



Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí

Unidade Acadêmica Especial de
Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Curvas e Aplicações

Kepler Alves Resende

Jataí

2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

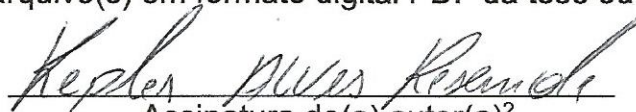
Nome completo do autor: Kepler Alves Resende

Título do trabalho: Curvas e Aplicações

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 06/10/2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

Kepler Alves Resende

Curvas e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas da Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto.

Jataí

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Alves Resende, Kepler
Curvas e Aplicações [manuscrito] / Kepler Alves Resende. - 2017.
CIV, 104 f.: il.

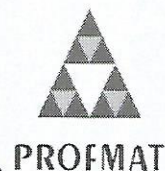
Orientador: Prof. Dr. Dr. Benedito Leandro Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí,
Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT -
Profissional), Jataí, 2017.
Bibliografia.

1. Geometria Diferencial. 2. Curvas. 3. Aplicações. I. Leandro Neto,
Dr. Benedito, orient. II. Título.

CDU 514.77



Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 www.jatai.ufg.br/matematica



Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Kepler Alves Resende – Aos onze dias do mês de setembro do ano de dois mil e dezessete (11/09/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Benedito Leandro Neto - Orientador, Prof. Dr. Agenor Freitas de Andrade e Profa. Dra. Adriana Araújo Cintra, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **“Curvas e Aplicações”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Benedito Leandro Neto, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da UFG - Regional Jataí, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Agenor Freitas de Andrade
IFG - Luziânia
Membro externo

Profa. Dra. Adriana Araújo Cintra
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro interno

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Kepler Alves Resende graduou-se em Tecnologia em Processamento de Dados pela Faculdades Objetivo, Goiânia-GO - 1997. Graduou-se em Matemática pela FIMES Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior, Mineiros-GO, 2008. Especializou-se em Gestão Educacional e Metodologia do Ensino de Ciências Naturais - Matemática e Ciências pela EDUCON, 2008. Mestrando de Matemática - Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí - Profmat, 2017.

Dedico este trabalho a minha família.

Agradecimentos

Contemplando esse momento de conquista, agradeço a todos que contribuíram no transcorrer desta jornada, em especial a Deus pela oportunidade de concluir mais essa etapa em minha vida, por me ter dado força, saúde e perseverança de chegar até aqui.

A minha esposa Akaila, meu amor. Pela ilimitada contribuição e compreensão nessa árdua etapa das nossas vidas. Tornei-me ainda mais seu admirador, pela paciência e ajuda que me foi dada. Amo você!

A toda minha família pela confiança e dedicação depositadas em mim desde o início, até agora. Pelas mais diversificadas contribuições. Assim, na realização desse sonho, tem um pedacinho de cada um de vocês.

Ao meu orientador Prof. Dr. Benedito Leandro Neto, por todo seu tempo dedicado para a realização desse trabalho, pelo conhecimento compartilhado, que foi essencial.

À Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí, e ao corpo docente por todos os conhecimentos que me foram passados durante esses anos, proporcionando um excelente nível de conhecimento que servirá para minha vida, em especial, na prática docente.

Aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo durante todo esse tempo. Pelo apoio em duros momentos, pelas colaborações e pelos momentos de descontração.

Ao meu amigo e colega de profissão, Professor Marcelo Castro Brito, pelo apoio em momentos difíceis do cotidiano. Muito obrigado!

Agradeço ao CNPq/CAPES pelo suporte financeiro.

Minha sincera gratidão a todos.

*“A Geometria faz com que possamos adquirir
o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado,
então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida”.*

Jacques Bernoulli

Resumo

Neste trabalho, estudaremos algumas curvas diferenciais como a Cicloide, Hélice e Espiral de Arquimedes. Mostraremos como algumas curvas geométricas representam fenômenos da natureza, com a intenção de motivar e despertar a curiosidade matemática. No decorrer deste estudo faremos um breve levantamento histórico, passando por conhecimentos matemáticos e geométricos das curvas e suas aplicações práticas.

Palavras-chave Geometria Diferencial; Curvas; Aplicações.

Abstract

In this work, we will study some differential curves like Cycloid, Helix and Spiral of Archimedes. We show how some geometric curves represent phenomena of nature, with the intention to motivate and awaken mathematical curiosity. In the course of this study we will make a brief historical survey, passing through mathematical and geometric knowledge of the curves and their practical applications.

Keywords Differential Geometry; Curves; Applications.

Sumário

Introdução	14
1 Preliminares	17
1.1 Curvas Planas	18
1.1.1 Curva Parametrizada Diferenciável	18
1.1.2 Vetor Tangente	21
1.1.3 Mudança de Parâmetro	24
1.1.4 Comprimento de Arco	27
1.1.5 Fórmulas de Frenet	31
1.1.6 Teorema Fundamental das Curvas Planas	36
1.2 Curvas no Espaço	39
1.2.1 Curva Parametrizada Diferenciável	39
1.2.2 Vetor Tangente, Curva Regular e Mudança de Parâmetro	40
1.2.3 Teoria Local das Curvas no Espaço: Fórmulas de Frenet	42
2 Curvas e Suas Aplicações	53
2.1 Cicloide	53
2.1.1 Braquistócrona a Curva de Menor Tempo	55
2.1.2 Tautócrona a Curva de Mesmo Tempo	57
2.1.3 Parametrização da Cicloide	58
2.1.4 Equação Cartesiana da Cicloide	62
2.1.5 Comprimento de Arco da cicloide	64
2.1.6 Área da Cicloide	66
2.1.7 Fórmulas de Frenet para a Cicloide	70
2.2 Espiral Arquimedes	74
2.2.1 Equação Polar da Espiral Arquimedes	83

2.2.2	Equação Paramétrica da Espiral Arquimedes	84
2.2.3	Equação Cartesiana: da Espiral Arquimedes	85
2.2.4	Comprimento da Curva da Espiral Arquimedes	87
2.2.5	Área da Espiral de Arquimedes	89
2.2.6	Fórmulas de Frenet da Espiral Arquimedes	90
2.3	Hélice	93
2.3.1	Equação Paramétrica da Hélice	94
2.3.2	Equação cartesiana da Hélice	95
2.3.3	Comprimento da curvada Hélice	96
2.3.4	Fórmulas de Frenet da Hélice	97
3	Considerações Finais	101
	Referências Bibliográficas	102

Introdução

A ciência da matemática é imprescindível para o desenvolvimento de várias áreas do conhecimento humano, servindo de base para diversas ciências, o que propicia a noção da sua dimensão e importância, não apenas como um campo de estudo isolado, abstrato, mas integrado à realidade e aos fenômenos da natureza e da sociedade.

Apolônio (262 – 190a.C), em sua obra *As cônicas*, foi o primeiro a utilizar um sistema de coordenadas, o que contribuiu para o surgimento da geometria analítica. A relação entre equações algébricas e geometria (curvas) torna-se evidente na história e facilita o surgimento da geometria analítica. A obra *La géométrie*, de Descartes(1596 – 1650), poderia ser descrita não só como uma aplicação da álgebra à geometria, mas como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. Enquanto René Descartes partia de um lugar geométrico (representação gráfica) e encontrava sua equação (representação simbólico-algébrica), Pierre de Fermat(1607 – 1665) partia de uma equação e estudava o lugar geométrico correspondente(veja [25]). Arquimedes(287–212a.C.) lidou com as ideias do Cálculo Integral em seus estudos de áreas e volumes. No entanto, o cálculo não se desenvolveu na antiguidade, e isso só aconteceu nos tempos modernos. No século *XVII* que o *Teorema Fundamental do Cálculo* foi reconhecido como elemento importante de ligação entre a derivada e a integral [2]. Por sua vez, a obra *Os Elementos*, de Euclides(323 – 285a.C.), acabou enveredando a matemática grega para um caminho geométrico. Em consequência, a matemática numérica (aritmética e álgebra) só apareceu no ocidente europeu a partir do século *XIII* da nossa era, importada da Índia através dos Árabes. E foi no final do século *XVI* que a álgebra alcançou maturidade necessária para o desenvolvimento do cálculo [2]. Bonaventura Cavalieri(1598 – 1647), no século *XV*, popularizou bastante as aplicações do cálculo de áreas e volumes. No começo do século *XIX*, Leonhard Euler(1707 – 1783), considerado por muitos o maior gênio matemático de seu tempo. Foi um verdadeiro desbravador das mais diversas áreas da matemática [2].

A geometria diferencial é uma dentre as inúmeras variedades de pesquisa do conhecimento matemático, e como tal, possui ampla aplicação, conforme relata Picado [20], que diz: muitos dos problemas que envolvem curvas e superfícies fazem da geometria diferencial um amplo campo de pesquisa e estudo. As curvas e as superfícies são objetos que intuitivamente se verificam e partem de questões naturais. A geometria diferencial se preocupa com a formulação matemática de tais questões utilizando das técnicas do cálculo diferencial. Picado [20] afirma que o estudo das curvas planas e das curvas no espaço é de grande relevância para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, uma vez que se aplica em diversas áreas, tais como: geologia, estatística, economia, processamento de imagens, tecnologia da informação, etc. Aqui mostraremos algumas aplicações.

Tenenblat [27] afirma ainda que no estudo da geometria diferencial, podemos caracterizar uma curva diferenciável utilizando um referencial móvel. O mais natural deles é o referencial de Frenet, que é uma base ortonormal obtida em cada ponto de uma curva regular. É relevante ressaltar que a sua importância também se dá pelo fato de que a partir deste referencial é possível determinar duas outras medidas significativas: a curvatura e a torção, que são duas funções escalares que são capazes de determinar por completo a forma de uma curva, a menos de um movimento rígido.

O triedro de Frenet foi criado pelo francês Jean Frédéric Frenet, sendo uma base formada por vetores unitários e ortogonais entre si. As fórmulas de Frenet descrevem as propriedades de uma partícula que se move ao longo de uma curva contínua e diferenciável ou as propriedades geométricas da própria curva, independentemente do movimento no espaço euclidiano tridimensional (veja [4, 23, 27]).

A geometria diferencial estuda a influência das propriedades locais (e globais) no comportamento de toda curva ou superfície e estende ao estudo dos espaços não euclidianos e variedades de qualquer dimensão, fundamentando-se nos métodos do cálculo diferencial e integral.

Dentre os objetivos principais desse trabalho podemos destacar: *as aplicações de curvas diferenciáveis na modelagem de fenômenos da natureza, bem como fazer estudos conceituais, construir representações gráficas das aplicações evidenciando a importância desta reflexão para o ensino.*

É imprescindível entender a contribuição da matemática em seus aspectos gerais, pois, quando a mesma tem demonstrado a sua aplicabilidade, gera benefícios e valores para a formação social e intelectual, propiciando o desenvolvimento da autonomia, da criticidade, da criatividade e da capacidade de argumentação. De tal forma, que o

estudo da matemática, atribuído com a demonstração da sua aplicabilidade, comprova a importância deste ensino como componente curricular essencial.

Neste trabalho estudaremos as aplicações de curva no plano e no espaço. Os métodos de pesquisa foram escolhidos para atender os objetivos gerais do estudo.

Para Köche [11]: “O planejamento de uma pesquisa depende tanto do problema a ser investigado, da sua natureza e situação espaço-temporal em que se encontra, quanto da natureza e nível de conhecimento do investigador”. Já para Marconi e Lakatos [16], os critérios para a classificação dos tipos de pesquisa variam de acordo com o enfoque dado pelo autor. A escolha do tipo de pesquisa a ser realizada dependerá dos problemas encontrados bem como das suas condições e natureza. Essa escolha está ligada ao nível de conhecimento do autor, e definirá o tipo mais indicado a ser aplicado.

Essa dissertação está estruturada da seguinte forma: Introdução, Preliminares, Curvas e Aplicações e, Considerações Finais.

No Capítulo 1, será feito um estudo preliminar sobre curvas no plano e no espaço. Iremos mostrar nas seções 1.1 e 1.2, as definições e proposições das fórmulas de Frenet, curvatura e torção, exemplificando para melhor entendimento das curvas.

No Capítulo 2, veremos algumas curvas e como elas representam fenômenos da natureza. Será apresentado as aplicações de curvas e iremos mostrar a parametrização, equação cartesiana, comprimento da curva, além de calcular a área, curvatura, torção e determinar as fórmulas de Frenet das curvas em questão. Queremos mostrar a importância da geometria diferencial para os alunos de diversas áreas da biologia, exatas e humanas.

O capítulo 3, está reservado para a discussão final.

Capítulo 1

Preliminares

As curvas diferenciáveis no espaço Euclidiano é um tema tratado em disciplinas introdutórias de Geometria Diferencial, na qual se utiliza noções de álgebra linear e cálculo diferencial. A Geometria Diferencial é o estudo das propriedades locais (e globais) de curvas e superfícies [4, 27].

Neste trabalho, serão utilizados os conceitos fundamentais do cálculo vetorial e do cálculo diferencial de funções de uma ou mais variáveis. Na figura abaixo, alguns exemplos de curvas planas.

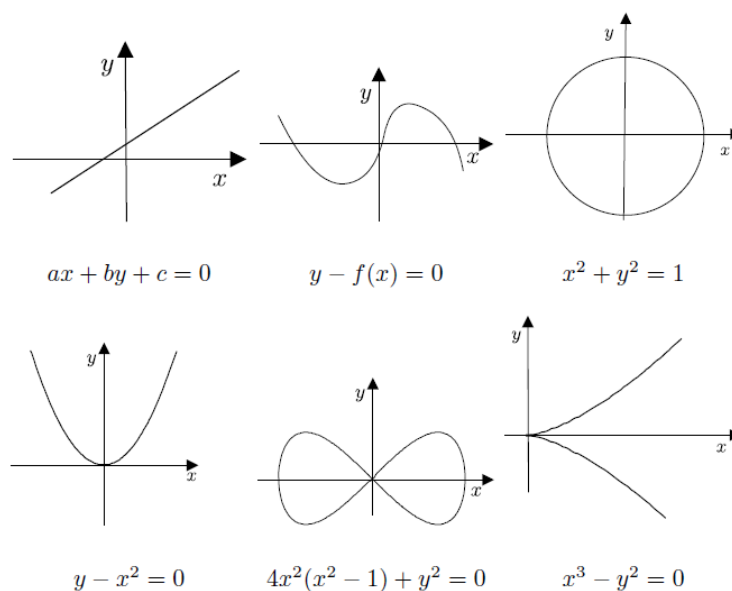


Figura 1.1: Curvas Planas [22]

1.1 Curvas Planas

Nesta seção definiremos parametrizações, comprimento de arco, mudança de parâmetro e fórmulas de Frenet das curvas no plano.

As definições e resultados apresentados nessa seção podem ser obtidas em [27].

1.1.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Uma curva no plano é descrita dando-se as coordenadas de seus pontos como funções de uma variável independente.

Definição 1.1. Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável α (de classe C^∞), de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado traço da curva.

Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que para cada t associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis (ou, C^∞).

Exemplo 1.2. Seja a aplicação $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$; $t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

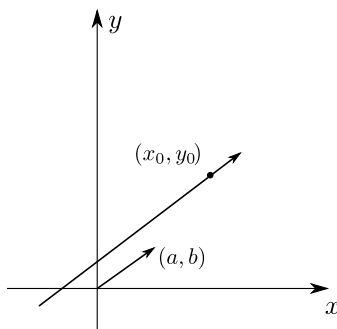


Figura 1.2: Reta no plano

Derivando $\alpha(t)$, temos:

$$\alpha'(t) = (a, b).$$

Calculando $|\alpha'(t)|$, obtemos:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{onde } a^2 + b^2 \neq 0,$$

então, α é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma reta passando pelo ponto (x_0, y_0) , paralela ao vetor de coordenadas (a, b) .

Exemplo 1.3. Considere a aplicação $\alpha(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$. Pela definição de função modular temos que:

$$|t| = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0 \\ -t, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Então, calculando o limite lateral pela esquerda:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} -1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Agora, calculando o limite lateral pela direita:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como os $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t}$, $\alpha(t)$ não é diferenciável no vértice.

Portanto, $\alpha(t)$ não é uma curva parametrizada diferenciável, já que $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$, conforme figura abaixo.

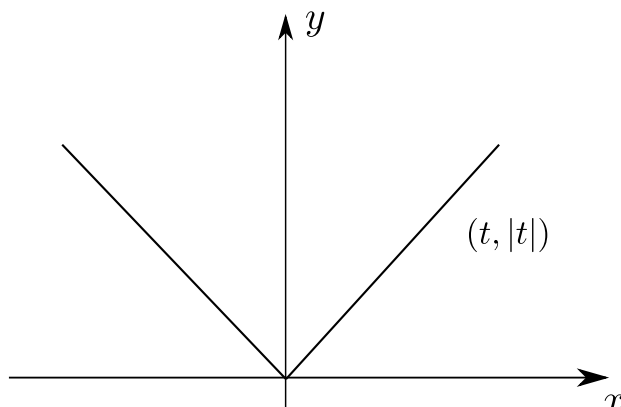


Figura 1.3: Gráfico função modular

Exemplo 1.4. As curvas parametrizadas $\alpha(t)$ e $\beta(r)$ possuem o mesmo traço em \mathbb{R}^2 . De fato, $\alpha(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(r) = (2r + 1, 4r + 2)$, $r \in \mathbb{R}$.

Igualando as coordenadas de $\beta(r)$ com as coordenadas de $\alpha(t)$, teremos:

$$2r + 1 = t,$$

logo

$$2r = t - 1 \tag{1.1}$$

e

$$4r + 2 = 2t$$

assim

$$2(2r) + 2 = 2t. \tag{1.2}$$

Substituindo a equação (1.1) em (1.2), teremos:

$$2(t - 1) + 2 = 2t,$$

então

$$2t - 2 + 2 = 2t.$$

Portanto

$$2t = 2t.$$

Como podemos ver pela igualdade acima, $\alpha(t)$ e $\beta(r)$ possuem o mesmo traço, conforme a figura abaixo.

