacionais surtirá efeito e o aprendizado será significativo.

O trabalho seguirá um caráter investigativo, isto é, os alunos usarão os programas ReC e Geogebra para investigar propriedades geométricas fazendo conjecturas e através de observações feitas e manipulações realizadas nos programas tendo condições de antecipar dizendo qual a propriedade que está sendo averiguada.

O projeto terá basicamente quatro etapas, a saber:

1ª Etapa: Os alunos terão aulas expositivas de noções de lógica. A intenção é que nossos estudantes entendam o significado de termos presentes e frequentes em textos matemáticos tais como: Condição necessária, condição suficiente, se, e somente se, recíproca etc. Achamos também interessantes ensinar sobre os conectivos e seus significados e que consigam fazer pequenas tabelas- verdade.

Acreditamos que são suficientes cinco aulas de cinquenta minutos para realização desta etapa, mas cada professor pode trabalhar com o tempo que achar necessário. Não vamos colocar exercícios, apenas exemplificaremos cada tópico ficando os exercícios desta etapa a cargo do professor aplicador do projeto.

2ª Etapa: Consideramos esta etapa muito importante para o desenvolvimento do trabalho. Nela apresentaremos os métodos clássicos de demonstrações em Matemática sendo cada um exemplificado. Novamente cabe ao professor elaborar atividades para fixar melhor cada método.

Achamos que serão necessárias pelo menos duas aulas de cinquenta minutos para cada um dos métodos apresentados, mas repito que cada professor deve adequar a aplicação da etapa à sua realidade.

3ª Etapa: Nesta etapa, os alunos serão levados à sala de informática para execução de atividades investigativas nos programas Geogebra ou ReC (Régua e Compasso). Não achamos didático o professor elaborar atividades usando alternadamente tais programas. Achamos que um e, apenas um dos dois programas deve ser usado na execução da etapa, pois isto facilitará o andamento do projeto.

Outro fato importante que devemos observar, é que antes que os alunos comecem a verificação das atividades, estes devem ter aulas para conhecerem o programa que irão trabalhar, isto é, escolhido o software pelo professor, este deve ser apresentado aos alunos para familiarização das ferramentas básicas. Logo, é muito prudente, marcar aulas na sala de informática e juntamente com um monitor, o professor elaborará atividades para que os alunos manipulem as ferramentas do programa que será usado. A quantidade de aulas para esta familiarização fica a critério de cada professor e evidentemente isto vai depender da necessidade e da realidade de cada professor.

Na execução das atividades investigativas, achamos que cada aluno ou duplas de aluno fique por conta de um computador, mas isto evidentemente vai depender de quantos computadores possui na sala de informática da escola. Então deixamos para o professor a melhor organização dos estudantes de acordo com o número de computadores disponíveis. Veja que não queremos impor tempo e nem estipular qual a quantidade de estudantes que devem ficar em cada máquina. Sabemos que cada escola tem sua realidade em relação à sala de informática. Não queremos engessar o educando para elaboração destas atividades. Por outro lado, achamos interessante para o bom andamento dos trabalhos que cada atividade investigativa dure uma aula de cinquenta minutos.

Daremos exemplos de tais atividades no capítulo 6. São sugestões de atividades para cada série que estamos planejando neste projeto. O educador pode utilizá-las, mas o ideal é que crie suas atividades de acordo com o conteúdo que está ministrando com seus alunos. A quantidade de atividades fica também a cargo do professor.

4ª Etapa: Esta etapa também é considerada muito importante. É nela que se concentra o objetivo principal deste trabalho, que são as demonstrações formais das atividades propostas na etapa anterior. Aqui neste projeto, cada etapa corresponde a um capítulo, pois acreditamos que fica melhor a sua leitura. Por outro lado, sugerimos, por experiência própria que, após a execução de uma atividade investigativa, na próxima aula o professor deve fazer a sua demonstração formal. É claro que os alunos devem ser instigados a fazer as demonstrações sozinhos em casa, e na aula seguinte é preciso dar um tempo a mais e com pequenas ajuda do professor. É Preciso que o professor peça ao educando que destaque em cada teorema que está sendo provado, as hipóteses a tese, diga se a demonstração é pelo método direto, por redução ao absurdo ou por indução. Desta maneira acreditamos que os alunos vão fazer uma relação entre todas as etapas anteriores justificando-as.

As demonstrações de cada atividade devem durar uma aula de cinquenta minutos.

Público alvo: Alunos do 8º e 9º ano do ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

Antes de passarmos às etapas do trabalho, os próximos capítulos vão situar o professor a respeito do desenvolvimento, da história da Geometria e do Movimento da Matemática Moderna (MMM) que de certa forma teve papel fundamental no ensino da Geometria no nosso país.

2. Tópicos Sobre o Desenvolvimento da Geometria.

O ensino da Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento intelectual dos alunos do ensino médio e do ensino fundamental. O estudo da Matemática desprovido do conhecimento básico da Geometria é como se alguma coisa estivesse faltando na formação intelectual dos estudantes. A Geometria nos rodeia, está presente no cotidiano e é praticamente impossível não notá-la. Seria uma incoerência total, um aluno sair do ensino médio sem o mínimo de conhecimento sobre as formas geométricas e sem noções básicas de algumas propriedades desta disciplina.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) comentam a importância da geometria nas séries finais do ensino fundamental e da importância da construção de situações-problema que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas:

> Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. "Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria". Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos. (p. 86).

Há muito tempo os livros didáticos colocavam os conteúdos de Geometria nos capítulos finais e a maioria de nossos professores não tinham tempo suficiente para ministrá-los e, quando tinham tempo, optavam por não ensiná-los, pois, o despreparo com a disciplina era evidente. Este descaso com a Geometria perdurou durante muitos anos e em alguns livros ainda se tem o mesmo modelo de distribuição de conteúdos de livros anteriores. Felizmente, este quadro está se modificando. O ensino não só da Geometria, mas da Matemática como um todo vem mudando nos últimos anos com novas metodologias, novas abordagens e principalmente se tornando mais dinâmica e atraente para os alunos com a introdução da informática no domínio escolar, favorecendo e facilitando o ensino de seus conteúdos. Com a informática, vários softwares de Geometria Dinâmica foram desenvolvidos e apareceram como suporte para o professor nas aulas de Matemática e como fuga das rotineiras aulas expositivas que se tornam extremamente cansativas quando não se tem atrativos diferentes ou ferramentas que possam motivar os alunos para o estudo da Matemática.

É claro que a informática não é a salvadora da pátria. Não adianta absolutamente nada uma escola ter um laboratório de computação com máquinas de última geração se não existirem tutores capazes de colocá-las para funcionar e professores capacitados para gerenciar aulas com o uso de computadores e muitos menos de preparar aulas com eles. A capacitação de tutores e professores é de fundamental importância para que se tenha "vida" na sala de informática, para que realmente as máquinas possam ser usadas com total inteligência e aí sim possam ser manipuladas para a educação de nossos jovens.

Levar uma turma para a sala de computação sem o mínimo de planejamento pré-estabelecido é com certeza tão ou mais desastrosa que uma aula expositiva feita nas mesmas condições. O estudante em contato com o computador precisa de comando e de atividades que os façam sair da inércia, ocupando seu tempo com a manipulação das ferramentas desses aparatos tecnológicos que tanto os encanta. É importante ressaltar que as tecnologias estão presentes em todas as partes e que nossos jovens são capazes de, em questões de segundos, entender e manipular o mais recente lançamento no mercado de aparelhos celulares, Ipod's, Ipad's, MP3, MP4, e muitos outros aplicativos tecnológicos. Já que eles possuem tremenda facilidade de compreensão dessas máquinas, por que não usá-las para a educação, para ensiná-los e para tornar nossas aulas muito mais agradáveis para nossos alunos. Pode-se usar os computadores a favor do processo de ensino-aprendizagem e aproveitar a criatividade dos estudantes para envolvê-los com estudos principalmente o estudo da matemática e de suas partes como, por exemplo, a Geometria que já ficou de fora da educação matemática por muito tempo. É preciso resgatá-la e a informática é forte aliada para virada de mesa e para a conquista de nossos alunos.

Por falar em demonstrações, estas são o tema central deste trabalho. Com o resgate da Geometria em nas aulas, não se pode deixá-la sem as devidas formalizações, sem o rigor das justificativas das provas de algumas propriedades básicas. Encher o quadro de fórmulas sem o mínimo de explicações faz parte das aulas expositivas do passado. Tiveram que engolir fórmulas regras, teoremas e aplicá-los em exercícios totalmente descontextualizados e sem nenhum significado para resolvê-los. Os alunos simplesmente eram adestrados a resolver exercícios como os exemplos fornecidos nos livros. Faça como exemplo acima, e eram inúmeros testes iguais ao modelo que com uma fórmula decorada faziam todos sem nenhum sentido. A contextualização, as demonstrações matemáticas e os softwares de Geometria Dinâmica formam uma tríade perfeita para ensinar Geometria de forma bem significativa.

2.1 Um pouco de História.

Praticamente todos os livros que comentam sobre a origem da Geometria, citam o fato de que esta teve início com os babilônicos e com os egípcios. Os egípcios utilizavam as margens do rio Nilo para fazerem suas plantações, e com a cheia do rio estas demarcações eram apagadas, e para que os impostos fossem cobrados proporcionalmente à parte de cada um, eram feitos os cálculos das áreas de cada terreno. Daí surge à tradução para a palavra Geometria. O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medir). Conta à história que os egípcios já tinham o conhecimento do teorema de Pitágoras. Eles utilizavam cordas com nós igualmente espaçados para construção de ângulos retos através do triângulo, hoje conhecido como triângulo pitagórico (3, 4, 5) e já conseguiam calcular o volume de troncos de pirâmides de base quadrada com uma boa precisão. Os babilônios entre 2000 e 1600 a.C utilizavam o valor de pi com valor aproximado igual a 3, e manuscritos históricos relatam que os chineses antigos também detinham um bom conhecimento geométrico. A Geometria destas épocas era puramente empírica, que possuía uma coleção de regras práticas para obter resultados aproximados, não se tinham preocupações com formalizações ou deduções. A Geometria era usada simplesmente para resolver os problemas do cotidiano que apareciam.

Não se podem comentar fatos históricos da geometria sem citar nomes importantes tais como Pitágoras e Tales de Mileto. O primeiro, que nasceu numa ilha grega chamada de Samus, entre 570 a.C e morreu entre 496 a.C e 497 a.C, é sem dúvida o mais lembrado entre os matemáticos gregos. Como citamos acima, o resultado do teorema de Pitágoras já era conhecido dos babilônicos e egípcios, mas é creditada a Pitágoras a sua primeira demonstração a qual, contam alguns historiadores, que não se sabe ao certo qual foi. A única informação oficial da demonstração feita por ele apareceu citada nos Elementos de Euclides no primeiro livro. Ao longo dos séculos foram feitas muitas demonstrações deste teorema, algumas feitas por personalidades famosas tais como, Leonardo da Vinci e Napoleão Bonaparte.

Com a chegada de Tales de Mileto (624 a.C – 548 a.C), a geometria grega começa tomar novos rumos. Tales é considerado por muitos historiadores, como sendo o primeiro filósofo grego e o primeiro que iniciou a matemática formal, onde muitos resultados eram demonstrados para serem aceitos. Tales buscava a validade das propriedades matemáticas presentes nos números e na geometria. Muitos são os feitos atribuídos a Tales, por exemplo: previsão do eclipse solar de 585 a.C, cálculo da altura da Pirâmide de Quéops, cálculos da distância de navios até à praia, demonstração que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, demonstração de que um ângulo inscrito num semicírculo é reto, e muitos outros.

O trabalho de sistematização em Geometria iniciado por Tales é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos. Pitágoras, após longas viagens pela Babilónia e Egito, estabeleceu-se em Crotona, cidade grega no sul da Itália, por volta de 530 a.C., onde fundou um culto religioso e filosófico que cultivava a purificação do espírito através da música e da matemática. Foi através destes estudos que os pitagóricos descobriram os números irracionais quando se tentou calcular o comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade de medida. Este fato levou à descoberta dos seguimentos incomensuráveis e a credibilidade de que não se podiam medir todas as coisas. O poder (e a magia) dos números são elementos essenciais da crença pitagórica na racionalidade do universo, mas, admitindo apenas inteiros (positivos) e suas razões (ou, como se diz modernamente, números racionais positivos), tal descoberta pôs em causa os fundamentos filosóficos da escola e determinou o seu encerramento.

2.2 A Geometria Euclidiana Plana

Outra personalidade importante da história da Matemática grega e da Geometria foi Euclides de Alexandria (325 – 265 a.C). Consta na história que Euclides fundou uma escola de matemática em Alexandria onde estudaram matemáticos importantes tais como, Aristarco, Arquimedes, Apolônio e Erastóstenes e, foi o autor de treze livros intitulado, Os Elementos, dos quais sendo os seis primeiros sobre Geometria Plana, três sobre números, e os quatro últimos sobre Geometria Espacial.

Nos livros de Geometria Plana apresentava uma lista de definições, postulados e noções primetivas e a partir daí demosntrava-se as proposições. Nos livros referentes a números vários resultados foram apresentados, entre eles o algoritmo, que recebe o nome de algortimo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de dois números, a prova de que existem infinitos números primos e uma prova de uma propriedade referente aos números perfeitos, que são os números inteiros cuja soma dos divisores próprios é igual ao número. Os livros 11, 12, e 13 contempalvam a geometria Espacial, onde seguia os mesmos modelos dos primeiros livros e muitas coisas sobre cálculos com área e cáculos com volumes das principais figuras espaciais. Os Poliedros de Platão foram destacados no último livro.

Outra coisa que podemos comentar sobre Euclides e sua obra são de que os quatro primeiros postulados e os postulados das paralelas (o quinto) formam a base do que chamamos hoje de Geometria Euclidiana. Entretando a negação deste quinto postulado, ao longo dos séculos, deu origem a outras teorias tão consistentes quanto à geomettria de Euclides. Estas novas teorias que apareceram com a negação deste quinto postulado chamamos hoje de Geometrias Não-Euclidianas. Mas isto é outra história.

2.3. O Ensino da Geometria.

O ensino da Geometria vem sendo discutido e se modificando ao longo dos últimos anos. Muitas escolas já perceberam que um estudo e aprendizagem das ferramentas básicas desta disciplina eleva o nível de conhecimento e de abstração dos estudantes favorecendo um entimento melhor do mundo que os rodeia, pois como sabemos, as formas geométrica estão presentes em praticamente todas as partes e em tudo que vemos e tocamos. Os conteúdos Geométricos começam aparecer nos livros didáticos com muito mais contextualizações e não somente nos capítulos finais não possibilitando, como já dissemos, o seu ensinamento de forma completa e eficiente. Estes conteúdos, não só estão presentes de forma diferente nos livros, mas também envolvidos com outras disciplinas tais como a Álgebra e a Aritmática, possibilitando ao professor uma abordagem mais interessante mostrando que a Geometria é uma parte da Matemática e não uma matéria diferente, tal como Português, Geografia, História etc.

Outro ponto importante que vem acontecendo, é de que muitas escolas estão reservando uma parte das aulas de Matemática para a Geometria e em algumas trabalhando com professores diferentes. Não interessa aqui discutir se a melhor alternativa é ter professores diferentes ou o mesmo professor para as aulas de Geometria e Matemática, e o que é melhor ou pior para o aprendizado da mesma; o importante neste momento é observar se os alunos estão desde o início do ano letivo estudando os conteúdos da Geometria, e isto sim é que merece a atenção neste momento. Como a Geometria está sendo ensinadas, algumas perguntas são inevitáveis: “Como ela está sendo apresentada aos alunos?”, “Como nossos professores estão preparando aulas para ministrar conteúdos desta disciplina?”, “Nossos alunos estão realmente sendo levados a construir seu conhecimento geométrico de forma construtiva e siginificativa?”, “Algumas demonstrações geometricas estão sendo feitas nas aulas, mostrando o rigor que a geometria possui?”, “A informática juntamente com os programas de Geometria Dinâmica está sendo utilisados para ensinar geometria?”. Não se pretende aqui responder todas as perguntas que foram formuladas, mas sem dúvida é um material e tanto para um fórum de discursões sobre o ensino aprendizagem da Geometria nos dias de hoje.

A Geometria é constituída de conceitos contínuos e blocos conexos a conceitos prévios e posteriores, e o principal destes aspectos são as ideias cumulativas que estruturam o significado e aplicação a um problema ou ciência para o seu desenvolvimento e renovações de ideias. Foi justamente o desenvolvimento e renovações de ideias matemáticas que durantes séculos vêm acontecendo e isso não se deve a um estudo axiomático ou prático, mas, aos dois métodos juntos com a motivação e a criatividade do homem diante das necessidades que se apresentaram na vida social e econômica. Nos dias atuais, essa necessidade parece estar longe dos estudantes e muitos pensam que o estudo da Geometria deve ser limitado, pois nem todos possuem inclinação para matemática, e que seu estudo mais aprofundado é para poucos, o que é uma contradição séria e problemática no ensino básico da Matemática e a continuidade nos seus estudos. Esse fato problemático ganhou mais força durante e depois das ideias da matemática moderna, isentando do aluno uma matemática visual e prática, que favorece só aos alunos com inclinação real para ciências exatas. Mas este favorecimento também foi vítima de um estudo matemático sem significados, pois o estudo algébrico e aritmético, recebidos a partir de definições prontas em que o aluno não precisa saber de onde e como surgiu, traz resultados maléficos e distorcidos e reflete o momento trágico no ensino da Matemática de nossos dias.

Um fato importante que merece destaque é que muitas escolas começam a destinar parte da carga horária de Matemática para o ensino da Geometria, mas, mesmo assim, o ensino desta continua desmotivador para os alunos. O ensino continua meramente mecanizado com resoluções de exercícios sem contextualizações e formulários sem sentido e sem o mínimo de justificativa ou demonstrações para os alunos. Ora, de que adianta colocarmos a Geometria no currículo escolar se não damos o tratamento adequado que ela merece? Para que ensiná-la se as aulas ainda são ministradas de forma puramente expositiva onde o aluno é simplesmente um espectador onde recebe uma avalanche de informações sem justificativas sem contextos históricos e principalmente, como já foi comentado, sem nenhuma demonstração de resultados? As aulas de Geometria devem sem dúvida voltar com força total em nossas escolas, mas nossa metodologia de ensino deve mudar radicalmente e temos na informática uma aliada fundamental para nos ajudar nesta tarefa. Hoje, se perguntarmos em uma sala de aula qual o teorema de Pitágoras, provavelmente todos responderiam que "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Porém, se perguntarmos: "Quem foi Pitágoras?", "Onde viveu?", "Quais suas principais contribuições para a Matemática?", "Como ele demonstrou o teorema que leva seu nome?", "O que é um teorema?", provavelmente não teremos respostas para estas perguntas. E é possível ir mais longe, muitos professores não sabem responder a maiorias destas perguntas. Outro fator importante para as aulas de Geometria são as demonstrações de teoremas e proposições clássicas que vão dar um significado melhor para seu estudo. É fundamental mostrar que a matemática, principalmente a Geometria, não é uma ciência desprovida de rigor e que suas propriedades não foram descobertas por mero acaso ou por pura sorte dos matemáticos, muito menos que ela é empírica, as fórmulas se tornam verdadeiras podendo ser usadas para resolver os problemas que vão aparecendo. Não se deve omitir as demonstrações e muito menos deixarmos de verificar cada propriedade geométrica, pois estas são suportes básicos para que o aluno acredite na solidez da Matemática e acredite que a Matemática é uma ciência cuja estrutura lógica é fundamental para compor seu corpo e indispensável para seu desenvolvimento e aprendizagem.

Não se pode deixar de comentar um pouco sobre as licenciaturas em Matemática. Estas também estão se adaptando à nova forma de ensino e realmente começam a preparar os futuros professores de matemática para o ensino da Geometria.

Há tempo, muitos professores se formavam sem ter aprendido os conteúdos geométricos para poderem desenvolver um bom trabalho em suas aulas. A Álgebra era focada praticamente o curso todo e a Geometria em apenas duas disciplinas. Ora, um curso de quatro anos, como pode ter apenas duas disciplinas falando da Geometria? E mesmo assim era uma Geometria abstrata sem contextualizações e aplicações para facilitar o trabalho do futuro professor. Então, é claro que este professor enfatizava muito mais Álgebra do que geometria nas suas aulas, pois sua formação não permitia uma aplicação diferente disto. Na verdade as explicações deste abandono completo da geometria ficam claras quando se estuda o Movimento da Matemática Moderna (MMM). É sobre isto que se falará na continuidade do texto.

2.4. O Ensino da Geometria durante e após o Movimento da Matemática Moderna

Uma forma de entender porque houve um abandono do ensino da Geometria no Brasil é fazer um estudo do chamado Movimento da Matemática Moderna, que aqui se irá abreviar na forma (MMM) para uma melhor comudidade. Trata-se de um movimento ocorrido em meados da década de 50 que surgiu para reformular todo o ensino e aprendizagem da Matemática e que no Brasil incentivou a criação de grupos de estudo e a realização de congressos em vários estados. Muitos professores na época se engajaram nos estudos e na divulgação ampla das novas ideias para o ensino da Matemática e foram muitas as propostas de aperfeiçoamentos de professores da educação básica. Apesar dos congressos priorizarem a discussão do ensino da Matemática moderna, foram estes grupos que divulgaram em praticamente todo pais o MMM. Um nome ficou famoso em todos estes processos, o do professor Osvaldo Sangiorgi, que publicou na época livros de Matemática à luz do MMM.

No que diz respeito ao ensino da Geometria, o MMM propunha um ensino de Geometria voltada a uma abordagem das tranformações geométricas e inseriu-se a linguagem dos conjuntos no estudo da mesma e preocupou-se excessivamente com formalizações distanciando a Geometria de situações práticas. Estas características do ensino da Geometria segundo o MMM foi para muitos educadores um dos motivos para seu fracasso. Outro fator, conta muitos estudiosos do assunto, foi a má interpretação de uma frase proferida por um Matemático Francês chamado Jean Dieudonné que disse: “Abaixo Euclides”. Esta afirmação pode ter influenciado o abandono da Geometria nas escolas brasileiras. É claro que outros fatores foram decisivos para o fracasso, um deles é sem dúvida a falta de prepararo dos professores para lidar com as situações novas que estavam aparecendo e a liberdade que era dado eles para decidir sobre o programa que iria ensinar ao longo do ano, favoreceu desta forma a escolha da Álgebra e da Aritmética na hora de montar o currículo de Matemática. Sem falar que os livros didáticos só traziam conteúdos de geometria nos capítulos finais, favorecendo mais ainda seu abandono e o surgimento da famosa frase "não deu tempo de dar Geometria".

Na década de 70, surgem as primeiras críticas ao Movimento. Um livro do autor Americano Morris Kline, intitulado "O Fracasso da Matemática Moderna", traduzido em 1976 para o português, foi um dos marcos do declínio do MMM no Brasil. Muitos dos divulgadores deste movimento já começavam a pensar ao contrário em relação à Matemática Moderna e em um artigo publicado no Jornal do Estado de São Paulo, de 1975, o professor Osvaldo Sangiorgi escreve:

> Não se sabe mais calcular áreas de figuras gemétricas planas muito menos dos corpos sólidos que nos cercam, em troca da exibição de rico vocabulário de efeito exterior, como por exemplo, Transformações Geométricas.

3. Geometria Dinâmica

3.1. O que é Geometria Dinâmica?

Não queremos aqui dar uma definição pronta para Geometria Dinâmica (GD), queremos com algumas paravras dar ideias do que seja GD. Outra coisa importante que devmos destacar é que GD não é uma nova Geometria como aquela criada por Lobacheviski, mas uma exploração da ideia de movimento para representações geométricas. É bom lembrar que historicamente, a ideia de movimento foi bem trabalhada pela Geomeria Grega e o uso da régua e o compasso também.

Geometria Dinâmica é a geometria proporcionada em ambientes gráficos computacionais, permitindo construções geométricas a partir de comandos básicos, que diferentemente da do lápis e do papel, da régua e do compasso tradicionais ou do quadro-negro, transfere para o ensino-aprendizagem da Geomeria uma grande variedade de novos recursos tais como: permitir a consideração e a análise simultanea de um número muito grande de casos, ressaltar a distinção entre desenho e construção geométrica, facilitando a formulação de conjecturas ajudando ao professor na elaboração de atividades dinâmicas e ilustrativas, fazendo com que a GD seja um excelente laboratório da aprendizagem da Geometria.

O termo Geometria Dinâmica foi originalmente usado por Nick Jackiw e Steve Rasmussem com a intenção de ressaltar a diferença entre softwares de Geometria Dinâmica e outros softwares de Geometria. Esses softwares possuem um recurso que possibilita a transformação contínua, em tempo real, ocasionada pelo "arrastar". O aluno pode testar suas conjecturas através de exemplos e contraexemplos que ele pode facilmente gerar. Uma vez feita a construção, pontos, retas e círculos podem ser deslocados na tela mantendo-se as relações geométricas previamente estabelecidas entre eles. Nessa mudança automática de posição está o dinamismo, cuja grande vantagem é como já dissemos preservar as relações entre os elementos da figura que foi construída na tela do computador. Assim por exemplo, se construirmos um segmento de reta AB e sua mediatriz, é possível impor que, ao modificarmos a posição de um dos extremos deste segmento, a figura se desloque mantendo a propriedade da reta ser mediatriz do novo segmento. Veja as ilustrações abaixo feitas no programa Geogebra.

