UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

VICTOR HUGO CHACON BRITTO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

BELÉM – PARÁ
2013

VICTOR HUGO CHACON BRITTO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Monografia apresentada à Universidade Federal do Pará - UFPA, como instrumento parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. M.Sc. José Augusto Nunes Fernandes.
Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade.

BELÉM – PARÁ
2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Britto, Victor Hugo Chacon, 1979-
Uma sequência didática alternativa para o ensino de análise combinatória na educação básica - os princípios aditivo e multiplicativo de contagem / Victor Hugo Chacon Britto. - 2013.

Orientador: José Augusto Nunes Fernandes;
Coorientador: Roberto Carlos Dantas Andrade.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

1. Didática-Matemática. 2. Análise combinatória-Estudo e ensino (Ensino fundamental). I. Título.

CDD 22. ed. 371.330151

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VICTOR HUGO CHACON BRITTO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA – OS PRINCÍPIOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO DE CONTAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 25/ 03 / 2013
Conceito: Excelente

Banca examinadora

Prof. Me. JOSÉ AUGUSTO NUNES FERNANDES – ORIENTADOR - UFPA

Prof. Dr. ROBERTO CARLOS DANTAS ANDRADE – COORIENTADOR - ETRB

Prof. Dr. JOÃO PABLO PINHEIRO DA-SILVA – MEMBRO INTERNO - UFPA

Prof. Dr. NATANAEL FREITAS CABRAL – MEMBRO EXTERNO - UEPA

Oferecemos o presente trabalho aos nossos familiares e amigos por sua compreensão, paciência e apoio neste importante momento de nossas vidas

Agradecemos a Deus, princípio de tudo, por sua presença constante e proteção.

A nossos pais, por serem exemplo e alicerce em nossas vidas, formações e por terem sempre acreditado em nós.

A nossos familiares e amigos, por compartilharem dos bons e maus momentos, oferecendo-nos força para seguir.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT, programa que nos proporcionou imensurável crescimento intelectual.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), por nos proporcionar sua estrutura física e intelectual.

A CAPES, pelo reconhecimento e investimento que viabilizaram este importante projeto.

Ao nosso orientador José Augusto Nunes Fernandes e co-orientador Roberto Carlos Dantas Andrade, pela dedicação, compreensão e por contribuir para a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo oferecer à comunidade da educação básica, uma sequência didática diferenciada para o ensino de Análise Combinatória. O que diferencia este material das outras produções comumente disponíveis nos livros didáticos é a construção dos conceitos de permutação, arranjo e combinação a partir dos princípios aditivo e multiplicativo, em detrimento a simples memorização e utilização de fórmulas, que são apresentadas somente no final do curso. Além disso, esta produção é composta por um material para uso em sala de aula, um material de instrução para o professor e planos de aula para cada capítulo que será trabalhado. Finalmente, o curso pode ser facilmente adaptado a realidade da escola, professor, aluno ou tempo disponível conforme cada especificidade.

Palavras-Chave: Ensino, Combinatória, Sequência Didática, Educação Básica.

ABSTRACT

This paper aims to provide the community of basic education, a differentiated didatic sequence for teaching Combinatorial Analysis. What distinguishes this material from other productions commonly available in textbooks is the construction of the concepts of permutation and combination from the additive and multiplicative principles, rather than simply memorize and use formulas, which are only given at the end of the course . Moreover, this production is composed of a material for use in the classroom, one instructional material for the teacher and lesson plans for each chapter that will be worked. Finally, the course can be easily adapted to the reality of school, teacher, student, or time available as each specificity.

Keywords: Education, Combinatorics, Teaching Sequence, Basic Education.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é considerada por professores e alunos como um assunto difícil de ser ensinado e aprendido. Dois motivos são normalmente levantados para justificar essa noção: a apresentação tardia dos métodos de contagem, que, no sistema tradicionalmente adotado em nosso país, é deixada somente para a segunda série do ensino médio, e a dificuldade que o aluno tem em empregar adequadamente os conceitos e as fórmulas para o cálculo de arranjos, combinações e permutações.

O presente trabalho visa minimizar a problemática enfrentada pelos alunos relativa à identificação e utilização dos mecanismos e fórmulas da Análise Combinatória fundamentada, principalmente, nos princípios aditivo e multiplicativo. Primeiramente porque, a nosso ver, a mera memorização e utilização de fórmulas está fundamentalmente incorreta e em segundo lugar por acreditarmos que a metodologia que está por trás desta noção é que gera a dificuldade. Ao analisarmos alguns livros didáticos normalmente adotados em nosso país vemos que eles incorrem em dois erros fundamentais: há pouca ênfase aos princípios aditivo e multiplicativo de contagem (o primeiro normalmente é omitido) e induzem o aluno a simplesmente classificar os problemas como arranjos, permutações e combinações, sendo que a maioria, inclusive os mais interessantes, não podem ser classificados segundo esses critérios. Ao adotarmos o título *Uma sequência didática alternativa para o ensino de análise combinatória na educação básica* temos por objetivo dar ênfase aos princípios em vez das fórmulas e à criatividade, à interpretação e à escrita dos alunos, ao invés da apresentação de cálculos desconexos baseados em repetições de modelos prontos e superficiais.

Fortemente baseado em resolução de problemas, o trabalho tem como característica principal estimular o aluno a desenvolver estratégias para construir soluções e evitar erros comuns. As definições e técnicas sempre estão vinculadas a algum exemplo concreto que as justifique, motivando o aluno a desenvolver a compreensão do conceito ou da ferramenta, em detrimento da simples memorização de uma definição ou de um algoritmo.

Apresentamos nossa monografia para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), somando a experiência dos autores no ensino de combinatória nas redes públicas e particulares de ensino e visando contribuir de forma relevante para o ensino deste tópico que possui a fama de ser difícil tanto para alunos como para professores.

Iniciaremos com uma breve introdução, citando alguns aspectos históricos e a relação da Análise Combinatória com outras áreas do conhecimento. O trabalho está dividido em três seções: material para uso em sala de aula, instrucional para o professor e respectivos planos de aula, e apesar de resultar de um esforço coletivo, sua elaboração foi organizada da seguinte maneira: parte I, que introduz os métodos de contagem, dando ênfase aos princípios aditivo e multiplicativo elaborada por Victor Hugo Chacon Britto; parte II, que conceitua, através de propriedades de conjuntos e sequências, permutação simples, arranjo simples e combinação simples elaborada por Wilson Monteiro de Albuquerque Maranhão; finalmente, a parte III que apresenta a notação fatorial e seus desdobramentos elaborada por Fernando Ramos de Farias.

Neste trabalho segue a parte I, composta pelos capítulos 01, 02 e 03, com seus respectivos materiais para uso em sala de aula, instrucional para o professor e planos de aula.

INTRODUÇÃO

Historicamente, acreditamos que é bastante difícil dizer onde surge a Análise Combinatória, mas os primeiros problemas de contagem documentados estão relacionados à construção de quadrados mágicos e à solução de enigmas. Costuma-se localizar o aparecimento da Combinatória atrelado ao surgimento da teoria das probabilidades ou ao desenvolvimento do binômio de Newton. Os primeiros trabalhos surgem com nomes como De Moivre, Bernoulli e Euler, este último mostrou conexões dos métodos de contagem com a Teoria dos Números e a Teoria dos Grafos. Na atualidade, muitos problemas de computação, pesquisa operacional e criptografia podem ser interpretados por estas teorias, o que aponta para um forte crescimento da importância da Análise Combinatória.

Através da nossa experiência, percebemos que o ensino de Análise Combinatória na educação básica tem sido tradicionalmente trabalhado com a simples apresentação e utilização das fórmulas de permutações, arranjos e combinações. Esta forma de exposição, em nosso ponto de vista é, não só incorreta, como também perniciosa, uma vez que dessa forma o aluno tem somente uma visão parcial do tema sendo induzido a uma atitude equivocada na hora de resolver problemas.

Podemos dizer, utilizando a definição de Morgado (2006, p. 02), que a Análise Combinatória é *“a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”.* Neste sentido, são dois os tipos de problemas que frequentemente são classificados como sendo de combinatória:

- ✓ Demonstrar a existência de uma configuração que cumpra determinadas condições;
- ✓ Contar a quantidades de subconjuntos de um conjunto dado que satisfaçam certas condições

Arranjos, permutações e combinações são exemplos do segundo tipo de problema. Os princípios aditivo e multiplicativo fazem também parte deste segundo grupo. O princípio das gavetas, ou princípio da casa dos pombos, é um exemplo de assunto que pode ser classificado no primeiro grupo.

