UNIFAP

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Reinaldo Cleiton Barros de Souza

MODELAGEM MATEMÁTICA: INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL E APLICAÇÕES

MACAPÁ-AP
2017

Reinaldo Cleiton Barros de Souza

MODELAGEM MATEMÁTICA: INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ-AP
2017

Reinaldo Cleiton Barros de Souza

MODELAGEM MATEMÁTICA: INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 11/09/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Departamento de Ciências Exata e Tecnológica,
UNIFAP

Prof. Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco
Departamento de Ciências Exata e Tecnológica,
UNIFAP

Prof. Dr. Erasmo Senger
Departamento de Ciências Exata e Tecnológica,
UNIFAP

Prof. Me. Carlos Alexandre Santana Oliveira
Instituto Federal do Amapá,
IFAP

Macapá– AP

2017

Dedico este trabalho primeiramente a Deus pelo Dom da vida; à minha mãe pelo seu sacrifício; à minha esposa e filhos pelo apoio irrestrito; e especialmente ao grupo seleto de meus professores do Mestrado PROFMAT pela dedicação.

Agradecimentos

- A Deus, por sua indubitável ajuda e bênçãos constantes em nossas vidas.

- Aos professores, pelo incentivo e motivação tendendo ao infinito;

- Aos amigos do Mestrado pela inconteste amizade.

- Ao meu orientador, professor Dr. José Walter Cárdenas Sotil pela amizade e companheirismo.

- À minha mãe Paula Márcia Barros pelo apoio e por acreditar no meu potencial; e à minha esposa Sandrelly Nahon que esteve ao meu lado nessa caminhada.

“O educando deve manter vivo em si o gosto da rebeldia aguçando sua curiosidade e estimulando sua capacidade de arriscar-se, tornando-se capaz de ir além de seus condicionantes.”

Paulo Freire (1996, p.25)

Resumo

Esta pesquisa aborda sobre a Modelagem Matemática na aplicação de Cálculo Numérico, especificamente na interpolação polinomial. Destacam-se os métodos de interpolação de Vandermonde, Lagrange e de Newton. As aplicações dão ênfase na produção de açaí em Macapá-AP e a variação de preço da saca de açaí em batedeiras no bairro das Pedrinhas, também em Macapá. Em todas essas situações foram desenvolvidas funções polinomiais que expressam de forma aproximada os dados de cada aplicação supracitada. Usou-se como instrumento de resolução a planilha eletrônica Microsoft Excel 2.010 e os aplicativos Matriz, Projeto Gauss e o GeoGebra 5.

Palavras Chave: Modelagem matemática, Aplicações, Interpolação Polinomial.

Abstract

This research deals with Mathematical Modeling in the application of Numerical Calculus, specifically in the polynomial interpolation. We highlight the interpolation methods of Vandermonde, Lagrange and Newton. The applications emphasize the production of açaí in Macapá-AP and the variation of the price of the sack of açai in the Pedrinhas neighborhood, also in Macapá. In all these situations, were developed polynomial functions that express approximately the data of each application mentioned above. The Microsoft Excel 2010 spreadsheet and the Matrix, Gauss Project and GeoGebra 5 applications were used as the resolution tool.

Keywords: Mathematical modeling, Applications, Plynomial Interpolation.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Gráficos

Sumário

INTRODUÇÃO

Em 2005, a sociedade científica brasileira, mais especificamente para o segmento da matemática, recebeu a notícia de que o Brasil fora promovido ao grupo IV da International Mathematical Union (IMU), entidade que congrega 68 nações e tem por objetivo fomentar a cooperação internacional nesta área do conhecimento. Agora, no ranking da IMU, o país está do lado de Holanda, Suécia, Suíça, Índia e Espanha referente à qualidade da pesquisa em Matemática, ficando atrás apenas de Canadá, China, Estados Unidos, França, Alemanha, Israel, Itália, Japão, Rússia e Inglaterra, países que compõem o grupo V. Tal desempenho, segundo a presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) da época, e professora da Universidade Federal Fluminense, do Rio de Janeiro, Suely Druck, pode ser considerado “admirável”, sobretudo quando se leva em conta que a pesquisa em matemática no Brasil é bastante recente, não somando mais que 50 anos.

> Esta promoção reafirma a competência e a dedicação da comunidade matemática brasileira em cumprir a sua missão para com o país. Representa um estímulo importante para que continuemos a avançar cada vez mais. (JORNAL DA UNICAMP, 2005, p. 6).

Entretanto, desde os anos 80-90 a pesquisa em Matemática no Brasil já possui excelente reputação internacional. Isso é evidenciado pela presença de eminentes matemáticos brasileiros como convidados nos mais destacados congressos internacionais, como membros da Third Word Academy. Temos também o caso do professor Jacob Palis, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que presidiu a IMU de 1999 a 2002. É por isso que a inclusão do Brasil no grupo IV representa a consolidação desta reputação e progresso que fizemos nesses anos. Isto significa que nossas atividades científicas como publicações e congressos são classificadas de alto nível. Na América Latina, os países mais bem classificados depois do Brasil são: Argentina, Chile e México, os quais estão no grupo II. Isso mostra o domínio brasileiro na pesquisa matemática (JORNAL DA UNICAMP, 2005, p. 7).

Quanto ao ensino de Matemática, o mesmo tem tido desempenho análogo ao da pesquisa matemática no Brasil? A própria Dr.ª Suely Druck responde:

> Infelizmente não! Atualmente no Brasil, pesquisa e ensino em matemática compõem mundos distintos e distanciados. O primeiro cumpre com competência o seu papel de produzir conhecimento e formar recursos humanos para pesquisa. Já o segundo vem cumprindo muito mal o seu papel de transferir conhecimento e formar cidadãos, e ainda se debate com questões primárias e até surrealistas que dizem respeito à sua missão. Como presidente da SBM, tenho lidado com esses dois mundos, e a comparação é absolutamente dolorosa para o segmento do ensino. A política de descaso com a educação no país afastou muitos profissionais com boa formação matemática das questões do ensino da disciplina. [...] (JORNAL DA UNICAMP, 2005, p. 6).

Neste contexto, uma gama considerável de educadores ligados ao ensino da Matemática têm promovido várias discussões, e com isso tem-se observado algumas tendências no processo de ensino da área de exatas, que segundo Soares (2004) são as seguintes: Resolução de Problema, Etnomatemática, uso da História da Matemática, Modelagem Matemática, Educação Matemática e Informática, Didática da Matemática Francesa e Educação Matemática Crítica.

Esta pesquisa aborda uma dessas tendências de ensino da Matemática: a Modelagem Matemática. Para melhor direcionar a pesquisa, a mesma tem como problema o seguinte questionamento:

Problema

Como podemos aplicar a Modelagem Matemática usando funções polinomiais de grau n?

Objetivo Geral

- ✓ Mostrar algumas aplicações de Cálculo Numérico, mas especificamente a interpolação polinomial, em situações corriqueiras envolvendo um conjunto de dados (x_i,y_i), i=1,2,...,n.

Objetivos Específicos

- ✓ Diferenciar modelagem matemática de modelo matemático;
- ✓ Aplicar modelagem matemática usando polinômios de grau n;
- ✓ Estabelecer funções que melhor represente dados tabelados.

Justificativa

Esta proposta de investigação justifica-se pela importância que a Modelagem Matemática tem, e o quanto ela pode contribuir no processo de ensino de funções aos discentes do Ensino Médio.

Evidentemente, não há como negar que a matemática e o meio circundante estão relacionados na vida como fatores importantes para que ocorra uma compreensão das particularidades e das emoções desenvolvidas pelo indivíduo.

Porém, isso só pode acontecer na medida em que novas abordagens educacionais puderem ser discutidas e exercitadas, principalmente levando em conta a contribuição da modelagem matemática no contexto escolar da Matemática, a partir da compreensão da relação perfeitamente possível e viável entre teoria, aplicação e modelagem matemática, numa perspectiva de ambientação da escola e da vida cotidiana, traduzida em modelos matemáticos, tornando a construção do conhecimento significativo para o aluno, razão pela qual se justifica a elaboração da presente pesquisa.

Quanto à estrutura desta pesquisa, a mesma está dividida em cinco Capítulos, sendo que o primeiro trata dos objetivos geral e específicos e da estruturação deste trabalho.

Já o segundo capítulo aborda o referencial teórico quanto à modelagem matemática, o modelo matemático e suas diferenças.

O terceiro capítulo envolve a temática da interpolação polinomial, onde se constrói um polinômio que envolve os pontos tabelados de um determinado problema e apresenta uma função que melhor os represente.

Quanto ao quarto capítulo, o mesmo trata dos processos metodológicos, o sujeito e os instrumentos da pesquisa, além dos procedimentos.

Já o quinto capítulo destaca duas aplicações envolvendo o fruto do açaizeiro (*Euterpe oleracea* M.*)*, nas quais se desenvolvem polinômios que melhor expressam os dados dos problemas propostos.

2 ABORDAGEM TEÓRICA

Para tratar sobre o tema, será apresentada uma exposição sobre Modelo e Modelagem Matemática.

2.1 MODELO MATEMÁTICO

Com a descoberta das geometrias não euclidianas de Riemann e Lobachewski, o termo modelo foi adotado na matemática. Atualmente, o termo Modelo Matemático é amplamente utilizado no meio acadêmico e tem diversas conotações e algumas poucas definições. Por exemplo, “Modelo Matemático é um sistema axiomático consistindo de termos indefinidos que são obtidos pela abstração e qualificação de ideias essenciais do mundo real”. (MAKI; THOMPSOM, 1988, p. 14, apud GAZZETTA).

Observa-se que Maki e Thompsom acreditam que o modelo matemático é um sistema ou conjunto de símbolos que são oriundos da abstração e ideias do mundo real. Já para Swetz, “Modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão” (SWETZ, 1992, p.65). Do ponto de vista de Swetz, o modelo vem a ser uma estrutura que representa as características e propriedades de um dado fenômeno, fenômeno este que associado ao conceito de Maki e Thompsom, é a abstração ou ideia do mundo real.

Já Biembengut e Hein nos dizem:

> O Modelo Matemático é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacionar com algo já conhecido, efetuando deduções. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p. 11).

Observa-se que Biembengut e Hein defendem que o modelo matemático é a imagem formada na mente, na busca da compreensão e entendimento, relacionando-se com algo já conhecido para poder se fazer deduções. Este conceito é reforçado, quando Biembengut afirma que “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de Modelo Matemático'. (BIEMBENGUT, 1997, p. 89). Nota-se que a autora, ao declarar que modelo matemático é um conjunto de símbolos e expressões matemáticas os quais traduzem um fenômeno ou um problema da realidade, concorda com os conceitos de Maki e Thompsom e o de Swetz.

Outro conceito é o de Bassanezi, que diz: "modelo matemático de um fenômeno é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem de alguma forma, o fenômeno em questão". (BASSANEZI, 1994, p. 65). É observado que Bassanezi apresenta um conceito similar à de Biembengut, ao afirmar que o modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas, que tem como finalidade, traduzir e interpretar um fenômeno em questão.

Na definição de Modelo Matemático defendido por Biembengut, os mesmos podem ser formulados como expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas e outros. Ela também afirma que um modelo é proveniente de aproximações realizadas para se poder entender melhor um fenômeno, e nem sempre tais aproximações condizem com a realidade. Seja como for, um Modelo Matemático retrata ainda em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada.

A determinação do tipo de modelo a ser utilizado dependerá da situação analisada, das variáveis selecionadas e dos recursos disponíveis. Para se chegar ao Modelo Matemático, tem-se que passar primeiramente por um processo denominado **Modelagem Matemática**.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem, apesar de estar em evidência nos últimos anos, já vem sendo utilizada desde os tempos remotos, desde que o indivíduo busca resolver seus problemas com recursos do próprio meio em que vive, sempre buscando conhecê-lo e compreendê-lo.

Observa-se que a primeira definição de modelo, dado por Maki e Thompsom, refere-se ao campo de conhecimento que denominamos de Matemática Pura, e a segunda definição, a de Swetz, ao da Matemática Aplicada. O primeiro consiste da construção puramente teórica do conhecimento, sem se ocupar de questões que tenham sugerido tal organização. Já no segundo, o diálogo com a prática evidenciase como essencial. Esta distinção entre Matemática Pura e Aplicada perdura até hoje, sendo que o objetivo principal da Matemática Aplicada é o de “dedicar-se a problemas originados em outras áreas do conhecimento, revelando seu caráter transdisciplinar e sua (re)valorização decorrente da emergência das novas tecnologias” (RICHIT, 2005, p.128).

A Modelagem matemática é um processo dinâmico de busca de modelos adequados, que sirvam de protótipos de alguma entidade (BASSANEZI, 1994, p. 45). O autor enfatiza a ideia de que a modelagem matemática é um processo constante e dinâmico de busca de modelos para servir de protótipo para algum propósito. Pode ser para fins econômicos, bélicos, políticos, fenômenos da natureza e especialmente para a educação, que será o foco desta pesquisa. Segundo o mesmo autor, a modelagem possui duas funções principais: a obtenção e a validação de modelos. Veja abaixo:

> Modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2.004, p. 24).

Ou seja, a modelagem matemática serve para se obter, coletar dados do objeto em estudo, em análise. Posteriormente será feito à validação, isto é, será verificado se o modelo desenvolvido serve para representar o fenômeno estudado, com demonstrações e comprovações de fórmulas matemáticas. Isso é evidenciado por Chaves e Espírito Santo (2004), onde afirmam que a modelagem é um processo de transformação da situação real para a linguagem matemática e que se analisados e interpretados de acordo com a Matemática, desenvolve informações capazes de se relacionar com a realidade, quando diz:

> Modelagem Matemática é um processo que transforma, uma situação/questão escrita na linguagem corrente e/ou proposta pela realidade, em linguagem simbólica da matemática, fazendo aparecer um modelo matemático que, por ser uma representação significativa do real, se analisado e interpretado segundo as teorias matemáticas, devolve informações interessantes para a realidade que se está questionando (CHAVES; ESPÍRITO SANTO, 2004, p. 579).

Note que, para Chaves e Espírito Santo, esse processo de transformação do real para a linguagem matemática é o gerador do modelo matemático, quer dizer, o modelo é consequência do processo de transformação.

De acordo com O'shea e Berry:

> A Modelagem Matemática é o processo de escolher características que descrevem adequadamente um problema de origem não matemático, para chegar a colocá-lo numa linguagem matemática. A Modelagem é um processo interativo em que o estágio de validação freqüentemente leva a diferenças entre predições baseadas no modelo e na realidade. (O'SHEA; BERRY, 1982, p.06).

É mencionado que a modelagem é o processo de escolha das características adequadas que descrevem uma situação-problema e expressa numa linguagem matemática. Se compararmos as palavras de Chaves e Espírito Santo com as de O'shea e Berry, todos têm um ponto em comum quanto ao conceito de modelagem matemática: o processo. Para Chaves e Espírito Santo é o processo que transforma uma situação real em linguagem matemática. Já para O´Shea e Berry, além de ser o processo de escolha das características adequadas que descrevem uma situação-problema e expressa numa linguagem matemática característica interativa, é também o processo em que a validação conduz à diferenças entre o modelo matemático e a realidade.

Biembengut (1997, p. 65), ao falar sobre o tema, propõe que a modelagem é um recurso para associar, juntar dois conjuntos disjuntos, a matemática e realidade. Isso é representado pelo esquema na figura abaixo, onde a modelagem relaciona a situação real com a matemática, chegando a um modelo matemático. Veja:

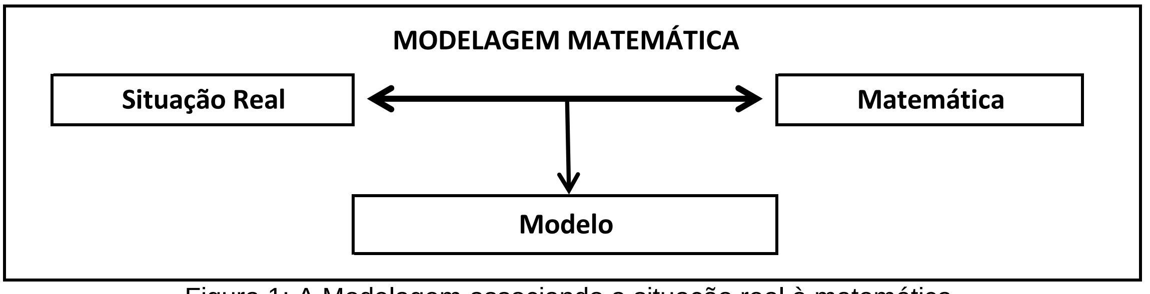


Figura 1: A Modelagem associando a situação real à matemática.
Fonte: Biembengut, 1997.

Os autores supracitados, referem-se à Modelagem Matemática como um processo de traduzir a linguagem do mundo real para a linguagem matemática. Para que isso ocorra, é necessário que uma série de procedimentos sejam desenvolvidos. Biembengut (1997, p. 65-75) identifica e agrupa esses procedimentos em três fases, sendo subdivididas em cinco, como segue:

1ª fase: Interação com o assunto:

i) Reconhecimento da situação problema;
ii) Familiarização com o assunto a ser modelado – pesquisa.

Nesta fase, a situação a ser estudada será limitada, e deverá ser feita uma pesquisa sobre o tema escolhido através de livros, revistas especializadas e através de dados obtidos junto a especialistas do referido tema.