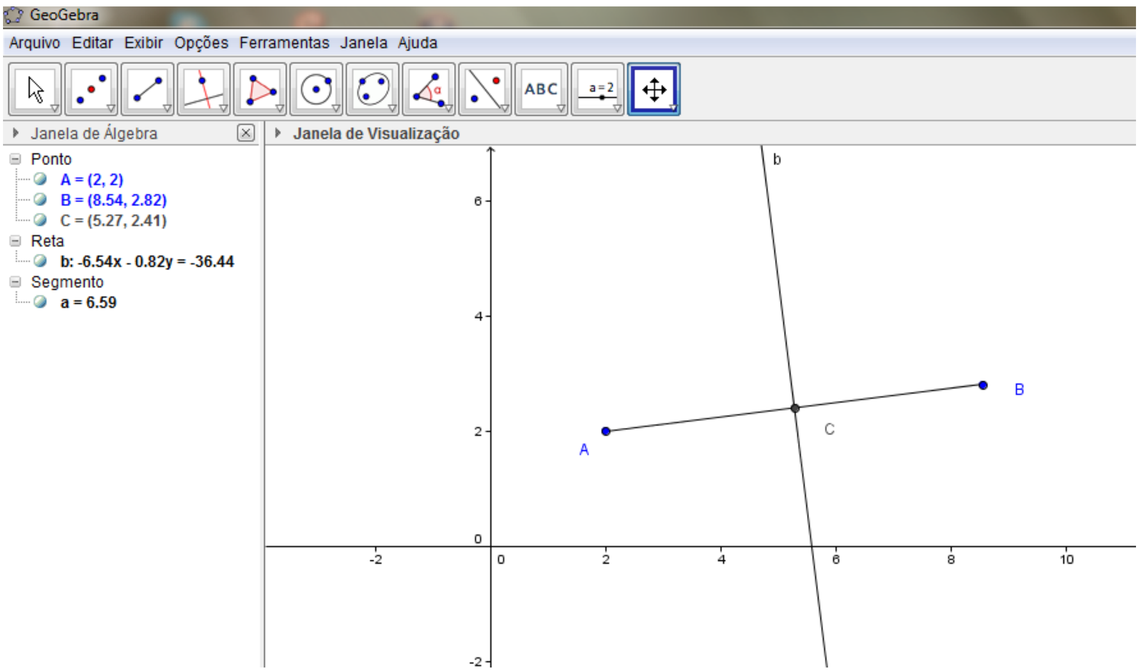


Figura01: Mediatriz do segmento AB

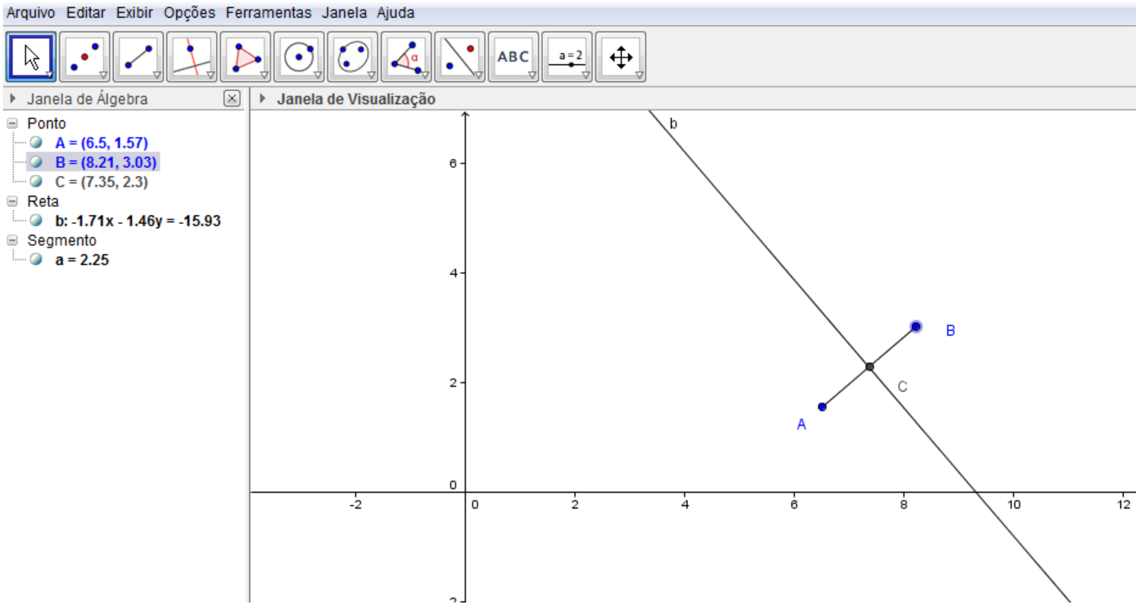


Figura 02: Mediatriz de segmento AB modificado

Note que modificamos o segmento AB, mas a reta b continuou sendo sua mediatriz.

Em fim, o importante é que este dinamismo permite explorar diversas instâncias de um problema em busca da demonstração de uma conjectura. E mais importante, qualquer estudante pode aprender facilmente a fazer isto.

3.2. O uso da informática para ensinar Geometria.

O ensino de Geometria tem papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos, desperta curiosidade e favorece uma estruturação do pensamento. Implica também no desenvolvimento de habilidades e competências de estruturas mentais lógicas que permitem compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que se vive. Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem que o trabalho com Geometria deve ser realizado a partir da exploração dos objetos do mundo físico. Apontam uma necessidade de desenvolver diferentes linguagens como meio para produzir, comunicar e expressar ideias, assim como utilizar bem recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos. Novas estratégias para o ensino e aprendizagem da Geometria incluem diversos instrumentos, desde o uso de dobraduras até os softwares educativos. O uso desses instrumentos tem como objetivo democratizar o acesso ao conhecimento geométrico que, muitas vezes, ficou relegado ao segundo plano na sala de aula.

A informática com seus vários recursos vêm se transformando numa excelente ferramenta para ensinar Matemática, principalmente a Geometria. Os softwares de Geometria Dinâmica possibilitam uma abordagem diferente permitindo ao professor dispertar no aluno um interesse pela matéria e um domínio maior sobre o assunto que está sendo ensinado. O uso do computador por parte do aluno ajuda na descoberta das propriedades pela simples manipulação da máquina e faz do educando um construtor do seu conhecimento, pois este tendo a oportunidade de fazer e desfazer quantas vezes quiser acaba não sendo mais um recebedor de informações, passivo ouvindo sem nenhuma iteração com o assunto estudado. Agora o aluno pode fazer descobertas e conjecturas e com isso tornar seus estudos mais agradáveis já que está "ligando o útil ao agradável".

A Informática no ensino da Geometria pode e deve ser reconhecida como um importante instrumento de representação do espaço e do movimento segundo os conceitos e procedimentos que a constituem. Essas possibilidades têm sido, muitas vezes, negligenciadas no currículo escolar que privilegia os aspectos algébricos no ensino da Matemática e a mecanização de procedimentos em detrimento da compreensão dos objetos matemáticos estudados. Sendo assim, é de extrema importância que se saiba reconhecer a importância do uso da informática no ensino da Geometria e das possibilidades de intervenção na natureza e na sociedade a partir desse instrumento.

A informática faz parte do novo paradigma da educação e que também é o potencializador no desenvolvimento de novas teorias da educação no que diz respeito à dinamização e reestruturação das metodologias e novas formas de trabalhar conceitos que antes não eram ofertados em sala devido à dificuldade teórica do conceito e o tempo reduzido das aulas.

> O aspecto de construção de objetos geométricos raramente é abordado; dificilmente encontramos no livro escolar a instrução "construa", e, no entanto esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos. Mais difícil ainda é encontrar questões do tipo "o que podemos

> dizer nesta situação?" ou "que regularidades percebemos?", onde estratégias de investigação devem ser estabelecidas (Gravina, Maria Alice. 1996. p.2).

Pode-se considerar, portanto, que além do resgate do ensino de Geometria em nossas escolas, a condição de que a utilização do computador faz parte do mundo de nossos estudantes e que estes conseguem entender, com muita rapidez, o funcionamento do mais recente lançamento de alguma tecnologia. Então, por que não utilizar o computador a favor da educação e, é claro, do estudo da Geometria?

Não há dúvida que, como os alunos têm muita familiaridade com as tecnologias, os professores podem usar este fato para ensinar Geometria tornando as aulas mais atraentes, motivadoras e interessantes para os alunos. Não só atraente, mas significativa, por meios manipulativos e interativos, fazendo com que o aprendiz tenha a motivação para explorar, experimentar, interpretar, visualizar, induzir e conjeturar, da melhor maneira, por meio de atividades dinâmicas, os conceitos matemáticos e principalmente os tópicos geométricos. É por meio do "arrastar" que os alunos poderão manipular as construções em ambientes gráficos dos aplicativos de Geometria Dinâmica, tanto nas construções das figuras, como também no desenvolvimento das ideias e conjecturações.

3.3. O Programa Régua e Compasso (ReC)

O aplicativo "Régua e Compasso" (C.a.R.), uma abreviação de Compass and Ruler que significa Compasso e Régua, cujo nome original Z.u.L. "Zirquel und Lineal" foi desenvolvido pelo professor René Grothman da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha, cuja versão original está no site http://zirkel.sourceforge.net/, é um software de Geometria Dinâmica Plana gratuito, por isto ideal para as escolas públicas, pois possui licença GPL (General Public License) e pode ser baixado pelo site http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/index.html. Ele está disponível em várias línguas inclusive em português escrito na linguagem Java, tem código aberto e roda em qualquer plataforma (Microsoft Windows©, Linux, Macintosh©, etc.).

O software possui ferramentas para diversas construções geométricas planas e com facilidade e apenas com cliques podem-se marcar pontos, traçar retas, ângulos, circunferências, traçar paralelas e perpendiculares, calcular distâncias e muito mais. A interface do programa é bem ilustrativa e possui informações claras e precisas, basta o professor ou o aluno se inteirar com o aplicativo e que mediante manipulações sucessivas o domínio de suas funções vem naturalmente. É claro que são muitos os tutorias espalhados pela internet facilitando ainda mais seu aprendizado. Abaixo uma figura ilustrando a face principal do programa com a construção de um hexágono regular.

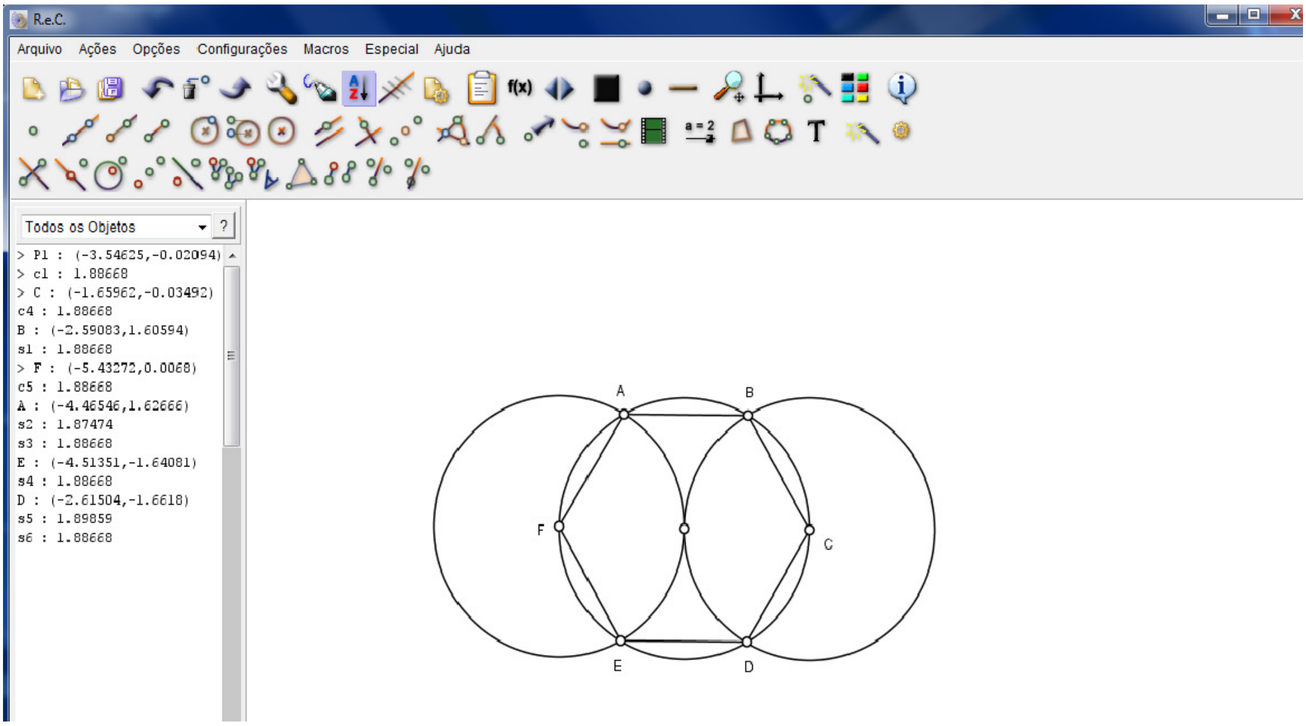


Figura 03: Construção de um hexágono regular

3.4. O programa Geogebra

Diferentemente do ReC, o Geogebra não é só um software de Geometria Dinâmica, é um software livre onde qualquer pessoa pode instalar em sua máquina pelo endereço eletrônico: http:\\www. Geogebra.orgs/cms/, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo que foi objeto da tese de doutorado do professor Markus Hohenwarter, da

Universidade de Sazburgo, na Áustria. Ele criou e desenvolveu esse programa com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da Matemática, combinando procedimentos geométricos e algébricos.

O Geogebra é bastante intuitivo e fácil de usar. Há duas formas de dar instruções a ele: via barra de ferramentas e por meio do campo de entrada.

Figura 04: Barra de Ferramentas

Figura 05: Campo de Entrada

Abaixo uma figura mais detalhada das ferramentas do Geogebra.

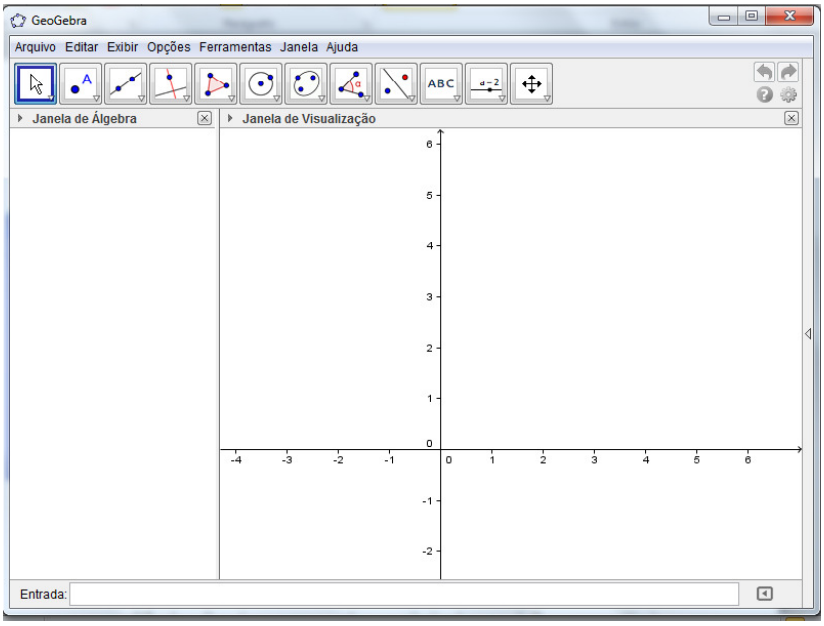


Figura 06: Interface do Geogebra

O Geogebra é um sistema de Geometria Dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas cônicas e funções, que podem ser modificados dinamicamente e tendo a potência de se trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Podemos, pelo Campo de Entrada, inserir equações, visualizar seu gráfico, permitindo determinar derivadas e integrais de funções, além de oferecer um conjunto de comandos próprios da Análise Matemática, para identificar pontos singulares como raízes e extremos.

Abaixo a construção de um círculo inscrito num triângulo.

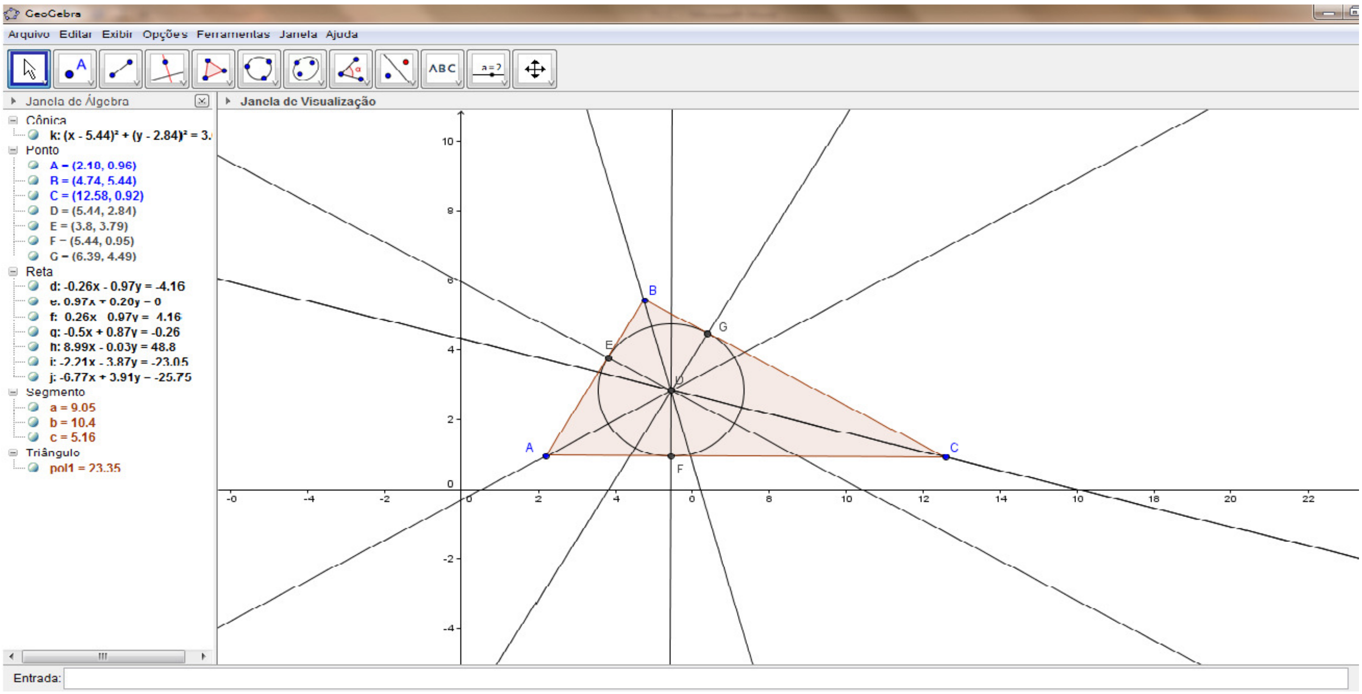


Figura 07: Círculo inscrito num triângulo

Nos dois próximos capítulos, apresentaremos todas as formas que podemos usar para provar um teorema em Matemática e os termos que aparecem frequentemente numa demonstração. É bom destacar que não importa em que profissão vamos atuar, ao relacionarmos com outras pessoas ou instituições, a todo o momento temos que expressar nossas ideias e nossos pontos de vista em relação a um determinado assunto ou fato, e são nestes relacionamentos que estamos interessados em convencer o outro ou a nós mesmos sobre nossos argumentos. Falando especificamente da Matemática, existe um objetivo maior de provar que uma afirmação é verdadeira ou falsa tendo como base um conjunto de afirmações previamente estipuladas.

Nosso interesse é levar para o ambiente escolar uma forma de desenvolver as habilidades dos alunos privilegiando e estimulando a forma de pensar e de organizar o raciocínio na hora de enfrentar um problema. É importante criar nos alunos o hábito de questionar de investigar e de buscar sempre as justificativas das propriedades que aprendem na sala de aula elevando desta maneira seu senso crítico. Queremos que os alunos percebam que o fato de demonstrar significa convencer de que uma tese é consequência de um conjunto de hipóteses, que uma demonstração ajuda na explicação e no melhor entendimento do fato provado, comunicando e aumentando o conhecimento Matemático sobre o fato provado.

> As demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento das proposições matemáticas. (Lima E. E, Carvalho P. C, Wagner E. Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio V.1, sexta edição).

Logo, para que uma demonstração seja perfeitamente entendida é necessário um domínio da linguagem simbólica, da linguagem lógico-matemática, da linguagem materna e de construções que permitam visualizar a prova que está sendo realizada e da validade dos argumentos utilizados.

4. Noções básicas e elementares de Lógica

1ª Etapa

Frequentemente em sala de aula, alunos perguntam se podem afirmar algo sobre um determinado exercício. Por exemplo: Professor pode afirmar que o triângulo é equilátero? A grande maioria dos alunos quando perguntam se pode afirmar algo, significa que a afirmação é verdadeira. O simples fato de afirmar significa ser verdadeira aquela afirmação. Nossos alunos não sabem que uma afirmação em Matemática possui dois valores lógicos, isto é, são verdadeiras ou falsas. Uma das intenções deste trabalho é passar para os jovens estudantes noções básicas de Lógica sem muitos exageros e aprofundamentos.

- **Proposições**

Chamamos de proposição toda afirmação passível de assumir o valor lógico verdadeiro (V) ou falso (F).

- **Princípio da não Contradição**

Uma proposição não pode assumir os dois valores lógicos simultaneamente.

- **Princípio do Terceiro Excluído**

Em toda proposição verifica-se sempre que é verdadeira ou falsa, isto é, não existe uma terceira possibilidade.

- **Proposições Simples**

As proposições podem se classificadas em simples quando não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma e geralmente são representadas por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Exemplos:

1. p: Vitória é a capital do Espírito Santo (V).
2. q: A terra é o maior planeta do sistema solar (F).
3. r: 2 + 3 > 5 (F).
4. s: Todo quadrado é um retângulo (V).

É bom destacar que existem afirmações que são verdadeiras em um contexto e falsas em outro. Por exemplo.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°,

é verdadeira na Geometria Euclidiana e falsa em geometrias não euclidianas. Aqui o professor não precisa entrar em detalhes, pois não é o objetivo do trabalho.

- **Proposições Compostas**

As proposições são compostas quando são combinações de duas ou mais proposições e são representadas por letras maiúsculas de nosso alfabeto.

Exemplos:

1. P: O triângulo ABC é retângulo **ou** é equilátero
2. Q: Um quadrilátero é inscritível **se e somente se** os ângulos opostos forem suplementares
3. R: O número 64 é quadrado perfeito **e** cubo perfeito
4. S: Um losango **não** é um quadrado
5. T: **Se** um número for primo **então** será impar

As palavras que estão grifadas nas proposições acima são chamadas de **conectivos,** que são usadas para formar novas proposições a partir de outras. As proposições construídas com o conectivo ***e*** são chamadas de **conjunçõe**s e as formadas por ***ou*** de **disjunções.** Por outro lado, as proposições formadas com o conectivo ***não,*** são chamadas de **negação.** As afirmações do tipo ***se A, então B*** são chamadas de **condicionais ou de implicações** e as do tipo ***A se e somente se B*** **de bicondicionais** que devem ser interpretadas como ***se A então B e se B então A.***

Usamos ainda outras expressões em Matemática para descrever implicações, são elas: ***Condição suficiente e condição necessária.***

Exemplos:

1. Uma condição suficiente para que meu time seja campeão é que ganhe todos os jogos.

Podemos escrever a sentença acima da seguinte forma:

Se meu time ganhar todos os jogos, então será campeão.

O exemplo acima mostra que uma sentença escrita da forma ***A é condição suficiente para B*** representa a implicação ***se A então B.*** Esta sentença não pode ser lida como.

Se meu time for campeão, então terá ganho todos os jogos.

Quando se diz A é suficiente para B estamos lendo que A implica B.

2. Uma condição necessária para que uma função seja bijetiva é que ela seja sobrejetiva.

Podemos escrever a sentença da seguinte forma:

Se uma função for bijetiva, então será sobrejetiva.

Quando se diz que A é condição necessária para B estamos lendo que B implica A.

É bom destacar que uma sentença escrita na forma A é condição necessária para B corresponde à implicação ***se não A, então não B.*** Isto é, se uma função não for sobrejetiva, então não será bijetiva.

Existem casos em que condição suficiente e condição necessária são aplicadas simultaneamente pela expressão ***condição necessária e suficiente,*** que nada mais é do que outra forma de escrita do conectivo ***se e somente se.*** Veja um exemplo:

Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero Q seja um paralelogramo é que tenha os pares de lados opostos paralelos.

Esta sentença pode ser reescrita da seguinte forma:

Seja Q um quadrilátero, Q é paralelogramo se, e somente se, possuir lados opostos paralelos.

Temos ainda duas importantes noções relacionadas com implicações: A **Recíproca** e a **Contra positiva.** Dada uma implicação **se A então B**, dizemos que a implicação **se B então A** é a sua **Recíproca** e que a implicação **se não B, então não A** é sua **contra positiva.**

É preciso esclarecer que a recíproca de uma implicação nem sempre é uma proposição verdadeira e que é equivalente a sua contra positiva. Veja o exemplo abaixo:

Seja n um número natural diferente de 2, se n for primo, então será impar.

Reciproca:

Seja n um número natural diferente de 2, se n for impar, então será primo.

Contra positiva:

Seja n um número natural diferente de 2, se n não for ímpar, então não será primo.

Note que a afirmação do exemplo é verdadeira, pois sabemos que o único primo par é o número 2. Mas, a recíproca é falsa, pois o número 9 é ímpar, porém não é primo.