Os autores compartilham da visão que um curso de Combinatória que tenha como público alvo os alunos do ensino básico trate somente dos temas relacionados à contagem, deixando as demonstrações de existência para um curso mais avançado, por exemplo, de preparação olímpica ou para o nível superior. Esta visão, longe de ser a ideal, é baseada no pouco tempo que é destinado no planejamento tradicional das escolas ao estudo deste tema e a pouca maturidade dos alunos em relação ao formalismo matemático.

MATERIAL PARA USO EM SALA DE AULA

CÁLCULOS COMBINATÓRIOS

CAPÍTULO 01: PRINCÍPIOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO

Neste primeiro capítulo mostraremos que alguns problemas, em Combinatória, podem ser resolvidos apenas escrevendo todas as possibilidades de resposta, mas em outros vamos precisar de novas técnicas fornecidas pelo Cálculo Combinatório, justificando, assim, o seu estudo. Além disso, apresentaremos e conceituaremos os dois princípios que nortearão todo o nosso estudo, sendo, os princípios aditivo e multiplicativo de contagem.

PROBLEMA 01: Beatriz vai a uma pizzaria, ao chegar percebe que está havendo uma promoção com um preço muito atraente. Nela você pode escolher um sabor de pizza entre quatro sabores diferentes e um marca de refrigerante entre três diferentes.

Ela quer descobrir de quantas formas distintas pode escolher. Para isso, ela representou as três marcas de refrigerante por R_1, R_2 e R_3 e os quatro sabores de pizza por P_1, P_2, P_3 e P_4 e construiu o quadro abaixo.

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	$R_1 P_1$	$R_1 P_2$	$R_1 P_3$	$R_1 P_4$
R_2	$R_2 P_1$	$R_2 P_2$	$R_2 P_3$	$R_2 P_4$
R_3	$R_3 P_1$	$R_3 P_2$	$R_3 P_3$	$R_3 P_4$

PROBLEMA 02: Leonardo sairá para passear com sua namorada, mas fazendo uma pesquisa de preços percebeu que só poderia assistir a um filme ou a uma peça de teatro. Sabendo que existem cinco filmes diferentes e três peças diferentes em cartaz, calcule o número de opções distintas de entretenimento para Leonardo e sua namorada.

Vamos representar os filmes por F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5 e as peças por P_1, P_2 e P_3. Leonardo só pode assistir a um filme ou a uma peça, assim temos as seguintes opções: F_1 ou F_2 ou F_3 ou F_4 ou F_5 ou P_1 ou P_2 ou P_3. Logo, Leonardo e sua namorada têm oito opções distintas de entretenimento.

PROBLEMA 03: Leonardo sairá para passear com sua namorada, mas fazendo uma pesquisa de preços percebeu que só poderia assistir a um filme e a uma peça de teatro. Sabendo que existem cinco filmes diferentes e três peças diferentes em cartaz. Calcule o número de opções distintas de entretenimento para Leonardo e sua namorada.

Novamente, vamos representar os filmes por F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5 e as peças por P_1, P_2 e P_3. Leonardo, agora, pode assistir a um filme e a uma peça. Montaremos uma tabela com todas as possibilidades:

	P_1	P_2	P_3
F_1	$F_1\,P_1$	$F_1\,P_2$	$F_1\,P_3$
F_2	$F_2\,P_1$	$F_2\,P_2$	$F_2\,P_3$
F_3	$F_3\,P_1$	$F_3\,P_2$	$F_3\,P_3$
F_4	$F_4\,P_1$	$F_4\,P_2$	$F_4\,P_3$
F_5	$F_5\,P_1$	$F_5\,P_2$	$F_5\,P_3$

Logo, Leonardo e sua namorada têm quinze opções distintas de entretenimento.

PROBLEMA 04: O problema de Letícia é diferente. A agência bancária de Helena, sua mãe, adotou, para segurança de seus clientes, uma senha de acesso de sete dígitos, em que os três primeiros dígitos são três letras distintas e os quatro últimos dígitos são quatro algarismos distintos, considerando o alfabeto de vinte e seis letras e o conjunto de algarismos de 0 (zero) a 9 (nove).

Letícia quer saber quantas senhas diferentes poderiam ser formadas. Ela começou a escrever as possibilidades, mas logo desanimou. Iria gastar muito tempo para isso e, depois, ainda teria de contá-las para saber quantas eram.

A única saída que encontrou foi pedir ajuda a seu pai, Washington, que é professor de matemática. Ele fez algumas contas e informou a Letícia que há 78.624.000 senhas distintas que poderiam ser formadas

Letícia percebeu, então, que sem a ajuda do pai seria praticamente impossível chegar à resposta correta. Mas ficou curiosa. Como ele havia chegado àquele resultado de forma tão rápida, sem escrever as possibilidades e contá-las em seguida.

Há muitas situações práticas do dia-a-dia em que precisamos descobrir de quantas formas diferentes pode ocorrer um determinado fato ou de quantas maneiras diferentes pode ser feita uma determinada escolha. Para isso, não é preciso, em geral, escrever todas as possibilidades, para depois contá-las. Isso pode ser feito por meio do cálculo combinatório.

Você vai aprender, a partir de agora, a descobrir de quantas formas diferentes os elementos de um conjunto podem ser agrupados, a partir de critérios previamente definidos.

1.1. PRINCÍPIO ADITIVO DE CONTAGEM:

PROBLEMA 05: Leandro entrou numa loja interessado em comprar uma bicicleta. Ao abordar o atendente, foi informado sobre as bicicletas disponíveis:

- ✓ Duas opções com aro 24 (A_1 e A_2)
- ✓ Três opções com aro 26 (B_1, B_2 e B_3).
- ✓ Quatro opções com aro 29 (C_1, C_2, C_3 e C_4).

De quantas formas diferentes ele pode escolher uma bicicleta?

Existem três hipóteses para Leandro: Ou compra a bicicleta com aro 24 (A_1 ou A_2), ou com aro 26 (B_1 ou B_2 ou B_3), ou com aro 29 (C_1 ou C_2 ou C_3 ou C_4). Assim, ele tem 2 + 3 + 4 = 9 formas diferentes de escolher a bicicleta.

Se existem duas **hipóteses** para ocorrer um fato, havendo **m** opções para a primeira hipótese e **n** opções para a segunda hipótese, sem que haja opção repetida, então o fato pode ocorrer de **m + n** maneiras diferentes.

Esse princípio estende-se para o caso de as hipóteses serem três (como no caso de Leandro) ou mais.

1.2. PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DE CONTAGEM:

PROBLEMA 06: Margarida é presidente de uma empresa paraense, precisa formar um conselho com três diretores, de forma que exista um representante de cada município paraense que possuem filiais: Abaetetuba, Cametá e Moju. Sabendo que esta empresa tem três diretores em Abaetetuba, dois diretores em Cametá e quatro diretores em Moju, de quantas formas diferentes Margarida poderá formar essa comissão?

