Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

As Grandes Navegações: aspectos matemáticos de alguns instrumentos náuticos †

por

David Alisson Uchôa de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2017
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

O48g Oliveira, David Alisson Uchôa de.
As grandes navegações: aspectos matemáticos de alguns instrumentos náuticos / David Alisson Uchôa de Oliveira. - João Pessoa, 2017.
69 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Navegação Astronômica. 3. Astrolábio - Balestilha (instrumentos). 4. Tavoleta da Índia. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/BC

As Grandes Navegações: aspectos matemáticos de alguns instrumentos náuticos

por

David Alisson Uchôa de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: História da Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade - UFPB

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva - Pós-Doc, UFPB/UFPE

Agosto/2017

Agradecimentos

Ao meu Senhor Jesus Cristo, acima de tudo e todos, pela a sua graça, providência e misericórdia que me acompanharam ao longo de todo o curso.

A minha amada esposa Gerlane Raquel, por suportar todos os sacrifícios e abnegações, por mim solicitados para conclusão desse trabalho.

A toda minha família, pelo constante incentivo e apoio de todas as formas.

Aos meus amigos, José Carlos, Mailson, Diego, Manoel, Rafael, Rômulo, Erielson, Valmir, Ramon, Eduardo, Adim e Leônidas, pelos conhecimentos e conselhos compartilhados ao longo desse mestrado e também pelos ótimos momentos de descontração e companheirismo.

Ao professor Eduardo Santos, meu orientador, pela constante solicitude, paciência e prestatividade nos conselhos, orientações e correções.

Aos professores do PROFMAT, Bruno, Carlos Bocker, Elisandra, Miriam, Flank, Lenimar e Pedro Hinojosa, por todos os ensinamentos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim agradeço a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização desse trabalho.

Dedicatória

A minha avó, Albanita Uchôa de Andrade (in memorian), pelo constante incentivo, desde minha infância, a buscar a educação como o bem terrestre mais valioso de todos.

À maneira de nuvens se começam
A descobrir os montes que enxergamos;
As âncoras pesadas se adereçam;
As velas, já chegados, amainamos.
E, pera que mais certas se conheçam
As partes tão remotas onde estamos,
Pelo novo instrumento do astrolábio,
Invenção de sutil juízo e sábio.

(Os Lusíadas - Canto V)

Resumo

A Era das Grandes Navegações foi um importante período histórico que ocorreu entre o fim do século XV e o início do XVII e é marcada, para os europeus, pelo descobrimento das Américas, pelo estabelecimento da rota do Atlântico para o Índico pelo sul da África e pelas primeiras viagens de circunavegação do globo terrestre. Essas viagens transoceânicas só se tornaram possíveis graças a um esforço tremendo de busca pelo desenvolvimento das ciências, especialmente, a matemática, No presente trabalho, apresentamos os principais instrumentos que possibilitaram o desenvolvimento da navegação astronômica e a Matemática aliada à criação, construção e manuseio desses instrumentos náuticos antigos.

Palavras-chaves: Matemática, Astronomia, Navegação, Astrolábio, Tavoleta da Índia, Balestilha.

Abstract

The Age of Discovery was an important historical period that occurred between the end of the fifteenth century and the beginning of the seventeenth century. It was marked in an European point of view by discovery and invasion of America, the transition from the Atlantic to the Indian Ocean in southern Africa and the first circumnavigation travel. These transoceanic voyages were only possible thanks to a tremendous effort to search for the development of sciences, especially, Mathematics. In the present work, we present the main instruments that was commonly used in that astronomical navigation, and a Mathematics involved on them period for.

Keywords: Mathematics, Astronomy, Navigation, Astrolabe, Kamal, Cross-staff.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A partir do século XV, ocorreram grandes mudanças econômicas no mundo antigo, o comércio entre o Ocidente e o Oriente surgia como a nova forma de produção de riqueza e poder da qual todos os grandes reinos da Europa almejavam se tornar protagonistas. Os cobiçados produtos e especiarias tinham origem na China e na Índia. De lá eram trazidos por rotas terrestres pelos árabes, até as cidades portuárias de Constantinopla, Trípoli e Alexandria, na costa do mediterrâneo e dali eram levadas por rotas marítimas mediterrâneas pelos comerciantes italianos, que monopolizavam este comércio e distribuíam essas valiosíssimas mercadorias para toda Europa. Desde o início do século XV, primeiramente Portugal e depois a Espanha, passaram a investir em um esforço para encontrar alguma rota alternativa que possibilitasse o acesso direto às terras orientais, de onde pretendiam buscar as especiarias sem o atravessamento dos árabes e italianos. Tal feito possibilitaria, sem dúvida, o protagonismo comercial para aquele reino que estabelecesse seu próprio caminho para Índia.

Desde a Idade Média se cogitavam duas rotas marítimas alternativas para chegar-se ao Oriente. Uma indicava um caminho no sentido oeste pelo Oceano Atlântico e a outra afirmava que navegando-se ao sul pela costa da África em algum momento se encontraria uma passagem que levaria ao encontro das terras orientais. Esse contexto nos explica qual a motivação que levou as duas nações ibéricas a se desbravarem nas perigosas viagens transoceânicas, iniciando a chamada, Era das Grandes Navegações, que culminou com a descoberta do Novo Mundo.

Ressaltamos aqui a necessidade de um forte desenvolvimento das primitivas técnicas empíricas de navegação europeias, que possibilitasse o percurso e a localização em alto mar. Essa necessidade demandou uma efervescente produção de conhecimento geográfico, astronômico e acima de tudo matemático, o qual possibilitou o surgimento da Navegação Astronômica, que se baseava na relação entre a posição e a altura angular dos astros celestes com a localização do observador sobre o globo terrestre. Os fundamentos matemáticos também foram indispensáveis para a criação, construção e manuseio dos instrumentos necessários para as observações celestes e demais procedimentos da nova marinharia que surgia.

O presente trabalho é composto por uma introdução, onde fizemos um breve resumo histórico do contexto que ensejou a realização das grandes navegações dos descobrimentos e por dois capítulos, onde no primeiro, expomos os conceitos básicos de astronomia, necessários para a devida compreensão do processo de localização em alto mar através das estrelas e no segundo descrevemos, em detalhes, os processos matemáticos de construção e manuseio de quatro dos instrumentos náuticos de observação celestes utilizados nas navegações dos descobrimentos, os quais julgamos mais importantes e adequados aos objetivos da nossa pesquisa.

Objetivo geral do trabalho

Abordar a importância que teve a Matemática para o sucesso das Grandes Navegações e também servir como auxílio, ao professor da educação básica, na introdução em sala de aula dos temas aqui abordados sobre uma perspectiva instigante para o aluno e também interdisciplinar, podendo ser aplicado, além da Matemática, pelo menos nas disciplinas de História, Física e Geografia.

Objetivos específicos

- Relacionar os estímulos e motivações que levaram à execução das navegações dos descobrimentos com a produção matemática necessária para tal feito;
- Expor os conceitos básicos da astronomia que possibilitaram o uso dessa ciência na navegação;
- Apresentar um panorama histórico do surgimento e desenvolvimento da Navegação Astronômica;
- Descrever os principais instrumentos náuticos de observação celestes utilizados pelos navegadores da Era dos Descobrimentos, sob o ponto de vista da matemática a eles empregada em suas construções e manuseios.

Capítulo 1

Navegação Astronômica

Para podermos compreender os instrumentos usados pelos navegadores da Era das Grandes Navegações e, em especial, a matemática a cada um deles aplicada, em seus: projetos, construções e usos; precisamos conhecer um pouco da ciência sob a qual eles estavam atrelados. Esta ciência é a astronomia que, desde sempre anda de mãos dadas com a Matemática.

Portanto, neste capítulo, faremos um resumo do mínimo que se precisa saber da astronomia básica para que possamos compreender como os instrumentos medievais, os quais discutiremos em detalhes, logo mais a frente, puderam ser adaptados para o uso náutico e usados para obter-se a localização aproximada das embarcações em alto-mar durante o percusso das viagens transoceânicas.

1.1 A Esfera Celeste

A primeira proposta de elucidação dos movimentos dos astros no céu foi o modelo geocêntrico sistematizado por Ptolomeu no século II, em cima de contribuições anteriores. Neste modelo, a terra era o centro do universo e todos os demais astros orbitavam ao redor dela. Com a revolução científica iniciada no Renascimento Europeu, surgiu o modelo heliocêntrico, apresentado por Copérnico, aperfeiçoado pelas observações de Galileu, exposto matematicamente por Kepler, por fim, plenamente demonstrado por Newton. Neste novo modelo, que hoje comprovadamente sabemos ser o correto, o Sol é o centro do sistema solar e todos os demais astros desse sistema, orbitam ao seu redor sob o efeito da gravidade.

Por volta do século XVI, sequer o conceito de que o nosso planeta era uma esfera era plenamente aceito por todos. No século IV a.C., Aristóteles havia argumentado que a terra era uma esfera ao observar que a sombra da terra que se mostrava nos eclipses lunares era circular. Erastóstenes (240 a.C.) calculou o raio da terra com uma boa precisão, a seguir descreveremos o procedimento executado por ele.

Erastóstenes, que era bibliotecário-chefe da famosa biblioteca de Alexandria, encontrou certa vez, durante seus afazeres, um escrito no qual se dizia que no dia 21 de junho, data do solstício de verão do hemisfério norte, na cidade egípcia de Siena, o Sol do exato meio dia não produzia sombra alguma sobre nenhum objeto posto na vertical. Sabendo ele que o mesmo nunca acontecia em Alexandria e que, pela imensa distância do Sol à Terra, os seus raios só poderiam chegar paralelos em todo o planeta; cogitou que a terra não podia ser plana mas, esférica e, através de um experimento, provou sua tese e calculou o raio da terra.

Ao observar que na data estipulada, de fato o sol do meio dia incidia perpendicularmente sobre a cidade de Siena, iluminando por completo o fundo de um poço lá localizado, prosseguiu a fazer mesma medição, na mesma data e horário, em Alexandria. Nesta última cidade ele constatou que o sol projetava uma sombra de cerca de $7°$ que ele aproximou para $\frac{1}{50}$ de circunferência. De posse da informação de que as duas cidades distanciavam-se cerca de 800 km, pode calcular a circunferência da terra e posteriormente o seu raio. Veja a figura 1.1

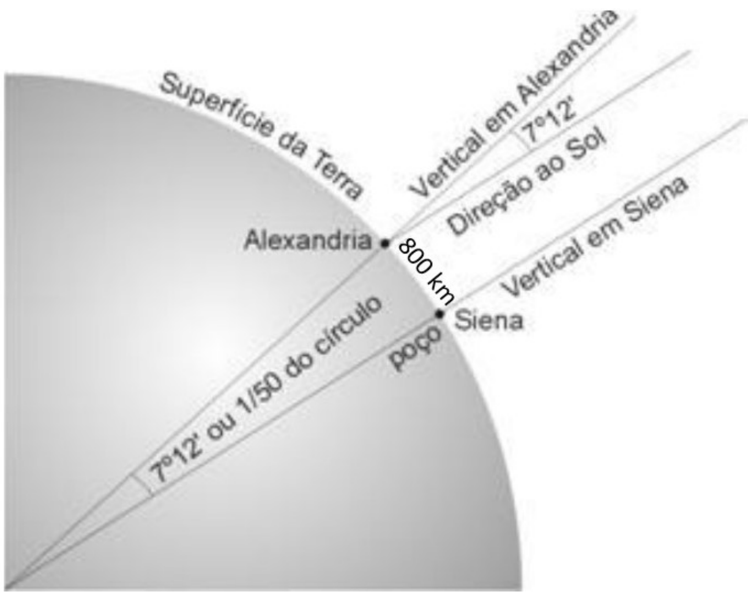

Figura 1.1: Medição do raio da Terra por Erastóstenes
Fonte: SANTIAGO e SALVINO, 2005, p. 22

Circunferência da terra

$$\frac{1}{50} = \frac{800}{C}$$

$$C = 50 \times 800$$

$$C = 40.000$$

Raio da terra

$$C = 2\pi r$$

$$r = \frac{40.000}{6,28}$$

$$r \cong 6.370$$

Hoje, sabemos que a circunferência meridional da Terra é de 40.008 km. Com isso Erastóstenes teria chegado a um valor para circunferência do nosso planeta com um erro inferior a 0,02%[1].

Como já citamos, o modelo geocêntrico ainda nos é útil para os sistemas de localização astronômica. Isso não é difícil de compreender pois, na teoria física dos movimentos, tudo depende do referencial. Assim sendo, estando nós fixos na terra, nada é mais natural do que fazermos dela o nosso referencial.

Considerando então a Terra como centro do universo, temos ao seu redor uma capa esférica celeste, que chamamos de Esfera Celeste ou Abóbada Celeste. Esta possui um raio infinitamente grande onde nela estão fixos os astros, com exerção do sol, dos planetas e seus satélites, que são móveis na esfera. Todos os astros, porém, juntos com a esfera, giram ao redor de um eixo celeste imaginário, suporte do eixo terrestre polar. Esse movimento, por nós é percebido, de leste para oeste com uma duração de 24 horas para um giro completo.

Como vemos na figura 1.2, Os círculos máximos terrestres dos meridianos e do equador, assim como os paralelos e os polos terrestres, possuem todos uma representação projetada na esfera celeste. Ressaltamos em especial o Equador Celeste, o qual é formado pela interseção do plano que contém o equador terrestre, com a esfera celeste.

Definiremos a seguir alguns conceitos importantes para o estudo da esfera celeste e da localização astronômica.

Coordenadas Geográficas Terrestres

A localização na superfície terrestre é feita através da marcação imaginaria de círculos máximos que passam pelos polos, chamados de meridianos e por um outro circulo máximo, chamado Equador Terrestre, seguido de outros círculos paralelos a

[1] A unidade de comprimento que Erastóstenes usou em seu cálculo do raio da Terra foi o estádio, porém há uma certa dificuldade na interpretação de textos antigos por haver discrepâncias entre os tamanhos exatos do estádio, variando de acordo com o local, a época e o uso. Aqui abordamos a versão mais otimista considerando um estádio equivalente a 160 metros.

Figura 1.2: A Terra e a Esfera Celeste
Fonte: http://iniciacionalaastronomia.weebly.com/ud2-coordenadas-celestes.html, acesso em 20/07/2017

ele. O plano que contém o equador, chamado Plano Equatorial, é ortogonal ao eixo polar da Terra, e esta é dividida ao meio por ele, em dois hemisférios, norte e sul.

Ao longo do meridiano de Greenwich, obtemos uma coordenada dada por uma medida angular que varia de 0° a 90° no sentido do equador aos polos, a qual chamamos latitude, e esta pode ser norte ou sul. Já em relação ao equador terrestre, temos a segunda coordenada, chamada longitude, a qual também pode ser medida em graus, variando de 0° a 180° a partir do meridiano de Greenwich, podendo ir a leste ou a oeste. É comum medir-se a longitude em horas, devido a sua relação com o movimento de rotação terrestre.

Todos os círculos e até mesmo pontos no globo terrestre, como por exemplo os polos sul e norte, possuem uma representação no céu, que nada mais é do que as suas projeções na esfera celeste. O exemplo mais recorrente é o equador celeste, o qual é a projeção celeste do equador terrestre.

Zênite e Nadir

Para cada observador em um determinado ponto da terra, podemos imaginar uma linha reta que passa pelo centro do planeta e pelo observador ou local específico. O prologamento *ad infinitum* dessa linha intersecta um ponto na esfera celeste, o qual chamamos de Zênite do observador ou do local. Se estendermos *ad infinitum* a mesma linha, agora no sentido contrário, encontraremos também na esfera celeste, um outro ponto chamado Nadir, diametralmente oposto ao zênite.

O zênite do observador é um ponto celeste muito importante para os sistemas de localização astronômica, e a direção que vai do observador ao zênite é chamada de Direção Vertical ou Vertical do Observador. Esta direção pode-nos ser facilmente obtida, com um fio de prumo posto exatamente sobre nossa cabeça. Quando um astro se encontra no nosso zênite, dizemos que ele está a pino em relação a nós.