Um bom exemplo sobre a equivalência de uma afirmação e de sua contra positiva é que tempos atrás se vinculou propagandas a respeito do perigo que é dirigir após ingerir bebidas alcóolicas. A propaganda era bem assim:

"Se dirigir não beba e se beber não dirija."

Considere as proposições:

P: Se dirigir, então não beba.

Q: Se beber, então não dirija.

Repare que Q é a contra positiva de P, logo P e Q são equivalentes não havendo a necessidade de dizer as duas frases, basta uma, pois a outra tem o mesmo significado.

Podemos usar símbolos para representar os conectivos. Veja:

Conectivos	**Símbolos**	**Classificação**
e	$\wedge$	**conjunção**
ou	$\vee$	**disjunção**
não	$\neg$	**negação**
se, então	$\Rightarrow$	**Implicação**
Se, e somente, se	$\Leftrightarrow$	**Bi implicação**

Veja alguns exemplos:

1. 10 é par e 5 é impar

Seja:

p: 10 é par

q: 5 é impar

Então, a sentença simbolizada é p $\wedge$ q.

2. Paulo é professor ou Paulo é médico.

Seja:

p: Paulo é professor

q: Paulo é médico

Então, a sentença simbolizada é p $\vee$ q.

3. Fidelis não usa óculos

p: Fidelis usa óculos

Então, $\neg$p.

4. Se um triângulo for isósceles, então pelo menos dois lados são congruentes.

p: Se um triângulo for isósceles

q: Pelo menos dois lados são congruentes

Então, a sentença simbolizada é p $\Rightarrow$ q.

5. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, os ângulos opostos são suplementares.

p: Quadrilátero é inscritível

q: ângulos opostos são suplementares

Então, a sentença simbolizada é p $\Leftrightarrow$ q.

6. Dada uma função f, uma condição suficiente para que f seja bijetora é que f seja injetora e sobrejetora.

Este exemplo pode ser reescrito da seguinte forma:

Dada uma função f, se f for injetora e f é sobrejetora, então f é bijetora.

p: f é injetora

q: f é sobrejetora

r: f é bijetora

Sentença simbolizada: $(p \wedge q) \Rightarrow r$

7. Uma condição necessária para que duas retas r e s sejam paralelas é que elas sejam coplanares e não se intersectem.

Este exemplo pode ser reescrito da seguinte forma.

Se as retas r e s são paralelas, então r e s são coplanares e não se intersectam.

Seja:

p: As retas r e s são paralelas

q: As retas r e s são coplanares

r: As retas r e s se intersectam,

Simbolizando obtemos: $p \Rightarrow (p \wedge \neg r)$.

Podemos propor aos alunos construções de tabelas verdades mostrando-os que o valor lógico de uma sentença depende dos conectivos que estão sendo usados na sua formação. Os alunos devem saber que:

- A conjunção $A \wedge B$ é verdadeira exatamente quando as sentenças A e B são verdadeiras, e falsa nos demais casos.

A	B	$A \wedge B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

- A disjunção $A \vee B$ é verdadeira exatamente quando A é verdadeira ou B é verdadeira, incluindo-se o caso em que as duas são verdadeiras. A disjunção é falsa quando ambas as sentenças forem falsas.

A	B	$A \vee B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

- A negação $\neg A$ será verdadeira quando A for falsa e será falsa quando A for verdadeira.

A	$\neg A$
V	**F**
F	**V**

- O conectivo 'se ... então' ($A \Rightarrow B$) é falsa apenas no caso em que A é verdadeira e B é falsa.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

- O conectivo ' se e somente se' $(A \Leftrightarrow B)$ é verdadeira quando as duas sentenças A e B forem verdadeiras e falsa caso contrário.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vejam dois problemas que podemos resolver usando as ideias acima:

1. considerem que num dado contexto, são verdadeiras as sentenças ' Pedro gosta de jogar futebol' e ' Ou Pedro gosta de jogar futebol ou Pedro gosta de jogar basquete, exclusivamente', determine o valor de verdade da seguinte implicação

'Se Pedro não gosta de jogar basquete, então ele não gosta de jogar futebol'.

Resolução:

Considere,
p: Pedro gosta de jogar futebol.
q: Pedro gosta de jogar basquete.
Sabemos que a sentença A → B só é falsa no caso de A ser verdadeira e B ser falsa.
Devemos avaliar a sentença: ¬ q → ¬ p. Note que ¬ p é falsa já que p é verdadeira. Este fato nos leva a concluir que o valor lógico de ¬ q → ¬ p dependerá do valor lógico da sentença ¬ q.
Por outro lado, temos que p ∨ q é verdadeira, mas não ocorre p ∧ q, isto é, p ∧ q é falsa. Como p é verdadeira, q é obrigatoriamente falsa, pois p ∧ q só é verdadeira para ambas verdadeiras.
Logo, ¬ q é verdadeira e a sentença ¬ q → ¬ p é FALSA.

2. Entre três amigos, Alberto, Carlos e Eduardo, temos um estatístico, um geógrafo e um matemático, destacando que cada um tem exatamente uma profissão, dentre as três indicadas. Determine a profissão de cada um dos três, sabendo que APENAS uma das três afirmações seguintes é verdadeira:

I. Alberto é geógrafo.
II. Carlos não é estatístico.
III. Eduardo não é geógrafo.

Resolução:

Se (I) for verdadeira, então (III) também seria já que cada um possui uma única profissão. Mas isto contradiz a condição de que apenas uma das três afirmações é verdadeira. Logo, (I) é falsa, isto é, Aberto não é geógrafo.
Se Carlos for o geógrafo, a (II) seria verdadeira e então (III) seria falsa, isto é, Eduardo seria o geógrafo, mas isto não pode acontecer, pois cada um possui uma única profissão. Portanto, Carlos não é geógrafo.
Logo, Eduardo é o geógrafo, ou seja, a (III) é falsa e então a (II) é verdadeira. Neste caso, Carlos é matemático e Alberto é estatístico.
Finalmente temos:
Aberto é o estatístico, Carlos é o matemático e Eduardo o geógrafo.

2ª Etapa

5. Métodos de Prova em Matemática

5.1. Método Direto.

Os teoremas em Matemática são do tipo 'Se A, então B'. Para provarmos estes tipos de afirmações podemos utilizar o Método Direto, que toma a premissa (A) como hipótese, isto é assume que A é verdadeira e a partir daí prova que a tese (B) é verdadeira. Por exemplo:

1. Provar que o quadrado de um número ímpar é ímpar.

A afirmação acima pode ser enunciada da seguinte forma:
Seja n um número natural. Se n é ímpar, então n^2 é impar.
Prova:

Veja que temos como Hipótese o fato de n ser ímpar e como tese que n² é impar.

Todo número ímpar pode ser escrito na forma n = 2k -1 onde k é um natural qualquer. Neste caso, $n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$. Note que n² está escrito na forma 2k' + 1 que é um número impar para todo k' natural. □

De forma inteiramente análoga, se n é par então n² é par.

O professor pode deixar o exemplo acima como exercícios para os alunos tentarem resolver.

Nota: O símbolo '□' quer dizer que a demonstração acabou. Também são usadas as abreviações *'QED' e 'CQD',* que significam respectivamente '*Quod Erat Demonstradum' e ' Como Queríamos Demonstrar'*.

Outro exemplo:

2. Se em um triângulo dois lados são desiguais, ao menor lado opõe-se o maior ângulo.

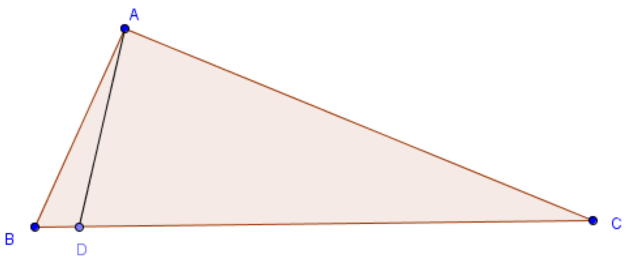


Figura 08: Triângulo

Prova:

Seja o triângulo ABC onde suporemos que BC > AC. Vamos provar que $\angle BAC > \angle ABC$.

Como BC > AC, então existe um ponto D entre B e C tal que AC = CD. Assim, o triângulo ACD é isósceles e, portanto, $\angle CAD = \angle CDA$.

Por outro lado, pelo teorema do ângulo externo, temos que $\angle CDA > \angle CBA$. Mas, $\angle BAC > \angle CAD = \angle CDA$, logo $\angle BAC > \angle CDA > \angle ABC_{CQD}$

5.2. Método da Redução ao Absurdo

O método de redução ao absurdo, também chamado de prova por contradição, é utilizado para provar negações, isto é, sendo A uma sentença, o método consiste em gerar um absurdo, ou uma impossibilidade, ao admitirmos a sentença A como falsa. Neste caso, como sabemos que pelo **Princípio do Terceiro Excluído,** que garante que uma proposição só pode ser falsa ou verdadeira, provaremos o resultado do teorema.

Como exemplo deste método, vamos provar o clássico problema de mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Prova:

Suponha que a proposição acima seja falsa, isto é que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Como sabemos todo número racional pose ser escrito na forma de uma fração $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$.

Elevando os dois lados da igualdade $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ao quadrado obtemos $2 = \frac{p^2}{q^2}$, ou seja, $p^2 = 2q^2$ que significa que o quadrado de p é um número par e portanto que p é um número par logo, do tipo p = 2k, com k inteiro. Fazendo a substituição de p = 2k, teremos $4k^2 = 2q^2$, ou seja, $q^2 = 2k^2$ e portanto que o quadrado de q é um número par, logo q é par. Mas veja, chegamos à conclusão anteriormente de que p é par. Agora concluímos que q também é par. Isto contradiz a hipótese de que p e q são primos entre si. Note que supondo a proposição falsa geramos um absurdo, então a proposição é verdadeira provando-a.

É bom destacar, que dentro do Método da Redução ao Absurdo, temos a chamada **Dupla Redução ao Absurdo**, que consiste numa forma eficaz de se provar que uma grandeza Matemática é igual, menor ou maior do que outra. Se pretendermos provar que ela é maior do que outra, supomo-la igual e menor, gerando absurdos para estes fatos.

Veja o seguinte exemplo.

3. **Se em um triângulo dois ângulos são desiguais, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.**

Prova:

Considere o triângulo ABC no qual, suporemos que, $\angle ABC > \angle ACB$. Vamos provar que o lado AC > AB.

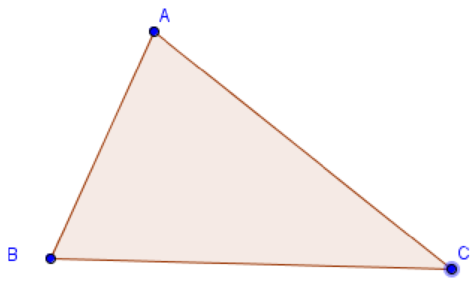


Figura 09: Triângulo ABC.

Veja que temos três possibilidades. Uma e apenas uma das possibilidades abaixo pode ocorrer.

I. AC > AB
II. AC = AB
III. AC < AB

Se AC = AB, então o triângulo ABC seria isósceles e neste caso, $\angle ABC = \angle ACB$. Mas, isto é um absurdo, pois por hipótese $\angle ABC > \angle ACB$. Por outro lado, se AC < AB, então pelo exemplo 2 acima $\angle ABC < \angle ACB$ que também contradiz a hipótese. Note que AC = AB e AC > AB geram absurdos e, portanto não podem ocorrer. Sendo assim, a única possibilidade é AC > AB. □

5.3. O Método da Contra Positiva

Sabemos que a implicação 'Se A, então B' é equivalente à sua contra positiva, isto é, equivalente à implicação 'Se não B, então não A'.
Existem situações que, provar a contra positiva de uma implicação é mais viável do que provar a implicação pelo método direto. Veja os exemplos abaixo:

1. Prove que se o quadrado de um número natural é par, então o número é par.

Prova:
Seja n um número natural. Se n^2 é par, então vamos provar que n é par.
Se n não for par, isto é, se n for impar, então já provamos, no primeiro exemplo do tópico 1 que n^2 é impar. Veja que se n não par, implica em n^2 não se par, então se n^2 for par implica n par. □

2. Dados números reais x, y e z, tais que x > y, mostre que se xz < yz, então z < 0.

Prova:
Vamos escrever a contra positiva da proposição acima.
Dados números reais x, y e z, tais que x > y, se $z \geq 0$, então $xz \geq yz$.
Vamos provar a contra positiva.
Se $z \geq 0$, então z = 0 ou z > 0.
Se z = 0, então xz = yz.
Se z > 0, então como x > y, temos que xz > yz.
Portanto, se $z \geq 0$, então $xz \geq yz$. □

5.4. O Método da Indução Matemática

Em Matemática temos que tomar muito cuidado com generalizações. É comum entre os estudantes dos ensinos Fundamental e Médio, após a tentativa de casos particulares generalizarem resultados, isto é, sejam induzidos a conclusões duvidosas ou até mesmo falsas. Por exemplo, alguém tentando descobrir a fórmula do termo geral da sequencia (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...), afirma que tal, fórmula é dada por: $a_n = \dfrac{n^2+n}{2}$. Veja que,

- para n = 1, $a_1 = \dfrac{1^2+1}{2} = 1$

- para n = 2, $a_2 = \dfrac{2^2+2}{2} = 3$
- para n = 3, $a_3 = \dfrac{3^2+3}{2} = 6$
- para n = 4, $a_4 = \dfrac{4^2+4}{2} = 10$
- para n = 5, $a_5 = \dfrac{5^2+5}{2} = 15$

Observe que até o momento está dando tudo certo. Mas será que dará certo para n = 6? E para n = 10? E para n = 1 000 000? Será que o resultado vai se manter? É claro que estas perguntas podem ser facilmente e rapidamente respondidas, pois hoje temos calculadoras e computadores capazes de resolver os cálculos acima com tranquilidade. Porém, para provarmos que a fórmula está certa, teríamos que verificá-la para todos os números naturais. Como isto não é possível deve existir um método que garanta sua veracidade.

Por outro lado, a verificação de um resultado por meras tentativas podem nos levar a conjecturas falsas. Por exemplo, considere a sequencia definida pela lei de formação $a_n = n^2 - n + 17$. Vamos fazer algumas substituições e comprovar que os resultados são números primos.

- n = 1 $\Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 + 17 = 17$ (primo)
- n = 2 $\Rightarrow a_2 = 2^2 - 2 + 17 = 19$ (primo)
- n = 3 $\Rightarrow a_3 = 3^2 - 3 + 17 = 23$ (primo)
- n = 4 $\Rightarrow a_4 = 4^2 - 4 + 17 = 29$ (primo)
- n = 5 $\Rightarrow a_5 = 5^2 - 5 + 17 = 37$ (primo)

Acabamos de descobrir uma fórmula que gera números primos. Os matemáticos desde antes de Cristo estão à procura desta fórmula. É claro que não podemos generalizar desta maneira. Curiosamente, até para n = 16, o resultado é um número primo, porém tente n = 17 e note que $a_{17} = 17^2 - 17 + 17 = 289$ que não é um número primo, pois é evidentemente divisível por 17. Desta maneira, a nossa conclusão de que o resultado é sempre um número primo é falsa. Repare que basta um resultado não ser primo para garantir a falsidade da conjectura. A este tipo de exemplo chamamos de contraexemplo.

Conta a história que Fermat (Pierre de Fermat 1601-1665) disse que os números gerados pela expressão $F_n = 2^{2^n} + 1$, são primos o que é verdade para n = 1, 2, 3 e 4. Porém, somente no século

XVIII o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) deu um contraexemplo, mostrando que a conjectura de Fermat era falsa. Euler verificou que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297$ era divisível por 641. Na verdade, $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$, mostrando que n = 5 é um contraexemplo para a conjectura.

Antes de falarmos no Método da indução, vamos comentar sobre os Axiomas de Peano. Giuseppe Peano (1858-1932) foi um Matemático Italiano que fez contribuições teóricas nas áreas de Análise, Lógica, Teoria dos Conjuntos e Análise Vetorial. Autor de vários livros foi fundador da moderna lógica Matemática e da Teoria dos Conjuntos. Na obra "Arithmetica Principia Nova Methodo Exposita" de 1889 desenvolveu os chamados Axiomas de Peano, que são considerados até hoje como a axiomatização padrão dos números naturais. Peano adotou o método axiomático que consiste na fixação de alguns elementos primitivos e princípios que descrevem as suas propriedades essenciais. Além disso, as propriedades decorrentes desta caracterização são firmadas por meio de demonstrações, que por sua vez obedecem a critérios, regras e métodos estabelecidos pelo sistema lógico dedutivo.

Abaixo escrevemos os axiomas de Peano.

a) Todo número natural tem um único sucessor;
b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
d) Seja X um conjunto de números naturais. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Este último axioma é conhecido como axioma da indução que é base para um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais. Este axioma enunciado sob a forma de propriedades fica com a seguinte forma:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

I. $P(1)$ é válida;
II. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Para provarmos uma propriedade referente a números naturais, tomamos um conjunto X, constituído de todos os números naturais que tem a propriedade P:

$X = \{k \in \mathbb{N}; P(k)\}$

Se provarmos que:

I. O número 1 tem a propriedade P, e que

II. Para qualquer natural k, se k tem a propriedade P, então k + 1 também tem a propriedade P;

Então o axioma de indução nos garantirá que $\mathbb{N} \subseteq X$, o que determina que $X = \mathbb{N}$. Logo, teremos que $n \in X$, para todo natural n. Daí, concluímos que todo natural n tem a propriedade P.

Na prova por indução, a prova do item (I) é chamada de Base de Indução, a suposição de que k tem a propriedade P é chamada de Hipótese de Indução e a prova de k + 1 também tem a propriedade P e denominada de Passo de Indução.

Agora vamos resolver exemplos usando o Método da Indução.

1. Para todo natural n, mostre que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Prova:

A propriedade P é a igualdade $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

(I) Para n = 1, temos que $2.1 - 1 = 1 = 1^2$. (Base de Indução)

(II) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para certo número natural k, isto é, $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$. (Hipótese de indução).

Agora precisamos mostrar que a propriedade é válida para n = k + 1, ou seja, que $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$. (Passo de Indução).

De fato:

Note que, por hipótese de indução, $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$. Então, $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. □

2. Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 7^n - 1$ é um número divisível por 6.

Prova:

(I) Base de Indução: Para n = 1, temos que $a_1 = 7^1 - 1 = 6$ que obviamente é divisível por 6.

(II) Hipótese de indução: Suponha que a propriedade seja verdadeira para n = k, isto é, que $a_k = 7^k - 1$ é um número divisível por 6.

Passo de Indução: Vamos mostrar que $a_{k+1} = 7^{k+1} - 1$ é um número divisível por 6.

De fato:

Veja que $a_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7.7^k - 1 = (7^k - 1) + 6.7^k$. Note que por hipótese de indução $(7^k - 1)$ é divisível por 6 e que 6.7^k também é. Portanto, $a_{k+1} = 7^{k+1} - 1$ é um número divisível por 6. □

Existem propriedades que são verificadas para números naturais maiores ou iguais que certo número natural k_0. Para resolver problemas deste tipo, podemos recorrer a uma generalização do Método da Indução. Veja:

Seja P uma propriedade referente aos números naturais.

Se provarmos que:

I. O número k_0 tem a propriedade P, e que

II. Para todo natural $k \geq k_0$, se k tem a propriedade P, então k + 1 também tem a propriedade P;

então concluiremos que todo natural $n \geq k_0$ tem a propriedade P.

Vamos resolver dois exemplos:

1. Mostre que para todo natural $n \geq 3$, a soma de todos os ângulos internos de um polígono convexo é dado pela expressão $S_n = 180°(n-2)$.

Prova:

(i) Para n = 3, temos que $S_3 = 180°(3-2) = 180°$. Mas, para n = 3 o polígono é um triângulo e como sabemos da geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(ii) Suponha que a afirmação seja verdadeira para um número natural $k \geq 3$, isto é, a soma S_k dos ângulos internos de um polígono de k lados é dada pela igualdade $S_k = 180°(k-2)$.

Considere um polígono convexo com k + 1 lados e sejam $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, A_{k+1}$ seus vértices consecutivos. Vamos mostrar que a soma dos seus ângulos internos é dada por $S_{k+1} = 180°(k-1)$.

Traçando a diagonal A_1A_3, o polígono fica dividido em um triângulo de vértices A_1, A_2, A_3, mais um polígono convexo de k lados. Agora veja que, a soma dos ângulos internos do polígono com k + 1 lados é igual a soma dos ângulos internos do triângulo mais a soma dos ângulos internos de um polígono de k lados. Utilizando a hipótese de indução, temos que:

$S_{k+1} = S_k + 180° \Rightarrow S_{k+1} = 180°(k-2) + 180° = 180°(k-1)_{CQD}$

2. Para $n \geq 7$, mostre que $n! > 3^n$.

Prova:

Seja P(n) a proposição: se $n \geq 7$, então $n! > 3^n$.

(I) n = 7, $7! = 5040 > 3^7 = 2187$.

(II) Suponha P(n) é verdadeira para todo natural $k \geq 7$, isto é, $k! > 3^k$.

Vamos mostrar que P(n) continua verdadeira para n = k + 1, isto é, $(k+1)! > 3^{k+1}$.

Se $k \geq 7$, então k + 1 > 3 e portanto k!(K + 1) > 3(k!) ou ainda (k + 1)! > 3(k!). Mas, por hipótese de indução $k! > 3^k$, logo (k + 1)! > $3.3^k = 3^{k+1}$ .CQD

3ª Etapa

6. Atividades na sala de informática

Neste capítulo vamos propor atividades que serão aplicadas na sala de informática nos programas Geogebra e Régua e Compasso. Indicaremos as séries que as mesmas podem ser aplicadas e desenvolvidas pelos alunos. Vamos propor pelo menos duas atividades para cada ano dos ensinos Fundamental e Médio, tentando abordar os principais assuntos ministrados nestas séries sem fugir à matéria da sala de aula. Um ponto importante para a realização das atividades, é que os alunos precisam de conhecimentos prévios de Geometria tais como: Pontos, retas, planos, tipos de ângulos, bissetriz de um ângulo, ângulos formados por duas paralelas e uma transversal entre outros.

É claro que o professor precisa estar familiarizado com as ferramentas básicas dos softwares que serão utilizados nas tarefas. Antes das atividades, os alunos precisam de aulas para manipular as ferramentas básicas dos programas e saibam construir figuras simples tais como triângulos, quadriláteros, polígonos, círculos etc. Repito que o objetivo do trabalho não é um curso de Geogebra e nem de Régua e Compasso, queremos que os alunos entendam as etapas básicas de uma demonstração, que demonstrem pequenos teoremas sendo auxiliados pelos programas citados.

Atividade 01. Verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Perceber que para qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180º.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do Geogebra.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do Geogebra;
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa;

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental.

Desenvolvimento:

Atividade com o Geogebra na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Cada aluno ou dupla de alunos, em uma máquina, realizará as etapas da atividade abaixo:

- Abra a página principal do Geogebra.
- Clique no ícone triângulo e construa um triângulo.
- Clique no ícone ângulo exibindo os três ângulos Internos do triângulo.
- Agora, sem calculadora, calcule a soma dos ângulos que apareceram na tela.
- Clique no ícone arrastar ponto e modifique à vontade seu triângulo.
- Para cada modificação que você fez, calcule a soma dos ângulos que aparecem.
- O que você observou?
- Agora vá ao campo de entrada e digite $\alpha + \beta + \gamma$.
- Observe na janela de Álgebra. O resultado da soma é igual ao que você encontrou?
- Tire suas conclusões a respeito desta atividade.

Neste momento o professor abrirá a aula para um pequeno debate ouvindo as respostas dos alunos em relação à atividade executada. Em seguida pedirá que os alunos, em casa, tentem provar o seguinte teorema:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Atividade 02: Verificar que se um ponto está sobre a bissetriz de um ângulo, as distâncias desse ponto aos lados do ângulo são iguais.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Perceber que qualquer ponto pertencente à bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo.
- Usar congruência de triângulos para demonstrar formalmente a propriedade.
- Saiba escrever a recíproca de um teorema corretamente.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do Geogebra.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do Geogebra.
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental.

Desenvolvimento:

Atividade com o Geogebra na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Cada aluno ou dupla de alunos, em uma máquina, realizará as etapas da atividade abaixo:

Definição: Bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos adjacentes congruentes.

Roteiro:

- Abra a tela principal do Geogebra.
- Clique no ícone "exibir" e oculte a janela de álgebra.
- Clique no ícone ângulo e construa um ângulo qualquer.

- Trace as retas AB e BC.
- Trace a bissetriz do ângulo ABC.
- Marque um ponto D sobre a bissetriz D≠B.
- Trace perpendiculares de D em relação aos lados do ângulo.
- Marque a interseção entre as perpendiculares e os lados do ângulo.
- Trace os segmentos DE e DF.
- Oculte as retas DE e DF.
- Agora mova à vontade os pontos livres modificando o ângulo.
- O que você observa em relação aos comprimentos dos segmentos DE e DF?
- Exiba a janela de álgebra e compare os comprimentos destes dois segmentos.

O professor pedirá então que os alunos demonstrem este resultado para a próxima aula.

Nesta mesma atividade, o professor pode pedir aos alunos que escrevam a recíproca desta proposição, e claro provando-a em seguida.

Recíproca

Se as distâncias de um ponto aos lados de um ângulo são iguais, então o ponto está sobre a bissetriz desse ângulo.

Atividade 03: Verificar que as distâncias de um ponto da mediatriz de um segmento às suas extremidades são iguais.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Perceber que qualquer ponto pertencente à mediatriz de um segmento equidista dos extremos do segmento.
- Usar congruência de triângulos para demonstrar formalmente a propriedade.
- Saber enunciar a recíproca de um teorema.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do Geogebra.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do Geogebra.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental.

