Júlio César de Carvalho Júnior

COMO AS FUNÇÕES SÃO CALCULADAS? APRESENTANDO OS POLINÔMIOS DE TAYLOR

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T
515
2017

Carvalho Júnior, Júlio César de,, 1992-
Como as funções são calculadas? Apresentando os polinômios de Taylor. / Júlio César de, Carvalho Júnior. – Florestal, MG, 2017.
ix, 76f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Luis Alberto D'Afonseca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.76.

1. Matemática. 2. Matemática no Ensino Médio. 3. Ensino de segundo grau. 4. Funções não-algébricas. 5. Funções. 6. Polinômios de Taylor. I. Universidade Federal de Viçosa. Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

C331c

Júlio César de Carvalho Júnior

COMO AS FUNÇÕES SÃO CALCULADAS? APRESENTANDO OS POLINÔMIOS DE TAYLOR

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 14 de julho de 2017.

Jane Lage Bretas

Elisângela Aparecida de Oliveira

Mehran Sabeti
(Coorientador)

Luis Alberto D'Afonseca
(Orientador)

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais, pelo apoio e pela motivação dados em todos os momentos. Sem eles nada seria possível.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre estar ao meu lado me abençoando.

Agradeço aos meus pais Maria Aparecida de Araújo Carvalho e Júlio César de Carvalho, por terem me proporcionado uma ótima educação e por sempre apoiarem incondicionalmente os meus estudos.

Agradeço aos amigos e as pessoas especiais, por sempre me apoiarem e motivarem.

Agradeço aos professores, em especial minha primeira professora de cálculo, por me motivar a fazer um mestrado.

Agradeço ao Professor Dr. Luis Alberto D'Afonseca, pois sem seus conhecimentos e sua experiência seria impossível concluir este trabalho.

Resumo

JÚNIOR, Júlio César de Carvalho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017. **Como as Funções são Calculadas? Apresentando os Polinômios de Taylor**. Orientador: Luis Alberto D'Afonseca. Coorientadores: Mehran Sabeti e Luis Felipe Gonçalves Fonseca.

O objetivo deste trabalho é mostrar aos alunos e professores do Ensino Médio como as funções não-algébricas são calculadas por computadores ou calculadoras. Empregaremos as aproximações polinomiais de Taylor para avaliar funções como seno, cosseno, exponencial e logaritmo, a fim de que os alunos possam assimilá-las com mais facilidade.

Abstract

JÚNIOR, Júlio César de Carvalho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017. **How are the Functions Calculated? Introducing the Taylor's Polinomials**. Adviser: Luis Alberto D'Afonseca. Co-advisers: Mehran Sabeti and Luis Felipe Gonçalves Fonseca.

Our objective is to show for High School students and teachers how non-algebraic functions are evaluated by computers and calculators. We will employ Taylor's polynomial approximations to evaluate functions such as sine, cosine, expoenential, and logarithm, so that students can assimilate them more easily.

Lista de Figuras

Sumário

1

Introdução

Para justificar o direcionamento deste trabalho é necessário entender a importância que o estudo de funções tem para o desenvolvimento matemático e lógico dos alunos do ensino médio. As funções são um dos elementos essenciais da matemática contemporânea. Elas fazem parte do conteúdo básico apresentado aos alunos durante sua formação básica [10, 13]. O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema (de natureza linear, quadrática, exponencial, periódica, etc.) permitindo que o aluno estabeleça relações com outros campos de estudo dentro e fora da própria matemática [6]. Assim, segundo o que diz as Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais [21]

> A ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e, principalmente, nas aplicações dessas funções.

O ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí as identificar como relações particulares. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, as trigonométricas são usadas para estudar fenômenos de comportamento periódico.

Este trabalho apresenta quatro capítulos de maneira que ao longo de seu estudo vamos construindo o conhecimento necessário para o objetivo final: o uso das Séries de Taylor na aproximação de funções. Este conteúdo é abordado em várias dissertações, como na dissertação de Ana Cecília Sanches Cerqueira [3] e Emilio Curi Neto [14].

O Capítulo 2 traz um breve estudo sobre as funções, seus principais teoremas, além de definições e propriedades importantes.

No Capítulo 3 apresentaremos a definição de limite, necessária para que possamos definir o que é uma sequência. A partir disso, fazemos um estudo sobre sequências numéricas e sequências de funções.

No Capítulo 4 apresentamos os teoremas e definições relacionadas as séries de Potências e as séries de Taylor. Em uma das seções deste capítulo vamos realizar os estudos para fazermos a representação do seno, cosseno, logaritmo e exponencial, e um estudo sobre derivação e integração das Séries de Potência.

No Capítulo 5, apresentaremos um roteiro mostrando como a teoria de Taylor foi aplicada em sala de aula com os alunos do segundo ano do ensino médio.

Por fim, apresentaremos os planos de aula e uma tabela com várias representações de funções pelos polinômios de Taylor nos Apêndices A e B.

2

Funções

Neste capítulo iremos mostrar o que é uma função (do ponto de vista matemático), seus principais conceitos e as definições que serão essenciais para os estudos que serão realizados no presente trabalho.

2.1 Definição de função

Definição 2.1: Dados os conjuntos X e Y, *uma função* $f : X \longrightarrow Y$ (lê-se uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se y igual a f de x).

O conjunto X chama-se *Domínio* e Y é o *contradomínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. É importante ressaltar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função f no ponto $x \in X$.

Vejamos abaixo alguns exemplos:

Exemplo 1:

1. Seja X o conjunto dos triângulos do plano π e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Se, a cada $t \in X$, fizermos corresponder um número real

   $$f(t) = \text{área do triângulo } t,$$

   obteremos uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Sejam S o conjunto de segmentos de reta do plano π e Δ o conjunto das retas desse mesmo plano. A regra que associa a cada segmento AB de S sua mediatriz $g(AB)$, define uma função $g : S \longrightarrow \Delta$.

3. A correspondência que associa a cada número natural n seu sucessor $n + 1$ define uma função $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ com $S(n) = n + 1$.

Definição 2.2: Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita ser *injetora (ou injetiva)* quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y, ou seja, f é injetora quando

$$x \neq x' \; em \, X \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \neq f(x')$$

Esta condição pode também ser expressa em sua forma contra positiva

$$f(x) = f(x') \qquad \Longrightarrow \qquad x = x'$$

No exemplo (1) apenas o item que associa um inteiro a seu sucessor representa uma função injetiva.

Definição 2.3: Diz-se que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *sobrejetora (ou sobrejetiva)* quando, para qualquer elemento $y \in Y$ pode-se encontrar, pelo menos, um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Mais geralmente, chama-se imagem do subconjunto $A \subset X$ pela função $f : X \longrightarrow Y$ ao subconjunto $f(A) \subset Y$ formado pelos elementos $f(x)$, onde $x \in A$. A função $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva quando $f(X) = Y$. O conjunto $f(X)$, imagem do conjunto X pela função f chama-se também a imagem (ou conjunto de valores) da função f.

Segundo Lima [12], dada a função $f : X \longrightarrow Y$, para saber se um elemento $b \in Y$ pertence ou não a imagem $f(X)$, escrevemos a "equação"$f(x) = b$ e procuramos achar algum $x \in X$ que a satisfaça. Consequentemente, para mostrar que f é sobrejetiva deve-se provar que a equação $f(x) = y$ possui uma solução $x \in X$, seja qual for o $y \in Y$ dado.

Em muitos exemplos de funções $f : X \longrightarrow Y$, principalmente na matemática elementar, X e Y são conjuntos numéricos e a regra $x \mapsto f(x)$ exprime o valor $f(x)$ por meio de uma fórmula que envolve x. A natureza da regra que mostra como obter $f(x)$ quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1. não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado;

2. não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y.

Apresentaremos algumas regras que não definem funções:

1. Considere a tentativa de definir uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, estipulando que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o número natural $p = f(n)$ deve ser tal que $p^2 + 3 = n$. O número $p = f(n)$ só pode ser encontrado se n for igual a $4, 7, 12, 19, \ldots$ pois nem todos os números naturais são da forma $p^2 + 3$. Assim, esta regra não define uma função com domínio $\mathbb{N}$, porque tem exceções.

2. Indiquemos com X o conjunto dos números reais positivos e com Y o conjunto dos triângulos do plano. Para cada $x \in X$, ponhamos $f(x) = t$ onde t é um

triângulo cuja área é x. Esta regra não define uma função $f : X \longrightarrow Y$ porque é ambígua: dado o número $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos diferentes com área x.

Definição 2.4: Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se *bijeção (ou bijetiva)*, ou uma correspondência biunívoca entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

Tendo definido as principais características das funções, vamos apresentar as funções mais usadas no ensino médio.

2.2 Função polinomial

Definição 2.5: Diz-se que p: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando são dados números reais $a_0, a_1, ..., a_n$, tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.1}$$

se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais. Um exemplo interessante do produto é

$$(x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}) = x^n - \alpha^n$$

vemos assim que $x^n - \alpha^n$ é divisível por $x - \alpha$.

Vamos mostrar que uma função polinomial de grau n pode ter no máximo n raízes. Seja p a função polinomial apresentada em (2.1). Para quaisquer x e α reais, temos:

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha)$$

Como cada parcela do segundo membro é divisível por $x - \alpha$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{R}$, $p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)q(x)$, onde q é uma função polinomial. Se p tem grau n então q tem grau $n - 1$.

Em particular, se α é uma raiz de p, isto é, $p(\alpha) = 0$, então $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A recíproca é óbvia. Portanto, α é uma raiz de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$. Mas geralmente, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)q(x),$$

em que q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n. Daí resulta que uma função polinomial de grau n não pode ter mais que n raízes.

Na próxima definição, mostraremos que não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio e a função polinomial. Temos assim, a definição de polinômio.

Definição 2.6: Um *polinômio* de grau n é uma expressão formal do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados de coeficientes.

Consideramos que os polinômios

$$\begin{aligned} p(X) &= a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \\ q(X) &= b_n X^n + \cdots + b_1 X + b_0 \end{aligned}$$

são iguais (ou idênticos) quando $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

A cada polinômio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ faz-se corresponder a função polinomial $\overline{p} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\overline{p}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta correspondência (polinômio) $\rightarrow$ (função polinomial) é sobrejetiva, pela própria definição dessas funções.

Por esse motivo, não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio p e a função polinomial $\overline{p}$.

Definição 2.7: Uma função polinomial p chama-se *identicamente nula* quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, p tem uma infinidade de raízes (todo número real é raiz de p). Então, nenhum número natural n é grau de p, a fim de não contradizer o resultado acima. Isto significa que na expressão $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, todos os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são iguais a zero. Concluímos então que a única função polinomial identicamente nula é a do tipo $0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$.

Observamos que, a função identicamente nula não tem grau, pois nenhum dos seus coeficientes é diferente de zero.

Dadas as funções polinomiais p e q, completando com zeros (se necessário) os coeficientes que faltam, podemos escrevê-las sob as formas

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

sem que isto signifique que ambas têm grau n, pois não estamos dizendo que $a_n \neq 0$ e nem $b_n \neq 0$. Suponhamos que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou seja, que p e q sejam funções iguais. Então, a diferença $d = p - q$ é a função identicamente nula, pois $d(x) = p(x) - q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

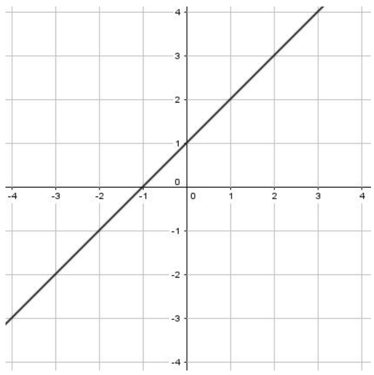
$$d(x) = (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Pelo que acabamos de ver sobre funções polinomiais identicamente nulas, segue-se que $a_n - b_n = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0$, ou seja:

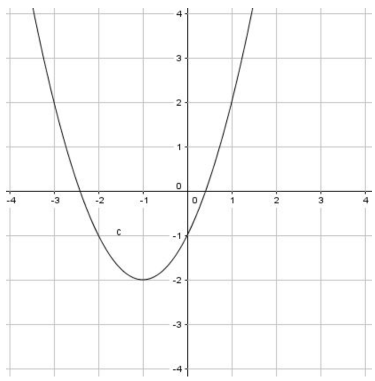
$$a_i = b_i, \qquad \text{com} \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n$$

Portanto funções polinomiais p, q assumem o mesmo valor $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, têm os mesmos coeficientes.

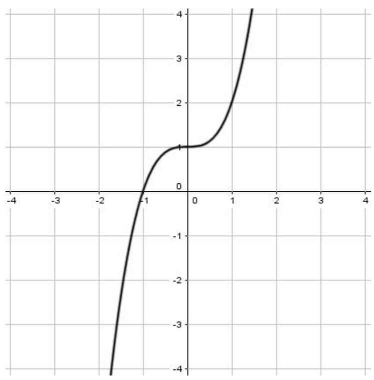
A figura (2.1) mostra alguns exemplos de como são os gráficos de algumas funções polinomiais de graus 1, 2, 3 e 4.



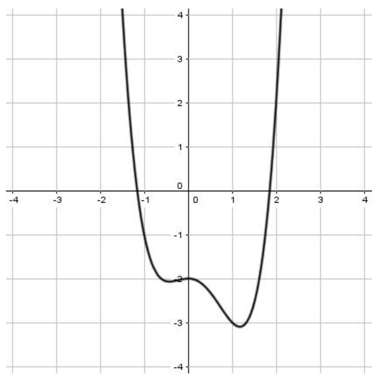
(a) Função polinomial de primeiro grau: $f(x) = x + 1$.



(b) Função polinomial de segundo grau: $f(x) = x^2 + 2x - 1$.



(c) Função polinomial de terceiro grau: $f(x) = x^3 + 1$.



(d) Função polinomial de quarto grau: $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2$.

Figura 2.1: Ilustração de algumas funções polinomiais de diferentes graus

2.3 Funções trigonométricas

Nesta seção, iremos definir as funções seno e cosseno.
Consideremos o triângulo retângulo ΔABC abaixo:

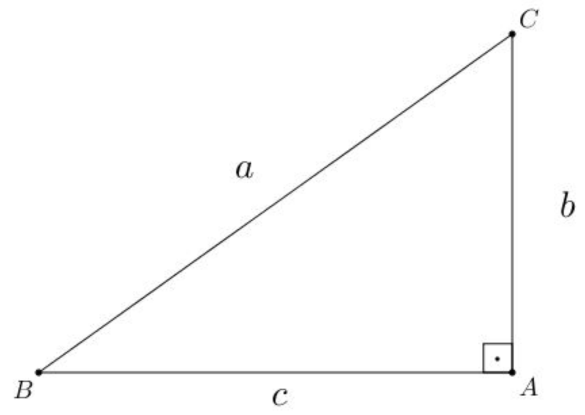


Figura 2.2: Triângulo retângulo ABC

Neste triângulo temos:

- a é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- b e c são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos;
- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo B e
- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo B.

Para definirmos as relações de seno, cosseno e tangente, vamos tomar como referência Dante [4]. Consideremos agora um ângulo $A\hat{O}B = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e tracemos, a partir dos pontos $C, E, G, etc.$ da semirreta $\overrightarrow{OA}$, as perpendiculares $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, etc., à semirreta $\overrightarrow{OB}$, conforme a figura 2.3.

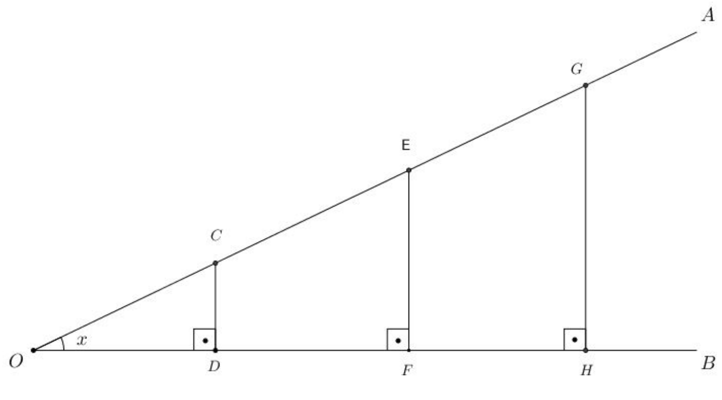


Figura 2.3: Triângulos retângulos semelhantes

Os triângulos OCD, OEF, OGH, etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Portanto, podemos escrever

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \cdots = \text{(constante)}$$

Essa relação depende apenas do ângulo x, ela é chamada **seno do ângulo** x e escrevemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } x}{\text{medida da hipotenusa}} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

De modo análogo, da semelhança de triângulos obtemos as seguintes relações:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \cdots = (\text{constante}) \text{ e } \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \cdots = (\text{constante}),$$

que também dependem apenas do ângulo x e que definimos, respectivamente, como **cosseno do ângulo** x e **tangente do ângulo** x:

$$\cos x = \frac{OD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } x}{\text{medida da hipotenusa}} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \text{ e}$$

$$\tan x = \frac{CD}{OD} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } x}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } x} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

As funções trigonométricas são definidas para ângulos no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos, estão naturalmente definidos o seno, o cosseno e a tangente de números reais no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. O próximo passo é estender essas funções de modo que elas possam ser definidas para todos (ou quase todos) os números reais e que seja mantida a relação trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Para isto consideremos a função $E : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ (onde S^1 é um círculo unitário de raio 1) definida do seguinte modo:

Definição 2.8: Fixada uma origem A em S^1 e dado um número real positivo x, percorremos sobre S^1, no sentido anti-horário se $x > 0$ e no sentido horário se $x < 0$, um comprimento igual a x; por definição, $E(x)$ é o ponto de S^1 assim atingido. Logo $E(x) = P$. Veja a Figura 2.4.

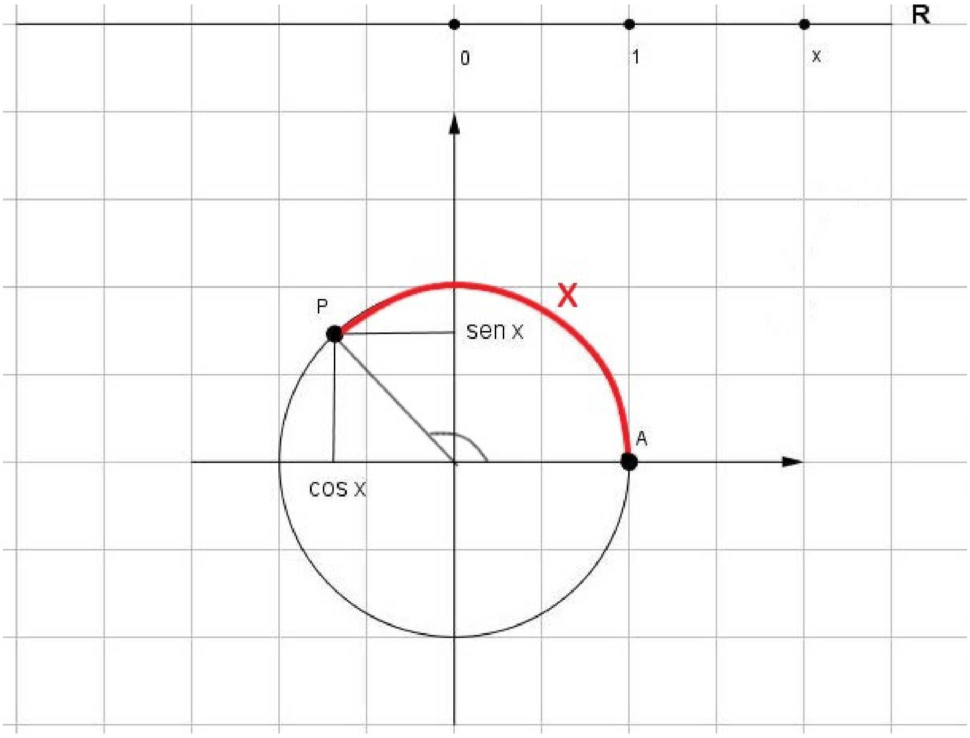


Figura 2.4: Representação do seno e do cosseno de um número real

Dado um ponto P de S^1, ele é a imagem pela função E de uma infinidade de números reais, todos eles da forma $x + 2k\pi$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, e $0 \leq x < 2\pi$.

Por exemplo, se atingirmos o ponto P ao percorrermos x unidades a partir do ponto A e em seguida, se dermos mais uma volta completa, ou seja, $x + 2\pi$ a partir de A, continuaremos no ponto P. Veja a figura 2.5.

