UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

FÁBIO CAMPOS DIAS

UNIFAP
MACAPÁ - 2017

FÁBIO CAMPOS DIAS

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. José Walter Cárdenas Sotil

UNIFAP
MACAPÁ - 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

515.9
D541t Dias, Fábio Campos.
O teorema fundamental da álgebra / Fábio Campos Dias; orientador, José Walter Cárdenas Sotil. – Macapá, 2016.
59 f.

Dissertação (mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Números complexos. 2. Polinômios complexos. 3. Teorema fundamental de álgebra. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

FÁBIO CAMPOS DIAS

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Conceito: APROVADO Data: 12/09/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
UNIFAP
Orientador

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
UNIFAP

Prof. Dr. Erasmo Senger
UNIFAP

Prof. Me. Carlos Alexandre Santana Oliveira
IFAP

UNIFAP

MACAPÁ - 2017

Sumário

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra, o qual garante que polinômios complexos de grau maior ou igual a 1 possuem pelo menos uma raíz complexa. O conjunto dos números complexos é construído de forma axiomática, demonstrando-se suas propriedades algébricas e geométricas. Serão apresentados os polinômios complexos e suas propriedades operatórias, especialmente as que dizem respeito a divisão de polinômios, como o algoritmo da divisão de Euclides e o algoritmo de Briot-Ruffini. As funções polinomiais complexas também terão papel importante da demonstração do Teorema, já que o conjunto dos polinômios complexos e o conjunto das funções polinomiais complexas podem ser considerados equivalentes. A demonstração do Teorema utilizará resultados importantes da Análise Complexa, como o Teorema de Weierstrass para mínimos absolutos de funções contínuas sobre conjuntos compactos. Considerando a importância desse teorema, optou-se por apresentar também uma demonstração geométrica intuitiva utilizando curvas de nível, com o auxílio do software GeoGebra. Espera-se que este trabalho forneça ferramentas para entendimento deste importante resultado da Matemática, bem como uma sugestão de estratégia para trabalhar esse conteúdo na Educação Básica.

Palavras-chave: Números Complexos. Polinômios Complexos. Teorema Fundamental da Álgebra.

Abstract

This work aims to present a proof for the Fundamental Theorem of Algebra, which ensures that complex polynomials of degree greater than or equal to 1 have at least one complex root. The set of complex numbers is constructed axiomatically, by demonstrating its algebraic and geometric properties. Complex polynomials and their operative properties will be presented, especially those concerning the division of polynomials, such as the Euclidean division algorithm and the Briot-Ruffini algorithm. Complex polynomial functions also play an important role in demonstrating the Theorem, since the set of complex polynomials and the set of complex polynomial functions can be considered equivalent. The proof of the Theorem will use important results from the Complex Analysis, such as the Weierstrass Theorem for absolute minimums of continuous functions on compact sets. Considering the importance of this theorem, it was also chosen to present an intuitive geometric demonstration using level curves, with the help of the software *GeoGebra*. It is expected that this work will provide tools for understanding this important result of Mathematics, as well as a suggestion of strategy to work this content in Basic Education.

keywords: Complex Numbers. Complex polynomials. Fundamental Theorem of Algebra.

Introdução

As equações algébricas aparecem em inúmeros problemas. Há casos em que a solução de problemas da Geometria e do Cálculo podem ser resolvidos, desde que determinada uma solução para uma equação algébrica envolvida no problema. Uma das preocupação da Álgebra é o estudo dos polinômios, que são objetos definidos sobre áneis, como o conjunto dos números reais e o conjuntos dos números complexos.

Nesse sentido, através da história, muitos matemáticos buscaram demonstrar e caracterizar as equações algébricas que possuem soluções através das raízes do polinômio complexo envolvido. Várias demonstrações foram encontradas para a garantir a existência dessas raízes ou para determinar condições sobre a existência destas. Alguns matemáticos foram mais adiante e conseguiram apresentar fórmulas para determinação das raízes de polinômios com um grau específico. Um exemplo clássico é a fórmula de Bháskara, fortemente trabalhada na Educação Básica para solução de equações do 2º grau.

Contudo, quando se trabalha a solução de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, pouco se fala sobre o caso em que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: geralmente é dito ao aluno que a equação simplesmente não possui solução. Isso se deve ao fato de que, até o Ensino Médio, as raízes quadradas de números negativos não são apresentadas para os alunos (com algumas exceções). Tais raízes servem para caracterizar o conjunto dos números complexos.

Esses números são muitos importantes para a Matemática e ciências afins, uma vez que vários fenômenos físicos e relações entre grandezas podem ser modelados através de equações diferenciais, muitas das quais se utilizam das propriedades dos números complexos para que seja determinada uma solução.

Assim, faz-se importante apresentar um estudo sobre estes números, bem como dos polinômios cujos coeficientes são números complexos, posto que vários problemas na Álgebra e na Análise baseiam-se nas propriedades desses elementos matemáticos para serem solucionados.

O trabalho a seguir divide-se em três partes: no capítulo 2 será apresentado o conjunto dos números complexos, bem como suas propriedades algébricas e geométricas, dando destaque ao estudo de algumas operações importantes sobre esse conjunto.

No capítulo 3, serão apresentados os polinômios complexos e as principais características desses objetos. Ainda nesse capítulo, será introduzida uma relação entre os polinômios complexos e as funções polinomiais complexas, visto que, para a demonstração do resultado principal deste trabalho, serão necessários diversos resultados pertinentes a Análise e a Topologia, tais como descrição de subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e a continuidade de funções polinomiais.

No capítulo 4, será abordado o Teorema Fundamental da Álgebra. Inicialmente, o teorema será comentado através de uma abordagem geométrica e intuitiva, que pode ser trabalhada mesmo numa sala de aula do Ensino Médio, com o auxílio do software *GeoGebra* e desde que os alunos tenham embasamento sobre gráficos de funções e curvas geométricas. Esta abordagem permite visualizar melhor o significado do teorema e suas implicações. Finalmente, será apresentada a demonstração formal do teorema, com algumas consequências imediatas que permitem caracterizar, por exemplo, raízes de polinômios com coeficientes reais.

Capítulo 2

Números Complexos

Neste capítulo serão apresentados os números complexos, bem como suas principais propriedades algébricas e operatórias, baseando-se em [2], [3], [4], [8], [10] e [16].

A motivação para o estudo desses numéros parte, historicamente, do livro *Ars Magna* (1545), no qual o matemático italiano Jerônimo Cardano (1501-1576) encontrou a resposta para o problema de determinar dois números cuja soma vale 10 e cujo produto vale 40, isto é, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 10x + 40 = 0$. As soluções encontradas por Cardano foram $\alpha = 5 + \sqrt{-15}$ e $\beta = 5 - \sqrt{-15}$. O problema dessas soluções é que, na época em que o trabalho de Cardano foi publicado, só se conheciam os números reais, não fazendo sentido calcular raízes quadradas de números negativos.

Nesse mesmo trabalho, Cardano apresentou um método para resolução de equações de terceíro grau, conhecido hoje como fórmula de Cardano. Tal método permite descobrir a raiz real de qualquer equação do tipo $y^3+py+q=0$. Uma vez que toda equação completa do terceiro grau pode ser escrita como equação desse tipo, o método de Cardano possibilita resolver todas as equações do terceiro grau.

Em 1572, o matemático Rafael Bombelli (1526-1572) publicou o livro *L'Algebra*, no qual aplica a fórmula de Cardano para resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obtendo:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Nesse mesmo livro, Bombelli introduz as regras operatórias e fórmulas de adição e multiplicação para números envolvendo $\sqrt{-1}$:

- $\left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = -1$;
- $\left(-\sqrt{-1}\right)\left(-\sqrt{-1}\right) = -1$;
- $\left(-\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = 1$;
- $(-1)\left(\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}$;

- $\left(a+b\sqrt{-1}\right)+\left(c+d\sqrt{-1}\right)=(a+c)+(c+d)\sqrt{-1}$;
- $\left(a+b\sqrt{-1}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{-1}\right)=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$.

Utilizando essas regras e fórmulas, Bombelli encontrou os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 &= \left[\left(2+\sqrt{-1}\right)\cdot\left(2+\sqrt{-1}\right)\right]\cdot\left(2+\sqrt{-1}\right)\\ &= \left[(2\cdot 2-1\cdot 1)+(2\cdot 1+1\cdot 2)\sqrt{-1}\right]\cdot\left(2+\sqrt{-1}\right)\\ &= \left(3+4\sqrt{-1}\right)\cdot\left(2+\sqrt{-1}\right)\\ &= (3\cdot 2-4\cdot 1)+(3\cdot 1+4\cdot 2)\sqrt{-1}\\ &= 2+11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 &= \left[\left(2-\sqrt{-1}\right)\cdot\left(2-\sqrt{-1}\right)\right]\cdot\left(2-\sqrt{-1}\right)\\ &= \left[(2\cdot 2-(-1)\cdot(-1))+(2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2)\sqrt{-1}\right]\cdot\left(2-\sqrt{-1}\right)\\ &= \left(3-4\sqrt{-1}\right)\cdot\left(2-\sqrt{-1}\right)\\ &= (3\cdot 2-(-4)\cdot(-1))+(3\cdot(-1)+(-4)\cdot 2)\sqrt{-1}\\ &= 2-11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Logo:

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}\ \text{e}\ \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$$

E, portanto:

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

Com isso, verifica-se a compatibilidade da solução algébrica para a equação $x^3-15x-4=0$ encontrada pelo método de Cardano com a solução óbvia obtida substituindo $x=4$ na equação, o que permitiu que começasse a fazer sentido operar com números da forma $a+b\sqrt{-1}$.

Contudo, o tratamento formal dos números da forma $a+b\sqrt{-1}$ dado por Bombelli não foi pronta e completamente aceito pelos matemáticos da época, os quais relutavam em aceitar elementos matemáticos que não tivessem significado geométrico. Somente com os trabalhos de Caspar Wessel (1745-1818) de 1797, de Jean Robert Argand (1768-1822) de 1806 e de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) de 1831 é que essa relutância passou a desaparecer. Este último matemático foi responsável por batizar os números da forma $a+b\sqrt{-1}$ de **números complexos**. A utilização de i para representar a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ é devida ao matemático suíço Leonhard Euler, o qual também determinou várias propriedades desses números em seus trabalhos.

2.1 O Conjunto dos Números Complexos

Nesta seção serão apresentadas a definição e as principais propriedades operatórias dos números complexos.

Considere $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Define-se em $\mathbb{R}^2$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longrightarrow (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longrightarrow (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

as quais são denominadas de **adição** e **multiplicação**, respectivamente.

Definição 2.1. *O conjunto $\mathbb{R}^2$ munidos das operações $\oplus$ e $\otimes$ como definidas acima é chamado de **conjunto dos números complexos**, o qual é denotado por $\mathbb{C}$.*

Diz-se que dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

O conjunto dos números complexos possui algumas propriedades operatórias importantes que os caracterizam como estruturas matemáticas na Análise e na Álgebra, as quais são demonstradas na proposição a seguir:

Proposição 2.1. *Considere os números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$. Verificam-se as propriedades a seguir:*

(i) Associatividade da adição: $z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3$;

(ii) Comutatividade da adição: $z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1$;

(iii) Elemento neutro da adição: Existe um único número complexo, representado por $0 = (0, 0)$, tal que $z_1 \oplus 0 = z_1$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$;

*(iv) Elemento oposto aditivo: Para cada $z_1 \in \mathbb{C}$, o elemento $-z_1 = (-x_1, -y_1)$ satisfaz $z_1 \oplus (-z_1) = 0$ e é chamado de **elemento oposto aditivo ou simétrico** de z_1.*

(v) Associatividade da multiplicação: $z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) = (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3$;

(vi) Comutatividade da multiplicação: $z_1 \otimes z_2 = z_2 \otimes z_1$;

(vii) Elemento neutro da multiplicação: Existe um único número complexo, representado por $1 = (1, 0)$, tal que $z_1 \otimes 1 = z_1$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$;

*(viii) Elemento inverso multiplicativo: Para cada $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C} - \{0\}$, o elemento $\frac{1}{z_1}$ definido por $\frac{1}{z_1} = (\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2})$ satisfaz $z_1 \otimes \frac{1}{z_1} = 0$ e é chamado de **elemento inverso multiplicativo** de z_1;*

(ix) Distributividade: $z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \otimes z_2) \oplus (z_1 \otimes z_3)$.

Demonstração: *(i)* Utilizando a definição da adição em $\mathbb{C}$ e a associatividade da adição em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) &= (x_1, y_1) \oplus ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)) \\
&= (x_1, y_1) \oplus (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\
&= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \oplus (x_3, y_3) \\
&= ((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) \oplus (x_3, y_3) \\
z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) &= (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3
\end{aligned}$$

(ii) Utilizando a definição da adição em $\mathbb{C}$ e a comutatividade da adição em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
z_1 \oplus z_2 &= (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\
&= (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) \\
z_1 \oplus z_2 &= z_2 \oplus z_1
\end{aligned}$$

(iii) Observe que:

$$\begin{aligned}
z_1 \oplus 0 &= (x_1, y_1) \oplus (0, 0) \\
&= (x_1 + 0, y_1 + 0) \\
&= (x_1, y_1) \\
z_1 \oplus 0 &= z_1
\end{aligned}$$

Logo, $0 = (0, 0)$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{C}$. Para mostrar a unicidade, suponha que $(a, b) \in \mathbb{C}$ seja tal que $z_1 \oplus (a, b) = z_1$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$. Então:

$$\begin{aligned}
z_1 \oplus (a, b) = z_1 &\Rightarrow (x_1, y_1) \oplus (a, b) = (x_1, y_1) \\
&\Rightarrow (x_1 + a, y_1 + b) = (x_1, y_1) \\
&\Rightarrow x_1 + a = x_1 \text{ e } y_1 + b = y_1 \\
&\Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 0 \\
z_1 \oplus (a, b) = z_1 &\Rightarrow (a, b) = (0, 0)
\end{aligned}$$

(iv) Observe que:

$$\begin{aligned}
z_1 \oplus (-z_1) &= (x_1, y_1) \oplus (-x_1, -y_1) \\
&= (x_1 + (x_1), y_1 + (-y_1)) \\
&= (x_1 - x_1, y_1 - y_1) \\
&= (0, 0) \\
z_1 \oplus (-z_1) &= 0
\end{aligned}$$

Logo, $-z_1$ é o elemento oposto de z_1 em $\mathbb{C}$. Para mostrar a unicidade, suponha que

$(a,b) \in \mathbb{C}$ seja tal que $z_1 \oplus (a,b) = 0$. Então:

$$\begin{aligned}
z_1 \oplus (a,b) = 0 \quad &\Rightarrow (x_1, y_1) \oplus (a,b) = (0,0)\\
&\Rightarrow (x_1 + a, y_1 + b) = (0,0)\\
&\Rightarrow x_1 + a = 0 \text{ e } y_1 + b = 0\\
&\Rightarrow a = -x_1 \text{ e } b = -y_1\\
z_1 \oplus (a,b) = 0 \quad &\Rightarrow (a,b) = (-x_1, -y_1)
\end{aligned}$$

(v) Utilizando a definição da multiplicação em $\mathbb{C}$ e as propriedades associativa e comutativa da multiplicação em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) \quad &= (x_1, y_1) \otimes ((x_2, y_2) \otimes (x_3, y_3))\\
&= (x_1, y_1) \otimes (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2)\\
&= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2), x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + (x_2x_3 - y_2y_3)y_1)\\
&= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2, x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_2y_3y_1)\\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + x^3(x_1y_2 + x_2y_1))\\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \otimes (x_3, y_3)\\
&= ((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)) \otimes (x_3, y_3)\\
z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) \quad &= (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3
\end{aligned}$$

(vi) Utilizando a definição da multiplicação em $\mathbb{C}$ e a comutatividade da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
z_1 \otimes z_2 \quad &= (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)\\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\\
&= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2)\\
&= (x_2, y_2) \otimes (x_1, y_1)\\
z_1 \otimes z_2 \quad &= z_2 \otimes z_1
\end{aligned}$$

(vii) Observe que:

$$\begin{aligned}
z_1 \otimes 1 \quad &= (x_1, y_1) \otimes (1, 0)\\
&= (x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + 1 \cdot y_1)\\
&= (x_1, y_1)\\
z_1 \otimes (1,0) \quad &= z_1
\end{aligned}$$

Logo, $1 = (1,0)$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$. Para mostrar a unicidade, suponha que $(a,b) \in \mathbb{C}$ seja tal que $z_1 \otimes (a,b) = z_1$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$. É claro que

$(a,b) \neq (0,0)$, pois $z_1 \otimes (0,0) = (0,0)$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$. Então:

$$\begin{aligned} z_1 \otimes (a,b) = z_1 \quad &\Rightarrow (x_1,y_1) \otimes (a,b) = (x_1,y_1) \\ &\Rightarrow (x_1a - y_1b, x_1b + ay_1) = (x_1,y_1) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1a - y_1b = x_1 \\ x_1b + ay_1 = y_1 \end{cases} \end{aligned}$$

A solução do sistema acima é $a = 1,\ b = 0$ para qualquer $z_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{C}$. Logo, está provada a unicidade do elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$.