Plano do Horizonte

Se estivermos em um ponto sobre a superfície da terra, de preferência em alto mar, teremos a impressão que estamos sobre um imenso plano delimitado por uma linha circular que nos rodeia, na qual estamos no centro. A este plano chamamos de Plano do Horizonte, e a linha formada pela interseção dele com a esfera celeste, chamamos de Horizonte.

O plano do horizonte é relativo ao observador, e assim varia de acordo com a posição deste sobre o globo terrestre, permanecendo sempre ortogonal à direção vertical do observador. No plano do horizonte situam-se os pontos cardeais: Norte (N), Sul (S), Leste (E) e Oeste (W).

Como o tamanho da Terra dentro do universo é absurdamente ínfimo, o horizonte visível por um observador terrestre, divide a esfera celeste ao meio, em dois hemisférios, um visível e outro invisível; ainda que o mesmo não aconteça com a Terra, pois o que o observador enxerga da superfície da terrestre, delimitada pelo horizonte, não passa de uma pequeníssima calota do globo.

Meridiano do Observador

O plano que contém o zênite do observador e também os pontos cardeais norte e sul, é chamado de Plano Meridiano, e à sua interseção com a esfera celeste, chamamos de Meridiano astronômico do observador sendo, portanto, um círculo máximo da abóbada celeste. Como o meridiano astronômico possui apenas uma metade visível ao observador, alguns autores costumam defini-lo como sendo apenas o semicírculo que fica acima do horizonte. Outros preferem chamar este último de Meridiano Superior ou ainda, Semimeridiano Superior. O meridiano astronômico é facilmente entendido como sendo a projeção do meridiano terrestre de um observador, sobre a esfera celeste.

O Vertical de um Astro

Um outro plano bastante importante para os sistemas de localização astronômica é o chamado Vertical do Astro, este é o plano que contém o observador O, o zênite Z e o astro E, conforme a figura 1.3. Chamamos de Círculo Vertical do Astro à interseção do seu vertical com a esfera celeste.

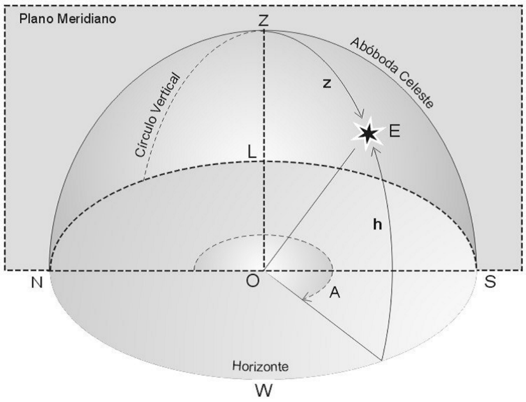

Figura 1.3: Vertical do Astro e Plano Meridiano
Fonte: SANTIAGO e SALVINO, 2005, p. 10

1.1.1 Sistema Horizontal de Coordenadas

Assim como na Terra podemos localizar qualquer ponto na superfície terrestre com as duas coordenadas geográficas, latitude e longitude, na esfera celeste também podemos localizar um astro com duas coordenadas. Utilizando o sistema horizontal, essas duas coordenadas serão a Altura e o Azimute.

Este sistema de coordenadas horizontais tem por base o plano do horizonte e portanto é referente ao observador. Dessa forma, as coordenadas de um astro no céu variam com o tempo e com a posição do observador na Terra. Isto é fácil de se compreender devido ao movimento de rotação do Planeta e pelo fato, já exposto, de que o horizonte do observador, a ele atrelado, varia de acordo com sua posição na superfície terrestre.

A coordenada da altura de um astro é a medida angular da distância deste ao horizonte. É portanto um arco traçado no círculo vertical do astro, tendo uma de suas extremidades no horizonte. Por convenção, a altura h é medida em graus e varia no intervalo, $-90° \leq h \leq 90°$, tendo $0°$, $90°$ e $-90°$ respectivamente no: Horizonte, Zênite e Nadir.

Outra medida importante, com forte relação com a altura, é a Distância Zenital. Esta é a distância angular entre o astro e o zênite do observador. Como vemos na figura 1.4, a distância zenital z é complementar da altura h, ou seja: $h + z = 90°$. Para isso z varia no intervalo, $0° \leq z \leq 180°$. É comum usar z no lugar de h, como coordenada horizontal.

Com o auxílio da figura 1.4, é fácil perceber que apenas a altura do astro E, não é suficiente para localizá-lo no céu, pois ao longo de todo um círculo da esfera celeste, paralelo ao horizonte, chamado Paralelo de Altura, podemos localizar diversos astros em semi verticais distintos, todos com a mesma altura.

Para completar a localização do astro é necessário uma segunda coordenada cha-

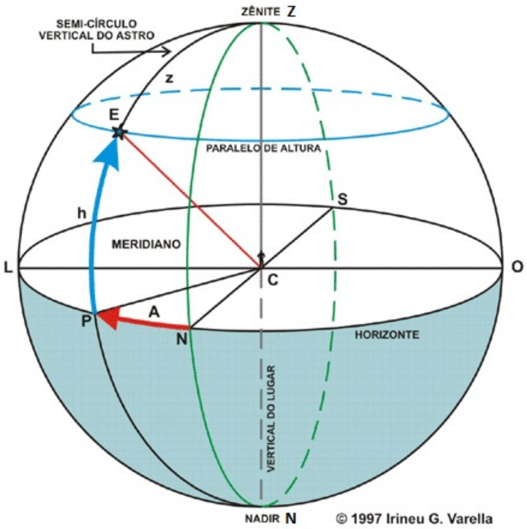

Figura 1.4: Sistema Horizontal de Coordenadas
Fonte: http://www.uranometrianova.pro.br/cursos/astronomia_esferica01 /esferica1040.htm, acesso em 29/07/2017

mada Azimute. Este também é uma medida angular, tomada no plano do horizonte e definida pelo ângulo entre o eixo Norte Sul e a reta que passa pelo observador e pela projeção do astro no plano do horizonte. Em outras palavras, o azimute corresponde ao ângulo entre o plano meridiano do observador e o plano vertical do astro, tomado do Norte em direção ao Leste. Portanto o azimute A, representado na figura 1.4, varia no intervalo, $0° \leq A \leq 360°$.

1.1.2 Sistema Equatorial de Coordenadas

Uma outra forma de localizar os astros na esfera celeste é usando o Sistema Equatorial de Coordenadas, este diferente do Sistema Horizontal, não depende do movimento de rotação da Terra e nem tão pouco da posição do observador sobre a superfície terrestre, pois suas coordenadas são fixas para um astro que permaneça imóvel na esfera celeste.

O sistema equatorial de coordenadas, semelhante ao horizontal, também possui duas coordenadas angulares: a Ascensão Reta α e a Declinação δ. Esse sistema tem coordenadas fixas porque o seu plano de referência é sempre o plano equatorial, independente da posição do observador sobre a Terra.

Pela figura 1.5 podemos observar as coordenadas equatoriais do astro E, onde sua declinação δ é sua distância angular em relação ao equador celeste, tendo a Terra T como centro. Por convenção, as declinações do hemisfério norte são positivas e as do sul negativas. A interseção do plano que contém E, T e PNC (Polo Norte Celeste) com a esfera celeste define nesta, um grande círculo chamado de Círculo Horário do Astro. Já a distância do astro E ao polo norte celeste é chamada de Distância Polar, representada pelo arco P na figura. É fácil ver que a distância polar P é complementar à declinação δ, ou seja:

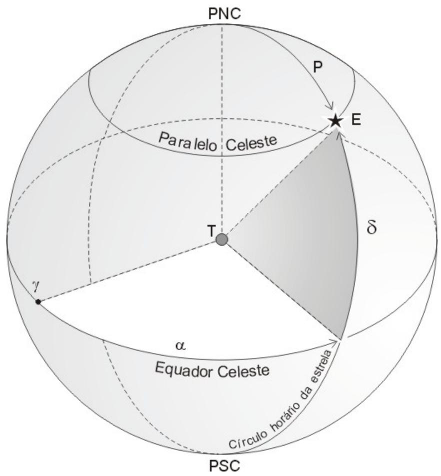

Figura 1.5: Sistema Equatorial de Coordenadas
Fonte: http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/eqcoords.jpg, acesso em 30/07/2017

$$\delta + P = 90° \quad com \quad -90° \leq \delta \leq 90° \;\; e \;\; 0° \leq P \leq 180°$$

Ainda na figura 1.5 vemos que a declinação δ do astro E, produz um círculo celeste paralelo ao equador celeste, chamado Paralelo Celeste ou Paralelo de Declinação e ao longo deste círculo celeste qualquer astro possui a mesma declinação, necessitando-se de uma segunda coordenada para localizar um astro no sistema equatorial, e esta é a Ascensão Reta.

A ascensão reta α é definida no plano equatorial, como o arco do equador celeste que representa o ângulo entre o plano que contém PNC, T e γ com o plano que contém PNC, T e o astro E, conforme a figura 1.6, onde o ponto γ, chamado de Ponto Vernal ou Ponto de Áries é um dos dois pontos de intersecção da eclíptica com o equador celeste. É a partir de γ que a ascensão reta cresce, no sentido anti-horário, variando no intervalo, $0° \leq \alpha \leq 360°$.

Assim como a longitude terrestre, é comum medir-se a ascensão reta em horas, devido a sua relação com o movimento de rotação terrestre. Dessa forma dividindo 360° pelas 24 horas do dia, chegaremos a seguinte equivalência: $1h = 15°$

1.2 O Sol e a Rotação e Translação da Terra

Sabemos que a Terra descreve no espaço pelo menos dois movimentos muito importantes: o de Rotação em torno de seu eixo polar e o de Translação ao redor do Sol. Há outros movimentos que envolvem a Terra no sistema solar, porém fogem ao interesse do nosso trabalho e portanto não descreveremos aqui.

1.2.1 A Rotação e movimento aparente dos astros no céu

O movimento de rotação da Terra é o mais sensível por nós, pois, ao completar um ciclo, bem mais rápido que o de translação, em 24 horas, produz em cada região da Terra dias e noites, de acordo com sua posição em relação ao Sol. Esse movimento, convencionando o norte como a direção superior, acontece no sentido anti-horário de oeste para leste. Além disso com que o observador terrestre tenha a impressão de que todos os astros celestes giram ao redor da Terra, nascendo a leste e se pondo a oeste.

O astros do céu descrevem então um movimento aparente ao redor da Terra e este movimento circular ocorre para cada astro ao longo de um paralelo celeste. Sabemos, porém, que, em relação a Terra, nem todos os astros se mantém fixos na esfera celeste, mais especificamente, a lua, o Sol e os planetas do nosso sistema solar. Desde a antiguidade, o homem já percebia a diferença do movimento desses astros citados, excetuando obviamente os planetas por nós hoje conhecidos mas, que não são visíveis a olho nu. Trataremos, a seguir, do movimento aparente do Sol na esfera celeste. À trajetória desse movimento chamamos de Eclíptica, a qual está plenamente relacionada com o movimento de translação terrestre.

1.2.2 A Translação e a ocorrência das Estações do Ano

O nosso planeta Terra descreve no espaço um movimento de translação ao redor do Sol em uma órbita elíptica, tendo o Sol em um de seus focos. O que torna esse movimento mais complexo e com importantes consequências para o homem é o fato de que o eixo de rotação da Terra possui uma inclinação de aproximadamente $23,5°$, e como é próprio a um movimento de translação, a direção do eixo terrestre permanece a mesma ao logo do ano, quando a Terra completa uma volta ao redor do Sol. A principal consequência da inclinação do eixo terrestre é a ocorrência anual e periódica das estações climáticas: primavera, verão, outono e inverno.

Como vemos na figura 1.6, o percusso orbital da Terra possui quatro pontos notáveis. Em torno do dia 22 de junho de cada ano ocorre o solstício de junho, quando a Terra se posiciona de forma que os raios do Sol incidem perpendicularmente sobre o paralelo terrestre, ao norte, mais alto possível. Este é chamado de Trópico de Câncer que define uma latitude norte de $23,5°$ equivalente ao ângulo de inclinação do

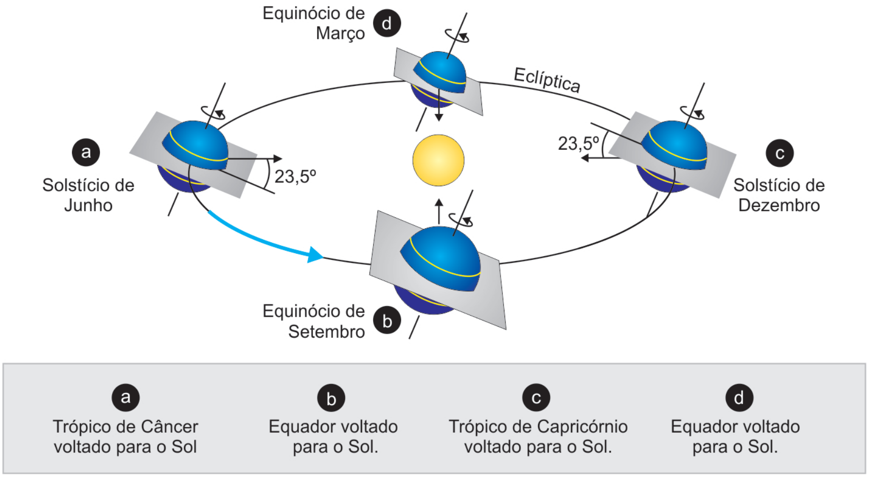

Figura 1.6: Órbita da Terra ao redor do Sol
Fonte: http://www.if.ufrgs.br/fis02001/figuras/estacoes3_clara.jpg 30/07/2017

eixo terrestre. Desta forma, como bem vemos na imagem, toda uma área acima de um outro paralelo terrestre setentrional chamado de Círculo Polar Ártico permanece constantemente iluminada pelo Sol durante certo período, maior tanto quanto mais próximo do polo norte. É nessa época e região que ocorre o fenômeno chamado Sol da Meia Noite, em que o Sol permanece acima do horizonte durante as 24 horas do dia. Ao mesmo tempo que, devido à inclinação do planeta, o Sol ilumina preponderantemente o hemisfério norte, a incidência oblíqua dos raios solares sobre o hemisfério sul produz o tempo mais frio e noites mais longas na região meridional. Na realidade as estações do ano ocorrem de forma inversa nos dois hemisférios terrestres. Enquanto em junho temos o solstício de verão no hemisfério Norte, ao mesmo tempo, temos, no hemisfério sul, o solstício de inverno. Assim como no norte, temos também no sul, um paralelo terrestre chamado Círculo Polar Antártico. Na região abaixo deste paralelo, durante o solstício de junho e seus arredores, ocorre durante certo período, maior tanto quanto mais próximo do polo sul, o chamado Crepúsculo Polar onde o sol fica abaixo do horizonte durante as 24 horas do dia.

Seis messes após o solstício de junho, a Terra se coloca em sua órbita em um ponto diametralmente oposto, neste momento por volta do dia 21 de dezembro ocorre o solstício de dezembro. A situação agora é o exato inverso do que ocorreu em junho, com o hemisfério sul preponderantemente iluminado pelo Sol, tendo este seus raios incidindo perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio, um paralelo da região meridional com $23,5°$ de latitude sul. Em dezembro é verão no hemisfério sul e inverno no hemisfério norte, os fenômenos do sol da meia noite e do crepúsculo polar ocorrem respectivamente nas regiões polares sul e norte, delimitadas no dia do solstício de dezembro pelos círculos polares, e a duração desses fenômenos estende-se por períodos, de dias ou meses, maiores tanto quanto mais próximo dos polos.

Entre os solstícios de junho e de dezembro, tanto na ida quanto na volta, a Terra passa por mais dois pontos especias, o Equinócio de Setembro, por volta do dia 22, e o Equinócio de Março, por volta do dia 21, dos respectivos meses. Os equinócios marcam o início da primavera e do outono, sendo em setembro, primavera no sul e outono no norte. Já em março, ocorre o contrário: primavera no norte e outono no sul. A grande particularidade dos equinócios é o fato de que, nesses dias, os raios do Sol incidem perpendicularmente sobre o equador terrestre, fazendo com que os dois hemisférios recebam a mesma intensidade de luz solar e que o dia e a noite tenham a mesma duração.