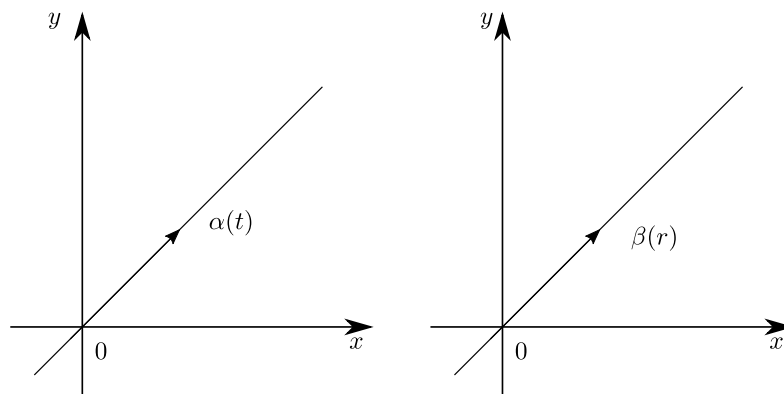


Figura 1.4: Curvas parametrizadas distintas com o mesmo traço

1.1.2 Vetor Tangente

Definição 1.5. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que a cada $t \in I$, associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado vetor tangente a α em t .

A definição de vetor tangente coincide com a noção intuitiva que temos de vetor tangente a uma curva, isto é, um vetor cuja a direção é a direção limites de cordas, determinadas por um ponto $\alpha(t)$ e pontos próximos $\alpha(t+h)$, quando h tende a zero. De fato, fixado $t \in I$, para $h \neq 0$ tal que $t+h \in I$, $\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$ é o vetor de $\alpha(t)$ a $\alpha(t+h)$ multiplicado pelo escalar $\frac{1}{h}$, conforme figura abaixo.

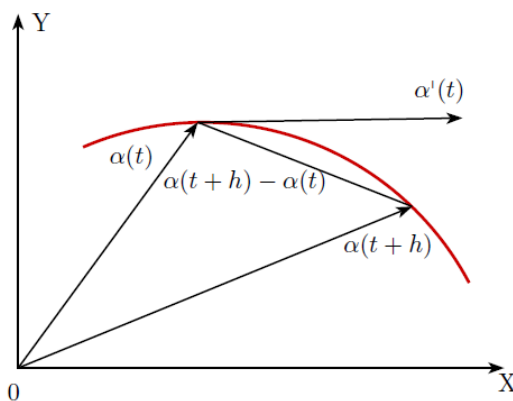


Figura 1.5: Vetor tangente [14]

Observamos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$ é exatamente a definição da derivada da aplicação α em t , ou seja:

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}.$$

Exemplo 1.6. A aplicação $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1))$, com $t \in \mathbb{R}$, possui vetor tangente dado por:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1) + \cos(t) \cdot (-2\sin(t)), \cos(t) \cdot (2\cos(t) - 1) + \sin(t) \cdot (-2\sin(t))) \\ &= (-2\sin(t) \cdot \cos(t) + \sin(t) - 2\cos(t) \cdot \sin(t), 2\cos^2(t) - \cos(t) - 2\sin^2(t)) \\ &= (-4\sin(t) \cdot \cos(t) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t)) \\ &= (-2(2\sin(t) \cdot \cos(t)) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t)) \\ &= (-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t)). \end{aligned}$$

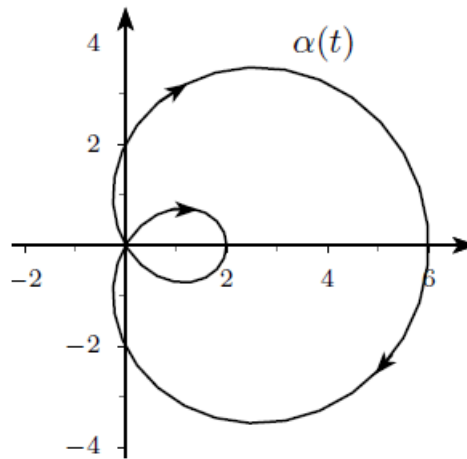


Figura 1.6: Cardióide [14]

Esta é uma curva parametrizada diferenciável, e, é denominada cardióide, conforme traço da figura acima.

Vale dizer que um vetor tangente a uma curva α é definido no parâmetro t , e não

no ponto $\alpha(t)$. Observe que:

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-1\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-1\right)\right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)\right) \\ &= (0, 0),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-1\right), \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-1\right)\right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)\right), \\ &= (0, 0).\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \alpha\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Porém,

$$\begin{aligned}\alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(-2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 2\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha'\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \left(-2\sin\left(2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), 2\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(-2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 2\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right).\end{aligned}$$

Então, $\alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \alpha'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Portanto, o vetor tangente ao traço da curva na origem de \mathbb{R}^2 não está bem definido.

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas, é preciso que exista uma reta tangente a uma curva α para cada valor do parâmetro t . Para isso é suficiente que o vetor tangente a α seja não nulo para todo t .

Definição 1.7. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **regular** se $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

É importante definirmos uma curva regular quando queremos definir uma reta tangente a uma curva num ponto dado.

Definição 1.8. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é a reta da pela função

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0).$$

1.1.3 Mudança de Parâmetro

Já mostramos que duas curvas podem ter o mesmo traço. Na verdade, a partir de uma curva regular α , podemos obter várias curvas regulares que têm o mesmo traço de α , da seguinte forma: Sejam I e J intervalos aberto de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável (C^∞), cuja derivada de primeira ordem é não nula, em todos pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então a função composta $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular com o mesmo traço de α , chamada reparametrização de α por h . A função h é dita mudança de parâmetro, conforme figura abaixo.

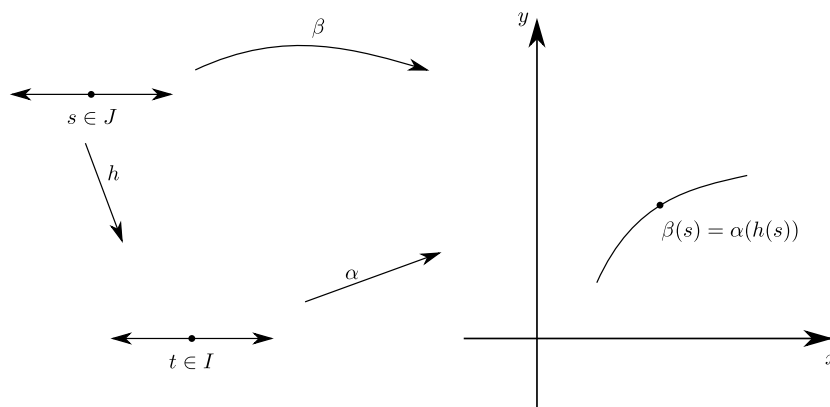


Figura 1.7: Mudança de parâmetro

Exemplo 1.9. Seja a curva regular

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t)), t \in \mathbb{R},$$

onde $a \neq 0$ é constante. Sabemos que $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$. Determinando o módulo de $\alpha'(t)$:

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\ &= a. \end{aligned}$$

Seja $h(s) = \frac{s}{a}$, $s \in \mathbb{R}$. A reparametrização de α por h é a curva

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right).$$

Determinando $\beta'(s)$:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \left(-a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}, a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \right) \\ &= \left(-\sin\left(\frac{s}{a}\right), \cos\left(\frac{s}{a}\right) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\beta'(s)| &= \sqrt{\left(-\sin\left(\frac{s}{a}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{s}{a}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2\left(\frac{s}{a}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{a}\right)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

A curva β é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. Veremos mais a seguir.

Exemplo 1.10. A curva

$$\beta(r) = (-2r + 1, -4r + 2), r \in \mathbb{R}$$

é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = (t, 2t), t \in \mathbb{R}.$$

Basta considerar a mudança de parâmetro $h(r) = -2r + 1$, $r \in \mathbb{R}$, conforme o Exemplo 1.4.

Uma mudança de parâmetro h é uma função estritamente crescente ou decrescente, portanto é bijetora. Além disso, se β é uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β por h^{-1} .

A orientação de uma curva regular plana α é o sentido de percurso do traço de α .

Seja β uma reparametrização de α por h . Se h é estritamente crescente, então β e α têm a mesma orientação. Se h é estritamente decrescente, então β e α têm orientações opostas.

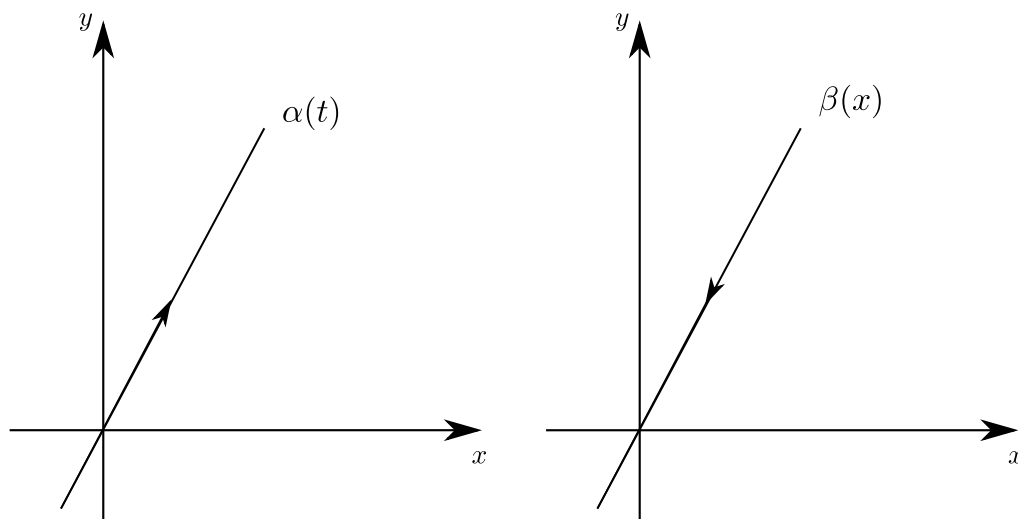


Figura 1.8: Orientação de uma curva regular plana

A aplicação $\alpha(t)$ é chamada de curva parametrizada pois é expressa por equações paramétricas onde t é o parâmetro real. É importante perceber a diferença entre uma curva parametrizada e seu traço. Enquanto uma curva parametrizada no espaço é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, o traço da curva é um subconjunto \mathbb{R}^2 .

1.1.4 Comprimento de Arco

A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ é denominada função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 . Esta função é diferenciável de classe C^∞ , pois α é uma curva diferenciável regular.

Definição 1.11. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco de curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 1.12. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo $t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, que, para cada $t \in I$, associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Se $t_0 \leq t_1$ então, por hipótese,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Se $t \leq t_0$, então

$$\begin{aligned} -s(t) &= \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt \\ &= t_0 - t. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $t \in I$, $s(t) = t - t_0$, e, $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$. \square

Exemplo 1.13. Seja a aplicação $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Calculando o compri-

mento de α , de 0 à 2π , teremos:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |(-\sin(t), \cos(t))| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= t \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi - 0. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento $\alpha(t)$ é igual a 2π . O vetor tangente é dado por $\alpha'(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos(t), \sin(t)) \\ \alpha'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)). \end{aligned}$$

A norma é dada por:

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

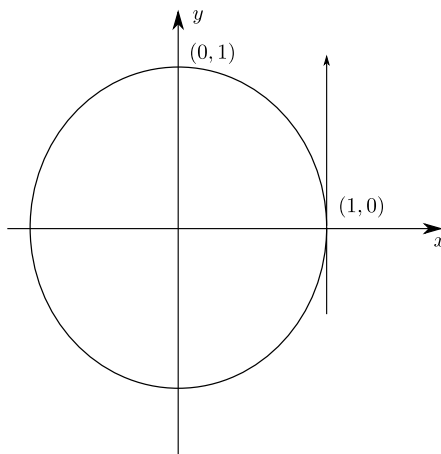


Figura 1.9: Circunferência de raio 1 e centro na origem

Logo, $\alpha(t)$ é parametrizada pelo comprimento de arco. O traço é uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1.

Exemplo 1.14. A aplicação $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$, Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} t. \end{aligned}$$

A função inversa de s é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\beta = \alpha \circ h$, que a cada s associa

$$\beta(s) = \left(a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right).$$

Calculando $\beta'(s)$, obtemos:

$$\beta'(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\beta'(s)| &= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, β é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Exemplo 1.15. Consideremos a curva $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, chamada espiral logarítmica.

O vetor tangente de α é dado por

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (e^t \cos(t) + e^t(-\sin(t)), e^t \sin(t) + e^t \cos(t)) \\ &= (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t))).\end{aligned}$$

A norma do vetor tangente é

$$\begin{aligned}|\alpha'(t)| &= \sqrt{((e^t(\cos(t) - \sin(t)))^2 + (e^t(\sin(t) + \cos(t)))^2)} \\ &= \sqrt{(e^t)^2[(\cos^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t)) + (\cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t))]} \\ &= e^t\sqrt{1 - 0 + 1} \\ &= e^t\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Então a curva $\alpha(t)$ não está parametrizada pelo comprimento de arco. Verificamos que $|\alpha'(t)| = e^t\sqrt{2}$. Assim, a função comprimento de arco de α , a partir de $t_0 = 0$, é:

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^t e^t\sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

A função inversa é dada por:

$$h(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right).$$

Portanto,

$$\beta(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right) \right),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

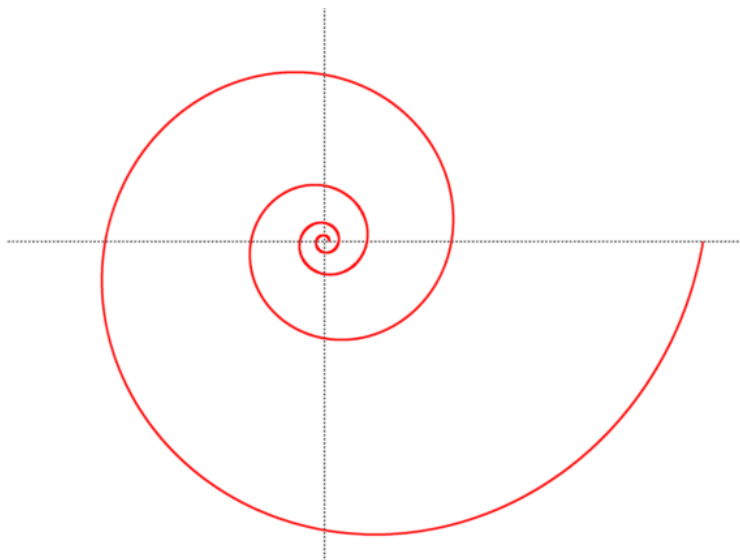


Figura 1.10: Espiral

A Espiral será amplamente abordada na seção 2.2, onde trataremos da equação cartesiana, paramétrica, fórmulas de Frenet, comprimento e área.

1.1.5 Fórmulas de Frenet

Vimos anteriormente que toda curva regular do plano pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. Dada uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, parametrizada pelo comprimento de arco s , para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor unitário, que denotamos por $t(s)$, isto é,

$$t(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Um vetor v é ortogonal à t se $\langle v, t \rangle = 0$.

Definição 1.16. Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, tal que a base ortogonal de \mathbb{R}^2 formada por $t(s)$ e $n(s)$ possua a mesma orientação que a base canônica $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , isto é,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

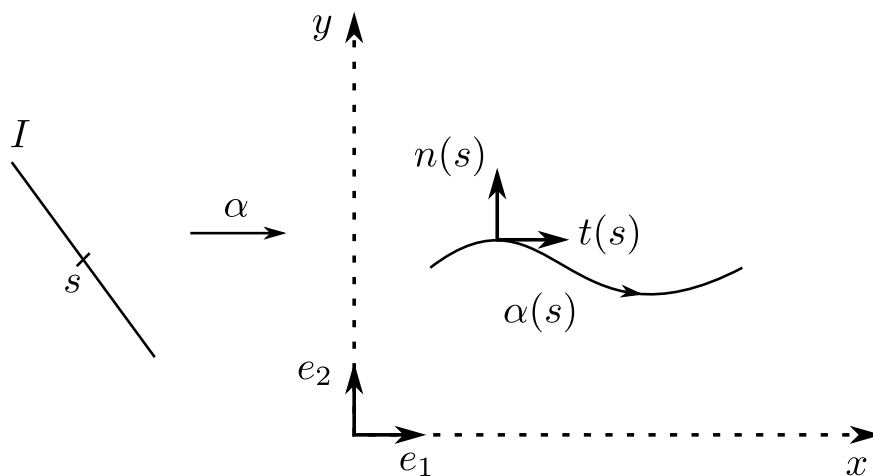


Figura 1.11: Base Canônica

O conjunto de vetores $t(s)$ e $n(s)$ é um referencial para a curva α em s . A reta normal a α em s é a reta que passa por $\alpha(s)$ na direção de $n(s)$.

Observando que $t(s)$ e $n(s)$ são aplicações de $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 , diferenciáveis de classe C^∞ e, para cada $s \in I$, os vetores de \mathbb{R}^2 , $t'(s)$ e $n'(s)$ podem ser escritos como combinação linear de $t(s)$ e $n(s)$. Como $t(s)$ é unitário, temos que $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, portanto, $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$. Esse fator de proporcionalidade, denotado por $k(s)$, é chamado de *curvatura* de α em s , $t'(s) = k(s)n(s)$.

Considerando a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, segue que

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), n(s) \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, dado que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ temos que

$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Analogamente, como $n(s)$ é unitário, temos que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e, portanto, $n'(s)$ é proporcional a $t(s)$. Como

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s),$$

concluimos que

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

Definição 1.17. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $t(s)$, $n(s)$ satisfaz as equações:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -k(s)t(s), \text{ para todo } s \in I, \end{aligned}$$

que são as fórmulas de Frenet de uma curva plana.

A função $k(s) = |\alpha''(s)|$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção.

Exemplo 1.18. Seja $\alpha(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta. Então, a curvatura é identicamente nula (veja [27], Exemplo 4.1). Considere $\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0)$, $s \in I$, onde a e b são constantes e $a^2 + b^2 = 1$. Como $t(s) = \alpha'(s)$ é constante, temos que $t'(s) = 0$ e, portanto, $k(s) = 0$, para todo $s \in I$.