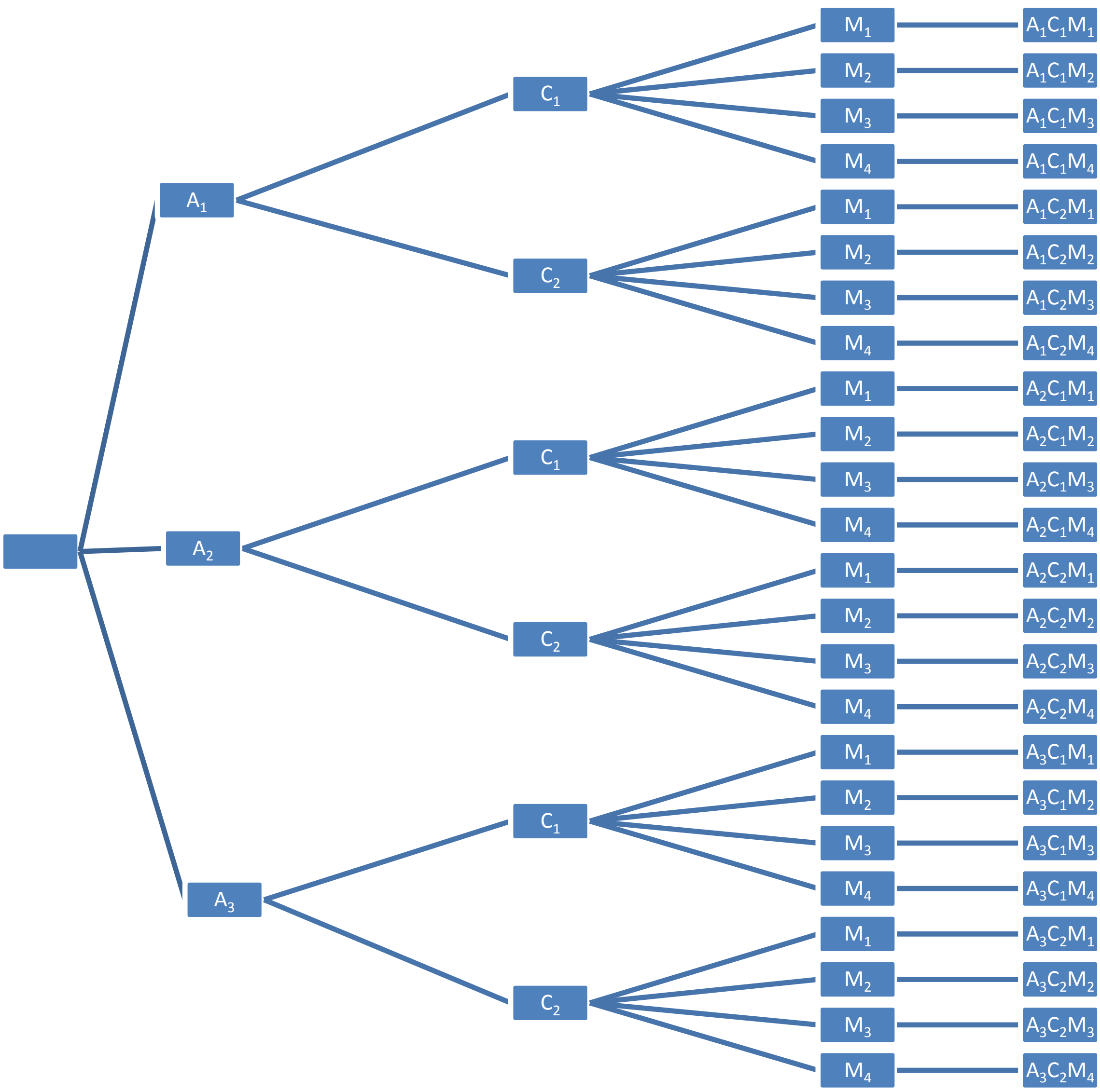
Existem três etapas para Margarida formar esse conselho:

1ª etapa: *escolher um dentre os três diretores de Abaetetuba (A_1 ou A_2 ou A_3);* ***e***
2ª etapa: *escolher um dentre os dois diretores de Cametá (C_1 ou C_2);* ***e***
3ª etapa: *escolher um dentre os quatro diretores de Moju (M_1 ou M_2 ou M_3 ou M_4).*

Há uma diferença importante entre o problema de Leandro e o de Margarida. No caso de Leandro, havia três ***hipóteses****, que* ***se excluíam mutuamente****, ou seja, ao escolher uma bicicleta aro 24, por exemplo, ele excluia as outras duas hipóteses (aro 26 ou aro 29).*

O caso de Margarida é diferente. Ele envolve três ***etapas independentes****. Para cada diretor de Abaetetuba que venha a escolher, ela tem duas opções para escolha do diretor de Cametá. Para cada conjunto de diretores Abaetetuba-Cametá que tenha escolhido, ela tem quatro opções para a escolha do diretor de Moju.*

Todos os possíveis resultados do problema de Margarida podem ser visualizados no esquema a seguir, chamado árvore das possibilidades.



Portanto, o problema tem vinte e quatro resultados possíveis, ou seja, há vinte e quatro formas diferentes de Margarida formar essa comissão. Fica claro, pela análise da árvore, que esse número é obtido por meio de uma multiplicação: ***3 . 2 . 4 = 24****.*

Esse problema ilustra outra regra geral importante, chamada **princípio multiplicativo de contagem** ou **princípio fundamental de contagem.**

Se um fato se compõe de duas **etapas**, podendo a primeira ocorrer de **m** maneiras e a segunda, independentemente da primeira, de **n** maneiras, sem que haja opção repetida, então o fato pode ocorrer de **m.n** maneiras diferentes.

O princípio multiplicativo estende-se, também, para fatos que ocorram em três etapas (como no problema de Margarida) ou mais.

<u>CAPÍTULO 02:</u> PRIMEIROS PROBLEMAS DE CONTAGEM E O USO INCORRETO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Nesta seção utilizaremos os princípios aditivo e multiplicativo de contagem para resolução de problemas. Aprenderemos a distinguir em quais problemas utilizaremos o principio aditivo, multiplicativo ou ambos.

Faremos também uma observação importante sobre o princípio multiplicativo, relacionada à ordem de escolha dos elementos quando trabalhamos com elementos de um mesmo conjunto.

2.1. PROBLEMAS INICIAIS DE CONTAGEM: Utilizando os princípios de contagem

Os princípios aditivo e multiplicativo de contagem são a base para a resolução de problemas de cálculo combinatório. É importante, por isso, que fique muito clara a distinção entre os dois princípios. O esquema abaixo pode ser muito útil. Veja:

Conectivo	Conecta	Princípio
ou e	Hipóteses Etapas	Aditivo Multiplicativo

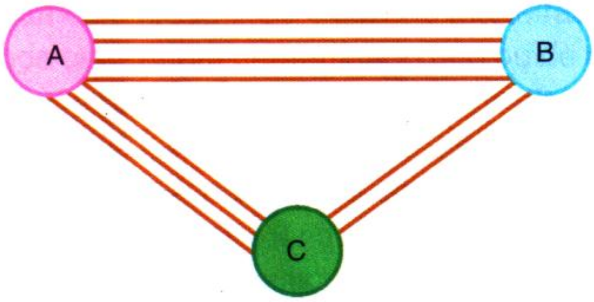
<u>PROBLEMA 07:</u> Arnaldo quer sair de seu bairro e ir até a empresa onde trabalha. Para isso, ele pode utilizar como meio de transporte ônibus, van ou táxi. Na praça onde Arnaldo se encontra, existem duas linhas de ônibus distintas que o levam à empresa; as vans do Seu Manoel, do Seu Benedito e da Dona Maria; além do ponto de táxi da cooperativa Cooperbras que dispõe de cinco carros diferentes. De quantas maneiras distintas Arnaldo pode se deslocar da praça ao seu trabalho?

*Da praça até o seu trabalho Arnaldo pode utilizar um ônibus **ou** uma van **ou** um táxi. Como disponibiliza de **duas** linhas de ônibus **ou três** vans **ou cinco** táxis, temos como conectivo "**ou**", conectando **hipóteses**, então utilizaremos o princípio **aditivo**. Assim, **2 + 3 + 5 = 10** maneiras distintas de Arnaldo se deslocar da praça ao seu trabalho.*

<u>PROBLEMA 08:</u> Durante o final de semana, Arnaldo precisa visitar sua avó, Dona Arnalda que está muito doente. Ela mora no interior do Ceará. Para chegar até a casa de sua avó ele precisa pegar um avião para Fortaleza, depois um ônibus intermunicipal até a rodoviária da cidade de Sobral e, finalmente, um táxi até a casa de Dona Arnalda. Fazendo uma pesquisa na internet, ele percebeu que existem quatro companhias aéreas que podem leva-lo de sua cidade a Fortaleza. Chegando a Fortaleza, observou que duas empresas de ônibus fazem o percurso Fortaleza-Sobral. Em Sobral, havia três táxis no ponto da rodoviária. De quantas maneiras distintas Arnaldo poderia sair de sua cidade e chegar até a casa de sua avó?