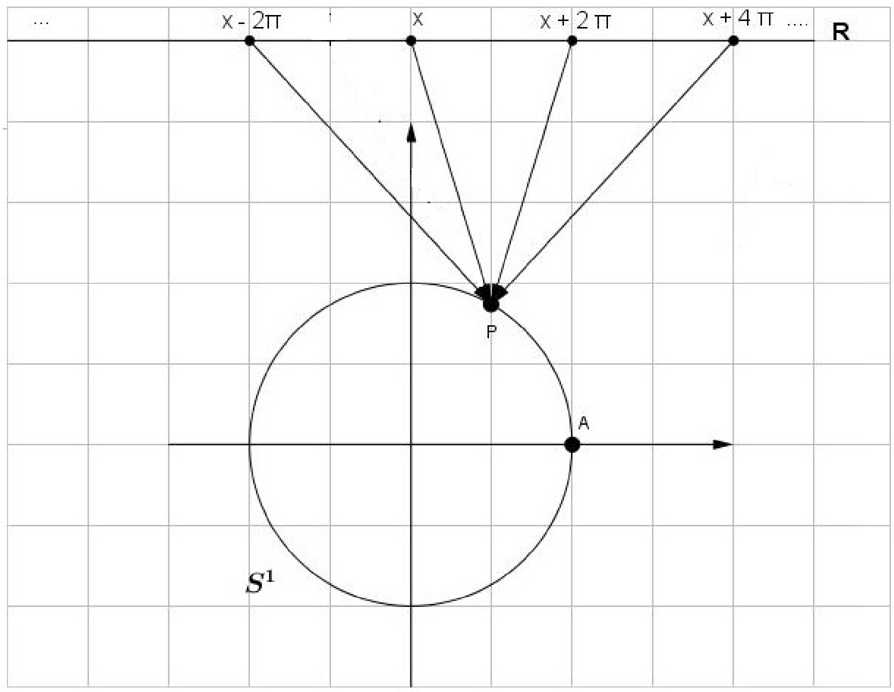


Figura 2.5: O ponto P é imagem dos números da forma $x + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de S^1 e sendo $A = (1{,}0)$ definimos $\cos x$ como sendo a abscissa de P, $\operatorname{sen} x$ a ordenada de P e $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, se $\cos x \neq 0$.

Esta definição coincide com a anterior quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Além disso, permite escrever $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$ (quando $P = A$), $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ (quando o ângulo $A\hat{O}P$ é reto). Ainda, como todo ponto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ de S^1 está a uma distância 1 da origem, temos

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Naturalmente, pelo que observamos acima, para todo k inteiro, e para todo x real, $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$, porque $E(x + 2k\pi) = E(x) = P$. Como mostra a figura 2.5.

Conforme Carmo [2], isto significa que as funções seno e cosseno são *periódicas* com período 2π, isto é, se conhecermos o comportamento destas funções no intervalo $[0{,}2\pi]$, passamos a conhecer imediatamente como essas funções se comportam em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento igual a 2π.

Em outras palavras, o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ no intervalo $[\,0,\ 2\pi\,]$ é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[\,2k\pi,\ 2(k+1)\pi\,]$. Podemos então restringir o estudo desas funções ao intervalo$[\,0,\ 2\pi\,]$, que corresponde a uma volta em S^1. Veja a figura 2.6 que mostra um período da função seno.

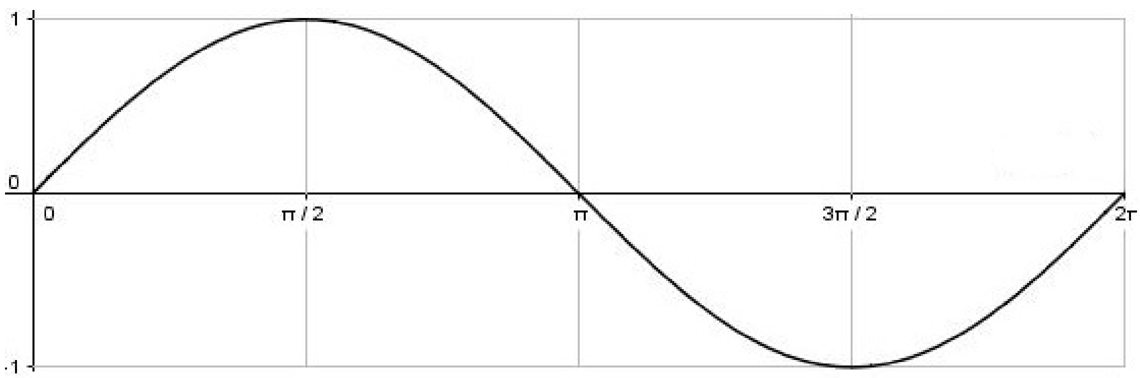


Figura 2.6: Gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ em um período

Da mesma maneira, obtemos o gráfico do cosseno, isto é, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, \cos x)$. Veja a figura com um período da função cosseno.

Observe que tanto o seno como o cosseno variam entre $[\,-1,\ 1\,]$. Para obtermos os gráficos completos dessas funções, repetiremos os gráficos anteriores uma infinidade de vezes como vemos na figura 2.8.

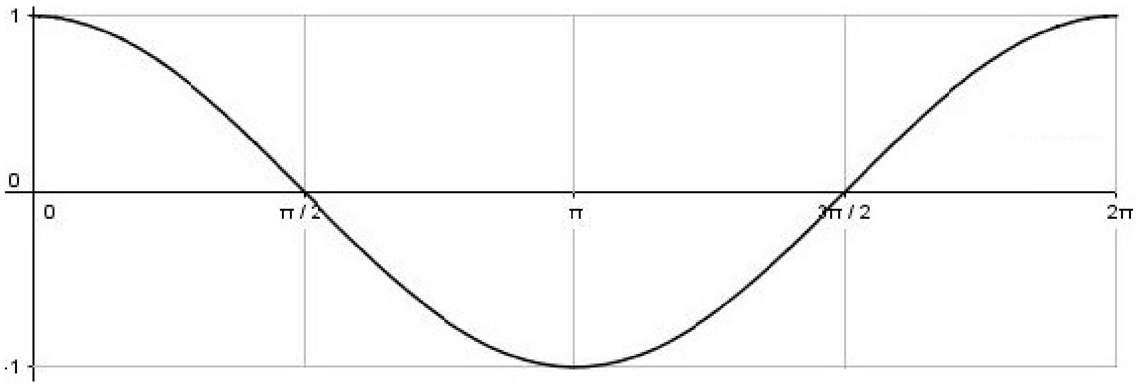


Figura 2.7: Gráfico da função $y = \cos x$ em um período

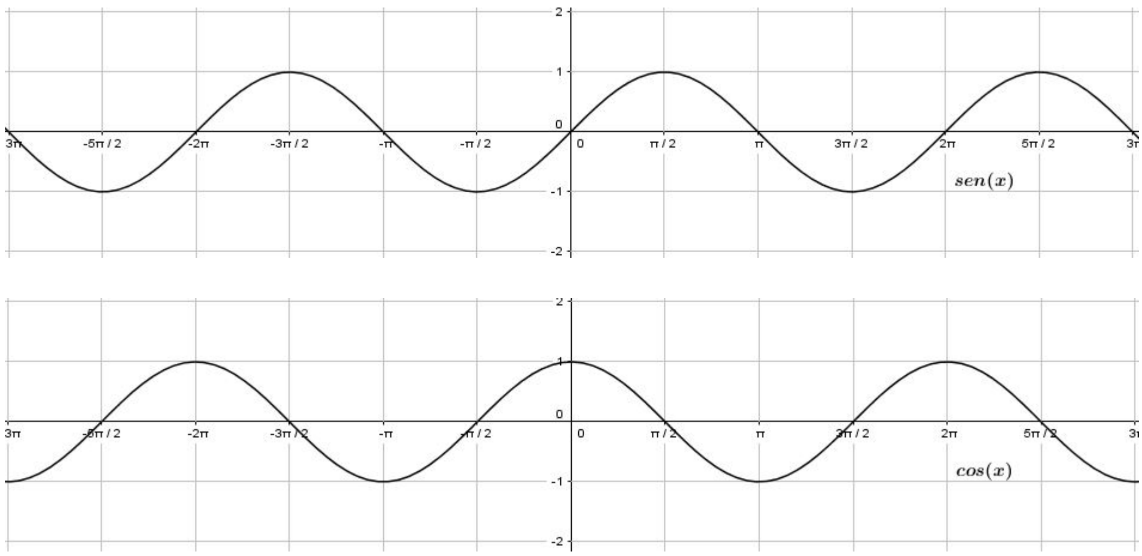


Figura 2.8: Ilustração da periodicidade das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$

Observado a figura 2.8, percebemos a semelhança entre as duas curvas. Na realidade são idênticas. Esta curva é chamada de Senóide. O gráfico da função cosseno é apenas o resultado da translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda do gráfico da função seno, ou seja $\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Já apresentamos as duas funções trigonométricas principais que serão utilizadas na atividade prática proposta para este trabalho no Capítulo 5. Porém, há outras funções trigonométricas importantes a se saber: tangente, cotangente, secante e cossecante. Vamos apresentar a definição da função tangente.

Definição 2.9: Consideremos o círculo trigonométrico no qual vamos marcar o ponto P que é imagem, no círculo, do número real x conforme indica a figura 2.9. Consideremos também o arco $\overset{\frown}{AP}$ ao qual corresponde o ângulo central x.

Seja o segmento $\overline{OP}$ o raio do círculo e P'e P'' as projeções do ponto P nos eixos x e y respectivamente. Chamemos de T a intersecção do segmento $\overline{OP}$ com o eixo das tangentes. Defini-se como tangente (do arco $\overset{\frown}{AP}$ ou do ângulo x) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$, ou seja $\tan x = \overline{AT}$.

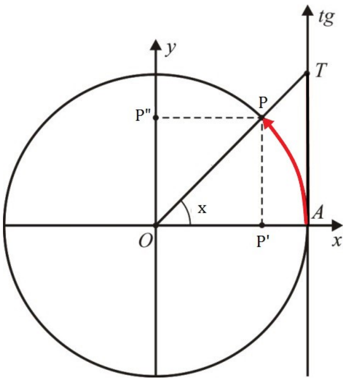


Figura 2.9: Círculo trigonométrico mostrando a reta tangente.

Segundo o que vemos no livro de Giovanni e Bonjorno [8] podemos observar que esta definição coincide com a que conhecemos para o triângulo retângulo, isto é, nos triângulos retângulos $OP'P$ e OAT, temos $\Delta OP'P \sim \Delta OAT$. Daí,

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{AP}} \implies \frac{\cos x}{1} = \frac{\operatorname{sen} x}{\overline{AT}} \implies \overline{AT} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x,$$

em que $\cos x \neq 0$. Isto é, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Assim, podemos dizer que o domínio da função $x \mapsto \tan x$ é formado pela reunião dos intervalos abertos $\left(k\pi - \frac{\pi}{2},\, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, temos que o gráfico da função tangente pode ser representado conforme a figura 2.10

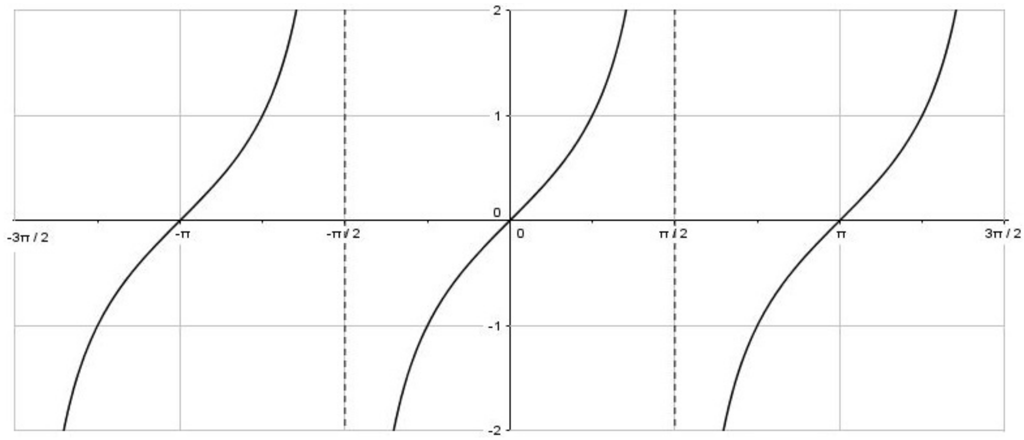


Figura 2.10: Gráfico da função tangente $f(x) = \tan x$

A secante de x, denotada por $\sec x$, é a função recíproca do cosseno, definida por $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ Devemos ter $\cos x \neq 0$,logo o domínio da função secante é $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}.\}$

Na figura 2.11, podemos ver o gráfico da função secante.

O cossecante de x, denotado por $\operatorname{cosec} x$, é a recíproca da função seno, e é definido por $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

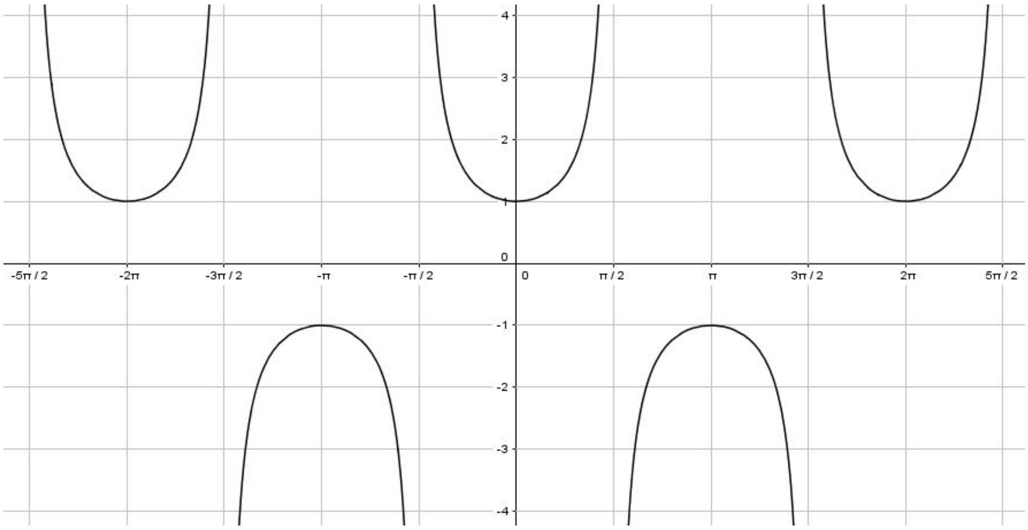


Figura 2.11: Gráfico da função secante $f(x) = \sec x$.

Devemos ter $\operatorname{sen} x \neq 0$, logo seu domínio será $\{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi, \forall\, k \in F\}$.
Na figura 2.12, podemos ver o gráfico da função cossecante.

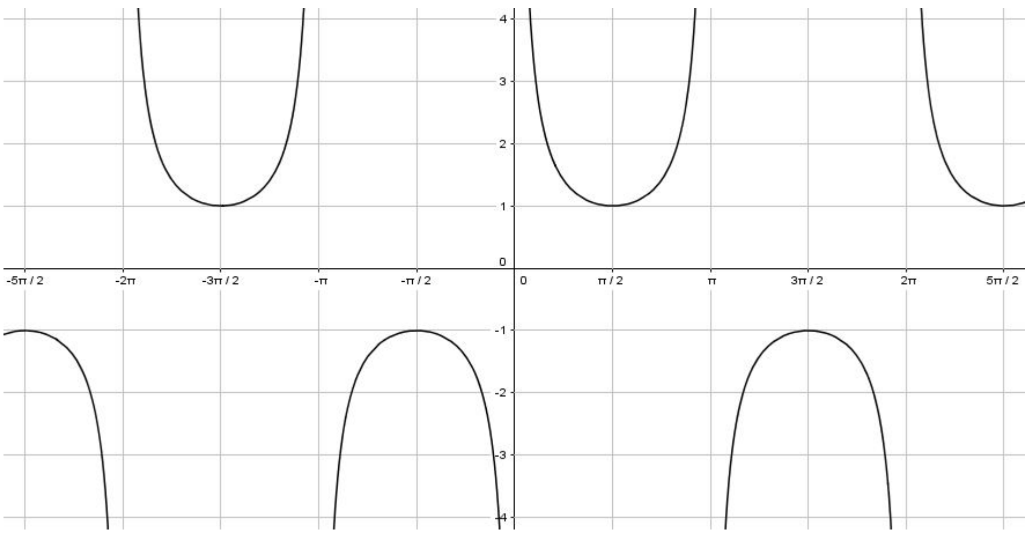


Figura 2.12: Gráfico da função cossecante $f(x) = \operatorname{cosec} x$

O cotangente de$x$, denotado por $\cot x$, é a função recíproca da função tangente e é definido por

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Devemos ter $\operatorname{sen} x \neq 0$,logo o domínio de função cotangente será $\{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}\}$.

A figura 2.13 apresenta o gráfico da função cotangente.

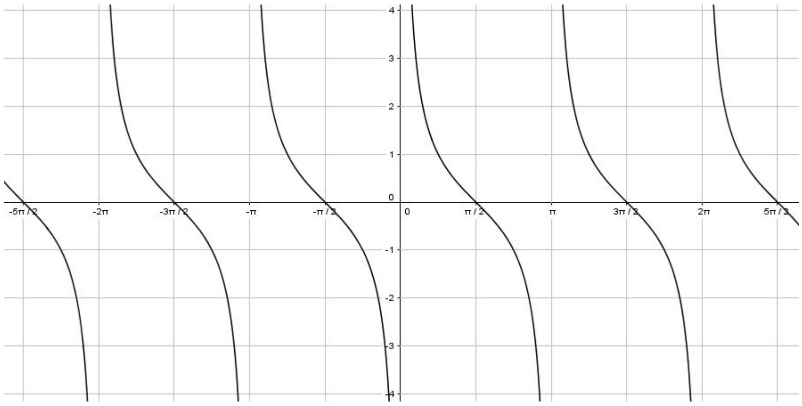


Figura 2.13: Gráfico da função cotangente $f(x) = \cot x$

2.4 Funções logarítmica e exponencial

Nesta seção vamos fazer um breve estudo das Funções logarítmica e Exponencial. Mostraremos suas principais características e o gráfico formado por elas.

2.4.1 Função logarítmica

Definição 2.10: Uma função real $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, chama-se **função logarítmica** quando tem as propriedades a seguir:

1. L é uma função crescente, isto é, $x < y \Longrightarrow L(x) < L(y)$ e
2. $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}^+$.

Segundo Lima [11], para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama-se o *logaritmo* de x. Mostraremos agora algumas propriedades importantes que são consequências das propriedades enunciadas acima:

Propriedade 1. Uma função Logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Se $x\,,\, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $x > y$. No primeiro caso, resulta do item 1 que $L(x) < L(y)$. No segundo caso, tem-se $L(y) < L(x)$. Em qualquer hipótese de $x \neq y$, conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

Propriedade 2. O logaritmo de 1 é zero. Pela Definição 2.10 item 2, temos $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$, logo $L(1) = 0$.

Propriedade 3. Os números maiores que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores que 1 têm logaritmos negativos.
Sendo L crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$.

Fixemos no plano um sistema de eixos cartesianos. Cada ponto desse plano será representado por um par ordenado $(x\,,\, y)$ de números reais, que são suas coordenadas em relação aos eixos fixados, sendo x a abscissa e y a ordenada do ponto em questão. Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = 1/x$, isto é, da função que associa a cada número real positivo x o número $y = 1/x$. Temos que H é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $\left(x\,,\,\frac{1}{x}\right)$, onde $x > 0$. Em símbolos

$$H = \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2,\; x > 0\, e\; y = \frac{1}{x}\right\}.$$

Geometricamente, H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que está contido no primeiro quadrante, isto é, um ponto $(x\,,\,y)$ do plano pertencente ao conjunto H se, e somente, $x > 0$ e $xy = 1$. A Figura 2.14 mostra o ramo positivo da hipérbole de função $y = 1/x$.

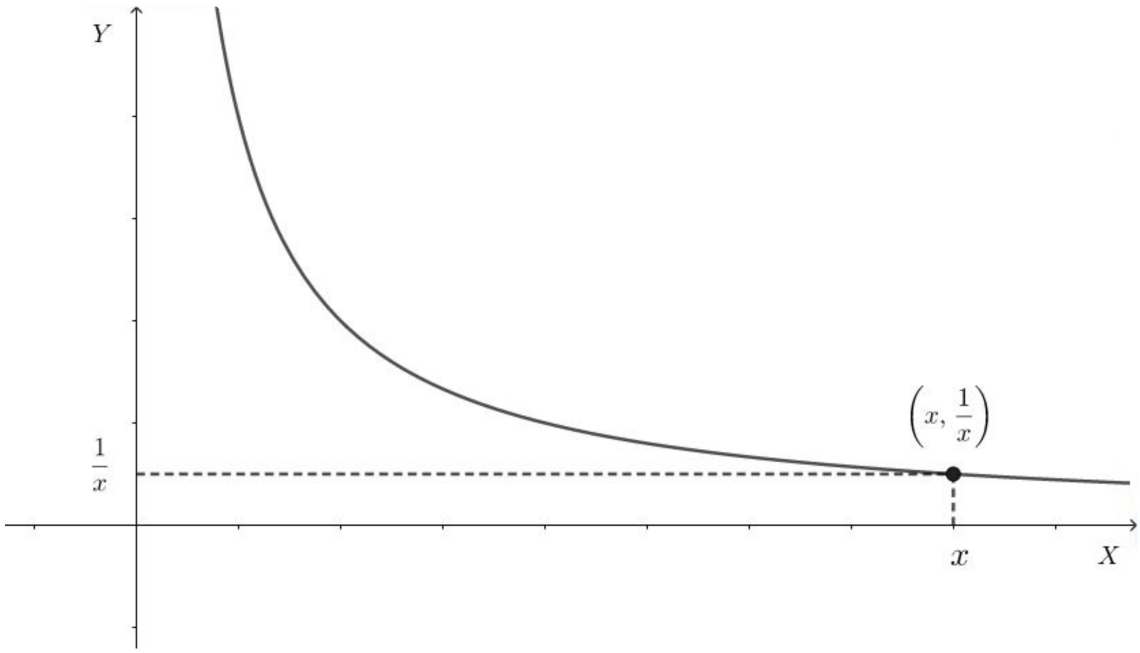


Figura 2.14: Ramo positivo da hipérbole $y = 1/x$ e o par ordenado $\left(x\,,\,\frac{1}{x}\right)$

Uma faixa de hipérbole é obtida quando selecionamos dois números reais positivos a, b com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$, $\quad x = b$, pelo eixo das abscissas, e pela hipérbole H. Indicaremos essa região pelo símbolo H_a^b, como indicado na figura 2.15.