(viii) Observe que:

$$\begin{aligned} z_1 \otimes \frac{1}{z_1} &= (x_1,y_1) \otimes \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \\ &= \left(x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} - y_1 \cdot \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}, x_1 \cdot \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2} + \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} \cdot y_1\right) \\ z_1 \otimes \frac{1}{z_1} &= (1,0) \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{z_1}$ é o inverso multiplicativo de $z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Para mostrar a unicidade, suponha que $(a,b) \in \mathbb{C}$ seja tal que $z_1 \otimes (a,b) = (1,0)$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}\{0\}$. Então:

$$\begin{aligned} z_1 \otimes (a,b) = (1,0) \quad &\Rightarrow (x_1,y_1) \otimes (a,b) = (1,0) \\ &\Rightarrow (x_1a - y_1b, x_1b + ay_1) = (1,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1a - y_1b = 1 \\ x_1b + ay_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A solução do sistema acima é $a = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\ b = \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}$ para cada $z_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{C} - \{0\}$. Logo, está provada a unicidade do inverso multiplicativo em $\mathbb{C}$.

(ix) Utilizando as definições da adição e da multiplicação em $\mathbb{C}$ e a distributividade em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) &= (x_1,y_1) \otimes ((x_2,y_2) \oplus (x_3,y_3)) \\ &= (x_1,y_1) \otimes (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3) + (x_2+x_3)y_1) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1)) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \oplus (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= ((x_1,y_1) \otimes (x_2,y_2)) \oplus ((x_1,y_1) \oplus (x_3,y_3)) \\ z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) &= (z_1 \otimes z_2) \oplus (z_1 \otimes z_3) \end{aligned}$$

□

Com essas propriedades, pode-se apresentar algumas caracterizações importantes para o conjunto dos números complexos:

- $\mathbb{C}$ é um **corpo**, isto é, um conjunto com duas operações definidas nas quais se verificam todas as propriedades apresentadas na proposição 2.1.
- $\mathbb{C}$ é um **anel**, isto é, uma estrutura algébrica em que estão definidas duas operações binárias nas quais se verificam as propriedades apresentadas na proposição 2.1, exceto, possivelmente a propriedade (viii).

Corpos são elementos extremamente importantes na Análise e na Álgebra Linear, enquanto os anéis são essenciais na Álgebra Abstrata. Da definição geral de polinômios (que serão objeto de estudo no próximo capítulo), estes elementos são definidos diretamente sobre anéis.

Para que seja concluída a definição do conjunto dos números complexos, é importante estabelecer uma relação entre esse conjunto e o conjunto dos números reais. Essa relação pode ser estabelecida através de uma imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, isto é, através de uma função injetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que preserva as operações de adição e multiplicação de um conjunto para o outro. O teorema a seguir caracteriza essa imersão:

Teorema 2.1. *Considere a função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $T(x) = (x, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então T é injetora e preserva as operações de adição e multiplicação.*

Demonstração: Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, pela definição de igualdade em $\mathbb{C}$ tem-se que:

$$T(x_1) = (x_1, 0) \neq (x_2, 0) = T(x_2)$$

Logo, T é injetora. Além disso:

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) \\ &= (x_1, 0) \oplus (x_2, 0) \\ T(x_1 + x_2) &= T(x_1) \oplus T(x_2) \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} T(x_1 x_2) &= (x_1 x_2, 0) \\ &= (x_1 x_2 - 0 \cdot 0, x_1 0 + x_2 0) \\ &= (x_1, 0) \otimes (x_2, 0) \\ T(x_1 x_2) &= T(x_1) \times T(x_2) \end{aligned}$$

Logo, T preserva a adição e a multiplicação. □

Embora $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sejam conjuntos de natureza e estruturas algébricas diferentes, o teorema acima garante a existência de uma cópia algébrica de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, permitindo escrever, com certo abuso de linguagem, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Além disso, para simplificar a escrita, poderemos representar as operações $\oplus$ e $\otimes$ definidas em $\mathbb{C}$ respectivamente pelos símbolos $+$ e $\cdot$, utilizados para as operações em $\mathbb{R}$.

2.2 Álgebra dos Números Complexos

Observe que, para cada número complexo $z = (x, y)$, tem-se:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) \oplus (0, y) = (x, 0) \oplus (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (x, 0) \oplus ((y, 0) \otimes (0, 1)) \end{aligned}$$

Além disso, $(0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0)$. Considerando o teorema 2.1, podemos representar $(x, 0)$ e $(y, 0)$ por x e y, respectivamente. Definindo $i = (0, 1)$, tem-se:

$$z = (x, y) = x + yi \text{ onde } i^2 = -1 \tag{2.1}$$

Definição 2.2. *A expressão 2.1 é chamada de* ***forma algébrica*** *do número complexo $z = (x, y)$. O número real x é chamado de* ***parte real*** *do complexo z, enquanto o número real y é chamado de* ***parte imaginária****. Estes são denotados, respectivamente, por:*

$$Re(z) = x \text{ e } Im(z) = y$$

O número $i = \sqrt{-1}$ é chamado de ***unidade imaginária****.*

Com a forma algébrica dos números complexos, as operações em $\mathbb{C}$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \\ (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{aligned}$$

Exemplo 2.1. *(a)* $(2 + 3i) + (-5 + 2i) = (2 + (-5)) + (3 + 2)i = (2 - 5) + 5i = -3 + 5i$;

(b)
$$\begin{aligned} (2 + 3i) \cdot (-5 + 2i) &= 2 \cdot (-5) + 2 \cdot 2i + 3i \cdot (-5) + 3i \cdot 2i \\ &= -10 + 4i - 15i + 6i^2 \\ &= -10 - 11i - 6 = -16 - 11i \end{aligned}$$

Outro elemento muito importante no estudo algébrico dos números complexos é o conjugado.

Definição 2.3. *Considere o número complexo $z = x + yi$. O* ***conjugado de*** *z é definido por $\overline{z} = x - yi$.*

Exemplo 2.2. *O conjugado de $z_1 = 2 + 3i$ é $\overline{z_1} = 2 - 3i$ e o conjugado de $z_2 = -5 + 2i$ é $\overline{z_2} = -5 - 2i$.*

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades operatórias importantes do conjugado.

Proposição 2.2. *Considere os números complexos $z = a+bi$ e $w = c+di$. As propriedades a seguir são válidas:*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$;

(ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

(iv) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$;

(v) $z + \overline{z} = 2Re(z)$;

(vi) $z + (-\overline{z}) = 2Im(z)i$;

(vii) $z \cdot \overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$.

Demonstração:
(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a-(-b)i = a+bi = z$

$$(ii)\quad \begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} \\ &= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{a+bi} + \overline{c+di} \\ \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w} \end{aligned}$$

$$(iii)\quad \begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i = (ac-(-b)(-d)) + (a(-d)+(-b)c)i \\ &= (a-bi)\cdot(c-di) = overlinea + bi \cdot \overline{c+di} \\ \overline{zw} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

(iv) Basta aplicar indução sobre n e utilizar o item (iii).

$$(v)\quad \begin{aligned} z+\overline{z} &= (a+bi) + \overline{a+bi} = (a+bi)+(a-bi) \\ &= (a+a)+(b+(-b))i = 2a+0i = 2a \\ z+\overline{z} &= 2\mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

$$(vi)\quad \begin{aligned} z+(-\overline{z}) &= (a+bi)+(-\overline{a+bi}) = (a+bi)+-(a-bi) \\ &= (a-a)+(b-(-b))i = 0+2bi = 2bi \\ z+(-\overline{z}) &= 2\mathrm{Im}(z)i \end{aligned}$$

$$(vii)\quad \begin{aligned} z\cdot\overline{z} &= (a+bi)\cdot\overline{(a+bi)} = (a+bi)\cdot(a-bi) \\ &= (aa-b(-b))+(a(-b)+ab)i = (a^2+b^2)+0i = a^2+b^2 \\ z\cdot\overline{z} &= (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 \end{aligned}$$

□

Definição 2.4. *Considere dois números complexos* z *e* w. *Define-se o quociente* $\frac{z}{w}$ *por:*

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$$

Observando que, se $w = (c,d)$, então $\frac{1}{w} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$, o quociente entre números complexos pode ser calculado através de multiplicações. Contudo, uma forma mais prática de fazer isso é utilizando o conjugado do número complexo no denominador. De fato:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{(\mathrm{Re}(w))^2 + (\mathrm{Im}(w))^2}$$

Pelo item (vii) da proposição 2.2, o denominador desta última expressão é um número real, o que facilita bastante os cálculos.

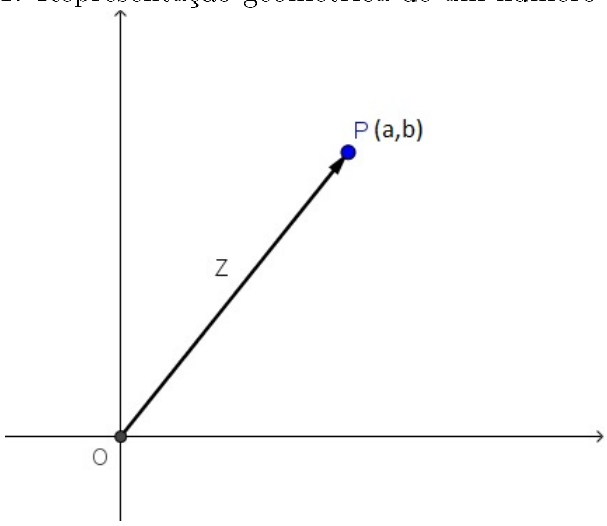
Exemplo 2.3. *Considere os números complexos* $z = 2 + i$ *e* $w = -3 - 4i$. *Então:*

$$\frac{z}{w} = \frac{2+i}{-3-4i} = \frac{(2+i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-10+5i}{9+16} = \frac{-10+5i}{25} = \frac{-2+i}{5}$$

2.3 Representação Geométrica dos Números Complexos

Considere o número complexo $z = a + bi$. Fixando um sistema de coordenadas cartesianas no plano, z é representado pelo ponto $P(a, b)$. O plano no qual representamos os números complexos é chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**. Nesse plano, todo número complexo tem sua parte real a representada pela abscissa do ponto P e sua parte imaginária b representada pela ordenada do ponto P. Por esse motivo, o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas no plano complexo são conhecidos por **eixo real** e **eixo imaginário**, respectivamente.

Figura 2.1: Representação geométrica de um número complexo

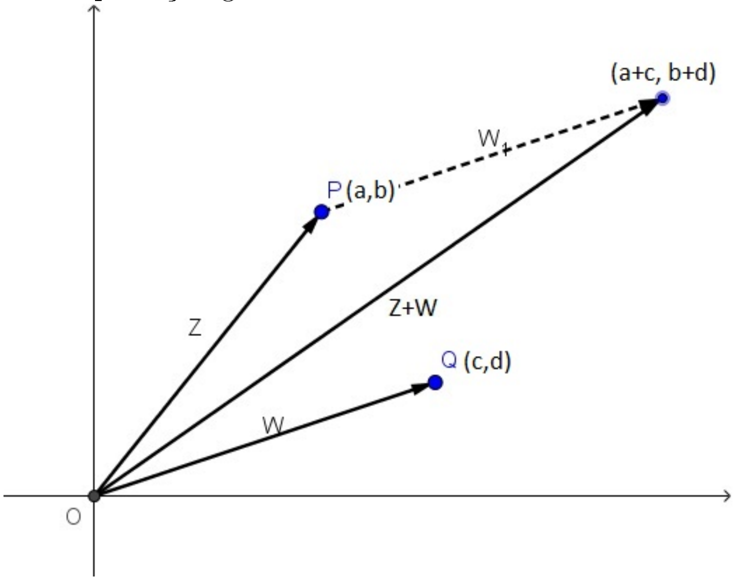


Fonte: O Autor

Em vários casos ainda é interessante representar o número complexo $z = a + bi$ como o vetor OP, isto é, o segmento orientado cuja extremidade inicial é a origem $(0, 0)$ e a extremidade final é o ponto $P(a, b)$. Utilizando essa representação vetorial, é possível interpretar geometricamente a soma de dois números complexos como a soma dos vetores que representam cada um desses números, conforme figura 2.2.

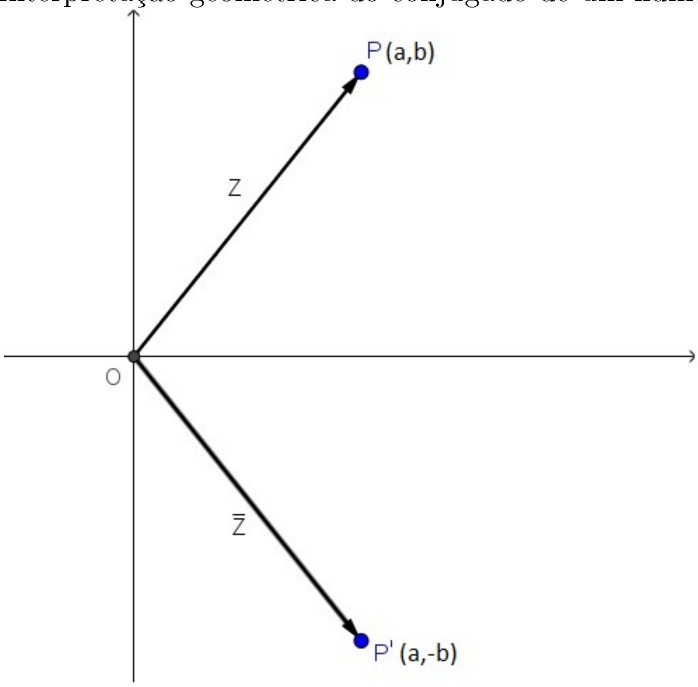
Nesse sentido, o conjugado do número complexo $z = a + bi$ pode ser representado geométrico como o vetor simétrico em relação ao eixo real ao vetor que representa z, conforme figura 2.3.