*Para Arnaldo sair de sua cidade e chegar à casa de Dona Arnalda deve pegar um avião **e** um ônibus **e** um táxi. Ele tem **quatro** opções de companhias aéreas **e duas** empresas de ônibus **e três** táxis, utilizamos o conectivo “**e**”, conectando **etapas**, logo trabalharemos com o princípio **multiplicativo**. Assim, **4 . 2 . 3 = 24** maneiras distintas de Arnaldo sair de sua cidade até a casa de sua avó.*

<u>PROBLEMA 09:</u> Juliana mora na Europa. Há várias estradas que ligam sua cidade A a duas cidades vizinhas, B e C. Essas estradas estão representadas no esquema abaixo.



Juliana vai muito à cidade B. Às vezes, ela vai direto até B, sem passar por C; outras vezes, chega a B passando primeiro por C. Quantos trajetos diferentes ela pode fazer?

*Juliana tem duas opções para sair de sua cidade A e chegar à cidade B: pode ir direto, sem passar por C **ou** passando, primeiro, por C. Como já visto anteriormente, estamos lidando com **hipóteses**, em virtude disso, utilizaremos o princípio **aditivo**. Mas, o nosso problema não termina aqui. Perceba que para a*

primeira hipótese *temos* ***quatro*** *estradas que ligam, diretamente, a cidade A a B. Já para a* ***segunda hipótese****, temos* ***duas etapas****: ir de A a C* ***e****, depois, de C a B, disponibilizamos de* ***três*** *opções para ir de A a C* ***e duas*** *para ir de C a B, logo, utilizando o princípio* ***multiplicativo****, temos:* ***3 . 2 = 6*** *opções para a segunda hipótese.*

Finalmente, temos quatro trajetos diferentes para chegar à cidade B direto, sem passar por C ***ou*** *seis passando, primeiro, por C. Assim, Juliana pode fazer* ***4 + 6 = 10*** *trajetos diferentes.*

PROBLEMA 10: Utilizando-se apenas os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9, formam-se todos os números naturais de quatro algarismos.

a) Qual o total de números formados?

Para formar um número de quatro algarismos precisamos do primeiro algarismo ***e*** *do segundo* ***e*** *do terceiro* ***e*** *do quarto, ou seja, temos* ***quatro etapas*** *a seguir. Para a escolha de cada um dos algarismos temos cinco opções: 2* ***ou*** *3* ***ou*** *5* ***ou*** *7* ***ou*** *9. Utilizando o* ***princípio multiplicativo*** *temos,* ***5 . 5 . 5 . 5 = 625*** *números que podemos formar com quatro algarismos.*

b) Quantos não têm algarismo repetido?

Como já observamos no item anterior, temos ***quatro etapas*** *a seguir, mas agora não podemos ter algarismos repetidos. Então, vejamos: vamos escolher um número qualquer de* ***quatro algarismos distintos****, por exemplo, 2357. Quando escolhemos* ***o primeiro algarismo*** *tínhamos* ***cinco opções*** *(2 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9); para* ***o segundo****, como já escolhemos um algarismo (2), restam apenas* ***quatro opções*** *(3 ou 5 ou 7 ou 9); para* ***o terceiro****, temos* ***três opções*** *(5 ou 7 ou 9), pois já utilizamos dois algarismos (2 e 3) e, finalmente, temos* ***duas opções*** *(7 ou 9)* ***para o quarto algarismo****, pois já foram utilizados três algarismos (2, 3 e 5). Assim, utilizando o* ***princípio multiplicativo****, podemos formar* ***5 . 4 . 3 . 2 = 120*** *números de quatro algarismos distintos.*

c) Quantos têm pelo menos um algarismo repetido?

Calculamos no item "a" o total de números com quatro algarismos: dentre eles temos aqueles que têm pelo menos um algarismo repetido (por exemplo: 2235, 5577, 9993, ...) e os que não têm algarismo repetido (por exemplo: 3579, 5293, 9725, ...). No item "b" calculamos todos os que não têm algarismo repetido. Logo, como o número só pode ter pelo menos um algarismo repetido ou não ter algarismos repetidos, basta retirar do total os que não têm algarismo repetido. Assim, temos ***625 – 120 = 505*** *números com pelo menos um algarismo repetido.*

d) Quantos são ímpares?

Em combinatória ***devemos, para facilitar nossa resolução e evitar erros, começar pelas restrições impostas em cada questão****. No caso desta, a restrição é o número ser ímpar. Vejamos:* ***para que um número seja ímpar, o seu último algarismo deve ser ímpar também****. Em virtude disso,* ***devemos começar nossa análise pelo quarto e último algarismo*** *do nosso número, observando que para ele temos quatro opções (3 ou 5 ou 7 ou 9), como os outros três algarismos não precisam ser distintos temos cinco opções para cada um deles (2 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9). Concluímos que, utilizando o princípio multiplicativo, temos* ***5 . 5 . 5 . 4 = 500*** *números ímpares.*

Observe que, se quiséssemos saber agora quantos são pares, bastava usar um raciocínio análogo ao do item "c", pois um número natural só pode ser par ou ímpar. Assim, do total de números retiramos a quantidade de ímpares, resultando em ***625 – 500 = 125*** *pares.*

e) Quantos são maiores que 7000 e não têm algarismo repetido?

Nossa restrição agora é que o número deve ser maior que 7000. Vejamos: se o nosso número começar com o algarismo 2 ou 3 ou 5 não será maior que 7000 (por exemplo: 2739, 3957, 5297, ...), mas se começar com 7 ou 9 cumpre o desejado (por exemplo: 7259, 9732, ...). Iremos resolver o problema de duas maneiras:

I. *Vamos trabalhar com as duas hipóteses separadamente, começar com 7* ***ou*** *com 9. Como os algarismos devem ser distintos, se começarmos com 7, evidentemente teremos uma opção para o primeiro algarismo, não podendo usá-lo nos demais; utilizando o mesmo raciocínio do item "b", teremos quatro opções para o segundo; três para o terceiro; e duas para o quarto algarismo. Logo, temos* ***1 . 4 . 3 . 2 = 24*** *números de quatro algarismos distintos que começam com 7. Analogamente, se começarmos com 9 teremos as mesmas condições supracitadas, concluindo que teremos também vinte e quatro números de quatro algarismos distintos que começam com 9. Finalmente, utilizando o princípio aditivo, obtemos* ***24 + 24 = 48*** *números maiores que 7000 com quatro algarismos distintos.*

II. *A outra opção seria trabalhar com as duas hipóteses conjuntamente, podemos dizer que temos duas opções para o primeiro algarismo (7 ou 9), como utilizaremos um deles e não poderemos repeti-lo, para o segundo algarismo teremos somente quatro opções; para o terceiro três; e para o quarto duas opções. Assim, teremos* ***2 . 4 . 3 . 2 = 48*** *números maiores que 7000 com quatro algarismos distintos.*

Poderíamos até ter pensando que teríamos apenas 3 opções para o segundo algarismo, pois podemos começar com 7 ou 9, mas devemos perceber que na formação de um número não podemos utilizar ao mesmo tempo 7 e 9 como primeiro algarismo, por este motivo utilizaremos um de cada vez, o que nos leva a ter quatro opções para o segundo algarismo.

Muito cuidado com sua escolha entre as duas maneiras acima, pois em alguns casos será inviável a utilização da resolução II, o que mostraremos no problema abaixo.

PROBLEMA 11: Utilizando-se apenas os algarismos 0, 3, 6, 8 e 9, formam-se todos os números de três algarismos.

a) Qual o total de números formados?

Para formar um número de três algarismos, de modo análogo ao problema 10, item "a", passaremos por três etapas. Mas aqui temos uma restrição não tão evidente quando resolvemos este tipo de problema pela primeira vez. Vamos formar *números quaisquer dentro das especificações dadas, por exemplo, 689, 830, 909, 300, 086. Veja que o número 086 aparentemente tem três algarismos, porém 086 = 86, logo só possui dois algarismos. Assim, temos a restrição de não poder começar com o algarismo zero, entretanto se não começarmos com zero, não há problema de termos zero nas outras posições.*

Então, seguindo a orientação de começar pelas restrições, temos apenas quatro opções (3, 6, 8, 9) para o primeiro algarismo e cinco opções para os demais. Usando o princípio multiplicativo, podemos formar ***4 . 5 . 5 = 100*** *números de três algarismos.*

b) Quantos não têm algarismo repetido?