2ª fase: Matematização:

iii) Formulação do problema – hipótese;
iv) Resolução do problema em termos do modelo.

Para formular e validar as hipóteses considera-se necessário:

a) Classificar as informações em relevantes e não relevantes, identificando fatos envolvidos;
b) Decidir quais os fatores a serem perseguidos - levantando hipóteses;
c) Identificar constantes envolvidas;
d) Generalizar e selecionar variáveis relevantes;
e) Selecionar símbolos apropriados para as variáveis;
f) Descrever estas relações em termos matemáticos.

Ao término desta fase, tem-se um conjunto de expressões e fórmulas, ou equações algébricas, ou gráficos, ou representações, ou programa computacional que levem a solução ou permitam a dedução de uma solução. Dessa maneira, o problema passa a ser resolvido com a ferramenta matemática que se tem. Requer-se um conhecimento razoável sobre os tópicos matemáticos envolvidos na formulação do modelo.

3ª etapa: Modelo Matemático:

v) Interpretação da solução - validação.

Na conclusão e utilização do modelo será feito uma verificação em que nível este se aproxima da situação-problema apresentada. Assim, a interpretação do modelo deve ser feita através da análise das implicações da solução, derivada do modelo que está sendo investigado, para então verificar sua adequabilidade, retornando à situação-problema investigada, avaliando o quão significativa é a solução. Se o modelo não atender às necessidades que o gerou, o processo deve ser retomado na 2ª fase, mudando hipóteses, variáveis e outros. Contudo, para a utilização do processo de Modelagem Matemática em cursos regulares, objeto deste estudo, o método deve sofrer algumas alterações levando em consideração o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para o trabalho de classe, o programa a ser cumprido e a abertura por parte da comunidade escolar para implantar mudanças. Além disso, o professor deve ter conhecimento seguro sobre modelagem e para tanto, deve realizar um estudo sobre a respectiva metodologia, elaborar alguns modelos e já ter experiência da proposta no ensino.

3 INTERPOLAÇÃO

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $P(x)$. Segundo Barroso *et al.* (1987), interpolação é definida como segue:

> Seja $P(x)$ uma função que aproxima $f(x)$ no intervalo I. Se para um conjunto de pontos x_i $(i = 1,2,...,n)$, $P(x_i) = f(x_i)$, então dizemos que $P(x)$ interpola $f(x)$ nos valores $x_1; x_2;...; x_n$. Podemos utilizar a função $P(x)$ para encontrar uma aproximação para o valor de $f(x)$ no ponto $x \in [x_1; x_n]$, esse procedimento é denominado de interpolação. Se x estiver fora do intervalo $[x_1; x_n]$ e ainda assim utilizarmos a função $P(x)$ para encontrar o valor aproximado de $f(x)$ nesse ponto, o procedimento é denominado extrapolação (p. 46).

Em geral, a interpolação de funções é usada nas seguintes situações:

- São conhecidos valores numéricos da função *f(x)* em alguns pontos discretos de *x* e deseja-se obter valores de *f(x)* em pontos desconhecidos, mas dentro do limite avaliado;
- Quando uma determinada função *f(x)* possui os operadores de diferenciação e integração muito complexos;
- Na solução numérica de equações diferenciais usando o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

O objetivo da interpolação é encontrar uma função interpolante $P(x)$, tal que:

$$P(x_i) = f(x_i) \text{, para } i = 1;...;n$$

$$P(x_1) = f(x_1)$$

$$P(x_2) = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$P(x_n) = f(x_n)$$

As principais técnicas de interpolação utilizadas atualmente são baseadas em **polinômios** (ou seja, *p(x)* é uma função polinomial). O gráfico abaixo representa uma função interpoladora para os pontos (-1;0,5), (0;3), (2;-1) e (4;3). Note que a curva intercepta todos os pontos fornecidos.

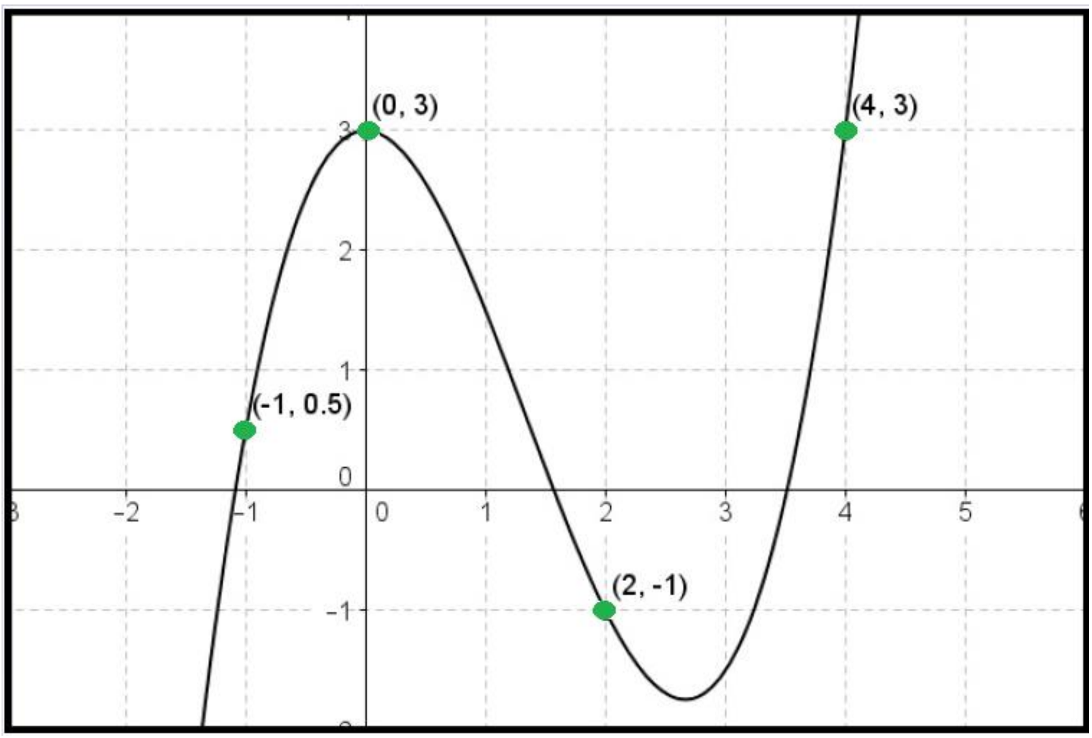


Gráfico 01: O gráfico passando pelos pontos de interpolação.
Fonte: Santos, 2015.

3.1 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INTERPOLAÇÃO

Dados n pontos distintos $(x_1; f(x_1)),(x_2; f(x_2)),...,(x_n; f(x_n))$, deseja-se aproximar *f(x)* por um polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a (n-1).

Suponha que tenhamos dois pontos distintos (n=2), então, o melhor polinômio que interpola esses dois pontos será uma reta, ou seja, um polinômio de grau 1. Da mesma forma, dados 3 pontos distintos, o melhor polinômio será uma parábola. Caso seja fornecido, por exemplo, 3 pontos (n=3) que pertençam a uma mesma reta, o polinômio interpolador ainda assim terá grau 1, isto é, grau menor que (n-1).

3.1.1 Método de Vandermonde

Considerando a condição básica para a interpolação:

$$P(x_i) = f(x_i) \text{ para i=1,...,n.}$$

e o fato de que o polinômio interpolador P(x) terá, no máximo, grau (n-1), temos que P(x) assumirá a seguinte forma:

$$P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1}$$

Então, obter o polinômio $P(x)$, significa encontrar os coeficientes de forma que:

$$P(x_i) = f(x_i) \text{ para i=1,...,n.}$$

Desse modo temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1{}^2 + \ldots + a_n x_1{}^{n-1} = f(x_1) \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2{}^2 + \ldots + a_n x_2{}^{n-1} = f(x_2) \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3{}^2 + \ldots + a_n x_3{}^{n-1} = f(x_3) \\ \vdots \\ a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n{}^2 + \ldots + a_n x_n{}^{n-1} = f(x_n) \end{cases}$$

que é um sistema de equações lineares, com n equações e n incógnitas.

Escrevendo o sistema acima na notação matricial, tem-se:

$$A \cdot x = b$$

Onde $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$, $\quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$

A matriz A é chamada matriz de Vandermonde, ou Matriz das Potências, isto porque os elementos de cada linha formam uma progressão geométrica, e desde que os valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam distintos, o determinante de A, que é dado por $det(A) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$, é diferente de zero. Portanto o sistema apresenta solução única. Logo, para encontrar o polinômio interpolador de uma série de n pontos distintos conhecidos, basta encontrar a solução do sistema linear acima. Este polinômio encontrado é único, pois det(A) $\neq$ 0 (BARROSO *et al.*, 1987).

Exemplo:

Encontrar o polinômio de grau 2 que interpola os pontos da tabela abaixo:

Tabela 1: Dados fictícios.

x	f(x)
-1	4
0	1
2	-1

.

Solução: Como temos três pontos, o polinômio interpolante terá no máximo grau 2, isto é:

$$P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

E, como na interpolação devemos ter $P(x_i) = f(x_i)$ (para i=1,...,n), segue que:

Para x=-1, temos: $P(-1) = f(-1) = a_1 + a_2 \cdot (-1) + a_3 \cdot (-1)^2 = 4 \Leftrightarrow a_1 - a_2 + a_3 = 4 \ \ (I)$

Para x=0, temos: $P(0) = f(0) = a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0^2 = 1 \Leftrightarrow a_1 = 1 \ \ (II)$

Para x=2, temos: $P(2) = f(2) = a_1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 2^2 = -1 \Leftrightarrow a_1 + 2a_2 + 4a_3 = -1 \ \ (III)$

Das equações (I), (II) e (III) acima, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação $A \cdot x = b$ obtemos:

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Com os coeficientes calculados acima, temos o polinômio do 2º grau que se segue.

$$P(x) = 1 - \frac{7x}{3} + \frac{2x^2}{3}$$

Tal função terá seu gráfico esboçado como abaixo, interceptando os pontos de interpolação.

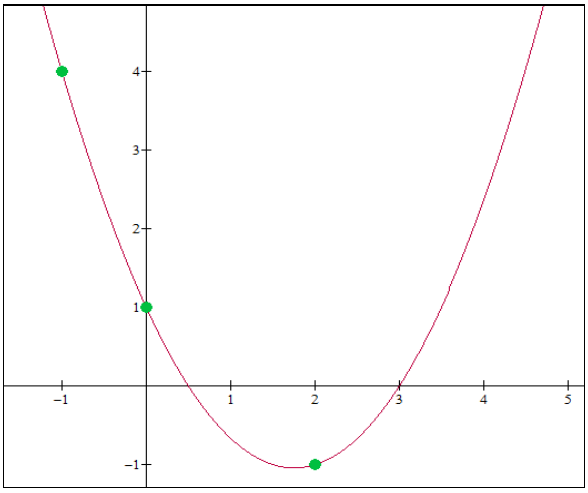


Gráfico 2: O gráfico da função encontrada passando pelos pontos de interpolação.

Ocorre que, por conter elementos resultantes de potências que podem levar a valores elevados e assim dificultar cálculos e potencializar erros computacionais, isso faz com que esta matriz seja classificada como mal condicionada, ou seja, pequenas variações no termos da matriz, causam grandes mudanças na solução (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008). O grande número de operações necessárias para resolver esse tipo de sistema, recomenda-nos a busca por modelos alternativos de interpolação tais como os descritos a seguir.

3.1.2 Método de Lagrange

Seja $P(x)$ um polinômio com grau (n-1) que interpola f em $x_1; x_2; ...; x_n$. Então, podemos representar $P(x)$ na forma:

$$P(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + ... + f(x_n)L_n(x)$$

Ou

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

A equação mostrada acima é chamada Polinômio de Lagrange, onde:

$$L_t(x)=\prod_{k=1;k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

Vamos tomar como exemplo um polinômio quadrático (n=3). Então:

$$L_1(x)=\prod_{k=1;k\neq 1}^{3}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x)=\prod_{k=1;k\neq 2}^{3}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x)=\prod_{k=1;k\neq 3}^{3}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

E, desse modo:

$$P(x)=f(x_1)L_1(x)+f(x_2)L_2(x)+f(x_3)L_3(x)$$

<u>Exemplo:</u>

Encontre o polinômio de grau 2 que interpole os pontos da Tabela 1 usando o Metodo de Lagrange.

Solução:

Polinômio adotado de grau 2, então n=3, logo:

$$P(x)=f(x_1)L_1(x)+f(x_2)L_2(x)+f(x_3)L_3(x)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(-1-0)\cdot(-1-2)}=\frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-2)}{(0-(-1))\cdot(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)}{(2-(-1))\cdot(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

Então, o polinômio interpolador de Lagrange é:

$$P(x) = 4\cdot\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)+1\cdot\left(\frac{-x^2+x+2}{2}\right)-1\cdot\left(\frac{x^2+x}{6}\right)$$

$$P(x) = \frac{8x^2-16x-3x^2+3x+6-x^2-x}{6}$$

$$P(x) = \frac{2x^2}{3}-\frac{7x}{3}+1$$

Observa-se que o polinômio encontrado usando o método de Lagrange é o mesmo quando se utilizou o método de Vandermonde. Isso destaca o fato de que os métodos empregados para interpolação podem ser diferentes, contudo, a função obtida será única.

3.1.3 Método de Newton

A fórmula de Newton é dada por:

$$P(x) = d_1 + d_2(x-x_1) + d_3(x-x_1)(x-x_2) + ... + d_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})$$

Onde os d_i (i=1,...,n) são os operadores diferenças divididas entre os pontos $(x_1; f(x_1)),...,(x_n; f(x_n))$. Esses operadores são dados por:

$$d_1 = f[x_1] = f(x_1)$$

$$d_2 = f[x_1;x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$d_3 = f[x_1;x_2;x_3] = \frac{f[x_2;x_3]-f[x_1;x_2]}{x_3-x_1} = \frac{\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}-\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}$$

$$\vdots$$

$$d_n = f[x_1;x_2;...;x_{n-1};x_n] = \frac{f[x_2;x_3;...;x_n]-f[x_1;x_2;...;x_{n-1}]}{x_n-x_1}$$

Desse modo:

$$P(x) = f(x_1) + f[x_1;x_2](x-x_1) + f[x_1;x_2;x_3](x-x_1)(x-x_2) + ... +$$
$$+ f[x_1;x_2;...;x_n](x-x_1)(x-x_2)(x-x_{n-1})$$

Exemplo:

Encontrar o polinômio de grau 2 que interpole os pontos da Tabela 1 usando o Método de Newton.

Solução:

Como já foi visto, o grau do polinômio será no máximo igual 2, pois n=3. Sua forma genérica é dado por

$$P(x) = f[x_1] + f[x_1;x_2]\cdot(x-x_1) + f[x_1;x_2x_3]\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

Calculando os operadores diferenças divididas temos:

$$f[x_1] = f(x_1) = 4$$

$$f[x_1;x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1-4}{0-(-1)} = -3$$

$$f[x_1;x_2;x_3] = \frac{f[x_2;x_3] - f[x_1;x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - f[x_1;x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_1;x_2;x_3] = \frac{\dfrac{-1-1}{2-0} - (-3)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

Então, temos o Polinômio de Newton abaixo para este caso:

$$P(x) = 4 - 3\cdot(x-(-1)) + \frac{2}{3}\cdot(x-(-1))\cdot x = 4 - 3\cdot(x+1) + \frac{2}{3}\cdot x\cdot(x+1)$$

$$P(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Um ponto que merece destaque é sobre o polinômio encontrado pelo método de Newton. O mesmo confere com a função encontrada utilizando os métodos de Vandermonde e o método de Lagrange. Os métodos apresentados nesta pesquisa, tem como objetivo ressaltar que, independentemente do método que se escolha, vamos encontrar o mesmo polinômio interpolador, interceptando os pontos que serviram de referência para encontrar a função que melhor esboça os valores tabelados.

4 METODOLOGIA

Por ser a capital e o município de maior renda per capita do Estado do Amapá e ser sede da Universidade Federal do Amapá-UNIFAP, optou-se por fazer uma apresentação geral de Macapá.

4.1 CONTEXTO ESPACIAL E SÓCIO-ECONÔMICO DO MUNICÍPIO

A República Federativa do Brasil é formada por 26 Estados e 1 Distrito federal, os quais estão divididos em cinco regiões: (1) Norte, composta pelos estados: Pará, Amazonas, Amapá, Roraima, Acre, Rondônia e Tocantins; (2) Nordeste, composta pelos estados: Maranhão, Piauí, Ceará, Rio Grande do Norte, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe e Bahia; (3) Sudeste, formada pelos estados: Minas Gerais, Espírito Santo, Rio de Janeiro e São Paulo; (4) Sul, formada pelos estados: Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul; (5) Centro-Oeste, composta pelos estados: Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás e Distrito Federal (ver figura 2).

Figura 2: Mapa do Brasil Dividido em Estados e Regiões.

O Estado do Amapá possui 16 municípios, uma população de 750.912 habitantes (IBGE-2014) e sua superfície é de 142828,52 Km². Localiza-se na parte setentrional do Brasil, na encosta leste do Maciço das Guianas, sendo banhado pelo Oceano Atlântico e pelo estuário do Rio Amazonas (ver figura 3).