Desenvolvimento:

Atividade com o Geogebra na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Definição: *Mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.

Roteiro:

- Trace o segmento AB.
- Trace a mediatriz de AB, chamando de M o ponto médio.
- Marque um ponto P sobre a mediatriz.
- Trace os segmentos PA e PB.
- Arraste os objetos livres e observe os comprimentos dos segmentos PA e PB.
- O que podemos concluir?
- Escreva uma conjectura a respeito do roteiro acima.
- Escreva a recíproca de sua conjectura.

Os alunos serão levados à sala de informática para a execução da tarefa e ficarão livres para manipulação do Geogebra ou do Régua e Compasso, dependendo de qual programa o professor esta tralhando. Após a verificação por parte do professor, este pedirá para a próxima ou na própria aula a demonstração formal da conjectura e da recíproca.

Os alunos do 7º e 8º anos já têm contatos com os primeiros conceitos da Geometria, tais como: ângulos, triângulos, quadriláteros e polígonos em geral. Fica a cargo de o professor elaborar tarefas para serem desenvolvidas nos programas, tarefas estas que abordem conhecimentos de congruência de triângulos, soma dos ângulos internos de polígonos, propriedade do ângulo externo do triângulo, soma dos ângulos externos dos polígonos, propriedades de trapézios, paralelogramos retângulos, losangos e quadrados, entre muitas outras, que dependeram exclusivamente da criatividade de cada professor.

As próximas atividades serão destinadas aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Nesta série, os alunos são apresentados a uma grande quantidade de conteúdos de Geometria Plana tais como: Teorema de Tales, Semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras, as relações métricas dos triângulos retângulos e áreas das principais figuras planas.

Vamos propor algumas e fica a cargo do professor elaborar outras de acordo com o conteúdo que estiver trabalhando em sala de aula.

Atividade 04: Verificar que se dois triângulos possuem dois ângulos de um congruente a dois ângulos do outro então, os dois triângulos são semelhantes.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Entender o chamado caso AA de semelhança de triângulos.
- Usar o teorema de Tales para demonstrar formalmente a propriedade.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do ReC.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do ReC.
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

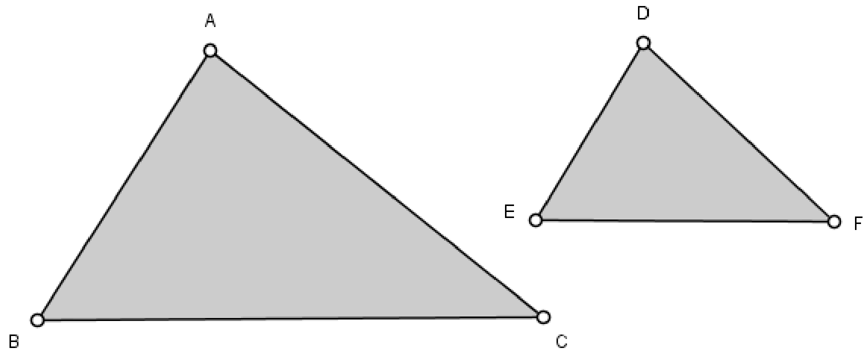
Desenvolvimento:

Atividade com o ReC na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Cada aluno ou dupla de alunos, em uma máquina, realizará as etapas da atividade abaixo:

Definição: Dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Isto é:



Se ABC **e** DEF **são triângulos semelhantes e se** $A \to D$**,** $B \to E$ **e** $C \to F$ **é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:**

$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.

A razão comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamada de razão de proporcionalidade ou razão de semelhança entre os dois triângulos.

Roteiro:

- Abra a tela principal do ReC.
- Construa os triângulos ABC e DEF.
- Clique no ícone ângulo e exiba os ângulos BAC, ABC, EDF e DEF.
- Clique com o botão direito do mause sobre os lados do triângulo e exiba as medidas dos segmentos AB, AC, BC, DE DF e EF.
- Clique no ícone expressão aritmética e crie as expressões que determinam as razões AB/DE, AC/DF e BC/EF.
- Mova os vértices dos triângulos deixando os ângulos assinalados com as mesmas medidas.
- Observe os valores das razões acima.
- O que podemos concluir com esta observação?

O professor pedirá então que os alunos tentem provar este caso de semelhança em casa, podendo consultar livros ou a internet para buscar informações.

Para a próxima atividade, o professor pode pedir os alunos, que já estão familiarizados com as ferramentas básicas do ReC, para organizem um roteiro para perceber o chamado caso LAL de semelhança de triângulos.

Atividade 05: Verificar o chamado caso LAL de semelhança de triângulos.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Entender o chamado caso LAL de semelhança de triângulos.
- Usar o teorema de Tales para demonstrar formalmente a propriedade.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do ReC.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do ReC.
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Desenvolvimento:

Atividade com o ReC na sala de informática: (duração: 50 minutos)

O professor pedirá então que os alunos tentem provar este caso de semelhança, em casa, podendo consultar livros ou a internet para buscar informações.

Roteiro:

- Construa dois triângulos ABC e DEF.
- Marque os ângulos BAC e EDF exibindo seus valores.
- Clique com o botão direito do rato sobre o segmento AB.
- Fixe este segmento e mude seu comprimento exibindo-o.
- Repita o procedimento para os segmentos AC, DE e DF.
- Mude os comprimentos destes segmentos de tal forma que AB/DE = AC/DF.
- Por exemplo:

- AB = 4, AC = 2, DE = 6 e DF = 3.
- Crie as expressões algébricas referentes às razões:
- AB/DE, AC/DF e BC/EF exibindo-as.
- Agora mova os Vértices dos triângulos deixando sempre BAC = EDF.
- Observe os resultados de BC/EF.
- Conclua a respeito dos resultados encontrados de acordo com nossas aulas de semelhança de triângulos.

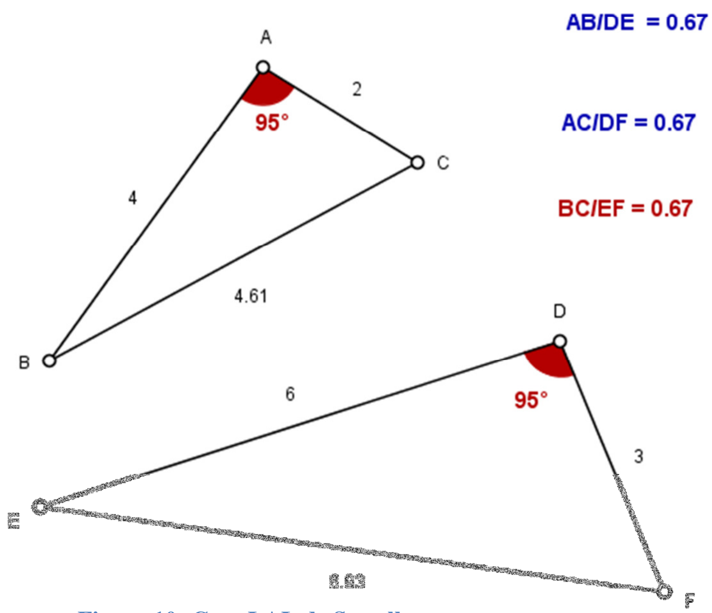


Figura 10: Caso LAL de Semelhança

Não podemos deixar de fora das atividades o famoso Teorema de Pitágoras. Vamos organizar uma atividade para que os alunos entendam a verdadeira essência deste teorema. Antes precisaremos desenvolver atividades que funcionarão como pré-requisito para atividade 6. Dividiremos em três roteiros esta atividade.

Atividade 06-a: Construção de um triângulo retângulo.

Esta atividade tem como objetivo a construção de um triângulo retângulo, de forma que ao arrastarmos seus vértices a propriedade de ser retângulo fique preservada. Seria interessante o professor passar a atividade sem o roteiro, deixando o aluno pensando na estratégia de uma construção com tal propósito.

Roteiro:

- Abra a tela principal do ReC.
- Trace uma reta passando por dois pontos A e C.
- Pelo ponto C trace uma perpendicular à reta anterior.
- Trace uma reta passando por A e intersectando a perpendicular no ponto B.
- Agora trace os segmentos AB, AC, e BC.
- Oculte as retas traçadas anteriormente.
- Exiba o ângulo ACB, confirmando que o mesmo é reto.
- Arraste os elementos livres notando que a propriedade de ser retângulo fica preservada.

Atividade 06-b: Construção de um quadrado.

A ideia é a mesma da atividade anterior. O aluno deve primeiramente tentar construir um quadrado de forma que arrastando os elementos livres a propriedade de ser quadrado se mantenha.

Roteiro:

- Abra a tela principal do ReC.
- Construa um círculo de raio variável.
- Trace o raio unindo os dois pontos que aparecem na tela.
- Trace perpendiculares ao raio passando por suas extremidades.
- Trace uma perpendicular a uma destas duas retas, marcando o ponto de intersecção com o círculo.
- Agora marque o ponto de intersecção que está faltando.
- Oculte todos os elementos deixando apenas os quatro pontos.
- Trace os segmentos unindo estes pontos formando um quadrilátero.
- Exiba os quatro ângulos, comprovando que são retos.
- Nomeie os vértices.

- Arraste os elementos livres verificando que a propriedade de ser quadrado está mantida.

Para a atividade 6, vamos entregar para os alunos o roteiro da construção da figura abaixo.

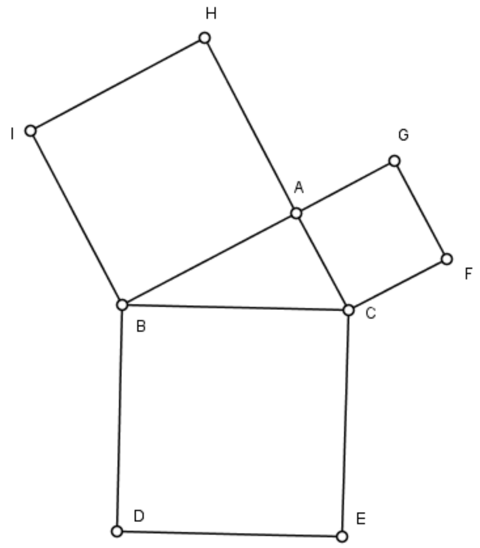


Figura 11: Teorema de Pitágoras

A intenção é que os alunos possam concluir que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa, é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Atividade 06-c: Teorema de Pitágoras.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Entender o que é o Teorema de Pitágoras.
- Entender a figura por trás do Teorema.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do ReC.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do ReC.
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Desenvolvimento:

Atividade com o ReC na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Cada aluno ou dupla de alunos, em uma máquina, realizará as etapas da atividade abaixo:

Roteiro:

- Abra a tela principal do ReC.
- Abra a Atividade 06-a gravada na aula anterior.
- Clique no ícone compasso e trace um círculo de raio AB.
- Repita o procedimento para a construção do quadrado da atividade 06-b.
- Faça o mesmo para os lados AC e BC

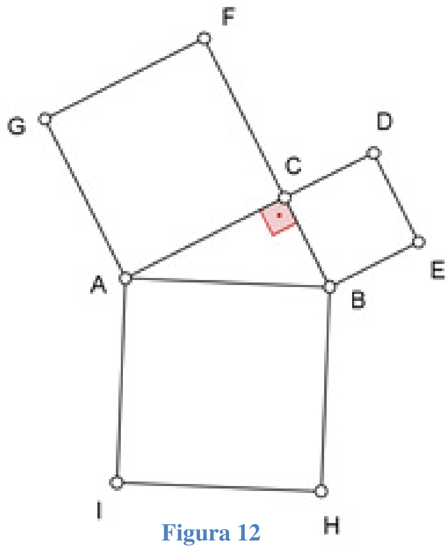


Figura 12

- Oculte os círculos e todas as retas deixando apenas a figura ao lado.
- Clique no ícone expressão aritmética e crie as expressões que determinam as áreas dos quadrados BCDE, ABHI e ACFG.
- Veja exemplo da janela que se abre para escrever uma expressão aritmética no ReC para o cálculo da área do quadrado ACFG.

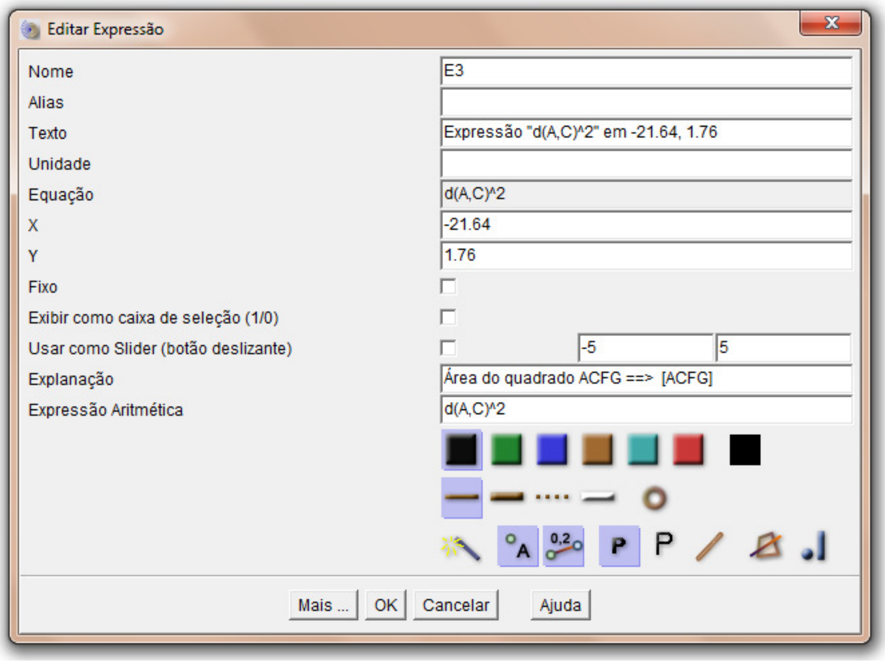


Figura 13: Campo Expressão Aritmética no ReC

- Peça ao aluno para movimentar os elementos livres da figura.
- Deixe o aluno conjecturar à vontade.
- Para a próxima aula, o professor exporá demonstrações do Teorema de Pitágoras.
- Abaixo tela final do roteiro.

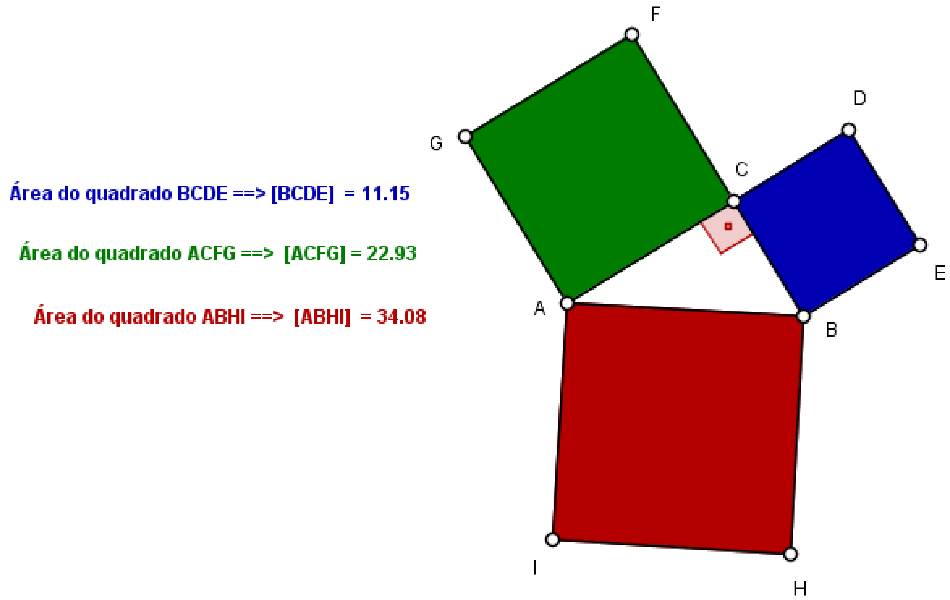


Figura 14: Teorema de Pitágoras

A próxima atividade será um pequeno projeto sobre um teorema que não é muito conhecido entre os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Estamos falando do teorema de Pick. Veja pequeno projeto abaixo.

Atividade 07: Tarefas que levarão o aluno reconhecer o teorema de Pick.

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Entender e saber aplicar o Teorema de Pick.
- Saber um pouco da história de Jorge Alexandre **Pick.**
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do ReC.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do ReC.

- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

Desenvolvimento:

Atividade com o ReC na sala de informática: (duração: 50 minutos para cada tarefa).

1ª Tarefa.

Esta tarefa tem a intenção de levar o aluno executar alguns comandos no ReC para conjecturar o teorema de Pick.

Roteiro:

- Abra o ReC em sua máquina;
- Clique no ícone plano cartesiano exibindo a malha de pontos;
- Clique no ícone polígono e construa um polígono simples com os vértices sobre pontos da malha;
- Exiba a área deste polígono;
- Clique no ícone ponto e marque os pontos que estão na fronteira do polígono e que estão no seu interior;
- Agora, conte o número de pontos que estão na fronteira do polígono e o número de pontos do interior do mesmo;
- Faça o seguinte cálculo: Pegue o número que você achou na primeira contagem e divida-o por dois, some o resultado com o segundo número que você achou e do resultado subtraia 1.
- Compare o seu resultado com a área fornecida pelo ReC.
- Reflita, foi uma mera coincidência? Verifique os resultados de seus colegas com as áreas dos polígonos que eles construíram. E agora, continua achando que foi uma coincidência?
- Mova os vértices de seu polígono deixando-os sobre pontos de coordenadas inteiras;
- Refaça os cálculos anteriores;

Neste momento, o professor irá aguardar as conclusões dos alunos. É claro que, certa confusão irá acontecer na sala de informática. O professor deve coordenar as conclusões para que o objetivo da tarefa não saia do foco.

Fala do professor: Parece que estamos diante de uma belíssima propriedade e eu acho que devemos investigar um pouco mais sobre ela. O que vocês acham?

Pesquisem na internet sobre o Teorema de Pick e tragam alguns resultados para a próxima aula.

Abaixo um exemplo de execução do roteiro acima.

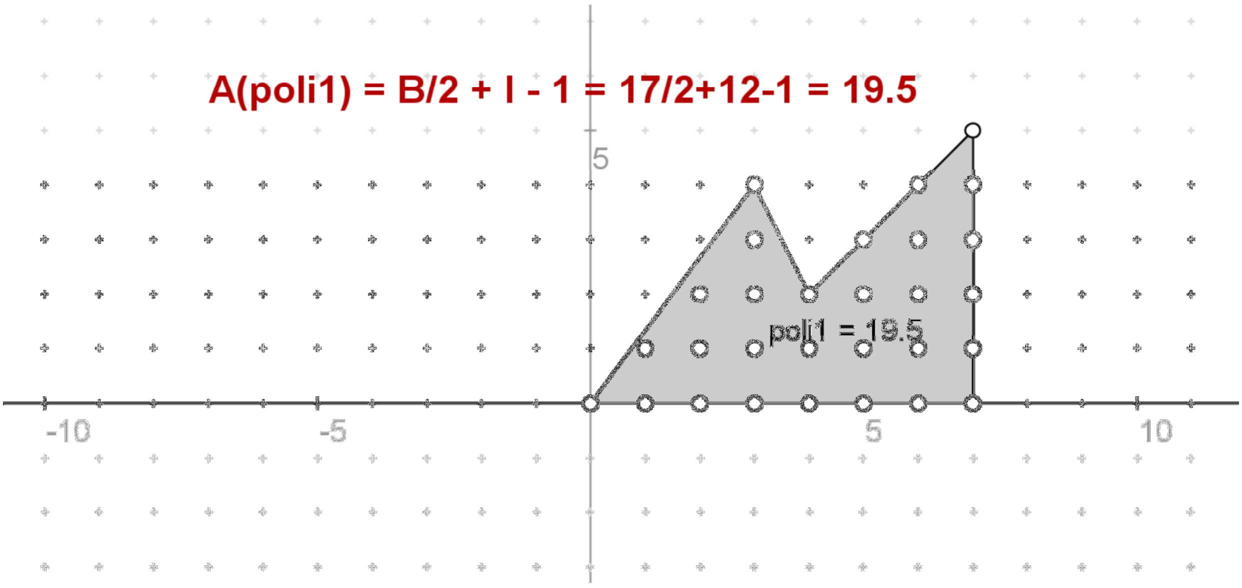


Figure 15: Conjectura do teorema de Pick

2ª Tarefa

Na próxima aula os alunos obviamente trarão diversos resultados sobre o teorema de Pick.

E aí o que vocês encontraram? Neste momento uma enxurrada de informações vai invadir a aula. O professor deve organizar pontuando os tópicos da seguinte forma:

1. Alguém trouxe informações sobre quem foi Pick?
2. O que ele provou?
3. Tem relação com a aula anterior?

Mediante as respostas dos alunos o professor começa sua aula expositiva sobre o Teorema de Pick.

Um pouco de História

George Alexander **Pick** foi um matemático, que nasceu em 1859, em Viena, capital da Áustria. Morreu em 1942, com 83 anos, num Campo de Concentração, durante e II Guerra Mundial, vítima de perseguição Nazista. A sua carreira profissional decorreu, essencialmente, na Universidade de Praga, embora tenha trabalhado e estado ligado a outras universidades da Europa. Pick desenvolveu trabalhos e publicou artigos científicos sobre vários domínios da Matemática, mas aquele que o tornou mais conhecido foi o Teorema com o seu nome, que permite calcular a área de polígonos **simples**, desenhados sobre uma malha reticular (em rede), pela simples contagem de pontos.

Teorema de PICK

Considere um polígono simples.

Seja **B** o número de pontos da fronteira do polígono e **I** o número de pontos do interior do polígono. Então a área do polígono é dada pela fórmula abaixo:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

O professor pode omitir a demonstração, já que a mesma foge ao propósito das atividades.

Neste momento o professor fala que o teorema de Pick serve para dar boas aproximações para áreas de figuras que não são poligonais.

Em seguida pede aos alunos para abrir o ReC em suas máquinas e cita o seguinte roteiro:

- Clique no ícone desenhar com o rato;
- Faça um desenho simples sem auto intersecções do jeito que quiser;
- Clique no ícone polígono e construa um que circunde o desenho que você fez o mais próximo possível. Não se esqueça de que o polígono deve ter vértices sobre pontos com coordenadas inteiras;
- Clique no ícone ponto e marque os pontos do interior do polígono;
- Use o teorema de Pick e calcule a área do polígono;
- Você concorda que a área da figura que desenhou é aproximadamente igual a do polígono?
- Veja um exemplo.

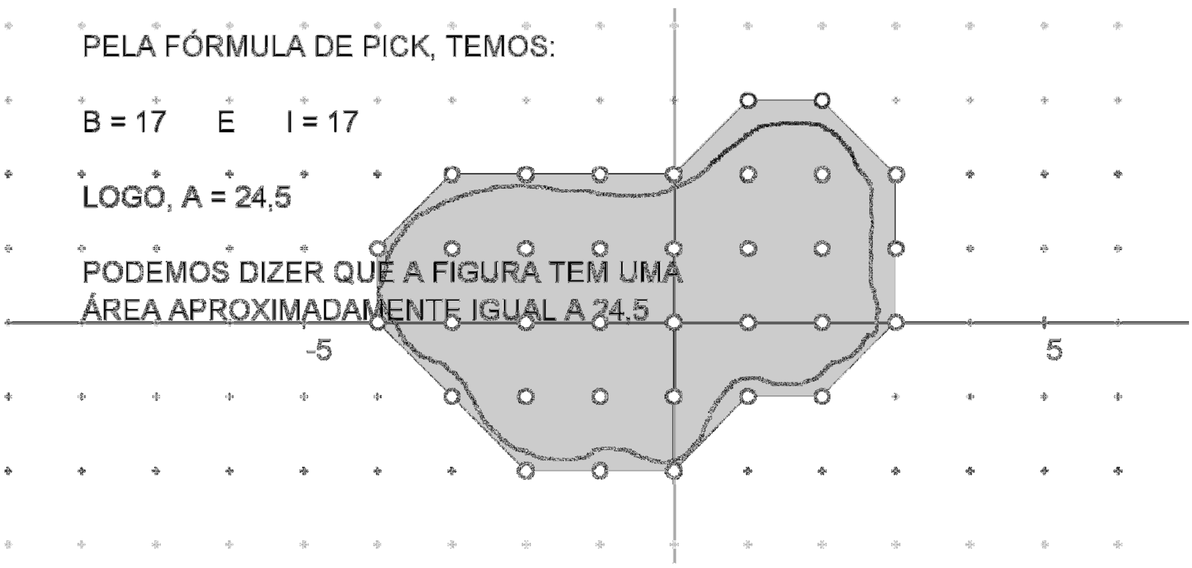


Figura 16: Aplicação do teorema de Pick

3ª Tarefa

Pesquisar sobre desmatamento na Amazônia. Escolher uma imagem de uma área desmatada. Depois os alunos vão transferir a imagem abaixo para o Rec e fazer uma estimativa para a área desmatada usando o teorema de Pick. Para isto, irão considerar a malha do ReC com espaçamentos de 0,5cm e que a imagem está numa escala de 1 : 10.000.000.

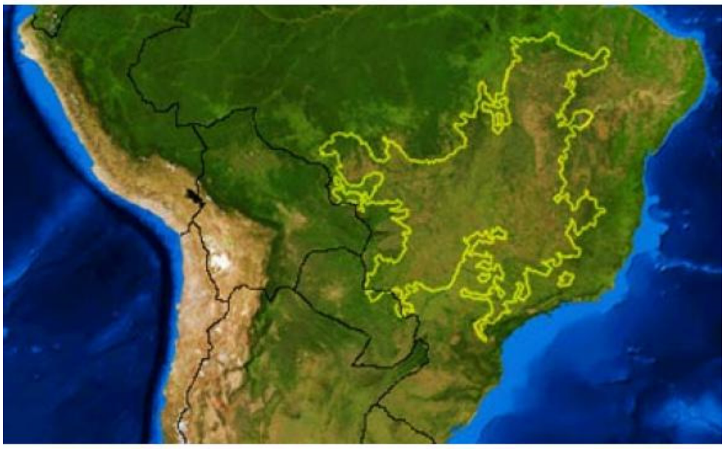


Figura 17: Imagem de uma área desmatada

Roteiro:

- Copie a imagem acima no seu diretório;
- Abra o ReC e crie um arquivo e guarde no mesmo diretório da imagem;
- Clique em opções, definir imagem de fundo e carregue a imagem;
- Clique em polígono e faça o contorno da região desmatada;
- Calcule a área deste polígono usando o Teorema de Pick;
- Use agora as informações sobre as quadrículas e a escala e calcule a área desmatada em km².

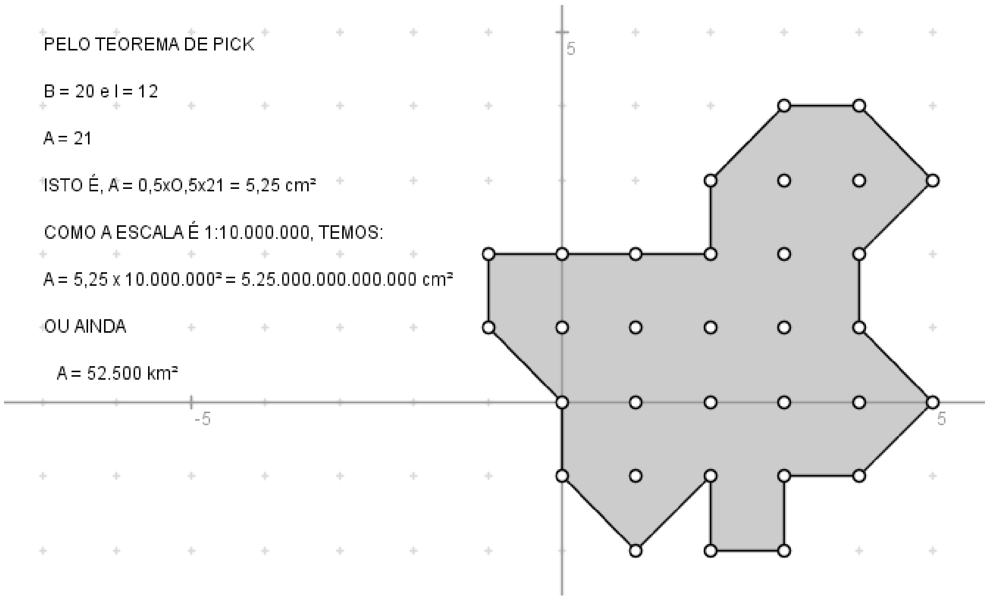


Figura 18: Cálculo de uma área desmatada

A Trigonometria é um conteúdo muito importante e é explorado na maioria dos livros didáticos no 1º ano do Ensino Médio. As próximas atividades vão explorar um pouco este assunto e voltaremos a usar o Geogebra. Um dos tópicos da Trigonometria são as construções dos gráficos das funções $y = senx$, $y = \cos x$ e $y = tgx$ que em aulas expositivas suas construções no quadro se tornam extremamente cansativas para o professor e desmotivadora para os alunos. A próxima atividade propõe um simples modo de fazer com que os alunos percebam as variações nos gráficos citados quando mudamos os parâmetros a, b, c e d da função $y = a + bsen(cx + d)$.

Atividade 08: Alterações sofridas pelo gráfico da função $y = a + bsen(cx + d)$

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Entender as variações no gráfico ao variar os parâmetros da função.
- Conjecturar que o período da função é dado por $\frac{2\pi}{|c|}$.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do Geogebra.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do Geogebra.
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Desenvolvimento:

Atividade com o Geogebra na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Cada aluno ou dupla de alunos, em uma máquina, realizará as etapas da atividade abaixo:

Definição de Função Periódica

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é periódica quando existe um número real $T\neq 0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Quando f é periódica, $f(t+kT)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ e todo $k\in\mathbb{Z}$. O menor número real $T>0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ chama-se período da função f.

Roteiro:

- Abra a tela do Geogebra.
- Clique no ícone de controle deslizante e defina sucessivamente os parâmetros a, b, c e d exibindo-os na tela.
- Digite no Campo de Entrada a função y = a + b*sin(c*x+d).
- Movimente o parâmetro **a** e verifique o que está acontecendo.
- O que você observou?
- Faça o mesmo com os outros parâmetros.
- Conclua sobre o que cada parâmetro altera na função.
- A figura abaixo ilustra um gráfico formado movendo os parâmetros.

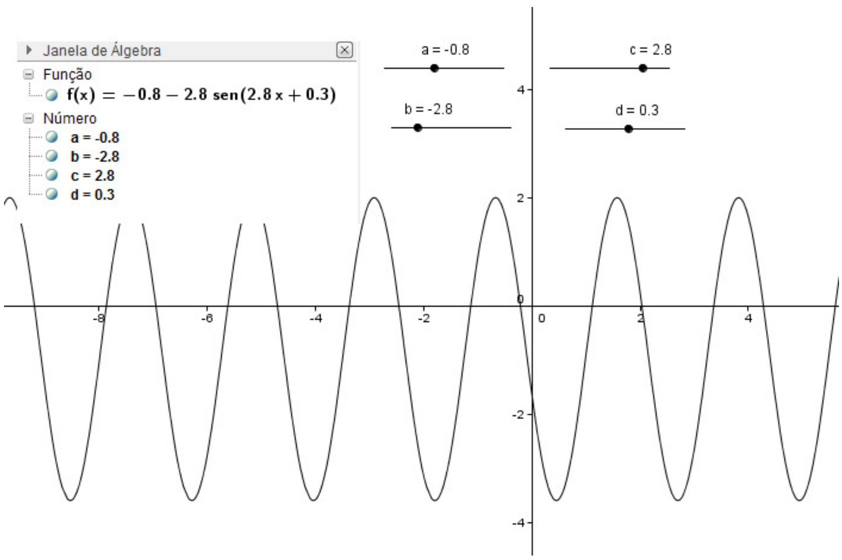


Figura 19: Gráfico da Função f(x) = – 0,8 – 2,8sen(2,8x + 0,3)

Outra propriedade importante inserida no contexto da Trigonometria é a conhecida lei dos senos. Esta propriedade muita das vezes é simplesmente colocada como mais uma fórmula para ser decorada pelos alunos sem o mínimo de justificativa e de rigor. A próxima atividade sugere um roteiro para que o estudante tente conjecturar que os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, e mais que a constante de proporcionalidade é o diâmetro do círculo que o circunscreve.

Atividade 09: A lei dos Senos

Objetivos

Esperamos que no final da aula os alunos tenham condições de:

- Conjecturar a chamada Lei dos Senos.
- Manipular corretamente as ferramentas básicas do Geogebra.

Metodologia:

- Sala de informática para manipulação das ferramentas básicas do Geogebra.
- Sala de informática com a apresentação e execução de uma tarefa investigativa.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Ano: Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Desenvolvimento:

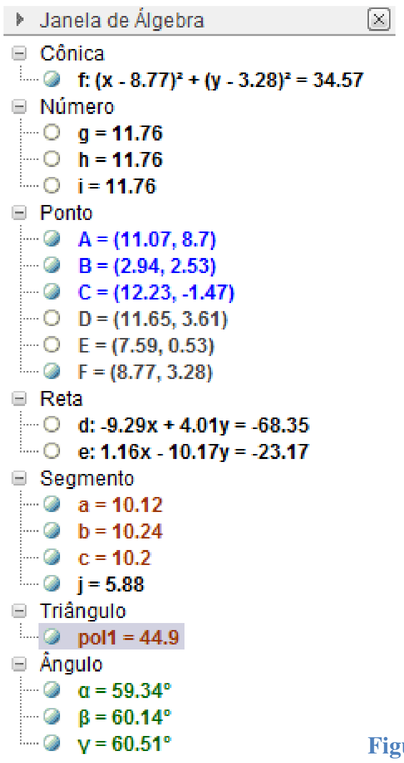
Atividade com o Geogebra na sala de informática: (duração: 50 minutos)

Cada aluno ou dupla de alunos, em uma máquina, realizará as etapas da atividade abaixo:

Roteiro:

- Abra a tela do Geogebra.
- Construa um triângulo de vértices ABC.
- Exiba os ângulos do triângulo.

- Exiba os lados do triângulo.
- No Campo de Entrada digite a/sin(α). Dê enter.
- Repita o procedimento para b/sin(γ) e c/sin(β).
- Observe na janela de álgebra que os números g, h e i são iguais.
- Enuncie uma propriedade sugerida pelo roteiro acima.
- Agora vamos construir o círculo circunscrito no triângulo ABC.
- Pense em como isto pode ser feito.
- Feito o círculo, trace o seu raio.
- Olhe na janela de álgebra o comprimento do segmento que representa o raio.
- Compare com os números g, h e i.
- Faça conjecturas.
- Traga na próxima aula uma demonstração de sua conjectura.
- Abaixo uma figura simulando o roteiro acima.



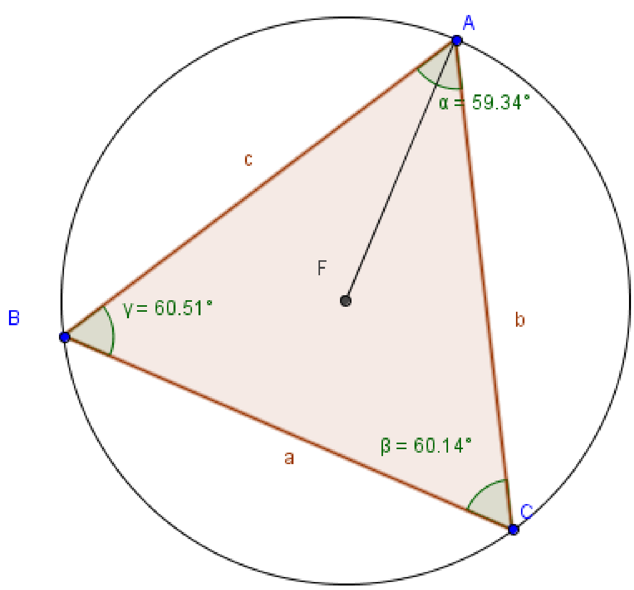


Figura 20: A lei dos Senos

No 2º ano do Ensino Médio, o aluno aprende a Geometria Espacial, mas não deixa ter contato com a chamada Geometria Plana, já que praticamente todos os fatos da primeira dependem dos conceitos estudados pela segunda. Como um dos objetivos de nosso trabalho são as demonstrações, vamos propor uma atividade que o professor pode organizar para provar a fórmula que calcula o volume de um tronco de pirâmide.

Atividade 10: Volume do tronco de Pirâmide.

Introdução

O estudo dos troncos de pirâmide e de Cone são complementações que aprofundam os estudos da Geometria Espacial trabalhado no Ensino Médio de nossas escolas. Este tópico é uma ótima chance do professor retomar os estudos de semelhanças de triângulos e envolvê-lo com os sólidos básicos, mostrando ao aluno uma relação entre geometria plana e geometria espacial. É um assunto riquíssimo em aplicações e contextualizações, que o professor poderá estar explorando tornando suas aulas mais atraentes para os alunos. Os troncos aparecem em nosso cotidiano a todo instante. Por exemplo: Copos descartáveis, forminhas de empadas, suporte do ovo de páscoa, embalagens de panetones, são alguns exemplos de objetos com a forma de tronco de cone e de pirâmide. O professor ao apresentar a Geometria Espacial para seus alunos, não pode privá-los de um bom estudo sobre os troncos e de formalizar os cálculos de volumes e áreas destes objetos tridimensionais.

Objetivos

Esperamos que ao final da aula os alunos tivessem condições de saber.

- O que é uma secção transversal de uma pirâmide;
- Reconhecer quando um sólido é um tronco de pirâmide;
- Entender a demonstração da fórmula do volume deste sólido;
- Aplicar a fórmula para resolver situações problemas do assunto.

Ano: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Desenvolvimento

O prefeito de uma cidade mandou ser construído, em homenagem ao dia da emancipação política da cidade, um obelisco de concreto em forma de tronco de pirâmide triangular regular. Os lados das bases têm 3 metros e 1 metro de comprimento enquanto a altura será de 15 metros. Querendo saber os gastos antes da execução da obra pede para ser informado sobre o volume de concreto que será gasto. Com as dimensões fornecidas e com conhecimentos em matemática o prefeito poderia ter feito os cálculos. Ajude o prefeito a calcular este volume.

Figura 21: Obelisco

Para resolver o problema do prefeito, precisamos saber um pouco mais a respeito de sólidos chamados de troncos de pirâmide.

Secção Transversal de uma Pirâmide.

Chamamos de secção transversal de uma pirâmide a intersecção da pirâmide com um plano paralelo à base. Veja a figura abaixo:

O sólido de vértices ABCDEF é chamado de tronco de pirâmide.

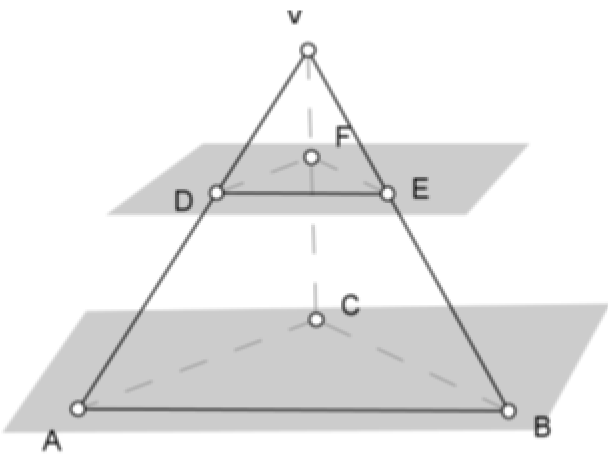


Figura 22: Secção transversal de uma pirâmide

Observe que o triângulo DEF foi obtido pela intersecção de um plano paralelo ao plano da base da pirâmide.

Vamos mostrar agora que os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

De fato,

- Veja que os triângulos VDE e VAB são semelhantes já que DE é paralelo com AB.
- Neste caso, vale a proporção $\frac{VD}{VA} = \frac{VE}{VB} = \frac{DE}{AB} = \text{k}$

- De forma análoga, mostramos que $\frac{VE}{VB} = \frac{VF}{VC} = \frac{EF}{BC}$ = k e que $\frac{VD}{VA} = \frac{VF}{VC} = \frac{DF}{AC}$ = k, onde k é a constante de proporcionalidade.
- Analisando as proporções acima concluímos que: $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$.
- Isto mostra que os triângulos são realmente semelhantes.
- É evidente que a ideia acima pode ser estendida para qualquer pirâmide.

Outro fato que podemos verificar com as proporções anteriores, é de que as arestas laterais das duas pirâmides são proporcionais e está na mesma razão k das arestas das bases.
Uma pergunta imediata seria: Será que as alturas das duas estão na razão k?
Vejamos:

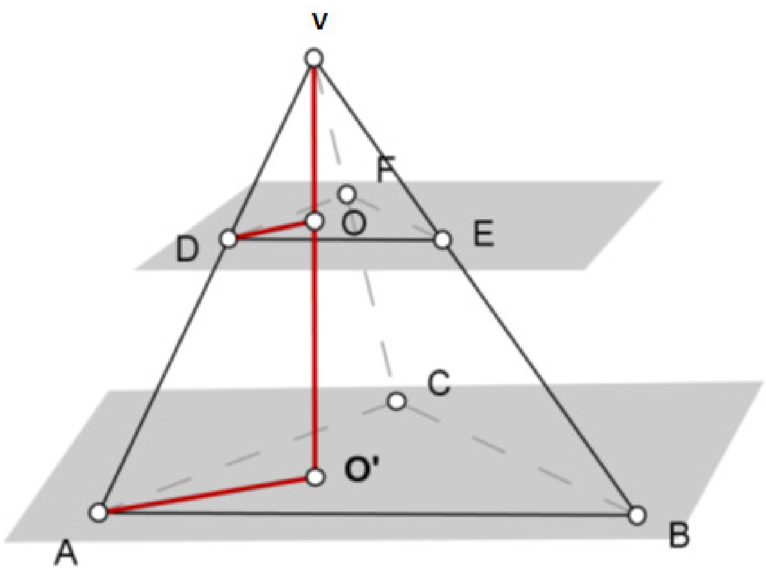


Figura 23: Tronco de Pirâmide

Considere o segmento VO' e VO como sendo as alturas das respectivas pirâmides. Note que os triângulos VOD e VO'A são semelhantes e então vale a proporção $\frac{VO}{VO'} = \frac{VD}{VA} = k$. Isto responde a pergunta acima.

Pondo VO = h e VO' = H. Podemos escrever $\frac{VO}{VO'} = \frac{h}{H} = k$

Observe que quando seccionamos uma pirâmide paralelamente à sua base, podemos usar semelhança de triângulos para provar várias propriedades, como foi visto acima. Como os triângulos das bases das pirâmides são semelhantes, podemos expressar a razão entre suas áreas em termos de k. Quando estudamos semelhanças, provamos que a razão entre as áreas deles é igual ao quadrado da razão de semelhança. Isto pode ser aplicado agora com as duas bases das pirâmides.

De acordo com o que foi dito: $\frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} = k^2$.

Agora vamos ao objetivo da aula de hoje que é calcular o volume do tronco de pirâmide.

Antes vamos provar uma propriedade importante que nos será útil.

A razão entre os volumes das pirâmides VDEF e VABC é igual ao cubo da razão de semelhança.

De fato,

$$\frac{V_{VDEF}}{V_{VABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_{DEF} \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot H} = k^2 \cdot k = k^3$$

Teorema

O volume de um tronco de pirâmide qualquer é dado pela fórmula:

$$V_T = \frac{k}{3} \cdot \left[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b \right]$$

Onde V_T, A_B e A_b representam o volume do tronco, a área da base da pirâmide maior e a área da base da pirâmide menor respectivamente. Aqui usaremos a letra k para representar a altura do tronco de pirâmide.

<u>**Demonstração**</u>

Vamos usar a pirâmide triangular acima.

Veja que:

$$V_T = V - v \Leftrightarrow V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot (h + k) - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot k - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_B - A_b) + \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot k$$

Por outro lado:

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{H}{h} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{h+k}{h} = 1 + \frac{k}{h}$$

$$\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} - 1 = \frac{k}{h} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}{\sqrt{A_b}} = \frac{k}{h}$$

$$h = \frac{k \cdot \sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} = \frac{k \cdot \sqrt{A_b} \cdot \left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right)}{A_B - A_b}$$

Voltando:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{k \cdot \sqrt{A_b} \cdot \left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b} \right)}{A_B - A_b} \cdot \left(A_B - A_b \right) + \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot k$$

$$V_T = \frac{k}{3} \cdot \left[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b \right]_{\textbf{c.q.d}}$$

Agora vamos resolver o problema do prefeito.

Neste problema temos que :

$$A_B = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4} m^2$$

$$A_b = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} m^2$$

Como k = 15, substituindo na fórmula deduzida teremos:

$$V_T = \frac{15}{3} \cdot \left[\frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$$

$$V_T = 5 \cdot \left[\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{27}{16}} \right] = 5. \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$V_T = \frac{65 \cdot \sqrt{3}}{4} \cong \frac{65 \cdot 1{,}73}{4} = 28{,}1 m^3$$

Portanto a obra do prefeito gastará aproximadamente 28,1m^3 de concreto.

Observação: Na prática, em geral, é mais adequado obter o volume do tronco pela subtração dos volumes das pirâmides semelhantes (a original e a miniatura), em vez de decorar a fórmula. Será em cima desta observação que faremos nosso comentário final do trabalho.

A partir do tronco, prolongue as suas arestas laterais construindo a pirâmide original e a miniatura. Use os conhecimentos da aula de hoje e tente calcular o volume do troco sem o uso da fórmula.

Comentários:

Espera-se que os alunos consigam visualizar o desenho abaixo, e usar o fato das pirâmides serem semelhantes, calcular suas alturas fazendo proporções. Por exemplo:

$\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$. Mas, h + H = 15 e, portanto, H = 15/4 e h = 1/4

Assim, podemos calcular os volumes das duas pirâmides e subtraí-los para calcular o volume do tronco.

O professor não pode interferir neste processo. Deixe os alunos à vontade para tentar descobrir a ideia acima.

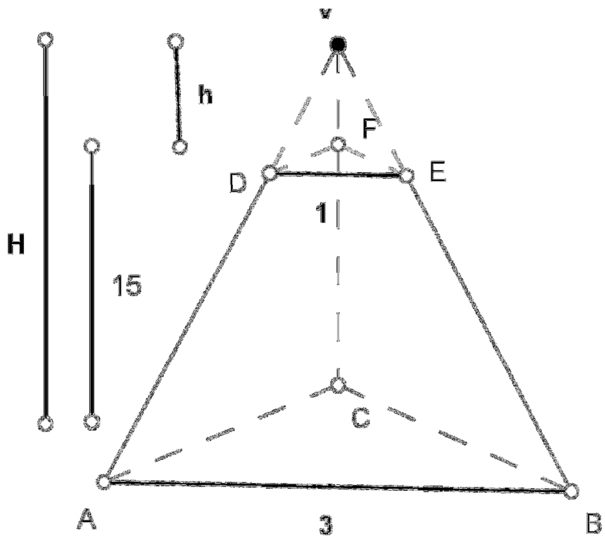


Figura 24: Pirâmides semelhantes

Finalmente chegamos no 3º ano do Ensino Médio. Nesta série os alunos aprendem sobre a Geometria Analítica em particular as Cônicas, Números Complexos, Polinômios e as Equações Algébricas.

As próximas atividades vão girar em torno das Cônicas que nada mais são do que Lugares Geométricos (LG) que são conjuntos de pontos do plano que compartilham uma propriedade comum. Vamos usar o Geogebra para identificar se um determinado "rastro", deixado por um ponto, representa uma Circunferência, Elipse, Hipérbole ou uma Parábola. As ferramentas de "lugar geométrico" e "rastro" dos ambientes de geometria dinâmica propiciam um novo nível de análise das construções geométricas, permitindo elaborações de conjecturas menos evidentes e às vezes imperceptíveis em imagens estáticas.

Vamos partir do ponto que as atividades abaixo serão aplicadas para alunos do 3º ano do Ensino Médio e que os objetivos de cada uma serão formular conjecturas a partir da visualização dos rastros deixados por pontos em simulações feitas no Geogebra. A duração de cada uma será uma aula de 50 minutos, mais uma aula para a prova da conjectura que será exposta no capítulo 6.

Atividade 11: Verificar que o lugar geométrico dos baricentros é uma circunferência.

Roteiro:

- Trace um círculo de raio fixo.
- Construa um triângulo inscrito neste círculo.
- Marque o baricentro do triângulo.
- Mova um dos vértices do triângulo sobre a circunferência.
- Qual o LG descrito pelo baricentro?
- Justifique sua resposta.
- Habilite o rastro do baricentro.
- Mova novamente um dos vértices do triângulo sobre a circunferência.

Certamente todos os alunos vão dizer que é uma circunferência e muitos vão falar que não precisa nem provar, pois estão vendo que é uma circunferência. Este momento é perfeito para o professor debater com os alunos a diferença entre uma constatação experimental, mesmo envolvendo um número muito grande de casos, e um raciocínio dedutivo matemático.

O professor deve insistir em provar por que o LG é uma circunferência e em se confirmando, pedirá aos alunos para calcular o raio e a posição do seu centro.

Usando o Geogebra, o aluno pode conjecturar a posição do centro e o comprimento do raio da suposta circunferência. O professor, durante a construção do roteiro acima, deve fazer as seguintes perguntas:

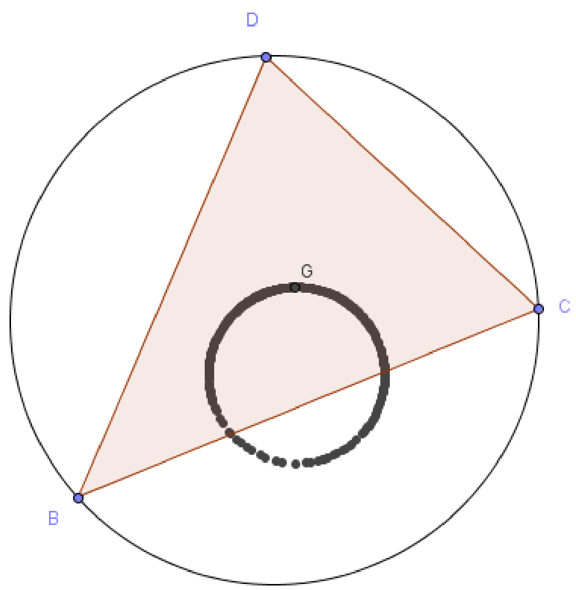


Figura 25: Circunferência

1. Como podemos localizar o centro desta suposta circunferência?
2. Use o programa e conjecture o valor do raio desta “circunferência”.

Os alunos, com a ajuda do professor, devem lembrar que por três pontos não colineares passa uma circunferência e que o centro fica na intersecção das mediatrizes dos segmentos que unem estes pontos.

Após a localização do centro, os estudantes, com a ajuda do Geogebra, devem ser levados a pensar numa forma de calcular o raio da circunferência. Basta traçar os segmentos que representam os raios dos dois círculos e com uma calculadora tentar obter uma conjectura. Veja figura abaixo.