Figura 2.2: Interpretação geométrica da soma de dois números complexos



Fonte: O Autor

Figura 2.3: Interpretação geométrica do conjugado de um número complexo



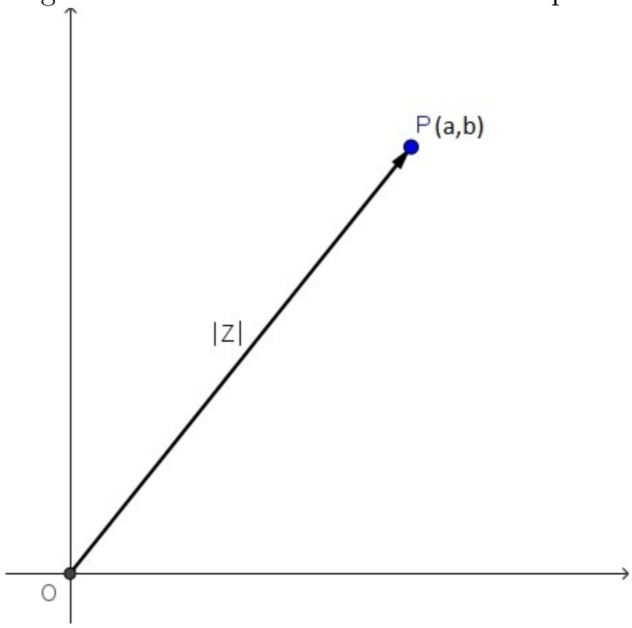
Fonte: O Autor

Utilizando essa interpretação geométrica, pode-se definir o módulo de um número complexo:

Definição 2.5. *Considere o número complexo $z = a + bi$. O **módulo de** z é definido como a distância da origem do plano complexo até o ponto $P(a, b)$, isto é:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

Figura 2.4: Módulo de um número complexo



Fonte: O Autor

O módulo de um número complexo possui algumas propriedades importantes:

Proposição 2.3. *Considere os números complexos $z = a+bi$ e $w = c+di$. As propriedades a seguir são válidas:*

(i) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ *e* $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$;

(ii) $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$;

(iii) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

(iv) $|\overline{z}| = |z|$;

(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

(vi) Desigualdade triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|$;

(vii) Segunda desigualdade triangular: $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

Demonstração:

(i) Das propriedades de números reais, tem-se:$\text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)|$ e $\text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)|$. Além disso:

$$|\text{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$|\text{Im}(z)| = |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

(ii) $|z|^2 = a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2$
Extraindo as raízes quadradas da expressão acima, tem-se:

$$|z| \leq |a| + |b| = |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$$

(iii) Pelo item (vii) da proposição 2.2, tem-se $z \cdot \overline{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2 = |z|^2$;

(iv) $|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;

(v) Pelo item (iii), tem-se:

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} = (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2|w|^2$$

Extraindo as raízes quadradas da expressão acima, tem-se $|z \cdot w| == |z| \cdot |w|$

(vi) Utilizando as propriedades da multiplicação de números complexos, as propriedades do conjugado e os itens anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{(z + w)} \\
&= (z + w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Extraindo as raízes quadradas da desigualdade acima, tem-se:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

(vii) Aplicando a desigualdade triangular, tem-se:

$$|z| = |z + w + (-w)| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|$$

Logo $|z| - |w| \leq |z + w|$. De forma análoga:

$$|w| = |w + z + (-z)| \leq |w + z| + |-z| = |z + w| + |z|$$

implica:

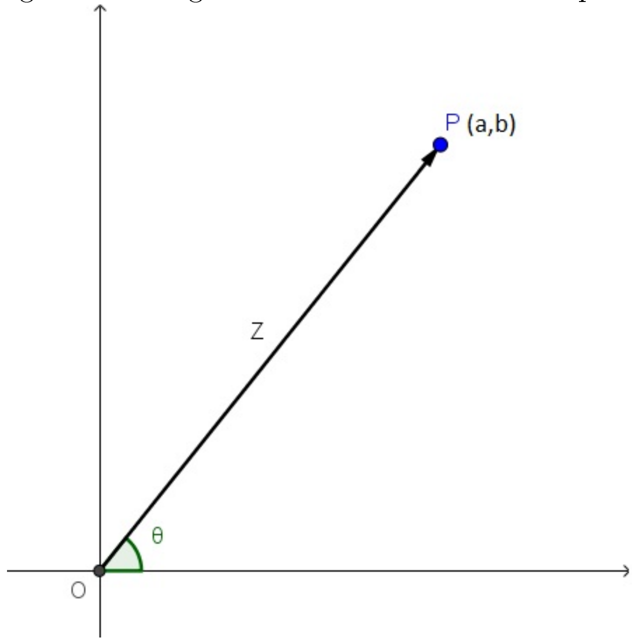
$$|w| - |z| = -(|z| - |w|) \leq |z + w|$$

Portanto: $||z| - |w|| \leq |z + w|$

$\square$

Considere o número complexo $z = a+bi$ representado pelo vetor da figura 2.5. O ângulo θ identificado merece atenção especial no estudo geométrico dos números complexos.

Figura 2.5: Argumento de um número complexo



Fonte: O Autor

Definição 2.6. *Considere* $z = a + bi$ *um número complexo não nulo. O ângulo* θ *que satisfaz* $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$ *é chamado de* ***argumento de*** z.

Observe que o ângulo θ representado na figura 2.5 é um argumento do número complexo z. Como $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}\theta$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se que: se θ é um argumento do número complexo z, então $\theta + 2k\pi$ também é um argumento para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Quando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, θ é chamado de **argumento principal** de z.

Exemplo 2.4. *Considere* $z = 1 + i$. *Qualquer ângulo* θ *da forma* $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ *é um argumento de* z. *O ângulo* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *é o argumento principal de* z.

2.4 Forma Trigonométrica dos Números Complexos

Considere um número complexo não nulo $z = a + bi$. Tem-se:

$$\begin{aligned} z = \ & a + bi = |z|\frac{(a+bi)}{|z|} = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) \\ & = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

sendo θ o argumento de z.

Esta representação motiva a definição a seguir:

Definição 2.7. *Considere o número complexo não nulo* z, *com módulo* $|z|$ *e argumento* θ. *A representação:*

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

*é chamada de **forma trigonométrica ou polar de** z.;*

Em diversos casos, calcular produtos e quocientes de números complexos pode ser mais simples se estes números estiverem representados em sua forma trigonométrica. A proposição a seguir fornece fórmulas simples para esses cálculos:

Proposição 2.4. *Considere os números complexos não nulos z e w representados na forma trigonométrica por:*

$$z = |z|(\ cos\ \theta + i\ sen\ \theta)\ e\ w = |w|(\ cos\ \phi + i\ sen\ \phi)$$

Então:

(i) $z \cdot w = |z||w|\,(\ cos\ (\theta + \phi) + i\ sen\ (\theta + \phi))$

(ii) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}\,(\ cos\ (\theta - \phi) + i\ sen\ (\theta - \phi))$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(i) z \cdot w &= (|z|(\ \cos\theta + i \text{ sen } \theta))\,(|w|(\ \cos\phi + i \text{ sen } \phi))\\
&= |z||w|(\ \cos\theta + i \text{ sen } \theta)(\ \cos\phi + i \text{ sen } \phi)\\
&= |z||w|\,(\ \cos\theta\cos\phi + i\cos\theta \text{ sen } \phi + i \text{ sen } \theta\cos\phi + i^2 \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi)\\
&= |z||w|\,(\ \cos\theta\cos\phi - \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi) + i\,(\ \cos\theta \text{ sen } \phi + \text{ sen } \theta\cos\phi)\\
z \cdot w &= |z||w|\,(\ \cos(\theta+\phi) + i \text{ sen } (\theta+\phi))
\end{aligned}$$

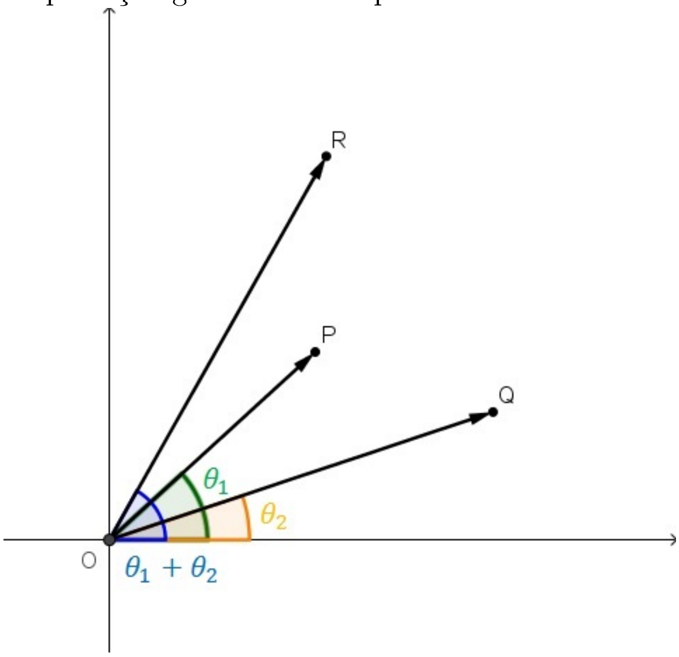
$$\begin{aligned}
(ii)\frac{z}{w} &= \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}\\
&= \frac{1}{|w|^2} z\overline{w}\\
&= \frac{1}{|w|^2}\,(|z|(\ \cos\theta + i \text{ sen } \theta))\,\overline{(|w|(\ \cos\phi + i \text{ sen } \phi))}\\
&= \frac{1}{|w|^2}|z||w|(\ \cos\theta + i \text{ sen } \theta)(\ \cos\phi - i \text{ sen } \phi)\\
&= \frac{|z|}{|w|}\,(\ \cos\theta\cos\phi - i\cos\theta \text{ sen } \phi + i \text{ sen } \theta\cos\phi - i^2 \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi)\\
&= \frac{|z|}{|w|}\,(\ \cos\theta\cos\phi + \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi) + i\,(-\cos\theta \text{ sen } \phi + \text{ sen } \theta\cos\phi)\\
\frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}\,(\ \cos(\theta-\phi) + i \text{ sen } (\theta-\phi))
\end{aligned}$$

□

Esta proposição auxilia na interpretação geométrica de dois números complexos, z e w: o produto $z \cdot w$ é representado pelo vetor cujo módulo é o produto dos módulos de z e w e cujo argumento é dado pela soma dos argumentos de z e w, conforme a figura 2.6.

O teorema a seguir fornece uma ferramenta para o cálculo de potências de números complexos representados na forma trigonométrica e é conhecido como **1ª fórmula de De Moivre**:

Figura 2.6: Interpretação geométrica do produto de dois números complexos



Fonte: O Autor

Teorema 2.2 (1ª fórmula de De Moivre)**.** *Considere $n \in \mathbb{Z}$ e z um número complexo não nulo na forma trigonométrica $z = r(\ cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, então:*

$$z^n = r^n\,(\ cos\ (n\theta) + i\ sen\ (n\theta))$$

Demonstração: A demonstração do teorema será feita por casos:

(i) Se $n = 0$ ou $n = 1$, o resultado é óbvio, pois:

$$r^0\,(\ \text{cos}\ (0\theta) + i\ \text{sen}\ (0\theta)) = 1\,(\ \text{cos}\ 0 + i\ \text{sen}\ 0) = 1\,(1 + i0) = 1 = z^0$$

$$r^1\,(\ \text{cos}\ (1\theta) + i\ \text{sen}\ (1\theta)) = r\,(\ \text{cos}\ (\theta) + i\ \text{sen}\ (\theta)) = z = z^1$$

(ii) Se $n > 1$, a demonstração se dá por indução. Se $n = 1$, o resultado já está provado no item (i). Suponha que $z^n = r^n\,(\ \text{cos}\ (n\theta) + i\ \text{sen}\ (n\theta))$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Deseja-se mostrar que $z^{n+1} = r^{n+1}\,(\ \text{cos}\ ((n+1)\theta) + i\ \text{sen}\ ((n+1)\theta))$. De fato, pela hipótese de indução:

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = [r^n\,(\ \text{cos}\ (n\theta) + i\ \text{sen}\ (n\theta))] \cdot [r\,(\ \text{cos}\ (\theta) + i\ \text{sen}\ (\theta))]$$

Pelo item (i) da proposição 2.4, tem-se:

$$z^{n+1} = r^n \cdot r\,(\ \text{cos}\ (n\theta + \theta) + i\ \text{sen}\ (n\theta + \theta))$$

Logo, $z^{n+1} = r^{n+1}\,(\ \text{cos}\ ((n+1)\theta) + i\ \text{sen}\ ((n+1)\theta))$. Pelo princípio da indução, tem-se que:

$$z^n = r^n\,(\cos\,(n\theta) + i\ \text{sen}\ (n\theta))\,,\ \text{para todo}\ n \in \mathbb{N}$$

(iii) Se $n \in \mathbb{Z}$ com $n < 0$, então $n = -m,\ m \in \mathbb{N}$. Então:

$$\begin{aligned} z^n &= [r\,(\cos\,(\theta) + i\ \text{sen}\ (\theta))]^n \\ &= [r\,(\cos\,(\theta) + i\ \text{sen}\ (\theta))]^{-m} \\ &= \frac{1}{[r\,(\cos\,(\theta) + i\ \text{sen}\ (\theta))]^m} \\ &= \frac{\cos 0 + i\ \text{sen}\ 0}{[r^m\,(\cos\,(m\theta) + i\ \text{sen}\ (m\theta))]} \\ &= \frac{1}{r^m}\,[\cos\,(0 - m\theta) + i\ \text{sen}\ (0 - m\theta)] \\ &= r^{-m}\,[\cos\,(-m\theta) + i\ \text{sen}\ (-m\theta)] \\ &= r^n\,[\cos\,(n\theta) + i\ \text{sen}\ (n\theta)] \end{aligned}$$

Com isso, conclui-se que a 1ª fórmula de De Moivre é valida para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Exemplo 2.5. *Determinar* $(1+i)^{20}$.

Se $z = 1 + i$, então $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Então $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\right)$. Utilizando-se a 1ª fórmula de De Moivre, obtem-se:

$$\begin{aligned} z^{20} &= \sqrt{2}^{20}\left(\cos 20\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\ 20\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1024\,(\cos 5\pi + i\ \text{sen}\ 5\pi) \\ &= 1024\,(-1 + i0) \\ z^{20} &= -1024 \end{aligned}$$

Definição 2.8. *Considere* $n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$. *Diz-se que* $w \in \mathbb{C}$ *é uma* ***raiz n-ésima de*** z *se* $w^n = z$.

Exemplo 2.6. *O número complexo* $w = 1 + i$ *é uma raiz 20-ésima de* $z = -1024$*, pois* $(1+i)^{20} = -1024$*, conforme o exemplo 2.5.*

Para calcular as raízes n-ésimas de um número complexo z, utiliza-se o teorema a seguir, conhecido como **2ª fórmula de De Moivre**:

Teorema 2.3. *Considere* $n \in \mathbb{N}$ *e* z *um número complexo não nulo na forma trigonométrica* $z = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$. *Existem exatamente* n *raízes n-ésimas complexas de* z*, as quais são da forma:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\ cos\ \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\ \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],\ para\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Demonstração: Considere $w = s(\cos\phi + i\ \text{sen}\ \phi)$ uma raiz n-ésima de z, isto é, $w^n = z$. Então, pela 1ª fórmula de De Moivre:

$$r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta) = s^n\,(\cos n\phi + i\ \text{sen}\ n\phi)$$

Como números complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, tem-se:

$$\begin{cases} r = s^n \\ \theta + 2k\pi = n\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Tem-se então:

$$z_k = w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \text{ sen }\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \text{ para } k \in \mathbb{Z}$$

Considere $p, q \in \mathbb{Z}$ e z_p, z_q duas raízes n-ésimas de z. Da igualdade de números complexos, tem-se:

$$\begin{aligned}
z_p = z_q &\Rightarrow \frac{\theta + 2p\pi}{n} = \frac{\theta + 2q\pi}{n} + 2m\pi, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \frac{\theta + 2p\pi}{n} - \frac{\theta + 2q\pi}{n} = 2m\pi \\
&\Rightarrow \frac{\theta + 2p\pi - \theta - 2q\pi}{n} = 2m\pi \\
&\Rightarrow 2\pi\left(\frac{p-q}{n}\right) = 2m\pi \\
&\Rightarrow \frac{p-q}{n} = m \\
&\Rightarrow p - q = mn \\
z_p = z_q &\Rightarrow p \equiv q \bmod n
\end{aligned}$$

Assim, as raízes n-ésimas de z dependem do resto da divisão de inteiros quaisquer por n, sendo esses restos $0, 1, \ldots, n-1$. Com isso, para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$z_k = w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \text{ sen }\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

é uma raiz n-ésima de z. □

Exemplo 2.7. *Calcular as raízes cúbicas de $z = 8$.*

Se $z = 8 = 8 + 0i$, então $|z| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$ e $\theta = 0$. Então $z = 8(\cos 0 + i \text{ sen } 0)$. Utilizando-se a 2ª fórmula de De Moivre, obtem-se:

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i \text{ sen }\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)\right], \text{ para } k = 0, 1, 2 \\
z_k &= 2\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \text{ sen }\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right], \text{ para } k = 0, 1, 2
\end{aligned}$$

Se $k = 0$:

$$z_0 = 2[\cos(0) + i \text{ sen }(0)] = 2[1 + i0] = 2$$

Se $k = 1$:

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \text{ sen }\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 + i\sqrt{3}$$

Se $k = 2$:

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - i\sqrt{3}$$

Corolário 2.1. *Se z_k é uma raiz n-ésima do número complexo z, então $|z_k| = \sqrt[n]{|z|}$.*

O corolário acima é uma consequência direta da 2ª fórmula de De Moivre com a relação fundamental da trigonometria.