O Município de Macapá, capital do Estado do Amapá, foi criado com Lei Provincial nº 281, de 6 de setembro de 1856, é delimitada ao norte por Cutias e Amapá, ao sul por Santana, ao leste é delimitada pelo Rio Amazonas e Itaubal, já pelo oeste restringisse a Santana, Ferreira Gomes e Porto Grande (ver figura 3). Possui uma área de 6502,119 Km² e tem uma população de aproximadamente 446757 habitantes (IBGE, 2014). A economia do município é fundamentada no comércio, e houve uma arrecadação de R$ 639.779.421,00 milhões de reais em 2014 (www.macapa.ap.gov.br), e o meio de transporte interno é o rodoviário, enquanto que o externo é fluvial e aéreo (Site do Governo do Estado do Amapá).

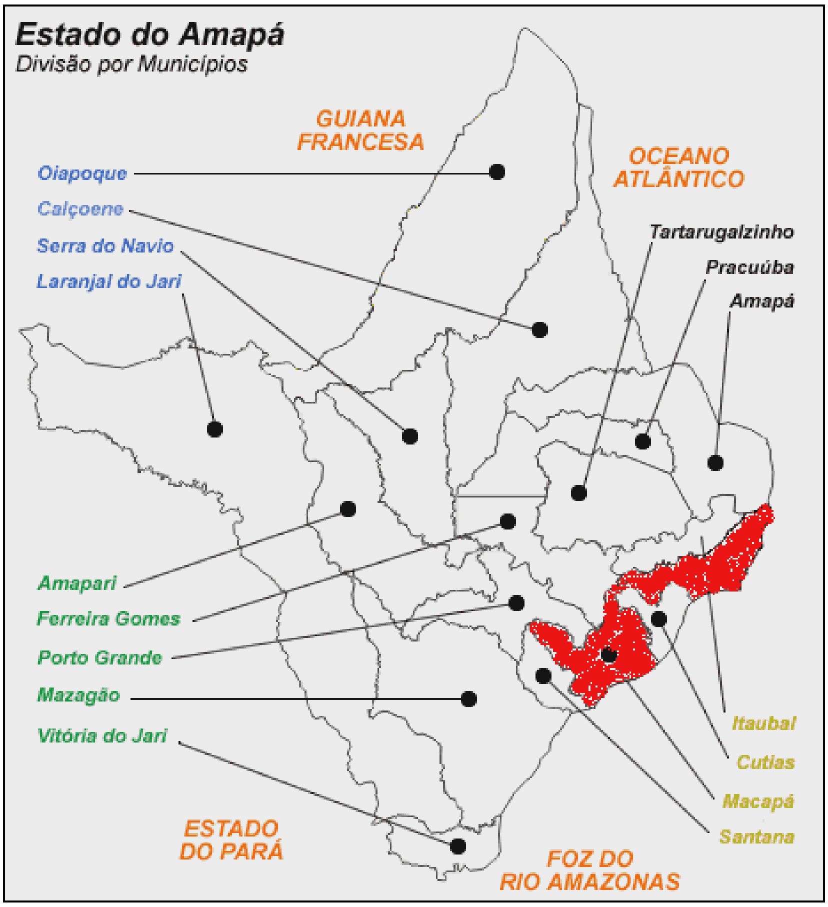


Figura 3: Localização de Macapá no Amapá.

4.2 APRESENTAÇÃO DO AMBIENTE INVESTIGADO

Esta pesquisa desenvolveu uma de suas atividades em uma batedeira de açaí da cidade de Macapá-AP, no bairro das Pedrinhas, a qual serviu de experimento para trabalhar a análise do preço do fruto do açaí. Também se coletou informações na biblioteca da UNIFAP e UEAP quanto à produção de açaí.

4.3 SUJEITOS DA PESQUISA

A referida pesquisa teve por público uma batedeira de açaí localizado no bairro das Pedrinhas em Macapá-AP. O proprietário se mostrou favorável e receptivo ao contribuir com a coleta de dados para a referida pesquisa.

Quanto ao acesso às literaturas, as bibliotecas das duas universidades (UNIFAP e UEAP) apresentaram pouca literatura sobre a produção de açaí relacionado ao Estado do Amapá, contudo, foi possível desenvolver a pesquisa.

4.4 TIPO E INSTRUMENTOS DA PESQUISA

Quanto ao tipo de pesquisa, a mesma se caracteriza como um estudo de caso, pois os resultados alcançados não podem ser generalizados, pois é de caráter único. Isto condiz com o conceito de Yin (2005, p. 32) que diz: “um estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos”. Yin (2005) defende que as evidências de uma pesquisa do tipo estudo de caso devam vir de seis fontes diferentes, são elas: documento, registros em arquivos, entrevistas, observação direta, observação participante e artefatos físicos. Ainda destaca:

> Os procedimentos utilizados para coletar cada tipo de evidência devem ser desenvolvidos e administrados independentemente, a fim de garantir que cada fonte seja adequadamente utilizada. Nem todas as fontes serão importantes para todos os estudos de caso (YIN, 2005, p. 124).

Portanto, durante a investigação foi utilizado para coleta de dados um questionário**.**

A análise dos dados foi de forma qualitativa, por meio de produção textual, pois deu ênfase aos processos de modelagem matemática utilizando a interpolação para encontrar um polinômio que melhor expresse os dados coletados.

Tal produção científica se deu no período de agosto a dezembro de 2016. As mesmas foram desenvolvidas utilizando a Modelagem Matemática nos processos de aplicação na produção de açaí.

4.5 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Como a Modelagem Matemática parte de uma situação real, foi elaborado e aplicado um questionário com o objetivo de se fazer o levantamento do preço da saca de açaí junto ao proprietário de uma batedeira de açaí.

Para melhor produção dessa pesquisa, optou-se utilizar como instrumento de cálculo os aplicativos Microsoft Excel 2010, Matriz, Projeto Gauss e GeoGebra 5, que são alguns dos programas apropriados para resoluções de problemas envolvendo sistemas lineares e a interpolação polinomial de funções.

O Excel e o GeoGebra serviram como recurso para representação gráfica. Ambos aplicativos são de uso livre e de fácil utilização. O uso desses recursos computacionais, durante a intervenção, foi necessário em virtude das problemáticas propostas. Ressalta-se que os aplicativos foram utilizados como apoio na resolução de cálculos matemáticos. Para melhor descrição da pesquisa, temos a tabela abaixo.

Tabela 2: Detalhamento da intervenção.

MOMENTO	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS
Momento 1	Apresentação da proposta de intervenção e do tema geral escolhido. A partir desse tema, elaborou-se uma situação/problema que foi resolvido utilizando a interpolação polinomial. Nesta investigação foram utilizados livros, revistas, internet, etc.
Momento 2	A elaboração do referencial teórico, assim como o processo de modelação das situações reais, ou seja, a aplicação nos problemas reais.
Momento 3	Análise dos resultados, assim como a orientação e avaliação do professor orientador.

Fonte: Autor da Pesquisa.

5 APLICAÇÕES

Este capítulo abordará sobre algumas aplicações do contexto amapaense como o estudo da produção e variação do preço do açaí, fruto típico de nossa região. Será destacada a busca de um polinômio ou função de grau n, o qual poderá esboçar de forma aproximada os dados em análise.

5.1 APLICAÇÃO SOBRE O FRUTO DO AÇAI

5.1.1 Preço da saca de açaí

Quanto ao levantamento do preço da saca, o mesmo foi feito consultando-se o preço do açaí em uma batedeira (ponto comercial que produz e comercializa o vinho do fruto) localizado no bairro das Pedrinhas em Macapá-AP. O proprietário é o senhor Antônio dos Santos que trabalha com o açaí há mais de 30 anos. O senhor Antônio informou, por meio de um questionário, o preço médio da saca de açaí ao longo do ano de 2015. Com esses dados, montou-se a seguinte tabela.

Tabela 3: Preço da saca do açaí durante o ano.

MÊS	PREÇO
Janeiro	R$ 114,00
Fevereiro	R$ 132,00
Março	R$ 141,60
Abril	R$ 142,80
Maio	R$ 141,60
Junho	R$ 134,40
Julho	R$ 130,80
Agosto	R$ 96,00
Setembro	R$ 104,40
Outubro	R$ 94,80
Novembro	R$ 98,40
Dezembro	R$ 102,00

Fonte: Dados da pesquisa.

Com os dados coletados, esboçou-se o gráfico de dispersão com o preço do açaí em cada mês do ano com o auxílio da planilha eletrônica Excel, onde o eixo vertical corresponde ao preço em reais e o eixo horizontal corresponde ao tempo, expresso em meses. Logo se tem:

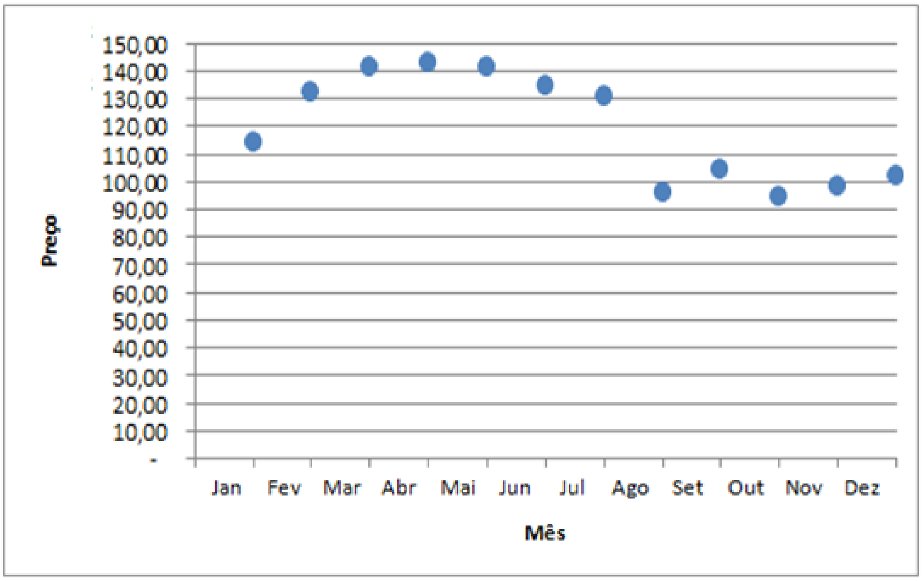


Gráfico 3: Gráfico de dispersão gerado pela planilha, representando o preço da saca de açaí por mês.

Diante do gráfico, questiona-se se há alguma função, nem que aproximada, a qual melhor represente os pontos gerado pela planilha. Entretanto, como vimos no capítulo 3, existe uma única função polinomial de grau no máximo 11, que passa pelos 12 pontos destacados no gráfico, que genericamente pode ser assim escrito:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11}$$

Para determinarmos os coeficientes a_i, para i=0,...,11, do polinômio acima, é inviável usarmos as técnica de interpolação vistas neste trabalho, de forma manual, pois dispenderíamos bastante tempo nesta empreitada e o risco de erros nos cálculos manuais seriam acentuados. Portanto, para ganharmos tempo nos cálculos e obtermos certa precisão nos resultados, vamos usar a planilha de calculo Excel para encontrarmos os valores dos coeficientes de P(x).

Fazendo cada mês corresponder aos seus respectivos números e considerando a condição básica para a interpolação:

$P(x_i) = f(x_i)$ para i=0,...,11.

Temos, desse modo:

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1^2 + a_3 \times 1^3 + a_4 \times 1^4 + a_5 \times 1^5 + a_6 \times 1^6 + a_7 \times 1^7 + a_8 \times 1^8 + a_9 \times 1^9 + a_{10} \times 1^{10} + a_{11} \times 1^{11} = 114 \\
a_0 + a_1 \times 2 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^3 + a_4 \times 2^4 + a_5 \times 2^5 + a_6 \times 2^6 + a_7 \times 2^7 + a_8 \times 2^8 + a_9 \times 2^9 + a_{10} \times 2^{10} + a_{11} \times 2^{11} = 132 \\
a_0 + a_1 \times 3 + a_2 \times 3^2 + a_3 \times 3^3 + a_4 \times 3^4 + a_5 \times 3^5 + a_6 \times 3^6 + a_7 \times 3^7 + a_8 \times 3^8 + a_9 \times 13^9 + a_{10} \times 3^{10} + a_{11} \times 3^{11} = 141{,}6 \\
a_0 + a_1 \times 4 + a_2 \times 4^2 + a_3 \times 4^3 + a_4 \times 4^4 + a_5 \times 4^5 + a_6 \times 4^6 + a_7 \times 4^7 + a_8 \times 4^8 + a_9 \times 4^9 + a_{10} \times 4^{10} + a_{11} \times 4^{11} = 142{,}8 \\
a_0 + a_1 \times 5 + a_2 \times 5^2 + a_3 \times 5^3 + a_4 \times 5^4 + a_5 \times 5^5 + a_6 \times 5^6 + a_7 \times 5^7 + a_8 \times 5^8 + a_9 \times 5^9 + a_{10} \times 5^{10} + a_{11} \times 5^{11} = 141{,}6 \\
a_0 + a_1 \times 6 + a_2 \times 6^2 + a_3 \times 6^3 + a_4 \times 6^4 + a_5 \times 6^5 + a_6 \times 6^6 + a_7 \times 6^7 + a_8 \times 6^8 + a_9 \times 6^9 + a_{10} \times 6^{10} + a_{11} \times 6^{11} = 134{,}4 \\
a_0 + a_1 \times 7 + a_2 \times 7^2 + a_3 \times 7^3 + a_4 \times 7^4 + a_5 \times 7^5 + a_6 \times 7^6 + a_7 \times 7^7 + a_8 \times 7^8 + a_9 \times 7^9 + a_{10} \times 7^{10} + a_{11} \times 7^{11} = 130{,}8 \\
a_0 + a_1 \times 8 + a_2 \times 8^2 + a_3 \times 8^3 + a_4 \times 8^4 + a_5 \times 8^5 + a_6 \times 8^6 + a_7 \times 8^7 + a_8 \times 8^8 + a_9 \times 8^9 + a_{10} \times 8^{10} + a_{11} \times 8^{11} = 96 \\
a_0 + a_1 \times 9 + a_2 \times 9^2 + a_3 \times 9^3 + a_4 \times 9^4 + a_5 \times 9^5 + a_6 \times 9^6 + a_7 \times 9^7 + a_8 \times 9^8 + a_9 \times 9^9 + a_{10} \times 9^{10} + a_{11} \times 9^{11} = 104{,}4 \\
a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + a_4 \times 10^4 + a_5 \times 10^5 + a_6 \times 10^6 + a_7 \times 10^7 + a_8 \times 10^8 + a_9 \times 10^9 + a_{10} \times 10^{10} + a_{11} \times 10^{11} = 94{,}8 \\
a_0 + a_1 \times 11 + a_2 \times 11^2 + a_3 \times 11^3 + a_4 \times 11^4 + a_5 \times 11^5 + a_6 \times 11^6 + a_7 \times 11^7 + a_8 \times 11^8 + a_9 \times 11^9 + a_{10} \times 11^{10} + a_{11} \times 11^{11} = 98{,}4 \\
a_0 + a_1 \times 12 + a_2 \times 12^2 + a_3 \times 12^3 + a_4 \times 12^4 + a_5 \times 12^5 + a_6 \times 12^6 + a_7 \times 12^7 + a_8 \times 12^8 + a_9 \times 12^9 + a_{10} \times 12^{10} + a_{11} \times 12^{11} = 102
\end{cases}
$$

O que corresponde a um sistema de equações lineares, com 12 equações e 12 incógnitas (que são os coeficientes que queremos determinar). Escrevendo o sistema acima na notação matricial, tem-se:

$$A \cdot x = b$$

Onde:

$$
A = \begin{Bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} & 2^{11} \\
1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 & 3^8 & 3^9 & 3^{10} & 3^{11} \\
1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 & 4^5 & 4^6 & 4^7 & 4^8 & 4^9 & 4^{10} & 4^{11} \\
1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 & 5^6 & 5^7 & 5^8 & 5^9 & 5^{10} & 5^{11} \\
1 & 6 & 6^2 & 6^3 & 6^4 & 6^5 & 6^6 & 6^7 & 6^8 & 6^9 & 6^{10} & 6^{11} \\
1 & 7 & 7^2 & 7^3 & 7^4 & 7^5 & 7^6 & 7^7 & 7^8 & 7^9 & 7^{10} & 7^{11} \\
1 & 8 & 8^2 & 8^3 & 8^4 & 8^5 & 8^6 & 8^7 & 8^8 & 8^9 & 8^{10} & 8^{11} \\
1 & 9 & 9^2 & 9^3 & 9^4 & 9^5 & 9^6 & 9^7 & 9^8 & 9^9 & 9^{10} & 9^{11} \\
1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 & 10^6 & 10^7 & 10^8 & 10^9 & 10^{10} & 10^{11} \\
1 & 11 & 11^2 & 11^3 & 11^4 & 11^5 & 11^6 & 11^7 & 11^8 & 11^9 & 11^{10} & 11^{11} \\
1 & 12 & 12^2 & 12^3 & 12^4 & 12^5 & 12^6 & 12^7 & 12^8 & 12^9 & 12^{10} & 12^{11}
\end{Bmatrix}
$$

$$
x = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{Bmatrix}
\qquad
b = \begin{Bmatrix} 114 \\ 132 \\ 141{,}6 \\ 142{,}8 \\ 141{,}6 \\ 134{,}4 \\ 130{,}8 \\ 96 \\ 104{,}4 \\ 94{,}8 \\ 98{,}4 \\ 102 \end{Bmatrix}
$$

Os valores das potências da Matriz A podem ser obtidas facilmente com o auxílio do Excel, usando a função "POTÊNCIA", como mostra, por exemplo, a figura abaixo:

N17 | f_x =POTÊNCIA(B17;N4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
3	MESES	BASES		EXPOENTES										
4				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5		X		X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8	X^9	X^10	X^11
6	JAN	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	FEV	2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
8	MAR	3	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147
9	ABR	4	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576	4194304
10	MAI	5	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625	48828125
11	JUN	6	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176	362797056
12	JUL	7	1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249	1977326743
13	AGO	8	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824	8589934592
14	SET	9	1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401	31381059609
15	OUT	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000	100000000000
16	NOV	11	1	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601	285311670611
17	DEZ	12	1	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61917364224	743008370688

Figura 4: Calculo do valor das potências da Matriz A no Excel.