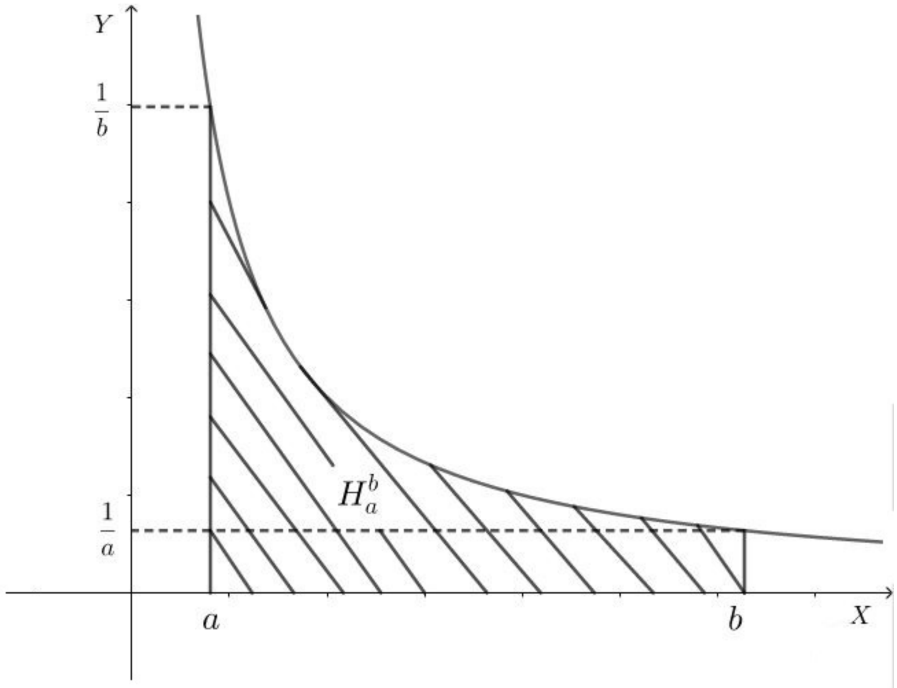


Figura 2.15: A região hachurada é a faixa de hipérbole H_a^b.

Portanto, a faixa H_a^b é formada pelos pontos $(x\,,\,y)$ cujas coordenadas cumprem simultaneamente as condições $a \leqslant x \leqslant b$ e $0 \leqslant y \leqslant 1/x$. Na notação de conjuntos temos: $H_a^b = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant x \leqslant b \ \text{ e } \ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$.

Teorema 2.1: *Seja qual for o número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.*

Demonstração. Dado um retângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c, d]$ do eixo das abscissas, o retângulo inscrito em H e com base no segmento $[ck, dk]$ tem a mesma área do anterior. Assim, a área do primeiro é igual a $(d-c)\cdot 1/d = 1-c/d$, enquanto a área do segundo é $(dk - ck) \cdot 1/dk = 1 - c/d$.

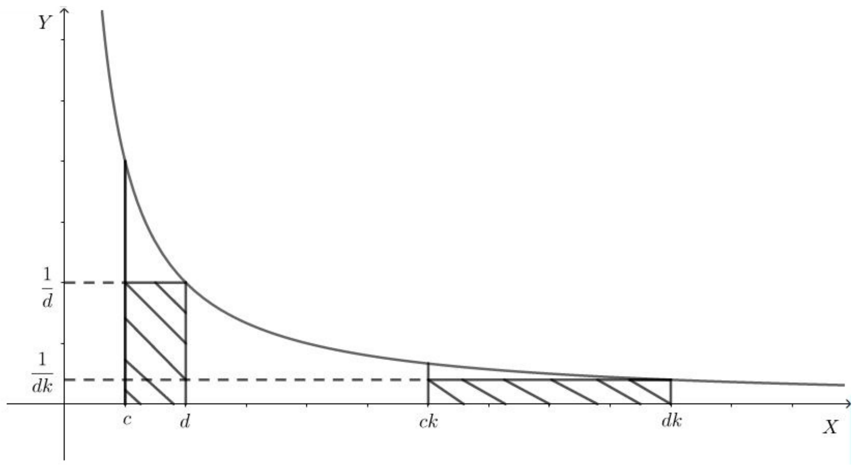


Figura 2.16: Os retângulos hachurados possuem a mesma área.

Consideremos agora um polígono retangular P, inscrito em H_a^b. Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a,b]$, determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto um polígono retangular P', inscrito na faixa H_{ak}^{bk}. Cada um dos retângulos que compõem P' têm a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo a área de P' é igual à de P.

Concluímos assim que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com mesma área. Isto significa que a área destas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e portanto são iguais. $\square$

Pelo teorema apresentado anteriormente, podemos verificar que, dados a, b e $c \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$ temos que Área$(H_a^b) =$ Área$(H_b^c) +$ Área(H_a^c). Além disso, convencionaremos que Área$(H_a^a) = 0$ e que Área$(H_a^b) = -$Área(H_b^a).

Uma faixa de hipérbole especial é a H_1^x, onde $x \in \mathbb{N}$.

Definição 2.11: O *logaritmo natural* de $x \in \mathbb{N}$ é a área da faixa H_1^x.

Assim, quando $x > 0$, escrevendo $\ln x$ para indicar o logaritmo natural de x, temos $\ln x =$ Área(H_1^x).

Lembramos que a convenção de tomar Área$(H_x^1) = -$Área(H_1^x) quando $0 < x < 1$ será sempre adotada. Particularmente, quando $x = 1$, temos que H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, tendo portanto, área igual a zero. Podemos então escrever $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ se $x > 1$ e $\ln x < 0$ se $0 < x < 1$.

A figura 2.17 mostra a área igual a $\ln x$.

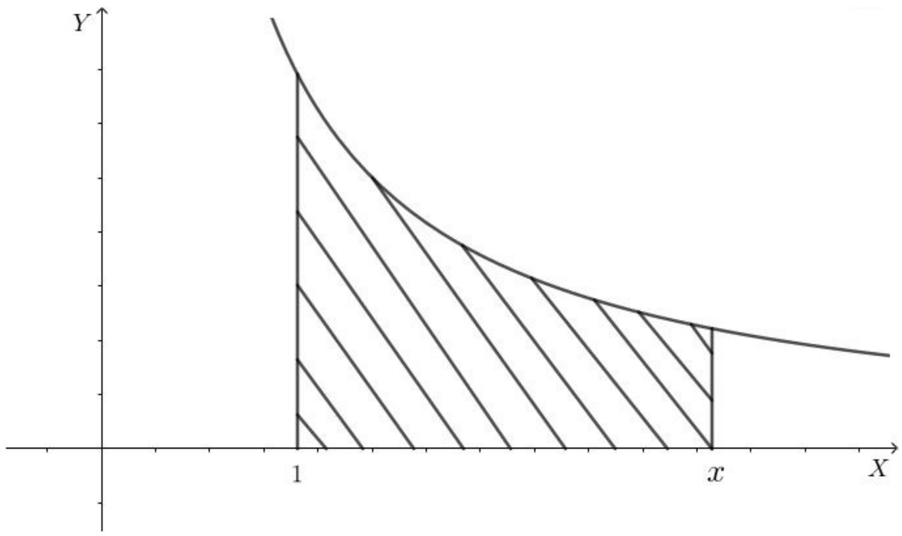


Figura 2.17: A área em destaque é igual a $\ln x$, $x > 1$

Fica assim definida uma função real $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos. A cada número real $x > 0$, a função *ln* faz corresponder seu logaritmo natural, denotado por $\ln x$.

Teorema 2.2: $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Devemos mostrar que *ln* satisfaz as propriedades especificadas nos itens 1 e 2 da Definição 2.10.
Podemos, pelo teorema 2.1 (com x desempenhando o papel de k), decompor Área(H_1^{xy}) = Área(H_1^x) + Área(H_x^{xy}), seja qual for a posição relativa dos pontos de abcissa 1, x, xy sobre o eixo horizontal. Temos também que Área(H_x^{xy}) = Área(H_x^x) + Área(H_1^y) = Área(H_1^y). Segue-se que Área(H_1^{xy}) = Área(H_1^x) + Área(H_1^y), isto é, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Em seguida, devemos provar que *ln* é uma função crescente. Dados x, $y \in \mathbb{R}^+$, dizer que $1 < x < y$ significa afirmar que existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que $\ln y = \ln ax = \ln a + \ln x$. Como temos que $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Portanto $\ln y > \ln x$. □

Agora ilustraremos o gráfico da função *ln*. Este gráfico é o subconjunto do plano formado pelos pares ordenados $(x\, , f(x))$, onde x varia no domínio de f. Assim o gráfico da função logaritmo natural é o conjunto

$$G = \{(x\, , \ln x) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\} \tag{2.2}$$

Segundo Lima [11] o conhecimento do gráfico da função logaritmo natural permitirá que tenhamos uma ideia global do comportamento desta função. Para traçá-lo lembremos que ln é uma função logarítmica crescente, ilimitada nos dois sentidos e sobrejetiva. Assim, ln é um gráfico contido no primeiro e no quarto quadrantes, cortando o eixo das abcissas no ponto $x = 1$ e quando x varia entre 0 e $+\infty$, a ordenada do ponto $(x\, , \ln x)$ sobre a curva cresce no sentido de $-\infty$ a $+\infty$. O gráfico da função $\ln x$ pode ser visto na figura 2.18.

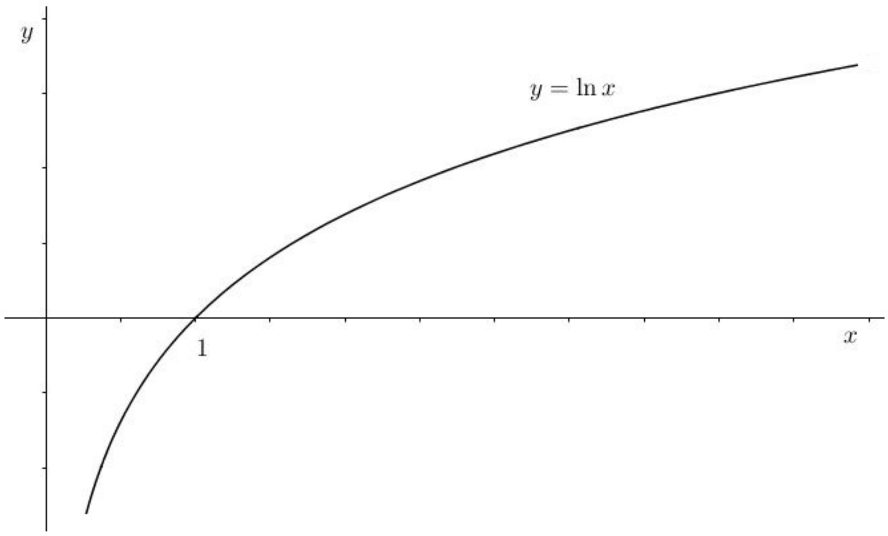


Figura 2.18: Gráfico da função $y = \ln x$

2.4.2 Função exponencial

Para iniciarmos o estudo da função exponencial, devemos conhecer o número real positivo para o qual o logaritmo natural é igual a 1. Este número é conhecido como número de Euler e representado pela letra e. Este número é a base do sistemas de logaritmos naturais. Assim, as afirmações $\ln x = 1$ e $x = e$ são equivalentes. Em símbolos $\ln x = 1 \iff x = e$.

Vemos imediatamente que $e > 1$, pois os números reais positivos menores que 1 têm logaritmos negativos. O número e é um número compreendido entre 2 e 3. É possível demonstrar que e é irracional [7]. Portanto seu desenvolvimento decimal não termina e nem é periódico. Um valor aproximado de e, com 12 algarismos decimais exatos é $e = 2{,}718281828459$.

Apresentaremos agora um teorema importante para que possamos definir a potência e^x.

Teorema 2.3: *Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional. Tem-se $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.*

Demonstração. Se $y = e^r$, então $\ln y = r \ln e = r$. Reciprocamente, seja $y > 0$ um número real tal que $\ln y = r$. Como $\ln(e^r) = r$ e ln é uma função biunívoca, concluímos que $y = e^r$. □

Assim, pelo menos para potências de expoente racional de e, o logaritmo natural de um número é o expoente ao qual se deve elevar a base e afim de obter esse número.

Definição 2.12: Dado o número real x, o número e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

Geometricamente, $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa de hipérbole H_1^y tenha área x. Vemos que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1$ quando $x > 0$ e que $e^x < 1$ quando $x < 0$. A equivalência a seguir é a definição de e^x: $y = e^x \iff x = \ln y$.

A figura 2.19 mostra geometricamente o número e^x.

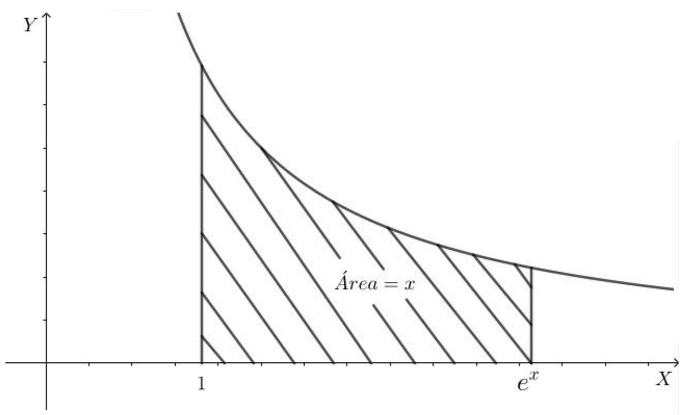


Figura 2.19: Gráfico mostrando a área da faixa $H_1^{e^x}$.

Em virtude do Teorema 2.3, quando $x = p/q$ é um número racional, o número y cujo logaritmo é x se precisamente $y = \sqrt[q]{e^p}$. Logo, para $x = p/q$ racional, a nova definição de e^x coincide com a usual: $e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$. Em particular, para $n > 0$ inteiro:

$$\begin{aligned} e^n &= e \cdot e \cdots e, \quad (n \text{ fatores}) \\ e^{-n} &= \frac{1}{e^n} \end{aligned}$$

Por outro lado, agora tem sentido tomarmos e^x, mesmo com x irracional. Por exemplo, $e^{\sqrt{2}}$ é simplesmente o número $y > 0$ tal que a área de H_1^y vale $\sqrt{2}$.

Enquanto $\ln x$ tem sentido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x. A correspondência $x \to e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a função exponencial.

A *função exponencial* $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural. Isto quer dizer que as igualdades apresentadas abaixo têm validade para todo x real e todo $y > 0$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{e} \quad e^{\ln y} = y.$$

Assim, se a função exponencial transforma o número real x no número real positivo e^x, a função logaritmo natural transforma e^x de volta em x. Reciprocamente, a função exponencial leva $\ln y$ em y.

A primeira das igualdades acima é simplesmente a definição de e^x: é o número cujo logaritmo é x. Quanto à segunda, $e^{\ln y}$ é o número cujo logaritmo é igual a $\ln y$, tal número só pode ser y.

O teorema a seguir apresenta a propriedade fundamental da função exponencial.

Teorema 2.4: *Para todos os números reais, x, y, tem-se $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.*

Demonstração. Como ln é uma função logarítmica temos, $\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$. Assim, $e^x \cdot e^y$ é o número real cujo logaritmo natural é igual a $x + y$. Por conseguinte, $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. □

Corolário 2.1: Para todo número real x, vale $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Com efeito, sendo evidente que $e^0 = 1$, podemos escrever, em virtude do Teorema 2.4, $e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$. Portanto, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Teorema 2.5: *A função exponencial $y = e^x$ é crescente e assume todos os valores positivos quando x varia entre $-\infty$ e $+\infty$.*

Demonstração. Dados $x = \ln(e^x)$ e $y = \ln(e^y)$, onde $x < y$, não podemos ter $e^x = e^y$, pois isto levaria a $x = y$. Nem podemos ter $e^y < e^x$ porque então seria $\ln(e^y) < \ln(e^x)$, ou seja, $y < x$. Assim, quando $x < y$, deve-se ter $e^x < e^y$, logo a função exponencial é crescente.

Para provar que os valores e^x incluem todos os números reais positivos, consideremos um número qualquer $a > 0$. Tem-se $e^{\ln a} = a$, logo a é o valor que a função exponencial e^x assume quando $x = \ln a$. $\square$

Ilustremos agora o gráfico da função exponencial. Ele é o subconjunto E do plano XY, formado pelos pontos cujas coordenadas cartesianas são $(x\,, e^x)$. Ou seja $E = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = e^x\}$. Vamos compará-lo com o gráfico G da função logaritmo natural apresentado na equação (2.2).

Podemos afirmar que o par $(x, y) \in E \Leftrightarrow y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \Leftrightarrow (y, x) \in G$. A figura 2.20 mostra o gráfico da função e^x.

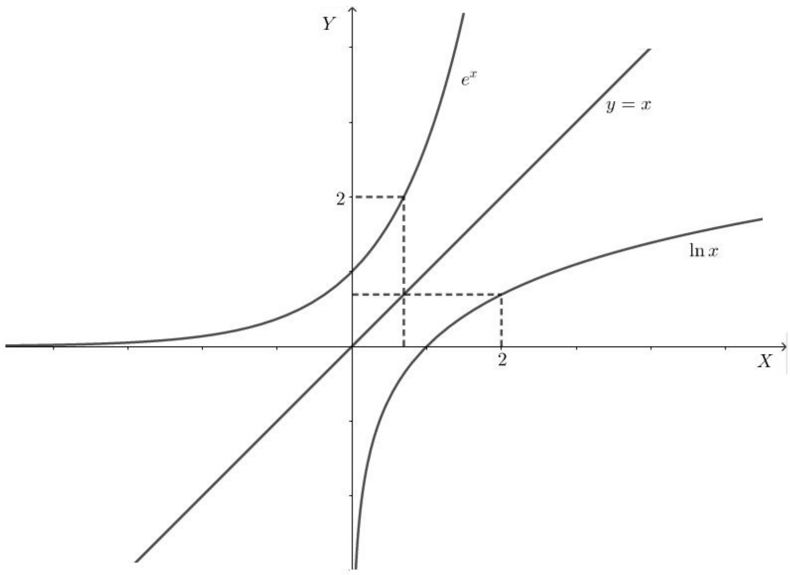


Figura 2.20: Gráfico das funções $y = \ln x$ e $y = e^x$, com dois pontos mostrando que as funções são inversas.

Em outras palavras, o ponto (x, y) está no gráfico de e^x se, e somente se, o ponto (y, x) pertence ao gráfico da função logaritmo natural. Vemos assim, que os pontos do gráfico E da função exponencial são os simétricos dos pontos do gráfico G da função logaritmo em relação a reta $y = x$. Para encontrar E, basta dobrar o plano em torno da reta $y = x$ e observar onde vão parar os pontos do gráfico de G.

3

Sequências e séries

Neste capítulo, faremos o estudo sobre alguns pontos relevantes que nos auxiliarão na definição de Série de Taylor e no cálculo dos polinômios de Taylor das funções que iremos aproximar no Capítulo 4.

3.1 Limites e sequências

3.1.1 Definição de limite

Definição 3.1: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que *o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *é* L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número δ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras como o limite de $f(x)$ é L quando x tende a a.
Isso significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a zero).

De outro modo,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Conforme podemos ver no livro de Cálculo de Stewart [18], podemos reformular a definição de limite (definição 3.1) em termos de intervalos. Observemos que a desigualdade $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < +\delta$, que pode ser escrita como $a - \delta < x < a + \delta$. Além disso a relação $0 < |x - a|$ é válida se, e somente se, $x - a \neq 0$, isto é, se $x \neq a$. Analogamente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente ao par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Portanto, em termos de intervalos, a definição 3.1 pode ser enunciada da seguinte maneira:
o limite de $f(x)$ é igual a L quando x tende a a, isso significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

3.1.2 Limites infinitos

Consideremos f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.

Definição 3.2: Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se para todo número positivo M, existe um número positivo δ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > M$.

Isso significa que o valor de $f(x)$ pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número M) tornando-se x suficientemente próximo de a (dentro de uma distância δ, em que δ depende de M, mas com $x \neq a$).

Definição 3.3: Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se para todo número negativo N, existe um número positivo δ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) < N$.

3.1.3 Limites no infinito

Vamos estudar o limite de funções tornando x arbitrariamente grande (positivo ou negativo).

Definição 3.4: Seja f uma função definida em algum intervalo $(a\,,\infty)$. Dizemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número N correspondente tal que, se $x > N$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Isso significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L (dentro de um distância ε, sendo ε qualquer número positivo), bastando apenas tornar x suficientemente grande (maior que N, onde N depende de ε).

Definição 3.5: Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Dizemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número N correspondente tal que se $x < N$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Isso quer dizer que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L (dentro de um distância ε, sendo ε qualquer número positivo), bastando apenas tornar x suficientemente grande em valor absoluto (porém negativo).

Definição 3.6: Seja f uma função definida em algum intervalo $(a\,,\infty)$. Então $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, se para todo positivo M, existe um número positivo correspondente N tal que se se $x > N$, então $f(x) > M$.