1.2.3 A Eclíptica e o movimento aparente do Sol na Esfera Celeste

Como o nosso referencial é a Terra, toda a dinâmica de sua órbita é por nós percebida como uma lenta passagem do Sol por entre as constelações da esfera celeste. Esta órbita anual aparente do Sol ao redor da terra é chamada de Eclíptica e não podemos confundir este lento movimento anual do Sol ao longo da eclíptica, resultante da translação, com o movimento diário aparente do Sol, o qual se dá sempre ao longo de um paralelo celeste, formando dias e noites, sendo resultante da rotação do planeta.

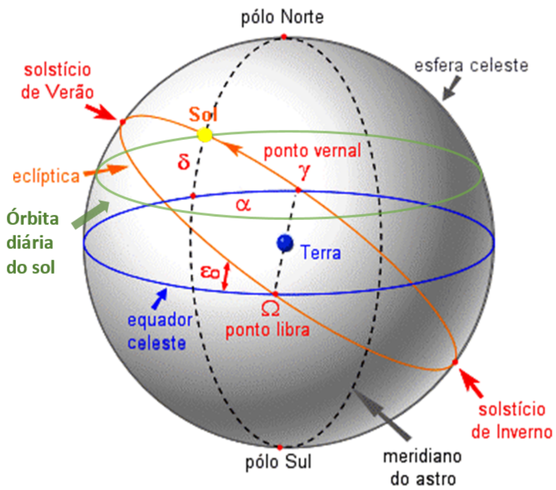

Figura 1.7: Órbita aparente do sol
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera_celeste#/media/File:Ast_esfera.png, acesso em 03/08/2017

Na figura 1.7 podemos ver a trajetória diária do Sol ao longo de um paralelo celeste mais alto ou mais baixo, de acordo com a posição do sol no dia, ou seja, a declinação δ do Sol no sistema equatorial de coordenadas varia ao longo do ano, de acordo com a posição desse astro na eclíptica. Nessa mesma imagem observamos que a eclíptica é um círculo máximo cujo o seu plano forma com o plano equatorial o mesmo ângulo de $23,5^\circ$ da inclinação do eixo terrestre. Dois pontos constituem a intercessão da eclíptica com o equador celeste, o ponto Ω, chamado Ponto de Libra e o ponto γ, chamado Ponto Vernal. Este último é bastante importante pois, marca o início da contagem da ascensão reta, coordenada do sistema equatorial, sobre o equador celeste. Desta forma, o Sol, por metade do ano, permanece no hemisfério celeste norte com sua declinação positiva, partindo de 0°, em γ, e progredindo até os $23,5^\circ$ no solstício de junho e regredindo até 0° ao chegar em Ω e segue por outra metade no hemisfério celeste sul, descendo até $-23,5^\circ$ no solstício de dezembro e ascendendo até encontrar novamente o ponto vernal.

1.3 História dos métodos de navegação marítimas

A prática da navegação é uma atividade realmente muito antiga. Isso ocorre porque, em sentido amplo, a navegação inicia-se com os primeiros e mais arcaicos tipos de barcos e canoas que, logo cedo, o homem passou a construir, a fim de se locomover por meio da água, a começar por lagos e rios até aventura-se pelas margens oceânicas e, por fim, pelo alto-mar.

Esta evolução parte desde os métodos mais primitivos de navegação empírica, baseada nos regimes dos ventos, passando pelo uso dos instrumentos náuticos astronômicos, que descreveremos nesta obra, até chegar aos avançados métodos atuais de orientação por satélites.

1.3.1 Navegação por rumo e estima

Por volta do século XIII, dois importantes instrumentos náuticos puderam elevar o nível dos anteriores métodos empíricos de navegação. Esses foram: a bússola e a carta de marear, bases da chamada navegação por rumo e estima.

Basicamente, os navegadores usavam a bússola para indicar o ângulo dos rumos traçados, estimavam as distâncias percorridas e traçavam os pontos nas cartas, que eram projeções planas dos principais mares e enseadas que se era comum navegar naquela época, em especial as rotas comerciais do Mediterrâneo.

Esse método de localização era muito precário pois, tanto o ângulo do rumo aferido pela bússola, devido ao fenômeno da declinação magnética, quanto a distância, que era estimada por métodos empíricos, não tinham a precisão mínima adequada para uma aventura em alto mar.

1.3.2 Navegação astronômica por latitudes

A partir dos meados do século XV, a obtenção da latitude através de cálculos baseados nas alturas angulares dos astros celestes, sem dúvida, foi a grande inovação na náutica europeia, a começar por Portugal, que possibilitou o sucesso da Era dos Descobrimentos.

Segundo Estácio dos Reis (2002), o novo método era, na realidade, uma incrementação do anterior. O piloto continuava a estimar a distância percorrida, conservando-se o ângulo do rumo, medido constantemente pela bússola, sendo que, agora, possuía uma excelente informação, que era as latitudes de partida e de chegada, tomadas astronomicamente. Quando o procedimento do rumo e da estima coincidia com a latitude de chegada em um dado percurso, o piloto seguia confiante com sua localização. Porém quando havia discrepância, ele teria que decidir em reajustar empiricamente o rumo ou a distância.

De posse da latitude, o piloto do século XVI e XVII conseguia facilmente conduzir a embarcação para destinos continentais como as recém-conquistadas colonias no Novo Mundo, ou o tão almejado caminho para Índia. O procedimento era simples, tão logo pudesse, ao partir da viagem, o piloto conduzia a embarcação para o paralelo do destino que pretendia alcançar e mantendo-se nesse paralelo, ainda que não pudesse obter a longitude, em algum momento a nau chegaria ao seu destino.

Como os instrumentos dessa época, os quais mais a frente descreveremos, não possuíam muita precisão, havia o risco do navegador não atingir o porto exato que queria. Isto, porém, não representava o menor empecilho pois, uma vez avistada a costa, por ela se seguia até onde se quisesse desembarcar no continente. O problema acontecia quando se queria atingir uma ilha pequena pois, com a baixa precisão dos instrumento, grande era o risco da embarcação tangenciar lateralmente a ilha e por ela passar a uma distância em que não fosse possível enxerga-la, ocasionando o desastre da empreitada.

1.3.3 Navegação astronômica por latitudes e longitudes

Desde o século XVI já era do conhecimento dos cosmógrafos e navegadores europeus, que os fenômenos astronômicos eram observados em diferentes horários solares, de acordo com a localização terrestre do observador. Sendo assim, se fosse possível com algum instrumento conservar a hora de um ponto fixo da Terra situado em um meridiano de referência, bastava-se comparar o horário local referente a posição do Sol com o horário da cidade de referência. Dessa forma, a diferença dos horários indicaria a longitude.

É fácil perceber que qualquer um dos nossos relógios modernos resolveria o problema acima exposto. Acontece que o tipo de relógio que se tinha àquela época, plausível de ser usado durante uma viagem marítima, eram as tradicionais ampulhetas, as quais eram relógios de areia constituídos por um recipiente transparente que, através de um gargalo central, interligava dois compartimentos simétricos, geralmente em forma de cone. Havia em seu interior uma certa quantidade de areia fina que transpassava de cima para baixo, por um pequeno orifício, durante um período de tempo predeterminado. Mesmo as ampulhetas não tinham a precisão necessária para conservar a hora de uma determinada cidade de referência por longos períodos de tempo. As viagens transoceânicas poderiam durar vários meses.

Pelo que vimos, a cobiçada coordenada da longitude teve de ser negligenciada por mais de dois séculos até surgir o cronômetro e sua posterior adaptação para um eficiente uso náutico, entre o fim do seculo XVIII e início do XIX. A partir daí, a localização marítima no globo tornou-se muito mais segura com as duas coordenadas que, em um primeiro momento, só eram possíveis de serem obtidas em horários diferentes do dia. Até que, em meados do século XIX, com a contribuição do capitão Thomas Sumner e o posterior aperfeiçoamento do comandante Marcq de Saint Hilaire, as duas coordenadas geográficas puderam ser obtidas simultaneamente.

A partir do século XX, grandes inovações tecnológicas possibilitaram um seguro controle da posição dos navios em alto-mar. Primeiro, surgiu a navegação por radiogoniometria, método de localização por ondas de radio e, por fim, a atual navegação por satélites que, pelo sistema GPS, que usa 24 satélites orbitando o planeta, além da localização no globo com precisão de centímetros, é capaz de fornecer até mesmo a altura do aparelho receptor em relação ao nível do mar.

1.4 Os Regimentos de navegação

Tendo em vista o exposto nas seções anteriores, podemos agora compreender como os navegadores da Era dos Descobrimentos puderam se localizar, em alto mar, ao longo de suas viagens transoceânicas apenas observando os astros celestes. Para este feito, os pilotos e comandantes responsáveis pela exata condução das embarcações, se utilizavam de mapas, livros, almanaques náuticos e guias de navegação. Estes últimos, também chamados de regimentos, se referiam, cada um deles, a um astro específico e constituíam a base teórica para o uso dos instrumentos medievais adaptados que esses navegadores usavam para as observações celestes. Descreveremos com detalhes os principais desses instrumentos no capitulo seguinte.

Ao longo do fervescente desenvolvimento da náutica europeia, a partir do século XV, surgiram dois populares regimentos de navegação astronômica, o Regimento da Estrela Polar, também chamado Regimento do Norte, devido ao fato que a estrela *Polaris* se encontra quase que coincidente com o polo norte celeste, era o regimento mais prático do início da navegação astronômica porém, essa estrela só podia ser observada do hemisfério norte, o que limitava o uso desse regimento apenas às regiões setentrionais do planeta.

O outro regimento bastante usado nas Grandes Navegações foi o Regimento do Sol. Este se baseava na posição do Sol ao longo do ano e tinha a vantagem de poder ser usado tanto no norte como no sul. Houveram ainda outros regimentos bem menos utilizados, os quais, portanto, não descreveremos aqui. Um exemplo desses foi o Regimento da Estrela *Acrux*, que se baseava pela estrela alfa da constelação do cruzeiro do sul, a qual é a estrela fortemente brilhante mais próxima do polo sul a cerca de 27°. Com essa distância relativamente grande, esse regimento se mostrava bem menos eficiente do que o regimento da estrela polar.

1.4.1 Regimento da Estrela Polar

O regimento da estrela polar, foi o primeiro a ser usado na navegação astronômica europeia da Era das Grandes Navegações, devido a posição ímpar da estrela *Polaris*, alfa da constelação Ursa Menor, quase que coincidindo com o polo norte celeste. Na realidade, esse regimento já era usado pelos navegadores do Índico bem antes do século XV, quando os navegadores europeus começaram a se desbravar pelo Atlântico.

Admitindo-se que a estrela *Polaris* esteja exatamente sobre o polo norte celeste, torna-se muito fácil compreender como calcular a latitude terrestre através dela. Simplesmente, a latitude do observador vai coincidir com a altura pela qual ele enxerga a estrela polar. Como a declinação equatorial é a projeção da latitude geográfica, podemos perceber (Veja figura 1.8) que a latitude φ de um observador terrestre equivale à declinação de seu zênite. Temos então a altura h da estrela, a sua distância zenital z e a latitude φ do observador. Como a altura do zênite é sempre 90°, temos que $h + z = 90$. Como a declinação do polo norte também é 90°, temos que $\varphi + z = 90$. Segue então que:

$$h + z = \varphi + z \Rightarrow h = \varphi$$

Na realidade, a estrela polar não se encontra exatamente sob o polo norte celeste. Hoje, ela possui uma distância polar de aproximadamente $0,75°$. Na época dos descobrimentos, essa distância era um pouco maior, cerca de 3°, esta diferença ocorre devido a um lento movimento do eixo terrestre chamado Precessão dos Equinócios, o qual leva cerca de 26.000 anos para completar um ciclo. Como uma pequena distância angular de latitude se reflete em uma grande distância sobre a superfície da Terra, os navegadores precisaram fazer correções das alturas medidas da estrela polar, de acordo com a posição dela ao longo da noite. Estas correções consistiam em somar ou subtrair algum valor entre 0° e 3°. Para facilitar a obtenção do valor correto a corrigir, os navegadores passaram a usar toda a constelação da Ursa Menor, da qual a *Polaris* faz parte, como uma espécie de relógio e, através da posição relativa da *Polaris* com a estrela *Kochab*, da mesma constelação, ao longo da noite, obtinham qual valor se deveria somar ou subtrair para obter-se a latitude.

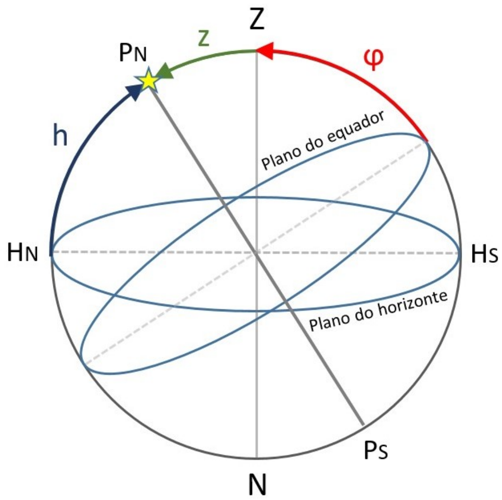

Figura 1.8: Latitude obtida pela altura da Estrela Polar

1.4.2 O Regimento do Sol

Um outro regimento que se tornou bastante popular nos primórdios da navegação astronômica foi o Regimento do Sol. Este surgiu da necessidade de se obter latitudes cada vez mais próximas do equador e até mesmo no hemisfério sul, onde a estrela *Polaris* não pode ser vista. Isto ocorreu devido aos novos destinos na América e no sul da África. Para utilizar esse regimento, era necessário conhecer o valor da declinação equatorial do Sol diariamente ou pelo menos pra cada 3 dias. Esta informação poderia ser obtida através de consulta aos almanaques náuticos que tinham tabelas com os valores da declinação do Sol ao longo do ano. Nesse sistema só era possível calcular a latitude em um único momento do dia, no exato meio dia solar do local. Este era o instante da chamada passagem meridiana do Sol quando ele, em sua ascensão, alcançava sua maior altura angular do dia, donde passava a descer em direção ao poente.

A importância da passagem meridiana é que quando ela ocorre o Sol se localiza no meridiano astronômico do observador, ou seja, os polos celestes, o astro, o observador e seu zênite ficam todos no plano meridiano do observador e as medidas da declinação e da altura combinadas juntas num mesmo arco meridiano celeste, se relacionam de forma que facilmente podemos obter a declinação do zênite e, portanto, a latitude terrestre do observador.

Para obtermos a latitude através da declinação e da altura do Sol, fica mais fácil transformarmos esta última em distância zenital, procedimento muito simples uma vez que ambas são complementares. O regimento do Sol previa vários casos diferentes em que a posição do zênite e do Sol sobre o meridiano astronômico levava a uma forma diferente de somar ou subtrair a declinação com a distância zenital, isto ocorria porque àquela época não se tinham ainda uma boa compreensão e aceitação do conceito de números negativos. Aqui, porém, usaremos as definições atuais em que latitudes e declinações ao norte são positivas e, ao sul, negativas. Dessa forma, resumiremos o procedimento a dois casos possíveis.