Exemplo 2.8. *Se z_k é uma raiz n-ésima de $z = 1,\ -1,\ i,\ -i$, então $|z_k| = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{1} = 1$.*

Capítulo 3

Polinômios Complexos

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos algébricos relacionados aos polinômios complexos. Alguns resultados da Álgebra e da Análise também serão demonstrados, devido a importância destes para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, que será objeto do próximo capítulo. As definições e resultados relacionados aos polinômios complexos são baseadas em [9], [10], [15] e [16], enquanto a caracterização topológica do conjunto dos números complexos e os resultados relacionados à continuidade das funções polinomiais são construídos a partir de [1], [11], [12], [13], [14] e [17].

3.1 Polinômios Complexos

Definição 3.1. *Um* ***polinômio complexo*** *é uma expressão formal do tipo*

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n = \sum_{j=0}^{n} a_jX^j$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Os elememtos a_j são chamados de **coeficientes** do polinômio. O símbolo X é chamado de **indeterminada**, sendo X^j uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$, com j fatores. As parcelas a_jX^j são os **termos** do polinômio e os termos a_jX^j em que $a_j \neq 0$ são os **monômios** de grau j do polinômio $p(X)$. O termos a_0 é chamado também de **termo constante**.

O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$ será representado por $\mathbb{C}[X]$.

Definição 3.2. *Considere os polinômios $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ e $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_nX^n$. Diz-se que $p(X)$ e $q(X)$ são iguais, e representa-se por $p(X) = q(X)$, se $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.*

Exemplo 3.1. *(i) $p(X) = 8X^7 + (5 + 2i)X^5 + \pi X^2 + X + i$ é um polinômio complexo.*

(ii) $p(X) = a,\ a \in \mathbb{C}$ é chamado de ***polinômio constante****.*

(iii) $p(X) = 0$ *é chamado de* ***polinômio nulo***.

Definição 3.3. *Considere* $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ *um polinômio complexo não nulo, com* $a_n \neq 0$. *O* ***grau de*** $p(X)$ *é definido como o maior expoente das indeterminadas dos termos com coeficiente não nulo:*

$$gr\,[p(X)] = n$$

O coeficiente a_n *é chamado de* ***coeficiente líder*** *de* $p(X)$.

Os polinômios de grau n com $a_n = 1$ são chamados de **polinômios mônicos**.

É importante comentar que não se define grau para o polinômio nulo.

Exemplo 3.2. *(i) O grau do polinômio* $p(X) = 8X^7 + (5+2i)X^5 + \pi X^2 + X + i$ *é* $gr\,[p(X)] = 7$.

(ii) O grau do polinômio $q(X) = -5$ *é* $gr\,[q(X)] = 0$.

(iii) O grau do polinômio $p(X) = X^{1024} + iX^{64} + 5X^4 - 8$ *é* $gr\,[p(X)] = 1024$. $p(X)$ *é um polinômio mônico.*

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}[X]$ podem ser definidas como as operações em $\mathbb{C}$.

Definição 3.4. *Considere os polinômios complexos* $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n = \sum_{j=0}^{n} a_jX^j$ *e* $q(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n = \sum_{j=0}^{n} b_jX^j$. *A soma* $p(X) + q(X)$ *é definida por:*

$$p(X) + q(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \ldots + (a_n + b_n)X^n = \sum_{j=0}^{n}(a_j + b_j)X^j$$

Definição 3.5. *Considere os polinômios complexos* $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n = \sum_{j=0}^{n} a_jX^j$ *e* $q(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_mX^m = \sum_{j=0}^{m} b_jX^j$. *O produto* $p(X) \cdot q(X)$ *é definida por:*

$$p(X) \cdot q(X) = \sum_{j=0}^{n+m} c_jX^j, \text{ onde } c_j = \sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k}$$

Observe que, ao operar com polinômios, estamos operando com listas de números complexos. Assim, é fácil perceber que a soma de polinômios é associativa, comutativa, possui elemento neutro (o polinômio nulo) e possui a propriedade do elemento oposto, sendo o elemento oposto de $p(X) = \sum_{j=0}^{n} a_jX^j$ o polinômio $p(X) = \sum_{j=0}^{n}(-a_j)X^j$. Da mesma forma, o produto de polinômios é associativo, comutativo, distributivo em relação a soma e possui elemento neutro (o polinômio constante $p(X) = 1$).

Exemplo 3.3. *Considere os polinômios* $p(X) = 2X^3 - iX^2 + X + 2$, $q(X) = -3X^3 + X^2 - 3X - 1$ *e* $r(X) = iX^2 + 2$. *Calcular* $p(X) + q(X)$, $p(X) + r(X)$ *e* $q(X) \cdot r(X)$.

$$
\begin{aligned}
p(X) + q(X) &= (2X^3 - iX^2 + X + 2) + (-3X^3 + X^2 - 3X - 1)\\
&= (2-3)X^3 + (-i+1)X^2 + (1-3)X + (2-1)\\
p(X) + q(X) &= -X^3 + (1-i)X^3 - 2X + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(X) + r(X) &= (2X^3 - iX^2 + X + 2) + (iX^2 + 2)\\
&= (2X^3 - iX^2 + X + 2) + (0x^3 + iX^2 + 0X + 2)\\
&= (2+0)X^3 + (-i+i)X^2 + (1+0)X + (2+2)\\
&= 2X^3 + 0X^2 + 1X + 4\\
p(X) + r(X) &= 2X^3 + X + 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q(X) \cdot r(X) &= (-3X^3 + X^2 - 3X - 1) \cdot (iX^2 + 2)\\
&= (-3i)X^5 + (-6)X^3 + iX^4 + 2x^2 + (-3i)X^3 + (-6)X + (-i)X^2 + (-2)\\
&= (-3i)X^5 + iX^4 + (-6-3i)X^3 + (2-i)X^2 + (-6)X + (-2)\\
q(X) \cdot r(X) &= (-3iX^5 + iX^4 + (-6-3i)X^3 + (2-i)X^2 - 6X - 2
\end{aligned}
$$

Passaremos agora ao estudo da divisão de polinômios. Considere os polinômios complexos $p(X)$ e $d(X)$, sendo $d(X)$ não nulo. Dividir $p(X)$ por $d(X)$ significa encontrar dois polinômios $q(X)$ e $r(X)$ tais que:

- $p(X) = q(X) \cdot d(X) + r(X)$;
- $gr[r(X)] < gr[d(X)]$ ou $r(X) = 0$.

Os polinômios $q(X)$ e $r(X)$ são chamados, respectivamente, de **quociente** e **resto** da divisão de $p(X)$ por $d(X)$. O próximo teorema garante a existência e a unicidade de tais polinômios com as propriedades elencadas acima.

Teorema 3.1. ***(Algoritmo da divisão de Euclides em $\mathbb{C}[X]$)*** *Considere $p(X), d(X) \in \mathbb{C}[X]$, com $d(X) \neq 0$. Existem e são únicos os polinômios $q(X)$ e $r(X)$ tais que:*

$$p(X) = q(X) \cdot d(X) + r(X)$$

com $gr[r(X)] < gr[d(X)]$ ou $r(X) = 0$.

Demonstração: Considere $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ e $d(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$.
(i) Existência Vamos mostrar a existência de $q(X)$ e $r(X)$ analisando alguns casos:

- Se $p(X) = 0$, basta fazer $q(X) = r(X) = 0$.
- Se $p(X) \neq 0$, com $gr[p(X)] < gr[d(X)]$, basta fazer $q(X) = 0$ e $r(X) = p(X)$.
- Se $p(X) \neq 0$, com $gr[d(X)] \leq gr[p(X)]$ e $gr[p(X)] = 0$. Então $gr[d(X)] = 0$, $p(X) = a_0$ e $d(X) = b_0$, ambos não nulos. Fazendo $q(X) = \dfrac{a_0}{b_0}$ e $r(X) = 0$, o resultado está demonstrado.

- Se $p(X) \neq 0$, com $gr[d(X)] \leq gr[p(X)] = m \neq 0$. Vamos mostrar a existência de $q(X)$ e $r(X)$ por indução. Suponha que o teorema seja válido para os polinômios de grau menor que m. Mostremos que também é válido para polinômios de grau m.

  Considere o polinômio $p_1(X)$ definido por:

$$
\begin{aligned}
p_1(X) &= p(X) - a_m b_n^{-1} X^{m-n} d(X) \\
&= (a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0) - a_m b_n^{-1} X^{m-n}(b_n X^n \\
&\qquad + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1 X + b_0) \\
&= a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0 - a_m X^m - a_m b_n^{-1} b_{n-1} X^{m-1} \\
&\qquad + \ldots + a_m b_n^{-1} b_1 X^{m-n+1} + a_m b_n^{-1} b_0 X^{m-n} \\
p_1(X) &= a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0 - a_m b_n^{-1} b_{n-1} X^{m-1} \\
&\qquad + \ldots + a_m b_n^{-1} b_1 X^{m-(n-1)} + a_m b_n^{-1} b_0 X^{m-n}
\end{aligned}
$$

  Logo, o polinômio $p_1(X)$ tem grau no máximo igual a $m-1$. Pela hipótese de indução, existem polinômios complexos $q_1(X)$ e $r_1(X)$ tais que:

$$p_1(X) = q_1(X) \cdot d(X) + r_1(X) \text{ com } gr[r_1(X)] < gr[d(X)] \text{ ou } r_1(X) = 0$$

  Assim:

$$
\begin{aligned}
p(X) &= p_1(X) + a_m b_n^{-1} X^{m-n} d(X) \\
&= q_1(X) \cdot d(X) + r_1(X) + a_m b_n^{-1} X^{m-n} d(X) \\
p(X) &= [q_1(X) + a_m b_n^{-1} X^{m-n}] \cdot d(X) + r_1(X)
\end{aligned}
$$

  Fazendo $q(X) = q_1(X) + a_m b_n^{-1} X^{m-n}$ e $r(x) = r_1(X)$, tem-se:

$$p(X) = q(X) \cdot d(X) + r(X) \text{ com } gr[r(X)] < gr[d(X)] \text{ ou } r(X) = 0$$

  e o teorema está demonstrado.

(ii) Unicidade Suponha que existam $q(X), r(X), q_1(X), r_1(X)$ tais que:

$$p(X) = q(X) \cdot d(X) + r(X) \text{ e } p(X) = q_1(X) \cdot d(X) + r_1(X)$$

com $gr[r(X)] < gr[d(X)]$ ou $r(X) = 0$ e $gr[r_1(X)] < gr[d(X)]$ ou $r_1(X) = 0$. Vamos analisar dois casos:

- Se $r(X) = r_1(X) = 0$, então $p(X) = q(X) \cdot d(X)$ e $p(X) = q_1(X) \cdot d(X)$. Subtraindo essas expressões, obtem-se:

$$p(X) - p(X) = q(X) \cdot d(X) - q_1(X) \cdot d(X) \Rightarrow [q(X) - q_1(X)] \cdot d(X) = 0$$

  Como $d(X) \neq O$, segue que $q(X) - q_1(X) = 0$ e $q(X) = q_1(X)$.

- Se $r(X) \neq 0$ ou $r_1(X) \neq 0$, então $gr[r(X) - r_1(X)] < gr[d(X)]$. e $r(X) - r_1(X) = [q_1(X) - q(X)] \cdot d(X)$. Sabendo que $d(X) \neq 0$ e supondo que $q_1(X) - q(X) \neq 0$, tem-se que $d(X)$ é um fator de $[r(X) - r_1(X)$ e, portanto, $gr[r(X) - r_1(X)] \geq gr[d(X)]$, o que é um absurdo. Logo $q_1(X) - q(X) = 0$, isto é $q_1(X) = q(X)$. Com isso, $r(X) - r_1(X) = 0$ e $r(X) = r_1(X)$

□

Na prática, é comum utilizar o **método das chaves** para efetuar a divisão de polinômios.

Exemplo 3.4. *Determine o quociente e o resto da divisão de* $p(X) = X^3 - X^2 + 2X - 2$ *por* $d(X) = X - 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 2X^2 + 2X - 2 & X - 1 \\ \hline -X^2 + 2X - 2 & X^2 - X + 1 \\ X - 2 & \\ -1 & \end{array}$$

O quociente da divisão é o polinômio $q(X) = X^2 - X + 1$ e o resto é $r(X) = -1$.

3.2 Polinômios e Funções Polinomiais

Para os resultados apresentados nesta seção, é necessário estabelecer uma relação entre polinômios e funções polinomiais complexas.

Definição 3.6. *Uma* ***função polinomial complexa*** *é uma função* $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por:*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, *com* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$ *e* $a_n \neq 0$. *O conjunto* $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ *é usado para denotar o conjunto de todas as funções polinomiais de* $\mathbb{C}$ *em* $\mathbb{C}$.

A cada polinômio $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ podemos associar uma função polinomial $p(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definida por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Os coeficientes da função são os mesmos coeficientes do polinômio. Assim, polinômios diferentes em $\mathbb{C}[X]$ correspondem a funções polinomiais diferentes em $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Com isso, é possível estabelecer uma relação bijetora entre os conjuntos $\mathbb{C}[X]$ e $\mathcal{P}(\mathbb{C})$. Essa relação permitirá que certos resultados envolvendo funções polinomiais complexas (portanto, da Análise) sejam utilizados na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra para polinômios complexos. Com certo abuso de linguagem, podemos dizer que $\mathbb{C}[X]$ e $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ são equivalentes.

De início, a correspondência biunívoca entre $\mathbb{C}[X]$ e $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ nos permite avaliar um número complexo α em um polinômio $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Basta fazer:

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0$$

Tal avaliação permitirá definir o que é uma raiz de um polinômio.

Definição 3.7. *Considere o polinômio $p(X) \in \mathbb{C}[X]$. Diz-se que $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma* ***raiz (ou zero)*** *de $p(X)$ se $p(\alpha) = 0$.*

Exemplo 3.5. *Determinar as raízes do polinômio $p(X) = X^3 - 8$.*

Determinar as raízes do polinômio $p(X) = X^3 - 8$ é encontrar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha) = \alpha^3 - 8 = 0$, Isto é,

$$\alpha^3 = 8$$

Ou seja, os valores procurados para α são as raízes cúbicas do complexo $z = 8$. Pelo exemplo 2.7, tem-se:

$$\alpha = 2,\ \alpha = -1 + i\sqrt{3} \text{ e } \alpha = -1 - i\sqrt{3}$$

que são as raízes do polinômio $p(X) = X^3 - 8$.

Equações do tipo $p(\alpha) = 0$, onde $p(X)$ é um polinômio complexo e $\alpha \in \mathbb{C}$ são chamadas de **equações algébricas**.

Os resultados a seguir apresentam algumas propriedades das raízes de polinômios complexos:

Lema 3.1. *Considere o polinômio complexo $p(X) = X^n - a^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{C}$. Existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que:*

$$p(X) = (X - a)q(X)$$

Demonstração: Considere o polinômio complexo $q(X)$ definido por:

$$q(X) = X^{n-1} + aX^{n-2} + a^2X^{n-3} + \ldots + a^{n-2}X + a^{n-1}$$

Então:

$$\begin{aligned}
(X-a)q(X) &= (X-a)\cdot(X^{n-1} + aX^{n-2} + a^2X^{n-3} + \ldots + a^{n-2}X + a^{n-1}) \\
&= X^n - aX^{n-1} + aX^{n-1} - a^2X^{n-2} + a^2X^{n-2} - a^3X^{n-3} \\
&\qquad + \ldots + a^{n-2}X^2 - a^{n-1}X + a^{n-1}X - a^n \\
(X-a)q(X) &= X^n - a^n = p(X)
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.2. *Considere $p(X)$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$. Existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que:*

$$p(X) - p(\alpha) = (X - \alpha)q(X), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Considere $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, com $a_n \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$\begin{aligned} p(X) - p(\alpha) &= (a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0) - (a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} \\ &\qquad + \ldots + a_1\alpha + a_0) \\ &= a_n(X^n - \alpha^n) + a_{n-1}(X^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1(X - \alpha) \\ &= a_n(X-\alpha)\,(X^{n-1} + \alpha X^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}X + \alpha^{n-1}) \\ &\qquad + a_{n-1}(X-\alpha)\,(X^{n-1} + \alpha X^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}X + \alpha^{n-1}) \\ &\qquad + \ldots + a_1(X-\alpha) \end{aligned}$$

Esse último passo sendo devido ao lema 3.1. Segue que:

$$\begin{aligned} p(X) - p(\alpha) &= (X-\alpha)[a_n\,(X^{n-1} + \alpha X^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}X + \alpha^{n-1}) \\ &\quad + a_{n-1}\,(X^{n-1} + \alpha X^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}X + \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1] \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} q(X) &= a_n\,(X^{n-1} + \alpha X^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}X + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(X^{n-1} + \alpha X^{n-2} \\ &\qquad + \ldots + \alpha^{n-2}X + \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1 \end{aligned}$$

Tem-se:

$$p(X) - p(\alpha) = (X-\alpha)q(X)$$

□

Observe que $gr\,[q(x)] = n - 1$.