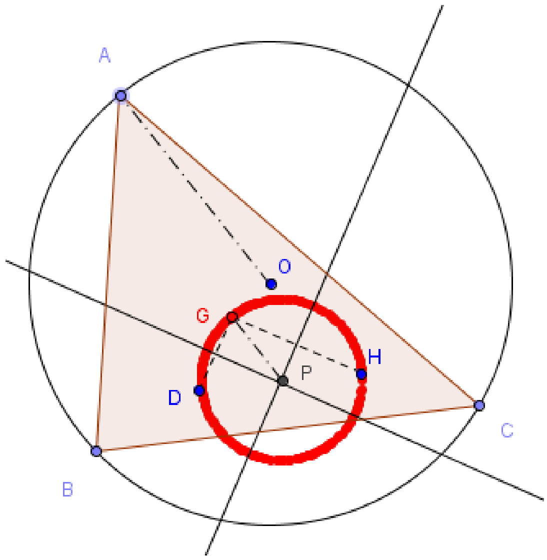


Figura 26: LG do ponto G

Atividade 12: Construção de uma Parábola.

Definição de Parábola.

***Parábola* de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico dos pontos P equidistantes do foco e da diretriz.**

Roteiro:

- Construa uma reta horizontal passando pelos pontos A e B.
- Fora da reta AB, tome um terceiro ponto nomeando-o F.
- Sobre a reta AB marque um ponto nomeando-o X.
- Trace a mediatriz do segmento FX.

- Por X trace uma reta perpendicular à reta AB.
- Chame de P o ponto de intersecção entre esta reta e a mediatriz do segmento FX.
- Agora oculte a mediatriz e a perpendicular bem como o ponto médio de FX.

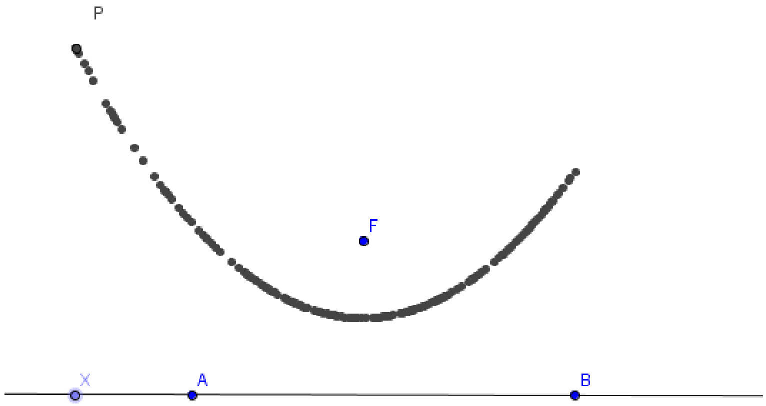


Figura 27: Parábola

- Clique em mover ponto e mova o ponto X.
- Qual o LG do ponto P?
- Justifique sua resposta.
- Agora rastreie o ponto P e verifique se faz sentido sua resposta.

Sem rastrear o ponto P, sua trajetória não deixa muito clara que é uma parábola. Quando movimentamos o ponto X, o ponto P sai da tela e só retorna se movimentarmos o ponto X na direção contrária. Alunos menos atentos poderão dizer que o LG de P é uma elipse ou até mesmo uma circunferência. Outros, mais atentos, pelo roteiro que foi sugerido poderão conjecturar que é uma parábola.

O professor não deve interferir nas discussões, mas deve remediá-las para que a aula não fuja do seu foco principal. Mesmo todos os alunos dizendo que é uma parábola o professor deve insistir na demonstração formal da conjectura.

Atividade 13: Construção de uma Elipse.

Definição de uma Elipse:

São dados dois pontos F_1 e F_2, cuja distância entre eles seja $2c$.

***Elipse* é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$ onde $2a > 2c$.**

Roteiro:

- Construa uma circunferência de raio fixo.
- Trace uma reta d exterior à circunferência.
- Marque um ponto F pertencente à circunferência.
- Trace uma reta passando por F perpendicular à reta d.
- Chame a intersecção da perpendicular com d de G.
- Oculte a reta perpendicular e trace o segmento FG.
- Marque o ponto médio de FG nomeando-o V.
- Oculte o segmento FG e o ponto G.
- Movimente o ponto F sobre a circunferência.
- Qual o LG do Ponto V?
- Justifique sua resposta.
- Rastreie o ponto V. Sua resposta faz sentido?
- Tome um ponto P qualquer sobre a perpendicular a d.
- Rastreie este ponto e verifique o LG.

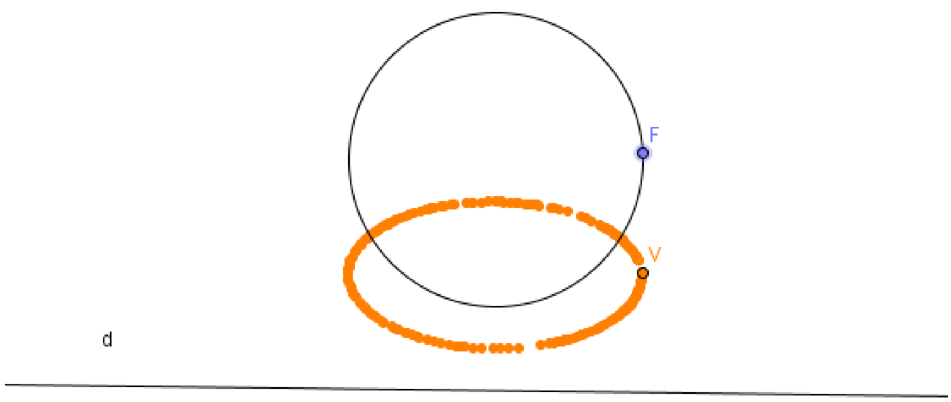


Figura 28: Elipse

Atividade 14: Construção de uma Hipérbole.

Definição de uma Hipérbole:

Dados dois pontos F_1 e F_2, cuja distância entre eles seja $2c$.

Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$ onde $0 < 2a < 2c$.

Roteiro:

- Construa uma circunferência de raio R = 2a e centro F_1.
- Marque um ponto T qualquer pertencente à circunferência.
- Marque um ponto F_2 qualquer exterior à circunferência.
- Trace a reta que passa por T e por F_1.
- Trace a mediatriz do segmento TF_2.
- Marque o ponto P interseção da reta que passa por T e F_1 e pela mediatriz anterior.
- Oculte a reta e a mediatriz.
- Movimente o ponto T.
- Qual o LG descrito por P?
- Habilite o rastro do ponto P. Sua resposta faz sentido?
- Se arrastarmos o ponto F_2 para o interior da circunferência, qual é agora o LG de P?
- Justifique sua resposta.

Abaixo esboço dos possíveis Lugares Geométricos.

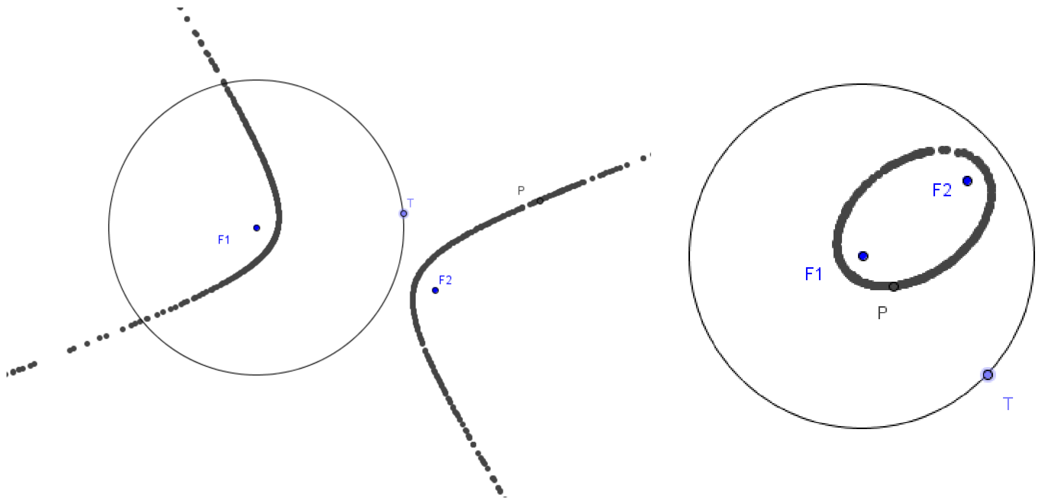


Figura 29: Hipérbole e Elipse

Os alunos do terceiro ano do Ensino Médio são apresentados ao conjunto dos Números Complexos. As próximas atividades girarão em torno deste conteúdo, tendo como objetivo levar o aluno a conjecturar e provar as operações de multiplicação, divisão e potenciação de Números Complexos na forma trigonométrica. É claro que estamos supondo que os alunos já estejam familiarizados com tal conjunto e com a sua forma trigonométrica, sabendo representar geometricamente um número complexo, calcular módulo e argumento.

Vamos usar o Geogebra, pois este programa interpreta um número complexo e possui ícones que permitem traçar vetores possibilitando transladá-los, rotacioná-los em torno de um ponto e muito mais.

Atividade 15: Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Roteiro:

- Digite no campo de entrada dois números complexos. Por exemplo, $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 + i$.
- Clique no ícone "vetor definido por dois pontos" e trace os vetores Az_1 e Az_2, onde A é a origem do plano Cartesiano.
- Agora exiba os módulos destes vetores. Vá ao campo de entrada e digite abs(z_1) aperte enter e em seguida abs(z_2). Observe na janela de álgebra aparecem os módulos dos vetores z_1 e z_2 representados por a e b respectivamente.

- Exiba também os argumentos destes números. Basta clicar no ícone ângulo e traça-los com cores diferentes.

- Novamente no campo de entrada digite o produto destes números, isto é, $z_3 = z_1{*}z_2$. Se z_3 não aparecer na tela, clique no ícone mover janela de visualização e o encontre.

- Exiba o módulo e o argumento de z_3. Agora olhe para a janela de álgebra.

- Qual a relação entre os módulos e os argumentos destes três números complexos?

- Arraste os pontos livres e verifique se continua valendo o resultado anterior.

O professor deve esperar um pouco e sugerir que os alunos usem a calculadora para chegar ao resultado esperado. Espera-se que os alunos conjecturem que o módulo de z_3 é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2 e que o argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2. Abaixo figura esperada.

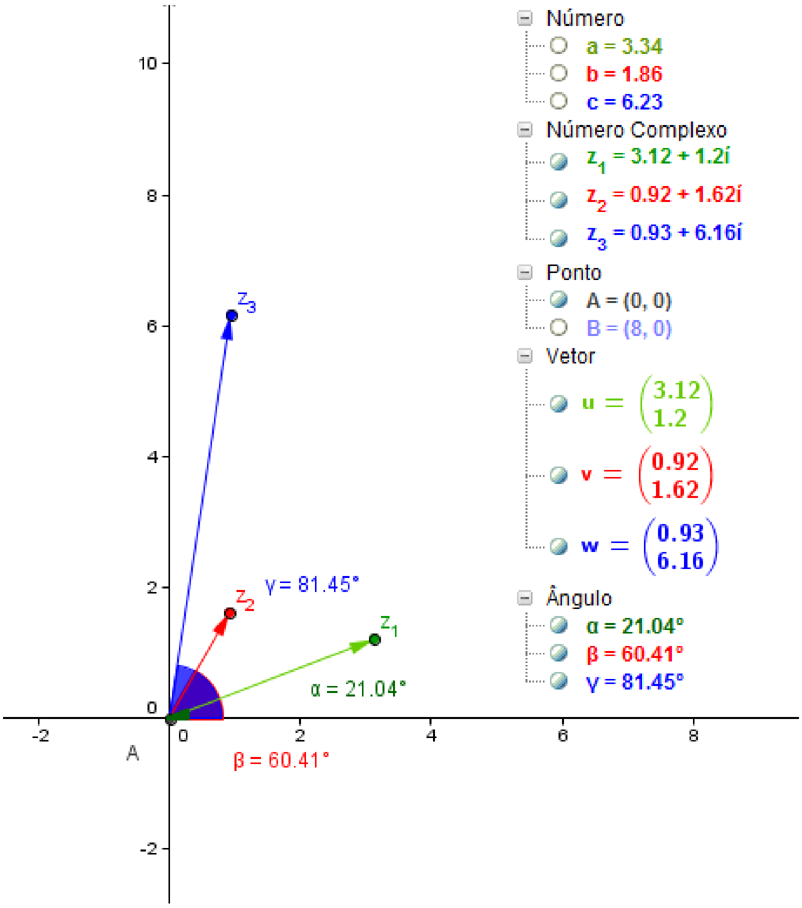


Figura 30: Produto entre dois Números complexos

Após as conclusões do resultado o professor deve fazer algumas considerações, tais como:

- Dado um complexo z, se quisermos girá-lo, no sentido anti-horário, ao redor da origem de um ângulo reto sem alterar seu módulo, por qual complexo devemos multiplicá-lo?
- E se o giro for no sentido horário?
- Dado um complexo z cujo afixo é o ponto (a, b), qual o afixo do complexo obtido girando z no sentido anti-horário de um ângulo reto?
- E se o giro for no sentido horário?

Estas considerações têm por finalidade mostrar para o aluno que para girar um vetor no plano em torno da origem de um ângulo reto no sentido anti-horário basta multiplicar pela unidade imaginária $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e por $-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ se for para o outro sentido. É importante também que o aluno perceba que é fácil determinar o afixo do novo vetor com as coordenadas do afixo do vetor anterior. Observe figura abaixo:

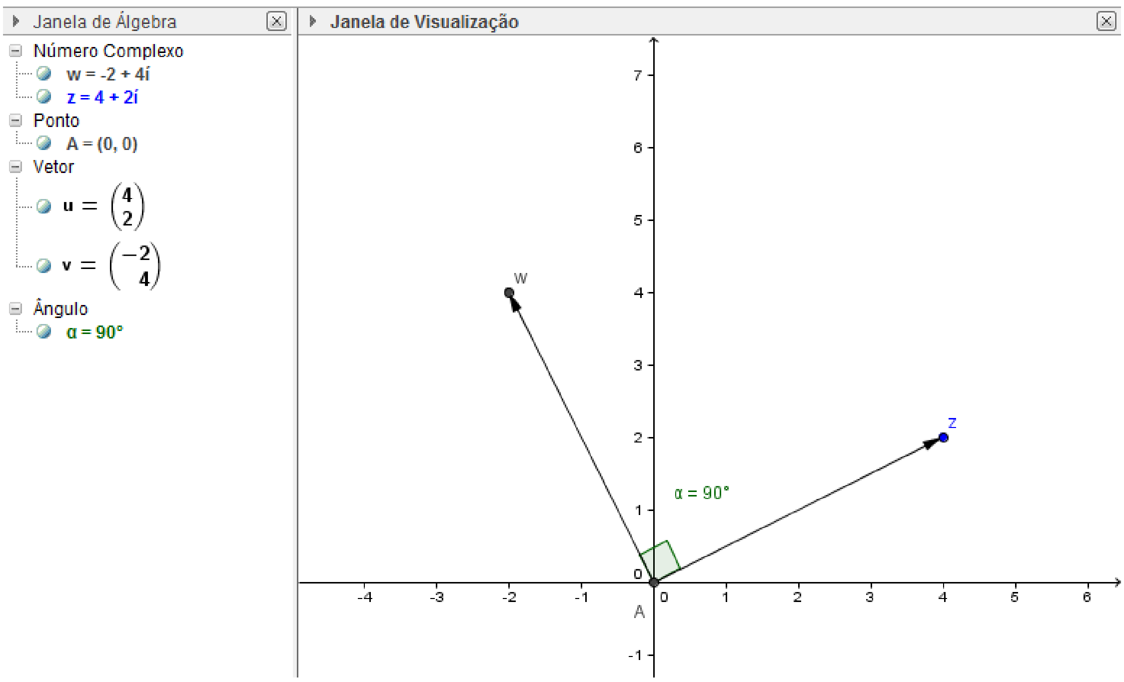


Figura 31: Rotação de um vetor 90° no sentido anti-horário

O Educador pode propor ao estudante que faça a figura acima e observe as coordenadas dos vetores u e v, deixando o aluno conjecturar a vontade.

De forma análoga geramos o roteiro para a divisão de complexos na forma trigonométrica. Tal roteiro será deixado para o professor aplicador do projeto.

Atividade 16: Potenciação na forma trigonométrica

Roteiro:

- No campo de entrada, digite um número complexo z.
- Clique no ícone "vetor definido por dois pontos" e trace o vetor Az.
- No campo de entrada, digite w = z^3. Dê enter.
- Trace o vetor Aw.
- Navalmente no campo de entrada, exiba os módulos e os argumentos de z e w.
- Observe a janela de álgebra e com uma calculadora tente descobrir a relação entre os módulos e os argumentos de z e w.
- Agora mova o complexo z.
- O resultado anterior se manteve?

A meta é que o aluno conjecture que o módulo de w é o cubo do módulo de z e que o argumento de w é igual ao argumento de z multiplicado por três. Veja uma figura representando a situação descrita pelo roteiro acima.

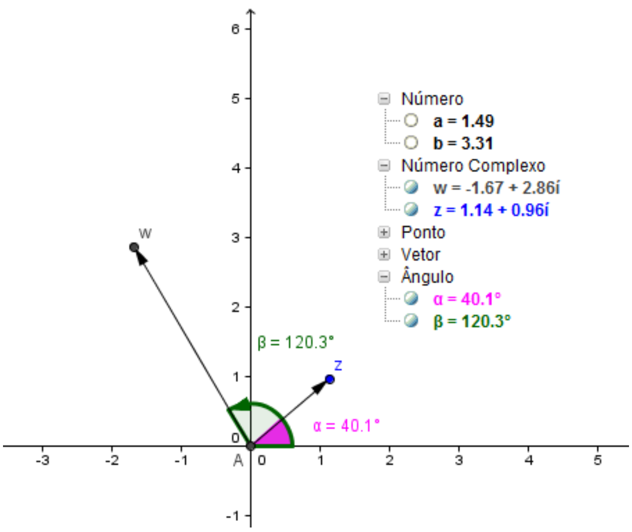


Figura 32: Potenciação de números Complexos

4ª Etapa

7. Demonstrações das atividades

Aqui apresentaremos as demonstrações das atividades proposta no capítulo 6.

Atividade 01: Demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Este é um bom teorema para introduzir nos alunos a ideia de deduções geométricas. Durante as demonstrações, o professor deve pedir para destacar o que são as hipóteses e o que é a tese do problema. Isto levará o estudante aprender a organizar melhor suas ideias e escrever textos matemáticos com mais clareza.

Infelizmente muitos alunos são levados a decorar este resultado sem justificativa. Se o aluno decora este simples fato da Geometria, então não entenderá outros que dependem deste como, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, a propriedade do ângulo externo do triângulo e muitos outros. Desta forma o estudo da geometria se transforma numa tortura sem sentido despertando total desinteresse na aprendizagem.

Demonstração

- Sejam α, β e γ respectivamente as medidas dos ângulos A, B e C do triângulo ABC.
- Temos que provar que $\alpha + \beta + \gamma = 180º$.
- Pelo vértice A passe uma reta paralela ao lado BC do triângulo.
- Note que $\beta = \delta$, pois são ângulos alternos internos.
- De forma análoga $\gamma = \varepsilon$.
- Observe que $\delta + \alpha + \varepsilon = 180°$.
- Logo, $\alpha + \beta + \gamma = 180º$.

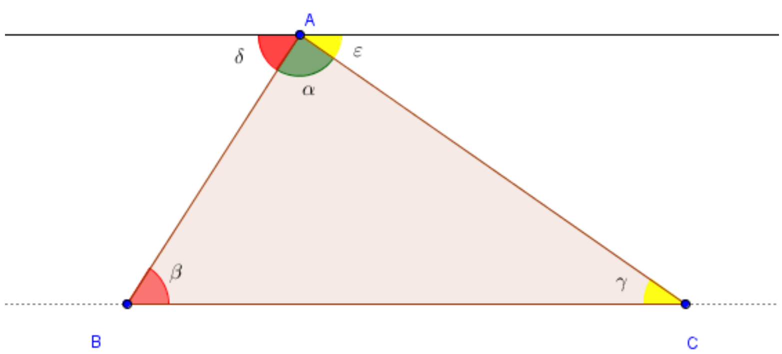


Figura 33: A soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°

Atividade 02: Demonstrar que se um ponto está sobre a bissetriz de um ângulo, então as distâncias desse ponto aos lados do ângulo são iguais.

Este é um bom exemplo para o professor trabalhar com os casos de congruência de triângulos. Existem muitos exemplos que podem ser formulados para a aplicação desses casos. A atividade 02 é apenas uma ideia.

<u>**Demonstração**</u>

- Seja BD a semirreta bissetriz de um ângulo ABC
- Hipótese: DE é perpendicular a BA e DF é perpendicular a BC.
- Tese: DE é congruente a DF.
- Os triângulos DEB e DFB são retângulos e sendo a semirreta BD uma bissetriz, temos que os ângulos EBD e FBD são congruentes.
- Então os triângulos DEB e DFB são congruentes pelo caso LAA_o.
- Logo o cateto DE é congruente ao cateto DF, mostrando o resultado.

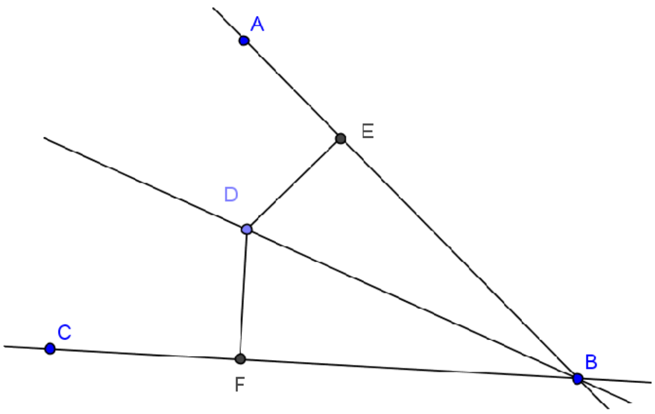


Figura 34: Propriedade da Bissetriz de um ângulo

A demonstração da recíproca é análoga, veja:

- Temos que por hipótese DE = DF.
- Nossa tese é provar que a semirreta BD é a bissetriz do ângulo ABC.
- Basta observar que os triângulos BDE e BDF são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa, já que BD é lado comum aos triângulos.

Atividade 03: Demonstrar que as distâncias de um ponto da mediatriz de um segmento às extremidades são iguais.

<u>Demonstração</u>

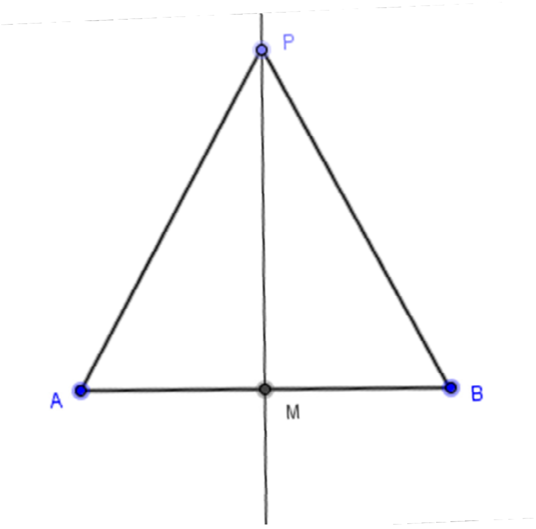


Figura 35: Mediatriz de um segmento

A demonstração deste resultado é bem simples e está ao alcance de todos os alunos que já aprenderam sobre congruência de triângulos. Basta observar que os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso LAL, pois PM é lado comum, a reta PM é perpendicular ao segmento AB, logo os ângulos PMA e PMB são iguais e sendo M ponto médio, segue que AM é igual a BM e consequentemente as hipotenusas PA e PB são iguais.

Atividade 04: Demonstração do caso AA de semelhança de triângulos.

Dificilmente encontraremos em livros do Ensino Fundamental demonstrações dos casos de semelhanças de triângulos. Estas demonstrações exigem apenas aplicações do teorema de Tales e são inteiramente acessíveis aos alunos do 9º ano e do Ensino Médio. Antes da demonstração do caso AA de semelhança, vamos repetir a definição que demos para dois triângulos semelhantes e em seguida provar um lema.

Definição: Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Isto é:

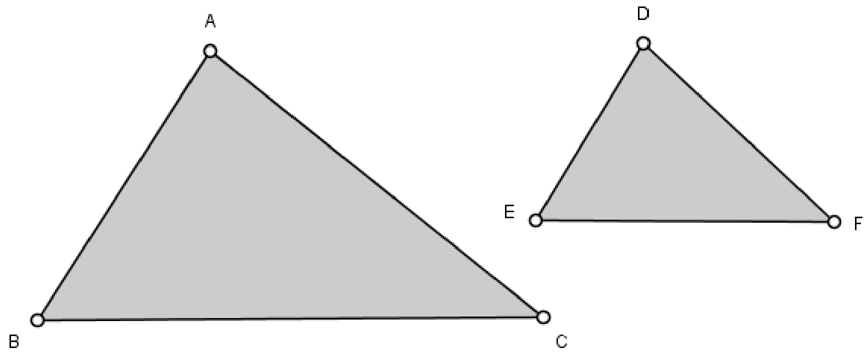


Figura 36: Triângulos Semelhantes

Se ABC e DEF são triângulos semelhantes e se A $\longrightarrow$D, B $\longrightarrow$E e C $\longrightarrow$F é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.

A razão comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamada de razão de proporcionalidade ou razão de semelhança entre os dois triângulos.