Observando a figura 1.9, analisaremos o caso em que o zênite do observador, no exato momento da passagem meridiana solar, está ao norte do Sol. Percebemos geometricamente a relação entre a latitude φ desejada com a declinação δ do Sol e sua distância zenital z. Obtemos, assim, a seguinte equação:

$$\varphi = \delta + z$$

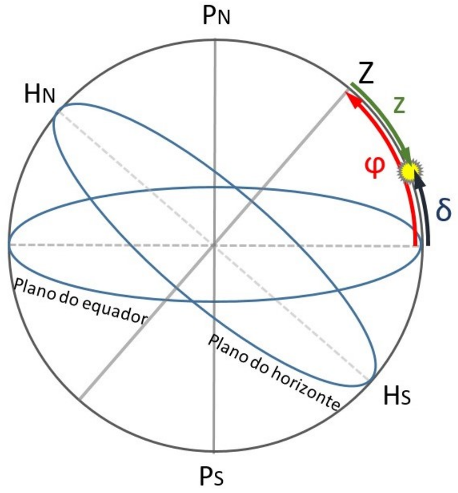

Figura 1.9: Latitude obtida com o zênite ao norte do Sol

Analisando a figura 1.10, vemos que a segunda possibilidade ocorre quando o zênite do observador, no instante da passagem meridiana solar, se localiza ao sul do Sol. Desta vez, podemos perceber geometricamente que a latitude φ será obtida pela equação:

$$\varphi = \delta - z$$

Note que, em qualquer caso, um valor positivo obtido para a latitude φ representa uma latitude norte, já um valor negativo de φ indica uma latitude sul.

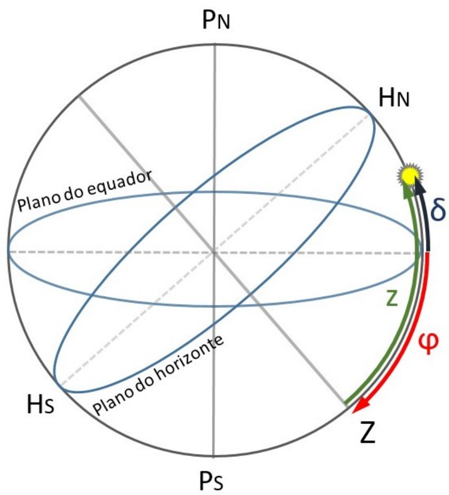

Figura 1.10: Latitude obtida com o zênite ao sul do Sol

Capítulo 2

Análise da modelagem matemática de instrumentos de navegação usados na expansão marítima entre os séculos XV e XVII

Medir a altura angular dos astros era, sem dúvida, o procedimento mais importante para a navegação astronômica da Era dos Descobrimentos. Portanto, tendo já feito uma boa exposição dos conceitos de astronomia e navegação básicos, necessários para entendermos como foi possível aos navegadores dos descobrimentos atravessar os oceanos e chegarem aos seus destinos pretendidos sem se perderem em alto mar, passaremos agora a descrever o uso e a construção dos instrumentos que possibilitaram a eles aferir a altura das estrelas e executar essa fascinante empreitada de explorar por inteiro nosso planeta.

Descrevemos, em detalhes, os processos matemáticos de construção e manuseio de quatro dos instrumentos náuticos de observação celestes utilizados nas navegações dos descobrimentos, os quais julgamos mais importantes e adequados aos objetivos do nosso trabalho. Os instrumentos são:

- Astrolábio;
- Quadrante;
- Tavoletas da Índia;
- Balestilha.

Os dois primeiros possibilitavam a medição da altura angular através de uma mira ao astro desejado. Já os dois últimos, necessitavam que a mira fosse feita simultaneamente ao astro e ao horizonte.

2.1 O Astrolábio e o Quadrante

O astrolábio e o quadrante, embora sejam dois instrumentos náuticos claramente distintos, tinham em comum a vantagem de serem, ambos, instrumentos de medição direta da altura dos astros, onde em seu procedimento de uso, bastava-se apenas apontar o objeto celeste sem a menor necessidade de mirar a linha do horizonte. Por esse motivo e por outros, decidimos tratar desses dois equipamentos náuticos juntos.

O quadrante e o astrolábio foram instrumentos que tiveram suas origens e destinos bem anteriores ao da navegação. Há bastante incerteza quanto à paternidade e a data de origem de ambos instrumentos. Segundo Fontoura da Costa (1983), o astrolábio já era conhecido por Apolônio de Perga, na Grécia Antiga (III ao II século A.C.) ou, talvez, por Eudoxo de Cnido (409 a 356 A.C.), o qual viveu muitos anos no Egito. O astrolábio passou dos egípcios para os gregos e por intermédio dos árabes foi levado à Espanha. O que sabemos de certo é que, tanto o astrolábio quanto, posteriormente, o quadrante tiveram seus surgimentos motivados pela imensa e antiga curiosidade do homem em conhecer e decifrar os movimentos dos astros celestes, isto é, no desenvolvimento da astronomia.

2.1.1 O quadrante geométrico

Sabemos que o quadrante já vinha sendo usado há um bom tempo pelos árabes, para fins astronômicos, durante os tempos medievais, até chegar a era das grandes navegações, onde o mesmo foi devidamente adaptado para o uso náutico e, por fim, chegou as mãos dos europeus. É interessante destacarmos um tipo de quadrante destinado à agrimensura, em especial, para a obtenção de medidas inacessíveis, esse era o chamado quadrante geométrico, o qual, entre os séculos XVI e XVII, foi bastante descrito em obras puramente matemáticas, muitas delas, livros didáticos.

O quadrante, como o próprio nome indica, tem seu formato baseado em um quarto de circunferência. Havia basicamente dois tipos:

1) O quadrante de prumo tinha o formato de um quarto de circunferência e era graduado de 0° a 90°. Um de seus lados possuía duas pínulas próximas às extremidades, as quais tinham um orifício em seus centros por onde o observador mirava o alvo. Do vértice saia um fio de prumo que tinha, na ponta, um peso que o fazia sempre apontar a linha vertical e, assim, indicar no arco graduado, o ângulo entre o lado da mira e a linha horizontal. (veja figura 2.1). Dependendo da direção em que se fazia a graduação, o ângulo indicado no quadrante podia representar tanto a altura do astro como a sua distância zenital.

Figura 2.1: Quadrante com fio de prumo
Fonte:http://osdescobridoresbiju.blogspot.com.br/p/instrumentos-nauticos.html, acesso em 02/07/2017

2) O quadrante com mediclina geralmente possuía um formato quadrado onde dois de seus lados adjacentes tinham a graduação e ficava um na lateral e outro na parte superior. No vértice oposto ao vértice dos lados graduados, ficava um eixo onde era fixado um ponteiro, chamado *mediclina* ou *alidade*. Este servia para apontar o alvo e marcar o ângulo correspondente, conforme figura 2.2.

Figura 2.2: Quadrante quadrado
Fonte:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fattura_forse _italiana,_quadrante_geometrico,_xvi_sec.JPG, acesso em 02/07/2017

Embora o nosso foco seja o uso dos instrumentos náuticos antigos para os fins astronômicos de localização e direção de rumo em alto mar, vale-nos ressaltar em alguns exemplos, o uso do quadrante geométrico para a aferição de medidas inacessíveis. Primeiramente, porque este representa uma riqueza histórica da Matemática da época. Segundo, pelo fato que o enfoque comercial e exploratório de terras distantes, na Era das Grandes Navegações, estava também atrelado ao enfoque bélico militar, uma vez que as colonizações e a manutenção destas implicava, muitas vezes, em campanhas militares tendo, inclusive, na marinha, um importante ramo de ataque.

Dentre as muitas obras que versavam sobre a construção e uso do quadrante no ensino da geometria, destacamos a obra intitulada *Del modo di misurare le distantie,* *le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole di Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori* , publicada pelo matemático italiano Cosimo Bartoli, no século XVI. Nesta obra ele descreve a construção e os principais modos de uso de um quadrante geométrico. Descreveremos o quadrante de Bartoli e analisaremos matematicamente dois exemplos do uso desse instrumento para medir alturas inacessíveis, os quais julgamos bastante interessantes e, ao mesmo tempo, simples e propícios para serem usados em sala de aula, nos anos finais do Ensino Fundamental.

Calculando a altura de uma torre

O quadrante de Bartoli possuía dimensões relativamente grandes quando comparado aos quadrantes comuns de uso náutico para cálculos de alturas angulares. Este quadrante era quadrado e tinha pouco mais de um metro de lado. Sua graduação, feita em dois lados adjacentes, como já explicamos, era dividida em 60 partes, cada lado, onde a numeração, em ambos, culminava com o 60 no vértice de interseção onde a mediclina apontava um ângulo de 45°, que para os geômetras que o usavam, era chamado de um grau, tendo em cada lado portanto, 60 minutos, conforme figura 2.3.

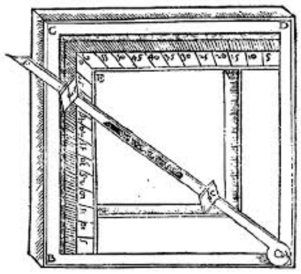

Figura 2.3: O quadrante de Bartoli
Fonte: SAITO E DIAS, 2011, p. 16

O nosso primeiro exemplo remete à tarefa de medir uma altura considerável, como a da torre da figura 2.4. Neste procedimento geométrico, nos será apenas necessário medir a distância entre o observador e a base da torre, tarefa muito mais fácil por se tratar de uma distância a ser medida no solo, esta ainda poderia ser obtida indiretamente com o mesmo instrumento posto no mesmo local de onde mediremos a altura da torre. Porém, esse procedimento de medir distância em solo, não descreveremos.

Da figura 2.4, podemos extrair o triângulo ABC e o triângulo ADE. (veja o esquema da figura 2.5) Como $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (são retos) e $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$, segue pelo caso AA que os dois triângulos são semelhantes.

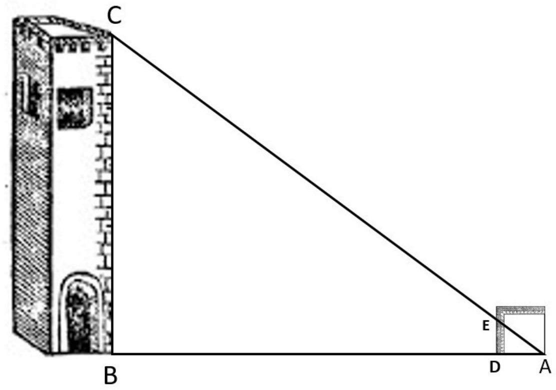

Figura 2.4: Posição do quadrante para medir a altura da torre

Para simplificar, chamaremos o lado $\overline{BC}$ de x, pois o mesmo é a medida desconhecida que buscamos calcular. Para os demais comprimentos supostamente conhecidos, usaremos a nomenclatura comum de segmento. Segue-se então:

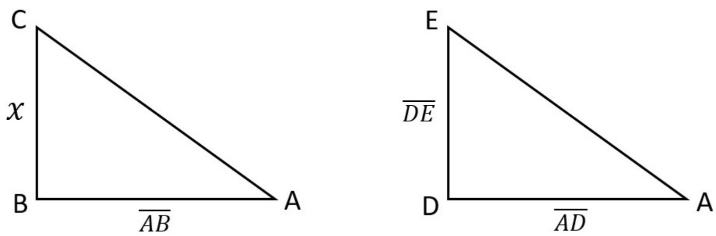

Figura 2.5: Esquema de semelhança dos triângulos retângulos

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \\ x \cdot \overline{AD} &= \overline{AB} \cdot \overline{DE} \\ x &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DE}}{\overline{AD}} \end{aligned}$$

Como $\overline{AB}$ é a distância medida no solo e $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ são medidas obtidas no quadrante, temos a nossa altura desejada x, em função de medidas conhecidas.

Vale ressaltar que, embora a unidade de comprimento da medição no solo e da nossa altura, possivelmente em metros, seja diferente da unidade de comprimento do nosso quadrante, a qual chamamos minutos, isso não interfere no sucesso do nosso procedimento, pois na teoria das semelhanças o que importa é que sejam resguardadas as proporções das formas geométricas, não importando as unidades de comprimento.

Calculando a altura de um objeto, tal qual não seja possível alcançar a sua base

Nosso próximo exemplo retrata a situação em que não é possível alcançar a base da linha vertical ao ponto máximo do objeto que queiramos medir. É o que acontece, por exemplo, se pretendermos medir: o cume de uma montanha, a altura de uma pirâmide, a ponta de um farol em formato de cone ou, ainda, se por um outro motivo qualquer, sejamos impossibilitados de alcançar, ou mesmo mirar, a base de uma torre que desejemos medir a sua altura.

Dessa vez faremos aferições com o quadrante em dois pontos distintos, ambos distantes da torre, com a condição de que estes estejam no plano vertical que contenha suas linhas de visagem em relação a torre. Faremos apenas a medição, em solo, da distância entre os pontos A e F. (veja a figura 2.6)

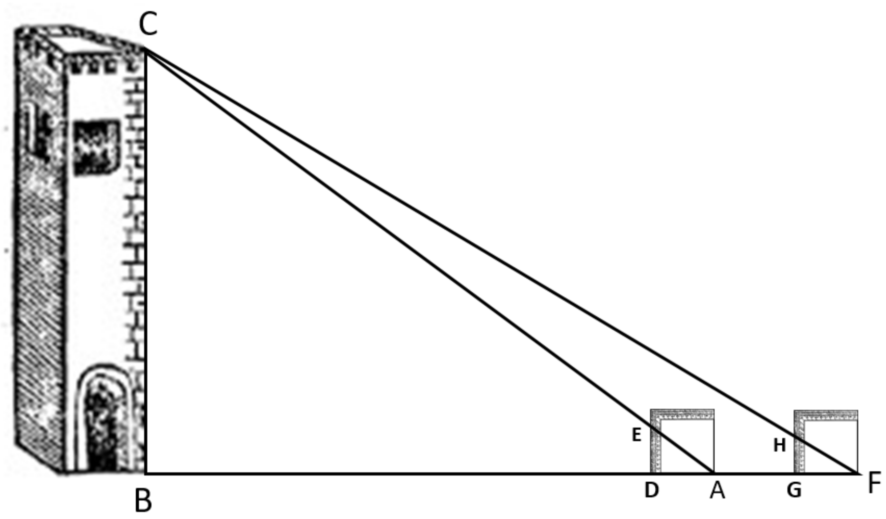

Figura 2.6: Posição dupla do quadrante para medir a altura da torre

Podemos observar na figura 2.6, que são formados quatro triângulos retângulos. São eles: ABC e ADE, os quais por terem o mesmo ângulo em A, são semelhantes entre si (caso AA). Da mesma forma, os triângulos FBC e FGH, com mesmo ângulo em F, também são semelhantes entre si.

Com essas informações e com a ajuda da figura 2.7, podemos concluir que:

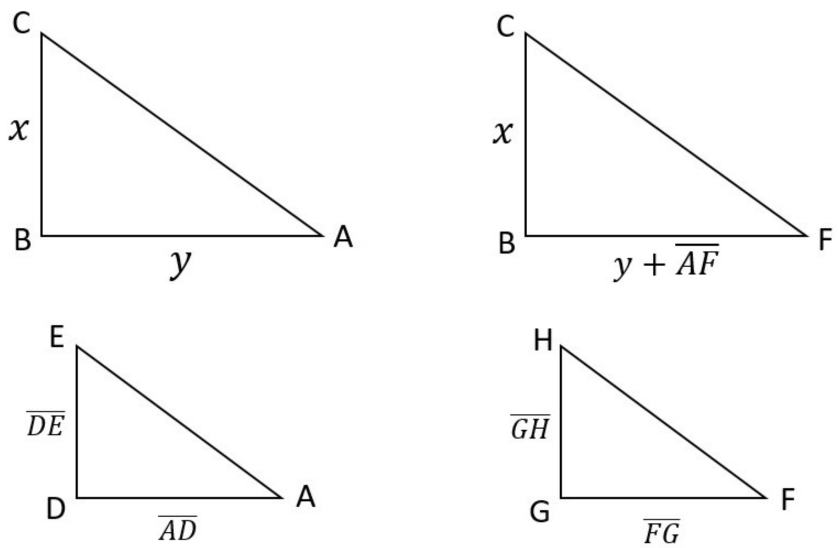

Figura 2.7: Esquema com os triângulos semelhantes

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$$\frac{x}{\overline{DE}} = \frac{y}{\overline{AD}}$$

$$x \cdot \overline{AD} = y \cdot \overline{DE}$$

$$y = \frac{x \cdot \overline{AD}}{\overline{DE}} \quad (2.1)$$

$\triangle FBC \sim \triangle FGH$

$$\frac{x}{\overline{GH}} = \frac{y + \overline{AF}}{\overline{FG}}$$

$$x \cdot \overline{FG} = y \cdot \overline{GH} + \overline{AF} \cdot \overline{GH} \quad (2.2)$$

Substituindo (2.1) em (2.2)

$$x \cdot \overline{FG} = \frac{x \cdot \overline{AD} \cdot \overline{GH}}{\overline{DE}} + \overline{AF} \cdot \overline{GH}$$

$$x \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FG} = x \cdot \overline{AD} \cdot \overline{GH} + \overline{AF} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{GH}$$

$$x\left(\overline{DE} \cdot \overline{FG} - \overline{AD} \cdot \overline{GH}\right) = \overline{AF} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{GH}$$

$$x = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{GH}}{\overline{DE} \cdot \overline{FG} - \overline{AD} \cdot \overline{GH}}$$

Como $\overline{AF}$ é a distância medida no solo e $\overline{DE}$, $\overline{GH}$, $\overline{FG}$ e $\overline{AD}$ são medidas obtidas no quadrante, temos a nossa altura desejada, x em função de medidas conhecidas.