Abaixo, a Matriz A com seus termos:

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 & 2048 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 & 59049 & 177147 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 & 1048576 & 4194304 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 & 1953125 & 9765625 & 48828125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 & 10077696 & 60466176 & 362797056 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 & 282475249 & 1977326743 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728 & 1073741824 & 8589934592 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 & 3486784401 & 31381059609 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 & 10000000000 & 100000000000 \\ 1 & 11 & 121 & 1331 & 14641 & 161051 & 1771561 & 19487171 & 214358881 & 2357947691 & 25937424601 & 285311670611 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 & 20736 & 248832 & 2985984 & 35831808 & 429981696 & 5159780352 & 61917364224 & 743008370688 \end{Bmatrix}$$

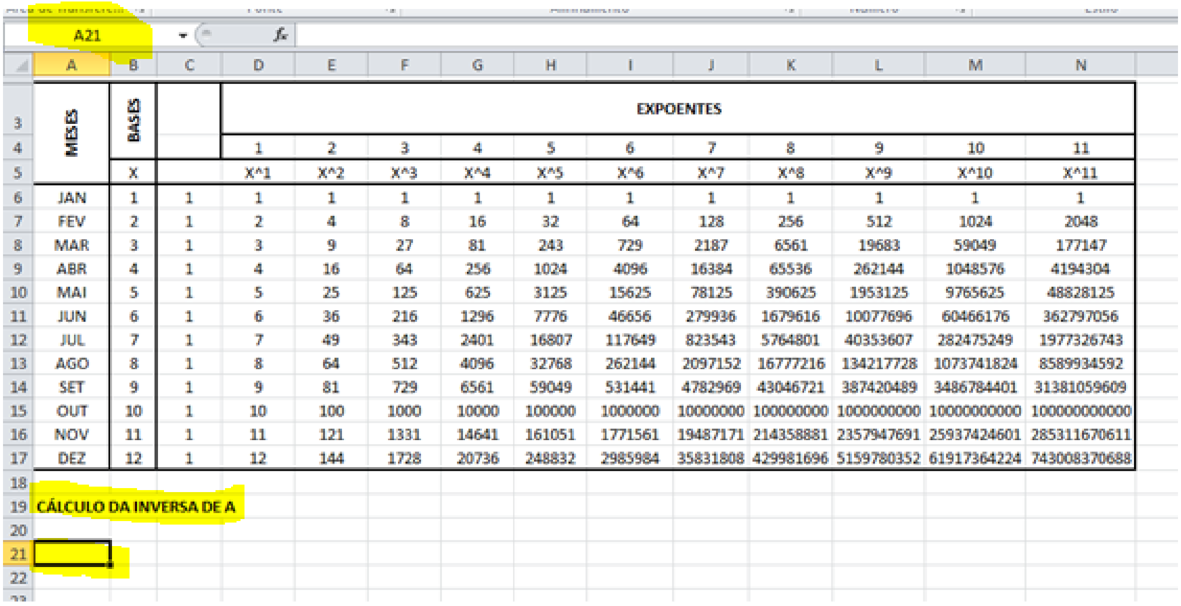
Figura 5: Matriz A.

Considerando que a matriz A (matriz de Vandermonde) possui inversa, podemos calcular os valores do vetor x usando a igualdade:

$x = A^{-1} \cdot b$ (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1990, p. 31).

Novamente, vamos recorrer ao Excel para calcularmos A^{-1} (a matriz inversa de A), aplicando a função MATRIZ.INVERSO como segue:

I - Com os termos da Matriz A já calculados (ou digitados) na planilha, escolha uma célula onde vai ser inerido a função MATRIZ.INVERSO como, por exemplo, mostra a imagem logo abaixo:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
3	MESES	BASES		EXPOENTES										
4				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5		X		X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8	X^9	X^10	X^11
6	JAN	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	FEV	2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
8	MAR	3	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147
9	ABR	4	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576	4194304
10	MAI	5	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625	48828125
11	JUN	6	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176	362797056
12	JUL	7	1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249	1977326743
13	AGO	8	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824	8589934592
14	SET	9	1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401	31381059609
15	OUT	10	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000	100000000000
16	NOV	11	1	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601	285311670611
17	DEZ	12	1	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61917364224	743008370688
18														
19	CÁLCULO DA INVERSA DE A													
20														
21														
22														

Figura 6: Termos da Matriz A e a célula A21 selecionada no Excel.

II - Um dos caminhos para inserir a função MATRIZ.INVERSO, pode ser a sequência indicada na figura a seguir:

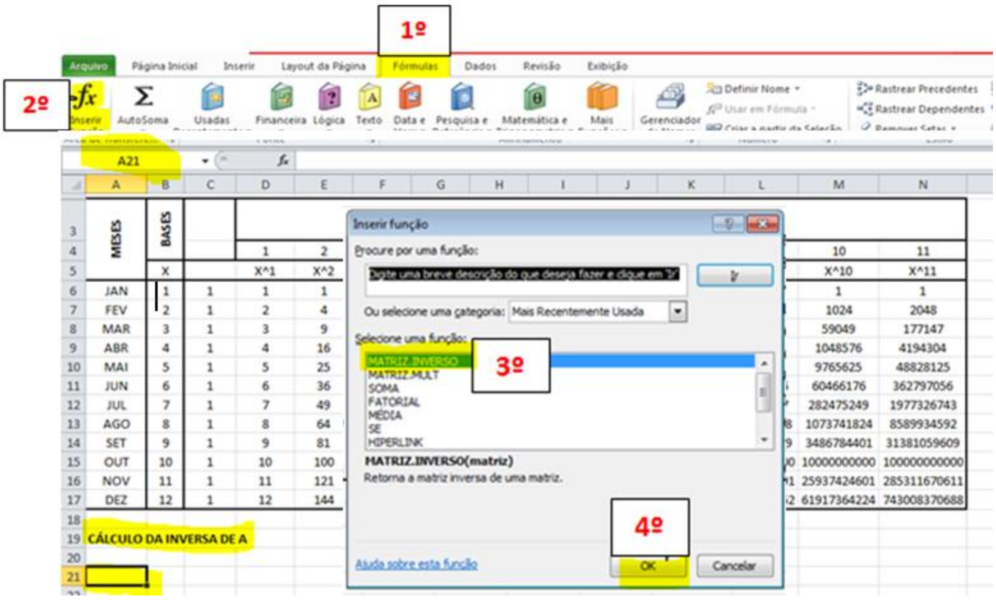


Figura 7: Uma forma de inserir a função MATRIZ.INVERSO na planilha.

III - Logo em seguida, a Caixa de Diálogo “Argumentos da função” se abrirá. Para inserir o intervalo ocupado pelos elementos da Matriz A como argumento, selecione com o mouse todas as células dessa região e pressione “OK” (em nosso exemplo, após a seleção, aparecerá o intervalo C6:N17 no campo "Matriz" como mostra a imagem a seguir).

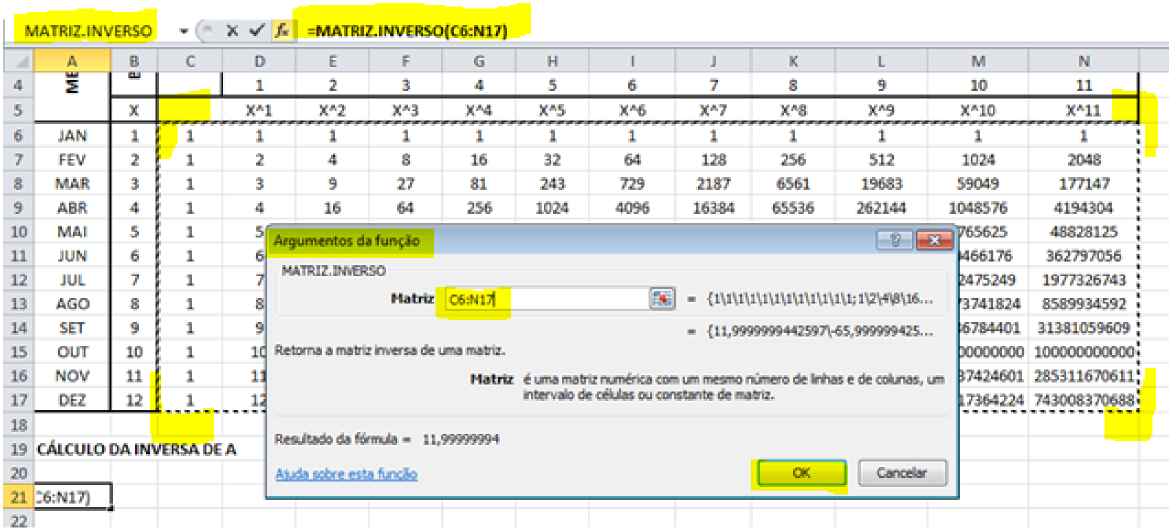


Figura 8: Inserção do argumento da função MATRIZ.INVERSO.

IV - Na célula onde foi inserida a função será calculado o elemento da primeira linha e primeira coluna da Matriz inversa de A (em nosso caso, esse valor é igual a 12). Para visualizar a matriz A^{-1} como um todo no Excel, é necessário selecionar a célula onde está este elemento e expandir a área até o tamanho da matriz A, 12 x 12, conforme a figura abaixo. Por fim, com a área selecionada, clique na barra de fórmulas e simultaneamente aperte **Ctrl + Shift + Enter**.

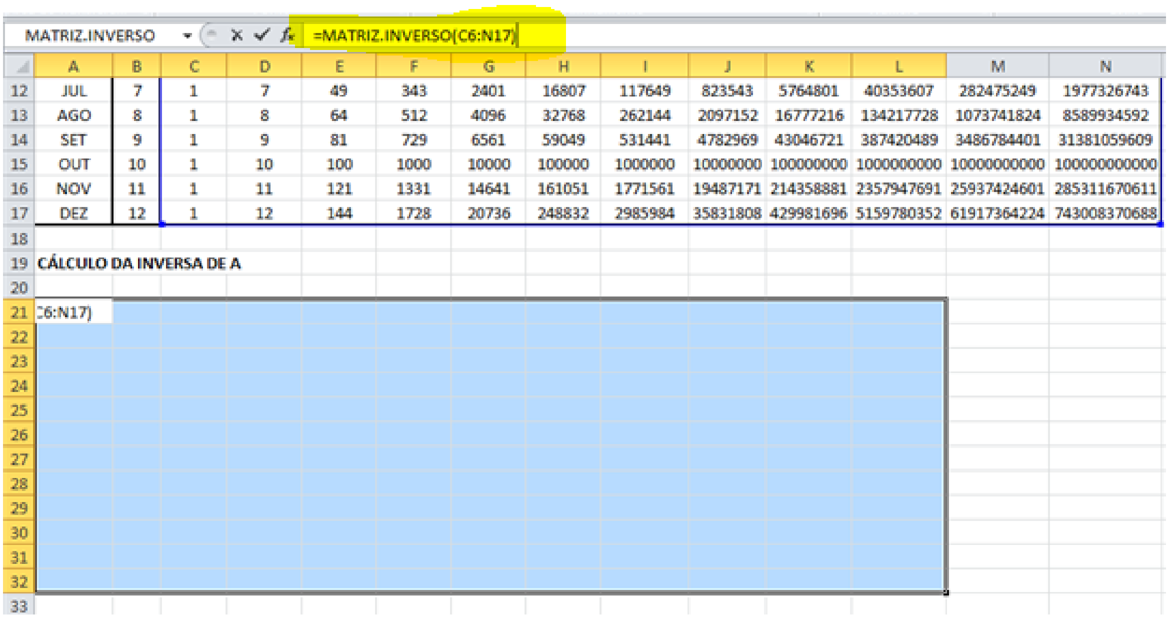
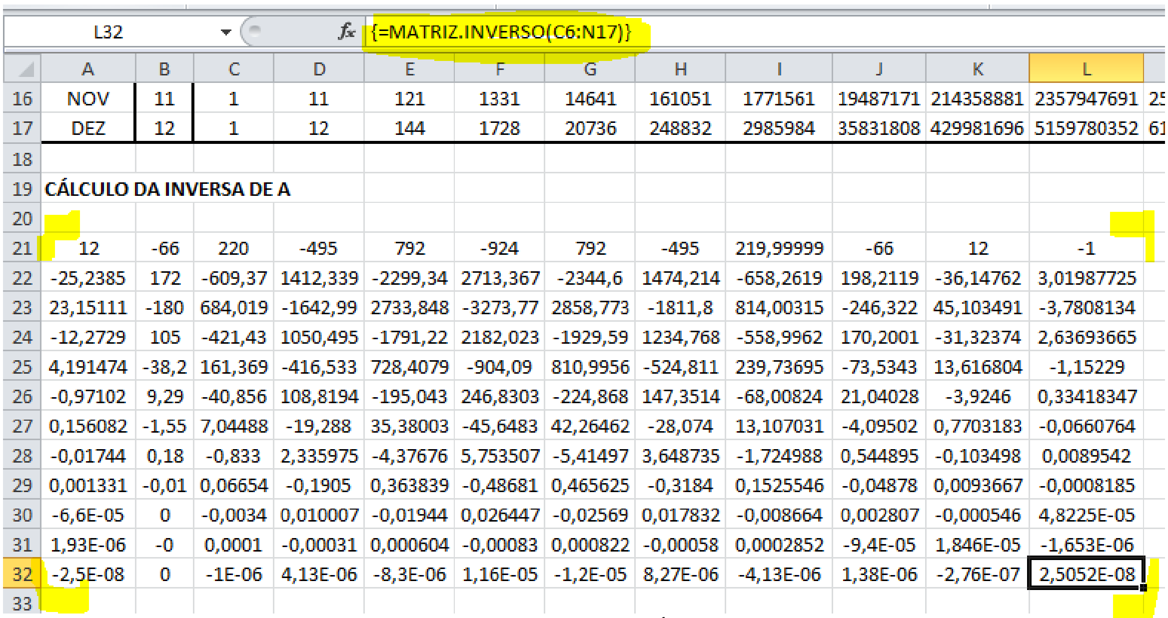


Figura 9: Expansão da área até o tamanho 12x12.

V - Esse comando ativa a função matricial do Excel que preencherá todas as células selecionadas correspondentes aos termos da matriz A^{-1}, como mostrado na seguinte figura:



L32 f_x {=MATRIZ.INVERSO(C6:N17)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
16	NOV	11	1	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25
17	DEZ	12	1	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61
18													
19	CÁLCULO DA INVERSA DE A												
20													
21	12	-66	220	-495	792	-924	792	-495	219,99999	-66	12	-1	
22	-25,2385	172	-609,37	1412,339	-2299,34	2713,367	-2344,6	1474,214	-658,2619	198,2119	-36,14762	3,01987725	
23	23,15111	-180	684,019	-1642,99	2733,848	-3273,77	2858,773	-1811,8	814,00315	-246,322	45,103491	-3,7808134	
24	-12,2729	105	-421,43	1050,495	-1791,22	2182,023	-1929,59	1234,768	-558,9962	170,2001	-31,32374	2,63693665	
25	4,191474	-38,2	161,369	-416,533	728,4079	-904,09	810,9956	-524,811	239,73695	-73,5343	13,616804	-1,15229	
26	-0,97102	9,29	-40,856	108,8194	-195,043	246,8303	-224,868	147,3514	-68,00824	21,04028	-3,9246	0,33418347	
27	0,156082	-1,55	7,04488	-19,288	35,38003	-45,6483	42,26462	-28,074	13,107031	-4,09502	0,7703183	-0,0660764	
28	-0,01744	0,18	-0,833	2,335975	-4,37676	5,753507	-5,41497	3,648735	-1,724988	0,544895	-0,103498	0,0089542	
29	0,001331	-0,01	0,06654	-0,1905	0,363839	-0,48681	0,465625	-0,3184	0,1525546	-0,04878	0,0093667	-0,0008185	
30	-6,6E-05	0	-0,0034	0,010007	-0,01944	0,026447	-0,02569	0,017832	-0,008664	0,002807	-0,000546	4,8225E-05	
31	1,93E-06	-0	0,0001	-0,00031	0,000604	-0,00083	0,000822	-0,00058	0,0002852	-9,4E-05	1,846E-05	-1,653E-06	
32	-2,5E-08	0	-1E-06	4,13E-06	-8,3E-06	1,16E-05	-1,2E-05	8,27E-06	-4,13E-06	1,38E-06	-2,76E-07	2,5052E-08	
33													

Figura 10: Termos da Matriz A^{-1} calculados no Excel.