Teorema 3.2. ***[Teorema da fatorização]*** *Considere $p(X)$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$. $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $p(X)$ se, e somente se, $(X-\alpha)$ é um fator de $p(X)$, isto é, se existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(X) = (X-\alpha)q(X)$. Além disso, $gr\,[q(x)] = n-1$.*

Demonstração: Dado o polinômio complexo $p(X)$ de grau $n \geq 1$, pelo lema 3.2, existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que:

$$p(X) - p(\alpha) = (X-\alpha)q(X), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{C}$$

Em particular, se α é uma raiz de $p(X)$ então $p(\alpha) = 0$ e:

$$p(X) = (X-\alpha)q(X)$$

Reciprocamente, se existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(X) = (X-\alpha)q(X)$ então:

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$$

Assim, α é uma raiz de $p(X)$. □

Aplicando várias vezes o teorema da fatorização sobre um polinômio $p(X)$ de grau $n \geq 1$, obtem-se o seguinte corolário:

Corolário 3.1. *Considere $p(X)$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ são raízes complexas distintas de $p(X)$ se, e somente se, se existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_k)q(X)$, sendo $gr\,[q(x)] = n - k$*

O corolário acima mostra que um polinômio de grau $n \geq 1$ não pode ter mais do que n raízes complexas, caso possua alguma. É importante observar que até agora não foi demonstrada a existência de raízes para quaisquer polinômios complexos, apenas foi limitada a quantidade máxima dessas raízes.

A divisão de polinômios complexos por polinômios do tipo $(X - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ é bastante frequente no estudo das raízes. Vejamos alguns resultados relacionados a esses casos especiais de divisão.

Teorema 3.3. *Considere $p(X)$ um polinômio complexo. Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, o resto da divisão de $p(X)$ pelo polinômio $X - \alpha$ é $p(\alpha)$.*

Demonstração: Sendo $X - \alpha$ um polinômio de grau 1, o resto da divisão de $p(X)$ por $X - \alpha$ é uma constante $r \in \mathbb{C}$. Então:

$$p(X) = (X - \alpha)q(X) + r$$

Logo:

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(X) + r = r$$

□

O teorema do resto fornece uma maneira rápida de determinar o resto da divisão de um polinômio complexo $p(X)$ por $X - \alpha$. Para calcular o resto e o quociente dessa divisão, frequentemente se recorre a um procedimento conhecido como **dispositivo de Briot-Ruffini**.

Considere o polinômio $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ e sejam $q(X) = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_1X + b_0$ e $r(X) = r_0$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $p(X)$ por $X - \alpha$. Então:

$$\begin{aligned}
p(X) &= q(X)(X - \alpha) + r(X) \\
&= \left(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_1X + b_0\right)(X - \alpha) + r_0 \\
&= \left(b_{n-1}X^{n} + b_{n-2}X^{n-1} + \ldots + b_1X^2 + b_0X\right) - (\alpha b_{n-1}X^{n-1} + \alpha b_{n-2}X^{n-2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots + \alpha b_1X + \alpha b_0) + r_0 \\
p(X) &= b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (b_0 - \alpha b_1)X + (r_0 - \alpha b_0)
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (b_0 - \alpha b_1)X + (r_0 - \alpha b_0)$$

Assim:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1} \\ \cdots \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1 \\ a_0 = r_0 - \alpha b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ \cdots \\ b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\ r_0 = a_0 + \alpha b_0 \end{cases}$$

Os cálculos descritos acima são facilmente efetuados quando dispostos numa tabela como a seguinte:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
α	$a_n = b_{n-1}$	$a_{n-1} + \alpha b_{n-1} = b_{n-2}$	$\ldots$	$a_1 + \alpha b_1 = b_0$	$a_0 + \alpha b_0 = r$

Exemplo 3.6. *Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, dividir* $p(X) = iX^4 + 3X^3 - X^2 + 2$ *por* $X + 1$.

	i	3	-1	0	2
-1	i	$3-i$	$-4+i$	$4-i$	$-2+i$

Então $p(X) = (x+1)q(X) + r$, onde:

$$q(X) = iX^3 + (3-i)X^2 + (-4+i)X + (4-i) \text{ e } r = -2+i$$

3.3 Noções de Topologia no Conjunto dos Números Complexos

Para a discussão que será feita a seguir, será importante conhecer algumas definições e resultados que dizem respeito a caracterização topológicas dos números complexos.

Definição 3.8. *Considere* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e* $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Define-se:*

- **a bola aberta de centro** z_0 **e raio** r como o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ cuja distância ao ponto z_0 é menor que r:

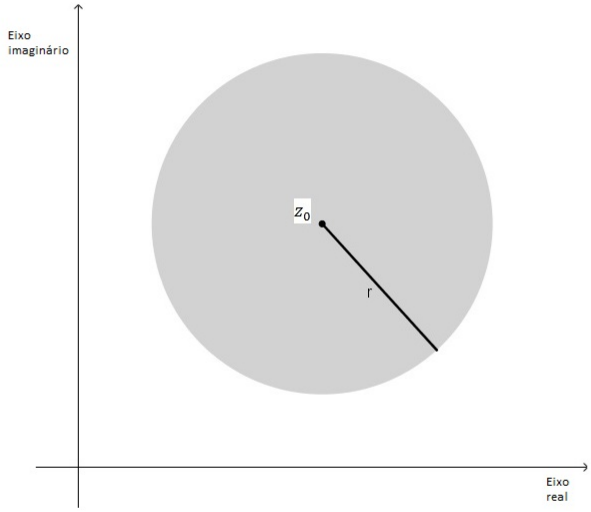
$$B(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\}$$

- **a bola fechada (ou disco fechado) de centro** z_0 **e raio** r como o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ cuja distância ao ponto z_0 é menor ou igual a r:

$$B[z_0; r] = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq r\}$$

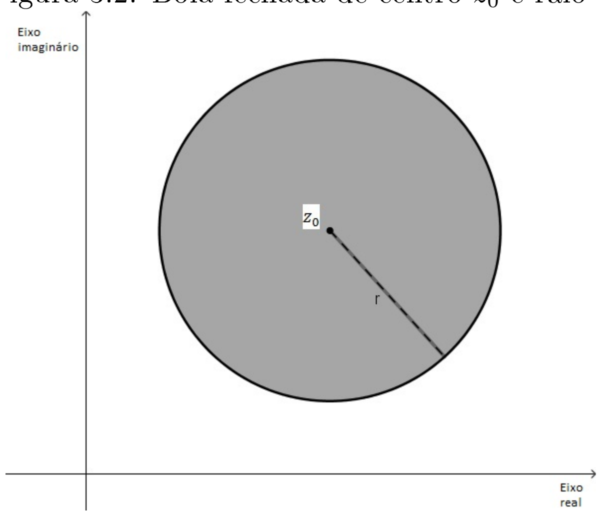
Em particular, o disco $B[0; 1] = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$ é chamado de **disco unitário de** $\mathbb{C}$.

Figura 3.1: Bola aberta de centro z_0 e raio r



Fonte: O Autor

Figura 3.2: Bola fechada de centro z_0 e raio r



Fonte: O Autor

- **a circunferência de centro** z_0 **e raio** r como o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ cuja distância ao ponto z_0 é exatamente r:

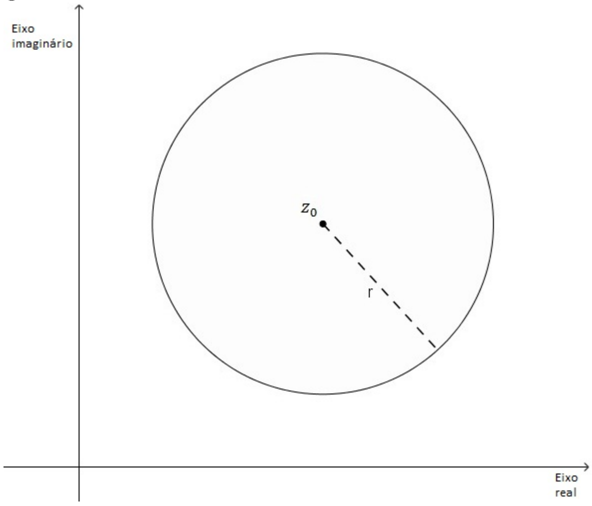
$$S\left[z_0; r\right] = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\}$$

  Em particular, a circunferência $S\left[0; 1\right] = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ é chamado de **circunferência unitária de** $\mathbb{C}$.

A partir da definição de bolas abertas, define-se o que são os pontos interiores de um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$. Diz-se que z_0 é **interior a** A se existe $r > 0$ tal que a bola aberta $B\left(z_0; r\right)$ esteja inteiramente contida em A. O conjunto de todos os pontos interiores de A é chamado de **interior de** A e é denotado por int (A).

Definição 3.9. *Considere A um subconjunto de $\mathbb{C}$.*

Figura 3.3: Circunferência de centro z_0 e raio r



Fonte: O Autor

*(i) A é dito **aberto** se int* $(A) = A$.

*(ii) A é dito **fechado** se* $A^C = \mathbb{C} - A$ *é um conjunto aberto.*

*(iii) A é dito **limitado** se existe* $r > 0$ *tal que* $|z| \leq r$ *para todo* $z \in A$.

*(iv) A é dito **compacto** se A é limitado e fechado.*

Exemplo 3.7. *Para todo* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e* $r > 0$ *tem-se:*

(i) $B(z_0; r)$ *é um conjunto aberto.*

(ii) $B[z_0; r]$ *e* $C[z_0; r]$ *são conjuntos limitados e fechados. Logo, ambos são conjuntos compactos.*

As definição a seguir trata sobre sequências no conjunto dos números complexos:

Definição 3.10. *Uma **sequência** é uma aplicação* $z : \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{C}$ *que associa a cada natural* n *um número complexo* z_n*, chamado de n-ésimo termo da sequência.*

Definem-se ainda as **subsequências** como restrições de uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. As subsequências são denotadas por $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.

Uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **limitada** se existe $r > 0$ tal que $|z_n| < r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que o conjunto dos valores assumidos pela sequência (z_n) é um subconjunto limitado de $\mathbb{C}$. Quando a sequência (z_n) não for limitada, diz-se que ela é **ilimitada**

Definição 3.11. *Considere a sequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Diz que* $a \in \mathbb{C}$ *é **limite** dessa sequência se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_0$ *implica* $|z_n - a| < \varepsilon$.

Dizer que $a \in \mathbb{C}$ é o limite da sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ significa dizer que z_n se aproxima de a para valores cada vez maiores de n. Nesse caso, diz-se que sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para a e denota-se por $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ ou $z_n \to a$.

Os resultados sobre sequências convergentes apresentados a seguir serão importantes para o que será feito mais adiante:

Teorema 3.4. *Considere a sequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Se* (z_n) *é uma sequência convergente, então ela é também limitada.*

Demonstração: Se (z_n) é uma sequência convergente para $z_0 \in \mathbb{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $|z_n - z_0| < 1$. Usando a segunda desigualdade triangular, obtem-se:

$$|z_n| - |z_0| \leq |z_n - z_0| < 1$$

Assim, $|z_n| \leq |z_0| + 1$. Ainda usando a segunda desigualdade triangular, tem-se:

$$|z_0| - |z_n| \leq |z_0 - z_n| = |z_n - z_0| < 1, \text{ para } n \geq n_0$$

A expressão acima implica $|z_0|-1 \leq |z_n|$. Tem-se, então, $|z_0|-1 \leq |z_n| \leq |z_0|+1$, para $n \geq n_0$. Sejam m e M o mínimo e o máximo do conjunto finito $\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{n_0-1}|, |z_0| - 1, |z_0| + 1\}$, então:

$$m \leq |z_n| \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sequência (z_n) é limitada. □

Teorema 3.5. *Considere a sequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente para* $a \in \mathbb{C}$. *Qualquer subsequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ *também é convergente para* $a \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Se a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{C}$, dado $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $|z_n - a| < \delta$. Dada uma subsequência qualquer $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, sendo $\mathbb{N}'$ um conjunto infinito, para $n \in \mathbb{N}'$ com $n \geq n_0$, vale $|z_n - a| < \delta$. Então, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ converge para a. □

O seguinte teorema caracteriza conjuntos fechados a partir de sequências convergentes.

Teorema 3.6. *Um conjunto* $A \subset \mathbb{C}$ *é fechado se, e somente se, toda sequência convergente* $(z_n) \subset A$ *converge para um ponto de* A.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que A seja fechado e que exista $(z_n) \subset A$ tal que $z_n \to z_0$, com $z_0 \notin A$. Então $z_0 \in A^C$. Como A^C é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset A^C$. Como $z_n \to z_0$, para n suficientemente grande, tem-se $z_n \in B(z_0, r) \subset A^C$, o que é uma contradição. Logo, $z_0 \in A$.
$(\Leftarrow)$ Suponha que A^C não seja aberto. Então existe $z_0 \in A^C$ tal que $z_0 \notin \text{int}(A^C)$. Assim, para qualquer $r > 0$, a bola $B(z_0, r)$ não está inteiramente contida em A^C. Em particular, tomando $r = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in B(z_0, 1/n)$ tal que $z_n \notin A^C$. Como $(z_n) \subset A$ converge para z_0, mas $z_0 \in A^C$, então A não é fechado. □

O teorema a seguir apresenta uma caracterização de conjuntos compactos através de sequências. Alguns livros trazem essa caracterização como definição para conjuntos compactos e demonstram a caracterização de limitado e fechado como um teorema.

Teorema 3.7. *Um subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ é compacto se, e somente se, toda sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ admite uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Considere a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, com $z_n = a_n + b_n i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é um conjunto compacto, então, por definição, K é limitado. Logo, a sequência (z_n) é limitada. De $|a_n| \leq |z_n|$ e $|b_n| \leq |z_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que as sequências reais (a_n) e (b_n) são limitadas. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass para sequências de números reais, existe um subsequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ convergente para $a_0 \in \mathbb{R}$. Por sua vez, a subsequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada (pois é subsequência de uma sequência limitada) e, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ convergente para $b_0 \in \mathbb{R}$. Pelo teorema 3.5, a subsequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ também é convergente para a_0. Então, tomando $z_0 = a_0 + b_0 i$, tem-se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ converge para z_0. Mostramos assim que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ possui uma subsequência convergente para z_0. Como K é fechado, então $z_0 \in K$.
($\Leftarrow$) Suponha que K não seja limitado. Então existe uma sequência $(z_n) \subset K$ tal que $z_n \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Nenhuma subsequência de (z_n) pode ser limitada. Logo, pelo teorema 3.4, nenhuma subsequência de (z_n) pode ser convergente, o que é uma contradição à hipótese. Logo, K é limitado.