Para fixarmos a ideia repetiremos este último problema com um exemplo numérico, conforme as figuras 2.8 e 2.9.

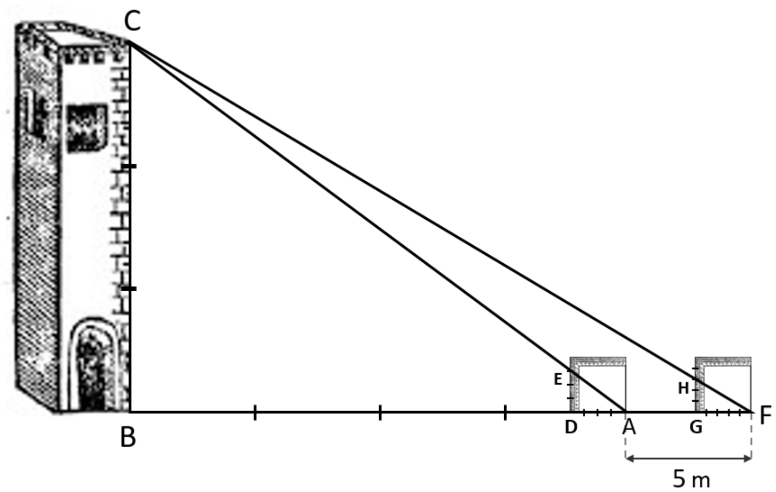

Figura 2.8: Representação da torre a ser medida

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

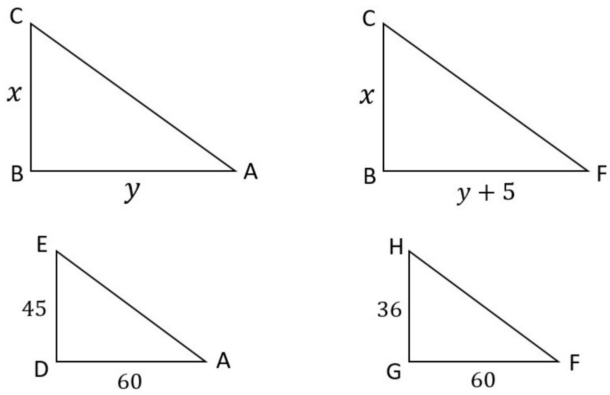

Figura 2.9: Esquema com os triângulos semelhantes

$$\begin{aligned} \frac{x}{45} &= \frac{y}{60} \\ 60x &= 45y \\ 4x &= 3y \\ y &= \frac{4x}{3} \qquad (2.3) \end{aligned}$$

$\triangle FBC \sim \triangle FGH$

$$\begin{aligned} \frac{x}{36} &= \frac{y+5}{60} \\ 60x &= 36y + 180 \\ 5x &= 3y + 15 \qquad (2.4) \end{aligned}$$

Substituindo (2.3) em (2.4)

$$\begin{aligned} 5x &= 3 \cdot \frac{4x}{3} + 15 \\ 5x - 4x &= 15 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Assim sendo, conforme nosso exemplo, se a distância entre a primeira e a segunda posição de medida do nosso quadrante for de 5 m, e as aferições no mesmo, indicarem respectivamente 45 e 36 minutos, a altura de nossa torre será de 15 m.

2.1.2 O astrolábio náutico

O astrolábio, como já citamos, vem da mais remota antiguidade. Foi bastante usado e aperfeiçoado, primeiramente pelos gregos, na Antiguidade Clássica, e posteriormente pelos árabes na expansão islâmica. O astrolábio realmente era um instrumento incrível para sua época, pois permitia termos todo o esquema da esfera celeste na palma da mão.

As primeiras versões do astrolábio tinham um formato esférico-armilar. Tal instrumento era muito pesado, melindroso e de difícil transporte, (ver figura 2.10). A primeira grande evolução do astrolábio foi sua versão plana concebida por meio de uma projeção estereográfica polar da terra e da esfera celeste, conforme figura 2.11.

Além de servir às mesmas utilidades do quadrante, já descritas, o astrolábio era realmente um instrumento completo. Com ele podia-se obter diversas informações astronômicas relevantes, entre elas, por exemplo: medir a altura angular de um astro ou indicar sua altura meridiana para uma escolhida data, determinar a hora do dia ou da noite, apontar previamente o local do nascimento e o ocaso do Sol, discernir as estações do ano, determinar o período de visualização das constelações do zodíaco e, até mesmo, construir tabelas de tangentes e cotangentes. Entre todas essas incríveis funções, a única que, de fato, interessava aos nosso exploradores do alto mar era a aferição simples e direta da altura do astro do qual estivesse seguindo seu regimento.

Para o uso náutico, os navegadores antigos, além de não necessitarem das diversas funções do astrolábio planisférico, geralmente nem sequer tinham o conhecimento e as habilidades para executá-las. Por isso, logo que esse instrumento passou a

Figura 2.10: Astrolábio esférico-armilar
Fonte: http://elmercaderdelmar.com/ instrumentos-nauticos-decorativos /361-astrolabio-esferico-en-laton -envejecido.html, acesso em 02/07/2017

Figura 2.11: Astrolábio planisférico.
Fonte: https://bryant477.wordpress.com /2015/09/16/ pdf-grandfather - clock-drawings-free-download-diy -free-plans-download-free- carpenter-tool -box-plans/, acesso em 02/07/2017

servir à marinharia, ele foi gradativamente adaptado ou, na realidade, simplificado, surgindo, assim, o astrolábio náutico.

Primeiramente, foram construídos astrolábios de madeira com um tamanho relativamente grande, com objetivo de melhorar a precisão, permitindo uma melhor visualização de frações de grau. Depois, surgiram uns de tamanho menor, cerca de 20 cm de diâmetro, feitos em metal maciço para serem mais pesados, a fim de resistirem em posição vertical aos constantes balanços dos navios em viagem. Para melhor resistir aos fortes ventos do alto mar, ele perdeu o formato de disco inteiro e passou a ser vazado, restando duas linhas ortogonais de diâmetro interno necessárias à sustentação do ponteiro em seu centro e um balastro na parte inferior, conforme a figura 2.12. Tudo sempre com o propósito de fortalecer a sua verticalidade de operação.

Ao término de todo o processo de simplificação pelo qual passou esse instrumento astronômico, até torna-se o astrolábio náutico, este ficou constituído por, basicamente, quatro peças: a roda graduada, a medeclina, as pínulas e a argola de sustentação.

1) Roda graduada: era o corpo do instrumento, tinha um formato circular com a graduação em seu limbo e com dois diâmetros perpendiculares que se encontravam no centro dando suporte à medeclina.

2) Medeclina: esta era o ponteiro, também chamado de alidade. Era fixada por um pino no centro da roda, de forma que girava livremente e as suas pontas indicavam a medida angular aferida no limbo graduado da roda.

Figura 2.12: Astrolábio náutico
Fonte: http://www.reservanaval.pt/historia/dirhistoria.html, acesso em 03/07/2017

3) Pínulas: eram duas pequenas placas quadradas encaixadas ortogonalmente na medeclina tendo, cada uma, um orifício em seus centros, por onde o observador podia apontar o astro celeste que pretendesse medir.

4) Argola de sustentação: era um anel, por onde o observador deveria segurar o instrumento, situava-se na parte superior do astrolábio e encaixava-se na roda por uma articulação móvel destinada a permitir sempre que o instrumento ficasse livremente na posição vertical.

Outra particularidade do astrolábio náutico era a sua graduação, que geralmente era feita apenas nos dois quadrantes superiores, no limbo da roda, uma vez que esse instrumento só era utilizado na posição vertical e nunca na horizontal como, em algumas funções, se usava o astrolábio astronômico. De início, essa graduação chamada 0-90-0 possuía o 90° no cume do arco graduado, junto à argola, decrescendo em ambos os lados até marcar o 0° nas extremidades do diâmetro horizontal do astrolábio. Assim, o instrumento sempre aferia a altura angular do astro. Posteriormente, em algumas versões portuguesas, usou-se uma marcação oposta chamada 90-0-90, a qual, pela inversão, possuía o 0° no cume do arco indicando diretamente a distância zenital, a qual é complementar da altura e, junto com a declinação do Sol, constituem as duas medidas necessárias para calcular-se a latitude pelo regimento do Sol, um dos mais práticos, populares e preferidos regimentos usados pelos exploradores da Era das Navegações.

2.1.3 O Nônio e a busca pela precisão

Passaremos agora a descrever um processo interessante que permitia uma maior precisão na aferição angular do astrolábio e do quadrante náuticos, tratava-se de um sistema desenvolvido com o objetivo de fazer uma leitura das frações de grau para as quais não havia espaço para se marcar com traços nesses instrumentos, uma vez que, a menor divisão em que se cabia fazer em seus limbos era o grau.

A brilhante invenção desse sistema de precisão é atribuída ao ilustre Pedro Nunes, grande matemático português do século XVI. Embora a sua versão mais prática e concisa tenha sido produzida pelo, também importante matemático francês, Pierre Vernier, até hoje há certa discussão a respeito de a quem destes dois merece a paternidade desse sistema. Sobre esse assunto, Fontoura da Costa nos diz:

> "Deve-se a Pedro Nunes — essa águia dos matemáticos portugueses — a ideia fundamental, genial em teoria, de um processo para apreciação das mais pequenas divisões de um quadrante, que passando por Clávius e depois Vernier, originou o atual instrumento original que nós, com algumas nações, denominamos nônio, e outras vernier."(COSTA, 1983, p. 26). [2]

Estácio dos Reis nos traz uma excelente exposição a respeito desse assunto em sua obra *Astrolábios náuticos em Portugal*. Dela usaremos algumas figuras e descreveremos essas duas versões, a de Nunes e a de Vernier.

Sistema de Nunes

A ideia de Pedro Nunes, a ser melhor aplicada em um quadrante ou um astrolábio de disco fechado, consistia em fazer no instrumento uma serie de círculos concêntricos, a contar da graduação principal repartida em 90 graus, e dividi-los regressivamente em 89, 88, 87..., até chegar ao de 46 partes. Nessas condições, ao medir-se um determinado ângulo cujo ponteiro não marcasse um número de graus inteiro, muito provavelmente ele incidiria sobre, ou muito próximo de, uma das divisões das referidas escalas. Isto verificado, facilmente se poderia calcular, por proporção simples, o valor em graus com casas decimais que permitiriam, via de regra, um bom valor com aproximação de alguns minutos. Através da figura 2.13, faremos um exemplo também exposto por Estácio dos Reis (2002)[9].

Este exemplo, como vemos, representa uma marcação angular entre 37° e 38°. Observamos que, no nônio a linha de aferição coincide exatamente com a 27^{a} divisão do arco graduado em 65 partes. Dessa forma, faremos uma simples regra de três para o cálculo mais preciso do valor em graus na graduação oficial.

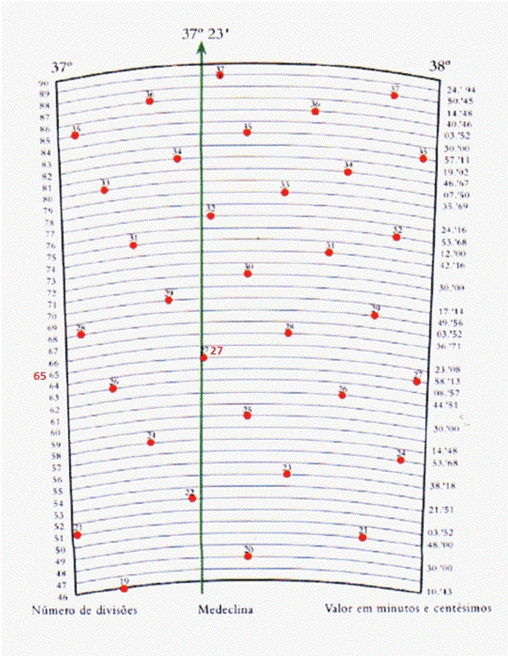

Figura 2.13: Ilustração de uma medição com o nônio de Pedro Nunes
Fonte: REIS, 2002, p. 39

Conversão escala 65/90

$$\frac{27}{65} = \frac{x_1}{90}$$

$$65x_1 = 2430$$

$$x_1 = \frac{2430}{65}$$

$$x_1 \cong 37,3846$$

Conversão decimal/minuto

$$\frac{38,46}{100} = \frac{x_2}{60}$$

$$100x_2 = 2307,6$$

$$x_2 \cong 23,08$$

Portanto o valor mais exato para essa aferição é de $37°23'$, uma medida com erro aproximado de 8 centésimos de minuto.

O maior problema no uso do nônio de Pedro Nunes é que a precisão nem sempre era eficaz. Havia várias faixas relevantes entre alguns graus inteiros sobre as quais não era percebida nenhuma divisão dentre as 45 escalas concêntricas, gerando erros de até 30'. Um exemplo era: entre 44° 30' e 45° 30', só existia a graduação dos 45°.

Vale destacar que, embora tenha havido grande empolgação por parte desse ilustre matemático em fazer valer seu método de precisão, o profissional que usava na prática os instrumentos desenvolvidos pelos cosmógrafos, era o piloto da embarcação. Este só tinham menos respeito e autoridade do que o comandante oficial da tripulação. Porém, geralmente, estes pilotos não tinham formação formal. Eram homens de grande capacidade intuitiva porém, via de regra, eram hostis à execução de cálculos rebuscados e rigorosos, procuravam sempre os métodos e regimentos mais práticos possíveis. Numa situação como essa, caso fosse necessário obter maior precisão entre os graus inteiros, prefeririam muito mais estimar visualmente a fração de grau do que fazer contas ou mesmo consultar vultosas tabelas, como era aconselhado fazer ao usar o nônio.

Sistema de Vernier

Não pretendemos aqui discorrer sobre a quem pertence a paternidade deste instrumento muito útil, que alguns chamam de nônio e outros de vernier, como referência aos dois grandes matemáticos já citados. Podemos dizer que a ideia original foi de Pedro Nunes; e o aprimoramento que gerou esse acessório de precisão que até hoje usamos em diversos instrumentos de medidas, tanto em escalas de graduação retilíneas como circulares, como o paquímetro e o sextante, figuras 2.14 e 2.15; é devido a Pierre Vernier.

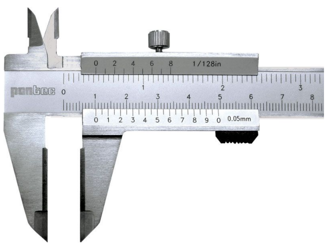

Figura 2.14: Paquímetro mecânico. Fonte: http://paquimetro.reguaonline.com /images/paquimetro-universal.jpg, acesso em 09/07/2017

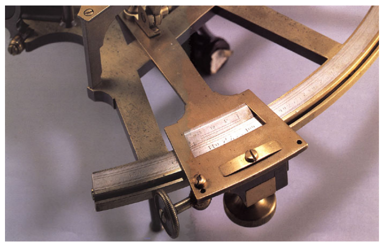

Figura 2.15: Sextante com nônio Fonte: http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/nonio15grande.jpg, acesso em 09/07/2017

O nônio de Vernier é um instrumento auxiliar devidamente encaixado rente à escala principal, sendo um cursor deslisante sobre a escala e dividido de forma que para cada n divisões na escala principal, tenhamos $n+1$ divisões no nônio. Fazendo coincidir o zero do nônio com o valor exato da medição na escala, caso ele não aponte um valor inteiro da graduação, a fração da unidade, complementar à medição exata, será aquela referente a linha do nônio que coincidir rigorosamente com alguma das divisões da escala. Essa coincidência é única, uma vez que o mdc $(n, n+1) = 1$.