Com a matriz A^{-1} calculada na planilha, vamos usá-la para determinarmos os termos do vetor x dos coeficientes, multiplicando-a pelo vetor b (cujos elementos devem ser digitados na planilha como exemplificado na figura abaixo). A multiplicação de matrizes no Excel é simples de ser feita através da função MATRIZ.MULT, bastando para isso, escolher a célula onde será inserida a função como mostrado na imagem que se segue:

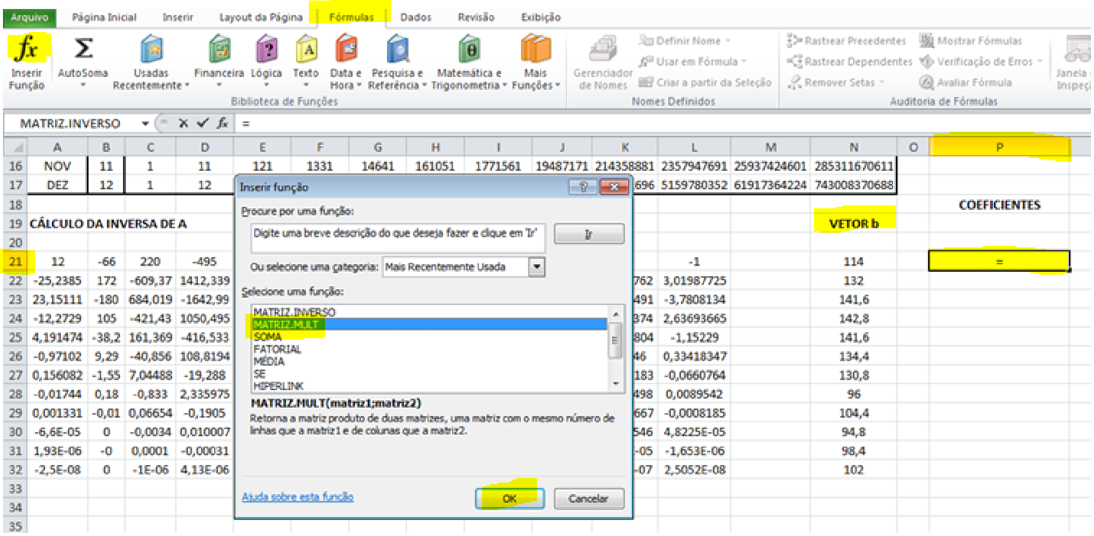


Figura 11: Inserindo a função MATRIZ.MULT.

Em seguida, na Caixa de Diálogo “Argumentos da função”, vamos inserir o intervalo ocupado pelos elementos da Matriz A^{-1} como primeiro argumento. Para isso, selecione com o mouse todas as células dessa região e pressione “OK” (em nosso exemplo, após a seleção, aparecerá o intervalo A21:L32 no campo “Matriz1” como mostra a imagem a seguir).

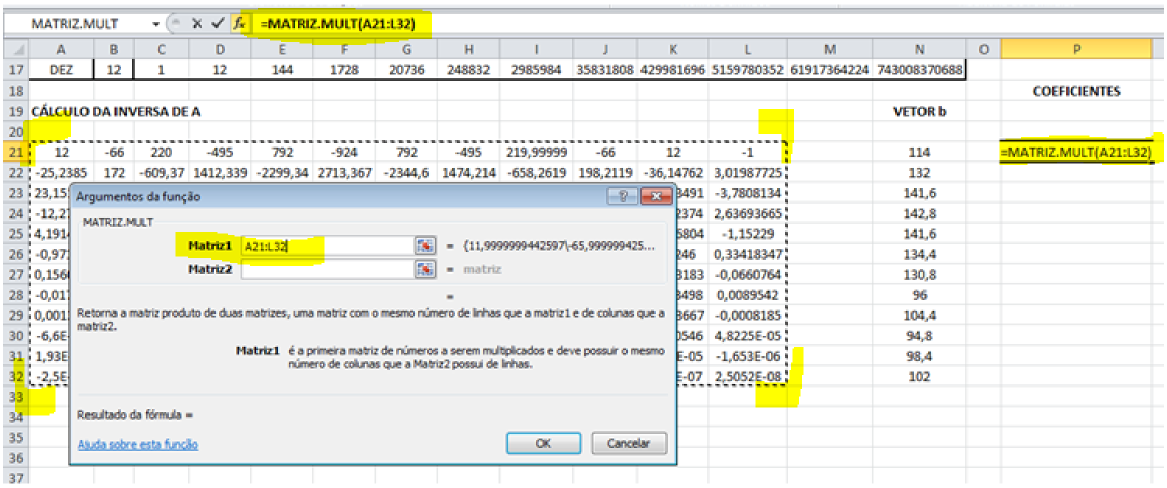


Figura 12: Definindo o primeiro argumento da função MATRIZ.MULT.

Agora, para inserir o segundo argumento, clique no campo “Matriz2” e em seguida selecione as células que contem os termos do vetor b e pressione “OK” (em nosso exemplo, após a seleção, aparecerá o intervalo N21:N32 no campo “Matriz2” como mostra a figura abaixo).

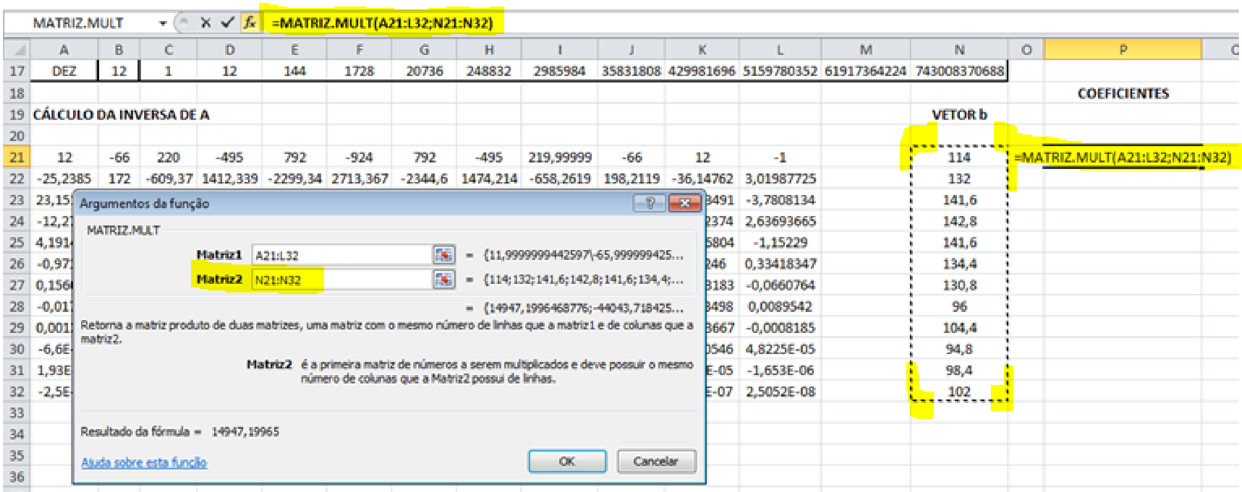


Figura 13: Definindo o segundo argumento da função MATRIZ.MULT.

Novamente o resultado será na forma de uma única célula. Para enxergar o vetor x como um todo no Excel é necessário ativar a função matricial do Excel selecionando a célula onde foi inserido a função MATRIZ.MULT e expandir a área até o tamanho do vetor 12 x 1. Com a área selecionada, clique na barra de fórmulas e simultaneamente aperte **Ctrl + Shift + Enter**. Automaticamente o Excel criará a tabela que representa o vetor x conforme a figura abaixo:

N	O	P	Q
31381059609			
100000000000			
285311670611			
743008370688		COEFICIENTES	
		CALCULADOS	
VETOR b		VETOR x	
114		14947,1996468776	
132		-44043,7184259715	
141,6		53882,2251753589	
142,8		-36504,2569394614	
141,6		15413,8288668825	
134,4		-4298,14483562885	
130,8		813,228396409607	
96		-104,971099559298	
104,4		9,09952358181213	
94,8		-0,506413677805817	
98,4		0,0163373011791332	
102		-0,000232112788827535	

Figura 14: Coeficientes calculados.

Com os valores dos coeficientes obtidos, podemos finalmente construir o polinômio interpolador procurado, como segue:

$$P(x) = 14947{,}1996468776 - 44043{,}7184259715x + 53882{,}2251753589x^2 - 36504{,}2569394614x^3 +$$

$$+15413{,}8288668825x^4 - 4298{,}14483562885x^5 + 813{,}228396409607x^6 - 104{,}971099559298x^7 +$$

$$+9{,}09952358181213x^8 - 0{,}506413677805817x^9 + 0{,}0163373011791332x^{10} - 0{,}000232112788827535x^{11}$$

Mias adiante, veremos um modo de se obter a forma algébrica e o gráfico da função interpolante diretamente no Excel, para polinômios de grau no máximo até seis.

5.1.1.1 Estimando o preço da saca de açaí

Agora, suponhamos que os dados da Tabela 3 fossem apenas referentes aos preços da saca do açaí nos meses ímpares e quiséssemos usá-lo para estimar os preços nos meses pares. Nesse caso, poderíamos determinar o polinômio de grau 5 que passa pelos pontos referentes aos 06 meses ímpares. O mesmo terá a seguinte configuração:

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Sendo que o valor de x corresponde ao mês estudado, e y=P(x) corresponde ao valor da saca de açaí no mês a ser analisado. E a solução seria por meio de sistema linear, cujas equações localizadas foram:

$$\begin{gathered}
a.1^5 + b.1^4 + c.1^3 + d.1^2 + e.1 + f = 114{,}00 \\
a + b + c + d + e + f = 114{,}00 \\
a.3^5 + b.3^4 + c.3^3 + d.3^2 + e.3 + f = 141{,}60 \\
243a + 81b + 27c + 9d + 3e + f = 141{,}60 \\
a.5^5 + b.5^4 + c.5 + d.5^2 + e.5 + f = 141{,}60 \\
3125a + 625b + 125c + 25d + 5e + f = 141{,}60 \\
a.7^5 + b.7^4 + c.7^3 + d.7^2 + e.7 + f = 130{,}80 \\
16807a + 2401b + 343c + 49d + 7e + f = 130{,}80 \\
a.9^5 + b.9^4 + c.9^3 + d.9^2 + e.9 + f = 104{,}40 \\
59049a + 6561b + 729c + 81d + 9e + f = 104{,}40 \\
a.11^5 + b.11^4 + c.11^3 + d.11^2 + e.11 + f = 98{,}40 \\
161051a + 14641b + 1331c + 121d + 11e + f = 98{,}40
\end{gathered}$$

Figura 15: As equações localizadas.

Temos então o Sistema:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}
a + b + c + d + e + f = 114{,}00 \\
243a + 81b + 27c + 9d + 3e + f = 141{,}60 \\
3125a + 625b + 125c + 25d + 5e + f = 141{,}60 \\
16807a + 2401b + 343c + 49d + 7e + f = 130{,}80 \\
59049a + 6561b + 729c + 81d + 9e + f = 104{,}40 \\
161051a + 14641b + 1331c + 121d + 11e + f = 98{,}40
\end{array}\right.}$$

Figura 16: O sistema de equações.

Escrevendo o sistema acima na notação matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \\ 161051 & 14641 & 1331 & 121 & 11 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114 \\ 141,6 \\ 141,6 \\ 130,8 \\ 104,4 \\ 98,4 \end{pmatrix}$$

Para determinarmos os coeficientes a,b,c,d,e,f , faremos uso do aplicativo MATRIZ, que calcula as incógnitas de forma direta. Este programa foi desenvolvido no ambiente DELPHI 7, pelo professor Linovaldo Santos (SANTOS, 2016). O aplicativo pode ser baixado através do link http://www.mediafire.com/download/f6415rwm257p1lq/Matriz.rar. O procedimento para o calculo é descrito a seguir:

1º - Na tela inicial do programa (como mostra figura abaixo), Clique na opção "Equações Lineares":

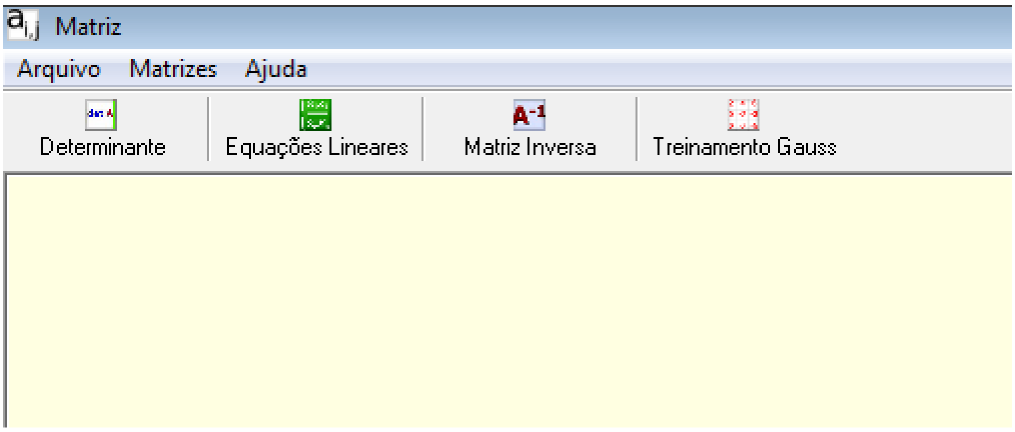


Figura 17: Tela inicial do Matriz.

2º - Na janela que se abrir, digite a ordem da matriz das potências no campo "ordem". No nosso exemplo, a ordem é 6. Em seguida clique no botão "Gerar Matriz" e digite os dados como mostra a figura a seguir:

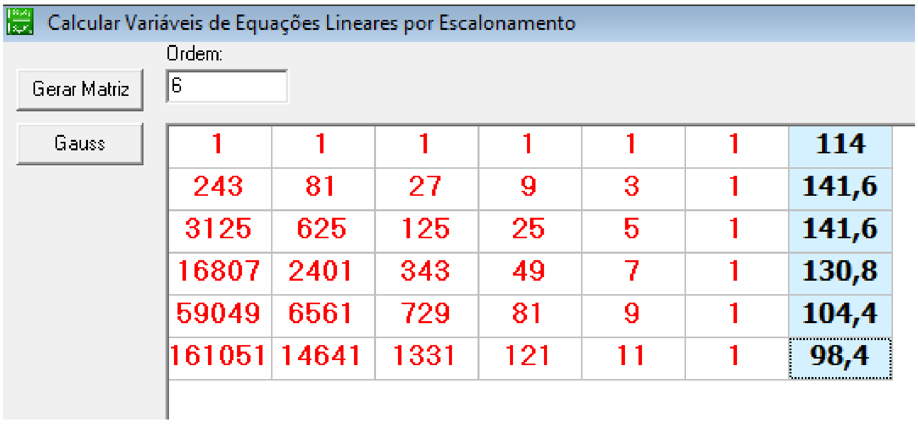


Figura 18: Aplicativo Matriz com os dados inseridos.

3º - Agora, para calcular o valor das incógnitas, clique em "Gauss". O resultado obtido é mostrado na figura seguinte:

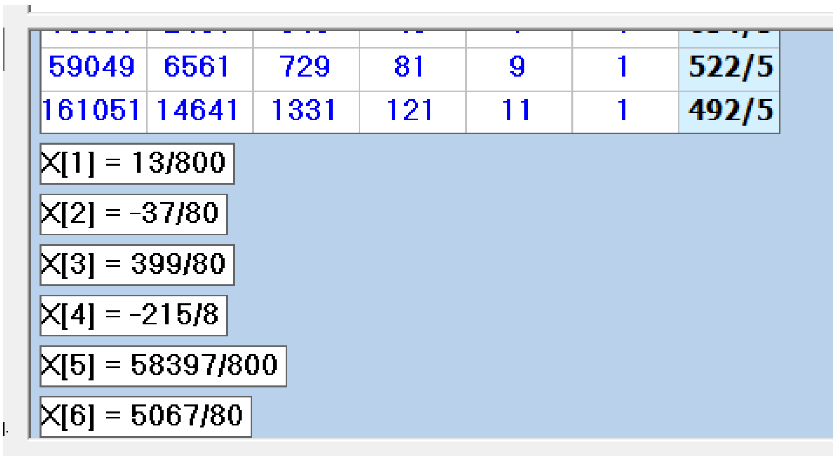


Figura 19: Aplicativo Matriz com as incógnitas calculadas.