Além disso, dada um sequência convergente $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, existe uma subsequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ convergente para $z_0 \in K$. Pelo teorema 3.5, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ convergem para o mesmo limite $z_0 \in K$. Logo, K é fechado e, portanto, compacto. $\square$

3.4 Continuidade das Funções Polinomiais

Definição 3.12. *Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Diz-se que f é* ***contínua*** *em z_0 se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

Diz-se que f é contínua em $A \subset \mathbb{C}$ se f é contínua em todo ponto $z_0 \in A$. Diz-se que f é contínua se é contínua em todo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exemplo 3.8. *Considere $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \alpha$, para todo $z \in \mathbb{C}$. A função f é contínua.*

De fato, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, tomando qualquer $\delta > 0$ tem-se que $|z - z_0| < \delta$ implica:

$$|f(z) - f(z_0)| = |\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$$

Exemplo 3.9. *Considere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. A função g é contínua.*

De fato, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ tem-se que $|z - z_0| < \delta$ implica

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon$$

Lema 3.3. *Considere a função $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua em $z_0 \in K$.*

(i) Existem constantes positivas $\delta_1, M_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$z \in K \text{ e } |z - z_0| < \delta_1 \text{ implica } |f(z)| \leq M_1$$

(ii) Existem constantes positivas $\delta_2, M_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$z \in K \text{ e } |z - z_0| < \delta_2 \text{ implica } |f(z)| \geq M_2$$

Demonstração:

(i) Como f é contínua em z_0, tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_1$ implicam $|f(z) - f(z_0)| < 1$. Então, pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z) - f(z_0) + f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| \\ &< 1 + |f(z_0)| = M_1 \end{aligned}$$

(ii) Como f é contínua em z_0, tomando $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$ implicam $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Então, pela segunda desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z_0) + f(z) - f(z_0)| \\ &\geq ||f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)|| \\ &\geq |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| \\ &> |f(z_0)| - \varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} = M_2 \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1. *Considere as funções $f,\ g : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínuas em $z_0 \in K$ e $c \in \mathbb{C}$. Então:*

(i) $f + g$ é contínua em z_0;

(ii) cf é contínua em z_0;

(iii) $f \cdot g$ é contínua em z_0;

(iv) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em z_0, se $g(z_0) \neq 0$.

Demonstração:

(i) Como f e g são contínuas em z_0, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_1$ implicam $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2$ e $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_2$ implicam

$|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon/2$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_1$ implicam:

$$\begin{aligned}
|(f(z) + g(z)) - (f(z_0) + g(z_0))| &= |(f(z) - f(z_0)) + (g(z) - g(z_0))| \\
&\leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Logo, $f + g$ é contínua em z_0.

(ii) É óbvio que, se $c = 0$, então $cf = 0$ é contínua em z_0. Considere então $c \neq 0$. Como f é contínua em z_0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$ implicam $|f(z) - f(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$. Então:

$$|cf(z) - cf(z_0)| = |c||f(z) - f(z_0)| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

Logo, cf é contínua em z_0.

(iii) Como f é contínua em z_0, pelo lema 3.3, existem constantes positivas $\delta_1, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$z \in K \text{ e } |z - z_0| < \delta_1 \text{ implica } |f(z)| \leq M$$

Assim, se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_1$, tem-se pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &= |f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \\
&\leq |f(z)g(z) - f(z)g(z_0)| + |f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \\
&\leq |f(z)||g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)| \\
&\leq M|g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)|
\end{aligned}$$

Considere $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em z_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_2$ implicam $|f(z) - f(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2|g(z_0)|}$ se $g(z_0) \neq 0$ ou $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ se $g(z_0) = 0$. Além disso, sendo g é contínua em z_0, existe $\delta_3 > 0$ tal que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_3$ implicam $|g(z) - g(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então:

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &\leq M|g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)|f(z) - f(z_0)| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + |g(z_0)|\frac{\varepsilon}{2|g(z_0)|} = \varepsilon \text{ se } g(z_0) \neq 0 \\
&\text{ou} \\
|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &< M\frac{\varepsilon}{2M} + 0\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ se } g(z_0) = 0
\end{aligned}$$

Logo, $f \cdot g$ é contínua em z_0.

(iv) Basta mostrar que a função $\dfrac{1}{g}$ é contínua em z_0 e aplicar o item (iii). se $g(z_0) \neq 0$.

Considere g é contínua em z_0, com $g(z_0) \neq 0$. Pelo lema 3.3, existem constantes positivas $\delta_1, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$z \in K \text{ e } |z - z_0| < \delta_1 \text{ implica } |g(z)| \geq M$$

Com isso, se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_1$, então:

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right| = \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)||g(z_0)|} \leq \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|}$$

Considere $\varepsilon > 0$. Sendo g contínua em z_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_2$implica $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon M|g(z_0)|$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então:

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right| \leq \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|} < \frac{\varepsilon M|g(z_0)|}{M|g(z_0)|} = \varepsilon$$

Logo, $\dfrac{1}{g}$ é contínua em z_0 e, portanto, $\dfrac{f}{g}$ é contínua em z_0.

□

Exemplo 3.10. *Considere $n \in \mathbb{N}$ e a família de funções $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por $f_n(z) = z^n$. Então f_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De fato, se $n = 1$, tem-se $f_1(z) = z$, que é uma função contínua, conforme visto no exemplo 3.9. Suponha que $f_n(z) = z^n$ é contínua para algum $n \in \mathbb{N}$. Então $f_{n+1}(z) = z^{n+1} = z^n \cdot z = f_n(z) \cdot f_1(z)$ é contínua, pois é produto de duas funções contínuas. Logo, pelo princípio da indução, $f_n(z) = z^n$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.8. *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua.*

Para demonstrar este teorema, basta aplicar a proposição 3.1 e os exemplos 3.8 e 3.10.

Corolário 3.2. *Dado o polinômio complexo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, a função $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$|p|(z) = |p(z)|$$

é contínua em $\mathbb{C}$.

Demonstração: Como p é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|p(z) - p(z_0)| < \varepsilon$. Da segunda desigualdade triangular, $|p(z) - p(z_0)| \geq ||p(z)| - |p(z_0)||$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, $||p(z)| - |p(z_0)|| < \varepsilon$ e a função $|p|$ é contínua. □

Corolário 3.3. *Considere o polinômio complexo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Então, para toda sequência convergente $(z_n) \subset \mathbb{C}$ convergente para z_0, a sequência $(p(z_n))$ convergente para $p(z_0)$.*

Demonstração: Como p é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|p(z) - p(z_0)| < \varepsilon$. Por outro lado, como (z_n) converge para z_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $|z_n - z_0| < \delta$. Logo, para $n \geq n_0$ tem-se $|p(z_n) - p(z_0)| < \varepsilon$. Então $(p(z_n))$ converge para $p(z_0)$. $\square$

O corolário a seguir é consequência direta dos dois corolários anteriores.

Corolário 3.4. *Considere o polinômio complexo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Então, para toda sequência convergente $(z_n) \subset \mathbb{C}$ convergente para z_0, a sequência $(|p|(z_n))$ convergente para $|p|(z_0)$.*

O próximo teorema caracteriza a imagem de uma função polinomial sobre um conjunto compacto.

Teorema 3.9. *Considere o polinômio complexo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto. Então, o conjunto*

$$p(K) = \{p(z) \in \mathbb{C}/z \in K\}$$

é compacto.

Demonstração: Considere (w_n) uma sequência qualquer em $p(K)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K$ tal que $p(z_n) = w_n$. Como K é compacto, a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ que converge para $z_0 \in K$. Pelo corolário 3.3, a sequência $(p(z_n))_{n\in\mathbb{N}'}$ converge para $p(z_0)$. Sendo esta uma subsequência de (w_n), pelo teorema 3.7, conclui-se que $p(K)$ é compacto. $\square$

Sendo $p(K)$ um conjunto compacto, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq |p(z)| \leq \beta$, para todo $z \in K$. Vamos apresentar um resultado ainda mais interessante que a função $|p|$ assume valor máximo e valor mínimo em conjuntos compactos.

Teorema 3.10. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Considere $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio complexo e $K \in \mathbb{C}$ um conjunto compacto. Existem $z_0, z_1 \in K$, tais que:*

$$|p(z_0)| \leq |p(z)| \leq |p(z_1)|, \text{ para todo } z \in K$$

Demonstração: Como $p(K)$ é compacto e, por isso, limitado, o conjunto $|p|(K)$ é limitado. Considere M e N o supremo e o ínfimo de $|p|(K)$, respectivamente. Vamos mostrar que $M, N \in |p|(K)$.

Suponha que $M \notin |p|(K)$, isto é, que não existe $z_1 \in K$ tal que $|p|(z) = M$. Então $|p|(z) < M$, para todo $z \in K$. Defina a função $g : K \to \mathbb{R}$ por:

$$g(z) = \frac{1}{M - |p(z)|}$$

Pela proposição 3.1, g é contínua no compacto K. Logo, g é limitada. Seja $\alpha > 0$ tal que

$g(z) < \alpha$ para todo $z \in K$, isto é:

$$\frac{1}{M - |p(z)|} < \alpha, \text{ para todo } z \in K$$

Então $|p(z)| < M - \dfrac{1}{\alpha}$ para todo $z \in K$. Então M não é supremo de $|p|(K)$, o que é uma contradição. Logo, $M \in |p|(K)$.

De forma análoga, mostra-se que existe $z_0 \in K$ tal que $|p(z_2)| = N$. Com isso, $M, N \in |p|(K)$, isto é, $|p|$ assume valor máximo e valor mínimo em K. $\square$

Capítulo 4

O Teorema Fundamental da Álgebra

Neste capítulo será apresentado e demonstrado o Teorema Fundamental da Álgebra. O texto tratando sobre a história e a evolução da demonstração do teorema é baseado em [2], [4] e [10]. A demonstração formal do teorema é baseada em [18], com contribuições importantes de [9] e [10].

4.1 A demonstração do teorema através da história

Os estudos e discussões sobre resultados envolvendo a existência e a natureza de soluções de equações algébricas e raízes de polinômios complexos datam de muitos séculos atrás. Em 1608, em seu trabalho Arithmetica Philosophica, o matemático alemão Peter Rothe (?-1617) afirma que uma equação que toda equação real de grau n tem no máximo n soluções.

Em 1629, o matemático franco-holandês Albert Girard (1595-1632) afirmou em seu livro L'invention nouvelle en l'Algèbre que uma equação algébrica de grau n possuía n raízes, porém não chegou a demonstrar tal afirmativa ou caracterizar estas raízes.

Em 1637, o matemático francês René Descartes (1596-1650) provou o resultado que limita o número máximo de raízes de um polinômio, porém não chegou a demonstrar a existência de tais raízes.

A primeira demonstração de destaque para o Teorema Fundamental da Álgebra foi apresentada em 1746 e se deve ao matemático francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783). Contudo, esta demonstração foi considerada falha, sendo melhorada e simplificada em 1806 e 1814 por Jean Robert Argand (1768-1822). Esta última versão foi usada em vários livros no século XIX. O problema da demonstração de Argand é que esta utilizava o resultado da existência de um mínimo absoluto em funções contínuas sobre um conjunto limitado e fechado, o qual só foi demonstrado em 1874 por Karl Weierstrass (1815-1897) após a construção dos números reais por Richard Dedekind (1831-1916) por volta de 1870.

Outros matemáticos, como Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e James Wood (1760-1839) apresentaram demonstrações para o teorema fundamental da álgebra, as quais apresentavam falhas ou estavam incompletas.

Em sua tese de doutorado publicada em 1799, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fez críticas às demonstrações anteriores do teorema e apresentou a primeira das quatro demonstrações que elaborou durante sua vida. Duas das demais demonstrações foram apresentadas em 1816 e a última em 1849, em que trabalhou com polinômios de variável e coeficientes complexos.

Atualmente, o Teorema Fundamental da Álgebra é apresentado de forma simples como corolário do Teorema de Liouville na Análise Complexa, o qual diz que toda função complexa inteira e limitada é constante.

A demonstração que será apresentada neste trabalho é baseada nesta demonstração de D'Alembert-Argand, a qual utiliza propriedades da continuidade de polinômios complexos. Antes disso, será feita uma demonstração intuitiva do teorema com o auxílio de gráficos, utilizando ferramentas do software *GeoGebra*.

4.2 Demonstração intuitiva

Considere a função polinomial complexa $p(z)$. A imagem de p sobre um número complexo $z = x + yi$ é um complexo da forma:

$$p(z) = Re[p(z)] + i\ Im[p(z)]$$

Além disso, as partes real e imaginária de $p(z)$ podem ser vistas como funções de duas variáveis reais x e y. Dessa forma, a cada função polinomial complexa, podemos associar duas funções reais de duas variáveis $R(x, y)$ e $I(x, y)$, definidas por:

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to R(x, y) = Re[p(x + yi)] \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} I : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to I(x, y) = Im[p(x + yi)] \end{aligned}$$

Assim, $p(x + yi) = R(x, y) + i\ I(x, y)$.

Exemplo 4.1. *Considere a função polinomial definida por* $p(z) = z^2 + 2z + 2$.

Se $z = x + yi$, então:

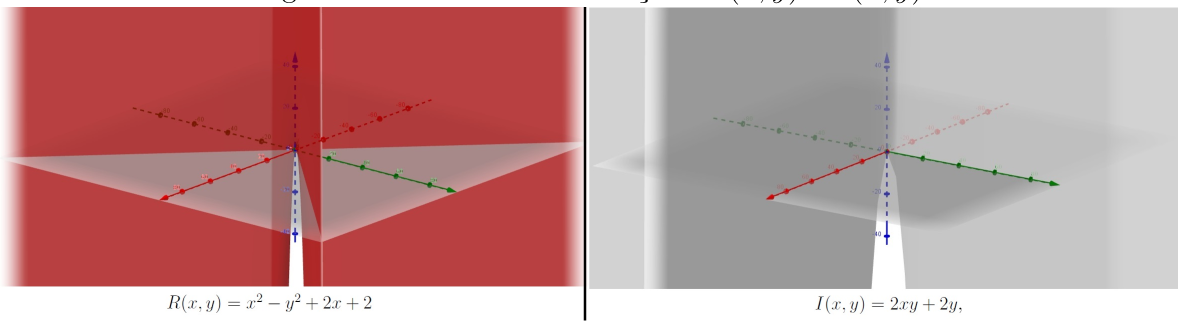
$$\begin{aligned} p(z) &= p(x + yi) = (x + yi)^2 + 2(x + yi) + 2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi + 2 \\ &= (x^2 - y^2 + 2x + 2) + i(2xy + 2y) \end{aligned}$$

Então, $R(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 2$ e $I(x, y) = 2xy + 2y$.

As funções $R(x,y)$ e $I(x,y)$ são de grande ajuda no entendimento de certas características da função $p(z)$. Como $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função complexa de variável complexa, não é possível visualizar seu gráfico diretamente. Contudo, podemos analisar p ao analisar os gráficos de R e I, que serão superfícies no espaço.

Considerando $p(z) = z^2 + z + 2$, com $R(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 2$ e $I(x,y) = 2xy + 2y$, tem-se as superfícies:

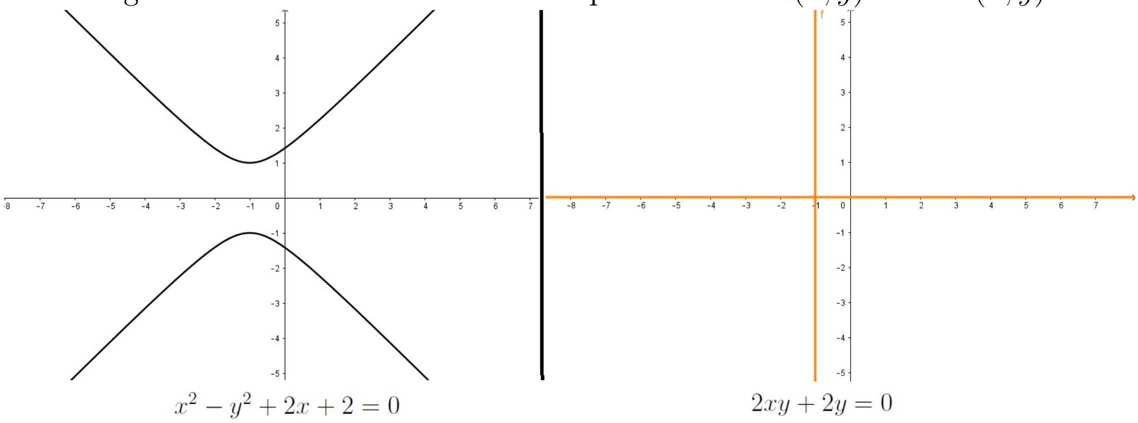
Figura 4.1: Gráficos das funções $R(x,y)$ e $I(x,y)$



Fonte: O Autor

Podemos ainda estudar as curvas de nível 0 dessas superfícies, isto é, a intersecção dos gráficos de R e I com o plano $z = 0$.

Figura 4.2: Curvas de nível 0 das superfícies $z = R(x,y)$ e $z = I(x,y)$



Fonte: O Autor

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que existem pontos de intersecção dessas curvas de nível, os quais representam números complexos que são as raízes da função polinomial p.