Analogamente, podemos escrever essa definição quando o símbolo ∞ é substituído pelo símbolo $-\infty$.

3.1.4 Sequências

Definição 3.7: Uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa um valor a cada número inteiro positivo, ou seja $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.8: Uma sequência a_n tem limite L e escrevemos $\lim_{x\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \longrightarrow L$ quando $n \longrightarrow \infty$, se para cada $\varepsilon > 0$, existir um inteiro correspondente N tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \varepsilon$.

Isso quer dizer que ao fazer n ser suficientemente grande, podemos tornar a_n tão próximo de L quanto quisermos. Se o limite existir, dizemos que a sequência é convergente. Caso contrário, dizemos que a sequência é divergente.

Definição 3.9: Uma sequência a_n é chamada *crescente* se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, e chamada *decrescente* se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é *monótona* se for crescente ou decrescente.

Definição 3.10: Uma sequência a_n é *limitada superiormente* se existe um número M tal que $a_n \leqslant M$, para todo $n \geqslant 1$. Ela é *limitada inferiormente* se existir um número m tal que $m \leqslant a_n$, para todo $n \geqslant 1$. Se ela for limitada superior e inferiormente, então a_n é uma *sequência limitada*.

O seguinte axioma será útil na demostração do Teorema da sequência monótona:

Axioma 3.1: (Axioma da Completude) Se S é um conjunto não vazio de números reais, que tem um limitante superior M ($x \leqslant M$ para todo x em S), então S tem um limitante superior mínimo b.

Isto que dizer que b é um limite superior para S, mas se M é qualquer outro limitante superior, então $b \leqslant M$. O Axioma da Completude é uma expressão do fato de que não há furos ou saltos na reta real.

Teorema 3.1 (Teorema da sequência monótona): *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que a_n seja uma sequência crescente. Como a_n é limitada, o conjunto $S = \{a_n | n \geqslant 1\}$ tem um limitante superior. Pelo axioma da Completude, existe um menor limitante superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ não é um limitante superior para S (pois L é o limite superior mínimo). Portanto, $a_N > L - \varepsilon$ para algum inteiro N. Mas a sequência é crescente, logo $a_n \geqslant a_N$, para cada $n > N$. Assim, se $n > N$, temos $a_n > L - \varepsilon \Longrightarrow 0 \leqslant L - a_n < \varepsilon \Longrightarrow a_n \leqslant L$. Assim, $|L - a_n| < \varepsilon$ sempre que $n > N$, então $\lim\limits_{n\to\infty} = L$. A demonstração usando o maior limitante inferior funciona no caso de a_n ser decrescente. □

3.2 Séries numéricas infinitas

Iremos apresentar os principais resultados para estudar as séries de Taylor e fazer a construção dos polinômios de Taylor de algumas funções não-algébricas.

Consideremos o número de Euler $e = 2{,}71828182845904523536028 7\ldots$. A convenção por trás da notação decimal é de que qualquer número real pode ser escrito como uma soma infinita. Assim, temos que $e = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} +$

$\dfrac{1}{10^6}+\dfrac{8}{10^7}+\dfrac{2}{10^8}+\dfrac{8}{10^9}+\cdots$, em que o sinal de reticências $(\ldots)$ indica que a soma continua infinitamente, e quantos mais termos acrescentarmos, mais próximo será o valor da soma do valor de e.

Em geral, ao somarmos os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtemos uma expressão do seguinte formato:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.1}$$

que é chamada de série infinita (ou apenas série) e é denotada pelo símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ou* $\sum a_n$.

Em alguns casos é impossível encontrar uma soma finita para uma série. Por exemplo, se começarmos a somar os termos da série $1+2+3+4+5+\cdots+n+\cdots$, obteremos as somas cumulativas $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ e depois do n-ésimo termo, teremos $\dfrac{n(n+1)}{2}$, que se torna extremamente grande à medida que n aumenta. Porém, se começarmos a somar os termos da série $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots$, obteremos $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{15}{16}, \dfrac{31}{32}, \dfrac{63}{64}, \cdots, 1-\dfrac{1}{2^n}, \cdots$. Assim, ilustramos que quanto mais adicionarmos termos a essa série, essas somas parciais se tornam cada vez mais próximas de 1. Então podemos dizer que a soma dessa série infinita é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = 1.$$

Usando a mesma ideia vamos determinar se uma série geral, eq. (3.1) tem uma soma ou não. Consideremos as somas parciais $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1+a_2+a_3, s_4 = a_1+a_2+a_3+a_4$, e, em, geral $s_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, que pode ou não ter um limite. Se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo utilizado anteriormente, o chamamos de *soma da série infinita* $\sum a_n$.

Definição 3.11: Dada uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial $s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Se a sequência de somas parciais $\{s_n\}$ for convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada *convergente*, e escrevemos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. O número s é chamado a *soma* da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada *divergente*.

Então, como em Stewart [19], a soma de uma série é o limite da sequência de suas somas parciais. Desse modo, quando escrevemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Ou seja: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$, em que a_i representa o termo geral.

Exemplo 2: Suponhamos que a soma dos primeiros n termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$. Em seguida, a soma da série é o limite da sequência $\{s_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Um resultado importante das séries convergentes é que o limite de seus termos tende a zero, quando n tende ao infinito.

Teorema 3.2: *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, então, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente, ou seja $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Teste de Divergência: Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
O teste para divergência vem do Teorema 3.2, porque, se a série não for divergente, ela é convergente e, assim, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo 3: Mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge. Temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+\dfrac{4}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0$, que diverge, pelo Teste da Divergência.

3.2.1 Algumas série infinitas e testes de convergência

Definição 3.12 (Série Geométrica): *Série geométrica* é uma série infinita em que cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicando-o por uma razão comum r

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \text{onde } a \neq 0.$$

Se $r = 1$ temos $s_n = a + a + a + \cdots + a = na \longrightarrow \infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, a série diverge nesse caso. Se $r \neq 1$, temos $s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$ e $rs_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$.

Subtraindo essas equações, obtemos $s_n - rs_n = a - ar^n$ e daí $s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$. Se $-1 < r < 1$, então $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}.$$

Logo, quando $|r| < 1$, a série geométrica é convergente e sua soma é $a/(1-r)$. Se $r \leqslant -1$ ou $r > 1$, a sequência r^n é divergente, fazendo com que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ não exista. Logo, nesses casos, a série geométrica é divergente.

Definição 3.13 (Série Harmônica): Uma *série harmônica* é definida como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Vamos mostrar que essa série é divergente. Para isso, calculamos as somas parciais s_2, s_4, s_8, s_{16}, $\ldots$ e mostramos que elas se tornam grandes.

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2},\\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2},\\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2},\\
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, e, em geral, $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Isso mostra que $s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim s_n é divergente. Logo, a série harmônica diverge.

Definição 3.14 (Série p): Uma *série p* é uma generalização da série harmônica definida como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Essa série é convergente quando $p > 1$ e é divergente quando $p \leqslant 1$.

Para verificarmos a veracidade da convergência de uma série p usamos o seguinte teste [19]:

Teste da Integral: Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente.

Em outras palavras, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ é convergente (ou divergente), se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente (ou divergente).

Agora podemos verificar a convergência da série p. Tomando a série apresentada na definição 3.14, temos que, se $p < 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$. Se $p = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1$. Nesses dois casos vemos que o limite é diferente de zero, e, assim, a série diverge pelo teste da divergência. Se $p > 0$, então a função $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Logo,pelo teste da integral temos $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \geqslant 1$, e daí, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leqslant 1$.

Além do Teste da Integral citado anteriormente, existem outros testes para verificar a convergência ou divergência de uma série. Vamos iniciar pelo Teste da Comparação.

Teste da Comparação: Suponhamos que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos não negativos.

1. Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

2. Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

Demonstração. Demonstrando a parte 1.
Se as séries $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $t_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$, e $t = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ têm termos positivos, as sequências s_n e t_n são crescentes, pois $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$. Além disso, $t_n \to t$, portanto $t_n \leqslant t$ para todo n. Como $a_i \leqslant b_i$, temos $s_n \leqslant t_n$. Assim, $s_n \leqslant t$ para todo n. Isso significa que s_n é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo teorema da sequência monótona. Como consequência, $\sum a_n$ converge.

Demonstrando a parte 2.
Se $\sum b_n$ for divergente, então $t_n \to \infty$, porque t_n é crescente. Mas $a_i \geqslant b_i$, assim, $s_n \geqslant t_n$. Então, $s_n \to \infty$. Portanto, $\sum a_n$ diverge. □

Teste da Comparação no Limite: Suponhamos que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, em que $c \in \mathbb{R}_+^*$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Demonstração. Sejam m e M números positivos tais que $m < c < M$. Uma vez que a_n/b_n está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que $m < \dfrac{a_n}{b_n} < M$, em que $n > N$ e, assim, $mb_n < a_n < Mb_n$, quando $n > N$. Se

$\sum b_n$ convergir, então $\sum Mb_n$ também converge. Então, $\sum a_n$ converge pela parte 1 do teste da comparação. Se $\sum b_n$ divergir, então $\sum mb_n$ também diverge, e a parte 2 do teste da comparação mostra que $\sum a_n$ diverge. $\square$

Um dos tipos mais importantes de séries que se relacionam com a Série de Taylor são as séries alternadas que, como veremos no Capítulo 4, aparecem como as séries da função seno e da função cosseno.

3.3 Séries alternadas

Segundo Stewart [19] uma *série alternada* é formada por termos alternadamente positivos e negativos. Aqui mostramos dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{e}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}.$$

Nesses exemplos vemos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma $a_n = (-1)^{n-1} b_n$ e $a_n = (-1)^n b_n$, respectivamente, em que b_n são números positivos.
Teste da Série Alternada: Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots,$$

em que $b_n > 0$ satisfaz

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n e

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$,

então a série é convergente.

Demonstração. Primeiro consideramos as somas parciais pares

$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0$ uma vez que $b_2 \leqslant b_1$

$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2$ uma vez que $b_4 \leqslant b_3$

Em geral $s_{2n} = S_{2n-2} + (b_{2n-1-b_{2n}}) \geqslant s_{2n-2}$ uma vez que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Logo $0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$.

Mas podemos escrever também

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}.$$

Cada termo dentro dos parênteses é positivo, portanto $s_{2n} \leqslant b_1$ para todo n. Dessa forma, a sequência $\{s_{2n}\}$ de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente. É, portanto, convergente pelo teste da sequência monótona (Teorema 3.1). Vamos chamar esse limite de s, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Agora, calculamos os limites das somas parciais ímpares

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \\ &= s\end{aligned}$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ e, assim, a série é convergente. □

Exemplo 4: A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ uma vez que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

logo, a série é convergente pelo teste da série alternada.

Exemplo 5: A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ é alternada mas

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

assim, a condição (ii) não é satisfeita. Em vez disto, olhamos para o limite do n-ésimo termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

este limite não existe, logo a série diverge pelo teste da divergência.

Vamos demonstrar que o erro cometido ao aproximarmos a soma de uma série alternada é menor ou igual a a_{n+1}. Esse é um importante resultado para o momento em que faremos a aproximação de funções pelos polinômios de Taylor.

Teorema 3.3 (Estimativa de Séries Alternadas): *Seja uma série alternada*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ *que verifica as condições (i) e (ii) do teste da série alternada. Se* s *é a soma da série e* $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ *é uma soma parcial então,*$|s - s_n| \leq a_{n+1}$ *isto é, o erro cometido ao aproximarmos* s *por* s_n *é, no máximo, igual a* a_{n+1}*.*

Demonstração. Eliminando os n primeiros termos de $\sum(-1)^{n-1}a_n$, obtemos as série $(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + (-1)^{n+2}a_{n+3} + \cdots$, que também satisfaz o teste da série alternada, logo possui uma soma R_n. Assim, $s - s_n = R_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots)$ e portanto $|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots$. Utilizando o mesmo argumento empregado na prova do teste das séries alternadas, vemos que $|R_n| \leqslant a_{n+1}$. Consequentemente $E = |s - s_n| = |R_n| \leq a_{n+1}$. □

Vamos mostrar um exemplo de como estimar a soma de uma série alternada. Para isso aplicaremos o Teorema 3.3. Tomando como referência Swokowski [20] temos que se E é o erro de uma aproximação, então esta terá uma precisão de k casas decimais se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-k}$. Temos por exemplo

- precisão de uma casa decimal se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-1} = 0{,}05$
- precisão de duas casas decimais se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}005$
- precisão de três casas decimais se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0005$

Exemplo 6: Prove que a série $1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}dfrac1(2n-1)! + \cdots$ é convergente e obtenha uma aproximação de cinco casas decimais da sua soma s.

O n-ésimo termo $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$ tem limite igual a zero quando $n \to \infty$, e $a_k > a_{k+1}$ para todo inteiro positivo k. Logo, a série converge, de acordo com o teste das séries alternadas. Aproximando s por s_n, pelo Teorema 3.3, o erro cometido é no máximo igual a $a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$. Calculando alguns valores de a_{n+1}, vemos que, para $n = 4$, $a_5 = \frac{1}{9!} \approx 0{,}0000028 < 0{,}000005$. Logo, a soma parcial s_4 é uma aproximação de s com cinco casas decimais. Como

$$\begin{aligned} s_4 &= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \\ &= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0{,}841468 \end{aligned}$$

temos $s \approx 0{,}84147$.

3.3.1 Convergência absoluta

Dada qualquer série $\sum a_n$, podemos considerar a série correspondente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$, cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

Definição 3.15: Uma série $\sum a_n$ é dita *absolutamente convergente* se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Exemplo 7: A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série p (definição 3.14) convergente, pois $p = 2 > 1$.

Exemplo 8: Pelo exemplo 5, a série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ é convergente, mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondentes,chamada série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é uma série p com $p = 1$ e é, portanto, divergente.

Definição 3.16: Uma série $\sum a_n$ é chamada *condicionalmente convergente* se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

Teorema 3.4: *Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.*

Demonstração. Observe que a desigualdade $0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$ só é verdadeira porque $|a_n|$ é a_n ou $-a_n$. Se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então $\sum |a_n|$ é convergente, assim $\sum 2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo teste da comparação, $\sum(a_n + |a_n|)$ é convergente. Então,$\sum a_n = \sum(a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ é a diferença de duas séries convergentes e é, portanto, convergente. $\square$

A recíproca deste teorema não é verdadeira. De fato, o exemplo 8 mostra que a série harmônica é condicionalmente convergente. Assim, vemos que é possível uma série ser convergente, mas não absolutamente convergente.

3.3.2 Teste da razão

O teste apresentado nesta seção é de grande utilidade para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

Teste da Razão: Seja $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

1. Se $L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).
2. Se $L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
3. Se $L = 1$, o teste da razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração. Demonstrando a parte 1
A ideia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$. Uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ e $L < r < 1$, a razão $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eventualmente será menor que r; isto é, existe um inteiro N tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r$ sempre que $n \geqslant N$, ou de maneira equivalente, $|a_{n+1}| < |a_n|r$ sempre que $n \geqslant N$.

Colocando n sucessivamente igual a $N, N+1, N+2, \ldots$, obtemos $|a_{N+1}| < |a_n|r$, $|a_{N+2}| < |a_{N+1}|r < |a_N|r^2$ e $|a_{N+3}| < |a_{N+2}|r < |a_n|r^3$ e, em geral $|a_{N+k}| < |a_N|r^k$ para todo $k \geqslant 1$.

Agora, a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|r^k = |a_N|r + |a_N|r^2 + |a_N|r^3 + \cdots$ é convergente porque é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim, a $|a_{N+k}| < |a_N|r^k$, junto com o teste da comparação, mostra que a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$ também é convergente. Segue que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstrando a parte 2
Se $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L > 1$ ou $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \infty$, então a razão $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eventualmente será maior que 1, isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{sempre que} \quad n \geqslant N.$$

Isso significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geqslant N$, e assim $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge pelo teste da divergência. □

Exemplo 9: Teste a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

Como os termos $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{n^n}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo, vemos que, quando n tende ao infinito, a série converge para o número e.

3.3.3 Teste da raiz

O teste apresentado neste momento nos permite estudar a convergência de uma série de potências e estabelecer o raio de convergência de uma série de Taylor [19].
Teste da Raiz: Seja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

1. Se $L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).
2. Se $L > 1$ ou $l = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
3. Se $L = 1$, o teste da raiz é inconclusivo.

3.4 Séries de funções

Antes de definirmos uma Série de funções, vamos apresentar alguns resultados que serão necessários.

Definição 3.17 (Sequências de Funções): Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. A aplicação que a cada natural n fizer corresponder uma função $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ será uma *Sequência de Funções.*

Cada função $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ será dita *termo da sequência.* Indicaremos essas sequências pela notação $\{f_n\}$, sempre com $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.18 (Convergência pontual de sequências de funções): Dada uma sequência de funções $\{f_n(x_0)\}$ definidas em $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, diremos que a sequência $\{f_n\}$ *converge em* x_0 se a sequência numérica $\{f(x_0)\}$ for convergente, isto é, existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

Se para cada $x \in A$, a sequência numérica $\{f_n(x_0)\}$ for convergente para $f(x)\,(f_n : A \longrightarrow \mathbb{R})$ então a sequência de funções $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em A, isto é, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in A$.

Definição 3.19 (Convergência uniforme de sequências de funções): Uma sequência de funções $\{f_n\}$ definidas em $A \subseteq \mathbb{R}$ *converge uniformemente* em A para uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant N_0$ temos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in A$.

A convergência uniforme de sequências de funções apresenta algumas propriedades que têm importantes aplicações para séries de funções. A seguir apresentaremos essas propriedades.

Proposição 3.1: *Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções contínuas em $A \subseteq \mathbb{R}$ que converge uniformemente para f em A. Então f é contínua em A. Isto é, para cada $x_0 \in A$ temos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Demonstração. É necessário mostrar que f é contínua em A para cada $x_0 \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, do fato de que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em A, segue que existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geqslant N_0$ temos $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3$, para todo $y \in A$. Como f_n é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que, se $|h| < \delta$ então $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Assim, se $|h| < \delta$ temos

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| = \\
&|f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\
&\leqslant |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, isto é, f é contínua em A. □

Teorema 3.5: Suponhamos que $\{f_n\}$ seja uma sequência de funções contínuas em $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em $[a,b]$. Então, f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

ou seja,

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Demonstração. Como a convergência é uniforme e as f_n são contínuas, segue, da proposição 3.1, que f é contínua, logo é integrável em $[a,b]$. Como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente no intervalo $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geqslant N_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ para todo $x \in [a,b]$. Logo, se $n \geqslant N_0$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. □

Teorema 3.6: *Suponhamos que $\{f_n\}$ seja uma sequência de funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ e para algum $x_0 \in [a,b]$ a sequência numérica $\{f_n(x_0)\}$ converge. Se a sequência (f_n') converge uniformemente para alguma função g em $[a,b]$, então a sequência (f_n) converge uniformemente para a função f em $[a,b]$, f é continuamente diferenciável em $[a,b]$ e $f'(x) = g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, isto é $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

Demonstração. Como $f_n' \longrightarrow g$ uniformemente em $[a,b]$ e as funções f_n são contínuas em $[a,b]$, então, pela proposição 3.1, temos que g é contínua em $[a,b]$. Como $\{f_n(x_0)\}$ converge para um valor $c \in \mathbb{R}$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant N_1$ então $|f_n(x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$. Defina $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Segue do Teorema Fundamental do Cálculo, Stewart [18] que f é continuamente diferenciável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, pois g é contínua em $[a,b]$. Mostraremos que f_n converge para f uniformemente em $[a,b]$. Do fato que f_n' converge para g uniformemente em $[a,b]$, temos que dado $\varepsilon > 0$ exite $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon/2(b-a)$, para todo $n \geqslant N_2$. Se $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da convergência uniforme da sequências de funções $\{f_n'\}$, que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt - c - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando que f_n converge para f uniformemente em $[a,b]$. □

Dadas as definições de sequência de funções, convergência das sequências de funções e suas principais propriedades, podemos definir o que é uma série de funções e estudar sua convergência pontual e uniforme.

Definição 3.20 (Série de funções): Dada uma sequência de funções $\{f_n\}$ definidas no conjunto dos números reais, podemos construir uma outra sequência $\{S_n\}$, tal que $S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad x \in A \subset \mathbb{R}$. Esta sequência é denominada *Série de Funções*, e é denotada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ (ou $\sum f_n$).

Para estudar as séries de funções, devemos fazer algumas observações importantes:

Observação 1: A série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ pode ser tomada como uma soma infinita de funções, isto é, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots, x \in A \subset \mathbb{R}$.

Observação 2: Cada termo da série será chamado de *soma parcial de ordem* n da série.
As funções f_n serão ditas *termos da série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Vejamos um exemplo de como obter uma série de funções a partir de uma sequência de funções:

Exemplo 10: Seja a sequência de funções $f_n(x) = x/n^2$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então a sequência de funções $S_n(x)$ será dada por:

$$S_1(x) = f_1(x) = x,$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + \frac{x}{4},$$
$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x + \frac{x}{4} + \frac{x}{9},$$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots f_n(x) = x + \frac{x}{4} + \frac{x}{9} + \ldots + \frac{x}{n^2},$$

ou seja, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Observação 3: Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, a série S_n é uma série numérica, podendo assim, ter a sua convergência verificada pelos testes apresentados nas seções 3.2 e 3.3. Esses estudos de convergência de séries de funções serão realizados a próxima seção.