Vejamos o exemplo da figura 2.16, onde iremos aferir o valor preciso da medida x.

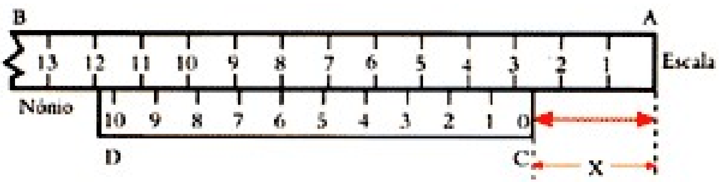

Figura 2.16: Medição com o nônio de vernier.
Fonte: REIS, 2002, p. 50

Visualmente percebemos que o valor de x situa-se entre 2 e 3. Para obtermos a primeira casa decimal exata, observamos que a divisão 6 do nônio é a que mais coincide com uma divisão da escala principal, a de número 8. Dessa forma $x = 2,6$. A precisão do instrumento varia com o valor que escolhermos para n.

Neste exemplo, é fácil ver que a distância x é igual ao valor 8 da escala menos 6 divisões do nônio; como cada uma dessas divisões possuem $\frac{9}{10}$ da unidade, segue que:

$$x = 8 - 6 \cdot \frac{9}{10} = 8 - 5,4 = 2,6$$

Agora, vamos demonstrar geometricamente este procedimento. Ilustrado na figura 2.17. Sejam: x o valor no nônio coincidente com y, valor na escala principal; a o valor preciso da medição, com z sendo sua parte inteira e $n+1$ a quantidade de divisões do nônio correspondentes a n unidades da escala. Queremos mostrar que x é a primeira casa decimal de a.

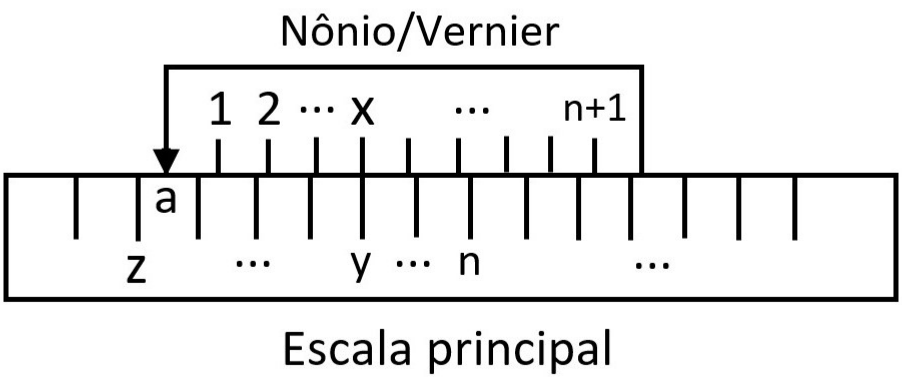

Figura 2.17: Esquema de medição do nônio

Independente do valor que escolhermos para n, o que aumenta ou diminui a precisão do instrumento, temos que graduar o nônio em 10 partes, devido ao nosso sistema decimal. Isso faz com que o x útil varie entre 0 e 9. Dessa forma chamaremos o x real, que varia entre 0 e n, de x_n.

Como cada divisão do nônio mede uma determinada fração da unidade, se $z = 0$ então os valores de x só podem coincidir com valores iguais de y. Caso $z \geq 1$ então $a = z + b$ com b sendo uma fração da unidade, a parte decimal da medida, consequentemente também, o y coincidente com o x_n do nônio será $y = x_n + z$. Assim sendo, teremos:

$$a = y - x_n \cdot \frac{n}{n+1} \Rightarrow z + b = x_n + z - \frac{nx_n}{n+1}$$

$$\Rightarrow b = \frac{x_n(n+1) - nx_n}{n+1} \Rightarrow b = \frac{x_n(n+1-n)}{n+1}$$

$$\Rightarrow b = \frac{x_n}{n+1}$$

Como precisamos do x variando de 0 a 9, necessário nos é, fazer uma proporção:

$$\frac{x_n}{n+1} = \frac{x}{10} \Rightarrow 10x_n = nx + x \Rightarrow x_n = \frac{x(n+1)}{10}$$

donde:

$$b = \frac{x_n}{n+1} \Rightarrow b = \frac{\frac{x(n+1)}{10}}{n+1}$$

$$\Rightarrow b = \frac{x}{10} = 0,x \qquad \forall x \in Z \mid 0 < x < 10$$

Logo $a = z + b \Rightarrow a = z,x$, onde x é a primeira casa decimal de a. $\square$

De acordo com o n escolhido, podemos fazer marcações sem numeração por entre a escala decimal do nônio. Caso alguma delas seja a que coincida com a escala principal, visualmente podemos calcular a correta fração da unidade que pode ser expressa com mais casas decimais.

2.2 As Tavoletas da Índia

Tavoletas da Índia ou Balestilha do Mouro foram os nomes dados pelos navegadores ocidentais a um antigo instrumento náutico de navegação astronômica chamado Kamal. Este instrumento tem origem indo-arábica e seu surgimento, seguido de diversos aperfeiçoamentos, remonta ao século IX tendo os seus primeiros protótipos produzidos sobre as ordens do grande matemático árabe Al Khwarizmi, quando encarregou uma equipe com o propósito de produzirem instrumentos capazes de medir as alturas das estrelas para fins astronômicos.

O que sabemos de certeza é que o kamal era o principal instrumento náutico para localização latitudinal que os navegadores do oriente desde a Idade Média já usavam em suas navegações pelas águas do oceano Índico, ainda antes das grandes navegações europeias. Temos um fato bem interessante que ocorre quando, na ocasião de sua primeira viagem à Índia, Vasco da Gama, o grande navegador português, é guiado pelo piloto árabe Ahmad Ibn-Majid e este impressiona aquele por calcular as latitudes da viagem com um Kamal, o qual, de fato, era um instrumento bem mais rudimentar, em sua fabricação, do que os imponentes astrolábios e quadrantes do navegador português. Na realidade, o experiente piloto árabe nem sequer mostrou interesse pela instrumentária europeia. Já o Vasco da Gama logo se encarregou de levar um kamal como amostra para ser estudado e reproduzido pelos matemáticos e cosmógrafos de Lisboa. Assim nos conta Albuquerque:

> Este dispositivo para obtenção de alturas foi encontrado pelos marinheiros da primeira armada de Vasco da Gama nas mãos dos pilotos do Índico, trazido para Europa em 1499, experimentado por homens do mar e por cosmógrafos, e por fim adaptado na náutica portuguesa sob a designação de tavoletas da Índia ou balestilha do mouro [...]. (ALBUQUERQUE, 1972, p. 195). [3]

Temos também registro de que Pedro Alves Cabral levou consigo, junto com o astrolábio, tavoletas da Índia quando, em 1500, sua viagem pelo Atlântico culminou na descoberta do Brasil[1]. Disso sabemos por um trecho da notável carta de Mestre João (físico, médico e astrônomo da esquadra) endereçada ao rei de Portugal D. Manoel I, Fontoura da Costa transcreve esse trecho:

> E outro tanto quase digo das tábuas da Índia que se não pode tomar com elas [as alturas das estrelas] senão com muitíssimo trabalho, que se Vossa Alteza soubesse como desconcertavam todos nas polegadas, riria disto mais do que do astrolábio, porque desde Lisboa até as Canárias, uns dos outros, desconcertavam em muitas polegadas [...] (Vera Cruz, 1 de maio de 1500) (COSTA, 1983, p. 33). [2]

[1] A maioria dos historiadores modernos afirmam que a chegada da esquadra de Cabral às terras brasileiras não foi um mero acaso, mas sim uma ação intencional de oficialização do domínio português sobre as terras que já lhes pertenciam segundo a divisão estabelecida, unilateralmente pelos europeus, no Tratado de Tordesilhas.

2.2.1 Estrutura e uso das Tavoletas da Índia

As tavoletas da Índia consistiam de tábuas de madeira, com formato retangular, as quais tinham fixado em seus centros um cordão marcado com vários nós, conforme a figura 2.18. O observador estendia com a mão esquerda a tábua, verticalmente em frente a sua linha de visão e tentava enquadrar o lado inferior do retângulo com a linha do horizonte e ao mesmo tempo o lado superior com o astro desejado de se obter a altura. Enquanto isso, com o cordão sempre esticado, prendia com a outra mão junto ao olho, ou mesmo com os dentes, algum dentre os nós do cordão, a cada nó estava relacionado uma altura ou consequentemente uma latitude. A figura 2.19 ilustra bem este procedimento.

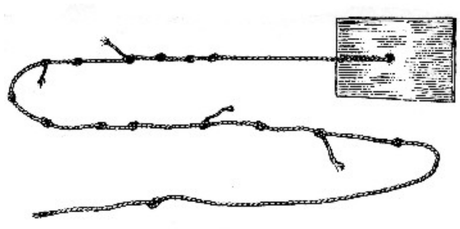

Figura 2.18: Tavoleta da Índia
Fonte: http://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/kamal. acesso em 31/05/2017

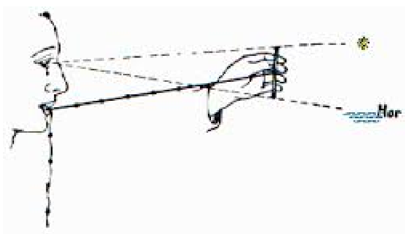

Figura 2.19: Modo de uso da tavoleta da Índia
Fonte: COSTA, 1983.

Como já dissemos, o Kamal indo-arábico, desde o século IX, passou por vários aperfeiçoamentos até chegar a esta versão que acabamos de descrever. Segundo Costa (1983)[2] o que possivelmente gerou a ideia de construir o kamal foi uma técnica ainda mais antiga dos navegadores orientais que consistia em aferir alturas de estrelas através de um arranjo feito com as duas mãos estendidas e que permitia medir em dedos a altura angular, a figura 2.20 nos mostra. Esses dedos inclusive geraram a unidade padrão desses marinheiros orientais tanto para ângulo quanto para comprimento. Esta era a isba, termo que em árabe significa justamente dedo,

Figura 2.20: Tecnica rudimentar para medição das isbas
Fonte: COSTA, 1983.

1 isba equivale a $1°37'$ ou $1,617°$ como medida angular e em comprimento equivale a 25 mm, cerca de uma polegada moderna.

De início, as tavoletas da Índia, como instrumento náutico, consistiam de um conjunto com dezenas de tabuinhas com tamanhos diferentes e cada uma com o seu devido cordão, de forma que cada peça representava um ângulo em isbas diferente e assim cobria-se a faixa angular necessária para realizar as viagens da época. Com o tempo, para economizar a quantidade de tabuinhas, passaram a confeccionar os nós, à distâncias calculadas, ao longo do cordão de uma mesma tavoleta, permitindo assim a aferição de uma faixa angular em uma única peça, ainda havendo a possibilidade de se fazer a proporção do retângulo de forma que ao inverte-lo perpendicularmente, pudessem obter uma segunda faixa propícia de latitudes com os mesmos nós.

Pela própria estrutura e modo de uso do kamal, percebe-se que esse instrumento era ideal pra baixas até médias alturas sendo praticamente inviável para altas alturas, para as quais astrolábios e quadrantes eram bem melhor aconselhados. Acontece que as regiões navegadas pelos mareantes orientais pouco passavam do trópico de Câncer ao norte ou o de Capricórnio ao sul; além disso, como já foi dito, cada kamal geralmente estava atrelado ao regimento de determinada estrela, as mais importantes eram: a Polaris no norte e a Acrux no sul, essas são vistas na região tropical em baixas alturas.

É importante saber que as tavoletas nem sempre tinham seus nós demarcando medidas angulares em isbas, era comum que algumas delas sendo específicas para determinada estrela, geralmente a Polar do norte, devido a sua posição notável, em particular tivessem seus nós demarcando a latitude especifica de alguns locais importantes que eram destinos recorrentes. Dessa forma, o navegador, ao entrar em auto mar, primeiramente procedia descendo ou subindo até se encontrar na latitude do nó relacionado ao seu destino. A partir daí, prosseguia em caminho o mais reto possível, sempre se conservando no mesmo paralelo da latitude do devido nó. Isto o faria chegar em algum momento no seu destino.

2.2.2 Demarcação trigonométrica dos nós na construção de um Kamal

Faremos aqui um projeto hipotético de um kamal com o objetivo de explorarmos e elucidarmos a matemática envolvida na determinação correta dos nós ao logo do cordão. A nossa tabuinha, por simplificação, será quadrada com lado medindo 5 cm e o cordão terá 12 nós que nos permitirão aferir uma faixa angular que vai de $5°$ a $16°$.

Conforme a figura 2.21 a nossa tabuinha está representada pelo quadrado $ABCD$, o ponto P é o seu centro, onde estará fixada uma das extremidades do cordão, tal ponto pode ser facilmente demarcado fazendo a intercessão das duas diagonais do quadrado. Os pontos E e F representam, respectivamente, as intercessões da perpendicular ao quadrado $ABCD$ com seus lados superior e inferior, passando pelo centro P.

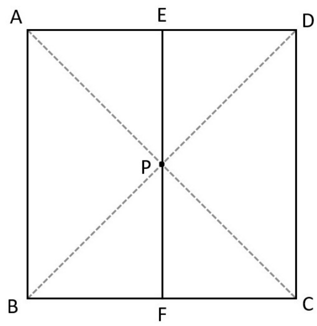

Figura 2.21: Representação da tabuinha

Pela figura 2.22, considerando o ponto O como o primeiro nó na extremidade solta do cordão e fazendo-o coincidir com o olho do observador ao empunhar o instrumento, vemos formado no plano vertical do astro, o triângulo OEF. Calcularemos a distância em relação a tabuinha desse primeiro nó, fazendo obviamente o nosso menor ângulo $\alpha = 5°$. Posteriormente, seguindo o mesmo raciocínio, exibiremos uma tabela completa com as distâncias dos demais nós respectivos a todos os ângulos propostos.

Como P é ponto médio de $\overline{EF}$ e $\overline{OP}$ é bissetriz de $\widehat{EOF}$, $\overline{OP}$ é também a sua altura, dessa forma nossos cálculos serão feitos no triangulo retângulo OEP. Aqui desconsideraremos o fato do nó estar fixo em frente ao olho ou ao dente do observador, assumiremos então a primeira opção.

Segue-se então que $\widehat{EOP} = \dfrac{\alpha}{2}$ e:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{EP}}{\overline{OP}}$$

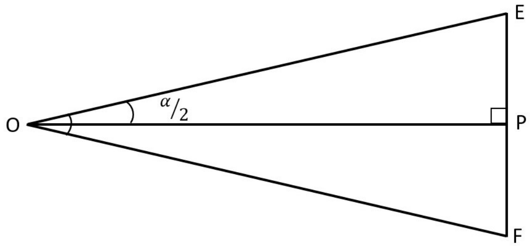

Figura 2.22: Triângulo OEF obtido no plano vertical do astro

$$\overline{OP} = \frac{\overline{EP}}{tg\ \frac{\alpha}{2}}$$

Como neste nosso kamal:

$$\overline{EP} = \frac{\overline{EF}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5\ cm$$

$$\alpha = 5^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 2,5^\circ \Rightarrow tg\ \frac{\alpha}{2} = tg\ 2,5^\circ \cong 0,043661$$

O nosso primeiro nó do cordão, a contar da extremidade, quando estiver esticado, deverá ter a seguinte distância da tabuinha:

$$\overline{OP} = \frac{\overline{EP}}{tg\ \frac{\alpha}{2}} = \frac{2,5}{0,043661} \cong 57,3\ cm$$

A partir daqui, repetindo o mesmo raciocínio e fazendo α variar de 5° a 16° como previamente estipulamos para ser a faixa angular da nossa tavoleta, construímos com ajuda do software Excel uma tabela relacionando cada ângulo com a distância de seu respectivo nó. A figura 2.23 nos mostra.