Notas:

- A razão $k = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ é chamada de Razão de Semelhança dos triângulos. Se k = 1, então os triângulos são congruentes.
- Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades

(I) Reflexiva: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.

(II) Simétrica: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ se, e somente se $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

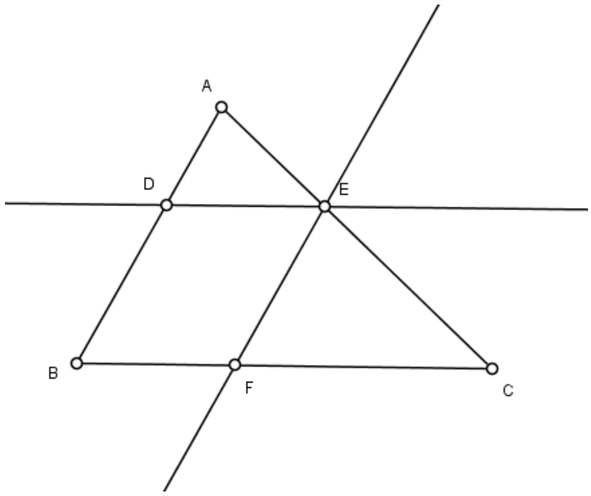
(III) Transitiva: Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ então, $\Delta ABC \sim \Delta GHI$.

Lema: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração

Hipótese: DE // BC.

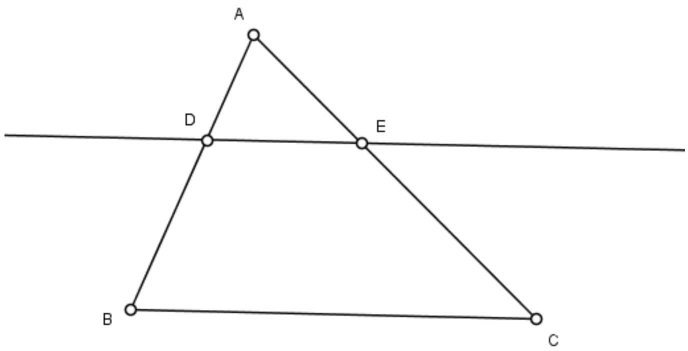
Tese: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



É fácil ver que como DE // BC segue que $\hat{B} \equiv \hat{D}$ e $\hat{C} \equiv \hat{E}$ (ângulos correspondentes) e temo que $\hat{A}$ é ângulo comum.

Agora vamos provar que os lados correspondentes são proporcionais:

- Pelo Teorema de Tales, temos: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.
- Pelo ponto E, trace uma reta paralela ao lado AB, que intersecta o lado BC em F.
- Note que o quadrilátero DEFB é um paralelogramo, pois DE // BF e BD // EF, logo DE = BF.
- Novamente pelo Teorema de Tales: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$.
- Portanto, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$, ou seja, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.



- Pela definição de triângulos semelhantes segue que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Teorema: Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

<u>Demonstração</u>

Sejam dados dois triângulos ABC e DEF.

Hipótese: $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$.

Tese: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

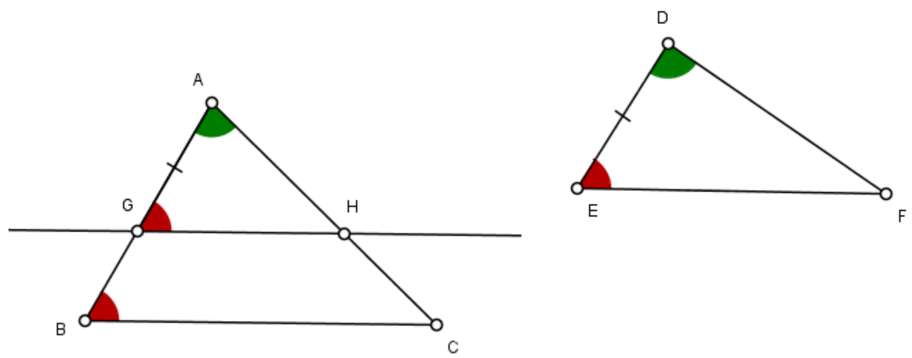


Figura 37: Caso AA de semelhança de triângulos

- Se AB = DE, então os triângulos são congruentes pelo caso ALA e nada teremos para provar.
- Sem perda de generalidade podemos supor que AB > DE.
- Seja G um ponto do lado AB tal que AG = DE.
- Por G trace uma paralela ao lado BC e seja H o ponto de intersecção da paralela com o lado AC.
- Neste caso, $\hat{B} \equiv \hat{G}$ e, portanto $\hat{E} \equiv \hat{G}$.
- Assim, os triângulos AGH e DEF são congruentes pelo caso ALA logo, semelhantes.
- Pelo lema provado anteriormente, temos que $\Delta ABC \sim \Delta AGH$ e como $\Delta AGH \sim \Delta DEF$, segue por transitividade que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ □.

Atividade 05: Demonstração do caso LAL de semelhança.

Teorema: Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

<u>Demonstração</u>

A demonstração é análoga à demonstração anterior.

Hipótese: $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

Tese: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

- Seja G um ponto do lado AB tal que AG = DE.
- Por G trace uma paralela ao lado BC e seja H o ponto de intersecção da paralela com o lado AC.
- Pelo Teorema de Tales: $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$, logo $\frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AH}$.
- Pela hipótese $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ e como DE = AG temos $\frac{AB}{AC} = \frac{AG}{DF}$.
- Assim $\frac{AG}{AH} = \frac{AG}{DF}$, logo AH = DF e sendo assim temos que, $\Delta AGH \equiv \Delta DEF$ pelo caso LAL e, portanto semelhantes.
- Por outro lado, o Lema garante que $\Delta ABC \sim \Delta AGH$ e novamente por transitividade, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ $\square$.

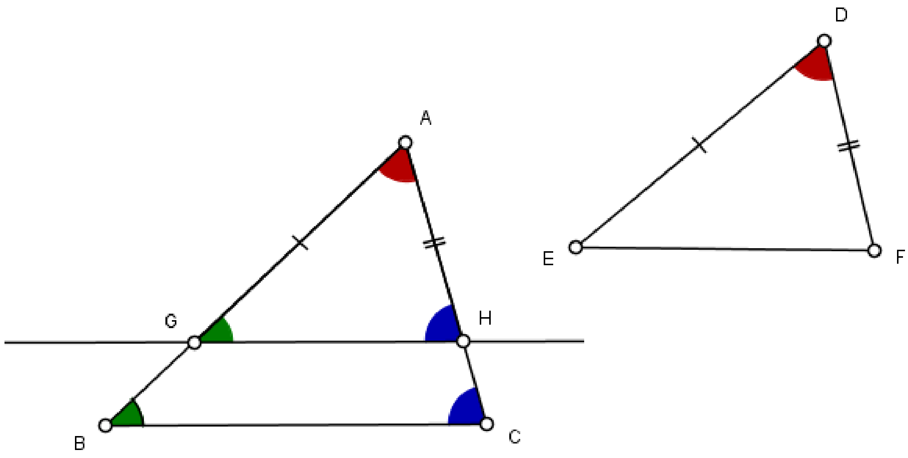


Figura 38: Caso LAL de semelhança de triângulos

Como exercício, o professor pode sugerir que os alunos criem um roteiro para o caso LLL de semelhante e em seguida façam a demonstração seguindo os passos anteriores. Não exibiremos aqui tal atividade, ficando a cargo do professor aplicador do projeto.

Atividade 06: Demonstração do teorema de Pitágoras.

São várias as demonstrações do Teorema de Pitágoras. A demonstração mais frequente é aquela onde se usa as relações métricas no triângulo retângulo e é a que aparece em todos os livros didáticos. Vamos escrever a demonstração feita por Euclides nos Elementos.

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

.

<u>Demonstração</u>

- Considere um triângulo ABC com ângulo reto no vértice C.
- Considere os quadrados ABHI, ACFG e BCDE construídos sobre os lados de ABC, conforme figura abaixo.
- Seja CK o segmento perpendicular à hipotenusa AB intersectando-a no ponto J.
- Trace os segmentos GB e CI.

- Os triângulos ABG e AIC que são congruentes pelo caso LAL, pois AB = AI, GÂB = CÂI e AG = AC.
- Note agora que a altura do triângulo AGB em relação ao lado AG é igual ao lado do quadrado ACFG.
- Desta forma, a área do triângulo ABG é a metade da área do quadrado ACFG.
- Por outro lado, a altura do triângulo AIC em relação ao lado AI é igual ao segmento AJ.

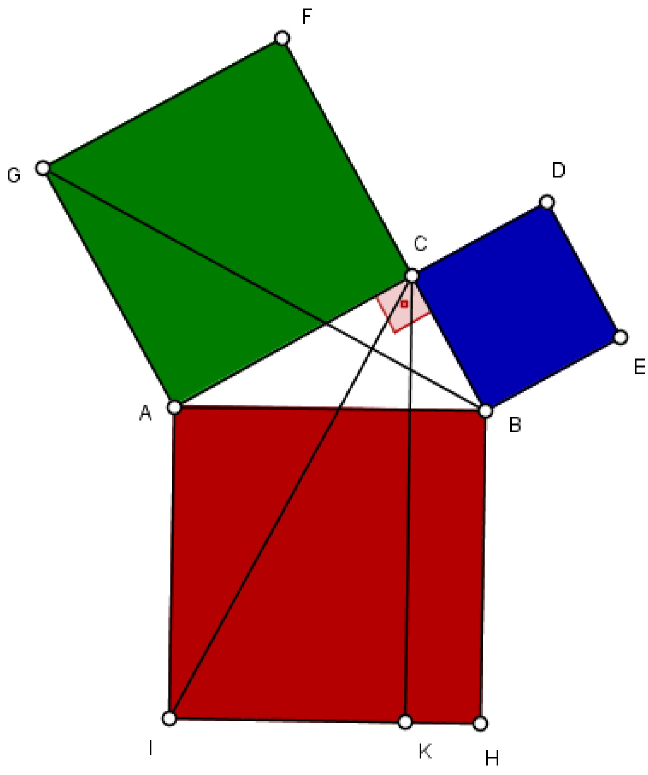


Figura 39: Demonstração do Teorema de Pitágoras

- Sendo assim, a área do triângulo AIC é a metade da área do retângulo AJKI.
- Segue que a área do quadrado ACFG é igual à área do retângulo AJKI.
- Trace agora os segmentos AE e CH, formando os triângulos ABE e BCH.
- De forma inteiramente análoga mostra-se que a área do quadrado BCDE é igual à área do retângulo JBHK.
- Como a área do quadrado ABHI é igual à soma das áreas dos retângulos AJKI e JBHK segue-se a área do quadrado ABHI é igual à soma das áreas dos quadrados ACFG e BCDE. CQD

Como os alunos desta série já estudaram semelhança de triângulos é uma ótima oportunidade para o professor generalizar o Teorema de Pitágoras, isto é, mostrar para os alunos que o Teorema continua verdadeiro se construirmos sobre os lados de um triângulo retângulo figuras semelhantes entre si não necessariamente quadrados, podendo ser, por exemplo, triângulos equiláteros, semicircunferências etc.

Não elaboraremos tal atividade, deixando-a apenas como sugestão para o professor.

Atividade 07: Teorema de Pick

Achamos que a demonstração da fórmula de Pick para alunos do Ensino Fundamental desnecessária, pois a mesma depende vários pré-requisitos que fogem aos conteúdos deste nível de escolaridade. Por outro lado, no Ensino Médio, acreditamos que os alunos do 2º e do 3º anos assimilariam muito bem a demonstração deste resultado.

Pelos motivos acima citados, não faremos aqui neste trabalho a demonstração da fórmula, mas o professor pode pesquisar na internet ou, que achamos mais adequado, estudar o artigo do professor Elon, intitulado, "*Como calcular a área de um polígono, se você sabe contar"*, do livro Meu Professor de Matemática e outras histórias,

Atividade 08: Variações dos gráficos de funções trigonométricas

Nesta atividade o aluno não terá grandes problemas em perceber que o parâmetro **a** desloca verticalmente o gráfico da função, alterando desta forma sua imagem, o mesmo acontecendo com o parâmetro **b**, que também modifica a imagem da função, mas sem deslocá-la verticalmente. Agora, o parâmetro **c** merece uma atenção especial por parte do professor, pois sua função não é tão óbvia assim. Este parâmetro altera o período da função. A propósito, o que é período de uma função? Quando uma função é periódica? Achamos interessante formalizar com os alunos estes conceitos, mostrando que existem outras funções periódicas, não só as trigonométricas.

Então vejamos:

Definição de Função Periódica

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número $T\neq 0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Se isto ocorrer, então $f(t+kT)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ e todo $k\in\mathbb{Z}$. O menor número $T>0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ chama-se o período da função f

Basta esta definição para o aluno entender por que, por exemplo, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=sen(x)$ é periódica de período $T=2\pi$.

De fato, observe que para todo x real,

$$sen(x)=sen(x+2\pi)=sen(x+4\pi)=\ldots=sen(x+2k\pi), k\in\mathbb{Z}.$$

Pela definição de função periódica, a função $f(x)=sen(x)$ é periódica e para calcular seu período, basta fazer k = 1, pois o menor $T = 2k\pi$ positivo para o qual ocorre $sen(x)=sen(x+2k\pi)$ é $T=2\pi$. O mesmo acontece com a função $f(x)=\cos(x)$.

Para a função $f(x)=tg(x)$, basta observar que para todo x real,

$tg(x)=tg(x+\pi)=tg(x+2\pi)=\ldots tg(x+k\pi), k\in\mathbb{Z}$. Logo, esta função também é periódica de período $T=\pi$.

A parte importante destes fatos é de que o aluno não aceita facilmente que as funções seno, cosseno e tangente são periódicas de período 2π, 2π e π respectivamente e que para traçar os gráficos é suficiente considerar o intervalo $[\,0,\ 2\pi\,]$ para as duas primeiras e $[\,0,\ \pi\,]$ para a terceira.

É bom destacar que as funções trigonométricas não são as únicas periódicas. Por exemplo, a função chamada *dente-de-serra* definida por: $f(k)=0$ se k = 0 e $f(k+\alpha)=\alpha$ quando $0\le\alpha<1$ e $k\in\mathbb{Z}$, é periódica de período $T = 1$.

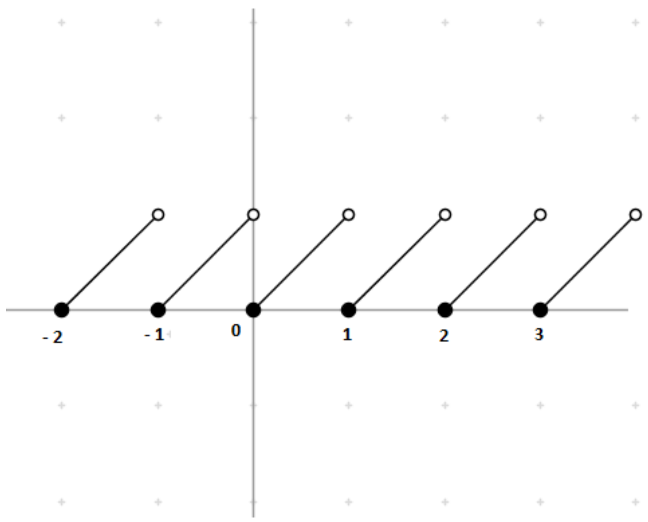


Figura 40: Gráfico da função dente de serra

Neste momento uma pergunta é inevitável. E o período de funções do tipo $f(x) = a + bsen(cx + d)$, $f(x) = a + b\cos(cx + d)$ e $f(x) = a + btg(cx + d)$ com a, b, c e d constantes reais e b $\neq$ 0 e c $\neq$ 0 ?

Para responder esta pergunta vamos demonstrar um teorema mais geral.

Teorema:

Sejam a, b, c e d números reais, com b $\neq$ 0 e c $\neq$ 0.

Se uma função f, é periódica de período p, então a função definida por $g(x) = a + b.f(cx + d)$ é periódica de período $T = \dfrac{p}{|c|}$.

<u>**Demonstração**</u>

- Devemos provar que existe um real T > 0, tal que $g(x) = g(x + T)$ para todo x, ou seja:

  $a + b.f(cx + d) = a + b.f[c.(x + T) + d] = a + bf(cx + d + cT)$

- Para obter esta igualdade basta que f(cx+d) = f(cx+d +cT).
- Como f é periódica, basta que cT = +-p, isto é,
- Como queremos T seja positivo basta que $T = \dfrac{p}{|c|}$ já que T é positivo.

Corolário

O período da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$ é igual a $T = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

<u>**Demonstração**</u>

Como a função $y = sen(x)$ é periódica de período $p = 2\pi$, segue pelo teorema anterior que a função $f(x) = a + bsen(cx + d)$, é periódica de período $T = \dfrac{p}{|c|} = \dfrac{2\pi}{|c|}$. □

Da mesma forma mostra-se que os períodos das funções $f(x) = a + b\cos(cx + d)$ e $f(x) = a + btg(cx + d)$ são respectivamente iguais a $T = \frac{2\pi}{|c|}$ e $T = \frac{\pi}{|c|}$.

Se o professor, e achamos que deve, quiser ir um pouco mais além, poderia desafiar os alunos para determinar a imagem e o período de funções do tipo: $f(x) = sen^2 x$ e $f(x) = sen(x) + \cos(x)$. O professor pode sugerir que os alunos usem o Geogebra para conjecturar as soluções do problema.

Para usar o teorema, as funções acima precisam ser escritas no formato $g(x) = a + b.f(cx + d)$. Para isso, vamos lembrar a fórmula do arco duplo $\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x) \Leftrightarrow sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Então, $f(x) = sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Como a função cos(x) tem período 2π, segue do teorema que $f(x) = sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ tem período $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$. Por outro lado é fácil perceber que a imagem da função $f(x) = sen^2 x$ é o intervalo [0, 1].

Quanto à função $f(x) = sen(x) + \cos(x)$, podemos transformar a soma em produto e usar novamente o teorema anterior. Observe:

$$f(x) = sen(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}senx + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$
$$f(x) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}senx + sen\frac{\pi}{4}\cos x\right) \quad .$$
$$f(x) = \sqrt{2}sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Logo, o período é T = 2π e a imagem é o intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Atividade 09: Demonstração da Lei dos Senos

Esperamos que os alunos consigam fazer a seguinte conjectura:

"Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo".

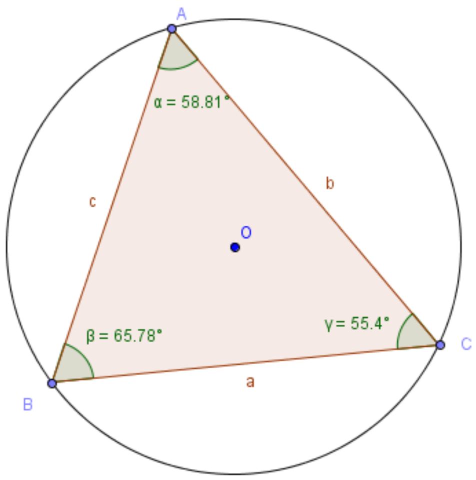


Figura 41: Lei dos Senos

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

A propriedade acima é conhecida como **Lei dos senos**, vamos fazer agora sua demonstração.

<u>**Demonstração**</u>

- Sejam α, β e γ os ângulos opostas aos lados BC, AC e AB respectivamente.

- Considere um triângulo ABC inscrito em um círculo de centro O onde a = BC, b = AC e c = AB os lados opostos aos ângulos α, β e γ respectivamente.

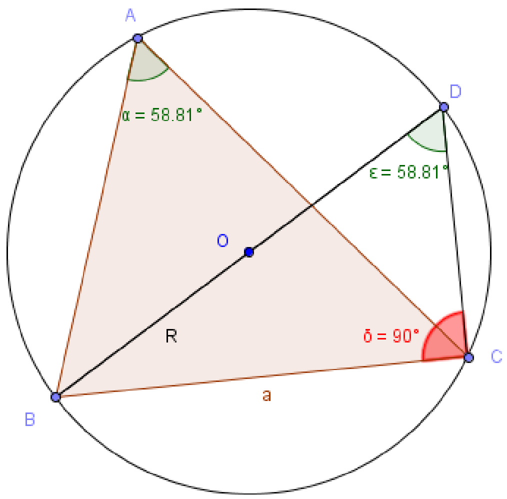


Figura 42: Demonstração de Lei dos Senos

- Pelo vértice B, trace o diâmetro do círculo e seja D a outra extremidade desse diâmetro.

- Ligue o ponto D ao ponto C, formando o triângulo BCD.
- Observe que o triângulo BCD é retângulo em D, pois sendo BD o diâmetro o arco AB é de 180º e o ângulo BCD está inscrito no círculo correspondendo a este arco, logo o ângulo BCD = 180º/2 = 90º.
- Por outro lado, os ângulos BAC e BDC também estão inscritos no círculo e correspondem ao mesmo arco BC. Logo, o ângulo BDC = BAD = α.
- Então, no triângulo BCD teremos: $sen\alpha = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2R$.
- De forma inteiramente análoga, demonstramos que: $\frac{b}{sen\beta} = 2R$ e que $\frac{c}{sen\gamma} = 2R$.
- Finalmente podemos escrever $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$. CQD.

Atividade 10: Fórmula do tronco de uma pirâmide

Todas as demonstrações desta atividade constam no capítulo 5. Não iremos repeti-las aqui.

Atividade 11: Demonstrar que o lugar geométrico dos baricentros de um triângulo inscrito em um círculo é uma circunferência

Vamos enunciar a seguinte teorema:

"*O lugar geométrico do baricentro de um triângulo ABC, quando dois vértices são mantidos fixos e o terceiro varia sobre a circunferência λ circunscrita ao triângulo, é outra circunferência cujo raio é um terço do raio de λ e cujo centro está no segmento de extremidades no ponto médio do lado oposto ao vértice variável e no centro de λ*".

Demonstração

- Seja ABC um triângulo de baricentro G inscrito numa circunferência λ de centro O e raio R.
- Seja M é o ponto médio do lado BC.
- Vamos movimentar o vértice A, mantendo os vértices B e C fixos.
- Pelo ponto G, trace uma paralela ao lado AO do triângulo AOM sendo P o ponto de interseção desta paralela com o lado OM.
- Note agora que os triângulos AOM e GPM são semelhantes pelo caso AA e, portanto, $\frac{GM}{AM} = \frac{PM}{OM} = \frac{PG}{AO}$.
- Por outro lado, pela propriedade do baricentro, $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$. Logo, $\frac{PG}{AO} = \frac{1}{3}$ mostrando que para qualquer posição do vértice A, mantendo os vértices B e C fixos, o comprimento de segmento PG será sempre 1/3 do comprimento de AO, isto é, $PG = \frac{1}{3}R$.

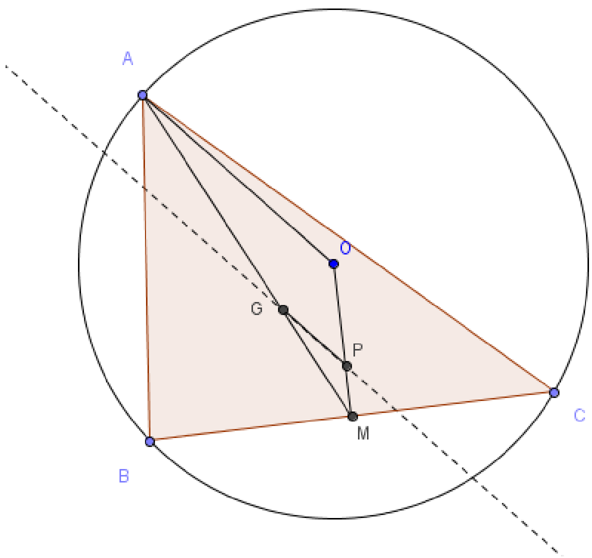


Figura 43: Demonstração da atividade 11

- Logo, o ponto G pertence à circunferência de centro P e raio $PG = \frac{1}{3}R$.

Atividade 12: Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos é uma parábola

<u>**Demonstração**</u>

- Seguindo o roteiro proposto e traçando o segmento PF, notamos que como a reta PC é a mediatriz de FX segue que o ponto P equidista de F e de X.

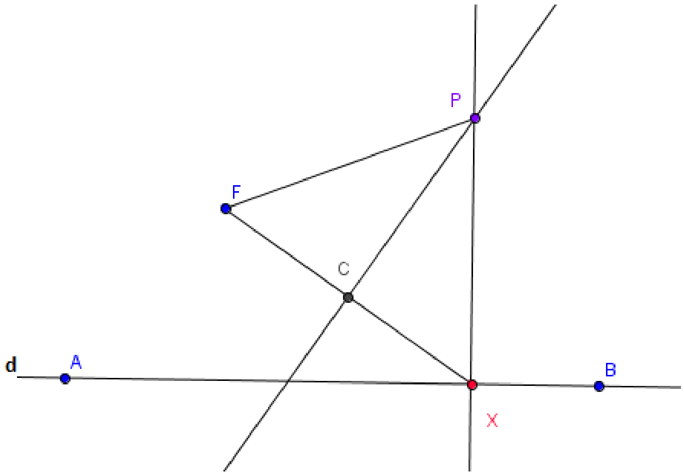


Figura 44: Demonstração da atividade 12

- Como a reta PX é, por construção, sempre perpendicular à reta AB para todo ponto X, segue que a distância de P a F é igual à distância de P à reta AB.

Logo, o LG de P é a parábola de foco F e diretriz d.