Vamos formar um número de três algarismos distintos aleatoriamente, por exemplo, 308. Temos, novamente, quatro opções para o primeiro algarismo (3, 6, 8, 9), supondo a escolha do algarismo 3, teremos quatro opções também para o segundo (0, 6, 8, 9), pois não poderemos utilizar o algarismo que foi usado no primeiro (3) e agora já podemos utilizar o zero, para o terceiro algarismo teremos apenas três opções (6, 8, 9), visto que já utilizamos dois algarismos (3, 0). Assim, podemos formar ***4 . 4 . 3 = 48*** *números de três algarismos distintos.*

c) Quantos têm pelo menos um algarismo repetido?

Analogamente, ao problema 10, item "c", basta fazer a diferença entre o total de números formados e os que não têm algarismo repetido. Assim, temos ***100 – 48 = 52*** *números que têm pelo menos um algarismo repetido.*

d) Quantos são pares com algarismos distintos?

Como já vimos anteriormente, o número formado para ser par deverá ter também um algarismo par na última posição. Logo, o último algarismo só poderá ser 0 ou 6 ou 8. Lembre-se que além da restrição citada, temos a impossibilidade do algarismo zero na primeira posição. Vejamos, então, as três hipóteses: se o último algarismo for zero, evidentemente teremos uma opção para o terceiro algarismo, já para o primeiro algarismo teremos quatro opções (3, 6, 8, 9) e para o segundo nos *restam três opções, já que os algarismos devem ser distintos. Utilizando o princípio multiplicativo, temos **4 . 3 . 1 = 12** números pares de três algarismos distintos terminados em zero. Se o último algarismo for 6, teremos novamente uma opção para o terceiro algarismo, agora teremos apenas três opções para o primeiro (3, 8, 9), pois além de não poder repetir o algarismo 6, não podemos utilizar o zero, finalmente para o segundo termo teremos também três opções, porque não poderemos utilizar os dois algarismos já utilizados na primeira e na última posições, mas já poderemos usar o algarismo zero. Assim, utilizando o princípio multiplicativo, temos **3 . 3 . 1 = 9** números pares de três algarismos distintos terminados em 6. Analogamente, ao caso dos números terminados em 6, teremos também **nove** números pares de três algarismos distintos terminados em 8.*

*Finalmente, utilizando o princípio aditivo, temos **12 + 9 + 9 = 30** números pares com algarismos distintos que poderíamos formar.*

Podemos perceber que trabalhamos com as hipóteses separadamente, não seria viável a solução com as hipóteses conjuntamente, pois não temos o mesmo número de possibilidades para cada uma delas. Este é um exemplo do caso citado ao final do problema 10.

e) Quantos são maiores que 600 e não têm algarismo repetido?

Nosso número deve começar com um dos algarismos: 6 ou 8 ou 9, para ser maior do que 600. Temos, então, três opções para o primeiro algarismo (6, 8, 9), como utilizaremos um deles, teremos quatro opções para o segundo e apenas três para o terceiro, pois já utilizamos dois algarismos nas posições anteriores. Assim, pelo princípio multiplicativo, podemos formar **3 . 4 . 3 = 36** números de três algarismos distintos maiores que 600.

PROBLEMA 12: Neste momento, vamos retomar o problema de Letícia que se encontra no capítulo 01, problema 04: O problema de Letícia é diferente. A agência bancária de Helena, sua mãe, adotou, para segurança de seus clientes, uma senha de acesso de sete dígitos, em que os três primeiros dígitos são três letras distintas e os quatro últimos dígitos são quatro algarismos distintos. Considerando o alfabeto de vinte e seis letras e o conjunto de algarismos de 0 (zero) a 9 (nove). Letícia quer saber quantas senhas diferentes poderiam ser formadas.

*Para formar tais senhas precisamos da primeira letra **e** da segunda letra **e** da terceira letra **e** do primeiro algarismo **e** do segundo algarismo **e** do terceiro algarismo **e** do quarto algarismo. Logo, devemos trabalhar com sete etapas. Vejamos, temos 26 opções para a primeira letra, 25 opções para a segunda e 24 opções para a terceira, já que as letras devem ser distintas. Além disso, temos 10 opções para o primeiro algarismo, sabendo que não existe restrição ao zero na primeira posição, pois não estamos formando números e sim senhas, onde 0123 é uma senha válida de quatro algarismos distintos, neste caso, 0123 ≠ 123. Para o segundo algarismo temos nove opções, além de oito opções para o terceiro e sete opções para o quarto, já que os algarismos também devem ser distintos. Assim, utilizando o princípio multiplicativo, podemos formar **26 . 25 . 24 . 10 . 9 . 8 . 7 = 78624000** senhas diferentes. Valor que o pai de Letícia encontrou, mas ainda não havíamos apresentado a resolução.*

<u>PROBLEMA 13:</u> O técnico da equipe infanto-juvenil de natação de um clube precisa escolher dois dos seus quatro melhores nadadores (A, B, C e D) para o campeonato brasileiro de natação. Quantas duplas diferentes poderão ser formadas?

*Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio das questões anteriores, devemos escolher o primeiro **e** o segundo nadador para participar do campeonato brasileiro. Assim, vamos seguir duas etapas: para a escolha do primeiro temos quatro opções e para o segundo somente três, pois não podemos escolher novamente aquele que já foi escolhido. Logo, utilizando o princípio multiplicativo, poderão ser formadas **4 . 3 = 12** duplas diferentes.*

Vejamos descriminadas as duplas: AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC, porém devemos perceber que AB = BA, AC = CA, AD = DA, BC = CB, BD = DB, CD = DC. Podemos concluir, então, que não teremos doze duplas diferentes, mas sim apenas seis.

2.2. USO INDEVIDO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO: Percebemos, através do problema anterior, que não poderíamos ter utilizado o princípio multiplicativo. Portanto, quando trabalhamos com elementos de um mesmo conjunto, o princípio multiplicativo só é válido, na forma em que foi enunciado, nos casos em que **é importante a ordem de escolha** dos elementos.

2.3. PROBLEMAS DE FIXAÇÃO: Resolva os problemas propostos abaixo, utilizando os conhecimentos adquiridos.

PROBLEMA 14: Uma comissão governamental deverá representar o país em um evento internacional. Tal comissão será formada por um presidente, um vice-presidente, um relações internacionais e um chefe de delegação. O presidente e vice serão escolhidos entre dez senadores, o relações internacionais entre sete embaixadores e o chefe de delegação entre doze deputados. Quantas comissões distintas poderão ser formadas?

PROBLEMA 15: O concurso para provimento de duas vagas para analista judiciário e duas vagas para técnico judiciário, do Tribunal de Justiça, prevê as seguintes regras: o primeiro colocado dos candidatos para analista será promovido a coordenador e os dois aprovados para técnico judiciário exercerão as mesmas atividades. Quantos são os possíveis resultados para o quadro funcional deste órgão, sabendo que há seis candidatos para analista judiciário e quatro para técnico?

PROBLEMA 16: Em um condomínio composto por dez apartamentos, será formada uma comissão de cinco membros, a partir dos proprietários, composta por um síndico, um vice-síndico, um tesoureiro e dois fiscais. De quantas maneiras distintas pode-se formar tal comissão?

CAPÍTULO 03: AGRUPAMENTOS ORDENADOS E NÃO-ORDENADOS.

Neste capítulo abordaremos com mais ênfase a ideia de agrupamentos ordenados e não-ordenados, ressaltando a distinção entre ambos e relacionando-os com os conceitos de Combinatória. Além disso, vamos analisar e resolver alguns problemas para que essa diferença fique clara.

3.1. AGRUPAMENTOS ORDENADOS OU NÃO-ORDENADOS: No nosso estudo, com frequência aparecerão problemas que para resolvê-los corretamente, vamos precisar distinguir se os agrupamentos são ordenados ou não. A partir dos problemas abaixo veremos como proceder em cada caso.

PROBLEMA 17: Chama-se anagrama de uma palavra qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição.

Quatro amigos: Válber, Emerson, Jorge e Antônio irão abrir uma empresa, enquanto decidiam como se chamaria seu novo negócio, Jorge teve a idéia de utilizar as iniciais de seus nomes, por exemplo, VEJA.

a) Encontre todos os anagramas possíveis de se formar, com a palavra VEJA.