3.4.1 Convergência pontual para séries de funções

Definição 3.21: Dada a sequência de funções $\{f_n\}$ definidas em $A \subset \mathbb{R}$, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge pontualmente para* f *em* A se a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para f, isto é, para cada $x \in A$ a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para $f(x)$.

Vejamos alguns exemplos de estudo da convergência de algumas séries de funções.

Exemplo 11: Seja a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1)$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é convergente pontualmente em $[0, 1)$, pois para cada $x_0 \in [0, 1)$ fixado, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} x_0^n$ é uma série geométrica (definição 3.12) de razão $x_0 \in [0, 1)$, portanto convergente.

Exemplo 12: Seja a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ não é convergente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois para cada $x_0 \neq 0$ fixado, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{n} = x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, pois é uma série harmônica (definição 3.13).

Exemplo 13: Seja a sequência $\{f_n\}$ dada por $f_n(x) = x^n/n!$, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente pontualmente em toda a reta $\mathbb{R}$. De fato, se $x_0 \geqslant 0$ e definindo-se $a_n = x_0^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x_0^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 < 1.$$

Assim, pelo teste da razão, segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ é convergente se $x_0 \geqslant 0$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ em geral, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ é absolutamente convergente (definição 3.15) pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_0^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_0|^n}{n!}$ pois $|x_0| \geqslant 0$. Porém, pelo Teorema 3.4, se uma série é absolutamente convergente ela será convergente. Assim, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pontualmente em toda a reta $\mathbb{R}$.

3.4.2 Convergência uniforme para séries de funções

Definição 3.22: Uma série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente* para f em A se a sequência de funções $\{S_n\}$ converge uniformemente para f em A.

Observação 4: Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções uniformemente convergente para f no intervalo $[a, b]$.

1. Se cada uma das funções for contínua em $[a,b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é contínua em $[a, b]$, isto é $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$.

2. Se f e as funções f_n forem contínuas em $[a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt \qquad \text{ou seja} \qquad \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt,$$

resumindo, temos que a série pode ser integrada termo a termo.

3. Suponhamos que as funções f_n sejam continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se para algum $x_0 \in [a,b]$ a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge e a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente para uma função g em $[a,b]$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função f em $[a,b]$, onde f é continuamente diferenciável em $[a,b]$ e $f' = g$, isto é,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x),$$

em resumo, a série pode ser derivada termo a termo.

Demonstração. Vamos fazer a demonstração em partes.

Demonstrando a parte 1:
Como as funções f_n são contínuas, as somas parciais $S_n = f_1 + \cdots + f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ também serão, pois são somas finitas de funções contínuas. Além disso, a sequência de funções $\{S_n\}$ converge uniformemente para f. Logo, pelo Teorema **??** f é contínua em $[a,b]$.

Demonstrando a parte 2:
Dizer que uma série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em $[a,b]$ é dizer que a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $[a,b]$. Do Teorema 3.5, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(t)dt \\
&= \int_a^b \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(t)dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Demonstrando a parte 3:
Dizer que uma série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em $[a,b]$ é dizer que a sequência de funções $\{S_n\}$ converge uniformemente para f em $[a,b]$. Além disso, como a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente para g em

$[a,b]$, temos que a sequência de funções $\{S'_n\}$ converge uniformemente para g em $[a,b]$ pois $S'_n(x) = \dfrac{d}{dx}\sum_{n=1}^{n} f_k(x) = \sum_{n=1}^{n} f'_k(x)$. Logo, pelo Teorema 3.6, segue que a série de funções $\{S_n\}$ converge uniformemente para f em $[a,b]$, ou seja

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

$\square$

A seguir apresentamos um exemplo de uma série de funções que converge pontualmente mas não uniformemente, a série de Fourier para a função onda quadrada.

Exemplo 14: Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1/2, & x = 0, \pm 1 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

no intervalo $[-1{,}1]$ e pela relação de periodicidade $f(x+2) = f(x)$ no restante da reta real. Essa função é comumente chamada de função de onda quadrada.

Como ela é uma função contínua por partes e periódica é possível construir sua série de Fourier [1]

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\Big((2n-1)\pi x\Big)}{2n-1}.$$

Essa série converge pontualmente para a função $f(x)$ en todos os pontos. Porém não satisfaz a condição de convergência uniforme devido ao fenômeno de Gibbs, ilustrado na figura 3.1.

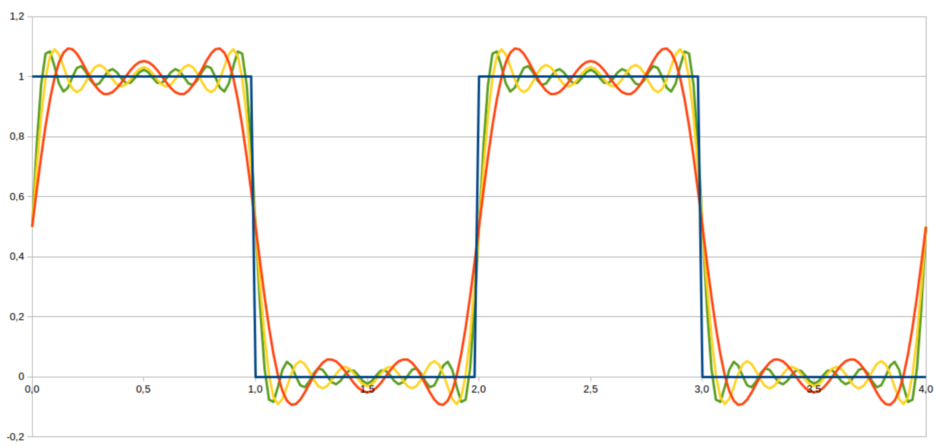


Figura 3.1: Onda quadrada

4

Séries de potências e séries de Taylor

Neste capítulo iremos realizar um estudo sobre as séries de potências. Apresentaremos as Séries de Taylor e veremos alguns teoremas e definições necessárias para que possamos estudar suas propriedades.

4.1 Séries de potência

As séries de potência são séries de funções que tem grande importância para a matemática e tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots , \tag{4.1}$$

onde x é uma variável e a_n são constantes chamadas *coeficientes* da série. Para cada x fixado, a série (4.1) é uma série numérica que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série, quando existe, é uma função

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Por exemplo, se colocarmos $a_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geqslant 1$.

Em geral, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{4.2}$$

é chamada *séries de potências em* $(x - x_0)$ ou uma *série de potências centrada em* x_0 ou uma *série de potências em torno de* x_0. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$ nas equações (4.1) e (4.2), adotamos a convenção de que $(x - x_0)^0 = 1$, mesmo quando $x = x_0$. Observe também que, quando $x = x_0$, todos os termos são zero para $n \geq 1$ e assim a série de potências (4.2) sempre converge quando $x = x_0$.

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, existem apenas três possibilidades quanto a sua convergência [19]

1. A série converge apenas quando $x = x_0$

2. A série converge para todo x

3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$.

O número R apresentado no caso 3 do Teorema **??** é chamado de *raio de convergência* da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso 1 e $R = \infty$ no caso 2. O *intervalo de convergência* de uma série de potências é aquele determinado por todos os valores de x para os quais a série converge. No primeiro caso o intervalo é apenas o ponto x_0. No segundo caso o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No terceiro caso observamos que a desigualdade $|x - x_0| < R$ pode ser reescrita da forma $x_0 - R < x < x_0 + R$

Quando x é uma extremidade, ou seja, quando $x = x_0 \pm R$, pode acontecer qualquer coisa:

- A série pode convergir em uma extremidade;

- a série pode convergir em ambas as extremidades;

- a série pode divergir em ambas as extremidades.

Logo, para o terceiro caso existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência: $(x_0 - R\,,\ x_0 + R)$ ou $(x_0 - R\,,\ x_0 + R]$ ou $[x_0 - R\,,\ x_0 + R)$ ou $[x_0 - R\,,\ x_0 + R]$.

4.2 Representando funções como séries de potência

Nesta seção mostraremos como podemos representar alguns tipos de funções como somas de séries de potências. Vamos manipular essas funções através de séries geométricas ou através da derivação e integração destas séries. Esse tipo de representação de funções é de grande utilidade para resolver equações diferenciais e aproximar funções por polinômios.

Por exemplo, a série $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ pode ser representada como uma expressão da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ na forma de uma série de potências.

A figura 4.1 mostra a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Cada soma parcial foi representada por f_n onde n é o grau do polinômio.

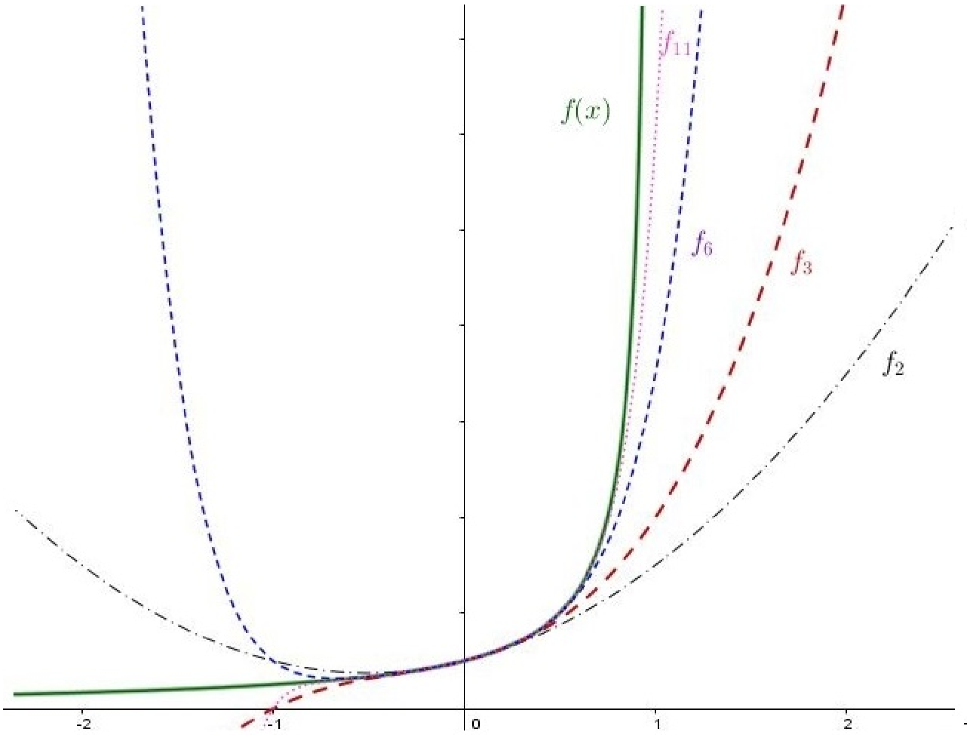


Figura 4.1: $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

4.2.1 Derivação e integração das séries de potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Toda série de potências converge uniformemente em qualquer intervalo fechado dentro do intervalo de convergência, conforme mostrado na observação (4). A convergência uniforme, estudada na seção (3.4.2) do Capítulo 3, nos garante que podemos integrar e derivar tais séries termo a termo. O teorema apresentado a seguir mostra como podemos realizar esse processo.

Teorema 4.1: *Se a série de potências* $\sum c_n(x-x_0)^n$ *tiver um raio de convergência* $R > 0$, *então a função* f *definida por*$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo* $(x_0 - R, x_0 + R)$. *Além disso, a derivada e a integral de* $f(x)$ *são dadas por*

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1} \text{ e} \qquad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= C + c_0(x-x_0) + c_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + c_2\frac{(x-x_0)^3}{3} + \ldots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas equações (4.3) e (4.4) são ambos R.

As equações (4.3) e (4.4) do Teorema (4.1)) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-x_0)^n] \text{ e} \tag{4.5}$$

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-x_0)^n dx. \tag{4.6}$$

Sabemos que, para somas finitas, a derivada de uma soma é a soma das derivadas, e que a integral de uma soma é a soma das integrais. As equações (4.5) e (4.6) mostram que o mesmo é verdadeiro para somas infintas, desde que estejamos trabalhando com séries de potências.

4.3 Séries de Taylor

Nesta seção investigaremos alguns problemas mais gerais tais como

- Descobrir quais as funções têm representações através de Séries de Potência;
- Investigar quais as formas ou métodos para descobrir tais funções.

Iniciemos nosso estudo supondo que f seja uma função qualquer que possamos representar como um série de potências

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots, \text{ onde } |x-x_0| < R. \tag{4.7}$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer em termos de f. Para iniciar, observemos que, colocando $x = x_0$ na equação (4.7) todos os termos, após o primeiro serão 0 e teremos que $f(x_0) = c_0$.
Pelo Teorema 4.1, podemos derivar a série da equação (4.7) termo a termo como

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + 4c_4(x-x_0)^3 + \cdots, \text{ onde } |x-x_0| < R \tag{4.8}$$

e a substituição de $x = x_0$ na equação (4.8) nos mostra que $f'(x_0) = c_1$.
Derivando ambos os lados da equação (4.8) obteremos

$$f"(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-x_0) + 3\cdot 4c_4(x-x_0)^2 + \cdots, \text{ onde } |x-x_0| < R. \tag{4.9}$$

Mais uma vez colocando $x = x_0$ na equação (4.9), teremos $f"(x_0) = 2c_2$.
Aplicando mais uma vez o procedimento realizado anteriormente, a derivação da equação (4.9) nos fornece

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-x_0) + 3\cdot 4\cdot 5c_5(x-x_0)^2 + \cdots, \text{ onde } |x-x_0| < R. \tag{4.10}$$

e a substituição $x = x_0$ na equação (4.10) nos fornece $f'''(x_0) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$. Neste momento já conseguimos identificar um padrão. Continuando a derivar e fazer a substituição $x = x_0$ teremos

$$f^{(n)}(x - x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n.$$

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n na equação acima, obteremos $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Essa fórmula será válida para $n = 0$ se adotarmos a convenção de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$.

Teorema 4.2: *Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em x_0, isto é, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, onde $|x - x_0| < R$, então seus coeficientes serão dados pela fórmula $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em x_0, ela será da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (4.11) \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots . \end{aligned}$$

A série da equação 4.11 é chamada *série de Taylor da função de f em x_0* (ou *em torno de x_0* ou *centrado em x_0*). Para o caso onde $x_0 = 0$, a série de Taylor torna-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots . \qquad (4.12)$$

Esse caso, onde $x_0 = 0$, surge com muita frequência e recebe o nome especial de *série de Maclaurin*.

Mostramos que, se uma função f qualquer puder ser representada como uma série de potências em torno de x_0, então a função f é igual à soma de sua série de Taylor. Porém, existem funções que não são iguais à soma de suas séries de Taylor. Um exemplo é mostrado a seguir:

Exemplo 15: Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Temos que a derivada de f em 0 é $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

A última expressão toma a forma indeterminada ∞/∞. Aplicando a regra de

L'Hôpital [9], temos que $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$

Pode-se provar que $f"(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0$ e, em geral, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo inteiro positivo. Pelo Teorema 4.2, se $f(x)$ admite uma representação em série de Maclaurin, então ela é dada por

$$f(x) = 0 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \cdots ,$$

o que implica que $f(x) = 0$ em todo intervalo que contém 0. Isso contradiz a definição de f, logo $f(x)$ não admite uma representação como Série de Maclaurin.

No próximo exemplo mostraremos como conseguimos encontrar a série de Maclaurin de uma função dada.

Exemplo 16: Encontrar a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto, a série de Taylor para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Para encontrarmos o raio de convergência faremos $a_n = \frac{x^n}{n!}$, então,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \ \forall x.$$

de modo que, pelo teste da razão, a série converge para todo x e o raio de convergência é $R = \infty$.

Podemos agora questionar sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor?

Se f for derivável em todas as ordens, podemos escrever

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

e queremos saber se $f(x) = \bar{f}(x)$ dentro do intervalo de convergência de $\bar{f}$. Como em qualquer série convergente, isto significa que $\bar{f}(x)$ é o limite da sequência das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) = + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{4.13}$$

T_n é um polinômio de grau n chamado *polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a*. Para a função $f(x) = e^x$ do exemplo 16, o resultado mostra que os polinômios de Maclaurin (polinômios de Taylor centrados em 0) com $n = 1, 2,$ e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

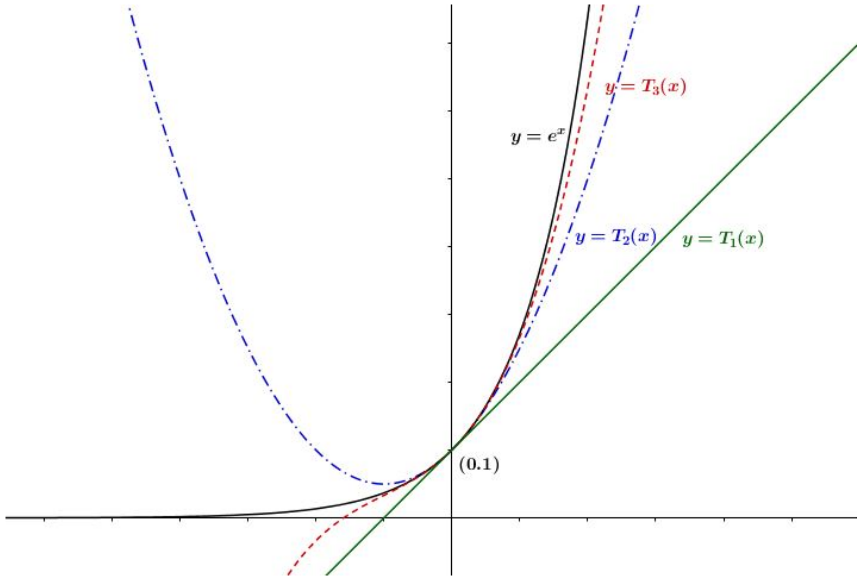


Figura 4.2: Gráfico da função $f(x) = e^x$ e os polinômios de Taylor de graus 1, 2 e 3 desta função.

Em geral, podemos dizer que $f(x)$ é a soma da sua série de Taylor se $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Considerando que $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ de modo que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, então $R_n(x)$ é denominado *resto* da série de Taylor. Se pudermos mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ teremos mostrado que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\longrightarrow\infty} R_n(x) = f(x).$$

Desta forma, chegamos ao seguinte teorema

Definição 4.1: Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

O seguinte teorema nos fornece uma técnica para mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$:

Teorema 4.3 (Desigualdade de Taylor): *Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, onde a é o valor onde a série é centrada e d um número positivo, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade*

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \quad \textit{para} \quad |x - a| \leqslant d.$$

Demonstração. Para mostrarmos que isso é verdadeiro para $n = 1$, assumimos que $|f''(x)| \leqslant M$. Particularmente temos que $f''(x) \leqslant M$, assim, para $a-d \leqslant x \leqslant a+d$ temos

$$\int_a^x f''(t)dt \leqslant \int_a^x M dt.$$

Uma antiderivada de f'' é f', dessa forma temos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x-a) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x-a).$$

Logo,

$$\int_a^x f'(t)dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]dt$$
$$\Rightarrow f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Mas $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Portanto

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Usando $f''(x) \geqslant -M$, mostramos que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

Então

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x-a|^2.$$

Assim, demonstramos a Desigualdade de Taylor para o caso onde $n = 1$. Para demonstrarmos para um número n qualquer, basta fazermos a integração $n+1$ vezes. □

Ao aplicarmos os Teoremas **??** e 4.3, é útil usar o seguinte fato de que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, para todo número real x.

Isso é verdadeiro pois vimos no exemplo 16 que a série $\sum x^n/n!$ converge para todo x e seu n-ésimo termo tende a 0.

Exemplo 17: Demonstrar que e^x é igual à soma da sua série de Maclaurin.
Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d é qualquer número positivo e $|x| \leqslant d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Assim, a Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \quad \text{para} \quad |x| \leqslant d.$$

Observemos que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Porém, pela equação (**??**), temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Decorre do Teorema do Confronto que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |R_n(x)| = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema **??**, e^x é igual à soma de série de Maclaurin, ou seja

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo} \quad x. \tag{4.14}$$

Em particular, se colocarmos $x = 1$ na equação (4.14), obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Neste momento, já possuímos o conhecimento necessário para fazer as aproximações das funções que este trabalho se propõe a estudar e que serão trabalhadas com os alunos em sala de aula conforme veremos posteriormente no Capítulo 5.

4.4 Aproximando funções por polinômios

Para começarmos, suponhamos que uma função $f(x)$ seja igual a soma da sua série de Taylor em a, ou seja, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Assim, o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) = + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Como f é igual a soma da sua série de Taylor, sabemos que $T_n(x) \longrightarrow f(x)$ quando $n \longrightarrow \infty$ e, assim, T_n pode ser usado como uma aproximação para f: $f(x) \approx T_n(x)$. Observe que o polinômio de Taylor de primeiro grau $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ tem os mesmos valores em a que f e f' têm. Assim, podemos ver que as derivadas de T_n em a coincidem com as de f, incluindo também as derivadas de ordem n. Para exemplificar, vamos tomar a função $f(x) = e^x$ e seus primeiros polinômios conforme mostrados na figura 4.2. O gráfico de T_1 é a reta tangente a $y = e^x$ no ponto $(0, 1)$, o gráfico de T_2 é a parábola $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, e o gráfico de T_3 é a curva cúbica $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, que é uma aproximação melhor para a curva $y = e^x$ do que T_2. O próximo polinômio $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ seria uma aproximação ainda melhor, e assim por diante. O quadro abaixo mostra alguns valores dos polinômios T_n para a função $y = e^x$.