Algebricamente, a determinação desses pontos de intersecção envolve a resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} R(x,y) = 0 \\ I(x,y) = 0 \end{cases}$$

Para a função $p(x+yi) = (x^2 - y^2 + 2x + 2) + i(2xy + 2y)$, tem-se:

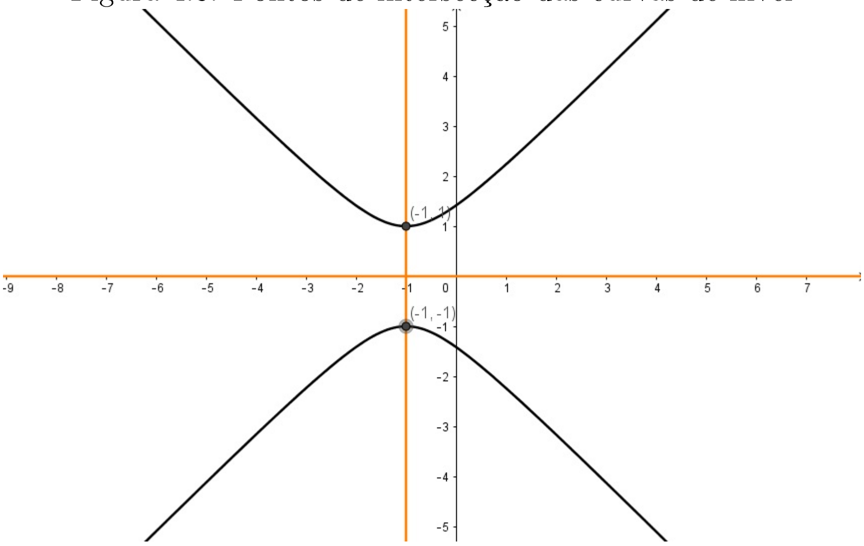
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 2 = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 2 = 0 \\ 2y(1+x) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação tem soluções $y = 0$ ou $x = -1$. Então:

- Se $y = 0$ na primeira equação, não existem soluções reais para x.
- Se $x = -1$ na primeira equação, tem-se $1 - y^2 = 0$. Então $y = \pm 1$.

Logo, as raízes da função polinomial $p(z) = z^2 + 2x + 2$ são $z = -1 \pm 1$.

Figura 4.3: Pontos de intersecção das curvas de nível



Fonte: O Autor

Outra forma de estudar geometricamente as funções polinomiais complexas é utilizar a representação geométrica dos números complexos como pontos. Dessa forma, essas funções podem ser vistas como transformações do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, isto é, funções que associam o ponto (x, y) ao ponto $(R(x,y), I(x,y))$.

Considere a função polinomial complexa $p(z) = z^2 + 2z + 2$ e vamos avaliá-lo sobre o conjunto

$$S = S[0, r] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

Qualquer $z \in S$ pode ser expresso na forma trigonométrica por

$$z = r\,(\cos\theta + i\text{sen }\theta)$$

em que θ é o argumento de z.

Utilizando a ferramenta **Lugar geométrico** do software *GeoGebra*, vamos traçar a imagem de p sobre alguns círculos de raio fixo, de acordo com os seguintes procedimentos:

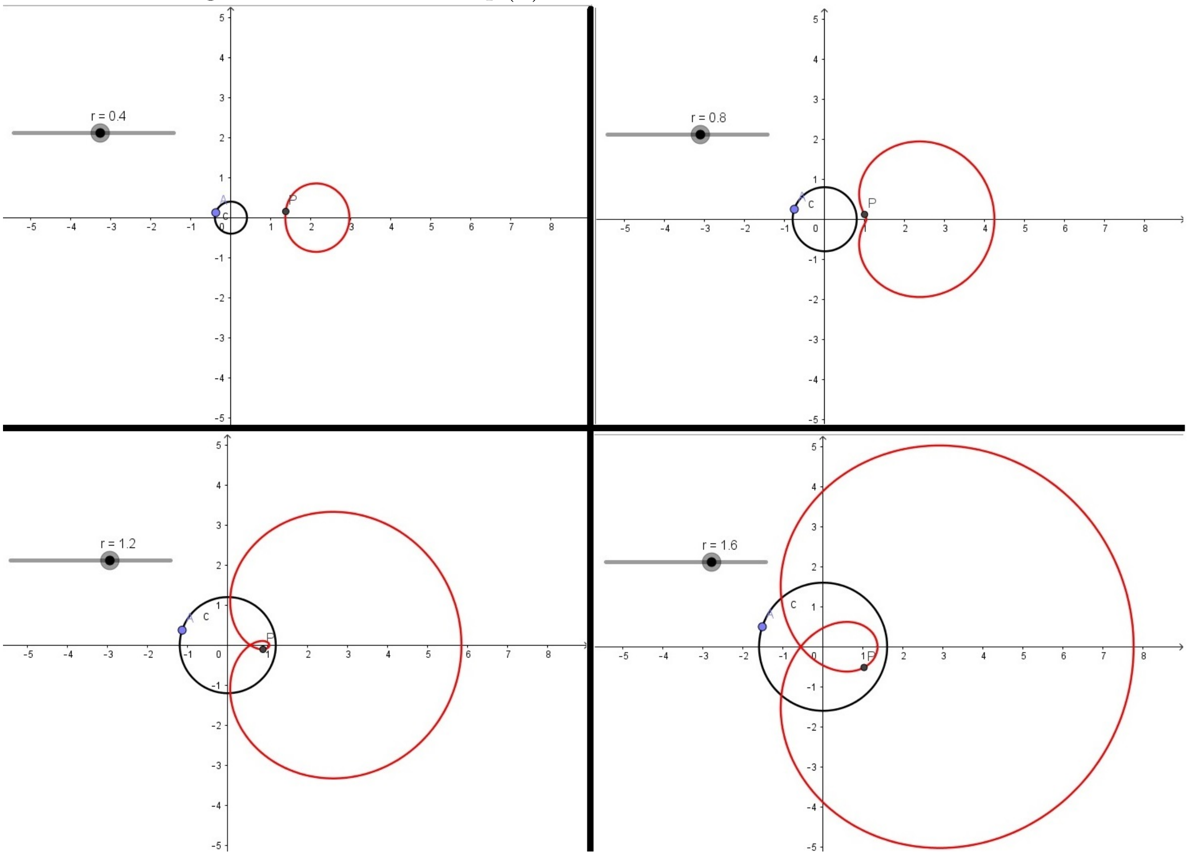
1. Construir um círculo de centro na origem e raio r com equação $x^2+y^2=r^2$, criando controle deslizante para r.
2. Marcar um ponto $A(x,y)$ sobre esse círculo.
3. Definir o ponto

$$P=(R(x,y),I(x,y))=\big(x(A)^2-y(A)^2+2x(A)+2,2x(A)y(A)+2y(A)\big)$$

4. Utilizar a ferramenta **lugar geométrico**, marcando os pontos P e A.

O círculo é a curva em preto e a imagem de p sobre o círculo é a curva em vermelho.

Figura 4.4: Gráfico de $p(z)=z^2+2z+2$ sobre círculos em $\mathbb{C}$



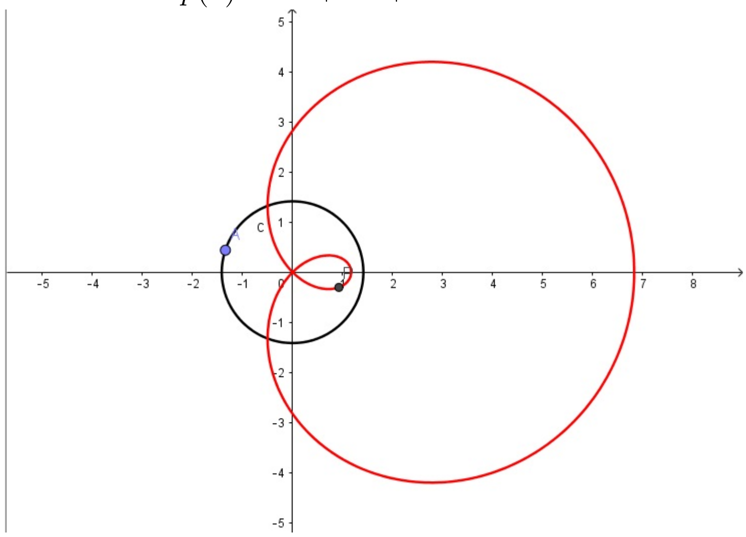
Fonte: O Autor

Observe que a curva que representa a imagem de p sobre o círculo de raio $\sqrt{2}$ passa pela origem duas vezes no percurso simples da curva:

A interpretação dessa propriedade é que podem ser encontradas duas raízes para a função polinomial p, as quais são da forma $z=\sqrt{2}(\cos\theta+i\text{sen }\theta)$. É valido ressaltar que essa é a forma trigonométrica dos complexos $z=-1\pm i$, os quais foram encontrados no estudo das curvas de nível das funções R e I.

Vamos construir mais alguns gráficos da imagem de funções polinômiais sobre círculos:

Figura 4.5: Gráfico de $p(z) = z^2 + 2z + 2$ sobre o círculo de raio $\sqrt{2}$ em $\mathbb{C}$



Fonte: O Autor

Exemplo 4.2. *Considere a função polinomial* $p(z) = z + 2$.

Dado $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} p(z) &= p(x+yi) = (x+yi) + 2 \\ &= (x+2) + yi \\ &= (x+2, y) \end{aligned}$$

Exemplo 4.3. *Considere a função polinomial* $p(z) = z^2 + 1$.

Dado $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} p(z) &= p(x+yi) = (x+yi)^2 + 1 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi + 1 \\ &= (x^2 - y^2 + 1) + (2xy)i \\ &= (x^2 - y^2 + 1, 2xy) \end{aligned}$$

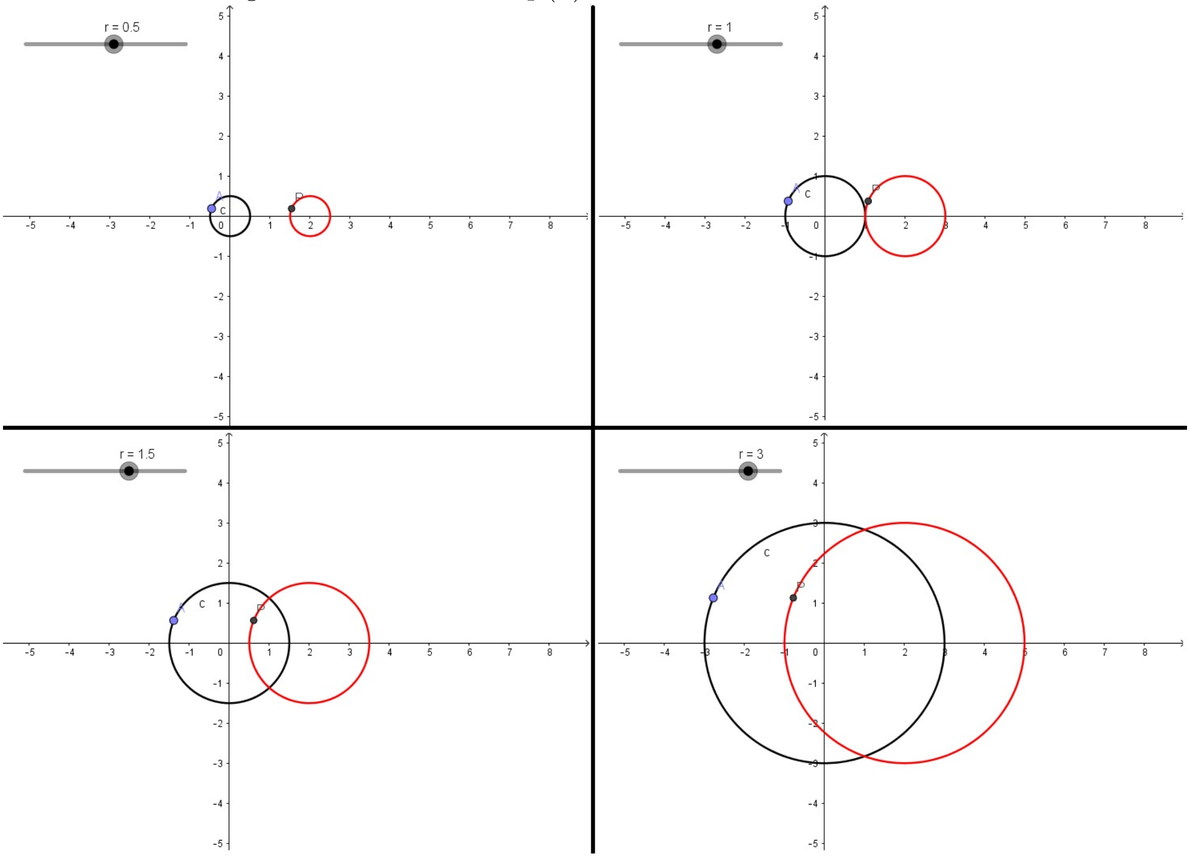
Exemplo 4.4. *Considere a função polinomial* $p(z) = z^3 + 2z + 1$.

Dado $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} p(z) &= p(x+yi) = (x+yi)^3 + 2(x+yi) + 1 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i \\ &= (x^3 - 3xy^2 + 2x + 1) + (3x^2y - y^3 + 2y)i \\ &= (x^3 - 3xy^2 + 2x + 1, 3x^2y - y^3 + 2y) \end{aligned}$$

Ao estudar estas construções, observa-se que, para r suficientemente pequeno, a imagem de p é uma curva fechada com formato semelhante ao de um círculo, estando a origem na região exterior a essa curva. Além disso, a partir de um certo valor r, a origem passa a se encontrar no interior da curva fechada, a qual evolui de forma contínua quando se faz

Figura 4.6: Gráfico de $p(z) = z + 2$ sobre círculos em $\mathbb{C}$



Fonte: O Autor

variar r. Observando estas construções, podemos intuir que o gráfico da imagem dessas funções polinomiais complexas passa pela origem para algum $r > 0$. Dessa forma, faz sentido dizer que estas funções possuem raízes complexas.

4.3 Demonstração formal

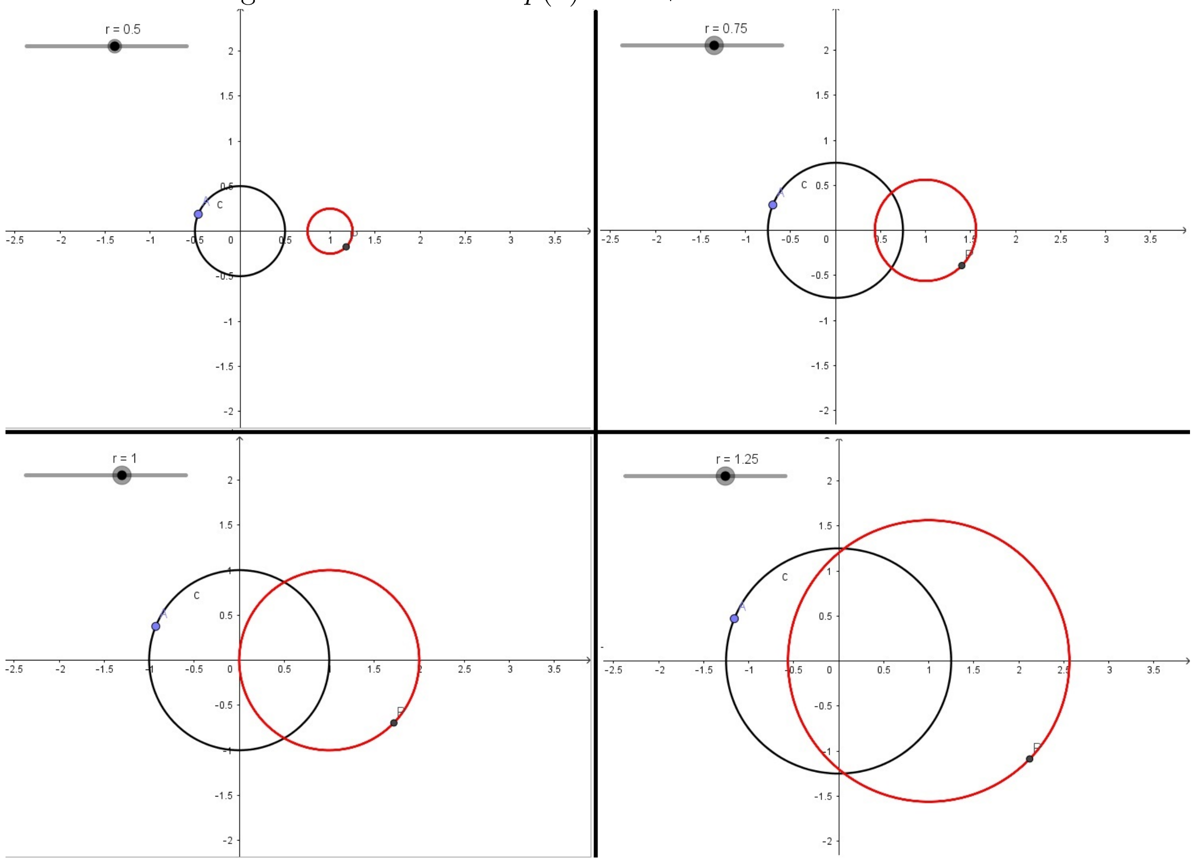
Teorema 4.1. ***[Teorema Fundamental da Álgebra]*** *Todo polinômio $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ com grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa, isto é, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$.*

Apesar do nome, a maior parte das demonstrações do teorema utilizam ferramentas e resultados de Topologia e Análise Complexa. A demonstração apresentada aqui, baseada em Oliveira [18], é uma das demonstrações mais simples, que utiliza apenas alguns conceitos e teoremas básicos da análise, sem recorrer a derivação ou integração de funções.