O polinômio interpolador escrito com os coeficientes obtidos pelo aplicativo Matriz é:

$$P(x) = \frac{13}{800}x^5 - \frac{37}{80}x^4 + \frac{399}{80}x^3 - \frac{215}{8}x^2 + \frac{58397}{800}x + \frac{5067}{80}$$

Observe que o aplicativo calcula os coeficientes na forma fracionária. Se quiséssemos obter esses coeficientes na forma decimal, uma opção seria usar o aplicativo Projeto Gauss, que também calcula as incógnitas de forma direta. A figura abaixo mostra a tela inicia do programa com os dados já inseridos:

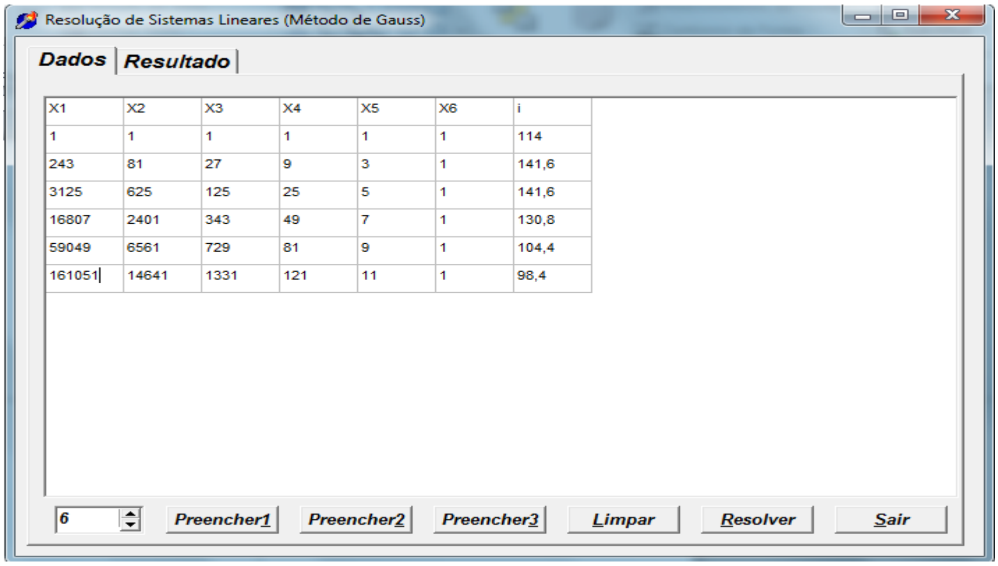


Figura 20: Aplicativo Projeto Gauss com os dados inseridos.

Após a inserção dos dados como mostrado na figura acima, clique no botão "Resolver". O aplicativo processa os cálculos e apresenta o resultado como mostra a figura a seguir:

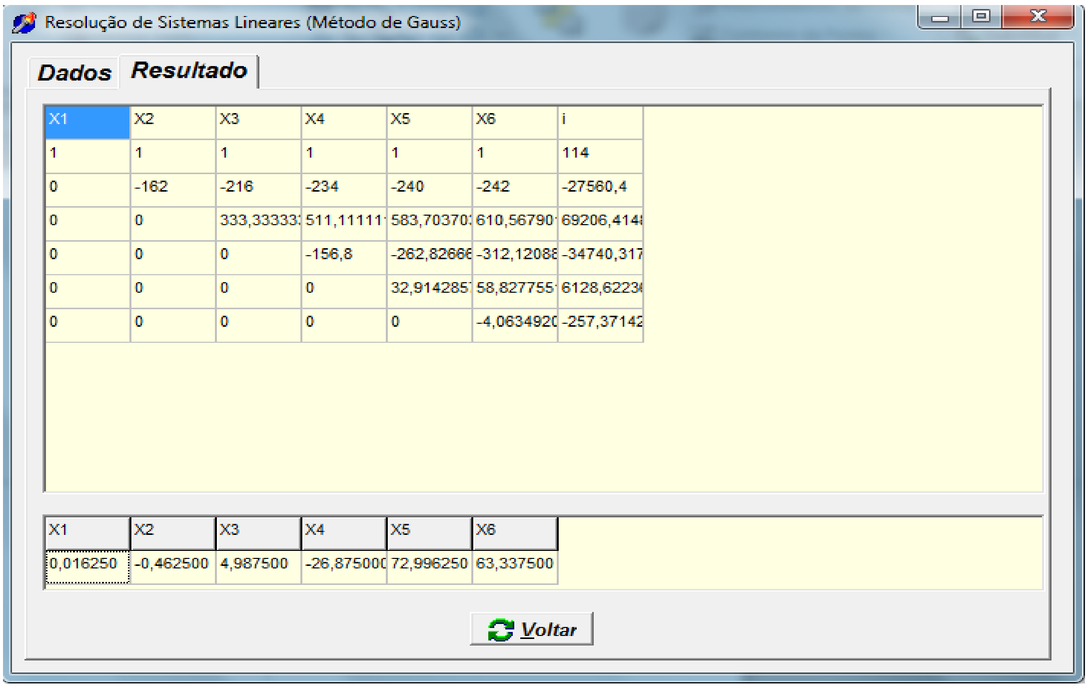


Figura 21: Os coeficientes calculados no aplicativo Projeto Gauss.

Assim, a função que melhor representa o gráfico do preço da saca de açaí envolvendo apenas os valores coletados nos meses ímpares do ano é:

$$P(x) = 0{,}01625x^5 - 0{,}4625x^4 + 4{,}9875x^3 - 26{,}875x^2 + 72{,}99625x + 63{,}3375$$

Como mencionado à página 42, uma maneira de se obter a forma analítica do polinômio interpolador e seu gráfico, de modo simultâneo, é usando o Excel da seguinte maneira:

I – digite os dados na planilha e os selecione. Em seguida, Clique no menu “Inserir” e, na seção “Gráficos”, selecione a opção “Dispersão”. Na sequência, clique no ícone “Dispersão somente com marcadores”. Todas essas ações estão ilustradas na figura abaixo:

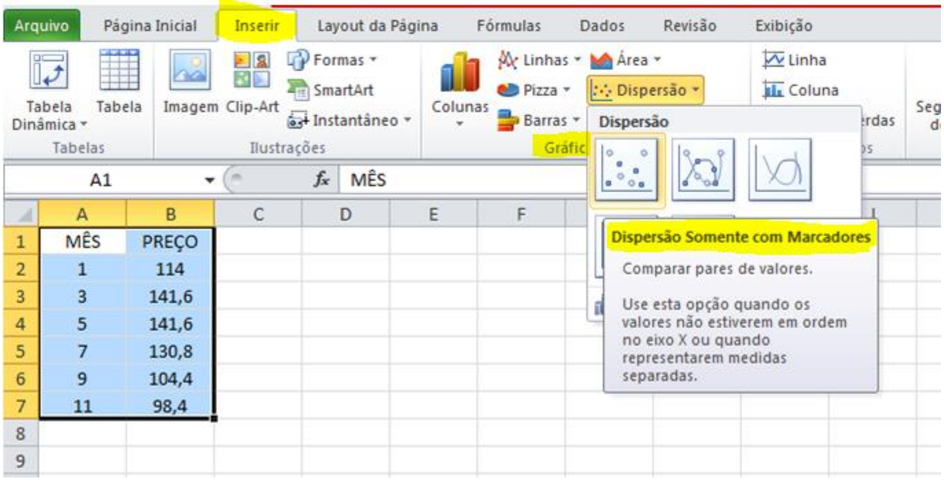


Figura 22: Ilustração com destaque dos primeiros comandos.

II – Logo após os comandos anteriores, o programa exibirá os pontos no plano cartesiano. Agora, com o botão direito do mouse, clique em um desses pontos. Na janela que se abrir, selecione a opção “Adicionar Linha de Tendência” como mostra a imagem seguinte:

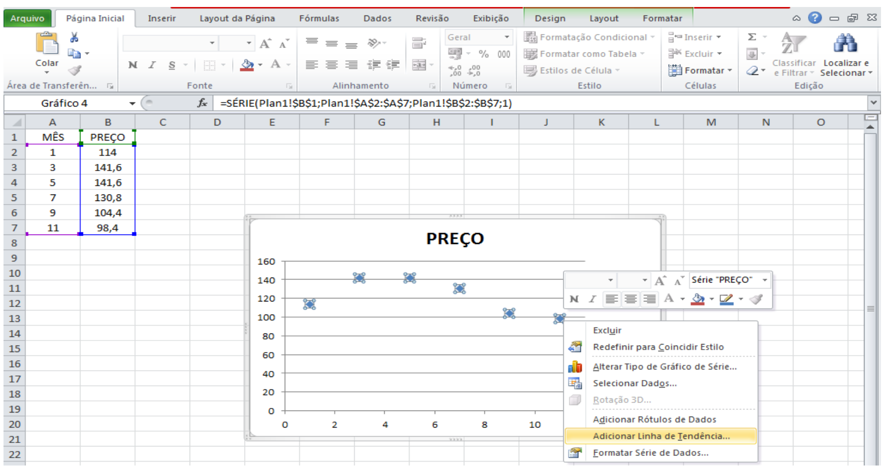


Figura 23: Selecionando a opção “Adicionar Linha de Tendência”.

III – Em seguida à seleção “Adicionar Linha de Tendência”, abrir-se-á a janela “Formatar Linha de Tendência”. Nesta janela, na seção “Tipo de Tendência/Regressão”, marque a opção “polinomial” e ao lado desta opção, no campo “ordem”, digite (ou selecione) a ordem do polinômio entre os valores disponíveis, que vão de um a seis (em nosso exemplo o grau é 5 - O aplicativo não permite grau maior que seis). Para exibir a função polinomial com seus coeficientes, marque a opção “Exibir Equação no Gráfico” na parte inferior da janela e em seguida clique em “Fechar”. Na figura abaixo estão destacados as ações deste grupo de comandos:

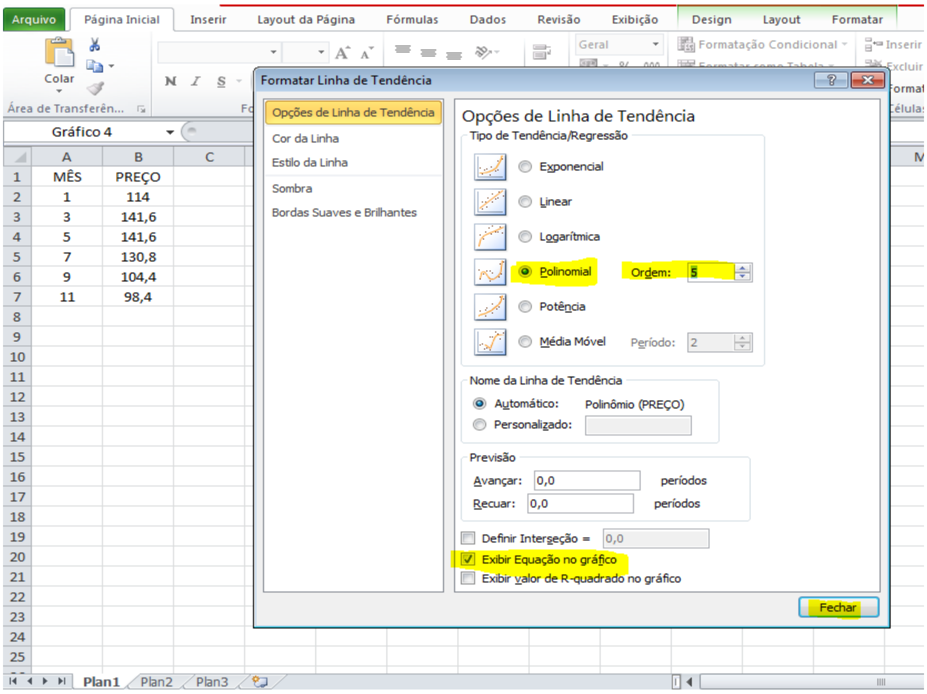


Figura 24: Janela “Formatar Linha de Tendência” aberta e com destaques.

Finalmente, como resultado dessa sequencia de comandos, obtemos o gráfico e a forma algébrica do polinômio interpolador como mostra a figura que segue:

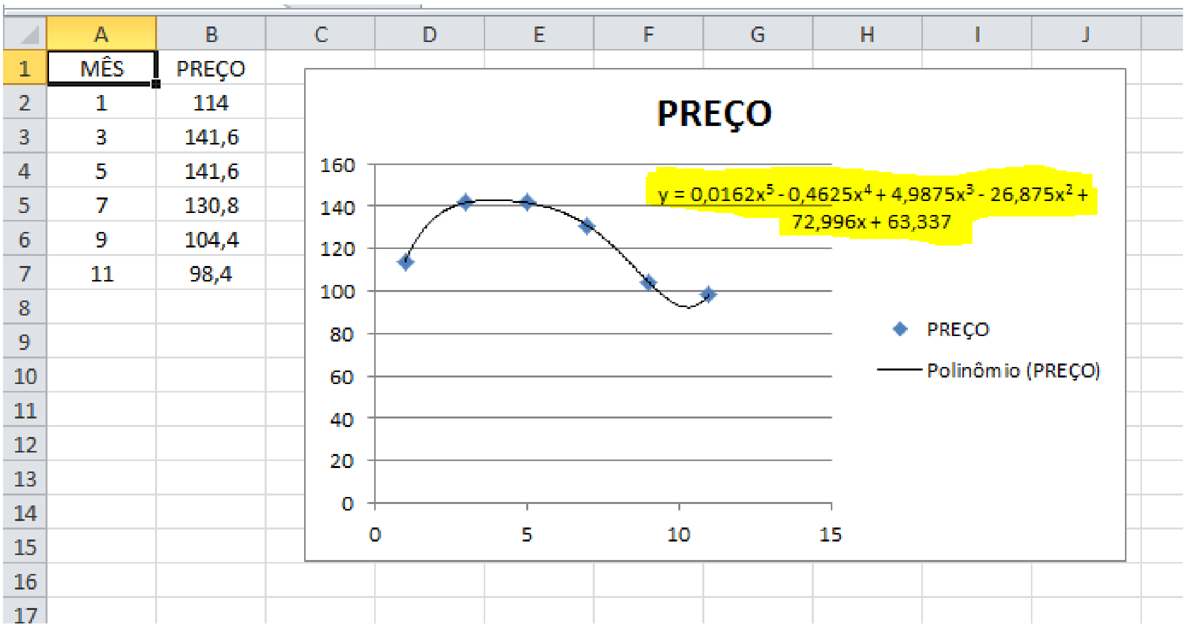


Figura 25: Gráfico da função e sua forma algébrica.

Comparando a função polinomial obtida pelo método descrito acima com a função calculada pelo aplicativo Projeto Gauss, por exemplo, vemos que há uma certa divergências entre alguns coeficientes em termos de casas decimais. Isso se dá devido aos arredondamentos nos cálculos processado pelo programa. Entretanto, como vimos anteriormente, qualquer que seja o método que se use para calcular o polinômio interpolador, devemos obter teoricamente a mesma expressão. Na prática, porém, nem sempre é assim, pois dependendo dos métodos (manuais e/ou computacionais) empregados na obtenção desse polinômio, poderão surgir erros que levarão à pequenas ou até mesmo grandes diferenças nos resultados.

Para verificarmos a validade do polinômio encontrado, podemos testá-lo, ao atribuirmos o mês do ano na função. Por exemplo, o mês de março, corresponde ao mês três. Substituindo o escalar três no polinômio interpolador obtido pelo aplicativo Projeto Gauss, teremos a seguinte disposição:

$$P(3) = 0{,}01625 \cdot 3^5 - 0{,}4625 \cdot 3^4 + 4{,}9875 \cdot 3^3 - 26{,}875 \cdot 3^2 + 72{,}99625 \cdot 3 + 63{,}3375$$

$$P(3) = 141{,}6$$

Observa-se que o valor encontrado corresponde ao valor da saca de açaí no mês de março (conforme tabela 3). Como o processo de modelagem matemática ocorreu com os valores dos meses ímpares, podemos fazer estimativas para os meses pares. Vejamos no mês de fevereiro (mês 2). A função terá a seguinte configuração:

$$P(2) = 0{,}01625 \cdot 2^5 - 0{,}4625 \cdot 2^4 + 4{,}9875 \cdot 2^3 - 26{,}875 \cdot 2^2 + 72{,}99625 \cdot 2 + 63{,}3375$$
$$P(2) = 134{,}85$$

Vejamos no mês de abril, mês 4. Temos:

$$P(4) = 0{,}01625 \cdot 4^5 - 0{,}4625 \cdot 4^4 + 4{,}9875 \cdot 4^3 - 26{,}875 \cdot 4^2 + 72{,}99625 \cdot 4 + 63{,}3375$$
$$P(4) = 142{,}76$$

Vejamos no mês de junho, mês 6. Temos:

$$P(6) = 0{,}01625 \cdot 6^5 - 0{,}4625 \cdot 6^4 + 4{,}9875 \cdot 6^3 - 26{,}875 \cdot 6^2 + 72{,}99625 \cdot 6 + 63{,}3375$$
$$P(6) = 138{,}08$$

Vejamos no mês de agosto, mês 8. Temos:

$$P(8) = 0{,}01625 \cdot 8^5 - 0{,}4625 \cdot 8^4 + 4{,}9875 \cdot 8^3 - 26{,}875 \cdot 8^2 + 72{,}99625 \cdot 8 + 63{,}3375$$
$$P(8) = 118{,}99$$

Vejamos no mês de outubro, mês 10. Temos:

$$P(10) = 0{,}01625 \cdot 10^5 - 0{,}4625 \cdot 10^4 + 4{,}9875 \cdot 10^3 - 26{,}875 \cdot 10^2 + 72{,}99625 \cdot 10 + 63{,}3375$$
$$P(10) = 93{,}30$$

Vejamos no mês de dezembro, mês 12. Temos:

$$P(12) = 0{,}01625 \cdot 12^5 - 0{,}4625 \cdot 12^4 + 4{,}9875 \cdot 12^3 - 26{,}875 \cdot 12^2 + 72{,}99625 \cdot 12 + 63{,}3375$$
$$P(12) = 140{,}81$$

Comparando-se os valores encontrados nos meses pares com os valores identificados na pesquisa, observa-se que há uma aproximação dos mesmos. Apenas no mês de dezembro houve uma variação acentuada em relação à realidade. Mas se observarmos que em janeiro o preço da saca do açaí começa inflacionar, podemos considerar que a função modelada reflete, em parte, a variação do preço da saca do açaí.