Nós	α	$\tan\frac{\alpha}{2}$	$\overline{EP}$	Distância do nó a tabuinha
1° nó	5°	0,043661	2,5 cm	57,3 cm
2° nó	6°	0,052408	2,5 cm	47,7 cm
3° nó	7°	0,061163	2,5 cm	40,9 cm
4° nó	8°	0,069927	2,5 cm	35,8 cm
5° nó	9°	0,078702	2,5 cm	31,8 cm
6° nó	10°	0,087489	2,5 cm	28,6 cm
7° nó	11°	0,096289	2,5 cm	26,0 cm
8° nó	12°	0,105104	2,5 cm	23,8 cm
9° nó	13°	0,113936	2,5 cm	21,9 cm
10° nó	14°	0,122785	2,5 cm	20,4 cm
11° nó	15°	0,131652	2,5 cm	19,0 cm
12° nó	16°	0,140541	2,5 cm	17,8 cm

Figura 2.23: Tabela para demarcações dos nós

2.3 A balestilha

A balestilha foi um instrumento de navegação astronômica usado para medir a altura dos objetos celestes bem como a distância angular entre dois astros, esta última função lhe dava vantagem em relação aos seus dois antecessores: o quadrante e o astrolábio. Tal instrumento era formado basicamente por duas peças de encaixe o virote e a soalha, geralmente era feita de madeira e possuía um formato de cruz. O virote era uma vara de secção quadrada, com um comprimento inferior a um metro, onde era feito a graduação. Já a soalha, com um comprimento bem menor, era uma talisca ligeiramente mais larga que deslizava, ao encaixa-se perpendicularmente, no virote através de um orifício quadrado em seu centro. Logo cedo passou-se a confeccionar para uma mesma balestilha, de duas até quatro soalhas, guardadas proporções adequadas, a fim de ampliar a faixa de ângulos possíveis de serem medidos com um só instrumento, para isso, usava-se escalas de graduações diferentes em cada face do virote. Observe as figuras 2.24 e 2.25.

Para aferir a altura de um objeto celeste, o piloto deveria alinhar a balestilha no plano vertical do astro, perpendicular ao horizonte, e pela ponta do virote, chamada cós, mais próxima do observador, este deveria mirar a linha do horizonte e o astro desejado através das extremidades da soalha a qual era devidamente movimentada

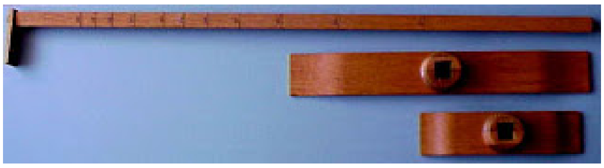

Figura 2.24: Balestilha com duas soalhas
Fonte: salvador-nautico.blogspot.com.br/2010/08/balestilha.html, acesso em 13/05/2017

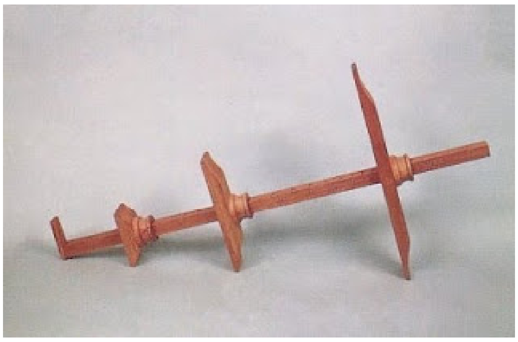

Figura 2.25: balestilha montada.
Fonte: salvador-nautico.blogspot.com.br/2010/08/balestilha.html, obitido em 13/05/2017

a fim de atingir este objetivo, veja as ilustrações nas figuras 2.26 e 2.27. Feito isto, observava-se qual numeração a soalha indicava no virote, esse valor poderia dar diretamente o ângulo de altura ou ser usado para obtê-lo através de cálculos trigonométricos, o que variava de acordo com o método de graduação utilizado para construir a balestilha, respectivamente: método geométrico e método via tabela trigonométrica, sobre os quais abordaremos detalhadamente logo mais a frente.

A balestilha é talvez o mais controverso entre os instrumentos da navegação astronômica. Importantes historiadores das Grandes Navegações dividem opinião em relação a sua origem, uso e precisão. A começar pela sua etimologia há divergência entre filólogos em relação a origem da palavra balestilha. Uns afirmam que o vocábulo balestilha deriva da palavra árabe balisti, que significa altura; outros defendem que a origem é castelhana derivando do vocábulo ballesta, que era uma arma medieval que atirava pequenas flechas, a qual se assemelhava no formato com a balestilha. Na verdade, essa divergência fundamenta outra discussão mais importante; não há certeza se foram os árabes e demais navegadores do Índico que primeiro introduziram a balestilha como instrumento náutico para o uso astronômico e esses a repassaram para os marinheiros portugueses, ou se, pelo contrário, como parece mais provável,

Figura 2.26: Observação da altura de um astro.

Fonte: http://desambientado.blogspot.com.br /2009/11/ano-internacional-da-astronomia -dia-312. html, acesso em 13/05/2017

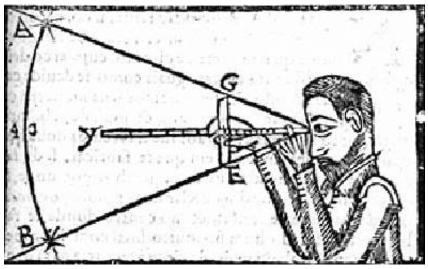

Figura 2.27: Observação da distância angular entre duas estrelas.

Fonte: idem figura 2.26

tenha sido os marinheiros europeus que influenciaram os pilotos árabes e guzarates[2] a usarem o novo instrumento em substituição as tavoletas da Índia que como vimos já era a um bom tempo usadas por esses povos, uma vez que a balestilha apresentava nítidas vantagens.

Ainda em relação a sua origem, há uma certa confusão entre a balestilha e um outro instrumento conhecido como báculo de Jacob, o qual já era usado, há muito tempo, por agrimensores medievais e do renascimento. Alguns até supõem que se tratavam do mesmo instrumento com nomes diferentes, porém segundo Luís de Albuquerque a balestilha se originou como uma adaptação do báculo de Jacob que a permitiu ser usada para fins astronômicos. Dessa forma, embora a estrutura dos dois aparelhos sejam basicamente iguais, faz-se necessário diferenciar os dois instrumentos pois, o uso distinto deles leva a diferenças relevante no processo de construção e em especial na graduação do virote. O báculo de Jacob é tão interessante no estudo da balestilha que nos convém, logo mais a frente, discorrer sobre ele e a construção matemática nele envolvida.

Uma outra discussão importante sobre a balestilha é a incerteza da data na qual ela passou a ser usada como ferramenta na navegação astronômica, em relação a isso afirma Albuquerque.

[2] O Sultanato de Guzarate foi um reino independente fundado no início do século XV em Guzarate. O fundador da dinastia muzafárida no poder, Zafar Khan (posteriormente Muzaffar Shah I) foi nomeado em 1391 governador de Guzarate por Nasir-ud-Din Muhammad bin Tughluq IV, governador do principal estado no norte da Índia à época. Hoje Guzarate é um dos 28 estados da Índia moderna.

> [...] O *Livro de Marinharia* de João de Lisboa contém possivelmente a mais antiga referencia à intervenção da balestilha em náutica, com indicações sobre a sua utilização nas observações solares. (ALBUQUERQUE, 1988, p. 11). [4]

Esse livro de Lisboa, escrito em meados do século XVI, na verdade não era uma obra literária e sim uma compilação de dados e informações relevantes para conduzir uma navegação pelo alto mar, como consequência disso a obra não é datada, embora seja razoável situá-la no primeiro quartel do século XVI em alguma ano pouco posterior a 1514 data expressamente indicada para outra obra de João de Lisboa o *Tratado da Agulha de Marear* o qual vem incluído na compilação. Todavia em 1529 temos uma segura referência da presença de uma balestilha em um navio pesqueiro português de João Gomes, que fora assaltado por corsários franceses ao largo da costa da Guiné e no relatório sobre o assalto consta entre os objetos roubados uma balestilha junto com astrolábio, agulha de marear e regimento de navegação. A partir da segunda metade do século XVI até meados do século XVIII, o uso da balestilha torna se generalizado nas grandes navegações europeias.

Finalmente, resta-nos alguma consideração sobre o grau de precisão efetiva que a balestilha dispunha em suas medições. Apesar de que, um processo meticuloso de graduação, tornaria possível uma precisão de sexto de grau, na prática não se conseguia aferir alturas muito exatas devido ao fato da balestilha ser um instrumento de mira dupla simultânea às vezes difícil de executar. Aliado a isso, o recorrente balanço do mar possivelmente adulterava o valor correto da medição. Havia ainda dois problemas específicos para os quais porém era apresentado soluções. O primeiro se refere à impossibilidade de aferir diretamente a altura do Sol, por razões obvias de que a enorme luminosidade desse astro não permite ao olho humano mirá-lo. Contudo, sabe-se que o regimento do Sol, no qual media-se diariamente a passagem meridiana do Sol, era importantíssimo nos rudimentos da navegação astronômica e inclusive o mais usado e preferido pelos marinheiros e capitães de navio pelo fato de ser o mais simples matematicamente e portanto mais popular entre os navegadores. Para resolver esse impasse, pelo menos duas soluções eram recorrentes as quais são descritas por Albuquerque (1988).

> [...] fazer a pontaria de modo que a soalha encobrisse o Sol,como se diz no regimento de João Lisboa, onde se aconselha o leitor a apontar ao astro por cima (para evitar a cegueira) neste caso era necessário diminuir à altura observada o semidiâmetro aparente do Sol, avaliado em 15'. (ALBUQUERQUE, 1988, p. 23) [4]

A segunda opção seria fazer a medição de costas para o Sol.

> [...] observar de costas voltadas para o astro - procedimento a que os navegadores chamaram "observação de revés", introduzindo junto ao cós

> da balestilha um dispositivo de reflexão dotado de uma fenda, através da qual se visaria o horizonte, e fazendo as pontarias aproximando a vista do extremo do virote oposto ao seu cós; é o que mostra a figura reproduzida de uma obra de Manuel Pimentel. (ALBUQUERQUE, 1988, p. 23). [4]

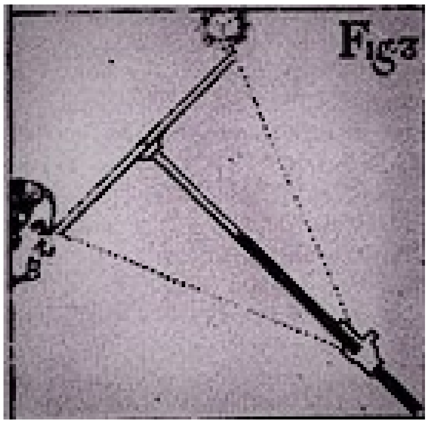

Figura 2.28: Observação da altura do Sol com a balestilha de revés.
Fonte: PIMENTEL, 1712

O outro problema que o uso da balestilha apresentava era o fato da necessidade de apontar para o horizonte, o qual nem sempre estava plenamente visível. Essa dificuldade mostrava-se, por exemplo, na medição da altura das estrelas ou planetas em noites escuras, o aparecimento de obstáculos frente a linha do horizonte como a interposição de ilhas no plano vertical do Sol ou ainda a presença de nevoeiros na superfície do mar. A solução empregada pelos navegadores para contornar essas impossibilidades é também descrita por Albuquerque.

> [...] A solução adotada já se encontra exposta na *Arte de Navegar* de Pedro de Medina; consistia em tomar uma vara da altura de um homem e terminada por uma cruz, que um auxiliar devia manter em posição perpendicular ao plano do horizonte, na frente do piloto e no plano vertical do astro; a observação deveria então ser feita de modo que pelo extremo inferior da soalha o observador visasse a aresta superior da cruz, visto esta linha de pontaria ser paralela ao horizonte; no caso de se operar em noite muito escura, colocar-se-ia no cume da vara um sinal de fogo, o que permitia fazer mais facilmente esta ultima pontaria. (ALBUQUERQUE, 1988, p. 29). [4]

2.3.1 Báculo de Jacob

Como já citamos, havia um outro instrumento chamado Báculo de Jacob, que remonta a época medieval e portanto bem anterior a balestilha, mas que possuía exatamente a mesma estrutura que ela, sendo composto por um virote e por uma soalha encachada perpendicularmente que por ele deslizava até encontrar marcações especificas no mesmo. A grande diferença porém, pela qual grandes historiadores, como o Luís de Albuquerque, por exemplo, afirmam tão incisivamente que a balestilha não pode ser confundida com o báculo de Jacob, sendo ela apenas derivada dele; é que os objetivos e o uso dos dois instrumentos são claramente distintos e essa diferença leva a processos de graduação do virote totalmente divergentes.

O báculo de Jacob ainda na Idade Média era utilizado principalmente por agrimensores, para medir terrenos, torres e rios para fins de engenharia ou mesmo de cobrança de impostos territoriais e pelos exércitos para fins militares; dessa forma a magnífica função desse incrível instrumento era medir imensas ou inacessíveis larguras e comprimentos, e ainda mais fazer essas medições a distância do objeto visado. Já a balestilha, como já vimos, surgiu com o objetivo de fazer observações astronômicas e estas com intuito de satisfazer a necessidade dos navegadores de se localizarem em meio a imensidão do alto mar, e em especial a partir século XVI com o alavanque das Grandes Navegações. Para melhor entendermos como funcionava o báculo de Jacob, mostraremos a seguir, em passos como executava-se uma medição de um comprimento inacessível.

Primeiro faz-se necessário dizer como era feita a graduação no virote desse instrumento que, por sinal, era muito mais simples e menos controversa que a graduação da balestilha que veremos mais a frente. Assim, o virote do báculo era dividido geralmente entre 6 a 8 partes iguais marcadas por incisões em baixo relevo e a soalha devia ter tamanho exatamente igual a uma dessas partes. Assim, para medir determinada distância procedia-se da seguinte forma:

1) O observador deveria posicionar-se perpendicularmente de frente ao comprimento que pretendia medir, seguindo a mesma linha, fixava a soalha em uma das marcações no virote e movia-se até um ponto em que conseguisse mirar, com um olho no cós do virote, os pontos extremos do comprimento que desejava medir, através das extremidades da soalha;

2) Feito isto, ele marcava, no chão, o ponto em que se encontrava e deslizava a soalha para a marcação imediatamente seguinte, e logo após, movia-se, para trás ou para frente, até conseguir através da soalha novamente mirar os pontos extremos do objeto a medir, marcando também no terreno sua nova posição;

3) Por fim, a distância entre as duas posições de pontaria coincidia com a justa medida do comprimento que se pretendia aferir. A figura 2.29 exemplifica.

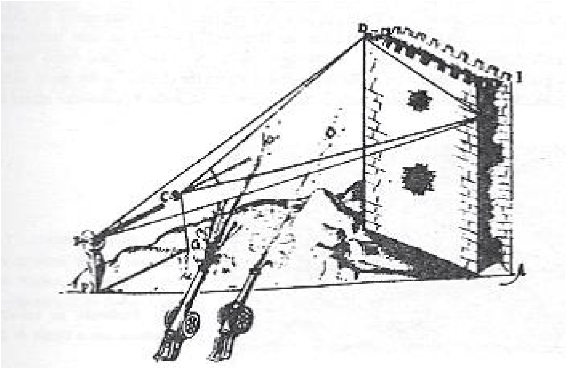

Figura 2.29: Exemplo da medição de uma distância com o báculo de Jacob
Fonte: ALBUQUERQUE, 1988, P. 14

Agora seguiremos com uma demonstração geométrica da funcionalidade do báculo de Jacob. Para isso examinemos a figura 2.30 que representa o procedimento descrito anteriormente.