Antes de ser apresentada a demonstração do teorema, serão necessários ainda dois lemas:

Lema 4.1. *Considere o polinômio $p(X) \in \mathbb{C}[X]$. Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, isto é, a função $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ possui valor mínimo em $\mathbb{C}$.*

Figura 4.7: Gráfico de $p(z) = z^2 + 1$ sobre círculos em $\mathbb{C}$



Fonte: O Autor

Demonstração: Considere o polinômio $p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Então:

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right) \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_n z^n| \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \\ &\geq |a_n||z|^n \left|1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n z}\right| - \ldots - \left|\frac{a_1}{a_n z^{n-1}}\right| - \left|\frac{a_0}{a_n z^n}\right|\right| \end{aligned}$$

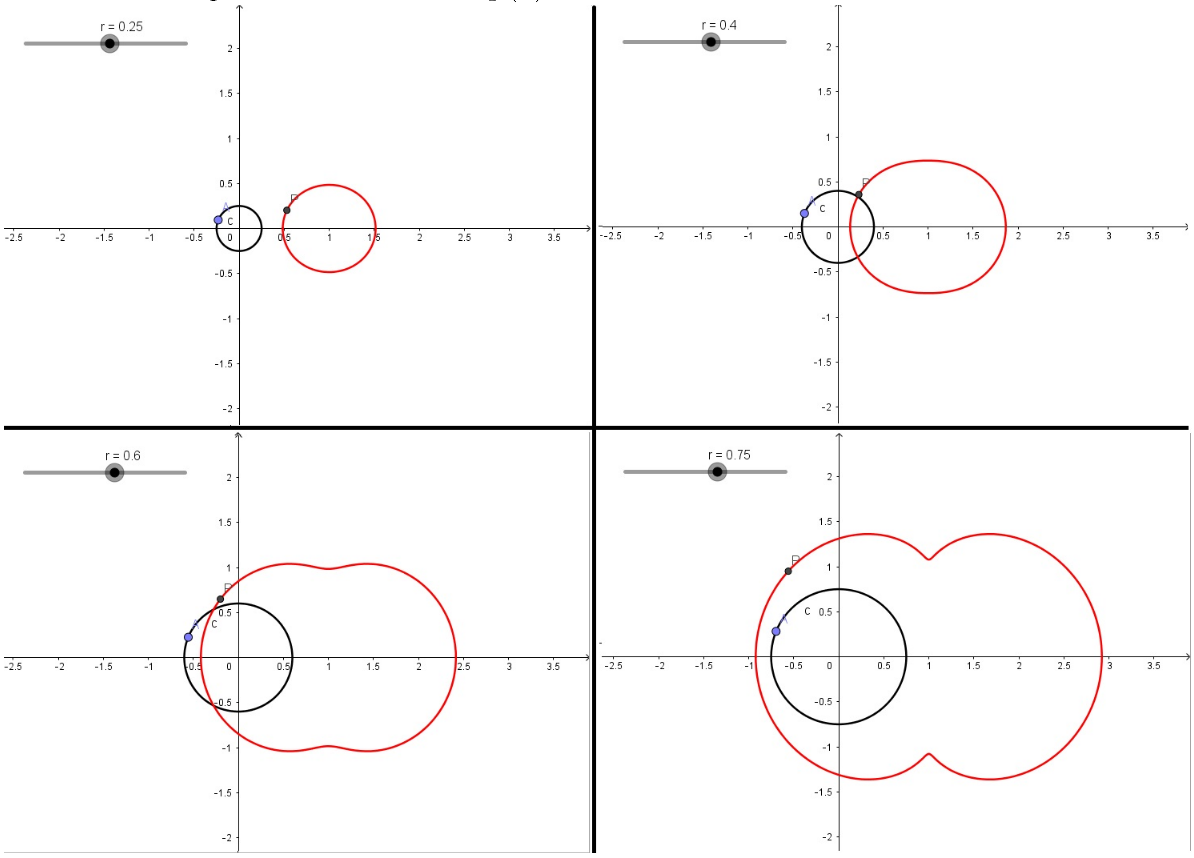
Passando ao limite quando $|z| \to +\infty$, tem-se:

- $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |a_n||z|^n = +\infty$;
- $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_n||z|^{n-k}} = 0$, com $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Então $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |p(z)| = +\infty$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $|p(z)| > |p(0)|$ se $|z| > \delta$.

Considere agora o disco fechado $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \delta\}$. Como D é compacto e p é contínua, o teorema de Weierstrass garante que $|p(z)|$ assume valor mínimo em D, isto

Figura 4.8: Gráfico de $p(z) = z^3 + 2z + 1$ sobre círculos em $\mathbb{C}$



Fonte: O Autor

é, existe $z_0 \in D$ tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, para todo $z \in D$. Como $0 \in D$, tem-se que $|p(z_0)| \leq |p(0)|$.

Para concluir o teorema, dado $z \in \mathbb{C}$, há duas possibilidades: $|z| \leq \delta$ ou $|z| > \delta$.

- Se $|z| > \delta$, então $|p(z)| > |p(0)| \geq |p(z_0)|$.
- Se $|z| \leq \delta$, então $z \in D$ e $|p(z)| \geq |p(z_0)|$.

Portanto, dado $z \in \mathbb{C}$, $|p(z)| \geq |p(z_0)|$, isto é $|p|$ possui valor mínimo em $\mathbb{C}$. $\square$

Lema 4.2. *Considere o polinômio $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ com grau maior ou igual a 1. Se $|p(0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $p(0) = 0$*

Demonstração: Considere $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ com grau maior ou igual a 1. Então:

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots + a_n z^n$$

sendo k o menor índice dos termos $a_k z^k$ tais que $a_k \neq 0$. Tem-se:

$$p(z) = a_0 + z_k \left(a_k + a_{k+1} z + \ldots + a_n z^{n-k} \right)$$

Como $p(0) = a_0$, tem-se:

$$p(z) = p(0) + z_k \left(a_k + a_{k+1}z + \ldots + a_n z^{n-k}\right)$$

Definindo $q(z) = a_k + a_{k+1}z + \ldots + a_n z^{n-k}$, tem-se que $q(0) \neq 0$ e pode-se escrever:

$$p(z) = p(0) + z^k q(z) \tag{4.1}$$

Considere a circunferência unitária $S = \{w \in \mathbb{C}/|w| = 1\}$. Por hipótese, $|p(0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Em particular, se $z = rw$, com $r \geq 0$ e $w \in S$, tem-se $|p(0)| \leq |p(rw)|$, o que implica:

$$|p(rw)|^2 - |p(0)|^2 \geq 0 \tag{4.2}$$

De 4.1, tem-se $p(rw) = p(0) + r^k w^k q(rw)$.

Então:

$$\begin{aligned}
|p(rw)|^2 &= p(rw) \cdot \overline{p(rw)} \\
&= \left[p(0) + r^k w^k q(rw)\right] \overline{\left[p(0) + r^k w^k q(rw)\right]} \\
&= \left[p(0) + r^k w^k q(rw)\right] \left[\overline{p(0)} + \overline{r^k w^k q(rw)}\right] \\
&= p(0)\overline{p(0)} + \overline{p(0)}r^k w^k q(rw) + p(0)\overline{r^k w^k q(rw)} + r^k w^k q(rw)\overline{r^k w^k q(rw)} \\
&= |p(0)|^2 + \overline{p(0)}r^k w^k q(rw) + \overline{\overline{p(0)}r^k w^k q(rw)} + r^{2k}|w|^{2k}|q(rw)|^2 \\
|p(rw)|^2 &= |p(0)|^2 + 2\ Re\left[\overline{p(0)}r^k w^k q(rw)\right] + r^{2k}|w|^{2k}|q(rw)|^2
\end{aligned}$$

Substituindo na equação 4.2, tem-se:

$$2\ Re\left[\overline{p(0)}r^k w^k q(rw)\right] + r^{2k}|w|^{2k}|q(rw)|^2 \geq 0$$

Dividindo por $r^k > 0$ e fixando w tal que $|w| = 1$, tem-se:

$$2\ Re\left[\overline{p(0)}w^k q(rw)\right] + r^k|q(rw)|^2 \geq 0,\ \forall r > 0$$

Como a função real definida por $\phi(r) = 2\ Re\left[\overline{p(0)}w^k q(rw)\right] + r^k|q(rw)|^2$ é contínua em $[0, +\infty)$, fazendo $r = 0$, tem-se:

$$Re\left[\overline{p(0)}w^k q(0)\right] \geq 0,\ \forall w \in S$$

Tomemos alguns complexos específicos em S de forma a avaliar a desigualdade acima. Pelo exemplo 2.8, todas as raízes dos complexos $z = 1$, $z = -1$, $z = i$, $z = -i$ têm módulo igual a 1, isto é, pertencem a S. Então:

- Tomando $w \in S$ tal que $w^k = 1$, tem-se $Re\left[\overline{p(0)}q(0)\right] \geq 0$;

- Tomando $w \in S$ tal que $w^k = -1$, tem-se:

$$Re\left[\overline{p(0)}(-1)q(0)\right] = -Re\left[\overline{p(0)}q(0)\right] \geq 0$$

  Logo, $Re\left[\overline{p(0)}q(0)\right] \leq 0$ Assim, $Re\left[\overline{p(0)}q(0)\right] = 0$.

- Tomando $w \in S$ tal que $w^k = i$, tem-se:

$$Re\left[\overline{p(0)}iq(0)\right] = -Im\left[\overline{p(0)}q(0)\right] \geq 0$$

  Logo, $Im\left[\overline{p(0)}q(0)\right] \leq 0$.

- Tomando $w \in S$ tal que $w^k = -i$, tem-se:

$$Re\left[\overline{p(0)}(-i)q(0)\right] = Im\left[\overline{p(0)}q(0)\right] \geq 0$$

  Logo, $Im\left[\overline{p(0)}q(0)\right] = 0$.

Assim $\overline{p(0)}q(0) = 0$. Como $q(0) \neq 0$, tem-se $\overline{p(0)} = 0$. Portanto, $p(0) = 0$. $\square$

De posse desses lemas, podemos agora demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra:
Demonstração: Considere $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ com grau maior ou igual a 1. Pelo lema 4.1, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Em particular, $|p(z_0)| \leq |p(z_0+z)|$. Defina o polinômio $r(z) = p(z_0 + z)$. Então:

$$|r(0)| = |p(z_0)| \leq |p(z_0 + z)| = |r(z)|, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

Pelo lema 4.2 , tem-se $r(0) = 0$. Logo, $p(z_0) = 0$, isto é, z_0 é uma raíz complexa de $p(X)$. $\square$

Como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra e do Teorema da Fatorização, podemos descrever polinômios complexos de grau maior ou igual utilizando produto de polinômios de grau 1.

Corolário 4.1. *Considere o polinômio $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ com grau $n \geq 1$. Então, existem números complexos distintos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ com $k \leq n$ e números naturais $m_1, m_2, \ldots, m_k$ com $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, tais que:*

$$p(X) = \alpha(X - \alpha_1)^{m_1} \cdot (X - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_k)^{m_k}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{C}$$

Iremos concluir essa discussão sobre o Teorema Fundamental da Álgebra apresentando dois resultados sobre polinômios complexos com coeficientes reais.

Proposição 4.1. *Considere o polinômio complexo $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots +$*

$a_1X + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Se z_0 é um raíz de $p(X)$, então $\overline{z_0}$ também é uma raíz.

Demonstração: Por hipótese, z_0 é uma raiz de $p(X)$. Então:

$$p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

Com isso:

$$\begin{aligned}
p(\overline{z_0}) &= a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\
&= a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} \\
&= \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

Logo $\overline{z_0}$ é uma raiz de $p(X)$.

Teorema 4.2. *Considere o polinômio complexo $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e n ímpar. Então $p(X)$ possui pelo menos uma raiz real.*

Demonstração: Pela proposição anterior, as raízes complexas não reais aparecem em quantidades pares (raiz e conjugado). Como o polinômio $p(X)$ tem grau ímpar, então pelo menos uma de suas n raizes (não necessariamente distintas) é um número real. □

Estes dois resultados permitem caracterizar as raízes de alguns polinômios complexos com coeficientes reais. Por exemplo, polinômios de grau 1 sempre possuem uma única raiz real, enquanto polinômios de grau 2 possuem ou duas raízes complexas ou duas raízes reais distintas ou uma raiz real de multiplicidade 2.

Considerações Finais

É inegável a importância do Teorema Fundamental da Álgebra para o estudo das equações algébricas, as quais estão presentes na resolução de uma grande variedade de problemas na Geometria, no Cálculo, na Estatística. Por essa pluralidade de aplicações, o estudo dos polinômios não pode ser descartado no processo de construção de conhecimento matemático.

Em geral, ao se apresentar teoremas como esse para o aluno, é interessante que este entenda a origem do resultado, para que possa aceitá-lo como válido e utilizá-lo futuramente com mais segurança. Contudo, a demonstração formal e rigorosa do Teorema Fundamental da Álgebra não cabe no espaço de uma sala de aula do Ensino Médio, por utilizar objetos e resultados da Matemática abstrata que são estranhos ao aluno. Nesse sentido, uma abordagem geométrica do resultado facilitaria bastante essa aceitação, e sendo o *GeoGebra* um software de fácil manuseio, não está tão distante da realidade dos alunos de hoje.

O objetivo deste trabalho foi apresentar os objetos envolvidos no Teorema Fundamental da Álgebra para uma pessoa já com alguma maturidade matemática, capaz de compreender a natureza desses entes e a relação entre eles. Para um professor em atuação no Ensino Médio, a proposta de utilizar um software para construção do conhecimento junto a seus alunos é bastante pertinente, considerando a variedade de recursos tecnológicos com os quais os alunos podem ter contato na sociedade atual.

É válido ainda observar como as relações entre objetos de estrutura e natureza distintas são importantes na Matemática, uma vez que para demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra foram utilizadas funções polinomiais complexas (que são objeto da Análise Complexa) para compreender como os polinômios (que são objeto da Álgebra) se comportam.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonométria e Números Complexos**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do professor de matemática).

[4] CARVALHO, J. B. P.; ROQUE, T. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

[5] GARCIA, Arnaldo. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[7] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[8] HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. (Coleção Matemática Universitária).

[9] HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária).

[10] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

[11] LIMA, E. L. **Análise Real**. Vol 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária).

[12] LIMA, E. L. **Análise Real**. Vol 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária).

[13] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Projeto Euclides).

[14] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Projeto Euclides).

[15] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do professor de matemática).

[16] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 3. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do professor de matemática).

[17] NETO, A. L. **Funções de uma Variável Complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Projeto Euclides).

[18] OLIVEIRA, O. R. B. de. **The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof**. The Mathematical Intelligencer, vol. 33, n. 2, p. 1-2, jul., 2011.