VEJA	*EVJA*	*JVEA*	*AVEJ*
VEAJ	*EVAJ*	*JVAE*	*AVJE*
VJEA	*EJVA*	*JEVA*	*AEVJ*
VJAE	*EJAV*	*JEAV*	*AEJV*
VAEJ	*EAVJ*	*JAVE*	*AJVE*
VAJE	*EAJV*	*JAEV*	*AJEV*

b) Analise se os agrupamentos formados são ordenados ou não-ordenados.

Os agrupamentos formados são ordenados, pois a única distinção entre eles é a ordem de escolha dos elementos. Logo, é importante a ordem de escolha dos elementos.

c) Determine uma forma de calcular o número de anagramas diferentes que podem ser formados, sem escrevê-los.

Para formar este anagrama precisamos escolher a primeira ***e*** *a segunda* ***e*** *a terceira* ***e*** *a quarta letras. Vamos, então, trabalhar com quatro etapas: para a primeira letra temos quatro opções (V, E, J, A), para a segunda teremos apenas três, já que não poderemos utilizar aquela que foi escolhida para a primeira posição, para a terceira duas, pois já utizamos duas e, finalmente, uma opção para a última posição, sendo a única letra que restará. Então, utilizando o princípio multiplicativo, temos* ***4 . 3 . 2 . 1 = 24*** *anagramas distintos.*

De forma geral, quando dispormos de n elementos distintos, tendo como objetivo agrupar ordenadamente todos eles, sem repetição, devemos trabalhar de forma análoga ao que foi mostrado na questão anterior, ou seja,

n . (n – 1) . (n – 2) . ... . 1.

PROBLEMA 18: Um grupo é composto de cinco professores: Adolfo, Bernardo, Cássio, Denise e Édna (A, B, C, D e E). Precisamos formar a diretoria da Associação dos Professores do Bairro, constituída de um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro.

a) Encontre todas as maneiras possíveis de se formar, com esse grupo, a diretoria citada composta por três professores.

ABC	*BAC*	*CAB*	*DAB*	*EAB*
ACB	*BCA*	*CBA*	*DBA*	*EBA*
ABD	*BAD*	*CAD*	*DAC*	*EAC*
ADB	*BDA*	*CDA*	*DCA*	*ECA*
ABE	*BAE*	*CAE*	*DAE*	*EAD*
AEB	*BEA*	*CEA*	*DEA*	*EDA*
ACD	*BCD*	*CBD*	*DBC*	*EBC*
ADC	*BDC*	*CDB*	*DCB*	*ECB*
ACE	*BCE*	*CBE*	*DBE*	*EBD*
AEC	*BEC*	*CEB*	*DEB*	*EDB*

ADE	*BDE*	*CDE*	*DCE*	*ECD*
AED	*BED*	*CED*	*DEC*	*EDC*

b) Analise se os agrupamentos formados são ordenados ou não-ordenados.

Os agrupamentos formados são ordenados, pois quando os agrupamentos possuem os mesmos elementos a única distinção entre eles é a ordem de escolha dos elementos, por exemplo, ABC ≠ ACB ≠ BAC ≠ BCA ≠ CAB ≠ CBA, assim como CDE ≠ CED ≠ DCE ≠ DEC ≠ ECD ≠ EDC. Logo, é importante a ordem de escolha dos elementos.

c) Determine uma forma de calcular o número de diretorias diferentes que podem ser formadas, sem escrevê-las.

Para formar a diretoria devemos escolher um presidente ***e*** *um vice-presidente* ***e*** *um tesoureiro. Trabalharemos, então, com três etapas: para a escolha do presidente temos cinco opções, como um já será escolhido teremos apenas quatro opções para o vice-presidente e três opções para o tesoureiro, pois dois já foram escolhidos. Assim, utilizando o princípio multiplicativo, podemos formar* ***5 . 4 . 3 = 60*** *diretorias diferentes.*

De forma geral, quando dispormos de n elementos distintos, se quisermos agrupar ordenadamente p elementos dentre os n, sem repetição, com p menor do que ou igual a n, devemos proceder de forma análoga ao que foi mostrado no problema anterior, ou seja,

$$\mathbf{n \,.\, (n - 1) \,.\, (n - 2) \,.\, \ldots \,.\, (n - p + 1)}$$

Veja que para a etapa 1, temos n opções, já para etapa 2 temos apenas (n – 1), pois já escolhemos um na etapa 1, para a etapa 3 temos (n – 2) opções, por termos escolhido dois até a etapa 2, de forma análoga seguimos até a etapa p, última etapa, onde teremos (n – (p – 1)) opções, porque já teríamos escolhido (p – 1) até a etapa anterior (p – 1).

<u>PROBLEMA 19:</u> Vamos considerar, agora, o mesmo grupo de professores: Adolfo, Bernardo, Cássio, Denise e Édna. Precisamos formar uma comissão com três deles para uma reunião na Secretaria de Educação do Estado.

a) Encontre todas as maneiras possíveis de se formar, com esse grupo, uma comissão de três professores.

ABC	~~*BAC*~~	~~*CAB*~~	~~*DAB*~~	~~*EAB*~~
~~*ACB*~~	~~*BCA*~~	~~*CBA*~~	~~*DBA*~~	~~*EBA*~~
ABD	~~*BAD*~~	~~*CAD*~~	~~*DAC*~~	~~*EAC*~~
~~*ADB*~~	~~*BDA*~~	~~*CDA*~~	~~*DCA*~~	~~*ECA*~~
ABE	~~*BAE*~~	~~*CAE*~~	~~*DAE*~~	~~*EAD*~~
~~*AEB*~~	~~*BEA*~~	~~*CEA*~~	~~*DEA*~~	~~*EDA*~~
ACD	***BCD***	~~*CBD*~~	~~*DBC*~~	~~*EBC*~~
~~*ADC*~~	~~*BDC*~~	~~*CDB*~~	~~*DCB*~~	~~*ECB*~~
ACE	***BCE***	~~*CBE*~~	~~*DBE*~~	~~*EBD*~~
~~*AEC*~~	~~*BEC*~~	~~*CEB*~~	~~*DEB*~~	~~*EDB*~~
ADE	***BDE***	***CDE***	~~*DCE*~~	~~*ECD*~~
~~*AED*~~	~~*BED*~~	~~*CED*~~	~~*DEC*~~	~~*EDC*~~

b) Analise se os agrupamentos formados são ordenados ou não-ordenados.

Os agrupamentos formados são não-ordenados, pois quando os agrupamentos possuem os mesmos elementos não há distinção entre eles, por exemplo, ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA, assim como CDE = CED = DCE = DEC = ECD = EDC. Logo, a ordem de escolha dos elementos não é importante.

c) Determine uma forma de calcular o número de comissões diferentes que podem ser formadas, sem escrevê-las.

Antes de resolvermos este problema, para facilitar a compreensão, vamos buscar uma ideia mais simples, supondo que a comissão procurada fosse de apenas dois integrantes. Assim, teríamos os seguintes agrupamentos:

AB	~~*BA*~~	~~*CA*~~	~~*DA*~~	~~*EA*~~
AC	***BC***	~~*CB*~~	~~*DB*~~	~~*EB*~~
AD	***BD***	***CD***	~~*DC*~~	~~*EC*~~
AE	***BE***	***CE***	***DE***	~~*ED*~~

Veja que a cada dois agrupamentos apenas um será contado, já que os agrupamentos são não-ordenados, por exemplo, AB = BA, AC = CA, DE = ED. Assim, teríamos ***5 . 4 = 20*** *agrupamentos no total, mas como a cada dois apenas um será contado, a solução é calcular a metade de vinte:* $\frac{1}{2}.20 = 10$ *comissões de dois integrantes poderiam ser formadas.*

Voltando para o nosso problema, podemos trabalhar de forma análoga ao que foi feito na suposição acima. Vejamos, a cada seis agrupamentos apenas um será contado, por exemplo, ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA, assim como CDE = CED = DCE = DEC = ECD = EDC. Assim, teremos ***5 . 4 . 3 = 60*** *agrupamentos no total, mas como a cada seis apenas um será contado, a solução é calcular um sexto de sessenta:* $\frac{1}{6}.60 = 10$ *comissões com três professores.*

Entretanto, se tivessemos cem professores e nosso objetivo fosse formar uma comissão com cinco deles? Quantas comissões diferentes poderíamos formar? Será que para resolver teremos que escrever todas as possibilidades para saber qual fração devemos retirar do total?