Exemplo 1.19. Considere a curva

$$\alpha(s) = \left(a + b \cos\left(\frac{s}{b}\right), c + b \sin\left(\frac{s}{b}\right) \right), s \in \mathbb{R}, b > 0,$$

Cujo traço é uma circunferência de centro (a, c) e raio b (veja [27], Exemplo 4.1). O vetor tangente é dado por

$$\begin{aligned} t(s) &= \left(-b \sin\left(\frac{s}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}, b \cos\left(\frac{s}{b}\right) \cdot \frac{1}{b} \right) \\ &= \left(-\sin\left(\frac{s}{b}\right), \cos\left(\frac{s}{b}\right) \right). \end{aligned}$$

O vetor normal é

$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{b}\right), -\sin\left(\frac{s}{b}\right) \right).$$

Mais ainda, derivando o vetor tangente temos que

$$\begin{aligned} t'(s) &= \left(-\cos\left(\frac{s}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}, -\sin\left(\frac{s}{b}\right) \cdot \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{1}{b} \left(-\cos\left(\frac{s}{b}\right), -\sin\left(\frac{s}{b}\right) \right). \end{aligned}$$

Logo, a curvatura é dada por:

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{b} \left(-\cos\left(\frac{s}{b}\right), -\sin\left(\frac{s}{b}\right) \right), \left(-\cos\left(\frac{s}{b}\right), -\sin\left(\frac{s}{b}\right) \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{b} \left(\cos^2\left(\frac{s}{b}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{b}\right) \right) \\ &= \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

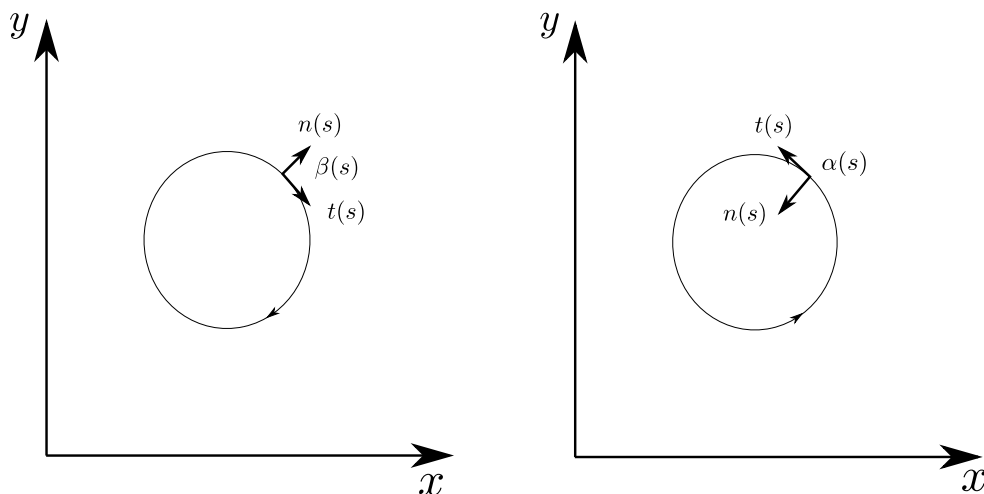


Figura 1.12: Sinais Opostos

O sinal da curvatura depende da orientação da curva.

Vamos considerar o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular com um parâmetro qualquer.

Proposição 1.20. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de parâmetro qualquer $r \in I$. Consideramos $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α pelo comprimento

de arco s , isto é, $\beta(s(r)) = \alpha(r)$. Se $t(s)$, $n(s)$ é o referencial de Frenet de $\beta(s)$ e $k(s)$ é a curvatura, então diremos que $t(r) = t(s(r))$, $n(r) = n(s(r))$ é o referencial de Frenet de α , e $k(r) = k(s(r))$ é a curvatura. Portanto, se $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, temos que

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \\ n(r) &= \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \\ k(r) &= \frac{-x''y' + x'y''}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.21. Consideremos a espiral logarítmica

$$\alpha(r) = (e^r \cos(r), e^r \sin(r)), r \in \mathbb{R}.$$

Determinando as derivadas de primeira e segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(r) &= (e^r \cos(r) - e^r \sin(r), e^r \sin(r) + e^r \cos(r)), \\ &= e^r (\cos(r) - \sin(r), \cos(r) + \sin(r)), \\ \alpha''(r) &= (e^r \cos(r) - e^r \sin(r) - e^r \sin(r) - e^r \cos(r), e^r \sin(r) \\ &\quad + e^r \cos(r) + e^r \cos(r) - e^r \sin(r)) \\ &= e^r (-2 \sin(r), 2 \cos(r)). \end{aligned}$$

Agora vamos calcular a curvatura $k(r)$. Primeiro iremos determinar $|\alpha'(r)|$. Assim

$$\begin{aligned} |\alpha'(r)| &= \sqrt{(e^r)^2[(\cos(r) - \sin(r))^2 + (\sin(r) + \cos(r))^2]} \\ &= \sqrt{(e^r)^2[2]} \\ &= e^r \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Agora iremos determinar $-x'' \cdot y'$ e $x' \cdot y''$. Logo

$$\begin{aligned} -x'' \cdot y' &= 2 \cdot e^r \sin(r)(e^r \sin(r) + e^r \cos(r)) \\ &= 2 \cdot e^2 r \sin^2(r) + 2e^2 r \sin(r) \cos(r), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x' \cdot y'' &= (e^r \cos(r) - e^r \sin(r)) \cdot (2e^r \cos(r)) \\ &= 2e^{2r} \cos^2(r) - 2e^{2r} \sin(r) \cos(r). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} -x'' \cdot y' + x' \cdot y'' &= 2 \cdot e^{2r} \sin^2(r) + 2e^{2r} \sin(r) \cos(r) \\ &+ 2e^{2r} \cos^2(r) - 2e^{2r} \sin(r) \cos(r) \\ &= 2 \cdot e^{2r} \sin^2(r) + 2e^{2r} \cos^2(r) \\ &= 2 \cdot e^{2r} (\sin^2(r) + \cos^2(r)) \\ &= 2e^{2r}. \end{aligned}$$

Então, a curvatura é dada por:

$$\begin{aligned} k(r) &= \frac{-x'' \cdot y' + x' \cdot y''}{(|\alpha'(r)|)^3} \\ &= \frac{2e^{2r}}{(e^r \sqrt{2})^3} \\ &= \frac{2e^{2r}}{e^{3r} \sqrt{8}} \\ &= \frac{2e^{2r}}{2e^{3r} \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{e^r \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

1.1.6 Teorema Fundamental das Curvas Planas

A seguir, determinaremos o resultado mais importante sobre as curvas planas. Nessa seção, faremos a demonstração deste resultado para que tenhamos uma visão mais clara quando tratarmos das curvas no espaço.

Teorema 1.22. *[Teorema Fundamental das Curvas Planas]. Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma única curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$. A curva $\alpha(s)$ é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 . Mais ainda, se duas*

curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então elas diferem por sua posição no plano.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos a existência e unicidade da curva α . Consideremos $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s)ds$, onde $s_0 \in I$ é fixo. Fixando o ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$\begin{aligned}x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda)ds, \\y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(s) + \lambda)ds.\end{aligned}$$

Vamos verificar que a curva α assim definida está parametrizada pelo comprimento de arco s e sua curvatura é $k(s)$. Como o referencial de Frenet é

$$\begin{aligned}t(s) &= (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)), \\n(s) &= (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)),\end{aligned}$$

temos que $|\alpha'(s)| = 1$ e a curvatura de α é dada por $\langle t'(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s)$. ?
 $k(s)?n(s),n(s) ? k(s) n(s),n(s) ? k(s)$

Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$. Segue das equações de Frenet que

$$(x'', y'') = k(-y', x'),$$

isto é, $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem as equações

$$\begin{aligned}x'' &= -ky', \\y'' &= -kx'.$$

Portanto, segue do teorema da unicidade de solução do sistema de equações diferenciais que, fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, a curva α é única (veja [12]).

Agora, provaremos que se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então elas diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação

T em \mathbb{R}^2 tal que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

Sejam α e β duas curvas que têm a mesma curvatura. Fixado s_0 , existe uma rotação L e uma translação T de \mathbb{R}^2 tal que a curvatura $\bar{\alpha} = L \circ T \circ \beta$ satisfaz $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$. Segue da demonstração anterior que $\bar{\alpha}' \equiv \alpha'$. Portanto, $\bar{\alpha} \equiv \alpha$. Portanto, $\alpha = L \circ T \circ \beta$. \square

Portanto, podemos concluir do Teorema 1.22 que toda curva diferenciável plana, a menos de um movimento rígido, é determinada pela sua curvatura.

1.2 Curvas no Espaço

Nesta seção, vamos generalizar a noção de curvas. Trataremos das curvas no espaço, ou seja, o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Vamos perceber que muitos conceitos básicos das curvas no espaço serão análogos aos das curvas no plano.

As definições e resultados desta seção podem ser encontradas em Tenenblat (veja em [27]).

1.2.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Definição 1.23. Uma curva parametrizada diferenciável de \mathbb{R}^3 é uma aplicação α , diferenciável (de classe C^∞), de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.24. A aplicação $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$ é a hélice circular. O traço desta curva está contida no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

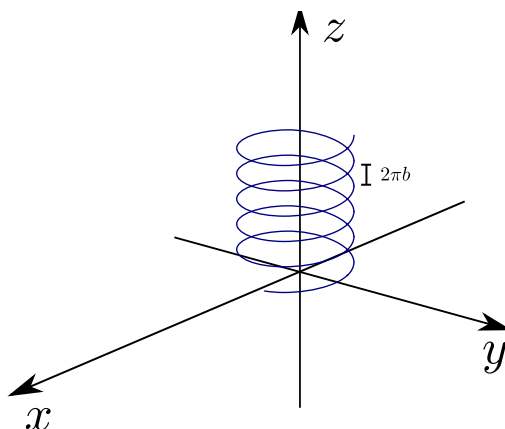


Figura 1.13: Hélice

A hélice será estudada na seção 2.3.

Exemplo 1.25. Seja a aplicação $\alpha(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$, $t \in \mathbb{R}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, pois:

$$\alpha'(t) = \left(-\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 |\alpha'(t)| &= \sqrt{\left(-\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} + \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{1} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

A definição de comprimento de arco é análogo para o espaço.

Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita plana se existe um plano de \mathbb{R}^3 que contém $\alpha(I)$.

1.2.2 Vetor Tangente, Curva Regular e Mudança de Parâmetro

As noções de vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetro para curvas no espaço são iguais aos das curvas planas. Por este motivo, seremos breves.

Definição 1.26. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em $t \in I$ é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A curva α é regular se para todo $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. A reta tangente à curva regular α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é, a reta dada pela função $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0)$, $r \in \mathbb{R}$.

Se a curva $\alpha(t)$ descreve o movimento de uma partícula em função do tempo, então $\alpha'(t)$ é o vetor velocidade de α no ponto $\alpha(t)$ e a norma do vetor $|\alpha'(t)|$ nos fornece o módulo da velocidade da partícula no ponto.

Definição 1.27. Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável C^∞ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula

em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço de α , chamada reparametrização de α por h . A função h é a mudança de parâmetro.

Exemplo 1.28. A curva

$$\beta(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), s \in \mathbb{R},$$

é reparametrização da hélice circular.

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t),$$

pela mudança de parâmetro $h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, s \in \mathbb{R}$.

Definição 1.29. Seja $\alpha(t), t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular de \mathbb{R}^3 . O comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é dado por: $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$ e a função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 é:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt.$$

Definição 1.30. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 1.31. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Como nas curvas planas, toda curva regular no espaço admite uma reparametrização pelo parâmetro comprimento de arco.

Proposição 1.32. Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento do arco de α a partir de t_0 . Então, existe a função inversa h de s ,

definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 1.33. Seja a aplicação $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$.

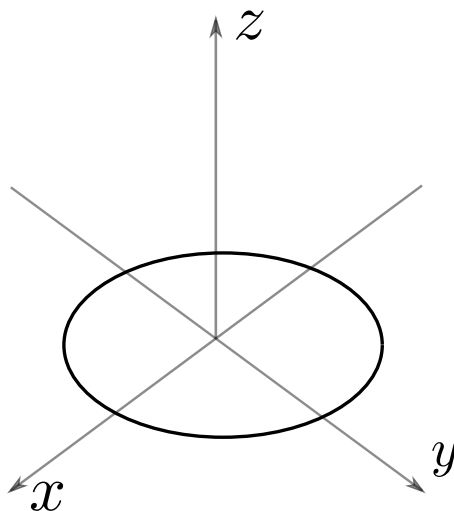


Figura 1.14: Circunferência no plano

O vetor tangente $\alpha'(t)$ é dado por

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0).$$

O módulo do vetor tangente é

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha(t)$ é parametrizada pelo comprimento de arco.

1.2.3 Teoria Local das Curvas no Espaço: Fórmulas de Frenet

A partir das definições acima, vamos considerar nas próximas seções, apenas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco.

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A velocidade com que as retas tangentes mudam de direção:

Definição 1.34. Se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é o número real $k(s) = |\alpha''(s)|$.

Proposição 1.35. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e só se, $k(s) = |\alpha''(s)| = 0$, para todo $s \in I$.

A orientação de uma curva corresponde ao sentido do percurso de seu traço. Em uma reparametrização $\beta = \alpha \circ h$, α e β têm a mesma orientação se h é crescente e orientações opostas se h é decrescente.

Definição 1.36. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$ é denominado vetor normal a α em s . A reta normal a α em $s_0 \in I$ é a reta passa por $\alpha(s_0)$ na direção do vetor normal $n(s_0)$.

Como $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{t'(s)}{k(s)}$, portanto $t'(s) = k(s)n(s)$. Denotando por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$, temos que $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortonormais e $t'(s) = k(s)n(s)$.

Definição 1.37. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é $b(s) = t(s) \times n(s)$. O referencial ortonormal $t(s), n(s), b(s)$ é o triedro de Frenet da curva α em s .

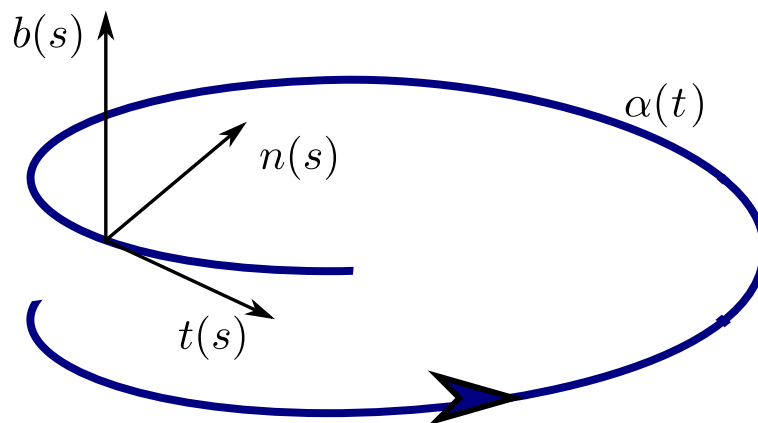


Figura 1.15: Triedro de Frenet

Definição 1.38. O número real $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é denominado *torção da curvatura* em s .

Exemplo 1.39. Vamos obter o *triedro de Frenet*, a curvatura e a torção da hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco, da aplicação:

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$s \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$ é uma constante, e $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. O vetor tangente é dado por

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right),$$

que possui módulo 1.

Para determinar a curvatura, temos que calcular a derivada do vetor tangente, que é dada por

$$\alpha''(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k(s) &= |\alpha''(s)| \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Calculando o vetor normal:

$$\begin{aligned} n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \\ &= \frac{\frac{-a}{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)}{\frac{a}{a^2 + b^2}} \\ &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

O vetor binormal é dado por

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \times n(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right). \end{aligned}$$

Consequentemente, a derivada do vetor binormal é

$$b'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Portanto a torção é dada por

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \langle b'(s), n(s) \rangle \\ &= -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Definição 1.40. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, e tal que $k(s) > 0$, para todo $s \in I$, então o triedro de Frenet é definido por:

$$\begin{cases} t(s) = \alpha'(s), \\ n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}, \\ b(s) = t(s) \times n(s). \end{cases}$$

E satisfaz as equações:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\ b'(s) = \tau(s)n(s). \end{cases}$$

Que são denominadas *fórmulas de Frenet*.

Proposição 1.41. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, isto é, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$,

para todo $t \in I$. Sejam $k(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em $s \in J$, então:

$$k(s(t)) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3},$$

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

A próxima proposição é muito útil quando queremos determinar se uma curva é plana.

Proposição 1.42. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de curvatura não-nula. Então α é uma curva plana se, e só se, $\tau \equiv 0$.

Definição 1.43. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice se existe um vetor unitário v que forma um ângulo constante com $\alpha'(t)$, para todo $t \in I$, isto é,

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|}$$

é constante.

Em seguida, apresentaremos um resultado que caracteriza a hélice.

Proposição 1.44. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não-nulos. Então, α é uma hélice se, e só se, $\frac{k}{\tau}$ é constante.

Demonstração: Podemos supor α parametrizada pelo comprimento de arco. Se α é uma hélice, então existe um vetor unitário v tal que $\langle \alpha'(s), v \rangle$ é constante. Portanto, $\langle \alpha''(s), v \rangle = 0$, isto é, $k(s)\langle n(s), v \rangle = 0$. Como $k(s) \neq 0$, segue-se que v pertence ao plano determinado por $t(s)$ e $b(s)$, para cada $s \in I$. Então seja

$$v = \cos \theta(s)t(s) + \sin \theta(s)b(s).$$

Derivando e usando as fórmulas de Frenet, obtemos

$$0 = -\sin \theta(s)\theta'(s)t(s) + (k(s)\cos \theta(s) + \tau(s)\sin \theta(s))n(s) + \cos \theta(s)\theta'(s)b(s).$$

Portanto, $\forall s \in I$,

$$\begin{aligned}\sin \theta(s) \theta'(s) &= 0, \\ \cos \theta(s) \theta'(s) &= 0, \\ k(s) \cos \theta(s) + \tau(s) \sin \theta(s) &= 0.\end{aligned}$$

As duas primeiras equações determinam $\theta'(s) = 0$, para todo $s \in I$. Portanto, $\theta(s)$ é constante. Além disso, a constante $\cos \theta$ é não-nula, pois caso contrário, teríamos $\tau(s) = 0$, o que contradiz a hipótese. Segue da terceira igualdade que $\frac{k}{\tau}$ é constante. Reciprocamente, se $\frac{k}{\tau}$ é constante, fixemos θ tal que $\tan(\theta) = -\frac{k}{\tau}$. Então,

$$v = \cos(\theta)t(s) + \sin(\theta)b(s)$$

é um vetor unitário constante e para todo $s \in I$, $\langle t(s), v \rangle = \cos(\theta)$ é constante, conforme [27]. Portanto, α é uma hélice. \square

Exemplo 1.45. Seja a aplicação $\alpha(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos nesse exemplo que as definições para uma curva parametrizada nos levam aos mesmos resultados de uma curva não parametrizada pelo comprimento de arco.