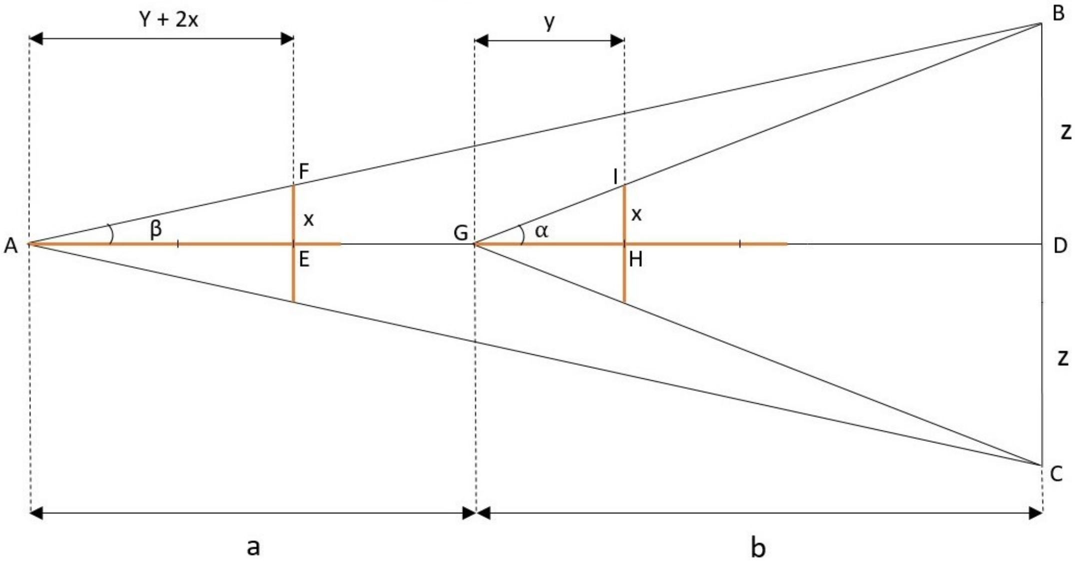

Figura 2.30: Esquema matemático de uma observação com o báculo de Jacob

Seja BC o comprimento inacessível que queremos medir, o ponto G o local da primeira pontaria e o ponto A da segunda. Temos que $I\hat{G}H = B\hat{G}D$ e $G\hat{H}I = G\hat{D}B$ logo pelo caso AA os triângulos GHI e GDB são semelhantes donde segue:

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{b}$$

$$bx = yz \tag{2.5}$$

Da mesma forma como $F\hat{A}E = B\hat{A}D$ e $A\hat{E}F = A\hat{D}B$, pelo caso AA os triângulos AEF e ADB são semelhantes, então:

$$\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{y+2x}{a+b} \\ x(a+b) &= z(y+2x) \\ ax+bx &= yz+2xz \end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) em (2.6)

$$\begin{aligned} ax+yz &= yz+2xz \\ a &= 2z \qquad \square \end{aligned}$$

Assim justificamos matematicamente o uso do Báculo de Jacob.

2.3.2 Graduação geométrica da balestilha

Como já citamos no início dessa seção, havia pelo menos dois métodos matemáticos para se fazer a graduação de uma balestilha, o primeiro desses era o método geométrico, também chamado método de Werner, matemático alemão que teria sido o primeiro a escrever, em 1514, sobre como graduar o virote da balestilha geometricamente. Seguindo os passos dele, muitos outros cosmógrafos do século XVI reproduziram em suas obras a descrição desse procedimento, o qual possuía a vantagem de dar como resultado no virote o valor direto do ângulo desejado. Isto fazia com que a maioria dos navegadores preferissem balestilhas assim projetadas. Por outro lado, havia certa dificuldade de precisão no processo de marcação do virote que exigia habilidade meticulosa de desenho geométrico. Um exemplo da descrição desse método se encontra em um tratado intitulado *Chronografia*, de Manoel de Figueiredo em 1603:

O Radio astronômico, ou balestilha se fabrica de hum semicirculo, ou quarta de circulo pella seguinte ordem, fas-se-ha huma quarta circolo em huma taboa, seja a. b. c. e partiremos o arco b. c. pello meo, seja no ponto d., e do ponto d. ate o ponto b. partiremos em quarenta e cinco partes iguais, seja partiremos primeiro o espasso d. b. em tres partes iguais, e depois cada huma em outras tres, e assi ficará partida em nove espassos, e logo cada hum destes cinco partes, e ficara partido em 45 partes iguais, [...] (FIGUEIREDO, 1603). [5]

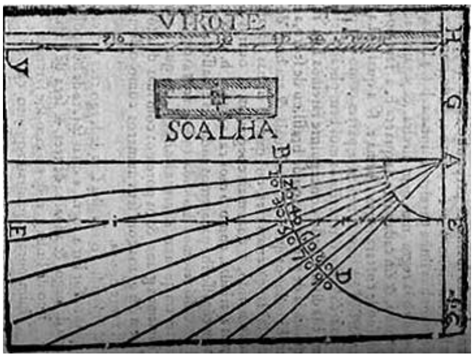

Figura 2.31: Esquema para graduação da balestilha segundo o livro de Manuel de Figueiredo

Fonte: COSTA, 1983.

Para simplificar a explicação desse processo geométrico de graduação, descreveremos a marcação de um virote graduado de 30 em 30 graus, trazendo para os nossos dias atuais esse procedimento poderia ser feito desenhando com régua e compasso em uma folha de cartolina apoiada em uma mesa de tamanho adequado. Com auxilio da figura 2.32, procede-se com os passos a seguir.

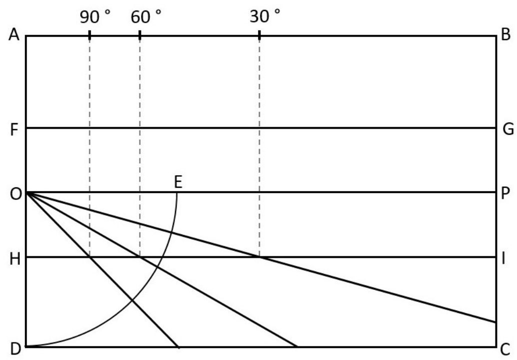

Figura 2.32: Esquema para graduação geométrica da balestilha

1) Desenhe o retângulo $ABCD$ de forma que o comprimento $\overline{AB}$ seja do tamanho exato do virote, e a largura $\overline{AD}$ cerca de três quartos do comprimento;

2) Trace paralelas ao segmento $\overline{AB}$: $\overline{OP}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$ onde O seja ponto médio de $\overline{AD}$ e $\overline{OF} = \overline{OH}$ tenha o comprimento de meia soalha;

3) Com o compasso centralizado em O, abra-o até encontrar o ponto D e por ele trace um arco de 90°, encontrando o ponto E no segmento $\overline{OP}$

4) Divida o arco DE, primeiramente ao meio e depois a metade de cima em três partes iguais:

5) Trace pelo ponto O, segmentos que passem pelas 3 divisões do arco DE até intersectarem o segmento $\overline{HI}$

6) Pelos 3 pontos de interseção em $\overline{HI}$, contando da esquerda para direita, levante perpendiculares até $\overline{AB}$ e nos pontos nesse segmento gerados, assinale respectivamente os ângulos de: 90°, 60° e 30°.

7) Por fim, alinhando paralelamente o segmento $\overline{AB}$ com o virote, tendo este, o cós no ponto A, transcreva a graduação do segmento $\overline{AB}$ no virote, o qual estará pronto para receber a soalha.

Simplificamos bastante o exemplo por fins didáticos, pois fica bem claro que um virote graduado, dessa forma, com intervalos de 30° não teria a menor serventia para a navegação astronômica. O que é importante observarmos é que como nosso desenho representa uma metade da balestilha, para cada medida de ângulo produzida na metade superior do arco ED, corresponderá no virote um ângulo com o dobro do valor. Assim sendo, se quisermos uma balestilha graduada com precisão de 1°, precisaremos dividir a metade superior de ED em 90 partes iguais.

Podemos ver que o processo de graduação geométrico da balestilha, devia sua precisão basicamente ao grau de habilidade, do fabricante do instrumento, em desenho técnico-matemático, os quais eram justificados pelas propriedades angulares de figuras geométricas.

2.3.3 Graduação da balestilha via tabela de tangentes

A segunda maneira de se graduar a balestilha era através de tabelas trigonométricas de tangentes. Com esse método também era possível marcar em graus o virote, produzindo uma balestilha semelhante a uma graduada geometricamente. Na figura 2.33 podemos ver uma fotografia de uma tabela usada para esse fim, retirada de um tratado do cosmógrafo Francisco Xavier do Rego. Esse, na verdade,

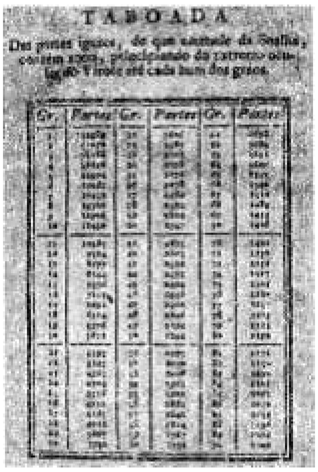

Figura 2.33: Fotografia de uma tabela de tangentes original do século XVIII. Fonte: ALBUQUERQUE, 1988, P. 25

foi o uso mais frequente do método. Entendemos, porém, que a opção de marcar no virote uma escala numérica linear, como já haviam proposto anteriormente alguns cosmógrafos, entre eles o grande matemático português Pedro Nunes, seja a mais vantajosa ao se usar esse método trigonométrico. Com esse procedimento, a obtenção do ângulo de altura desejado seria feita através de cálculos ou consultando a tabela de tangentes no momento do uso do instrumento.

Para entendermos como produzir uma tabela de tangente e efetuar uma graduação linear do virote, descreveremos um processo de construção de uma balestilha constituída por uma soalha de 20 cm e um virote de 80 cm.

Primeiramente, devemos graduar o virote e para isso tomamos o comprimento de meia soalha e dividimos em 100 partes iguais, onde obteremos uma divisão em 100 mm. Passemos essa graduação para o virote a começar do seu cós, que chamaremos ponto A, seguidos os 100 primeiros milímetros, comprimento de uma semi-soalha, marcamos o ponto E que será o início da nossa escala de numeração. Para facilitar a grafia no virote a enumeração poderá ser feita de 10 em 10 milímetros, a figura 2.34 nos guiará na justificação do método e na composição da tabela trigonométrica necessária

- $\overline{AB}$ = comprimento do virote;
- A - cós do virote;
- C, D - extremidades da soalha;
- $\alpha = C\hat{A}D$ = ângulo da altura observada;
- E - ponto de início da numeração do virote;

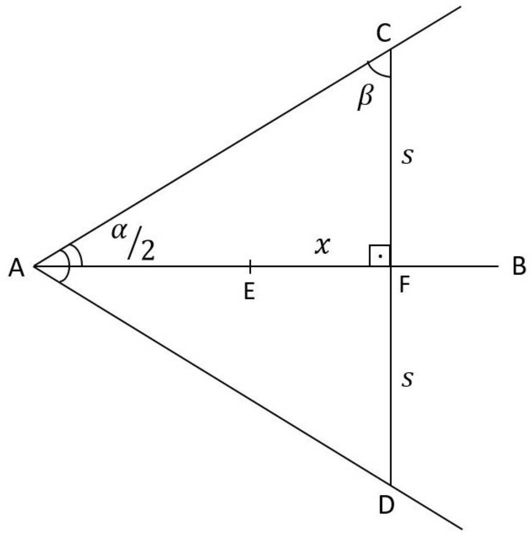

Figura 2.34: Esquema geométrico da balestilha

- F - posição referente a numeraçao marcada pela soalha no virote correspondente à altura observada do astro;
- $s = \overline{CF} = 100\ mm =$ semi-soalha;
- $\overline{AF}$ = distância do cós do virote até a posição da soalha referente a altura do astro observado;
- $x = \overline{EF}$ = distância do início da enumeração da graduação à posição que a soalha está marcando numa determinada observação;

Observando o triângulo retângulo AFC na figura 2.34, segue que:

$$tg\beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{100 + x}{100} = tg\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{100 + x}{100}$$

$$arc\ cotg\left(\frac{100 + x}{100}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = 2 \times arc\ cotg\left(\frac{100 + x}{100}\right)$$

Optamos por usar a cotangente em vez da própria tangente, pelo fato que aquela resulta em divisões por 100, bem mais práticas de serem efetuadas, ressalva-se porém que a tabela seguinte foi produzida através do software Excel.

Tabela de tangentes para obtenção de um ângulo em uma balestilha graduada trigonometricamente com base em uma semi-soalha dividida em 100 partes iguais, para uma soalha de 20 cm		
Valor de x no virote	Ângulo $\alpha = 2 \times \cot^{-1}\left(\frac{100+x}{100}\right)$	
	Grau	Minuto
1	89	26
2	88	52
3	88	18
4	87	45
5	87	12
6	86	40
7	86	8
8	85	36
9	85	4
10	84	33

Figura 2.35: Tabela para leitura de uma medição com uma balestilha trigonométrica

Na figura 2.35 vemos o início da tabela de tangentes necessária para convertermos a numeração aferida no virote em sua devida medida angular, nela temos na primeira coluna, os valores que podem ser observados no virote e nas segunda e terceira colunas temos a medida do ângulo de altura do astro observado respectivamente em graus e minutos. Devido aos tamanhos da soalha e do virote, sugeridos no nosso exemplo, essa tabela poderia se estender até o valor de $x = 500$.

Considerações Finais

Na Grécia antiga Pitágoras já dizia: "Os Números governam o mundo", vimos neste trabalho que a Matemática foi fundamental para o devido sucesso das Navegações dos Descobrimentos, as quais possibilitaram ao homem conhecer, por inteiro, o nosso planeta. É sempre surpreendente e bastante prazeroso estudar os grandes eventos históricos sob uma perspectiva matemática, uma vez que essa ciência esteve e sempre estará intrinsecamente interligada com o desenvolvimento da sociedade humana, fazendo inclusive que quem melhor a domine saia na frente na busca pelo êxito em realizar seus projetos e conquistas. Assim aconteceu a Portugal, na ocasião de sua inédita descoberta do tão sonhado e lucrativo Caminho das Índias.

Como aluno da turma 2015 do mestrado PROFMAT-UFPB, o qual concluo com o presente trabalho, sinto-me lisonjeado pela oportunidade de ter participado do programa e plenamente satisfeito com os conhecimentos e experiências que muito agregaram a minha formação como professor da educação básica, tendo sempre ciência que o investimento maciço em educação é tudo que o nosso País precisa para o verdadeiro progresso que tanto lhe é merecido.

Referências Bibliográficas

[1] BARTOLI, Cosimo. Del modo di misurare le distantie.

[2] COSTA, Abel Fontoura. A marinharia dos descobrimentos. Divisão de publiçaões e biblioteca, Agência geral das colónias, 1939.

[3] DE ALBUQUERQUE, Luís. Curso de história da náutica. Livraria Almedina, 1972.

[4] DE ALBUQUERQUE, Luís. Instrumentos de navegação. 1988.

[5] FIGUEIREDO, Manoel de. Chronographia. Reportorio dos tempos. 1603.

[6] MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. A criação dos logaritmos nos fins do século XVI: as contribuições de Napier, Briggs e Burgi. A matemática no século de Andrea Palladio, v. 1, 2008.

[7] MILONE, A. d et al. Introdução à astronomia e astrofísica. São José dos Campos: Gráfica do INPE, 2003.

[8] PIMENTEL, Manuel et al. Arte de navegar. 1712.

[9] REIS, António Estácio dos, Astrolábios náuticos em Portugal. Edições Inapa, 2002.

[10] SAITO, Fumikazu; DIAS, M. da S. Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

[11] SANTIAGO, Basílio; SALVIANO, A. Astronomia Geodésica. Porto Alegre: UFRGS, 2001.

[12] The astrolabe. (2010). Acesso em 25 de Julho de 2017, disponível em The astrolabe: www.astrolabe.org