A resposta a esta última pergunta é não. Vejamos os exemplos anteriores, o objetivo é descobrir quantos agrupamentos formam a mesma comissão: quando queríamos formar comissões com dois professores, AB = BA, AC = CA, DE = ED, podemos utilizar a mesma ideia da formação de anagramas, se escolhermos os professores A e B, são duas etapas: temos duas opções para a escolha do primeiro e uma para a escolha do segundo, utilizando o princípio multiplicativo, temos ***2 . 1 = 2*** *agrupamentos. De modo análogo podemos trabalhar com a escolha de três professores, podemos supor agora A, B e C, temos* ***3 . 2 . 1 = 6*** *agrupamentos. Finalmente se vamos escolher cinco professores o número de agrupamentos repetidos será* ***5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120****. Então, a cada 120 agrupamentos somente um será contado. Assim, teremos* ***10 . 9 . 8 . 7 . 6 = 30240*** *agrupamentos no total, porém como a cada 120 apenas um será contado, devemos calcular um vinte avos de*

30240: $\frac{1}{120}.30240 = 252$ *comissões distintas poderiam ser formadas de cinco professores escolhidos dentre cem.*

De forma geral, quando dispormos de n elementos distintos, se quisermos apenas escolher p elementos dentre os n, sem repetição, com p menor do que ou igual a n, formando agrupamentos não-ordenados, devemos proceder de forma análoga ao que foi mostrado anteriormente, ou seja,

$$\frac{\mathbf{n} \,.\, (\mathbf{n} - \mathbf{1}) \,.\, (\mathbf{n} - \mathbf{2}) \,.....\, (\mathbf{n} - \mathbf{p} + \mathbf{1})}{\mathbf{p} \,.\, (\mathbf{p} - \mathbf{1}) \,.\, (\mathbf{p} - \mathbf{2}) \,.....\, \mathbf{1}}$$

3.2. PROBLEMAS DE FIXAÇÃO: Resolva os problemas propostos abaixo, utilizando os conhecimentos adquiridos.

PROBLEMA 20: Considere todos os anagramas da palavra MARCELO.

a) Quantos são os anagramas?
b) Quantos começam por R?
c) Quantos terminam em consoante?
d) Quantos começam por R, E e C, nesta ordem?
e) Quantos terminam com as letras R, E e L, em qualquer ordem?
f) Quantos têm as letras R e L juntas, em qualquer ordem?

PROBLEMA 21: De quantas maneiras podemos dispor em uma prateleira, lado a lado, cinco livros diferentes de Matemática e quatro livros diferentes de Física, em cada uma das situações abaixo?

a) Livros de mesma matéria devem ficar juntos.
b) Livros de mesma matéria não podem ficar juntos.
c) O primeiro livro deve ser de Matemática e o último, de Física.
d) Os dois livros das extremidades devem ser de matérias diferentes.

PROBLEMA 22: Considere todos os números naturais obtidos permutando-se, entre si, os algarismos do número 763518.

a) Qual o total de números formados?
b) Quantos são pares?
c) Em quantos os algarismos 6 e 8 aparecem juntos?
d) Em quantos os algarismos 6 e 8 não aparecem juntos?
e) Quantos são maiores que 500000?
f) Qual será a posição de 637581, se todos os números forem colocados em ordem crescente?

PROBLEMA 23: Uma faculdade mantém quinze cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por três cursos, determinando-os por ordem de preferência. Qual o número possível de formas para optar?

PROBLEMA 24: Em um campeonato de xadrez, houve disputa entre dez jogadores. Cada participante jogou, contra os demais, duas partidas, uma em cada turno do campeonato. No final, dois jogadores ficaram empatados. Houve o jogo de desempate. Quantas partidas foram disputadas?

PROBLEMA 25: Uma empresa tem doze diretores. Entre eles, devem ser escolhidos um presidente, um diretor-administrativo e um diretor-financeiro. De quantas formas diferentes podem ser definidos esses cargos, sabendo-se que um deles deve ser ocupado pelo Dr. Barbosa?

PROBLEMA 26: Num encontro, há vinte pessoas. Se cada uma delas cumprimentar todas as demais uma única vez, qual será o número total de cumprimentos?

PROBLEMA 27: Um partido político em formação tem apenas dezoito filiados. A partir desse grupo, pretende-se constituir um diretório formado por seis pessoas, das quais devem ser escolhidos um presidente e um vice-presidente. De quantas formas diferentes isso pode ser feito?

PROBLEMA 28: Quantos são os anagramas da palavra PROBLEMA em que as vogais aparecem em ordem alfabética?

MATERIAL DE INSTRUÇÃO AO PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

Caro professor, com este instrumento pretendemos ajudar o seu trabalho na sala de aula, através de sugestões, direcionamentos e enfoques nos objetivos traçados no momento da preparação do material a ser utilizado. Além disso, queremos também compartilhar um pouco da nossa experiência com o ensino de Análise Combinatória, para que, somando a sua vivência, possamos tentar atingir nosso principal objetivo: buscar a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, não somente nos cálculos de Combinatória, mas na matemática como um todo.

Acreditamos que no ensino de Análise Combinatória podemos, a partir de cada problema proposto, buscar o máximo de estratégias e soluções possíveis apresentadas pelos próprios estudantes, escrevê-las, inclusive, no quadro e através delas mostrar para a turma onde estão os erros e acertos de cada solução, para que eles não venham a cometer novamente os mesmos erros e, na verdade, possam aprender com eles.

CAPÍTULO 01

Neste primeiro capítulo temos como objetivo principal justificar o uso da Análise Combinatória através de problemas. Apresentar e conceituar os princípios aditivo e multiplicativo, comparando-os e mostrando suas diferenças.

Podemos apresentar o problema 01, questionar nossos alunos acerca das possíveis soluções e quais estratégias eles utilizaram para a solução do problema. O objetivo principal deste primeiro problema é mostrar que ele pode ser resolvido através da listagem de todas as possibilidades por ser um número pequeno.

A sugestão é que escrevamos no quadro todas as soluções indicadas pelos alunos. É bem provável que algum deles liste todas as possibilidades, se isto não ocorrer, apresente o quadro contido no material e incite uma discussão das possíveis soluções que os alunos apresentaram tendo como enfoque a lista.

Os problemas 02 e 03 propostos no material seguem a mesma estrutura de resolução do problema 01, a fim de consolidar essa estratégia de resolução.

Após uma verificação das respostas dos problemas 02 e 03, podemos apresentar o problema 04. Neste momento devemos levar os alunos a perceber que será inviável a solução do mesmo pela mesma estratégia utilizada nos problemas 01, 02 e 03.

É importante notar que este problema não será resolvido neste momento, pois ele servirá de estímulo para mostrar a necessidade de novas técnicas além da simples listagem de todas as possibilidades, resolveremos posteriormente.

Os dois tópicos a seguir não são independentes, no sentido de que cada um só será compreendido pelos alunos após a comparação com o outro:

PRINCÍPIO ADITIVO DE CONTAGEM

Podemos apresentar o problema 05, questionar nossos alunos acerca das possíveis soluções e quais estratégias eles utilizaram para a solução do problema. Escrevemos no quadro todas as soluções indicadas, pedimos que os alunos verbalizem suas soluções e analisamos com eles.

Devemos observar que o foco principal é o aluno perceber que para resolver este tipo de problema, ele precisa somar o número de opções em cada hipótese, lembrando que as hipóteses são mutuamente excludentes. Podemos mostrar a solução contida no material e a conceituação.

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DE CONTAGEM

Devemos apresentar o problema 06, utilizando todos os métodos didáticos já citados. Neste momento, vamos chamar a atenção de nossos alunos para as diferenças entre o problema 05 e 06, ou seja, para as diferenças entre os princípios.

Podemos fazer as observações contidas no material e conceituar.

Calculamos um tempo aproximado de duas horas/aula para nosso trabalho com este capítulo.

CAPÍTULO 02

O objetivo principal deste capítulo é apresentar os primeiros problemas de contagem, retomando o capítulo anterior através da construção de um quadro resumo e fundamentando a utilização dos princípios aditivo e multiplicativo que irão nortear todo o nosso estudo. Além de mostrar a incidência do uso incorreto do princípio multiplicativo, a fim de introduzir a ideia de combinação, mas sem citar esta nomenclatura.