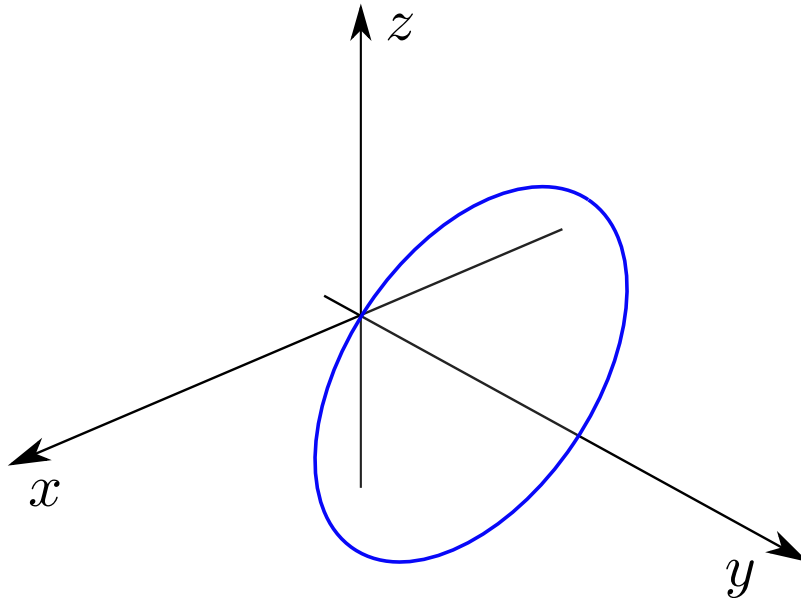


Figura 1.16: Traço da aplicação $\alpha(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t)$

Caso 1: A curva não parametrizada pelo comprimento de arco:

Vamos determinar primeiramente as derivadas de 1ª ordem (vetor tangente), 2ª ordem e 3ª ordem de $\alpha(t)$.

$$\alpha'(t) = (-4 \sin t, -5 \cos t, 3 \sin t),$$

$$\alpha''(t) = (-4 \cos t, 5 \sin t, 3 \cos t).$$

$$\alpha'''(t) = (4 \sin t, 5 \cos t, -3 \sin t).$$

Determinando o módulo do vetor tangente, obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (-5 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2}, \\ &= \sqrt{16 \sin^2 t + 25 \cos^2 t + 9 \sin^2 t}, \\ &= \sqrt{25(\sin^2 t + \cos^2 t)}, \\ &= \sqrt{25}, \\ &= 5. \end{aligned}$$

O produto vetorial de $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ é:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 \sin t & -5 \cos t & 3 \sin t \\ -4 \cos t & 5 \sin t & 3 \cos t \end{vmatrix} \\ &= (-15 \cos^2 t - 15 \sin^2 t)\vec{i} - 0\vec{j} + (-20 \sin^2 t - 20 \cos^2 t)\vec{k} \\ &= (-15(\cos^2 t + \sin^2 t))\vec{i} + (-20(\sin^2 t + \cos^2 t))\vec{k} \\ &= -15\vec{i} - 20\vec{k} \\ &= (-15, 0, -20). \end{aligned}$$

Calculando o módulo do produto vetorial acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |\alpha'(t) \times \alpha''(t)| &= \sqrt{(-15)^2 + 0^2 + (-20)^2} \\ &= \sqrt{625} \\ &= 25. \end{aligned}$$

A curvatura de α é dada por:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \\ &= \frac{25}{5^3} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Para calcular a torção, calcularemos primeiramente o produto interno, uma vez que $\tau(t) = \langle \beta'(t) \times \beta'''(t), \beta''(t) \rangle$. Assim,

$$\tau(t) = \begin{vmatrix} -4 \sin t & -5 \cos t & 3 \sin t \\ 4 \sin t & 5 \cos t & -3 \sin t \\ -4 \cos t & 5 \sin t & 3 \cos t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -4 \sin(t)(15 \cos^2(t) + (15 \sin^2(t)) + 5 \cos(t)(12 \sin(t) \cos(t) - 12 \sin(t) \cos(t)) + \\ &+ 3 \sin(t)(20 \sin^2(t) + (20 \cos^2(t))) \\ &= -4 \sin(t)(15) + 5 \cos(t)(0) + 3 \sin(t)(20) \\ &= -60 \sin(t) + 60 \sin(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

Caso 2: A curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

Determinando uma função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 .

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^t 5 dt \\ &= [5 \cdot t] - [5 \cdot 0] \\ &= 5t. \end{aligned}$$

Portanto, a reparametrização pelo comprimento de arco da curva α é dada por

$$\beta(s) = \left(4 \cos \frac{s}{5}, 5 - 5 \sin \frac{s}{5}, -3 \cos \frac{s}{5} \right).$$

As derivadas de $\beta'(s)$, $\beta''(s)$ e $\beta'''(s)$ são dadas por

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \left(-\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \sin \frac{s}{5} \right), \\ \beta''(s) &= \left(-\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5}, \frac{1}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{25} \cos \frac{s}{5} \right), \\ \beta'''(s) &= \left(\frac{4}{125} \sin \frac{s}{5}, \frac{1}{25} \cos \frac{s}{5}, -\frac{3}{125} \sin \frac{s}{5} \right).\end{aligned}$$

Calculando o módulo de $|\beta'(s)|$, veremos que de fato β está parametrizada pelo comprimento de arco.

$$\begin{aligned}|\beta'(s)| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}\right)^2 + \left(-\cos \frac{s}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16}{25} \sin^2(s) + \cos^2(s) + \frac{9}{25} \sin^2(s)\right)} \\ &= \sqrt{\frac{16 \sin^2(s) + 25 \cos^2(s) + 9 \sin^2(s)}{25}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Calculando a curvatura $k(s)$:

$$\begin{aligned}k(s) = |\beta''(s)| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} \sin \frac{s}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{25} \cos \frac{s}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{625} \cos^2 \frac{s}{5} + \frac{1}{25} \sin^2 \frac{s}{5} + \frac{9}{625} \cos^2 \frac{s}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{625} \cos^2 \frac{s}{5} + \frac{1}{25} \sin^2 \frac{s}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{25} (\cos^2 \frac{s}{5} + \sin^2 \frac{s}{5})} \\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Determinando o Triedro de Frenet. O vetor tangente $\beta'(s)$ é dado por

$$\beta'(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \sin \frac{s}{5} \right).$$

O vetor normal é

$$\begin{aligned} n(s) &= \frac{\beta''(s)}{|\beta''(s)|} \\ &= \frac{\left(-\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5}, \frac{1}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{25} \cos \frac{s}{5} \right)}{\frac{1}{5}} \\ &= \left(-\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5} \right). \end{aligned}$$

Temos que o vetor binormal $b(s) = t(s) \times n(s)$ é dado por:

$$\begin{aligned} b(s) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5} & -\cos \frac{s}{5} & \frac{3}{5} \sin \frac{s}{5} \\ -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5} & \sin \frac{s}{5} & \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5} \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left(-\frac{3}{5} \cos^2 \frac{s}{5} - \frac{3}{5} \sin^2 \frac{s}{5} \right) - \vec{j} \left(-\frac{12}{25} \cos \frac{s}{5} \cdot \sin \frac{s}{5} + \frac{12}{25} \cos \frac{s}{5} \cdot \sin \frac{s}{5} \right) \\ &\quad + \vec{k} \left(-\frac{4}{5} \sin^2 \frac{s}{5} - \frac{4}{5} \cos^2 \frac{s}{5} \right) \\ &= \vec{i} \left(-\frac{3}{5} \left(\cos^2 \frac{s}{5} + \sin^2 \frac{s}{5} \right) \right) + \vec{k} \left(-\frac{4}{5} \left(\sin^2 \frac{s}{5} + \cos^2 \frac{s}{5} \right) \right) \\ &= \vec{i} \left(-\frac{3}{5} \right) + \vec{k} \left(-\frac{4}{5} \right) \\ &= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right). \end{aligned}$$

A torção é dada por $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$. Como $b'(s) = (0, 0, 0)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \left\langle (0, 0, 0), \left(-\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5} \right) \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Isto é, $\tau(s) = 0$. Portanto, os resultados obtidos para a curva parametrizada pelo comprimento de arco, e não parametrizada são os mesmos.

O referencial de Frenet, curvatura e torção estudados nas preliminares, distinguem-se sobre os seguintes aspectos:

Caracterizar a curva. Sabendo que, através da torção de uma curva, podemos determinar quando curva é plana ou não;

Se um corpo estiver sobre uma superfície, descrevendo uma trajetória curva, podemos identificar a reação sofrida pelo corpo sobre o ponto da superfície em cada instante. A cicloide é um exemplo dessa situação;

A curvatura indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção;

Entretanto, o referencial de Frenet dá o comportamento do movimento de uma curva no plano e espaço, em cada instante.

Observação: *É muito importante ressaltar que, assim como para as curvas no plano, o Teorema fundamental das curvas no espaço diz que, a menos de um movimento rígido, uma curva no espaço é determinada pela torção e pela curvatura.*

Capítulo 2

Curvas e Suas Aplicações

Nesse capítulo, iremos ver algumas aplicações da cicloide, da espiral de Arquimedes e da hélice. Obteremos as equações paramétricas e cartesianas, bem como a curvatura, torção e as fórmulas de Frenet. Também iremos determinar o comprimento de arco e área.

Iremos usar conceitos de geometria diferencial para os cálculos a seguir.

2.1 Cicloide

A cicloide é a curva traçada por uma partícula qualquer, fixa numa circunferência que rola sem deslizar, ao longo de uma reta. Esta curva ficou conhecida por “Helena de geometria” uma vez que, tal como a “Helena de Tróia” foi cobiçada e disputada por vários homens, também a cicloide gerou várias disputas na comunidade matemática. Joahnn Bernoulli chegou mesmo a chamar-lhe “*curva fatídica do século XVII*” (veja [28]).

A curva cicloide, segundo Medeiros [17], foi arduamente estudada durante o século *XVII* e que, neste contexto, contribuiu para a construção do Cálculo Diferencial e Integral hoje conhecido.

No início do estudo das equações diferenciais, os irmãos Bernoulli se depararam com a cicloide quando se propuseram a resolver o problema da braquistócrona, que fora proposta por Christiaan Huygens quando este estudou o pêndulo do relógio (ver [28]).

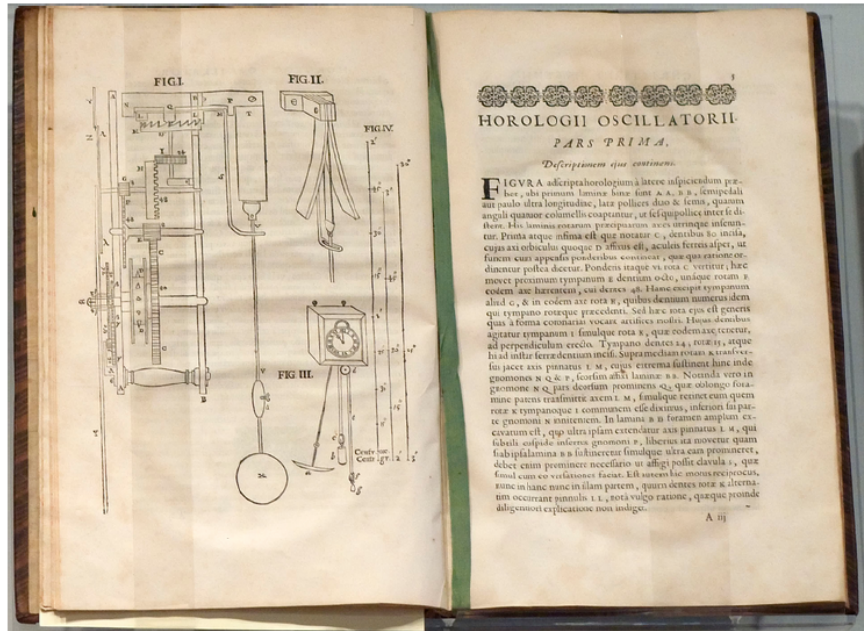


Figura 2.1: Relógio de pêndulo por Huygens em seu livro Horologium [28]

A cicloide é de fundamental importância na arquitetura. Conforme Venceslau [28], a cicloide pode ser utilizada na construção de prédios com boa reflexão da luz natural quando associada a uma plataforma de luz na forma adequada. A utilização da iluminação natural na construção civil é uma forma de evitar danos ao meio ambiente. Para possibilitar uma maior incidência de luz, foi pensada uma cúpula com uma abertura acompanhada de uma prateleira de luz, que deveriam possuir formas adequadas para uma melhor otimização.



Figura 2.2: Construções com formato cicloide [28]

De acordo com Venceslau [28], o skate vertical é uma modalidade praticada em uma pista que apresenta a forma de uma curva cicloide, de acordo com a figura abaixo.



Figura 2.3: Pista de Skate [28]

Nas próximas seções iremos tratar das propriedades físicas importantes da cicloide (braquistócrona e a Tautócrona). Também iremos determinar a parametrização, comprimento de arco e à área abaixo da curva da cicloide.

2.1.1 Braquistócrona a Curva de Menor Tempo

A braquistócrona foi proposta por Bernoulli como um desafio aos matemáticos da Europa. O matemático suíço procurava descobrir qual trajetória seria a mais rápida partindo-se de um ponto A alcançando um ponto B em um nível mais baixo e não na mesma vertical.

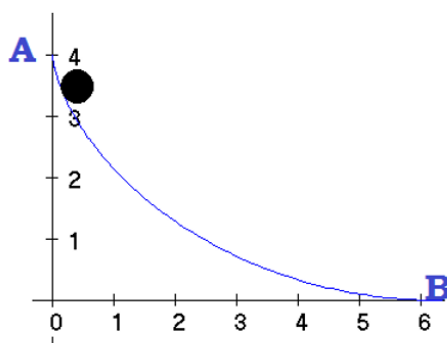


Figura 2.4: Cicloide [28]

Dentre todas as possíveis trajetórias ligando os dois pontos A e B situados em níveis diferentes onde uma determinada partícula, sujeita apenas à gravidade, levaria o menor tempo para alcançar o nível B mais baixo, a encontrada foi a cicloide. Portanto, a curva que atende este quesito é conhecida como Braquistócrona [3].

Braquistócrona é a curva que um ponto percorre quando este se desloca de uma posição a outra em declividade, no menor tempo possível, sendo nula a velocidade inicial, sujeito à ação da gravidade apenas.

Na figura abaixo, podemos ver três traços de curvas: Reta, círculo e a cicloide. Apesar da reta ser a menor distância, a Braquistócrona é a curva de menor tempo. A prova matemática da Braquistócrona pode ser encontrada, por exemplo, em [3].



Figura 2.5: Braquistócrona [24]

O desafio proposto por Bernoulli tratava-se de encontrar, qual deveria ser a forma de uma rampa, para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, faça o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória [3]. O desafio foi encaminhado por carta aos matemáticos mais brilhantes do mundo da época dando-lhes um prazo de seis meses, depois prorrogados por mais quatro meses para que o problema fosse solucionado [3]. Além do próprio Johann Bernoulli (1667 – 1748), outros cinco matemáticos apresentaram soluções originais para o problema: Sir Isaac Newton (1643 – 1727); Jacques Bernoulli (1654 – 1705); Gottfried

Wilhelm Leibniz (1646 – 1716); EhrenfriedWalther von Tschirnhaus (1651 – 1708) e Guillaume de L'Hôpital (1661 – 1704).



Figura 2.6: Johann Bernoulli, Sir Isaac Newton, Jacques Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus e Guillaume de L'Hôpital [3]

2.1.2 Tautócrona a Curva de Mesmo Tempo

Tautócrona (também chamada isócrona) é a trajetória que uma partícula percorre sempre no mesmo tempo, independentemente do seu ponto inicial. Esta partícula está sujeita apenas a ação da gravidade [3].



Figura 2.7: Tautócrona [24]

O problema da tautócrona foi estudado e solucionado por Christiaan Huygens, no ano de 1659. O matemático demonstrou geometricamente em sua obra “*Horologium oscillatorum*” que a curva (tautócrona) era uma cicloide. A solução por ele encontrada foi depois usada para resolver o problema da curva braquistócrona. Bernoulli (1667 – 1748) solucionou o problema usando cálculo em um trabalho onde aparece o termo integral pela primeira vez. Anos depois, outros dois matemáticos, Lagrange (1736 – 1813) e Euler (1707 – 1783), deram uma solução analítica ao problema. A tautócrona é uma importante propriedade da cicloide. A demonstração matemática da Tautócrona encontra-se descrita também em [3].

2.1.3 Parametrização da Cicloide

A cicloide é a curva gerada por um ponto fixo P da circunferência quando este “gira” em torno de seu centro sobre uma reta sem deslizar (veja [4, 8, 27]). Galileu (1564–1642) estudou a curva e tentou encontrar sua área usando pedaços de metal cortados na forma da cicloide. Torricelli (1608 – 1647), Fermat (1607 – 1665) e Descartes (1596 – 1650) também encontraram rigorosamente sua área.

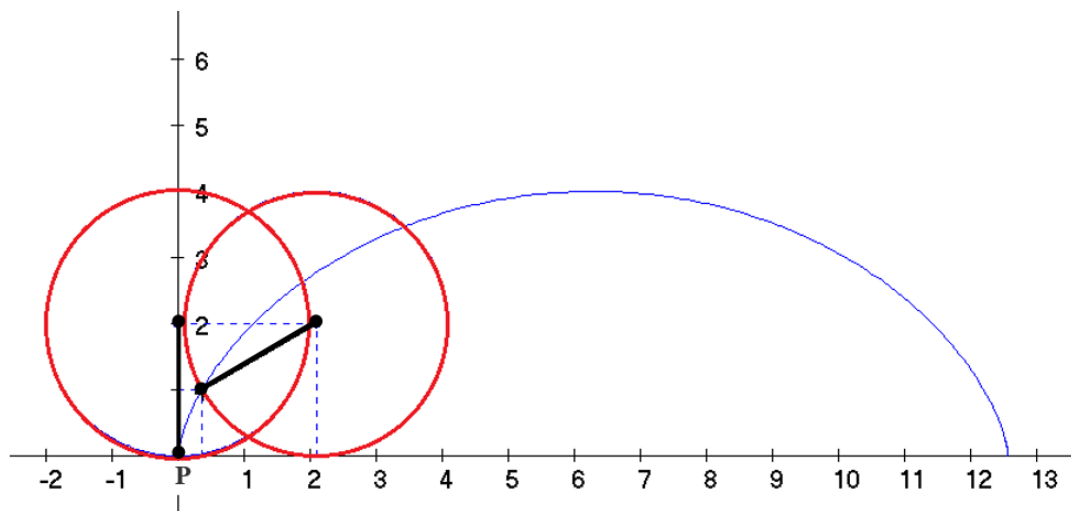


Figura 2.8: Cicloide

A curva cicloide é a trajetória descrita por um ponto $P = (x, y)$ de \mathbb{R}^2 , localizado no círculo de raio r e centro O , que gira ao longo do eixo O_x , sem escorregar e com aceleração escalar constante (veja também [22]).

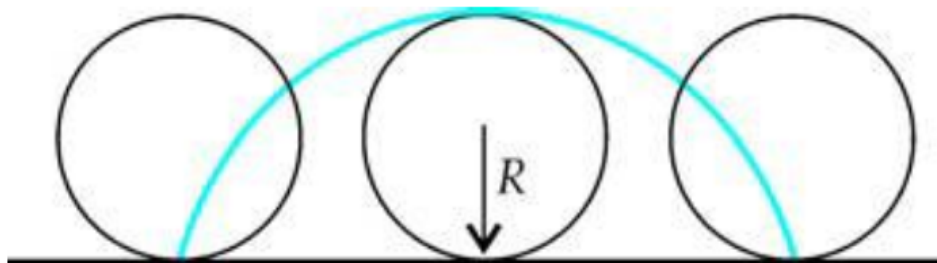
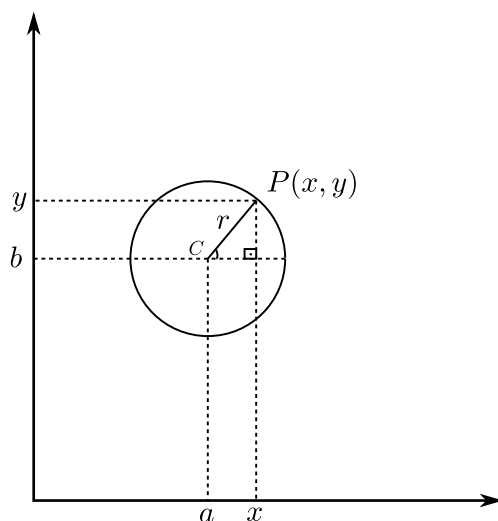


Figura 2.9: Construção da Cicloide [3]

De acordo com Reis e Silva [21], vamos desenvolver a parametrização de uma circunferência de raio r e centro $C = (a, b)$.

Figura 2.10: circunferência de raio r e centro $C = (a, b)$

Da figura acima, podemos tirar do triângulo retângulo, as relações trigonométricas para as funções seno e cosseno:

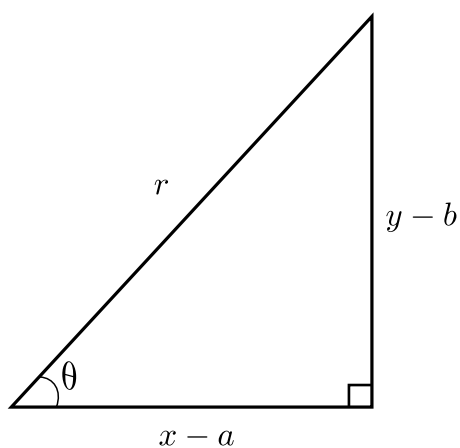


Figura 2.11: Triângulo retângulo

Observando a figura acima e considerando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, temos:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x - a}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y - b}{r} \end{cases}$$

portanto,

$$\begin{cases} x - a = \cos(\theta)r \\ y - b = \sin(\theta)r, \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} x = a + r \cos(\theta) \\ y = b + r \sin(\theta). \end{cases}$$

Concluimos a parametrização da circunferência raio r e centro $C = (a, b)$.

Agora vamos considerar a parametrização de uma cicloide gerada pela rotação da circunferência de raio r inicialmente centrada em $C = (0, r)$. Esta irá girar no sentido horário, iniciando em $-\pi/2$. O centro da circunferência se deslocará mantendo sua ordenada constante e igual ao seu raio:

$$b(t) = r.$$

Já sua abscissa se deslocará $2\pi r$ após a circunferência completar uma volta em torno do seu centro, sem deslizar, sobre o eixo Ox.

Observando a figura abaixo:

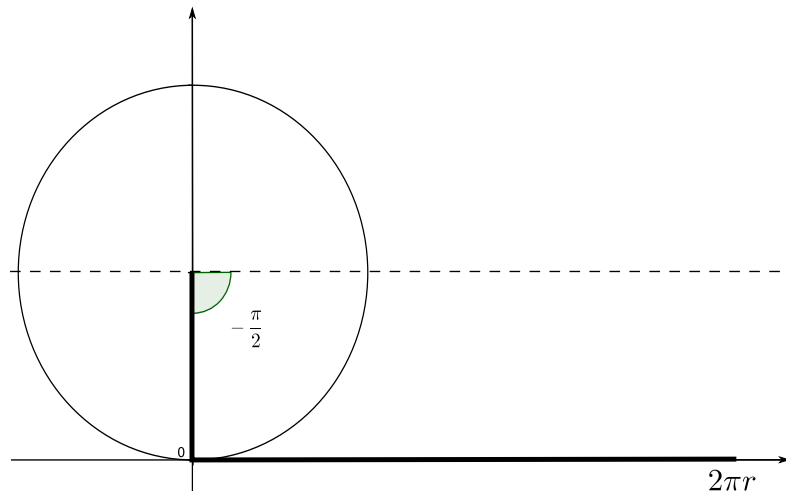


Figura 2.12: Circunferência de raio r e centro $C = (0, r)$

Para o movimento do centro ao longo da horizontal, devemos observar que, enquanto

o ângulo move 2π , a circunferência ira se deslocar $2\pi r$, conforme a proporção abaixo:

$$\begin{aligned} 2\pi &\rightarrow 2\pi r \\ t &\rightarrow \alpha(t), \end{aligned}$$

portanto, temos que $\alpha(t) = rt$.

Para iniciarmos o giro a partir de -90° e no sentido horário tomemos $\theta = -\frac{\pi}{2} - t$. Substituindo t na equação paramétrica da circunferência de $C = (a, b)$, obtemos:

$$\begin{cases} x = a(t) + r \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) \\ y = b(t) + r \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right). \end{cases}$$

Pelas identidades trigonométricas, temos:

$$\begin{cases} x = a(t) - r \sin(t) \\ y = b(t) - r \cos(t). \end{cases}$$

Lembrando que a abscissa é $a(t) = rt$ e a ordenada do centro da circunferência fica constante igual a r , podemos ver que

$$\begin{cases} x = rt - r \sin(t) \\ y = r - r \cos(t). \end{cases}$$

Portanto, concluímos a equação paramétrica da cicloide:

$$\begin{cases} x = r[t - \sin(t)] \\ y = r[1 - \cos(t)], \end{cases}$$

ou simplesmente, $\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.

2.1.4 Equação Cartesiana da Cicloide

Sabemos que a equação paramétrica da cicloide é $\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$,

$t \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$, Assim,

$$\begin{cases} x = r[t - \sin(t)] \\ y = r[1 - \cos(t)]. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \frac{x}{r} = t - \sin(t) \\ \frac{y}{r} = 1 - \cos(t). \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \sin(t) = t - \frac{x}{r} \\ \cos(t) = 1 - \frac{y}{r}. \end{cases}$$

Daí obtemos que,

$$\begin{cases} \sin(t) = \frac{rt - x}{r} \\ \cos(t) = \frac{r - y}{r}. \end{cases}$$

Elevando as igualdades ao quadrado e somando termo a termo, temos

$$\begin{cases} (\sin(t))^2 = \left(\frac{rt - x}{r}\right)^2 \\ (\cos(t))^2 = \left(\frac{r - y}{r}\right)^2, \end{cases}$$

agora somando, temos que

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = \left(\frac{rt - x}{r}\right)^2 + \left(\frac{r - y}{r}\right)^2,$$

logo

$$1 = \frac{(x - rt)^2}{r^2} + \frac{(y - r)^2}{r^2},$$

portanto

$$r^2 = (x - rt)^2 + (y - r)^2.$$

Lembrando que $\cos(t) = 1 - \frac{y}{r}$, temos $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)$. Substituindo na expressão acima, obtemos:

$$r^2 = \left(x - r \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)\right)^2 + (y - r)^2.$$

Que é denominada a equação cartesiana da cicloide.

2.1.5 Comprimento de Arco da cicloide

O comprimento de uma curva é dada pela fórmula:

$$C = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

para todo $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ (veja [4, 8, 27]).

Da figura abaixo, determinaremos o comprimento de seu arco.

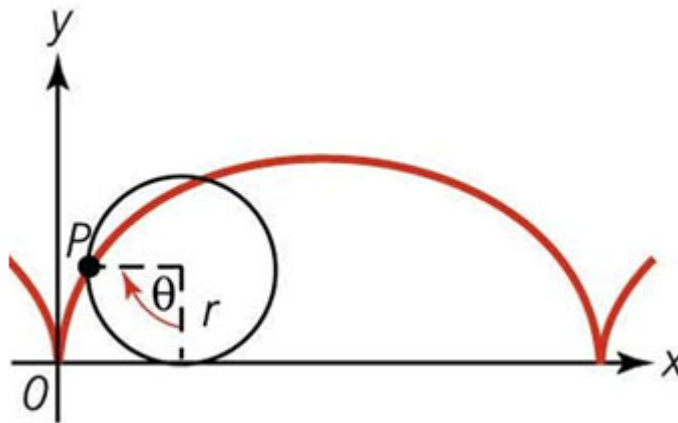


Figura 2.13: Comprimento da cicloide

Sendo, $\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, a primeira derivada de $\alpha'(t)$ é:

$$\alpha'(t) = r(1 - \cos(t), \sin(t)).$$

Determinando o módulo de $|\alpha'(t)|$:

$$\begin{aligned}
 |\alpha'(t)| &= \sqrt{r^2[(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2]} \\
 &= r\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\
 &= r\sqrt{1 - 2\cos(t) + 1} \\
 &= r\sqrt{2(1 - \cos(t))} \\
 &= r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)}.
 \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula do comprimento da circunferência e considerando $0 \leq t \leq 2\pi$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)} dt \\
 &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt \\
 &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt.
 \end{aligned}$$

Das relações trigonométricas, sabemos que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Fazendo $2x = t$ teremos:

$$\begin{aligned}
 \cos(t) &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\
 &= 1 - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\
 &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Como,

$$2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos(t),$$

temos que $1 - \cos(t) = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, obtemos:

$$\begin{aligned} C &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= r\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Fazendo $k = \frac{t}{2}$, segue que $\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} C &= 2r \int_0^{\pi} \sin(k) 2dk \\ &= 4r \int_0^{\pi} \sin(k) dk \\ &= -4r \cos(k) \Big|_0^{\pi} \\ &= [-4r \cos(\pi)] - [-4r \cos(0)] \\ &= [-4r \cdot (-1)] - [-4r \cdot 1] \\ &= 8r. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da cicloide gerada pela rotação de um círculo de raio r em torno do seu centro é dado por $8r$.

2.1.6 Área da Cicloide

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a, b]$. A área determinada pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico $y = f(x)$ é dado por

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

onde $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ (veja [8]).

Sabemos que a equação paramétrica da cicloide é

$$\begin{cases} x(t) = r[t - \sin(t)] \\ y(t) = r[1 - \cos(t)]. \end{cases}$$

Segue que $dx = r(1 - \cos(t))dt$ e, então $y(t) = \frac{dx}{dt}$.

De acordo com [8], temos pela definição de diferencial que

$$dx = \left(\frac{d}{dt}(x(t)) \right) dt,$$

onde

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = r(1 - \cos(t)).$$

Portanto temos que,

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} y(t)r(1 - \cos(t))dt. \end{aligned}$$

Portanto, a área que estamos calculando é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos(t))r(1 - \cos(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos(t))^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))dt \\ &= r^2 [t - 2\sin(t)] \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt. \end{aligned}$$

Pelas relações trigonométricas, temos que

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \right). \end{aligned}$$

Fazendo $u = 2t$, teremos $du = 2dt$ e $dt = \frac{du}{2}$, então:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt &= \int_0^{4\pi} \cos(u) \frac{du}{2} \\ \int_0^{4\pi} \cos(u) \frac{du}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos(u) du \\ \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos(u) du &= \frac{\sin(u)}{2} \Big|_0^{4\pi}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\sin(u)}{2} = \frac{\sin(2t)}{2},$$

temos que $\int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$.

Determinando a área da curva cicloide:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos(t))r(1 - \cos(t)) dt \\
 &= r^2[t - 2\sin(t) + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt] \\
 &= r^2 \left[t - 2\sin(t) + \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} \\
 &= r^2 \left[2\pi - 2\sin(2\pi) + \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{\sin(4\pi)}{2} \right) \right] \\
 &\quad - r^2 \left[0 - 2\sin(0) + \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} \right) \right] \\
 &= r^2 \left[2\pi - 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{0}{2} \right) \right] \\
 &\quad - r^2 \left[0 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \left(0 + \frac{0}{2} \right) \right] \\
 &= r^2[3\pi] - r^2[0] \\
 &= 3\pi r^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, a área da região entre a cicloide e o eixo O_x , gerada pela rotação de um círculo de raio r em torno do seu centro será dada por $3\pi r^2$. Também concluímos que sua área é três vezes maior do que a área da circunferência, conforme figura abaixo.

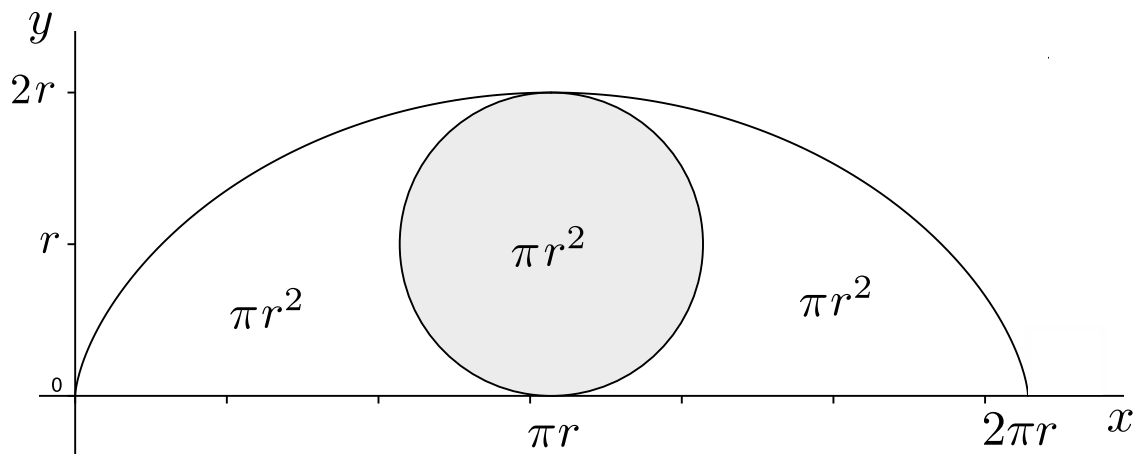


Figura 2.14: Área da cicloide de raio r

2.1.7 Fórmulas de Frenet para a Cicloide

Sabemos que a equação paramétrica da cicloide é $\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Logo, as derivadas $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são dadas por:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= r(1 - \cos(t), \sin(t)) \\ \alpha''(t) &= r(\sin(t), \cos(t)).\end{aligned}$$

Determinando $|\alpha'(t)|$:

$$\begin{aligned}|\alpha'(t)| &= r(1 - \cos(t), \sin(t)) \\ &= \sqrt{r^2(1 - \cos(t))^2 + r^2(\sin(t))^2} \\ &= \sqrt{r^2(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) + r^2(\sin^2(t))} \\ &= \sqrt{r^2(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t))} \\ &= r \cdot \sqrt{1 - 2\cos(t) + 1} \\ &= r \cdot \sqrt{2 - 2\cos(t)} \\ &= r \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))}.\end{aligned}$$

O vetor tangente para as curvas não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco é dado por:

$$\begin{aligned}t(t) &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \\ &= \frac{r(1 - \cos(t), \sin(t))}{r \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(t))}} \cdot (1 - \cos(t), \sin(t)).\end{aligned}$$

O vetor normal é dado por:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \\ &= \frac{r(-\sin(t), 1 - \cos(t))}{r \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(t))}} \cdot (-\sin(t), 1 - \cos(t)).\end{aligned}$$

Sabemos que a curvatura é dado por

$$k(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{(|\alpha'(t)|)^2}.$$

Fazendo os cálculos parciais:

$$\begin{aligned}-x'' \cdot y' &= -r \sin(t) \cdot r \sin(t) \\ &= -r^2 \sin^2(t),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}x' \cdot y'' &= r(1 - \cos(t)) \cdot \cos(t) \\ &= r^2 \cos(t) \cdot (1 - \cos(t)) \\ &= r^2 \cos(t) - r^2 \cos^2(t),\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}-x'' \cdot y' + x' \cdot y'' &= -r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos(t) - r^2 \cos^2(t) \\ &= r^2 \cos(t) - r^2(\sin^2 + \cos^2(t)) \\ &= r^2 \cos(t) - r^2 \\ &= r^2(\cos(t) - 1).\end{aligned}$$

Então, para todo $t \in \mathbb{R} - 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$ a curvatura $k(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \frac{-x'' \cdot y' + x' \cdot y''}{(r \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))})^3} \\
 &= \frac{r^2(\cos(t) - 1)}{(r \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))})^3} \\
 &= \frac{r^2(\cos(t) - 1)}{r^3 \cdot (\sqrt{2(1 - \cos(t))})^2 \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))}} \\
 &= \frac{\cos(t) - 1}{r \cdot 2(1 - \cos(t)) \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))}} \\
 &= \frac{-1}{r \cdot 2 \cdot \sqrt{2(1 - \cos(t))}} \\
 &= \frac{-1}{2\sqrt{2}r \cdot \sqrt{1 - \cos(t)}}.
 \end{aligned}$$

O sinal da curvatura da cicloide depende de sua orientação.

A cicloide não é uma curva regular para $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, pois:

$$\begin{aligned}
 \alpha'(2\pi k) &= r(1 - \cos(2\pi k), \sin(2\pi k)) \\
 \alpha'(2\pi k) &= r(1 - 1, 0), \\
 \alpha'(2\pi k) &= (0, 0).
 \end{aligned}$$

Logo

$$|\alpha'(2\pi k)| = 0.$$

O referencial de Frenet $t(s)$, $n(s)$ é

$$\begin{aligned}
 t'(t) &= k(t)n(t) \\
 n'(t) &= -k(t)t(t), \forall s \in I,
 \end{aligned}$$

Então, para a cicloide $t'(t)$ é:

$$\begin{aligned}
 t'(t) &= k(t)n(t) \\
 &= \frac{-1}{2\sqrt{2r} \cdot \sqrt{1 - \cos(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(t))}} \cdot (-\sin(t), 1 - \cos(t)) \\
 &= \frac{-1}{4r(1 - \cos(t))} \cdot (-\sin(t), 1 - \cos(t)) \\
 &= \left(\frac{\sin(t)}{4r(1 - \cos(t))}, \frac{-1}{4r} \right).
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 n'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{2r} \cdot \sqrt{1 - \cos(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(t))}} \cdot (1 - \cos(t), \sin(t)) \\
 &= \frac{1}{4r(1 - \cos(t))} \cdot (1 - \cos(t), \sin(t)) \\
 &= \left(\frac{1}{4r}, \frac{\sin(t)}{4r(1 - \cos(t))} \right).
 \end{aligned}$$

Na cicloide, percebemos que a ordenada de $t'(t)$ é constante e, que a abscissa de $n'(t)$ é constante também.

2.2 Espiral Arquimedes

De acordo com Holanda [9], uma curva plana é aquela que uma criança pode fazer ao ter um lápis e um papel ao seu alcance. São figuras com único traço sem que o lápis saia do papel.

Nas flores, destaca-se o girassol, a forma como suas sementes estão dispostas formam espirais logarítmicas que tanto curvam para a direita quanto para a esquerda.



Figura 2.15: Sementes do girassol [13]

Em relação à disposição das sementes dos girassóis, Lívio [13] afirma que consiste numa exibição espetacular de espirais cruzadas.

“Quando você olha para um girassol nota padrões espirais tanto horários quanto anti-horários formados pelos flósculos. É evidente que os flósculos crescem de modo a assegurar a mais eficiente divisão de espaço horizontal. A quantidade dessas espirais em geral depende do tamanho do girassol”.

2.2. ESPIRAL ARQUIMEDES CAPÍTULO 2. CURVAS E SUAS APLICAÇÕES

A razão áurea é encontrada em diversas áreas das nossas vidas, em geral relacionamos essa razão a beleza e equilíbrio. A razão áurea é dada por $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,62$ (veja [13]).

Em uma flor com 100 pontos, observa-se que existem 13 espirais viradas para uma direção e 21 para outra, o que nos remete ao número ϕ (veja [10]). No girassol de 100 pontos, como na figura abaixo, mostra essa razão áurea, $\frac{13}{21} \cong \phi$.

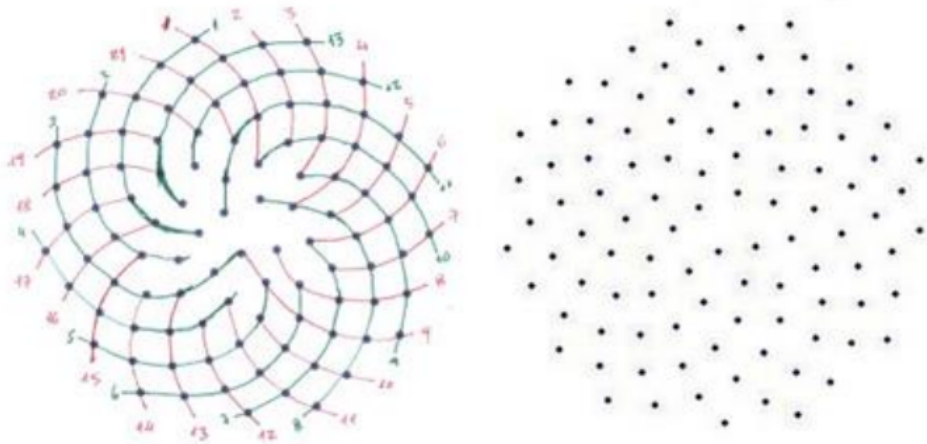


Figura 2.16: Girassol 100 pontos [10]

A espiral de Arquimedes tem uma infinidades de aplicações no mundo real. Compressores de espiral, feitos de duas espirais de Arquimedes do mesmo tamanho intercaladas, são usados para comprimir líquidos e gases (veja [7]).

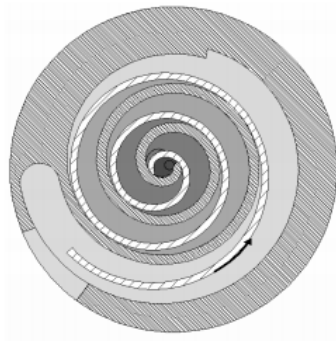


Figura 2.17: Processo de compressão [7]

Provavelmente nenhuma outra curva exerce fascínio maior do que a espiral. Bernoulli a chamava de “spira mirabilis” e a considerava notável pelas propriedades matemáticas que a torna única entre as curvas planas. Ela é utilizada como modelo decorativo favorito, por conta da graciosidade de sua forma. Na natureza ela ocorre mais frequentemente do que qualquer outra curva (veja [24]).



Figura 2.18: Concha [24]

Pedir-se a um paciente que desenhe uma espiral de Arquimedes é uma maneira de quantificar o tremor humano, esta informação ajuda no diagnóstico de enfermidades neurológicas. Operações computacionais matemáticas se tornam mais fáceis e rápidas, tornando possível a análise de aspectos importantes do desenho da espiral. Quando se compara a linha reta obtida por meio de transformação raio-angular da espiral ideal, com a gerada a partir de uma espiral real, desenhada por uma pessoa, é possível detectar irregularidades. Espirais de Arquimedes também são usadas em microbiologia de alimentos para determinar a concentração bacteriana através de uma placa espiral(veja [1]).

Os sulcos das primeiras gravações de disco de vinil formam uma espiral de Arquimedes, fazendo os sulcos igualmente espaçados e maximizando o tempo de gravação que poderia acomodar-se na área do disco [18].



Figura 2.19: Disco de vinil

Um método para a quadratura do círculo, é um problema proposto pelos antigos geômetras gregos consistindo em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo servindo-se somente de uma régua e um compasso em um número finito de etapa, relaxando as limitações estritas no uso de uma régua e um compasso nas demonstrações geométricas da Grécia antiga, faz uso da Espiral de Arquimedes. Também existe um método para trissectar ângulos, um dos problemas clássicos da geometria sobre construções com régua e compasso e consiste em, dado um ângulo qualquer, construir um outro com um terço de sua amplitude baseados no uso desta espiral [18].

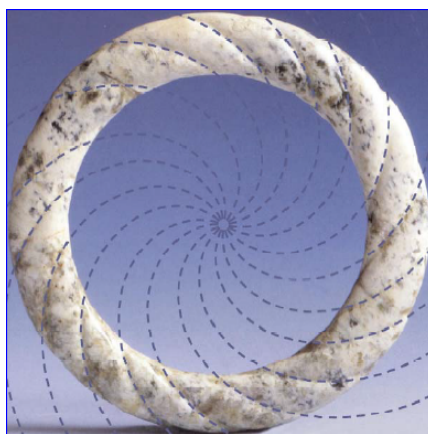


Figura 2.20: Anéis de Jade [19]

As ranhuras espirais, são visivelmente mais uniformes que outros padrões gravados em peças de jade antigas, como a figura acima. Os anéis estudados datam de 550 AC, portanto, 300 anos antes de Arquimedes ter existido, conforme [19].

De acordo com Neto [19], as referências históricas mais antigas a máquinas compostas que inter-convertem movimento linear e rotacional com precisão, veem dos escritos atribuídos a Heron de Alexandria, datados do Primeiro Século DC. Logo, os chineses estariam, aparentemente, meio milênio na frente da Europa nessa tecnologia.

Loxodromia é a linha que, à superfície da Terra, faz um ângulo constante com todos os meridianos. Muito embora não constitua o caminho mais curto entre dois pontos, a loxodromia é o tipo de trajeto mais simples e normalmente empregue em mapas rodoviários ou marítimos, desde que se avistem acidentes geográficos como referência(veja [19]).

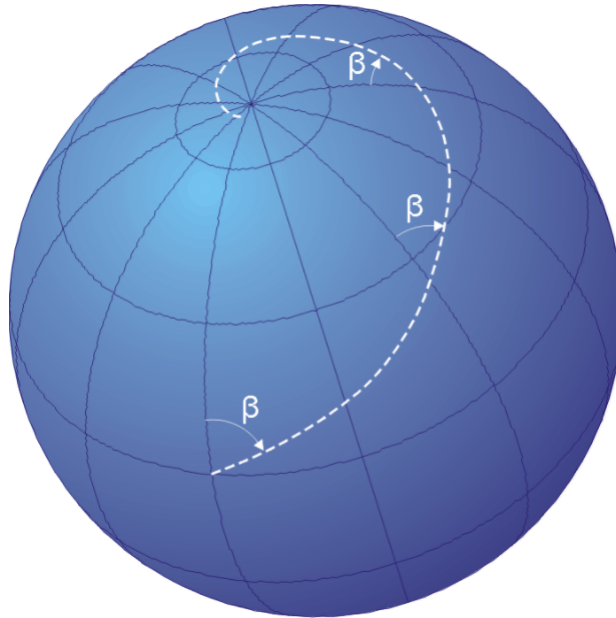


Figura 2.21: Linha loxodrômica [19]

Seguir a loxodromia é como seguir numa rua contornando os quarteirões. A razão está no fato da orientação dos navios e aeronaves se realizar com base nas cartas náuticas, fornecidas por projeções azimutais, bússolas magnéticas e giroscópicas sobre as coordenadas deformadas, que atendem o sentido de orientação da terra plana(veja [19]).

A projeção estereográfica da linha loxodrômica no plano tangente ao polo é a espiral logarítmica. A loxódroma que passa por Campinas, o ângulo de rumo é de 275° [19].

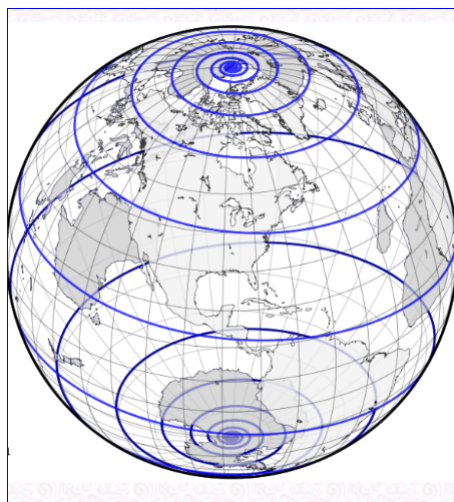


Figura 2.22: Loxódroma [19]

A linha de rumo constante, seguindo a rota loxodrômica não permite a um navio dar a volta ao mundo regressando ao ponto de partida. Pedro Nunes (1502-1578), famoso geógrafo, matemático português, cosmógrafo real, demonstrou em 1546 que a curva percorrida vai se aproximando do pólo, em torno do qual dá infinitas voltas sem nunca chegar a ele(veja [19]).

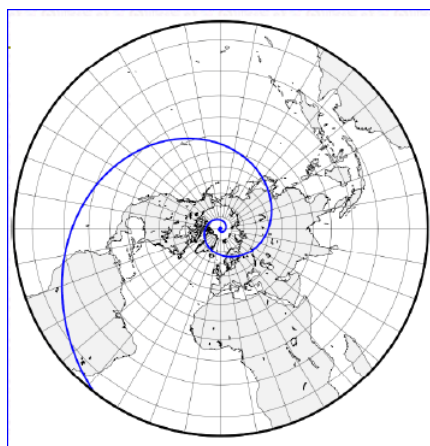


Figura 2.23: Projeção estereográfica [19]

Machado [15], alega que as galáxias espirais são sistemas estelares constituídos principalmente por um disco aproximadamente circular e bastante achatado que além de estrelas, contém gás e poeira, e se encontra imerso em um halo de matéria escura.

“A característica mais marcante destas galáxias são seus braços espirais, evidentemente, onde ocorre intensa formação estelar. As galáxias espirais, apresentam ainda um bojo no centro do disco, cuja importância relativa diminui conforme o tipo morfológico seja mais tardio; e um halo de material estelar, constituído basicamente de aglomerados estelares e estrelas pobres em metais; além do halo de matéria escura. A dimensão radial dos discos é tipicamente de ordem de kiloparsecs, enquanto que a escala de altura é de poucas centenas de parsecs”.

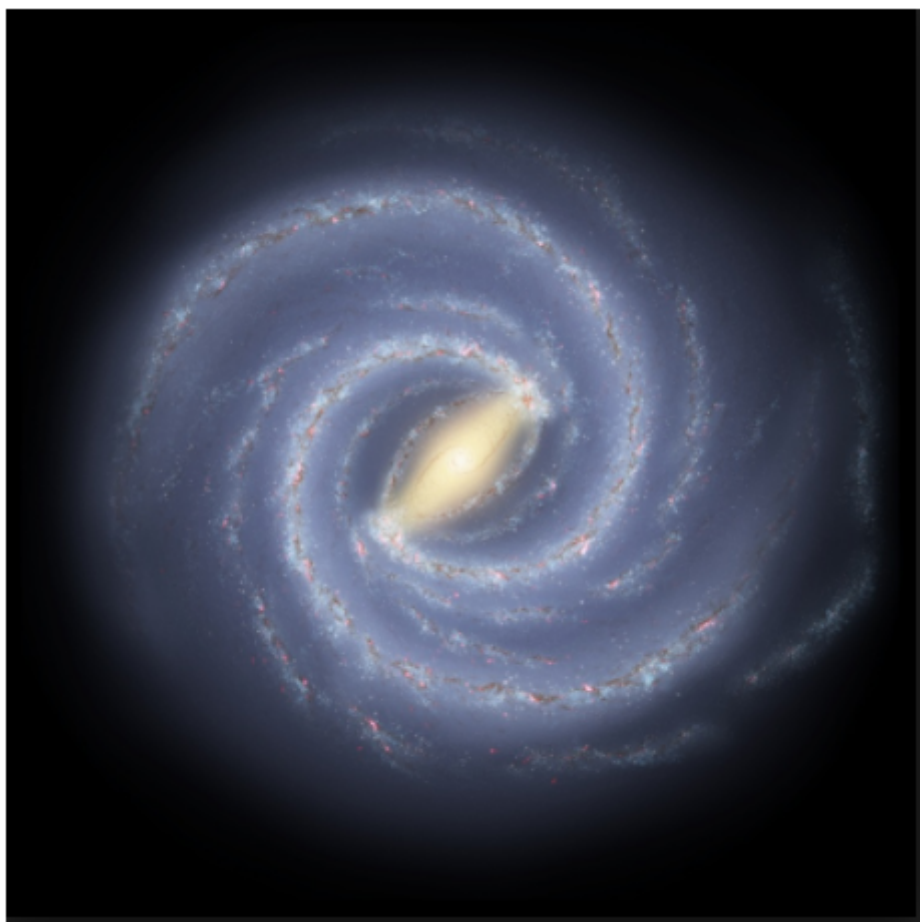


Figura 2.24: Galáxias Espirais [15]

Parsecs é uma unidade de distância usada em trabalhos científicos de astronomia. Equivale à distância de um objeto cuja paralaxe anual média vale um segundo de arco 1". Parsec também pode ser entendido como a distância à qual se deveria situar um observador para ver uma unidade astronômica(UA), equivalente à distância da Terra

ao Sol, sob o ângulo de um segundo de arco [15]. Um parsec é equivalente a 3,26156 anos-luz.

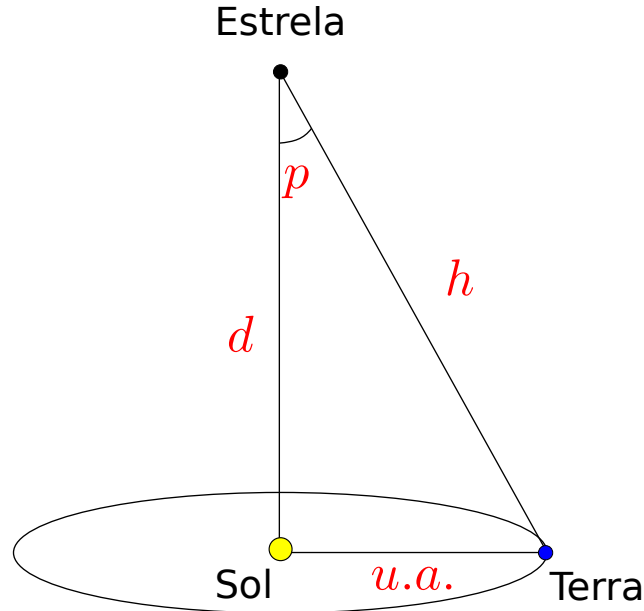


Figura 2.25: 1 parsec

Sabendo que 1° corresponde a $3600''$, então $1''$, corresponde a $\left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$. O ângulo P° corresponde a um arco de $1''$. Sendo assim, parsec é dado por:

$$\begin{aligned}\tan(1'') &= \frac{1 \text{ U.A.}}{d}, \\ d &= \frac{1 \text{ U.A.}}{\tan(1'')}\end{aligned}$$

Fazendo $d = 1 \text{ Parsec}$, obtemos:

$$\begin{aligned}1 \text{ Parsec} &= \frac{1 \text{ U.A.}}{\tan(1'')} \\ 1 \text{ Parsec} &= \frac{1 \text{ U.A.}}{\left(\frac{1}{3600}\right)^\circ} \\ 1 \text{ Parsec} &= 206264,8 \text{ U.A.}\end{aligned}$$



Figura 2.26: Galáxias Espirais [15]

Portanto, trata-se de estruturas de fato bastante achatadas. Que as galáxias espirais se constituem de discos achatados já era conhecido desde o início da astronomia extragaláctica [15].

A espiral de Arquimedes é umas das curvas com mais aplicações no cotidiano. Pode ser facilmente encontrada tanto na natureza como em objetos de criação humana. Alguns exemplos: As galáxias em espiral, os caracóis e alguns redemoinhos de ventos ou de água tem a forma de uma espiral de Arquimedes, o disco de vinil, compressores, micro propagação bacteriana, espiral de Fermat e logarítmica, espiral de Littus e Parker(nos ventos solares) e na roda de Catarina. Embora Arquimedes não tenha descoberto essa espiral, ele a usou neste livro para quadrar um círculo e fazer a trissectar um ângulo, que são dois problemas clássicos e históricos da matemática, juntamente com a duplicação do cubo(veja [18]).

2.2.1 Equação Polar da Espiral Arquimedes

Um sistema de coordenadas polares no plano é formado por um ponto fixo O denominado pólo e uma semirreta com origem em O denominada eixo polar. Cada ponto do plano é denotado por $P = (r, \theta)$, onde r é a distância de P ao pólo e θ é o ângulo tomado no sentido anti-horário entre o eixo polar e o segmento OP . Um ponto em coordenadas polares $P = (r, \theta)$ pode ser escrito em coordenadas cartesianas com $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$. Um ponto em coordenadas cartesianas $P = (x, y)$ pode ser escrito em coordenadas polares, pois $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ e $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$, se $r \neq 0$ (veja em [14]).

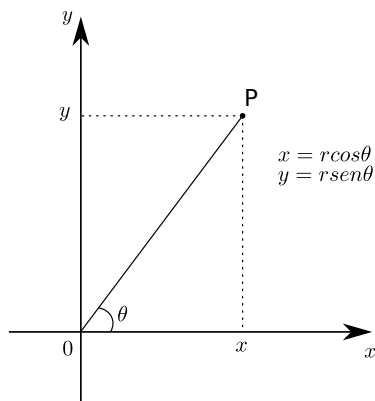


Figura 2.27: Mudança de coordenadas

A Espiral de Arquimedes tem esse nome em homenagem ao matemático grego Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), que viveu no século III a.C., é também conhecida por espiral aritmética.

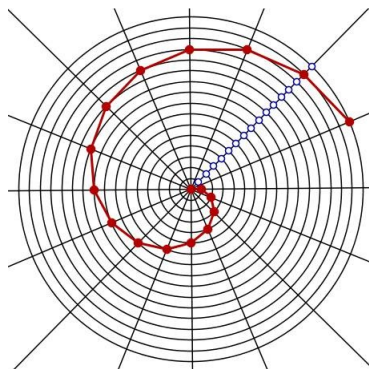


Figura 2.28: Espiral de Arquimedes

De acordo com Silva [26], por definição, a espiral de Arquimedes é o lugar geométrico dos pontos P de uma reta que gira em torno do centro O com velocidade angular constante e o ponto P se desloca sobre a reta r a partir de O com velocidade constante sobre a reta.

A equação polar é dada por $r(\phi) = a \cdot \phi$ cuja dedução é simples, pois a cada giro completo da reta a curva distancia de $2\pi \cdot a$, sendo “a” uma constante do centro(origem) ao ponto P.

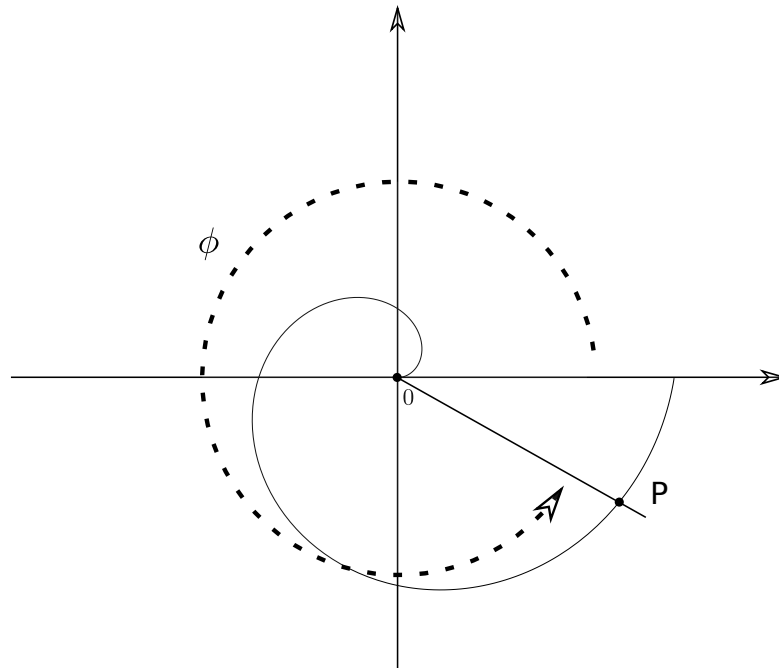


Figura 2.29: Espiral de Arquimedes - equação polar

2.2.2 Equação Paramétrica da Espiral Arquimedes

Passando da forma polar para a paramétrica:

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos(\theta) \\ y = r(\theta) \sin(\theta), \end{cases}$$

obtemos:

$$\begin{cases} x(\theta) = a(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = a(\theta) \sin(\theta). \end{cases}$$

2.2.3 Equação Cartesiana: da Espiral Arquimedes

Sabemos que a equação polar da espiral de Arquimedes é $r(\theta) = a \cdot \theta$, com $a > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, em radianos (veja [21], Exercício 6.21.a).

Em coordenadas polares temos:

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos(\theta) \\ y = r(\theta) \sin(\theta), \end{cases}$$

Como $r(\theta) = a\theta$, podemos escrever:

$$\begin{cases} x = a(\theta) \cos(\theta) \\ y = a(\theta) \sin(\theta). \end{cases}$$

Elevando ao quadrado obtemos:

$$\begin{cases} x^2 = (a \cdot \theta \cdot \cos(\theta))^2 \\ y^2 = (a \cdot \theta \cdot \sin(\theta))^2. \end{cases}$$

Somando as equações acima, membro-a-membro, teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) + a^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta) \\ &= a^2(\theta)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= a^2(\theta). \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \theta^2. \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{a(\theta) \sin(\theta)}{a(\theta) \cos(\theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta), \end{aligned}$$

2.2. ESPIRAL ARQUIMEDES CAPÍTULO 2. CURVAS E SUAS APLICAÇÕES

implicando em $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Substituindo θ na equação 2.1, obtemos que:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2.$$

Portanto

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2.$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os lados da equação, obtemos que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cdot \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2},$$

logo

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

assim

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Portanto

$$\tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = \frac{y}{x}.$$

Então

$$y = x \cdot \tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right).$$

Portanto, a equação encontrada é denominada equação cartesiana da espiral de Arquimedes.

2.2.4 Comprimento da Curva da Espiral Arquimedes

Em coordenadas polares temos:

$$\begin{aligned} C &= \int \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta \\ &= \int \sqrt{a^2 + a^2(\theta)^2} d\theta \\ &= \int \sqrt{a^2(1 + (\theta)^2)} d\theta \\ &= \int a\sqrt{1 + (\theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

Seja $\theta = \tan(t)$, então temos que:

$$d\theta = \sec^2(t) dt,$$

de modo que:

$$C = a \int \sqrt{1 + (\tan(t))^2} \sec^2(t) dt.$$

Pelas relações trigonométricas, sabemos que:

$$1 + (\tan(t))^2 = (\sec(t))^2,$$

consequentemente:

$$\begin{aligned} C &= a \int \sqrt{\sec^2(t)} \sec^2(t) dt \\ &= a \int \sec(t) \sec^2(t) dt \\ &= a \int \sec^3(t) dt. \end{aligned}$$

Temos que:

$$\int \sec^3(t) dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + k, k \in \mathbb{R}.$$

Logo, concluímos que:

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{a}{2} \ln | \sec(t) + \tan(t) | \\ &= \frac{a}{2} \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{a}{2} \ln | \sqrt{1 + \theta^2} + \theta | . \end{aligned}$$

Para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos:

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{2} 2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln | \sqrt{1 + 4\pi^2} + 2\pi | \\ &= \frac{a}{2} (2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln | \sqrt{1 + 4\pi^2} + 2\pi |) \\ &\cong 21,26a. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de uma Espiral de Arquimedes é aproximadamente $21,26a$ onde “a” é constante.

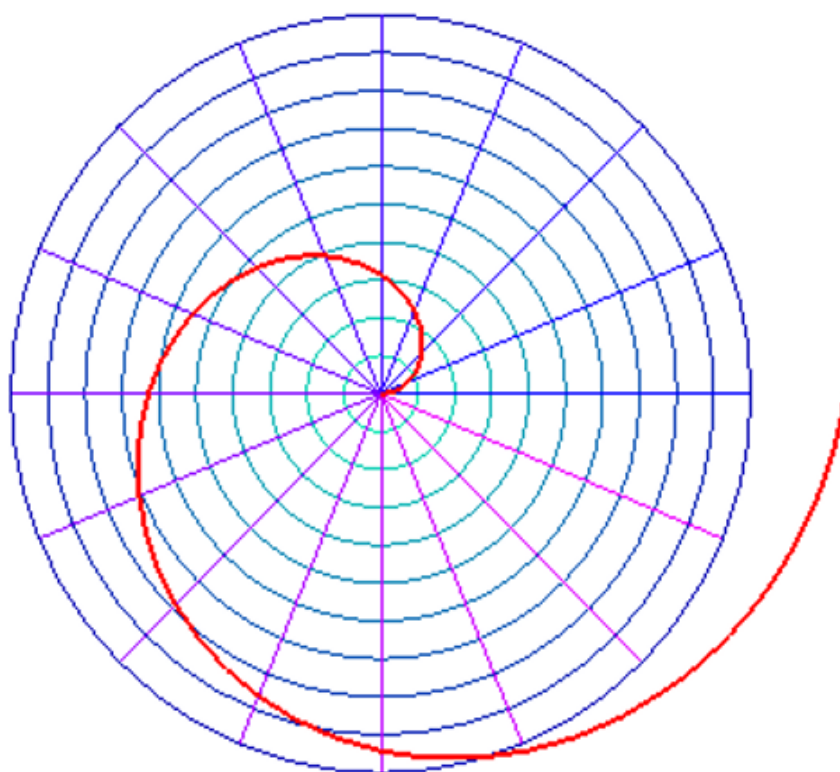


Figura 2.30: Comprimento da Espiral de Arquimedes

2.2.5 Área da Espiral de Arquimedes

Por [8], sabemos que o cálculo da área na forma polar é dado por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

com $\theta \in [\alpha, \beta]$. Sabemos que a fórmula polar da espiral é $r(\theta) = a\theta$, onde $a > 0$ e $\theta > 0$. Assim a área da espiral de Arquimedes é dado por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\theta^3}{3} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{(2\pi)^3}{3} \right) - \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{8a^2\pi^3}{6} \\ &= \frac{4a^2\pi^3}{3} \end{aligned}$$

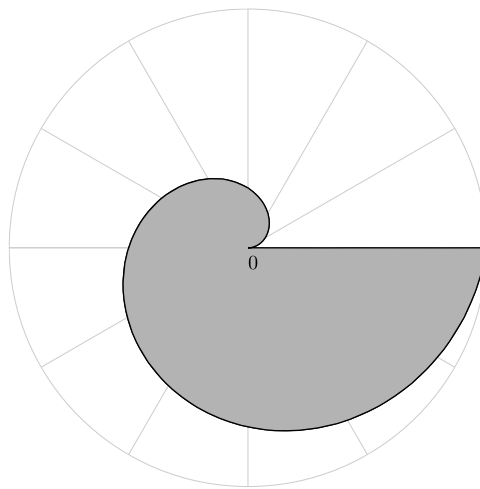


Figura 2.31: Área da Espiral de Arquimedes

2.2.6 Fórmulas de Frenet da Espiral Arquimedes

Determinaremos as fórmulas de Frenet para curvas planas não-parametrizadas pelo comprimento de arco.

Seja $\alpha(r) = (a \cdot r \cdot \cos(r), a \cdot r \cdot \sin(r))$ com $a > 0$, $r \in \mathbb{R}$ em radianos. Dividimos temos que

$$\begin{aligned}\alpha'(r) &= (a \cdot \cos(r) - a \cdot r \cdot \sin(r), a \cdot \sin(r) + a \cdot r \cdot \cos(r)) \\ &= (a(\cos(r) - r \cdot \sin(r)), a(\sin(r) + r \cdot \cos(r))).\end{aligned}$$

E $\alpha''(r)$ é dado por

$$\begin{aligned}\alpha''(r) &= (a[-\sin(r) - (\sin(r) + r \cdot \cos(r))], a[\cos(r) + (\cos(r) - r \cdot \sin(r))]) \\ &= (a[-2\sin(r) - r \cdot \cos(r)], a[2\cos(r) - r \cdot \sin(r)]) \\ &= (-a(2\sin(r) + r \cdot \cos(r)), a(2\cos(r) - r \cdot \sin(r))).\end{aligned}$$

Consequentemente $|\alpha'(r)|$:

$$\begin{aligned}|\alpha'(r)| &= \sqrt{(a(\cos(r) - r \cdot \sin(r)))^2 + (a(\sin(r) + r \cdot \cos(r)))^2} \\ &= \sqrt{a^2(\cos^2(r) - 2 \cdot \cos(r) \cdot r \cdot \sin(r) + r^2 \cdot \sin^2(r)) +} \\ &+ \sqrt{a^2(\sin^2(r) + 2 \cdot \sin(r) \cdot r \cdot \cos(r) + r^2 \cos^2(r))} \\ &= \sqrt{a^2(\cos^2(r) - 2r \cdot \cos(r) \cdot \sin(r) + r^2 \cdot \sin^2(r)) +} \\ &+ \sqrt{a^2(\sin^2(r) + 2r \cdot \sin(r) \cdot \cos(r) + r^2 \cos^2(r))} \\ &= \sqrt{a^2(\cos^2(r) - r \cdot \sin(2r) + r^2 \cdot \sin^2(r) + a^2(\sin^2(r) + r \cdot \sin(2r) + r^2 \cos^2(r)))} \\ &= \sqrt{a^2(\cos^2(r) - r \cdot \sin(2r) + r^2 \cdot \sin^2(r) + \sin^2(r) + r \cdot \sin(2r) + r^2 \cos^2(r))} \\ &= \sqrt{a^2[(\cos^2(r) + \sin^2(r)) - r \cdot \sin(2r) + r \cdot \sin(2r) + r^2(\sin^2(r) + \cos^2(r))]} \\ &= \sqrt{a^2[(\cos^2(r) + \sin^2(r)) - r \cdot \sin(2r) + r \cdot \sin(2r) + r^2(\sin^2(r) + \cos^2(r))]} \\ &= \sqrt{a^2[1 + 0 + r^2(1)]} \\ &= a\sqrt{1 + r^2}.\end{aligned}$$

Portanto o vetor tangente $t(r) = \frac{\alpha'(r)}{|\alpha'(r)|}$ é dado por:

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{(a(\cos(r) - r \cdot \sin(r)), a(\sin(r) + r \cdot \cos(r)))}{a\sqrt{1+r^2}} \\ &= \frac{a}{a\sqrt{1+r^2}}(\cos(r) - r \cdot \sin(r), \sin(r) + r \cdot \cos(r)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(\cos(r) - r \cdot \sin(r), \sin(r) + r \cdot \cos(r)). \end{aligned}$$

E o vetor normal $n(r) = \frac{(-y', x')}{|\alpha'(r)|}$ é dado por:

$$\begin{aligned} n(r) &= \frac{(-a(\sin(r) + r \cdot \cos(r)), a(\cos(r) - r \cdot \sin(r)))}{a\sqrt{1+r^2}} \\ &= \frac{(a(-\sin(r) - r \cdot \cos(r)), a(\cos(r) - r \cdot \sin(r)))}{a\sqrt{1+r^2}} \\ &= \frac{a}{a\sqrt{1+r^2}}(-\sin(r) - r \cdot \cos(r), (\cos(r) - r \cdot \sin(r))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(-\sin(r) - r \cdot \cos(r), (\cos(r) - r \cdot \sin(r))) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+r^2}}(r \cdot \cos(r) + \sin(r), (r \cdot \sin(r) - \cos(r))). \end{aligned}$$

Para calcular a curvatura $k(r) = \frac{t'(r)}{|\alpha'|^3}$, vamos calcular primeiramente

$$\begin{aligned} -x''(r)y'(r) &= -(-a(2 \sin(r) + r \cdot \cos(r))) \cdot a(\sin(r) + r \cdot \cos(r)) \\ &= a^2[(2 \sin^2(r) + 2r \sin \cos(r) + r \sin \cos(r) + r^2 \cos^2(r))] \\ &= a^2[(2 \sin^2(r) + 3r \sin \cos(r) + r^2 \cos^2(r))]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} x'(r)y''(r) &= (a(\cos(r) - r \cdot \sin(r))) \cdot a(2 \cos(r) - r \cdot \sin(r)) \\ &= a^2[2 \cos^2(r) - r \sin(r) \cos(r) - 2 \sin(r) \cos(r) + r^2 \cos^2(r)] \\ &= a^2(2 \cos^2(r) - 3r \sin(r) \cos(r) + r^2 \cos^2(r)). \end{aligned}$$

Sendo assim, determinamos

$$\begin{aligned}
 -x''(r)y'(r) + y''(r)x'(r) &= a^2[(2\sin^2(r) + 3r\sin(r)\cos(r) + r^2\cos^2(r)) \\
 &+ a^2(2\cos^2(r) - 3r\sin(r)\cos(r) + r^2\cos^2(r)) \\
 &= a^2[2(\sin^2(r) + \cos^2(r)) + 0 + r^2(\cos^2(r) + \sin^2(r))] \\
 &= a^2(2 + r^2).
 \end{aligned}$$

Portanto temos que a curvatura $k(r) = \frac{\langle \alpha''(r), n(r) \rangle}{(\|\alpha'(r)\|)^3}$ (veja [27], Exercício 4.4-5) é

$$\begin{aligned}
 k(r) &= \frac{a^2(2 + r^2)}{(a\sqrt{1 + r^2})^3} \\
 &= \frac{a^2(2 + r^2)}{a^3 \left[(1 + r^2)^{\frac{1}{2}} \right]^3} \\
 &= \frac{2 + r^2}{a(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Portanto as fórmulas de Frenet para a Espiral de Arquimedes são:

- Vetor tangente:

$$t(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}(\cos(r) - r \cdot \sin(r), \sin(r) + r \cdot \cos(r)).$$

- Vetor normal:

$$\eta(r) = \frac{-1}{\sqrt{1 + r^2}}(r \cdot \cos(r) + \sin(r), (r \cdot \sin(r) - \cos(r))).$$

- Curvatura:

$$k(r) = \frac{2 + r^2}{a(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Torção é $\tau = 0$.

A torção da curvas planas é nula, de acordo com Tenenblat [27].

2.3 Hélice

As hélices, são curvas espaciais de grande interesse no estudo da Geometria Diferencial. Elas são curvas cujas retas tangentes fazem um ângulo constante com uma direção fixa.

De acordo com Duval [6], molas são elementos mecânicos amplamente utilizados em engenharia mecânica para exercer forças constantes, eliminar folgas em mecanismos, armazenar e fornecer energia, isolar vibrações, absorver energia de impactos, medir forças. Entre as molas, distinguem-se 3 grandes famílias: molas sujeitas a esforços de torção, molas sujeitas a esforços de flexão e molas sujeitas a esforços de tração ou compressão.

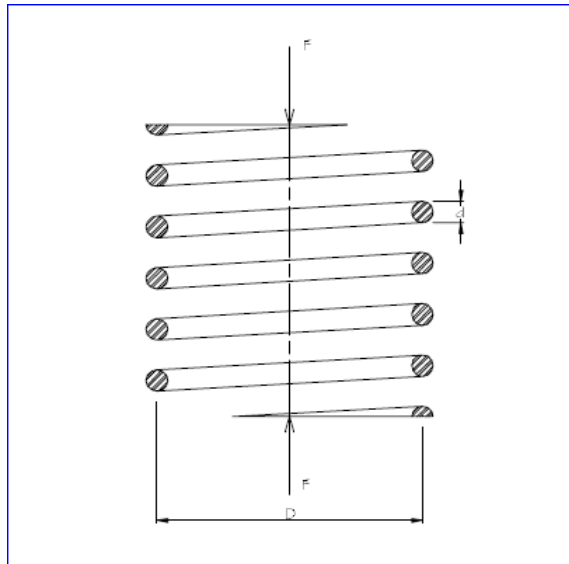


Figura 2.32: Molas helicoidais cilíndricas [6]

Conforme Dos Santos [5], cientistas descobriram que a estrutura da molécula de DNA (ácido desoxirribonucleico) é de duas hélices circulares paralelas e interligadas. E a partir daí foi possível determinar características específicas do DNA, como a rigidez de flexão, a torção e o diâmetro efetivo. Essa descoberta permitiu o desenvolvimento do estudo dessa importante estrutura que carrega informação genética de uma geração para outra. Abrindo assim, o caminho para avanços significativos na medicina. Uma representação da hélice dupla da molécula de DNA (ácido dessorribonucléico), conforme figura abaixo.

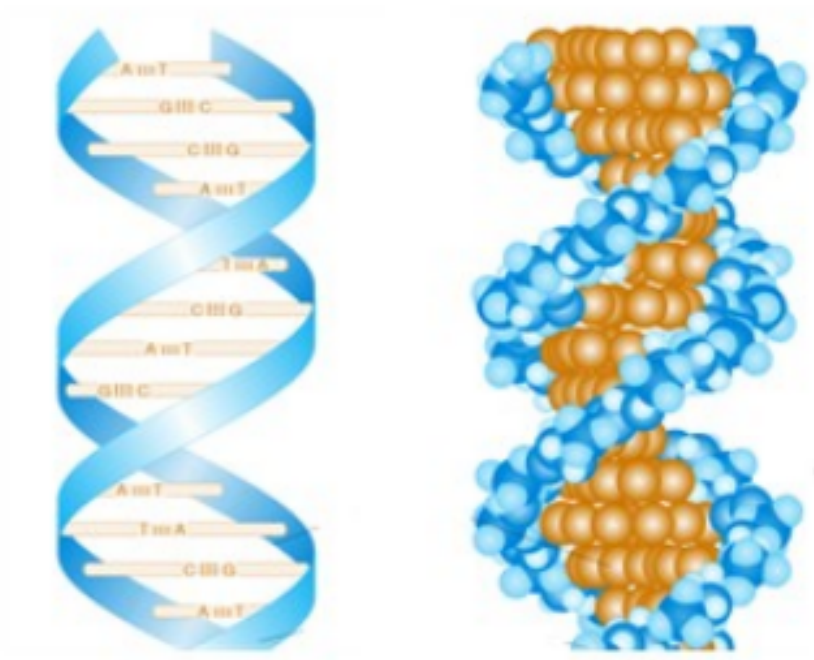


Figura 2.33: DNA [5]

A hélice tem várias aplicações como: a parte metálica dos saca-rolhas, o acabamento de engrenagens da engenharia automotiva, roscas de um modo geral, molas, os parafusos, os belos e artesanais mensageiros do vento construídos a partir de palitos de picolé, fios de nylon, agulhas e miçangas.

2.3.1 Equação Paramétrica da Hélice

Tomemos uma reta vertical V que executa um movimento circular e uniforme em torno do eixo vertical OZ . Logo, a superfície de revolução gerada é um cilindro de raio a e centro OZ . Um ponto P , pertencente à reta V , movendo-se, com uma velocidade b constante descreve uma curva denominada Hélice [24].

Pegando um ponto $P = (x, y, z)$ pertencente à reta V paralela ao eixo OZ . Esse ponto, veja figura abaixo, pertence ao cilindro de revolução gerado pela rotação da reta V em torno do eixo OZ e, portanto, à uma circunferência de raio a centrada em $C(= 0, 0, z)$.

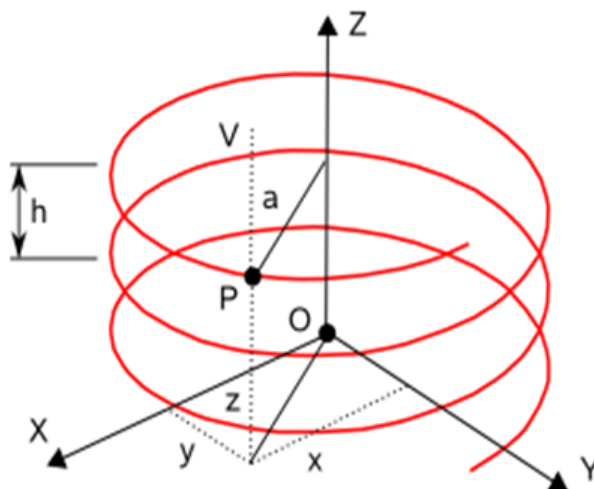


Figura 2.34: Hélice Circular

Basta-nos agora, variarmos linearmente o valor da cota ($z = b.t$) ao mesmo tempo em que o ponto P descreve a circunferência. E assim chegamos à uma equação paramétrica para Hélice(Circular), conforme [21]:

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = a \sin(t) \\ z = b.t. \end{cases}$$

Ou simplesmente: $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), b.t)$, onde $a, b, t \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, que denota o raio da hélice, e $b \neq 0$, que indica a velocidade que pode ser positiva ou negativa, mas não nula.

2.3.2 Equação cartesiana da Hélice

A equação paramétrica da hélice é dada por:

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = a \sin(t) \\ z = b.t. \end{cases}$$

Se $z = b \cdot t$, então $t = \frac{z}{b}$. Substituindo em $x(t)$, temos:

$$x = a \cos\left(\frac{z}{b}\right).$$

Elevando ao quadrado $x(t)$ e $y(t)$, temos que:

$$\begin{aligned}x^2 &= a^2 \cos^2(t) \\y^2 &= a^2 \sin^2(t).\end{aligned}$$

Somando x^2 e y^2 , obtemos:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) \\x^2 + y^2 &= a^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\x^2 + y^2 &= a^2.\end{aligned}$$

Portanto, a forma cartesiana implícita da hélice é:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x = a \cos\left(\frac{z}{b}\right). \end{cases}$$

2.3.3 Comprimento da curvada Hélice

Como vimos anteriormente a equação paramétrica da hélice é:

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt).$$

O comprimento será dado por:

$$C = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$$

onde α está bem definida para todo $t \in [t_0, t_1]$ (veja [4, 8, 27]). A primeira derivada de $\alpha'(t)$ é:

$$\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b).$$

Portanto o módulo de $|\alpha'(t)|$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 |\alpha'(t)| &= \sqrt{(-a \sin(t))^2 + (a \cos(t))^2 + b^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + b^2} \\
 &= \sqrt{a^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + b^2} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto chegamos a formula do comprimento da hélice:

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 + b^2} dt \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} t \Big|_{t_0}^{t_1}.
 \end{aligned}$$

Denotando $\Delta t = t_1 - t_0$, sabemos que a formula do comprimento da hélice é dado por:

$$C = \Delta t \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2.3.4 Fórmulas de Frenet da Hélice

A equação paramétrica da hélice circular é $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ e pela equação 2.2 temos que $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Logo, uma reparametrização por comprimento de arco, será:

$$\beta(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \beta'(s) &= \left(-a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \left(-a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b \right),
 \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned}
 \beta''(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
 &\cdot \left(-a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right) \\
 &= \frac{-a}{\left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^2} \cdot \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right) \\
 &= \frac{-a}{a^2 + b^2} \cdot \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right).
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 |\beta''(s)| &= \sqrt{\left(\frac{-a}{a^2 + b^2} \right)^2 \cdot \left(\cos^2 \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \sin^2 \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + 0^2 \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot (1)} \\
 &= \frac{a}{(a^2 + b^2)}.
 \end{aligned}$$

O vetor tangente é $t(s) = \beta'(s)$, portanto:

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \left(-a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \right).$$

O curvatura é dada por $k(s) = |\beta''(s)|$, então:

$$k(s) = \frac{a}{(a^2 + b^2)}.$$

Portanto o vetor normal $n(s)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 n(s) &= \frac{\beta''(s)}{k(s)} \\
 &= \frac{-a}{a^2 + b^2} \cdot \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right) \\
 &= \frac{a}{(a^2 + b^2)} \\
 &= (-1) \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right) \\
 &= \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right).
 \end{aligned}$$

Como o vetor binormal $b(s) = t(s) \times n(s)$, calculamos primeiramente $t(s)$ e $n(s)$. Por simplicidade denoto $c = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, então

$$\begin{aligned}
 t(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (-a \sin(c), a \cos(c), b) \\
 n(s) &= (-\cos(c), -\sin(c), 0).
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 b(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin(c) & a \cos(c) & b \\ -\cos(c) & -\sin(c) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (b \sin(c) \vec{i} - b \cos(c) \vec{j} + a \vec{k}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \left(b \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -b \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \right).
 \end{aligned}$$

Portanto $b'(s)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 b'(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (b \cos(c) \cdot c', b \sin(c) \cdot c', 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot c' \cdot (b \cos(c), b \sin(c), 0).
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} c'(s) &= \frac{1 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - s \cdot 0}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Portanto $b'(s)$ é:

$$\begin{aligned} b'(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \left(b \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \left(b \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right). \end{aligned}$$

A torção $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$ é dado por:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \langle b'(s), n(s) \rangle \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (b \cos(c), b \sin(c), 0) \cdot (-\cos(c), -\sin(c), 0) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (-b \cos^2(c) - b \sin^2(c) + 0) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (-b(\cos^2(c) + \sin^2(c))) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (-b) \\ &= \frac{-b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

As aplicações das curvas, mostra que a matemática acontece em todas as áreas do conhecimento, como por exemplo: *A Cicloide*, utilizada na engenharia, arquitetura, física; *A Espiral de Arquimedes*, utilizada na engenharia, medicina, artesanatos, navegação, história, astronomia; *A Hélice*, utilizada na engenharia mecânica, medicina, engenharia automotiva, e vários outras aplicações. Portanto, a geometria diferencial pode ser aplicada em todas as áreas do conhecimento: biológicas, exatas e humanas.

Capítulo 3

Considerações Finais

Através deste estudo caracterizamos, matematicamente, algumas curvas importantes para a geometria e mostramos que algumas curvas são naturalmente observadas na natureza. Nossa intenção foi motivar o aluno de graduação, que estuda curvas do ponto de vista diferenciável, com exemplos e aplicações da teoria.

A primeira curva estudada foi a Cicloide. Depois de contarmos um pouco da história do problema da braquistócrona e da tautócrona, mostramos várias propriedades desta curva, tais como, a curvatura, o comprimento de arco e a área. Vimos que esta curva é muito utilizada na construção civil.

Uma outra curva plana que analisamos pode ser encontrada de flores ao formato de galáxias. A espiral de Arquimedes é uma curva plana amplamente observada na natureza. Neste trabalho, demos alguns exemplos de onde podemos encontrá-la. Em seguida, mostramos algumas de suas propriedades geométricas.

Por fim, a hélice. Uma curva espacial que pode ser encontrada em nós mesmo. A cadeia do DNA humano tem o formato desta curva tão peculiar. Diferentemente das outras duas curvas, a hélice apresenta torção e curvatura. Estas informações são muito importantes para o trabalho dos biólogos.

Neste trabalho, tentamos motivar os alunos que estudam as curvas, por seus diversos motivos, mostrando que algumas delas tem uma beleza única e importância fundamental para todos, independente da área do conhecimento.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, M. F. S.: *Análise temporal da relação entre o tremor fisiológico cinético e o envelhecimento com base em desenhos digitalizados da espiral de Arquimedes*, Tese de Doutorado: Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia - Minas Gerais, 2011.
- [2] AVILA, G.: *O Ensino do Cálculo e da Análise*, Revista Matemática Universitária, Volume 33, 2002.
- [3] CASTRO, L. M. D.: *O cálculo variacional e as curvas cicloidais*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado em Matemática: Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- [4] DO CARMO, M. P.: *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, 6ª edição. SBM, 2014.
- [5] DOS SANTOS, F. F., NASCIMENTO, R. M.: *A Hélice: uma curva importante no código da vida*, Pôster, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB, 2006.
- [6] DUVAL, M. N., FILHO, M. F.: *Software para o dimensionamento de molas helicoidais cilíndricas de tração e compressão*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Tecnologia, Departamento de Eng. Mecânica, 2014.
- [7] GOMES, A. R.: *Análise Comparativa de mecanismos de compressão para aplicação em refrigeração doméstica*, Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Santa Catarina Florianópolis, 2006.
- [8] GUIDORIZZI, H. L.: *Um curso de Cálculo*, vol. 1: Grupo Gen-LTC, 2000.

- [9] HOLANDA, F. D'A.: *Introdução à geometria diferencial das curvas planas*, Universidade Federal do Ceara - Fortaleza, 2016. Dissertação de Mestrado.
- [10] JUNIOR, J. M. DA C.: *A matemática por trás de um número: razão áurea*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT: Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2014.
- [11] KOCHÉ, J. C.: *Fundamentos de metodologia científica: teoria da ciência e iniciação à pesquisa*, 23ª edição. Petrópolis: Vozes, 2006.
- [12] KREYSZIG, E.: *Matemática Superior 1*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
- [13] LIVIO, M.: *Razão Áurea: a história de Φ , um número surpreendente*, Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [14] LOPES, C.: *Curvas: Fundamentos e aplicações*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT: Universidade Federal do ABC, 2013.
- [15] MACHADO, R. E. G.: *Halos Triaxiais e a razão axial de galáxias espirais*, Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia, Geofísica e ciências Atmosféricas para obtenção do título de Mestre em Astronomia: Universidade de São Paulo, 2006.
- [16] MARCONI, M.D.A., LAKATOS, E.M.: *Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisa; amostragens e técnicas de pesquisa; elaboração, análise e interpretação de dados*, 7ª edição. São Paulo: Atlas, 2013.
- [17] MEDEIROS, C. DA S.: *Um relato sobre a cicloide: a helena do século XVII*, XI Seminário Nacional de História da Matemática:SBHmat: Universidade Federal do triângulo Mineiro, 2005.
- [18] MOHNSAM, J. C.: *As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT: Universidade Federal do Rio Grande, 2014.
- [19] NETO, J. L.: *Espirais*, Mestrado Profissional em Ensino de Física - Instituto de Física: UFRJ, 2008.

- [20] PICADO, J.: *Apontamentos de Geometria Diferencial*, Coimbra, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2006.
- [21] REIS, G. L. DOS., SILVA, V. V.: *Geometria Analítica*, Livros Tecnicos e Científicos - LTC, 1996.
- [22] SANTOS, W., ALENCAR, H.: *Geometria diferencial das curvas planas*, 24º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2003.
- [23] SANTOS, A. R.: *Introdução às funções reais-um enfoque computacional*, Departamento de Métodos Matemáticos-Instituto de Matemática-UFRJ, 1998.
- [24] SANTOS, F. F. P.: *Algumas curvas notáveis: aplicações e construções com o uso do software Winplot*, Universidade Federal do Ceara - Fortaleza, 2016. Dissertação de Mestrado.
- [25] SILVA, C.R.: *Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático*, Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: PUC-SP, São Paulo, 2006.
- [26] SILVA, E. V., LEIVAS, J. C. P.; DAL RI, M. L.: *Explorando a espiral de Arquimedes com software de geometria dinâmica*, RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação, volume 14, number 1, ISSN 1679-1916.
- [27] TENENBLAT, K.: *Introdução à geometria diferencial*, 2ª Ed. revisada - São Paulo: Blucher, 2008.
- [28] VENCESLAU, A. W. N.: *Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT: São Cristovão - SE, 2015.