	$x = 0{,}2$	$x = 3$
$T_2(x)$	1,220000	8,500000
$T_4(x)$	1,221400	16,375000
$T_6(x)$	1,221403	19,412500
$T_8(x)$	1,221403	20,009152
$T_{10}(x)$	1,221403	20,079665
$f(x) = e^x$	1,221403	20,085537

Quando temos $x = 0{,}2$, a convergência ocorre de forma mais rápida do que quando $x = 3$. Assim, quanto mais próximo da origem estiver x mais rápido o polinômio $T_n(x)$ converge para e^x. Como estamos trabalhando com aproximações, devemos saber quais valores de x nos darão a melhor aproximação, minimizando o valor do erro. Para que isso ocorra, devemos observar os valores absolutos do resto

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|.$$

Para estimar o erro temos três método possíveis:

1. Usando uma ferramente gráfica podemos traçar $|R_n(x)|$ e estimar o erro.

2. Se a série for alternada, podemos usar o teorema da estimativa de séries alternadas (Teorema 3.3).

3. Em todos os casos podemos usar a desigualdade de Taylor (Teorema 4.3), que diz que, se $|f^{(n+1)(x)}| \leqslant M$, então $|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$.

Exemplo 18: (a) Aproximar a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em $a = 8$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} && \Longrightarrow && f(8) = 2\\
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} && \Longrightarrow && f'(8) = \frac{1}{12}\\
f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} && \Longrightarrow && f''(8) = -\frac{1}{144}\\
f^{(3)}(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}.
\end{aligned}$$

Então, o polinômio de segundo grau será

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2. \end{aligned}$$

(b) Qual é a precisão dessa aproximação quando $7 \leqslant x \leqslant 9$?
Vamos usar a desigualdade de Taylor com $n = 2$ e $a = 8$. Temos que

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3,$$

onde $|f^{(3)}(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, temos $x^{\frac{8}{3}} \geqslant 7^{\frac{8}{3}}$ e, dessa forma,

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{\frac{8}{3}}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{\frac{8}{3}}} < 0{,}0021.$$

Portanto, podemos tomar $M = 0{,}0021$. Além disso, $7 \leqslant x \leqslant 9$, assim, $-1 \leqslant x-8 \leq 1$ e $|x-8| \leqslant 1$. Então, a desigualdade de Taylor dá

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0{,}0021}{3!} \cdot 1 = \frac{0{,}0021}{6} < 0{,}0004.$$

Logo, se $7 \leqslant x \leqslant 9$, a aproximação tem precisão de 0,0004.

Exemplo 19: (a) Qual é o máximo erro possível ao usar a aproximação $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ quando $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$? Use essa aproximação para calcular seno de $12°$ com precisão de 6 casas decimais.

Observe que a série de Maclaurin para o seno, que será calculada na Seção 4.4.1, é dada por $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ é alternada para todos os valores de x diferentes de zero e os termos sucessivos são decrescentes, pois $|x| < 1$, assim podemos aplicar o Teorema da estimativa de séries alternadas (Teorema 3.3). O erro na aproximação de $\operatorname{sen} x$ pelos três primeiros termos de sua série de Maclaurin é no máximo $\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$ se $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$, então $|x| \leqslant 0{,}3$; assim, o erro é menor que $\frac{(0{,}3)^7}{5040} \approx 4{,}3 \cdot 10^{-8}$. Para encontrarmos $\operatorname{sen} 12°$, primeiro convertemos para radianos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 12° &= \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right) \\ &\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)\frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)\frac{1}{5!} \approx 0{,}20791169 \end{aligned}$$

Logo, com precisão de 6 casas decimais, $\operatorname{sen} 12° \approx 0{,}207912$.

(b) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?

O erro será menor que 0,00005 se $\frac{|x|^7}{5040} < 0{,}00005$. Resolvendo essa inequação para x, temos $|x|^7 < 0{,}252 \implies |x| < \sqrt[7]{0{,}252} \approx 0{,}821$. Assim a aproximação tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0{,}82$.

O uso dos cálculos feitos nos exemplos 18 e 19 ocorre nas calculadoras e computadores. Quando pressionamos as teclas sen ou e^x nas calculadoras, é realizada uma aproximação polinomial. Geralmente é utilizado um polinômio de Taylor que consiga minimizar o máximo possível do erro em um determinado intervalo.

Um método eficiente para calcular o valor numérico de um polinômio é o método de parênteses encaixados [15]. Por exemplo, o polinômio de grau cinco

$$p_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{4.15}$$

pode ser reescrito da forma

$$p_5(x) = ((((a_5x + a_4)x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0. \tag{4.16}$$

Logo podemos notar que para encontrar o valor numérico de um polinômio, usamos um número menor de operações usando a equação (4.16).

4.4.1 Aproximação da funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x e $\ln x$

Nesta seção iremos fazer os cálculos para encontramos os polinômios de Taylor das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, e $f(x) = \ln x$. Para isso usaremos a equação (4.11) apresentada no Capítulo 4, usando $x_0 = 0$ e, para a função $\ln x$ usaremos $x_0 = 1$.

1. Vamos, em primeiro lugar, calcular as primeiras derivadas da função $f(x) = \operatorname{sen} x$:

   $f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\operatorname{sen} x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x.$

   Podemos perceber que as derivadas da função seno formam um ciclo que se repete a cada quatro derivações, assim podemos escrever

$$\begin{array}{llllll} f(x) & = f^{(4)}(x) & = f^{(8)}(x) & = \cdots & = f^{(4k)}(x) & = \ \operatorname{sen} x, \\ f^{(1)}(x) & = f^{(5)}(x) & = f^{(9)}(x) & = \cdots & = f^{(4k+1)}(x) & = \ \cos x, \\ f^{(2)}(x) & = f^{(6)}(x) & = f^{(10)}(x) & = \cdots & = f^{(4k+2)}(x) & = -\operatorname{sen} x \text{ e} \\ f^{(3)}(x) & = f^{(7)}(x) & = f^{(11)}(x) & = \cdots & = f^{(4k+3)}(x) & = -\cos x, \end{array}$$

   para todo $k \in \mathbb{N}$. Como dito no início desta seção, vamos construir a série de Taylor centrada em $x_0 = 0$, logo devemos calcular as derivadas no ponto 0, então $f^{(4k)}(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$, $f^{(4k+1)}(0) = \cos(0) = 1$, $f^{(4k+2)}(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$ e, $f^{(4k+3)}(0) = -\cos(0) = -1$.

   Assim, podemos perceber que as derivadas de ordem par sempre se anulam e as derivadas de ordem ímpar resultam alternadamente em 1 e -1. Então, usando a equação (4.12), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para todo } x. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

A figura 4.3 mostra a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e alguns polinômios de Taylor que aproximam essa função.

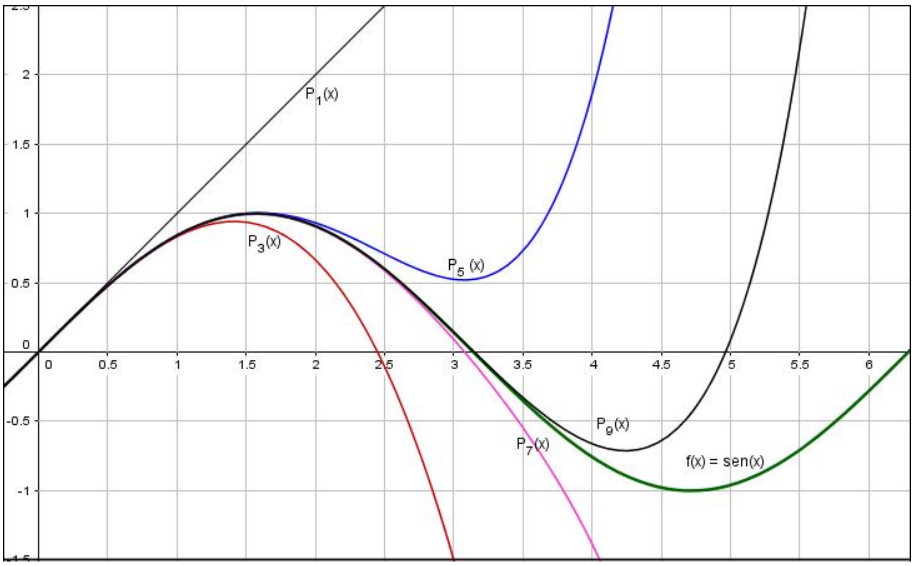


Figura 4.3: A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e aproximações.

2. Para construirmos a série de Taylor da função $f(x) = \cos x$ poderíamos proceder da mesma maneira que fizemos com a função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Porém, o Teorema 4.1 nos permite derivar uma série de potências termo a termo, então, basta derivarmos a série se Taylor da função $\operatorname{sen} x$ que encontraremos a série

para a função $\cos x$. Portanto

$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)} \quad \text{para todo } x. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

A figura 4.4 mostra a função $f(x) = \cos x$ e alguns polinômios de Taylor que aproximam essa função.

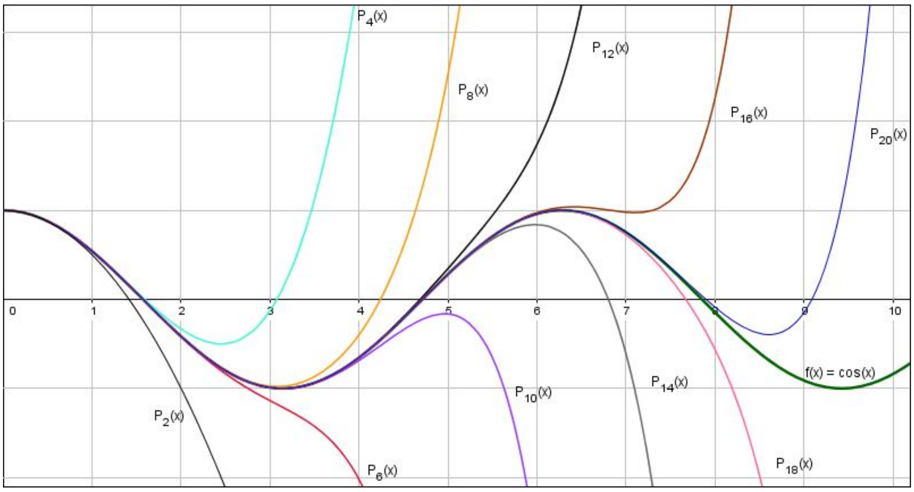


Figura 4.4: A função $f(x) = \cos x$ e aproximações.

3. Agora usaremos o procedimento usado para a construção do polinômio da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ para construirmos o polinômio da função $f(x) = e^x$ que foi mostrado no exemplo 16. Temos que

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = \cdots = e^x.$$

Calculando a derivada para $x = 0$, temos

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \cdots = e^0 = 1.$$

Assim, tomando como base a equação (4.12), podemos escrever que

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
&= x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

A figura 4.5 mostra a função $f(x) = e^x$ e alguns polinômios de Taylor que aproximam essa função.

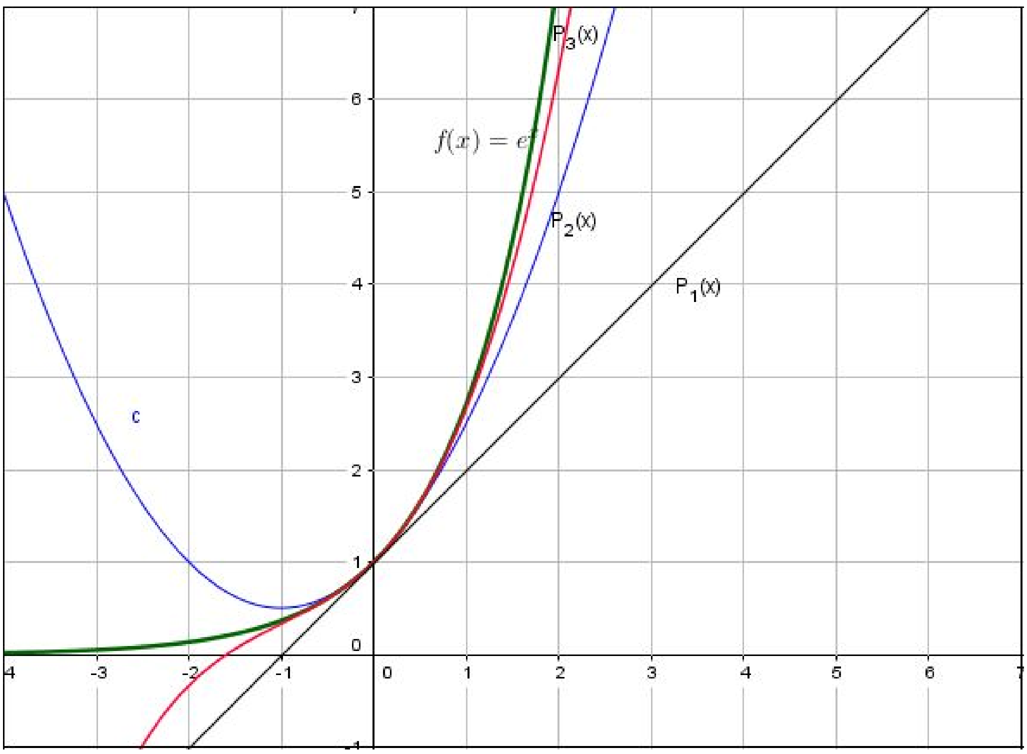


Figura 4.5: A função $f(x) = e^x$ e aproximações.

4. Vamos agora construir o polinômio de Taylor para a função $f(x) = \ln x$. Neste caso, tomaremos como base a equação (4.11). Como não podemos centrar a série em torno de 0, faremos isso em torno de $x_0 = 1$. Derivando a função

$f(x) = \ln x$ e calculando os seus valores para 1, temos

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = \ln x & \Longrightarrow & f(1) = 0 \\
f'(x) = \dfrac{1}{x} & \Longrightarrow & f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1 \\
f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} & \Longrightarrow & f''(1) = \dfrac{-1}{1} = -1 \\
f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3} & \Longrightarrow & f^{(3)}(1) = \dfrac{2}{1} = 2 \\
f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{x^4} & \Longrightarrow & f^{(4)}(1) = \dfrac{-6}{1} = -6 \\
f^{(n)}(x) = \cdots & \Longrightarrow & f^{(n)}(1) = \cdots .
\end{array}
$$

Com os valores para as primeiras derivadas calculadas podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 + \frac{-6}{24}(x-1)^4 + \cdots \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad \text{para todo } x. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

A figura 4.6 apresenta a função $f(x) = \ln x$ e alguns polinômios de aproximação dessa função.

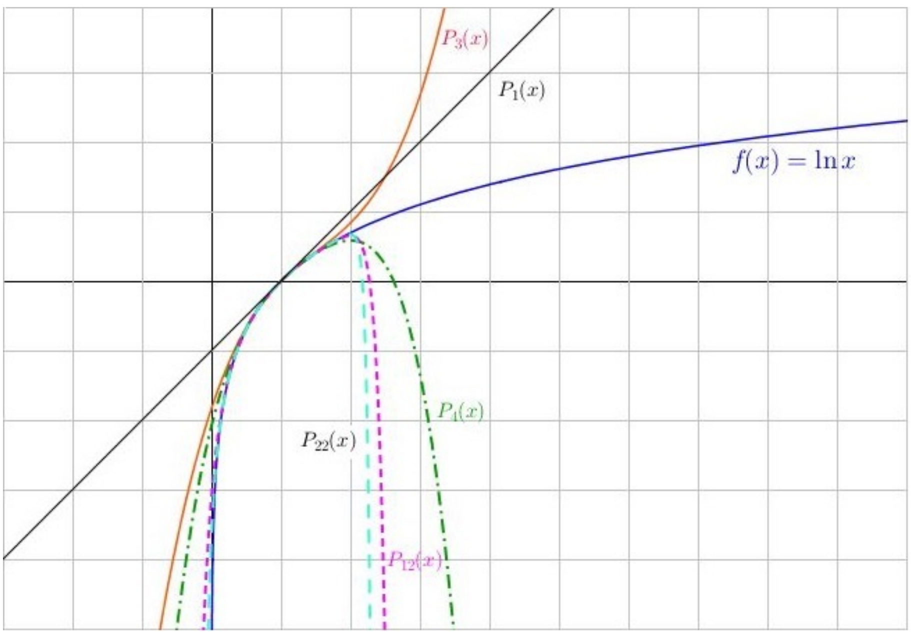


Figura 4.6: A função $f(x) = \ln x$ e aproximações

Para facilitar a visualização de todos os polinômios de Taylor que foram construídos nesse capítulo, vamos listá-los no quadro a seguir, em que R é o raio de convergência. No Apêndice B serão listadas as Séries de Taylor de algumas outras funções.

Função	R	Somatório	Série de Taylor
$f(x) \simeq \operatorname{sen} x$	∞	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$f(x) \simeq \cos x$	∞	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$f(x) \simeq e^x$	∞	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$f(x) \simeq \ln x$	2	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$

5

Planos de aula

Neste capítulo iremos apresentar como foi realizada a aplicação da teoria de Taylor em sala de aula. A atividade foi proposta para alunos do segundo ano do ensino médio da Escola Estadual Nossa Senhora Auxiliadora, localizada na cidade de Pará de Minas - MG, que estavam estudando o conteúdo de funções trigonométricas (Seção 2.3). Os alunos já possuíam o conhecimento das razões trigonométricas, estudadas no primeiro ano, portanto foi a turma ideal para a aplicação da atividade. Durante as aulas de trigonometria e de funções trigonométricas, surgiam sempre algumas dúvidas, como por exemplo:

- Porque este é o valor de seno para o ângulo pedido?
- Como você chegou a este valor?
- Como é realizado o cálculo para encontrar este valor?
- Como a calculadora ou o computador realiza este cálculo?

Assim, surgiu a ideia de apresentar para esta turma a aproximação de funções pelos polinômios de Taylor, para que estas dúvidas fossem respondidas. Os alunos foram convidados a irem à escola no contra turno para aplicação das atividades, com duração de duas horas e trinta minutos por aula, durante três dias.

5.1 Roteiro das aulas

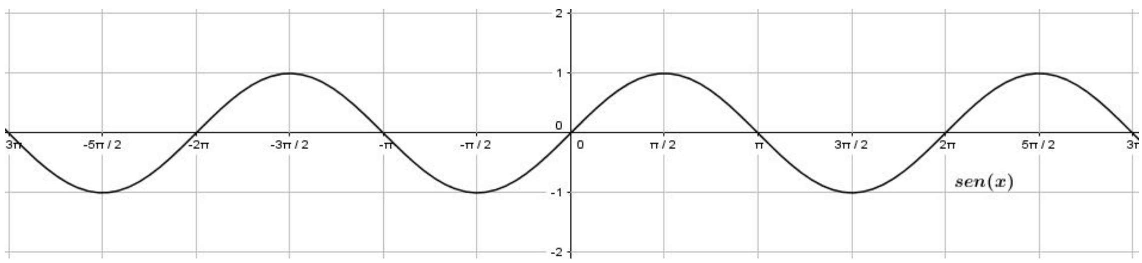
Para esta atividade foi elaborado um roteiro de aulas composto por 3 planos de aulas que se encontram no Apêndice 1 A. As referências bibliográficas foram: Dante [4] e [5] e Souza [16] e [17].

5.1.1 Primeira aula

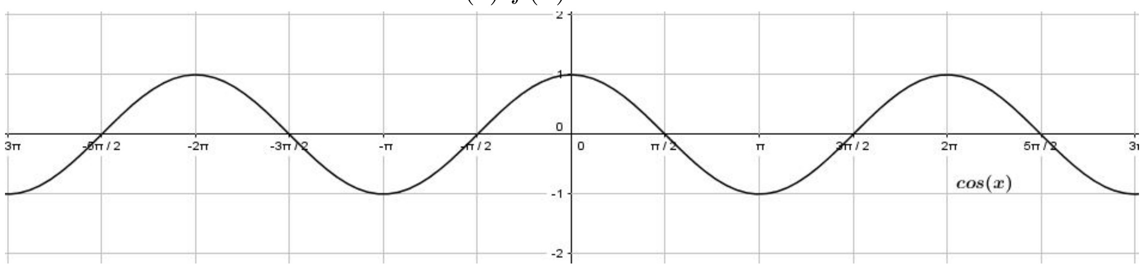
Foi realizada uma revisão sobre o conteúdo de funções exponencial, logarítmica e trigonométricas e as principais relações trigonométricas. Foi pedido aos alunos que resolvessem alguns problemas e fizessem os cálculos para alguns valores de seno e cosseno, usando a tabela de ângulos notáveis e também calculadoras.

Em um segundo momento, o foco de estudo foram as funções seno e cosseno e o estudo de seus gráficos. Foi relembrado o que é o período de uma função trigonométrica, com o auxílio dos cálculos realizados os alunos fizeram o esboço dos gráficos de seno e cosseno e puderam fazer a comparação das duas funções percebendo que a curva dos dois gráficos é a mesma, a senoide, havendo apenas um deslocamento delas no plano cartesiano.

Com o auxílio do software *Geogebra*, construímos os gráficos das funções, comparamos com os esboços construídos pelos alunos e pudemos manipular os gráficos a fim de comparar as funções. A figura 5.1 mostra o resultado dos gráficos feitos no Geogebra:



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



(b) $f(x) = \cos x$

Figura 5.1: Gráficos construídos no Geogebra

5.1.2 Segunda aula

No fim da primeira aula os alunos puderam manipular as funções no software Geogebra. Assim, eles puderam perceber que podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir as funções, gerando modificações nos gráficos.