Inicialmente, podemos acompanhar no material, retomando o capítulo anterior através do quadro resumo. A seguir trabalharemos os problemas de 01 a 07 que estão todos resolvidos e comentados. Podemos perceber que os problemas inseridos estão em grau de dificuldade crescente, tentando aprofundar o amadurecimento do estudante com os princípios de contagem e com os conceitos apresentados em cada questão. É importante enfatizarmos a relação conectivo-conecta-princípio em cada problema.

O problema 06 deste capítulo, retoma o problema 04 do capítulo anterior, onde apenas foi mostrado o resultado final e não a resolução. Já o problema 07 é o que nos traz o uso incorreto do princípio multiplicativo, mas podemos perceber que o resolvemos através da exposição de todos os agrupamentos, para depois contá-los. Da mesma forma, devemos proceder nos problemas de fixação propostos, nos casos do uso incorreto do princípio multiplicativo.

Calculamos um tempo aproximado de duas horas/aula para nosso trabalho com este capítulo.

CAPÍTULO 03

Neste último capítulo, temos como objetivo principal mostrar a diferença entre agrupamentos ordenados e não-ordenados, para com isso apresentarmos, sem citar as nomenclaturas, permutação simples, arranjo simples e combinação simples, ou seja, os problemas serão todos resolvidos utilizando os princípios aditivo e/ou multiplicativo.

Podemos perceber que o problema 01 trata de permutação simples, mas em nenhum momento vamos citar a palavra “permutação”, apesar de seu conceito estar implicitamente apresentado no texto. O mesmo acontecerá com o problema 02, apresentando o arranjo simples e o problema 03, combinação simples.

O nosso objetivo aqui é não viciar o estudante, que na maioria dos casos, estuda por livros didáticos e é logo incitado a resolver problemas de combinatória buscando saber se o mesmo é de permutação, arranjo ou combinação, o que acaba o levando a erros e atropelos.

Queremos, aqui, construir os conceitos baseados fundamentalmente nos princípios aditivo e multiplicativo, para que através dessa construção esteja mais maduro para receber posteriormente as nomenclaturas de Combinatória. Por isso, pedimos que os problemas de fixação propostos sejam resolvidos através dos conceitos trabalhados no nosso material.

Podemos perceber que os problemas 04, 05 e 06 podem ser resolvidos utilizando os conceitos trabalhados no problema 01. Já os problemas 07, 08 e 09 tratam dos conceitos do problema 02. Os demais 10, 11 e 12, podem ser trabalhados de forma análoga ao problema 03.

Calculamos um tempo aproximado de duas horas/aula para nosso trabalho com este capítulo.

PLANOS DE AULA

PLANO DE AULA (CAPÍTULO 01)

DISCIPLINA: Matemática
PROFESSOR:
SÉRIE: 2º ANO – ENSINO MÉDIO
CARGA HORÁRIA: 2 h/a
MODALIDADE: Ensino Regular

TEMA: Análise Combinatória: Princípio Aditivo e Multiplicativo de Contagem.

Conteúdo Programático

1. **Princípios de Contagem;**

   1.1. Princípio Aditivo;
   1.2. Princípio Multiplicativo.

Objetivo Geral: Apresentar a Análise Combinatória, os conceitos dos princípios aditivo e multiplicativo de contagem, suas relações e diferenças, e o uso destes conceitos na resolução de problemas de contagem.

Objetivos Específicos:

- ✓ Identificar situações do cotidiano onde podem ser aplicados cálculos combinatórios;
- ✓ Apresentar a necessidade de novas ferramentas para a solução de problemas de contagem.
- ✓ A partir de situações-problema conceituar, relacionar e diferenciar os princípios aditivo e multiplicativo de contagem;

Procedimentos Metodológicos

- ✓ Aula expositiva, acompanhada de recursos didáticos.

Recursos Didáticos

- ✓ Material didático, imagens e a utilização do quadro branco.

Avaliação

- ✓ A avaliação será operacionalizada a partir da aplicação e discussão dos *exercícios contidos no material para uso em sala de aula*, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Referências

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

PLANO DE AULA (CAPÍTULO 02)

DISCIPLINA: Matemática
PROFESSOR:
SÉRIE: 2º ANO – ENSINO MÉDIO
CARGA HORÁRIA: 2 h/a
MODALIDADE: Ensino Regular

TEMA: Primeiros problemas de combinatória e o uso incorreto do princípio multiplicativo de contagem

Conteúdo Programático

2. **Primeiros problemas de Contagem;**

   2.1. Princípio Aditivo;
   2.2. Princípio Multiplicativo;
   2.3. Uso incorreto do princípio multiplicativo

Objetivo Geral: Apresentar e resolver os primeiros problemas de combinatória utilizando os princípios aditivo e multiplicativo. Mostrar o uso indevido do princípio multiplicativo de contagem.

Objetivos Específicos:

- ✓ Aplicar os princípios de contagem na resolução de problemas propostos;
- ✓ Distinguir em quais problemas utilizar o principio aditivo, multiplicativo ou ambos;
- ✓ Através de um problema proposto mostrar o uso indevido do princípio fundamental da contagem.
- ✓ Aprofundar o aprendizado através de soluções comentadas dos problemas propostos.

Procedimentos Metodológicos

- ✓ Aula expositiva, acompanhada de recursos didáticos.

Recursos Didáticos

- ✓ Material didático, imagens e a utilização do quadro branco.

Avaliação

- ✓ A avaliação será operacionalizada a partir da aplicação e discussão dos *exercícios contidos no material para uso em sala de aula*, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Referências

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

PLANO DE AULA (CAPÍTULO 03)

DISCIPLINA: Matemática
PROFESSOR:
SÉRIE: 2º ANO – ENSINO MÉDIO
CARGA HORÁRIA: 2 h/a
MODALIDADE: Ensino Regular

TEMA: Agrupamentos ordenados e não-ordenados: distinção e aplicação dos conceitos de contagem.

Conteúdo Programático

3. **Agrupamentos ordenados e não-ordenados;**

   3.1. Agrupamentos ordenados;
   3.2. Agrupamentos não-ordenados;

Objetivo Geral: Retomar com mais ênfase a idéia de agrupamentos ordenados e não-ordenados, ressaltar a distinção entre ambos e relacioná-los com os conceitos de combinatória.

Objetivos Específicos:

- ✓ Enfatizar, através da resolução de problemas, a distinção entre agrupamentos ordenados e não-ordenados;
- ✓ Apresentar as relações entre os agrupamentos ordenados e não-ordenados com os conceitos de contagem, inclusive na forma de calcular o total de possibilidades, sem ter que escrevê-las;
- ✓ Aprofundar o aprendizado através de soluções comentadas dos problemas propostos.

Procedimentos Metodológicos

- ✓ Aula expositiva, acompanhada de recursos didáticos.

Recursos Didáticos

- ✓ Material didático, imagens e a utilização do quadro branco.

Avaliação

- ✓ A avaliação será operacionalizada a partir da aplicação e discussão dos *exercícios contidos no material para uso em sala de aula*, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Referências

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao escrevermos um curso de Combinatória voltado para o ensino médio, que apresenta uma sequência didática diferente das que são tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos, além de buscarmos atender ao estipulado pelo programa de que "Os Trabalhos de Conclusão de Curso devem versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula", tínhamos em mente também, as dificuldades que nós e muitos de nossos colegas de profissão enfrentam em sala de aula ao terem que ensinar este conteúdo.

A forma de apresentação do texto já tinha sido utilizada pelos autores de forma independente e o bom resultado obtido nos levou a organizar estas notas no intuito de compartilhar nossa experiência com esta abordagem. Longe de ser um material definitivo, é um esforço inicial que visa dar ao professor um material acessível e que contenha uma característica diferenciada: a forma em que as soluções dos problemas são apresentadas. Estas soluções foram escritas baseadas em como apresentamos o tema em nossas aulas, de modo que o aluno não tenha dificuldade ao lê-las e o professor que utilizar o material sinta facilidade ao adaptá-lo ou acrescentar seus próprios problemas e soluções.

Esperamos com a produção deste material não só fornecer uma sequência didática alternativa para o ensino de Análise Combinatória, como também inspirar uma reflexão acerca do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira. Um ensinar voltado para a criatividade dos alunos e seus professores, e a construção coletiva dos conceitos.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.