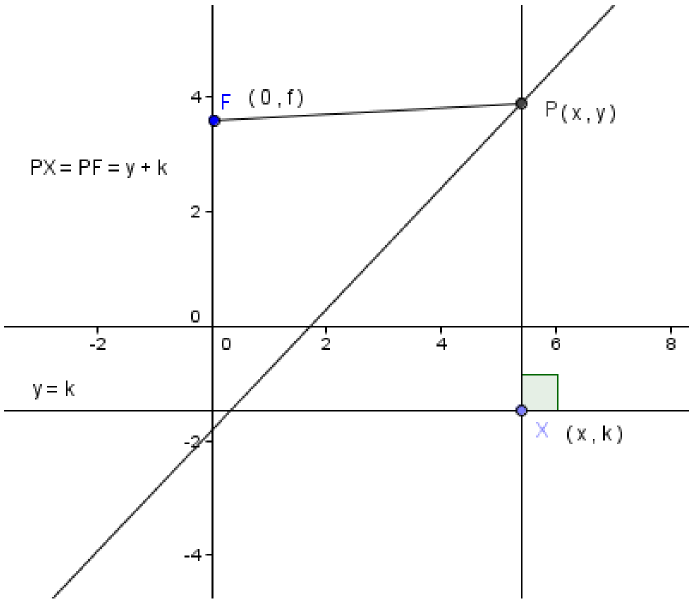


Figura 45: Construção de uma Parábola

O professor pode sugerir aos alunos que tentem resolver o problema analiticamente, isto é, considerar os eixos cartesianos e para facilitar as contas, o eixo x deve ser paralelo à reta AB e o foco F pertencente ao eixo y. Chame a reta diretriz y = k e as coordenadas do foco F = (0 , f) e deixe o aluno pensar e perceber que PX = y + k e que sendo PX = PF, basta usar a fórmula da distância entre dois pontos escrevendo:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-f)^2}=y+k \Rightarrow x^2+y^2-2fy+f^2=y^2+2ky+k^2$$
$$2(k+f).y=x^2+f^2-k^2$$
$$y=\frac{1}{2(k+f)}.x^2+\frac{f-k}{2}$$

Atividade 13: Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos é uma elipse

Vamos conjecturar que:

A curva descrita pelos pontos V, mantendo a reta d e a circunferência λ fixas, é uma elipse.

<u>Demonstração</u>

Considere uma circunferência λ de raio r com centro na origem do sistema cartesiano $x^2+y^2=r^2$ a reta d paralela ao eixo x de equação $y=k$.

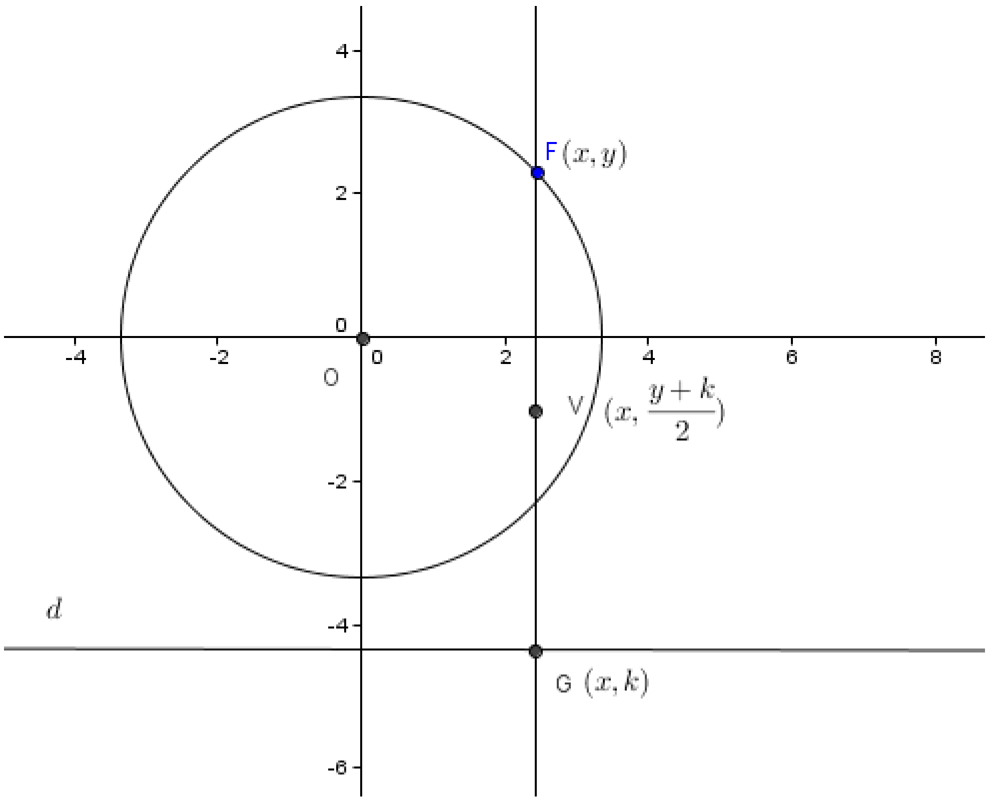


Figura 46: Construção de uma Elipse

- Reparem que os pontos F, V e G estão alinhados numa perpendicular ao eixo x logo, suas abscissas são iguais e vamos indicar por x.
- Quanto às ordenadas veja:

- O ponto F pertence a λ, portanto, sua ordenada será $F = (x, y)$.
- O ponto G pertence à reta $y = k$, logo sua ordenada é evidentemente k.
- O ponto V é ponto médio do segmento FG, logo sua ordenada é média aritmética das ordenadas de F e G, isto é, $V = \left(x, \frac{y+k}{2} \right)$.
- O ponto $F = (x, y)$ obedece à equação $x^2 + y^2 = r^2$ da circunferência.
- Então, que equação obedece ao ponto $(u, v) = \left(x, \frac{y+k}{2} \right)$?
- Temos $\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y+k}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = 2v - k \end{cases}$
- Substituindo vem:

$$u^2 + (2v-k)^2 = r^2 \Rightarrow u^2 + 4\left(v - \frac{k}{2} \right)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\frac{u^2}{r^2} + \frac{\left(v - \frac{k}{2} \right)^2}{\left(\frac{r}{2} \right)^2} = 1$$

- Veja que a equação acima representa uma elipse de centro no ponto $\left(0, \frac{k}{2} \right)$, cujo eixo maior mede r e o eixo menor mede $\frac{r}{2}$.
- Sua distância focal é 2c onde $c^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow c = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.
- Além disso, a elipse tem sempre a mesma excentricidade $e = \dfrac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, independentemente do raio de λ.

Atividade 14: Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos é uma Hipérbole.

Conjectura: *O lugar geométrico dos pontos P quando o ponto T gira sobre a circunferência de raio igual a 2a é uma Hipérbole.*

<u>Demonstração</u>

- Sejam T um ponto arbitrário de uma circunferência C de raio 2a e centro F_1 e F_2 um ponto exterior a C.
- Considere ainda o ponto P intersecção da reta F_1T com a mediatriz do segmento F_2T, como mostra a figura abaixo:

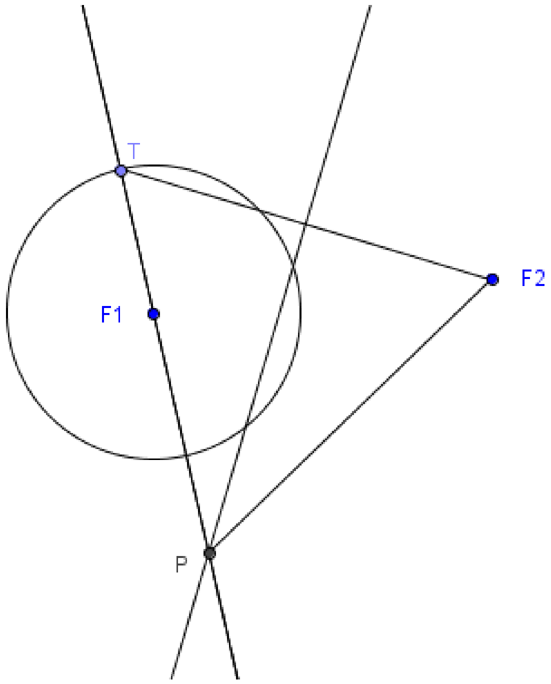


Figura 47: Demonstração da Conjectura

- Como o ponto P pertence à mediatriz do segmento F_2T, segue que $PT = PF_2$.
- Neste caso, podemos escrever que, $PF_1 + F_1T = PF_2$, isto é, $PF_2 - PF_1 = F_1T = 2a$.
- Por outro lado, dependendo da posição do ponto T, podemos ter a figura abaixo:

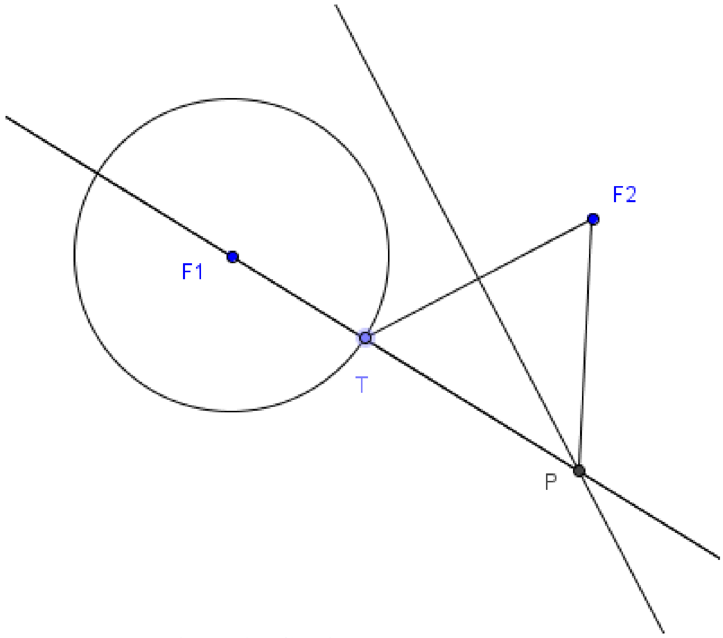


Figura 48: Continuação da Demonstração

- De forma inteiramente análoga a que escrevemos anteriormente, chegamos à conclusão que: $PF_1 - PF_2 = F_1T = 2a$.
- Portanto, independentemente da posição do ponto T, teremos sempre:
- $|PF_1 - PF_2| = 2a$. Isto mostra que o ponto P atende a definição dada para hipérbole, mostrando desta forma a conjectura.

Atividade 15: Produto de números complexos na forma trigonométrica

Teorema: O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.

<u>Demonstração</u>

Sejam $z_1 = |z_1|.(\cos\theta_1 + i.sen\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|.(\cos\theta_2 + i.sen\theta_2)$ dois números complexos na forma trigonométrica e seja $z = z_1.z_2$ o produto deles. Vamos provar que $z = |z_1.z_2|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)\right]$.

De fato,

$$z = z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1 + i.sen\theta_1).(\cos\theta_2 + i.sen\theta_2) =$$

$$|z_1.z_2|.\left[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2) + i.(sen\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_2.\cos\theta_1)\right]$$

Portanto:

$z = z_1.z_2 = |z_1.z_2|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)\right]$ e então:

$$|z| = |z_1|.|z_2| = |z_1.z_2|$$
$$\arg(z) = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi, k \in z$$

É claro que podemos estender o teorema para um produto de n fatores (n > 2), aplicando a propriedade associativa da multiplicação, ou seja, se

$z = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta) = z_1.z_2.\cdots.z_n$. Então:

$$z = |z_1.z_2.\cdots.z_n|.\left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i.sen(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)\right].$$

Quanto às considerações feitas pelo professor, vejamos:

- Dado um complexo z, se quisermos girá-lo, no sentido anti-horário, ao redor da origem de um ângulo reto sem alterar seu módulo, por qual complexo devemos multiplicá-lo?

  Veja que de acordo com o teorema acima, para girarmos o vetor no sentido anti-horário sem alterar seu módulo, basta multiplica-lo por um número complexo de módulo unitário cujo argumento seja 90°, isto é, dado $z = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta)$ teremos que

  $$z.i = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta).(\cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2}) = |z|.\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i.sen\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
  .

- E se o giro for no sentido horário?

  Raciocínio análogo nos diz que

  $$z.(-i) = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta).(\cos\frac{3\pi}{2} + i.sen\frac{3\pi}{2}) =$$

  $$|z|.(\cos\theta + i.sen\theta).(\cos\frac{-\pi}{2} + i.sen\frac{-\pi}{2}) = |z|.\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i.sen\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

- Dado um complexo z cujo afixo é o ponto (a, b), qual o afixo do complexo obtido girando z no sentido anti-horário de um ângulo reto?

  Basta observar que sendo $z = a + b.i \Rightarrow z.i = \left(a + b.i\right).i = a.i + b.i^2 = -b + i.a$, e, portanto o afixo de $w = z.i$ é o ponto (-b, a).

- E se o giro for no sentido horário?

  Analogamente, $z\left(-i\right) = (a + b.i).(-i) = -a.i - b.i^2 = b - a.i$ e, portanto o afixo de $z\left(-i\right)$ é (b, - a).

Atividade 16: Potenciação de um número complexo na forma trigonométrica

Teorema

Dado um número complexo $z = |z|.\left(\cos\theta + i.sen\theta\right)$, não nulo, e o número inteiro n, temos: $z^n = |z|^n.\left[\cos\left(n\theta\right) + i.sen\left(n\theta\right)\right]$.

Demonstração:

Este é um bom exemplo para usarmos o Princípio da Indução Finita.

Vamos provar que a propriedade é válida para todo n natural.

I. Se n = 0, então $\begin{cases} z^0 = 1 \\ |z|^0.\left(\cos 0 + i.sen 0\right) = 1 \end{cases}$

II. Suponha a propriedade válida para $n = k$, isto é, $z^k = |z|^k.\left(\cos k\theta + isenk\theta\right)$.

III. Vamos provar que também é válida par $n = k + 1$, isto é, $z^{k+1} = |z|^{k+1}.\left[\cos(k+1).\theta + i.sen(k+1).\theta\right]$.

De fato,

$$z^{k+1} = z^k.z = |z|^k.|z|\left(\cos k\theta + isenk\theta\right).\left(\cos\theta + isen\theta\right)$$
$$z^{k+1} = |z|^{k+1}\left(\cos(k\theta + \theta) + isen(k\theta + \theta)\right)$$
$$z^{k+1} = |z|^{k+1}\left(\cos(k+1)\theta + isen(k+1)\theta\right)$$

Agora vamos provar que a fórmula vale para todos os inteiros.

Se $n<0$, então $n=-m$ com $m\in\mathbb{N}$.

Por outro lado, já provamos que a fórmula é válida pra os naturais. Então:

$$z^{-m}=\frac{1}{z^{m}}=\frac{1}{|z|^{m}[\cos(m\theta)+isen(m\theta)]}=\frac{1}{|z|^{m}}.\frac{1}{[\cos(m\theta)+isen(m\theta)]}$$

$$z^{-m}=\frac{1}{|z|^{m}}.\frac{\cos(m\theta)-isen(m\theta)}{[\cos(m\theta)+isen(m\theta)].[\cos(m\theta)-isen(m\theta)]}$$

$$z^{-m}=\frac{1}{|z|^{m}}.\frac{\cos(m\theta)-isen(m\theta)}{\cos^{2}m\theta+sen^{2}m\theta}$$

$$z^{-m}=|z|^{-m}.[\cos(-m\theta)+isen(-m\theta)]$$

$$z^{n}=|z|^{n}.[\cos(n\theta)+isen(n\theta)]$$

Logo, a fórmula é válida para todo n inteiro.

8. Considerações Finais

É fato que as novas tecnologias não podem ficar de fora das novas metodologias de ensino da Matemática principalmente do ensino da Geometria. A sala de informática não pode ser apenas uma local onde os alunos são levados para assistir um filme ou até mesmo para usarem os recursos computacionais sem nenhum planejamento e objetivos pré-estabelecidos. Este ambiente escolar deve ser muito mais explorado pelos professores, principalmente os de Matemática, aguçando mais a curiosidade do aluno dando-lhes o poder de interagir com a máquina e com os recursos computacionais, possibilitando-os de terem o controle melhor da situação e do conhecimento não sendo apenas meros espectadores e sim construtores do próprio conhecimento. A facilidade em aprender a manipular os comandos do programa é tanta que é bem visível que eles dominam rapidamente qualquer programa que lhe são ensinados.

É comum hoje em dia, nas salas de aula, encontrar alunos dispersos com celulares nas mãos totalmente desatentos e concentrados na digitação de um texto para mandar um torpedo ou uma mensagem qualquer, e acreditem eles fazem isto em questão de segundos. Então, o que fazer para atrair este aluno para prestar mais atenção nas aulas? Não seria inteligente usar o computador para atraí-los? Cabe aqui um ditado bem conhecido: “Se não podemos vencê-los, juntemos a eles”. É claro que aqui o sentido de se juntar eles não é o de usar os aplicativos computacionais apenas para a diversão, e sim para mostrar que a informática e os avanços tecnológicos são ferramentas importantes para pesquisas, diversões, comunicações e também para aprendizagem, para estudar e para aprender conteúdos de Matemática.

Os computadores e os softwares educacionais são realmente aliados do professor para mudar as velhas metodologias de ensino e aprendizagem, principalmente da Matemática. A informática deve estar mais presente na rotina de estudos de nossos alunos, mas só a informática não é suficiente para uma total mudança das metodologias antigas que são praticadas ainda hoje em nossas escolas. Devem-se mudar as aulas expositivas também. Não se pode transferir tudo para a sala de informática e pensar que todas nossas aulas devem ser planejadas e voltadas para o uso dos recursos computacionais, se não se está preparado para ouvir frases do tipo “de novo nós vamos para a sala de informática”, “não aguento mais ir para a sala de informática, é tudo a mesma coisa”. Estas frases com certeza poderão surgir se houver um uso inadequado da sala dos computadores.

Devem-se usar outras coisas para aproximar os alunos das aulas de Matemática. As demonstrações de propriedades clássicas podem ser usadas para esta aproximação. Nas aulas de Geometria este fato fica mais evidente. Quem não se lembra de aulas onde se decorava algumas fórmulas e repetia-se uma série de exercícios iguais para aplicá-las. Exercícios sem nenhuma contextualização puramente mecânicos e nem um pouco desafiadores. Aquilo era realmente muito desmotivador sem graça, pois se repetia a mesma fórmula várias vezes para resolver exercícios mais sem graça ainda. Pensava-se que a Matemática era uma gaveta cheia de fórmulas, bastando abri-la para pegar uma e sair resolvendo um monte de exercícios todos iguais. Quando se demonstra uma fórmula, mostra-se para os alunos que esta não surgiu por acaso ou por pura sorte ou ainda, por algum experimento que foi repetido algumas vezes e chegou-se a conclusão de que a fórmula funciona e então é só usá-la. O objetivo, na verdade, é mostrar que a Matemática possui uma estrutura sólida de etapas lógicas que se encaixam perfeitamente possibilitando que as fórmulas ou propriedades sejam justificadas garantindo sua veracidade.

Quando se demonstra, está se falando para os estudantes que a Matemática precisa ser formalizada para ter credibilidade e que é assim que se deve estudá-la para a se compreender melhor e se poder enxergá-la como uma ciência útil que foi desenvolvida ao longo dos séculos e que possui um encadeamento lógico indispensável para seu desenvolvimento. As aulas de Geometria são perfeitas para se introduzir a lógica dedutiva nos alunos. As propriedades Geométricas favorecem o desenvolvimento intelectual permitindo uma visão diferente da Matemática e despertando-os para o rigor nas justificativas que levarão para toda a sua trajetória estudantil e profissional.

Enfim, está claro que com dedicação e capacitação dos professores, pode-se mudar muito as antigas formas metodológicas de ensinar a Matemática. Com as escolas sendo equipadas com aparatos tecnológicos, a sala de informática se torna um recurso indispensável para esta mudança permitindo elaborações de aulas diferentes mais atrativas e com uma metodologia que permita aos alunos realmente desenvolver seu raciocínio construindo seu conhecimento de forma significativa.

9. Referências

AUGUSTO, A. A repercussão do artigo, Decorar é preciso. Demostrar também é. Revista do Professor de Matemática Nº 69.

ALMOULOUD saddo; MELLO, S.G. Elizabeth. Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf> Acesso em 16/03/2011.

ARAUJO, L. C. L. Cuidado no uso do computador. Revista do Professor de Matemática Nº 70.

ARAUJO, L. C. L. Geogebra, um bom software livre. Revista do Professor de Matemática Nº 67.

BRAVIANO, G, RODRIGUES, M.H.W.L. Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria? Revista do Professor de Matemática Nº 49.

CARNEIRO, J.P.Q. Pesquisa de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica. Revista do Professor de Matemática Nº 61.

DANTE, L.R. Matemática, contextos e aplicações.v.2. Ed. Ática. 1ª edição.

FERREIRA, A.C, Costa. Ensino da Geometria no Brasil: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI136.pdf>. Acesso em 16/03/2011.

GARBI, G.G. C.Q.D, explicações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Editora, Livraria da Física, 2010. 1ª edição.

GARBI, G.G. Decorar é preciso. Demonstrar também é. Revista do Professor de Matemática Nº 68.

GARBI, G.G. Para que serve isso. Revista do Professor de Matemática Nº 63.

GARBI, G.G. A Matemática Grega em uma casca de noz. Revista do Professor de Matemática Nº 51.

GRAVINA, Maria Alice . Santarosa, Lucila Maria. *"A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados"*, Acta do IV Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, Brasília, 1998. Campinas, 2003.

GRAVINA, Maria Alice. *"Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria"*, Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, pp. 1-13, Belo Horizonte, 1996.

GONÇALVES, Alex Oleandro. O SOFTWARE RÉGUA E COMPASSO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA: POSSIBILIDADES E DESAFIOS. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3048_1602.pdf>. Acesso em: 16/03/2011.

http://www.famat.ufu.br/revista/revistaabril2007/salaaula/EnsinoTatianeWalter.pdf. Acesso em 12 de março de 2010.

http://www.portalodm.com.br/brasil-vai-ensinar-paises-pobres-a-monitorar-desmatamento-por-satelite--n--258.html. Acesso em 12 de março de 2010.

http://www.webquestbrasil.org/criador/webquest/soporte_mondrian_w.php?id_actividad=14688&id_pagina=1. Acesso em 12 de março de 2010.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pick.html. Acesso em 12 de março de 2010.

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. Complexo, polinômios e equações Algébricas, V.06. 7ª edição, ed. Atual 1993.

LEME, Maria Célia**.** A Geometria Escolar e o Movimento da Matemática Moderna: em busca de uma nova representação. Disponível em: < http://www.smmmfloripa.ufsc.br/LemedaSilva_art.pdf>. Acesso em 16/03/2011.

LEME, Maria Célia. O ENSINO DA GEOMETRIA, NO BRASIL, EM TEMPOS DE MATEMÁTICA MODERNA: UMA PRIMEIRA ANÁLISE NOS LIVROS DIDÁTICOS DE SANGIORGI*. GHEMAT – PUC/SP. Disponível em: < http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/SIEM/C30.pdf>. Acesso em 16/03/2011.

LEME, Maria Célia. O ensino de Geometria durante o movimento da Matemática Moderna. GHEMAT – UNIBAN. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3048_1602.pdf

LIMA E. E, Carvalho P. C, Wagner E. Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio V.1, sexta edição.

LIMA E. E, Carvalho P. C, Wagner E. Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio V.2, sexta edição.

LIMA E. E, Carvalho P. C, Wagner E. Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio V.3, sexta edição.

LIMA, E.L. Meu professor de Matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática; SBM. 1991.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? *A educação matemática em **revista.*** Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Edição especial.

LOPES, LUIS. Manual de indução matemática. Problemas, questões, exercícios. Editora Interciência, 1998.

MOCROSK, L.F; BAUMANN, A.P.P; MONDINI, F. Um ensaio sobre demonstrações geométricas na Educação Básica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia – PPGECT. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – 2009 ISBN: 978-85-7014-048-7. Página: 1177. Disponível em: <http://www.pg.utfpr.edu.br/sinect/anais/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo25.pdf>. Acesso em 16/03/2011.

NASCIMENTO, M. C, PAULOVICH, L. Gerando uma elipse a partir de parábolas com focos em uma circunferência e diretriz fixa. Revista do Professor de Matemática Nº 63.

OLIVEIRA, L. Liliane, VELASCO, D. Ângela. O ensino de Geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/OENSINO.pdf>. Acesso em: 22 de novembro de 2010.

OSVALDO D, JOSÉ N.P. Fundamentos da Matemática Elementar. Geometria Plana. V. 09. 7ª Edição. Ed. Atual 1993.

PEREIRA, M, João. O uso da informática no ensino da Geometria: Unicamente dinâmica e didática ou vantagem cognitiva. Disponível em: <http://www.bdtd.ucb.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=569>. Acesso em: 22 de novembro de 2010.

PEREIRA, T. Marcella. Proposta de Atividades para a construção do conceito de semelhança de triângulos usando o software de Geometria Dinâmica Régua e Compasso. Universidade Severino Sombra. Programa de Pós-Graduação Stricto sensu. Mestrado Profissional em Educação Matemática. Disponível em: < http://www.uss.br/arquivos/produto-marcella-vfinal.pdf>. Acesso em 16/03/2011.

POLYA, George, 1887-1885. A Arte de Resolver Problemas. Editora Interciência, 7ª edição.

SOUZA, J.C, CARDOSO, A. Estudo das cônicas com Geometria Dinâmica. Revista do Professor de Matemática Nº 68.

SCHIDT, M.Gertrudes. Geometria Plana com o auxilio do software régua e compasso. Disponível em: <http://www.unifra.br/cursos/matematica/downloads/Magda%20Gertrudes%20Schmidt.pdf.pdf>. Acesso em 16/03/2011.