Assim, iniciamos a aula fazendo um estudo detalhado das funções do tipo

$$f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d) \text{ e} \tag{5.1}$$

$$f(x) = a + b \cos(cx + d). \tag{5.2}$$

Manipulamos o parâmetro a das funções seno e cosseno e observamos quais alterações aconteciam no gráfico durante a manipulação do parâmetro a. Em seguida, foi realizado o mesmo processo com os parâmetros b, c e d. Depois do estudo separado de cada parâmetro, foi pedido aos alunos que construíssem os gráficos da funções seno e cosseno com alterações nos parâmetros. As funções construídas se encontram no segundo plano de aula, contido no Apêndice A.

Os alunos conseguiram esboçar os gráficos, porém apresentaram um pouco de dificuldade. Neste momento os alunos foram encaminhados para a sala de informática da escola para fazermos os gráficos com o auxílio de planilhas eletrônicas. A planilha construída possuía uma célula para a a alteração de cada parâmetro das funções seno e cosseno, uma coluna para o valor do ângulo em graus e uma para radianos e as últimas colunas apresentavam os resultados dos valores de seno e cosseno, respectivamente. A figura 5.2 mostra um parte da planilha construída.

Tabela de Valores								
a	b	c	d		x	rad	senx	cosx
0	1	1	0		0	0	0	1
0	1	1	0		1	0,017453	0,017452	0,999848
0	1	1	0		2	0,034907	0,034899	0,999391
0	1	1	0		3	0,05236	0,052336	0,99863
0	1	1	0		4	0,069813	0,069756	0,997564
0	1	1	0		5	0,087266	0,087156	0,996195
0	1	1	0		6	0,10472	0,104528	0,994522
0	1	1	0		7	0,122173	0,121869	0,992546
0	1	1	0		8	0,139626	0,139173	0,990268
0	1	1	0		9	0,15708	0,156434	0,987688
0	1	1	0		10	0,174533	0,173648	0,984808
0	1	1	0		11	0,191986	0,190809	0,981627
0	1	1	0		12	0,20944	0,207912	0,978148
0	1	1	0		13	0,226893	0,224951	0,97437
0	1	1	0		14	0,244346	0,241922	0,970296
0	1	1	0		15	0,261799	0,258819	0,965926
0	1	1	0		16	0,279253	0,275637	0,961262
0	1	1	0		17	0,296706	0,292372	0,956305
0	1	1	0		18	0,314159	0,309017	0,951057
0	1	1	0		19	0,331613	0,325568	0,945519
0	1	1	0		20	0,349066	0,34202	0,939693
0	1	1	0		21	0,366519	0,358368	0,93358
0	1	1	0		22	0,383972	0,374607	0,927184

Figura 5.2: Planilha para cálculo e construção dos gráficos das funções seno e cosseno

Na figura 5.2 é mostrado até o valor de 22 graus para x, porém, na planilha completa variamos o valor do ângulo entre 0º e 720º, para que os gráficos tivessem dois períodos. As figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 mostram os gráficos obtidos com esta planilha.

Ao fim da segunda aula foram apresentados para os alunos os conceitos de polinômio, função polinomial e fatorial, conteúdos que eles ainda não haviam estudado e que seriam necessários na terceira aula, para apresentação dos polinômios de Taylor.

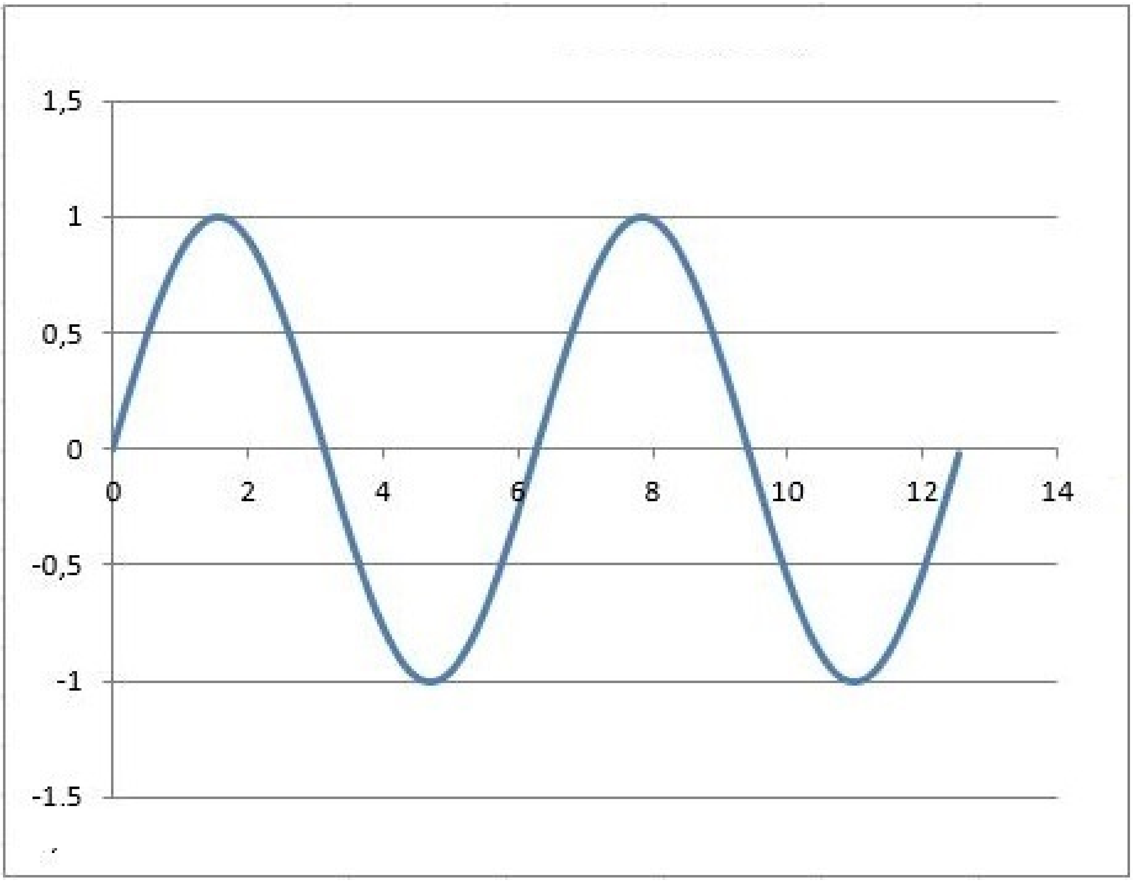


Figura 5.3: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$

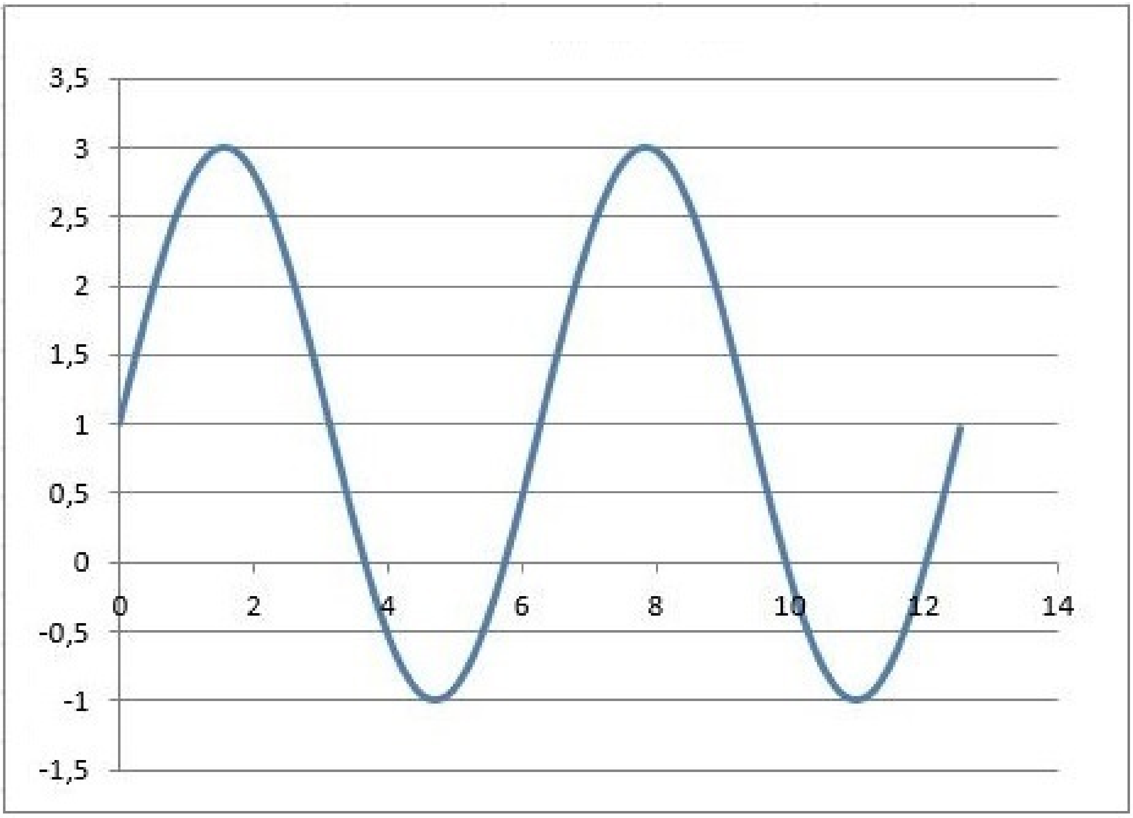


Figura 5.4: Gráfico da função $f(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} x$

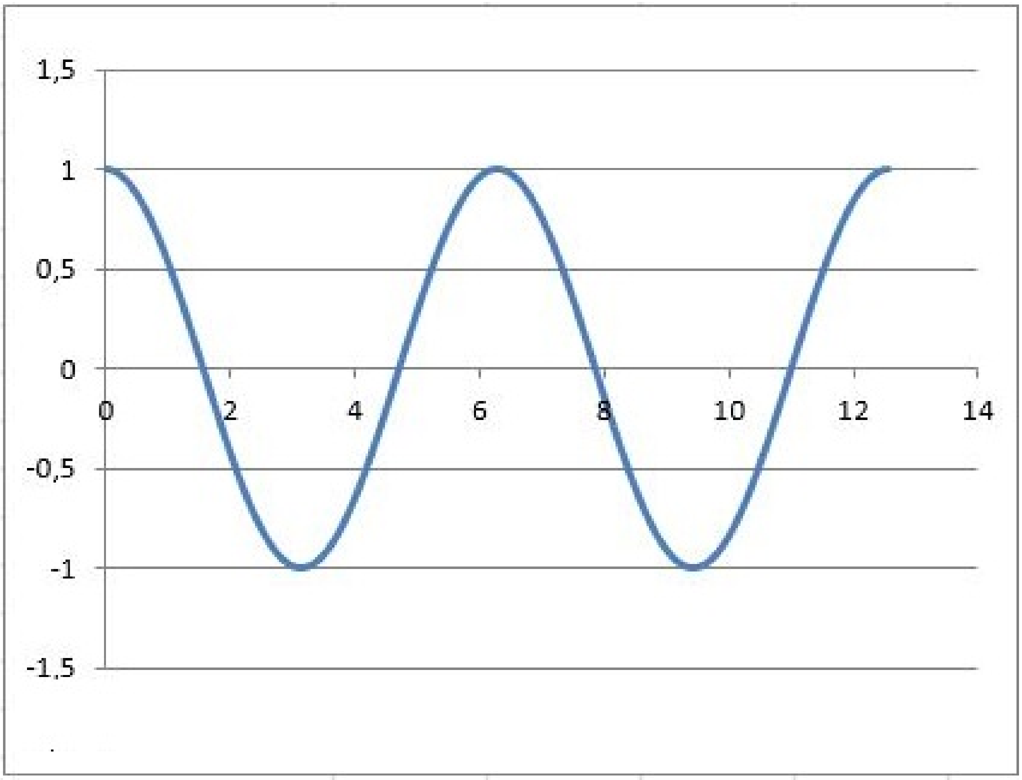


Figura 5.5: Gráfico da função $f(x) = \cos x$

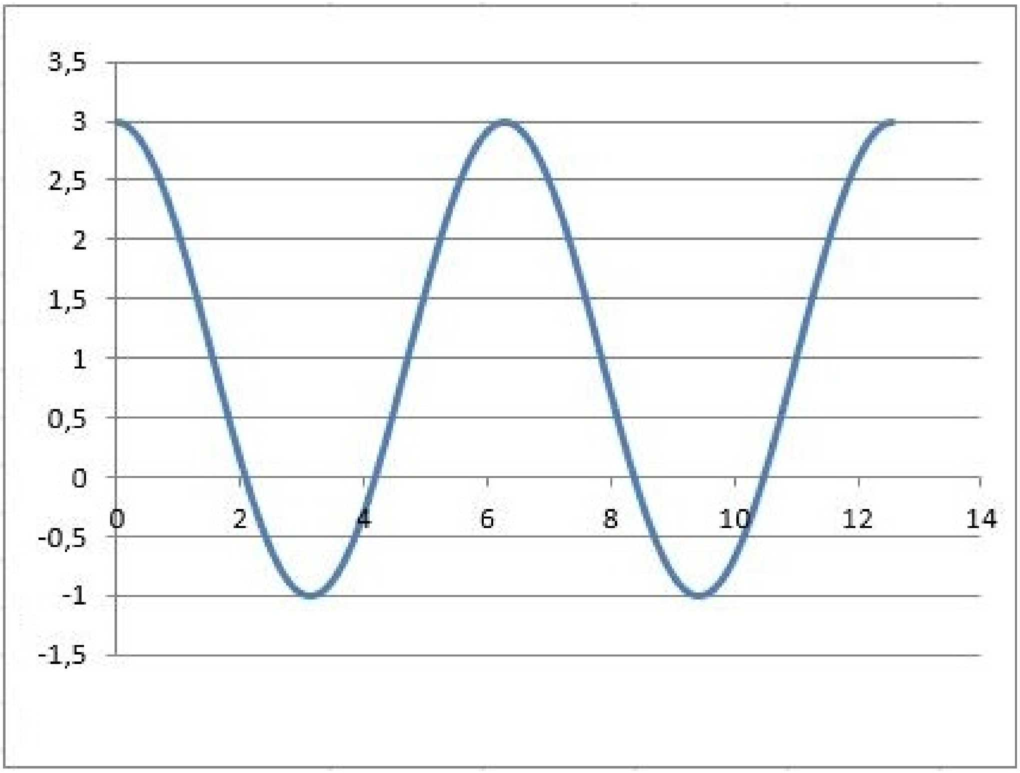


Figura 5.6: Gráfico da função $f(x) = 1 + 2\cos x$

5.1.3 Terceira aula

No início da terceira aula foi realizada um discussão para que os alunos fizessem perguntas e observações sobre as atividades.

Foram apresentados os polinômios na variável x $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$, para o cálculo de seno e cosseno, respectivamente.

Foi explicado que esses polinômios eram chamados de polinômio de Taylor e que eram obtidos através de uma série de funções e que ele aproxima cada vez mais os valores das funções conforme acrescentamos termos e aumentamos o grau do polinômio.

Logo em seguida, os alunos foram para a sala de informática onde foram trabalhados os polinômios de Taylor em planilhas eletrônicas. Nestas planilhas já estavam alguns termos do polinômio de Taylor e os alunos puderam calcular os valores de seno e cosseno. Além disso, puderam acrescentar mais termos ao polinômio para que as aproximações ficassem cada vez mais precisas. Assim eles puderam observar que o erro do polinômio se torna cada vez menor. A figura 5.7 mostra a planilha que os alunos utilizaram para o seno.

Tabela dos Senos

Obs: As células coloridas na cor PRETA podem ser alteradas

Valor do Ângulo	Ângulo em Graus	16
	Ângulo em Radianos	0,27925268

	x^i		i!	x^i/i!
Termos da Fórmula de Taylor	x^1	0,27925268	1	0,2792526803190930
	x^3	0,021776699	6	0,0036294498537525200000
	x^5	0,001698192	120	0,0000141515987161003000000
	x^7	0,000132428	5040	0,0000000262754955383185000000000
	x^9	1,0327E-05	362880	0,0000000000284585729937769000000000
	x^11	8,05324E-07	39916800	0,0000000000000201750739227369000000
	x^13	6,28009E-08	6227020800	0,00000000000000001008521675872860000
Acrescente mais termos da fórmula de Taylor				

Graus da Fórmula de Taylor	GRAU 1	GRAU 3	GRAU 5	GRAU 7	GRAU 9	GRAU 11	GRAU 13
Valor do SENO	0,27925268	0,27562323	0,275637382	0,27563736	0,2756374	0,2756374	0,2756

Figura 5.7: Planilha de cálculo do seno com o polinômio de Taylor.

Para que os alunos pudessem verificar os cálculos, a melhoria das aproximações e a redução do erro, na mesma planilha foi colocada uma tabela para conferir os valores. Como pode ser visto na figura 5.8.

	X em graus	X em radianos	SEN X
Confira aqui outros valores	16	0,2792526803	0,2756
Alguns Valores Notáveis de Seno	30	0,5235987756	0,5000
	45	0,7853981634	0,7071
	60	1,0471975512	0,8660
	90	1,5707963268	1,0000
	120	2,0943951024	0,8660
	135	2,3561944902	0,7071
	150	2,6179938780	0,5000
	180	3,1415926536	0,0000
	210	3,6651914292	-0,5000
	225	3,9269908170	-0,7071
	240	4,1887902048	-0,8660
	270	4,7123889804	-1,0000
	300	5,2359877560	-0,8660
	315	5,4977871438	-0,7071
	330	5,7595865316	-0,5000
	360	6,2831853072	0,0000

Figura 5.8: Planilha com valores do seno para comparar o resultado e o valor do erro.

Da mesma forma, os alunos puderam usar uma planilha para o cosseno, conforme mostram as figuras 5.9 e 5.10.

Tabela dos Cossenos

Obs: As células coloridas na cor PRETA podem ser alteradas

Valor do Ângulo	Em Graus	60
	Em Radianos	1,047197551

	x^i		i!	x^i/i!
Termos da Fórmula de Taylor	x^0	1	1	1
	x^2	1,096622711	2	0,5483113556160750
	x^4	1,202581371	24	0,0501075571162564 0
	x^6	1,318778043	720	0,0018316361712683000
	x^8	1,446201953	40320	0,0000358681040022699 00
	x^10	1,585937907	3628800	0,0000004370419717525110 00
	x^12	1,739175528	479001600	0,0000000036308344847385 10
Acrescente mais termos da fórmula de Taylor				

Graus da Fórmula de Taylor	GRAU 0	GRAU 2	GRAU 4	GRAU 6	GRAU 8	GRAU 10	GRAU 12
Valor do COSSENO	1	0,451688644	0,501796202	0,49996457	0,5000004	0,5000000	0,5000

Figura 5.9: Planilha de cálculo do cosseno com o polinômio de Taylor.

	X em graus	X em radianos	COS X
Confira aqui outros valores	60	1,0471975512	0,5000
Alguns Valores Notáveis de Cosseno	30	0,5235987756	0,8660
	45	0,7853981634	0,7071
	60	1,0471975512	0,5000
	90	1,5707963268	0,0000
	120	2,0943951024	-0,5000
	135	2,3561944902	-0,7071
	150	2,6179938780	-0,8660
	180	3,1415926536	-1,0000
	210	3,6651914292	-0,8660
	225	3,9269908170	-0,7071
	240	4,1887902048	-0,5000
	270	4,7123889804	0,0000
	300	5,2359877560	0,5000
	315	5,4977871438	0,7071
	330	5,7595865316	0,8660
	360	6,2831853072	1,0000

Figura 5.10: Planilha com valores do cosseno para comparar o resultado e o valor do erro.

Estas planilhas possibilitaram aos alunos a manipulação de um polinômio de Taylor e a possibilidade de verificar que essa teoria é eficiente na aproximação de funções.

Da mesma forma que acontece com as funções trigonométricas, também foi mostrado aos alunos que esses polinômios também são úteis na aproximação de outras funções, então, foi apresentado aos alunos os polinômios de Taylor, da função exponencial e da função logarítmica respectivamente:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \tag{5.3}$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}. \tag{5.4}$$

Após o uso das planilhas, muitos alunos tiveram uma dúvida:

- Se construirmos os gráficos dessas funções através do polinômio de Taylor, vamos obter a mesma curva?

Então, foi explicado para os alunos que, quanto maior o grau do polinômio que usarmos, mais próxima da senoide, da curva exponencial e da curva logarítmica será a curva obtida através Polinômio de Taylor.

Assim, apresentamos aos alunos uma nova planilha com os polinômios de Taylor para as funções seno, cosseno e exponencial. A planilha continha o gráfico das funções e também o gráfico das aproximações, para que os alunos pudessem comparar. Eles puderam manipular os parâmetros das funções e também o grau dos polinômios de Taylor. As figuras (5.11), (5.12) e (5.13) mostram a planilha e o resultado do gráfico de aproximação do seno em variados graus.