E se for verificado o processo de interpolação, no qual gerou um modelo matemático: a expressão polinomial, podemos notar que o mesmo cumpriu as três fases defendidas por Biembengut (1997, p. 65-75), pois a 1ª fase consiste em haver a interação do assunto estudado por meio do modelador matemático. E isso ocorreu, pois foi feito o levantamento de dados do preço da saca do açaí junto à batedeira localizado no bairro das Pedrinhas em Macapá-AP, o qual foi destacado o preço da saca em cada mês do ano.

A segunda fase consiste em criar o próprio modelo matemático, onde se destaca os processos de resolução matemática, que no caso foi a interpolação polinomial e resolução de sistemas lineares. Todos os recursos matemáticos aqui empregados corresponde à segunda fase, a matematização.

Já na terceira fase, temos como resultado final o próprio modelo matemático, que no caso desta pesquisa foi o polinômio encontrado de 5º grau. O mesmo foi testado ao substituirmos os meses pares na função que foi interpolada com meses ímpares. Observou-se que a variação de valores não foi grande, algo absurdo, caracterizando assim, que o modelo matemático encontrado pode servir de referência para se determinar, nem que seja de forma aproximada, os valores da saca do açaí durante o ano.

5.1.2 Produção de açaí em Macapá

Uma pesquisa junto ao site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE, relacionada à produtividade do fruto de açaí em Macapá no período de 2004 a 2015, apresenta a produção do fruto em toneladas de acordo com os dados coletados dispostos na tabela abaixo:

Tabela 4: Produção de açaí em Macapá

Ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Ton.	469	390	309	268	328	346	362	457	502	520	542	571

Fonte: http://cidades.ibge.gov.br

Com os dados de 2004 a 2015 plotados em um gráfico de dispersão, têm-se a seguinte disposição:

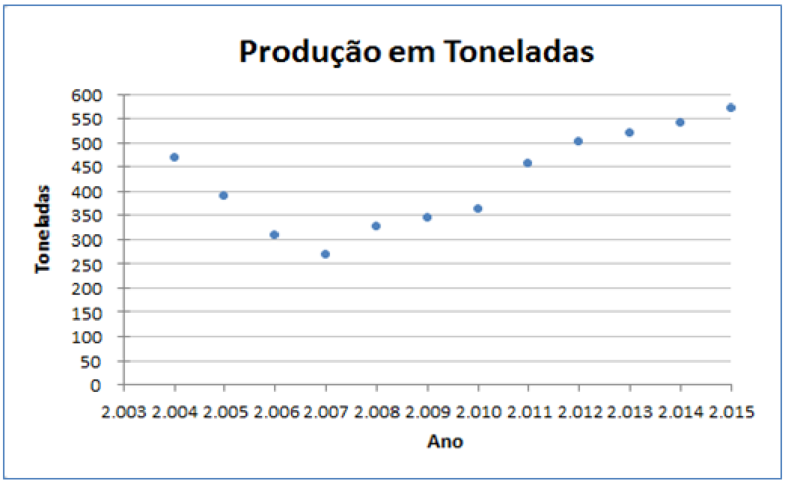


Gráfico 4: Produção de Açaí
Fonte: Dados da pesquisa

O objetivo deste modelo é criar uma função que melhor represente a produção de açaí envolvendo esses dados. Para isso, fez-se necessário a interpolação polinomial de modo que se pudesse criar equações e resolvê-las por meio de sistemas lineares. Como são doze pontos envolvidos (a produção do açaí de 2004 a 2015), o polinômio a ser encontrado será de no máximo grau 11, onde os valores do eixo x correspondem aos anos, os quais adotamos que o ano de 2004 corresponde a 4, pois é o primeiro ano do interstício em análise. 2005 corresponde a 5 e assim por diante, até 2015 o qual corresponderá a 15. Assim o polinômio P(x) que representará os dados da Tabela 4 será dado por:

$$P(x) = ax^{11} + bx^{10} + cx^{9} + dx^{8} + ex^{7} + fx^{6} + gx^{5} + hx^{4} + ix^{3} + jx^{2} + kx + l$$

Substituindo os valores referentes aos anos na variável x, e igualando à produção do ano correspondente, segue que:

Para o ano de 2004, temos x=4 e:

$$P(4) = a \cdot 4^{11} + b \cdot 4^{10} + c \cdot 4^{9} + d \cdot 4^{8} + e \cdot 4^{7} + f \cdot 4^{6} + g \cdot 4^{5} + h \cdot 4^{4} + i \cdot 4^{3} + j \cdot 4^{2} + k \cdot 4 + l = 469$$

Para o ano de 2005, temos x=5 e:

$$P(5) = a \cdot 5^{11} + b \cdot 5^{10} + c \cdot 5^{9} + d \cdot 5^{8} + e \cdot 5^{7} + f \cdot 5^{6} + g \cdot 5^{5} + h \cdot 5^{4} + i \cdot 5^{3} + j \cdot 5^{2} + k \cdot 5 + l = 390$$

Para o ano de 2006, temos x=6 e:

$$P(6) = a \cdot 6^{11} + b \cdot 6^{10} + c \cdot 6^{9} + d \cdot 6^{8} + e \cdot 6^{7} + f \cdot 6^{6} + g \cdot 6^{5} + h \cdot 6^{4} + i \cdot 6^{3} + j \cdot 6^{2} + k \cdot 6 + l = 309$$

Para o ano de 2007, temos x=7 e:

$$P(7) = a \cdot 7^{11} + b \cdot 7^{10} + c \cdot 7^{9} + d \cdot 7^{8} + e \cdot 7^{7} + f \cdot 7^{6} + g \cdot 7^{5} + h \cdot 7^{4} + i \cdot 7^{3} + j \cdot 7^{2} + k \cdot 7 + l = 268$$

Para o ano de 2008, temos x=8 e:

$$P(8) = a \cdot 8^{11} + b \cdot 8^{10} + c \cdot 8^{9} + d \cdot 8^{8} + e \cdot 8^{7} + f \cdot 8^{6} + g \cdot 8^{5} + h \cdot 8^{4} + i \cdot 8^{3} + j \cdot 8^{2} + k \cdot 8 + l = 328$$

Para o ano de 2009, temos x=9 e:

$$P(9) = a \cdot 9^{11} + b \cdot 9^{10} + c \cdot 9^{9} + d \cdot 9^{8} + e \cdot 9^{7} + f \cdot 9^{6} + g \cdot 9^{5} + h \cdot 9^{4} + i \cdot 9^{3} + j \cdot 9^{2} + k \cdot 9 + l = 346$$

Para o ano de 2010, temos x=10 e:

$$P(10) = a \cdot 10^{11} + b \cdot 10^{10} + c \cdot 10^{9} + d \cdot 10^{8} + e \cdot 10^{7} + f \cdot 10^{6} + g \cdot 10^{5} + h \cdot 10^{4} + i \cdot 10^{3} +$$
$$+ j \cdot 10^{2} + k \cdot 10 + l = 362$$

Para o ano de 2011, temos x=11 e:

$$P(11) = a \cdot 11^{11} + b \cdot 11^{10} + c \cdot 11^{9} + d \cdot 11^{8} + e \cdot 11^{7} + f \cdot 11^{6} + g \cdot 11^{5} + h \cdot 11^{4} + i \cdot 11^{3} +$$

$$+ j \cdot 11^2 + k \cdot 11 + l = 457$$

Para o ano de 2012, temos x=12 e:

$$P(12) = a \cdot 12^{11} + b \cdot 12^{10} + c \cdot 12^9 + d \cdot 12^8 + e \cdot 12^7 + f \cdot 12^6 + g \cdot 12^5 + h \cdot 12^4 + i \cdot 12^3 +$$
$$+ j \cdot 12^2 + k \cdot 12 + l = 502$$

Para o ano de 2013, temos x=13 e:

$$P(13) = a \cdot 13^{11} + b \cdot 13^{10} + c \cdot 13^9 + d \cdot 13^8 + e \cdot 13^7 + f \cdot 13^6 + g \cdot 13^5 + h \cdot 13^4 + i \cdot 13^3 +$$
$$+ j \cdot 13^2 + k \cdot 13 + l = 520$$

Para o ano de 2014, temos x=14 e:

$$P(14) = a \cdot 14^{11} + b \cdot 14^{10} + c \cdot 14^9 + d \cdot 14^8 + e \cdot 14^7 + f \cdot 14^6 + g \cdot 14^5 + h \cdot 14^4 + i \cdot 14^3 +$$
$$+ j \cdot 14^2 + k \cdot 14 + l = 542$$

Para o ano de 2015, temos x=15 e:

$$P(15) = a \cdot 15^{11} + b \cdot 15^{10} + c \cdot 15^9 + d \cdot 15^8 + e \cdot 15^7 + f \cdot 15^6 + g \cdot 15^5 + h \cdot 15^4 + i \cdot 15^3 +$$
$$+ j \cdot 15^2 + k \cdot 15 + l = 571$$

Ou seja, teremos um sistema com doze equações e doze incógnitas. A resolução deste sistema linear se torna inviável, tanto manualmente como usando os aplicativos Matriz e Projeto Gauss, pois a maior parte das potências tem valores muito altos, o que torna a digitação destes, nos referidos programas, muito trabalhosa e os riscos de erros aumentam consideravelmente. Portanto, para matrizes grandes como estas, sugerimos que se use a planilha de cálculo Excel como vimos no caso 5.1.1 (preço da saca de açaí). Uma das vantagens de se usar o Excel, é que os resultados produzidos aí, podem ser manipulados facilmente, principalmente por meio das funções “copiar” e “colar”. Já os resultados dos aplicativos acima mencionados não podem ser copiados diretamente deles, caso se precise usá-los, como por exemplo, para montar a função no Excel.

5.1.2.1 Estimativas usando os dados da produção de açaí em Macapá

Agora, supondo que tivéssemos apenas os dados referentes à produção de açaí em Macapá apenas nos anos ímpares do período de 2004 a 2015, como mostra a tabela abaixo, e quiséssemos estimar a produção nos anos pares no mesmo período.

Tabela 5: Produção do açaí nos anos ímpares.

ANO	PRODUÇÃO (Em Toneladas)
2005	390
2007	268
2009	346
2011	457
2013	520
2015	571

Para isso, vamos nos valer novamente da interpolação e achar a função polinomial determinada pelos seis pontos da Tabela 5. De posse da função procurada poderemos usá-la para fazer as estimativas pretendidas.

O polinômio que será gerado com os valores dos anos ímpares será de grau 5, haja vista que serão seis anos analisados. Logo a função terá a seguinte disposição:

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Para o cálculo dos coeficientes da função acima, vamos fazer uso do GeoGebra, que é um programa computacional de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra, cálculo e estatística, criado pelo professor austríaco Markus Hohenwarter. Este programa se constitui em uma ferramenta útil para aprender e ensinar matemática em todos os níveis. Além disso, contribui para que o usuário faça conjecturas e observe a validade de propriedades e resultados. Atualmente, o

GeoGebra é de domínio público e conta com desenvolvedores em diversos países, por isso, constantemente adquire novos pacotes e recursos que o tornam cada vez mais atrativo e dinâmico. Download disponível em https://www.geogebra.org. A versão que vamos usar nesta aplicação é a 5.0.68.0.

No GeoGebra, um dos caminhos para se determinar a função interpoladora é o seguinte:

I – Na tela inicial do aplicativo, clique no ponteiro de seta situada na barra lateral direita da janela de visualização para abrir o menu "Disposições", e dentre as opções, selecione "Planilha de Cálculos" (veja figura abaixo):

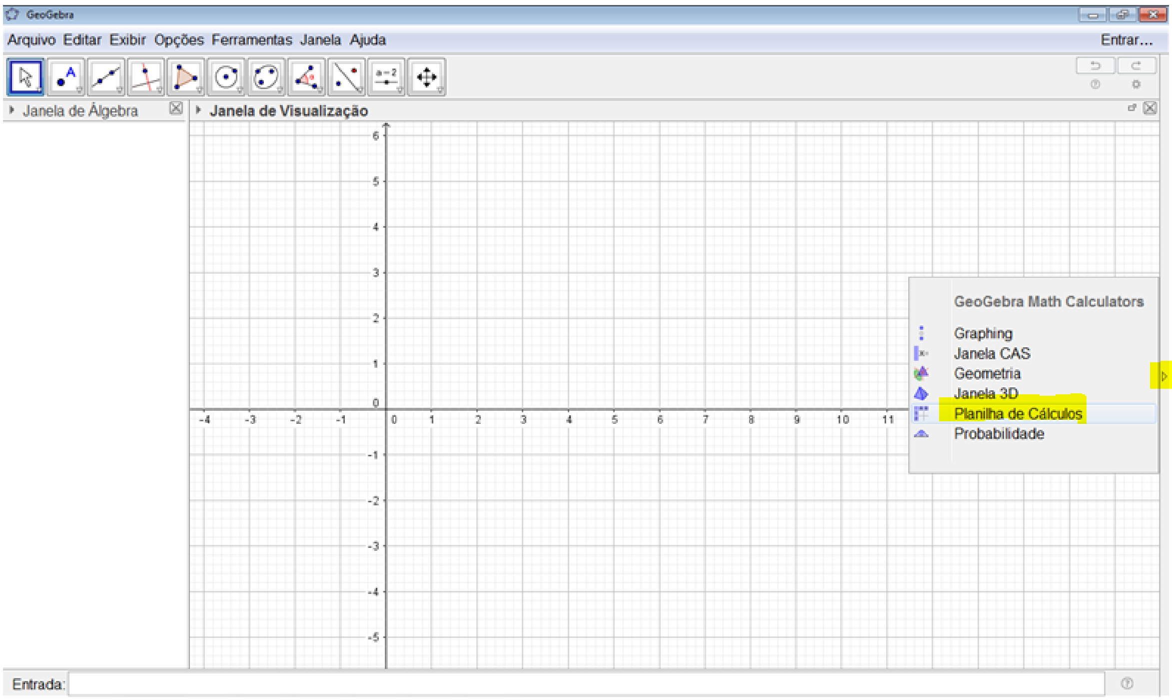


Figura 26: Tela inicial do GeoGebra (versão 5.0.68.0) com destaques.

II- Após esse comando, uma planilha aparecerá no lado esquerdo da tela. Nesta planilha, digite as coordenadas dos pontos e selecione as células ocupadas por eles como mostra a figura a seguir. Uma observação válida a ser feita é que, caso seja necessário introduzir algum número não inteiro na planilha, se deve usar ponto (ao invés de vírgula) para separar a parte inteira da parte decimal (embora esse não seja o nosso caso neste exemplo).

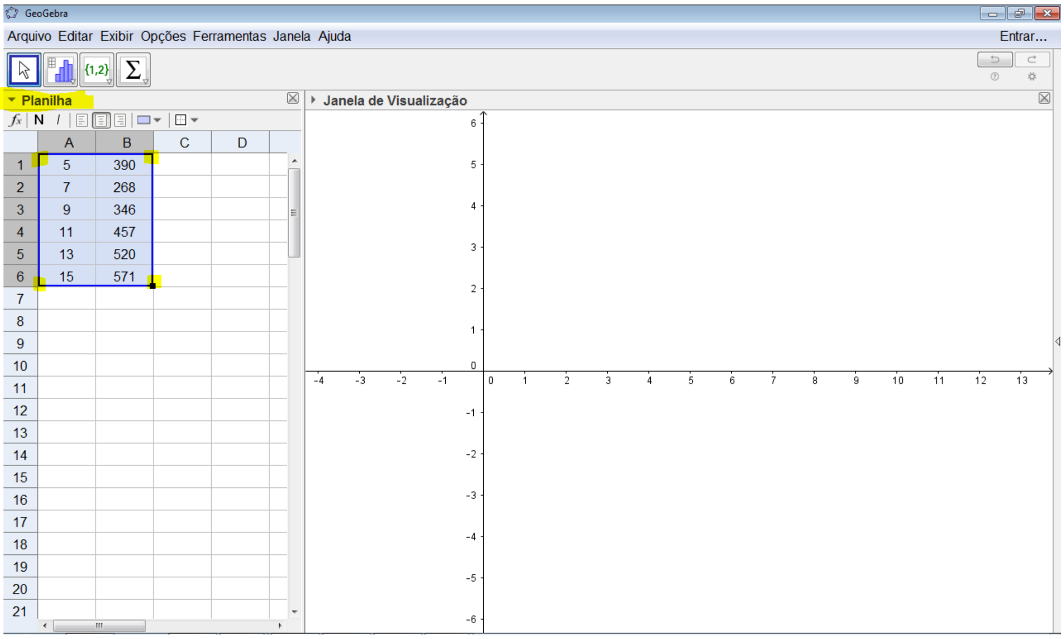


Figura 27: Planilha do GeoGebra com células selecionadas.

III – Já com as células selecionadas, vá até a segunda caixa de ferramentas localizada no topo da tela (aquela que tem um gráfico de barras azuis como representação e que está ao lado direito da caixa de ferramentas "mover", que tem a figura da seta do cursor do mouse como representação) e, dentre as opções, selecione o recurso "Análise Bivariada". Na janela "Fonte dos Dados" que aparecerá, clique em "Analisar" (a figura abaixo mostra esses passos).