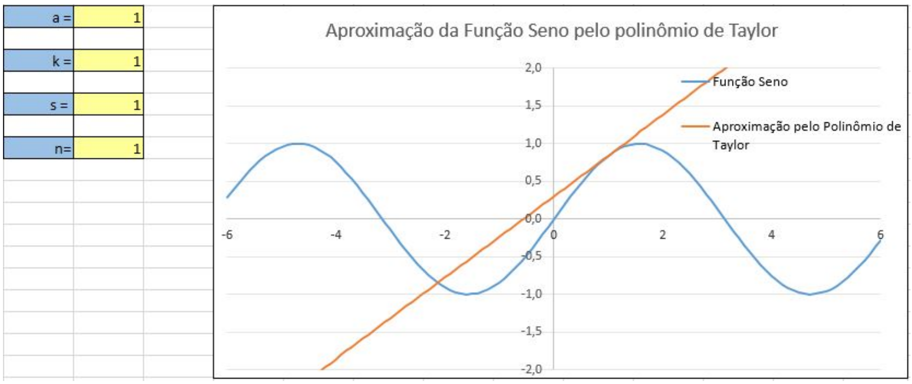


Figura 5.11: Função seno e polinômio de aproximação de 1º Grau.

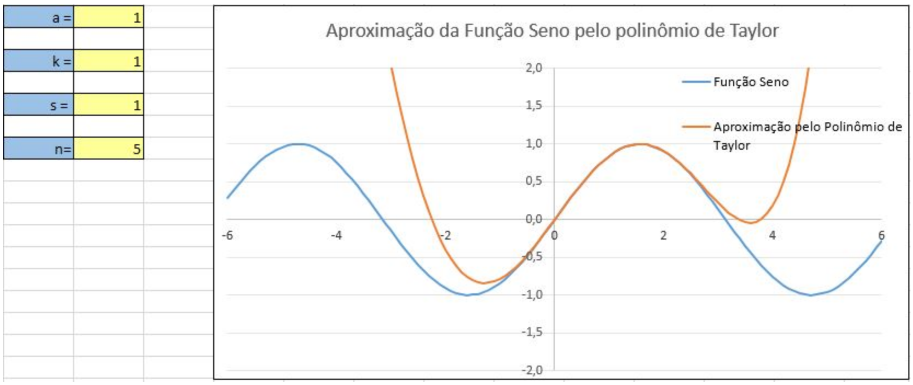


Figura 5.12: Função seno e polinômio de aproximação de 6º Grau.

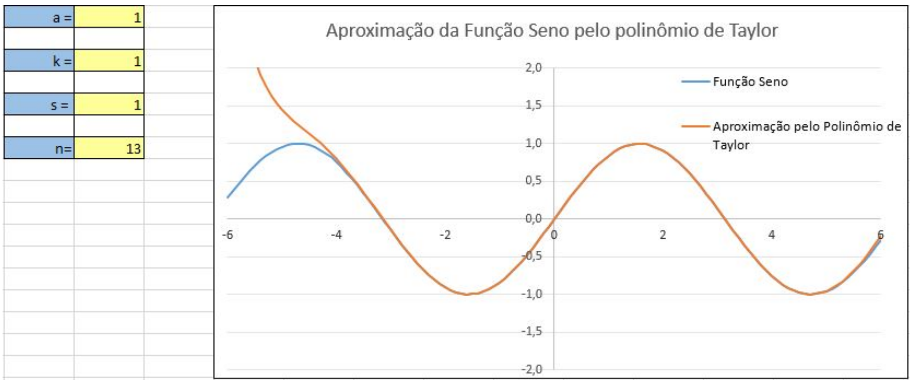


Figura 5.13: Função seno e polinômio de aproximação de 13º Grau.

As Figuras (5.14), (5.15) e (5.16) mostram a planilha e o resultado do gráfico de aproximação do cosseno em variados graus.

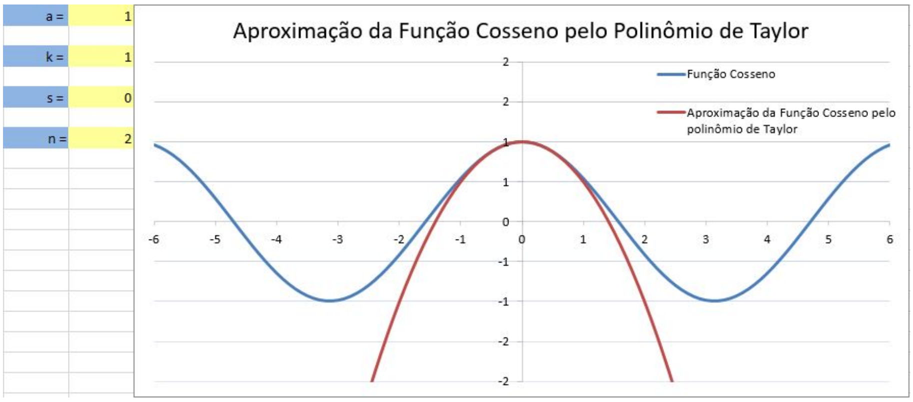


Figura 5.14: Função cosseno e polinômio de aproximação de 2º Grau.

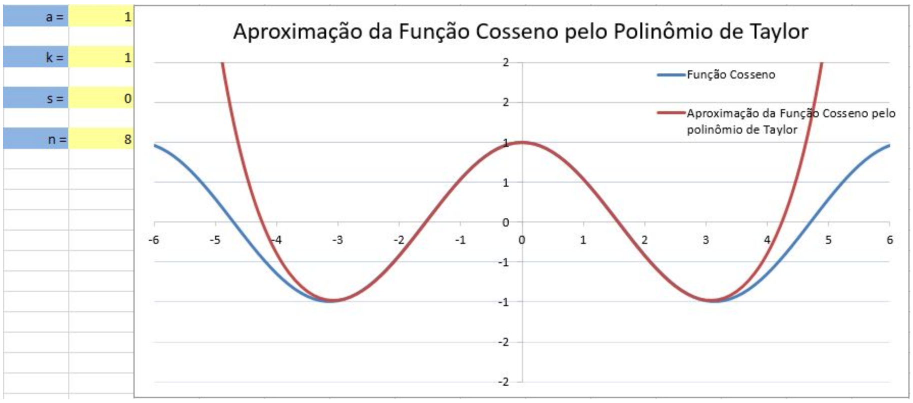


Figura 5.15: Função cosseno e polinômio de aproximação de 8º Grau.

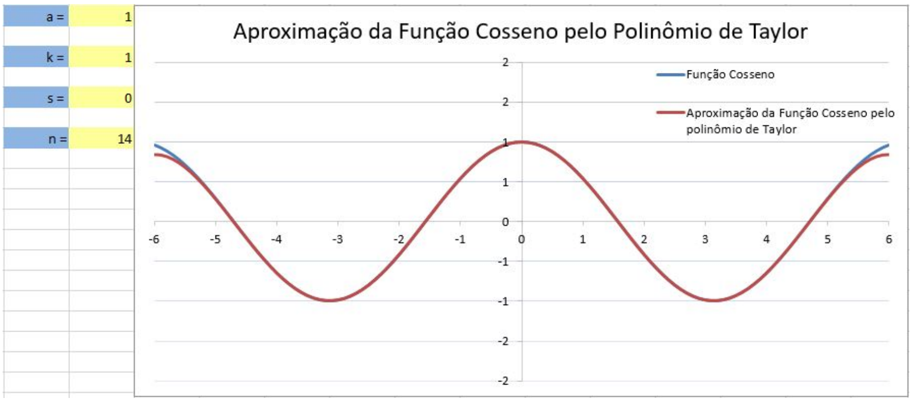


Figura 5.16: Função cosseno e polinômio de aproximação de 14º Grau.

As figuras (5.17), (5.18) e (5.19) mostram a planilha e o resultado do gráfico de aproximação da função exponencial em variados graus.

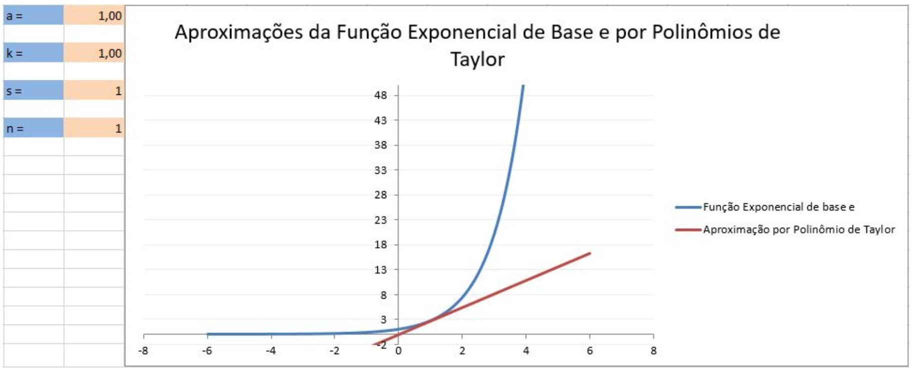


Figura 5.17: Função exponencial e polinômio de aproximação de 1º Grau.

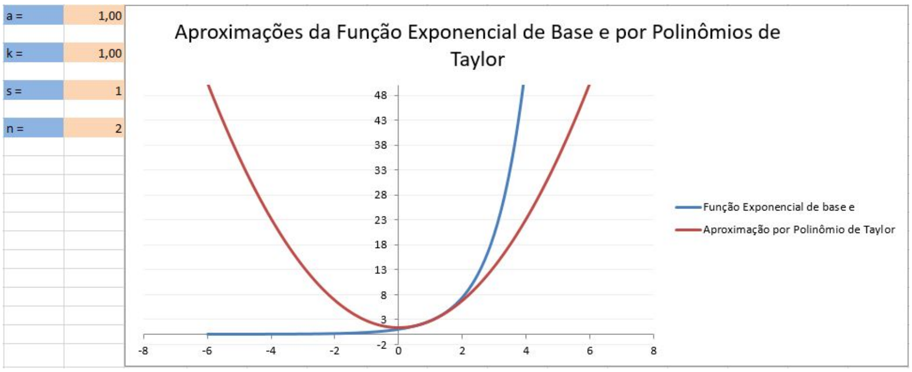


Figura 5.18: Função exponencial e polinômio de aproximação de 2º Grau.

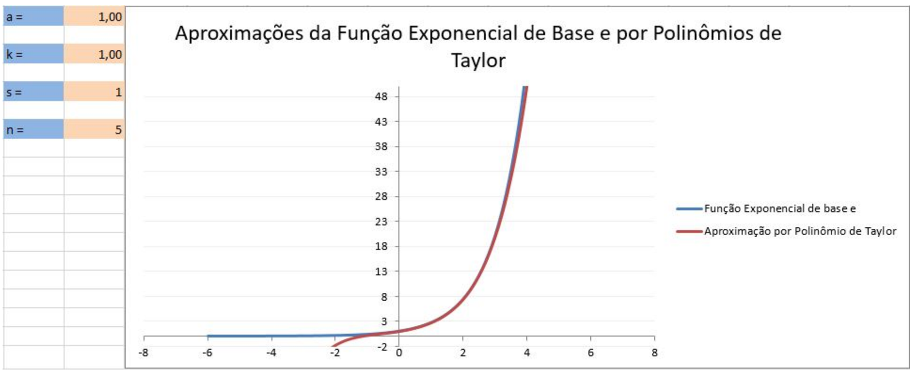


Figura 5.19: Função exponencial e polinômio de aproximação de 5º Grau.

Com as manipulações das planilhas para os cálculos e o esboço dos gráficos das funções e dos polinômios de Taylor, os alunos puderam observar como é feita a construção dessas funções e puderam entender como é realizado o cálculo em calculadoras e computadores.

6

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos uma revisão bibliográfica de algumas teorias do Cálculo Diferencial e Integral. Pudemos estudar limites, sequências e séries, bem como seus principais teoremas, definições e propriedades. Fizemos também um estudo detalhado de séries de potências e séries de Taylor, dando foco ao estudo de aproximações das funções seno, cosseno, exponencial e logarítmica.

Conforme visto no desenvolvimento deste trabalho, o cálculo do valor numérico de algumas funções pode gerar dúvidas. Geralmente essas funções são avaliadas e calculadas apenas com o uso de calculadoras científicas ou em valores tabelados. Com este trabalho, conseguimos mostrar para alunos e professores do ensino médio uma ferramenta capaz de desmistificar a avaliação dessas funções e fazer com que os alunos as assimilem com menor dificuldade.

Podemos ver que, as teorias do Cálculo Diferencial e Integral, juntamente com as séries de Taylor podem servir de ferramenta para aprimorar o ensino de alguns conteúdos, em especial as funções. Assim, mesmo sem apresentar conceitos de matemática avançada, professores do ensino médio podem usar os polinômios de Taylor como base para apresentar as funções não-algébricas mais profundamente.

No decorrer da aplicação deste trabalho nas aulas os alunos puderam ter uma revisão de conteúdos importantes dentro do estudo de funções. No momento da aula em que puderam fazer a manipulação dos polinômios de Taylor eles se mostraram muito motivados por estarem descobrindo como uma calculadora ou um computador calcula essas funções que antes eram misteriosas para eles.

A

Apêndice A

A seguir, apresentaremos planos de aula usados na aplicação das atividades com os alunos do segundo ano do ensino médio. A descrição de como foram executadas as aulas se encontram na Seção 5.1.

GOVERNO DE MINAS GERAIS
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO - SRE PARÁ DE MINAS
ESCOLA ESTADUAL NOSSA SENHORA AUXILIADORA

PROJETO: DESCOBRINDO COMO AS FUNÇÕES SÃO CALCULADAS

Primeira Aula

COMPONENTE CURRICULAR: **Matemática** DATA: **29 de Maio**
PROFESSOR: **Júlio César de Carvalho Júnior** TURMA: 2º Ano 1

NOME DO ALUNO:

Neste projeto iremos descobrir como algumas funções são calculadas. Essa é uma dúvida que vários alunos apresentam ao estudar algumas funções, como por exemplo as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica.

Relembrando conceitos:

1 – O que é uma função exponencial de base *e*? Exemplifique.

2 – O que é uma função logarítmica natural? Exemplifique.

3 – O que é uma função trigonométrica? Quais são as principais funções trigonométricas?

4 – O que são radianos? Como fazemos para converter graus para radianos?

5 – Vamos calcular alguns valores de seno e cosseno:

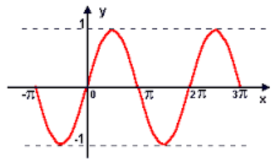
a) Usando a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis;
b) usando a calculadora.

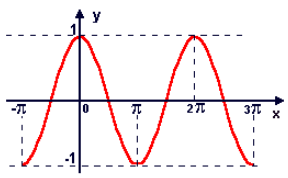
6 – Principais Características das funções trigonométricas (Usaremos as funções seno e cosseno):

a) São funções periódicas. Qual é o significado de periodicidade? O que significa a função ser periódica?
b) Qual é o período da função seno? E da função cosseno?

7 – Usando os valores calculados nos exercícios 4 e 5, vamos esboçar os gráficos de seno e cosseno.

8 – Analisando os gráficos das funções abaixo, o que podemos concluir sobre os gráficos das funções seno e cosseno?





GOVERNO DE MINAS GERAIS
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO - SRE PARÁ DE MINAS
ESCOLA ESTADUAL NOSSA SENHORA AUXILIADORA

PROJETO: DESCOBRINDO COMO AS FUNÇÕES SÃO CALCULADAS

Primeira Aula

COMPONENTE CURRICULAR: **Matemática** DATA: **30 de Maio**
PROFESSOR: **Júlio César de Carvalho Júnior** TURMA: 2º Ano 1

NOME DO ALUNO:

Neste projeto iremos descobrir como algumas funções são calculadas. Essa é uma dúvida que vários alunos apresentam as estudar alguma funções, como por exemplo as funções trigonométricas, a função exponencial e a função logarítmica.

1 – Vamos agora fazer um estudo mais detalhado das funções trigonométricas

Usaremos as funções do tipo: $f(x) = a + bsen(cx + d)$ e $f(x) = a + bcos(cx + d)$.

a) O que acontece com a função quando alteramos o valor do parâmetro *a*?
b) E quando mudamos o parâmetro *b*?
c) Analise o que ocorre com a mudança do parâmetro *c*.
d) E se mudarmos o parâmetro *d*, o que pode ser observado?

2 – Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 + 2 \cdot sen(3x + \frac{\pi}{2})$;
b) $f(x) = -3 + sen(x)$;
c) $f(x) = -1 + 3 \cdot cos(2x)$;
d) $f(x) =\ \ f(x) = 4 + 2 \cdot cos(x + \pi)$.

3 – Introduzindo planilhas de Excel.

Vamos agora construir uma planilha para que possamos construir os gráficos do exercício 2 e outros gráficos das funções seno e cosseno.

Neste momento vamos aprender alguns conceitos necessários para que possamos descobrir como computadores e calculadoras calculam os valores dessas funções.

4 - O que é um polinômio?

5 - O que é uma função polinomial?

6 - O que é fatorial?

7 - Calcule os fatoriais abaixo:

a) 3!;
b) 4!;
c) 5!
d) 6!;
e) 10!.

GOVERNO DE MINAS GERAIS
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO - SRE PARÁ DE MINAS
ESCOLA ESTADUAL NOSSA SENHORA AUXILIADORA

PROJETO: DESCOBRINDO COMO AS FUNÇÕES SÃO CALCULADAS

Terceira Aula

COMPONENTE CURRICULAR: **Matemática** DATA: **31 de Maio**
PROFESSOR: **Júlio César de Carvalho Júnior** TURMA: 2º Ano 1

NOME DO ALUNO:

Neste projeto iremos descobrir como algumas funções são calculadas. Essa é uma dúvida que vários alunos apresentam as estudar alguma funções, como por exemplo as funções trigonométricas, a função exponencial e a função logarítmica.

1 – Introduzindo os polinômios de Taylor.

Definição: O que é um polinômio de Taylor?

Utilidade: Neste projeto usaremos os polinômios para aproximar os valores das Funções seno e cosseno.

2 – Calculando alguns valores de seno e cosseno:

a) Com a calculadora;
b) com o polinômio;
c) compare os resultados obtidos nos dois cálculos, a que conclusão podemos chegar?

3 – Como se tratam de aproximações, temos, mesmo que muito pequena, uma diferença nos resultados. Essa diferença se chama erro. Podemos perceber que quanto maior o grau de um polinômio, menor é o erro. Calcule os erros apresentados pela calculadora e pelo polinômio para os valores de seno e cosseno dos ângulos notáveis.

4 – Podemos perceber que fica difícil calcular o erro, então novamente vamos usar as planilhas de Excel. Vamos construir os polinômios no Excel para facilitar os cálculos, a estimativa do erro e a construção do gráfico através do polinômio.

Apêndice B

Apresentaremos aqui uma tabela com os polinômios de Taylor das funções estudadas neste trabalho e acrescentaremos mais algumas funções, para fins de consulta.

Função	Somatório	Série de Taylor
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$f(x) = \cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$f(x) = e^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$f(x) = \ln x$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$
$f(x) = \tan^{-1} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$
$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
$f(x) = \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
$f(x) = (1+x)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \cdots$
$f(x) = \tan x$		$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

Tabela B.1: Séries de Taylor

Bibliografia

[1] Boyce, William E. e Richard C. Di Prima: *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Guanabara Koogan, 5ª edição, 1994.

[2] Carmo, Manfredo Perdigão, Augusto César Morgado e Eduardo Wagner: *Trigonometria e Números Complexos*. SBM, 3ª edição, 2005.

[3] Cerqueira, Ana Cecília Sanches: *Um estudo sobre Sequências e Séries*, 2013.

[4] Dante, Luiz Roberto: *Matemática: Contexto e Aplicações*, volume 1. Ática, 2ª edição, 2013.

[5] Dante, Luiz Roberto: *Matemática: Contexto e Aplicações*, volume 2. Ática, 2ª edição, 2013.

[6] Educação Básica, Secretaria da: *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. MEC, 2006.

[7] Figueiredo, Djairo Guedes de: *Números Irracionais e Transcendentes*. SBM, 2011.

[8] Giovanni, José Ruy e José Roberto Bonjorno: *Matemática*, volume 1. FTD, 1994.

[9] Guidorizzi, Hamilton Luiz: *Um Curso de Cálculo*, volume 1. LTC, 5ª edição, 2001.

[10] Lima, Elon Lages: *Números e Funções Reais*. SBM, ISBN 9788585818814.

[11] Lima, Elon Lages: *Logaritmos*. SBM, 5ª edição, 2013.

[12] Lima, Elon Lages: *Números e Funções Reais*. SBM, 1ª edição, 2013.

[13] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cezar de Oliveira Morgado: *A Matemática no Ensino Médio - volume 1*. SBM, ISBN 8585818107.

[14] Neto, Emilio Curi: *Aplicação do Polinômio de Taylor na aproximação da Função Seno*, 2014.

[15] Ruggiero, Márcia A. Gomes e Vera Lúcia da Rocha Lopes: *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Makron Books, 2ª edição, 2000.

[16] Souza, Joamir: *Novo Olhar: Matemática*, volume 2. FTD, 2ª edição, 2013.

[17] Souza, Joamir: *Novo Olhar: Matemática*, volume 3. FTD, 2ª edição, 2013.

[18] Stewart, James: *Cálculo*, volume 1. Cengage Learning, 7ª edição, 2015.

[19] Stewart, James: *Cálculo*, volume 2. Cengage Learning, 7ª edição, 2015.

[20] Swokowski, Earl William: *Cálculo com Geometria Analítica*, volume 2. Makron Books, 2ª edição, 1994.

[21] Tecnológica, Secretaria da Educação Média e: *PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. MEC, 2002.