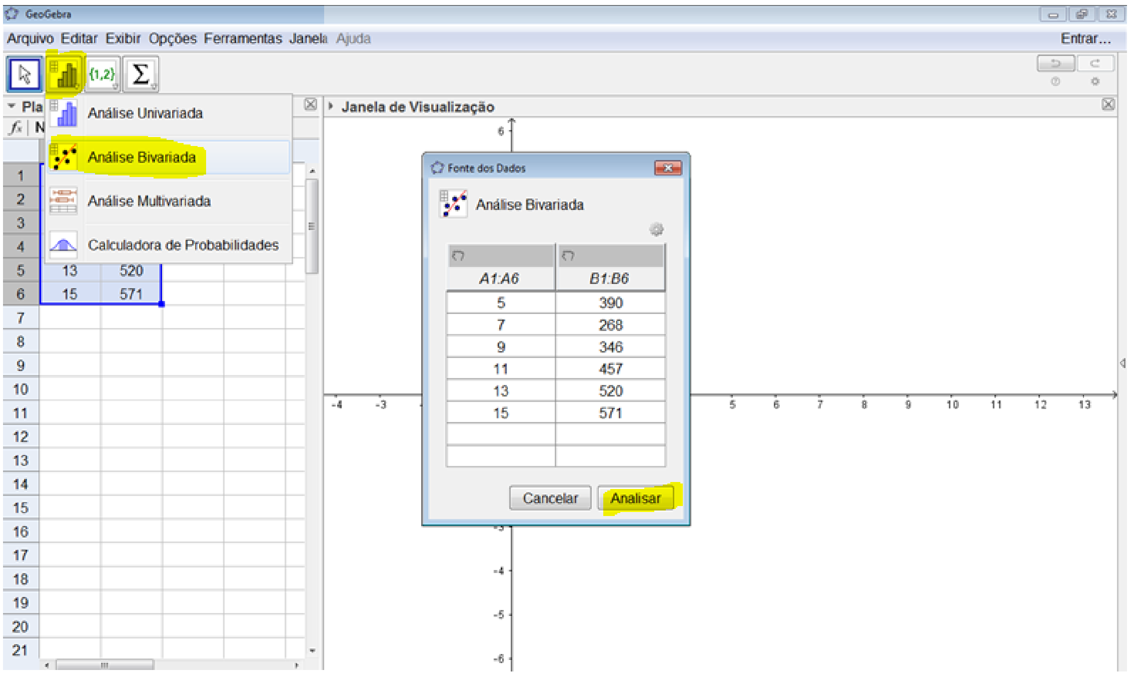


Figura 28: Seleção do recurso "Análise Bivariada" e a janela "Fonte dos Dados" aberta.

IV - Na janela “Análise de Dados”, que se abrirá após o comando anterior, vá até o canto inferior esquerdo e, na caixa de seleção intitulada “Modelo de Regressão”, escolha a opção “Polinomial” e na caixa de seleção situada abaixo da caixa “Modelo de Regressão” (usada anteriormente), escolha o grau da função, que no nosso caso é 5. Nesta versão do GeoGebra que estamos usando, o maior grau que podemos atribuir a um polinômio é 9. A figura a seguir ilustra os passos descritos nesse parágrafo.

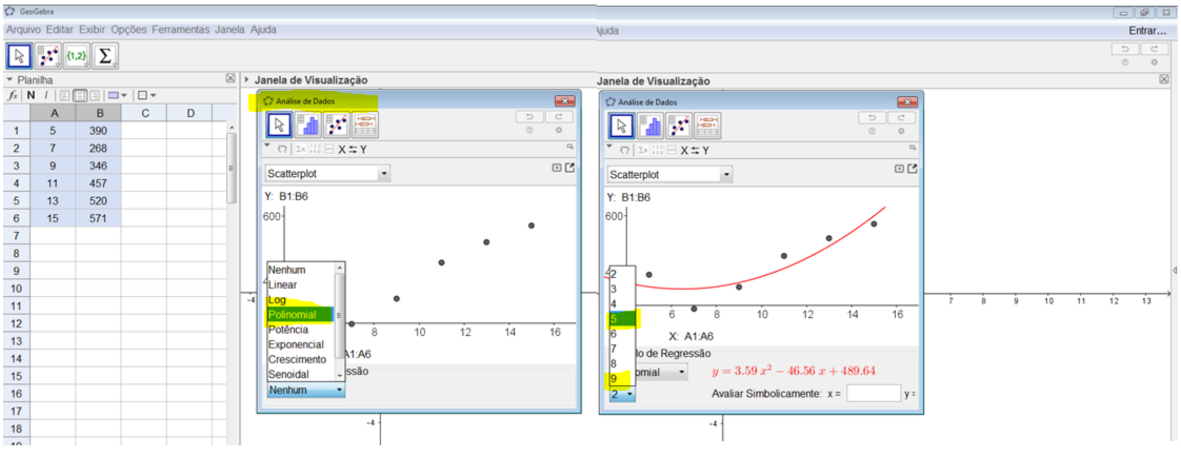


Figura 29: Destaques na janela “Fonte dos Dados”.

Em seguida à escolha do grau da função interpolante, o seu gráfico aparece na tela e, além disso, a expressão algébrica da função polinomial também pode ser visualizada (ver figura 30). Caso se queira saber um valor aproximado para a função, vá até a caixa localizada abaixo do gráfico da função que se chama “Avaliar Simbolicamente: x igual a”, e digite um valor para x que se queira saber o valor assumido pela função nele e aperte “Enter” no teclado do computador. Ao se fazer isso, o valor que se quer saber aparecerá imediatamente no campo denominado “y igual a” situado no lado direito do valor de x inserido.

Veja, na figura seguinte, um exemplo usando x=9 para o ano de 2009. O aplicativo retorna y=346, que é exatamente o valor referente à produção de açaí em 2009 em Macapá.

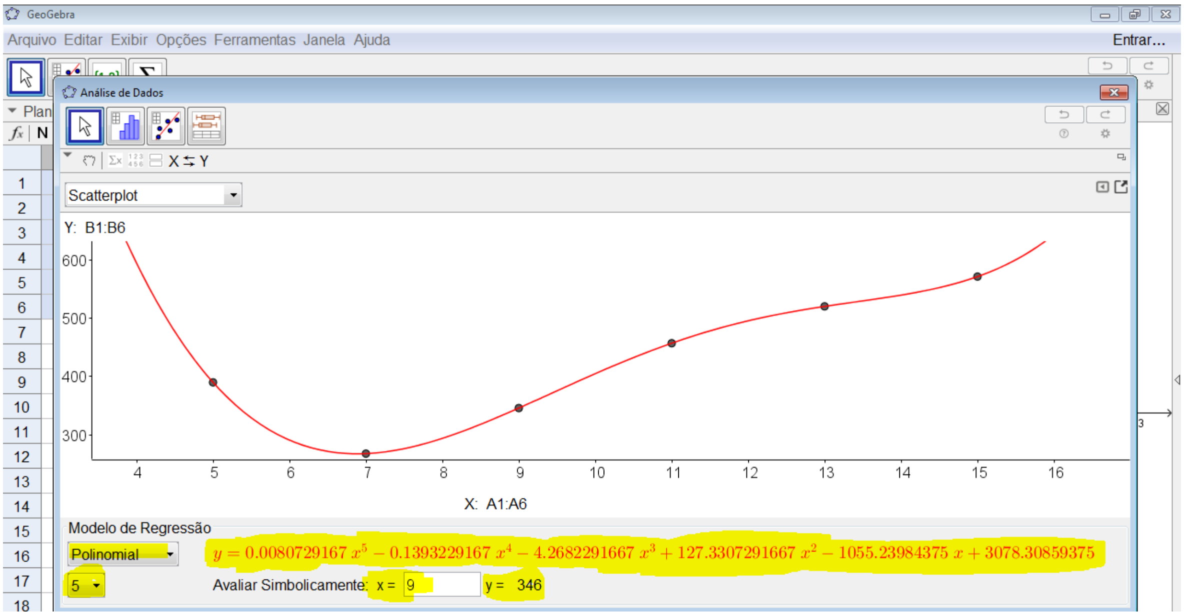


Figura 30: Gráfico da função interpolante e sua forma algébrica.

Note que se pode consultar os valores assumidos para quantos pontos se queira, desde que a janela continue aberta na tela e sobreposta à janela principal de visualização do GeoGebra. Abaixo, apresentamos um quadro comparativo entre os valores reais da produção do açaí em Macapá nos anos pares do período de 2004 a 2015 segundo dados do IBGE, e os valores retornados pela função interpoladora obtida pelo GeoGebra para esses mesmos anos.

Tabela 6: Quadro Comparativo

ANO ANALISADO	**(a) PRODUÇÃO DO AÇAÍ NO ANO (Em Toneladas. Fonte: IBGE)**	**(b) VALORES OBTIDOS USANDO A FUNÇÃO INTERPOLADORA VIA GEOGEBRA**	**DIFERENÇAS: (a)-(b)**
2004	469	594,07	-125,07
2006	309	291,05	17,95
2008	328	294,1	33,9
2010	362	404,81	-42,81
2012	502	495,35	6,65
2014	542	539,33	2,67

Ao compararmos os valores encontrados para os anos pares usando o Geogebra, com os valores divulgados pelo IBGE, nota-se que existe aproximação. Entretanto, em termos práticos, se deve ter em mente que, numa situação de análise de uma medida real, só devemos avaliar valores compreendidos entre o intervalo

(x_0, x_n), pois este equivale ao domínio da função polinomial interpolante (no caso da função encontrada usando o aplicativo, seu domínio é [2005,2015]). Fora desse intervalo não se pode ter certeza do que vai acontecer, pois a teoria de interpolação polinomial só nos permite estimar valores no intervalo de domínio da função. Logo, ao observarmos o quadro acima, verificamos que a maior diferença entre os valores comparados é referente ao ano de 2004 que está fora desse intervalo de interpolação, isto é, trata-se de uma extrapolação.

Quanto ao processo de modelagem matemática, nota-se que o mesmo cumpriu as três fases defendidas por Biembengut (1997, p. 65-75), pois a 1ª fase, que consiste na interação do assunto estudado por meio do modelador matemático, ocorreu, pois foi feito o levantamento da produção de açaí no município de Macapá por meio de pesquisa junto ao site do IBGE.

Na segunda fase, que consiste em criar um modelo matemático, usamos como ferramenta para obtenção de tal modelo, um aplicativo computacional. Todos os recursos matemáticos aqui empregados corresponde à segunda fase, a matematização.

Por fim, a terceira fase, o modelo matemático como resultado final, que no caso desta pesquisa foi o polinômio de 5º grau. Foi verificado se o modelo matemático obtido serviria para representar a produção de açaí em Macapá-AP. Ao substituirmos os anos pares na função interpolada com anos ímpares, observou-se que a variação de valores foi tolerável, dentro de uma margem aceitável. Tal teste caracteriza que o modelo matemático encontrado pode servir de referência para se estimar a produção de açaí em Macapá-AP.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa, realizada para o curso de pós-Graduação *stricto sensu* da Universidade Federal do Amapá-UNIFAP, motivou-me a buscar melhorias nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, investigando como a modelagem matemática pode se torar uma ferramenta útil, concernente a estratégia de ensino eficiente e eficaz, visando a construção do conhecimento.

Ao fim desta dissertação, considera-se que esta pesquisa pôde trazer experiências significativas, úteis e estimuladoras, deste à escolha do tema, à investigação, à criação de hipóteses e ao desenvolvimento de modelos matemáticos.

A referida pesquisa propôs uma aplicação matemática por meio da modelagem matemática voltada para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo Numérico, especificamente interpolação polinomial, com os temas escolhidos, onde se construiu modelos matemáticos.

A principal motivação para o desenvolvimento desta pesquisa deu-se pelo alto índice de reprovação na disciplina de matemática, falta de interesse nas aulas, além do baixo nível de conhecimento em Matemática. Assim, considerou-se apropriado o planejamento de uma prática pedagógica que contribuísse na participação ativa dos alunos, alcançando os objetivos propostos. Dessa forma, tal pesquisa tem importância significativa, pois me possibilitou a análise e experiência do uso da modelagem matemática como busca de melhorias nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

A modelagem matemática proporciona ao discente um melhor entendimento dos argumentos matemáticos por meio da aplicação, proporcionando o desenvolvimento da aprendizagem significativa a fim de recordar os conceitos e soluções com maior facilidade, dando maior relevância a disciplina de Matemática e seus conteúdos (BASSANEZI, 2010).

Após a realização deste trabalho, passei a adotar a modelagem matemática como uma estratégia para alcançar melhorias no ensino e aprendizagem da Matemática, com as seguintes sugestões de continuidade deste estudo:

a) Os professores da área de exatas devem buscar continuamente alternativas diferenciadas para sua prática pedagógica com o objetivo de obter melhores resultados nos processos de ensino e aprendizagem;

b) A modelagem matemática pode ser implementada como alternativa de ensino em qualquer nível de ensino e conteúdo de preferência do docente, levando em conta a realidade e o nível do alunado;

Diante dos fatos mencionados, seria possível destacar uma gama de considerações que poderia ser associada a pratica da modelagem matemática, pois o ensino e aprendizagem da matemática são de grande complexidade. E na qualidade de docente pesquisador, é natural questionarmos, refletirmos e analisarmos a atual situação do ensino da Matemática, a fim de buscarmos e propormos ações concernentes à busca de novas alternativas de ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, L. C. *et al***. Cálculo Numérico (com aplicações)**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BASSANEZI, R. **Modelagem Matemática: Uma Disciplina Emergente nos Programas de Formação de Professores***.* Blumenau: Dynamis. 1994.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia**. 2 Ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BERRY, John; O'SHEA, Tim. Assessing Mathematical Modelling. In: **International Journal Of Mathematical Education Sciense And Tecnology**. v.13, n.6, 1982.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6ª Ed. São Paulo: Atual Editora, 1.990.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia: Uma Proposta Metodológica e Curricular**. Tese De Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas. Florianópolis: Ufesc, 1997.

CHAVES, M. I. A; ESPÍRITO SANTO, A. O. **Um Modelo de Modelagem Matemática para o Ensino Médio.** In: Anais do VII Congresso Norte/Nordeste de Educação em Ciências e Matemática, Belém, 2004.

GABETTA JUNIOR, Antonio Marcos, **Aproximação de Funções por Interpolação: Método de Lagrange**. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, 2015.

GAZZETA, M. **A Modelagem como Estratégia de Aprendizagem Matemática em Cursos de Aperfeiçoamento de Professores**. Rio Claro, Unesp. 1988.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos Para Engenheiros e Cientistas**: **uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Tradução Alberto Resende de Conti. 1ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2008.

Jornal da UNICAMP de 14 a 27 de fevereiro de 2005, p. 7

MANZANO, A. L. N. G. **Estudo Dirigido de Microsoft Office Excel 2007.** 2. ed. São Paulo: Érica, 2008.

MAKI, D. P. e THOMPSON, H. **Mathematical Models and Applications**. New Jesey: 1988.

MOURA, L. F.; ROQUE, B. F. S. **Excel Para Engenharia – Formas Simples Para Resolver Problemas Complexos.** 1ª edição. São Paulo; EdFSCar, 2013.

O'SHEA, T. e BERRY, J. **Assessing Mathematical Modeling**. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. London v. 13. n.6, 1982.

RICHIT, A. **Modelagem Matemática: Concepções e Experiência de Futuros Professores**, Ano 18, Nº23, p.127-132, Bolema, Rio Claro. 2005.

SANTOS, Alessandro Silva. **Ajuste de Curvas por Polinômios com Foco no Currículo do Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica. Campinas, 2015.

SANTOS, Linovaldo Coêlho dos. **Uma Ferramenta Computacional Para o Cálculo e Treinamento do Método de Escalonamento de Gauss.** Dissertação de Mestrado. Macapá, 2016. Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT). Disponível em: http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/UMA-FERRAMENTA-COMPUTACIONAL-PARA-O-C%C3%81LCULO-E-TREINAMENTO-DO-M%C3%89TODO-DE-SCALONAMENTO-DE-GAUSS.pdf.

Site da União Matemática Internacional-IMU. Disponível em www.mathunion.org .Acesso em : 18 de ago. de 2015.

Site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em www.inep.gov.br . Acesso em: 16 de ago. de 2015.

Site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE. Disponível em www.ibge.gov.br . Acesso em: 20 de abr. de 2015.

Site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE. Disponível em http://cidades.ibge.gov.br/xtras/perfil.php?lang=&codmun=160030&search=amapa|macapaAcesso em: 03 de março de 2017.

Site da Prefeitura de Macapá. Disponível em www.macapa.ap.gov.br . Acesso em: 04 de ago. de 2016.

SOARES, Kasseandra Mattos. **História da Matemática na Formação de Professores do Ensino Fundamental – (1ª a 4ª série).** Dissertação de Mestrado. **2004.** Acesso em 10 de outubro de 2012. Disponível no site: http://www.tede.udesc.br/tde_arquivos/10/TDE-2006-02-09T13:38:05Z-55/Publico/Kasselandra%20Mattos%20Soares.pdf

WALKENBACH, John. **Excel 2010 Bible.** Indianapolis; Wiley Publishing, Inc., 2010.

SWETZ, Frank. **Quando e Como Podemos Usar Modelação? Educação e Matemática**. 3º Trimestre Lisboa, Nº 23. 1992.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos**. Tradução Daniel Grassi. 3ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ANEXO A – QUESTIONÁRIO SOBRE O PREÇO DA SACA DO AÇAÍ

1ª) Qual o seu nome?

2ª) Qual sua profissão?

3ª) Quanto tempo o senhor trabalha nesta profissão?

4ª) Quais foram, em média, os preços da saca do açaí ao longo do ano 2015?

Observações complementares: