



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

JOSÉ ROGÉRIO BARRETO

**ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS POR ALUNOS DO 6º ANO NA RESOLUÇÃO  
DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OPERAÇÕES COM FRAÇÕES**

ITABAIANA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

JOSÉ ROGÉRIO BARRETO

**ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS POR ALUNOS DO 6º ANO NA RESOLUÇÃO  
DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OPERAÇÕES COM FRAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dra. Marta Elid Amorim Mateus

Coorientadora: Prof<sup>a</sup> Me. Viviane de Jesus Lisboa Aquino

ITABAIANA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Barreto, José Rogério.

B273a      Análise de erros cometidos por alunos do 6º ano na  
resolução de problemas envolvendo operações com frações  
/ José Rogério Barreto; orientador Marta Elid Amorim  
Mateus; co-orientador Viviane de Jesus Lisboa Aquino. –  
Itabaiana, 2017.

79 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –  
Universidade Federal de Sergipe, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Frações. 3. Teoria  
dos erros. 4. Estudantes – Ensino fundamental. I. Mateus,  
Marta Elid Amorim, orient. II. Aquino, Viviane de Jesus  
Lisboa, co-orient. III. Título.

CDU 511.13



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Análise de erros cometidos por alunos do 6º ano na resolução  
de problemas envolvendo as operações com frações**

por

Jose Rogerio Barreto

Aprovada pela banca examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Viviane De Jesus Lisboa Aquino - UFS

Orientador

Prof. Dr. Eder Mateus De Souza - UFS

Primeiro Examinador

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Teresa Cristina Etcheverria - UFS

Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Agosto de 2017

---

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze  
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887

CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedico este trabalho a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para sua concretização, e a todos aqueles que ainda acreditam na educação deste país.

## **AGRADECIMENTO**

Em primeiro lugar, a Deus pela vida e por estar ao meu lado em todos os momentos dessa trajetória.

Aos meus pais, que me deram o dom mais precioso do universo: a vida.

A minha esposa e filhos pelo apoio e incentivo durante todo o curso acreditando na realização do meu sonho e por entenderem meu estresse e principalmente os momentos de ausência.

Agradeço minha orientadora Prof<sup>a</sup> Dra. Marta Elid Amorim Mateus, a minha coorientadora Prof<sup>a</sup> Ma. Viviane de Jesus Lisboa Aquino e a todos os professores, pelos conhecimentos transmitidos.

Agradeço a meus amigos Rokenedy, Elisângela, Luiz Carlos (Kaká) pelos momentos compartilhados e a boa vontade em me auxiliar todas as vezes que recorria a eles.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização desse curso minha eterna gratidão.

## Resumo

Este trabalho teve o intuito de identificar quais os erros cometidos por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola da Rede Pública Estadual na resolução de questões referentes às operações com frações e quais as problemáticas encontradas por eles na resolução de problemas envolvendo operações com frações. Participaram do estudo 29 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de um colégio estadual do Agreste Sergipano. Para a coleta de dados foram aplicados dois questionários. O primeiro, continha sete questões diretas para os alunos efetuarem operações com frações e o segundo continha seis questões nas quais era necessário interpretar para resolver os problemas, essas questões também envolvendo conhecimentos relacionados às frações e suas operações. Para a análise do primeiro questionário utilizamos a Análise de Erros (Cury 1994), onde quantificamos e descrevemos os tipos de erros cometidos pelos alunos na resolução das questões. Nesta detectamos que as maiores dificuldade enfrentadas estão relacionadas a erros na adição e subtração de frações. Já no segundo questionário que aborda resolução de problemas, utilizamos a análise qualitativa de conteúdo e as fases de resolução de problemas de Polya (1995). Para tanto buscamos identificar em qual fase os alunos apresentam maiores dificuldades na resolução de problemas. Os resultados do segundo questionário comprovam que uma das maiores dificuldades dos alunos é de compreender o problema, o que não permite que estabeleça e execute o plano de resolução.

**Palavras-chave:** Operações com frações; Análise de erros; Resolução de Problemas.

## **Abstract**

This work aimed to identify the errors made by 6th grade elementary school students in a State Public School school in solving issues related to operations with fractions and what problems they encountered in solving problems involving operations with fractions. Participated in the study 29 students of the 6th grade of Elementary School of a state college in Agreste Sergipano. Two questionnaires were used to collect data. The first one contained seven direct questions for students to perform fractional operations, and the second contained six questions that needed to be interpreted to solve problems, including questions related to fractions and their operations. For the analysis of the first questionnaire we used the Error Analysis (Cury 1994), where we quantified and described the types of errors made by the students in solving the questions. In this we detect that the greatest difficulties faced are related to errors in the addition and subtraction of fractions. In the second questionnaire that addresses problem solving, we used the qualitative content analysis and the problem solving phases of Polya (1995). In order to do so, we try to identify in which phase students present greater difficulties in solving problems. The results of the second questionnaire prove that one of the greatest difficulties for students is to understand the problem, which does not allow them to establish and execute the resolution plan.

**Keywords:** Operations with fractions; Error analysis; Troubleshooting.



## Índice de Tabelas

Tabela 1: Desempenho dos estudantes no Questionário I.....	42
Tabela 2: Desempenho dos alunos no Questionário II.....	43
Tabela 3: Comparação entre a questão 1 do Questionário I e a questão 1 do Questionário II.	48
Tabela 4: Comparação entre a Questão 3 do Questionário I e a questão 2 do Questionário II	52
Tabela 5: Comparação entre a questão 4 do Questionário I e a questão 3 do Questionário II.	56
Tabela 6: Comparação entre a questão 5 do Questionário I e a questão 4 do Questionário II.	61
Tabela 7: Comparação entre a questão 6 do Questionário I e a questão 5 do Questionário II.	66
Tabela 8: Comparação entre a Questão 7 do Questionário I e a questão 6 do Questionário II	69
Tabela 9: Classificação dos erros nas etapas de Polya .....	70

## Índice de Figuras

Figura 1: Protocolo do aluno A18 .....	44
Figura 2: Protocolo do aluno A16 .....	45
Figura 3: Protocolo do aluno A29 .....	45
Figura 4: Protocolo do aluno A29 .....	46
Figura 5: Protocolo do aluno A1 .....	46
Figura 6: Protocolo do aluno A27 .....	47
Figura 7: Protocolo do aluno A4 .....	47
Figura 8: Protocolo do aluno A28 .....	48
Figura 9: Protocolo do aluno A13 .....	49
Figura 10: Protocolo do aluno A24 .....	49
Figura 11: Protocolo do aluno A27 .....	49
Figura 12: Protocolo do aluno A5 .....	50
Figura 13: Protocolo do aluno A16 .....	51
Figura 14: Protocolo do aluno A27 .....	51
Figura 15: Protocolo do aluno A1 .....	51
Figura 16: Protocolo do aluno A3 .....	53
Figura 17: Protocolo do aluno A6 .....	53
Figura 18: Protocolo do aluno A25 .....	53
Figura 19: Protocolo do aluno A27 .....	54
Figura 20: Protocolo do aluno A28 .....	55
Figura 21: Protocolo do aluno A21 .....	55
Figura 22: Protocolo do aluno A2 .....	56
Figura 23: Protocolo do aluno A23 .....	57
Figura 24: Protocolo do aluno A14 .....	58
Figura 25: Protocolo do aluno A3 .....	58
Figura 26: Protocolo do aluno A15 .....	59
Figura 27: Protocolo do aluno A1 .....	59
Figura 28: Protocolo do aluno A28 .....	59
Figura 29: Protocolo do aluno A9 .....	60
Figura 30: Protocolo do aluno A29 .....	61

Figura 31: Protocolo do aluno A22 .....	62
Figura 32: Protocolo do aluno A2 .....	62
Figura 33: Protocolo do aluno A18 .....	62
Figura 34: Protocolo do aluno A19 .....	63
Figura 35: Protocolo do aluno A20 .....	63
Figura 36: Protocolo do aluno A5 .....	64
Figura 37: Protocolo do aluno A20 .....	64
Figura 38: Protocolo do aluno A10 .....	65
Figura 39: Protocolo do aluno A9 .....	65
Figura 40: Protocolo do aluno A24 .....	67
Figura 41: Protocolo do aluno A22 .....	67
Figura 42: Protocolo do aluno A7 .....	67
Figura 43: protocolo do aluno A10 .....	68
Figura 44: protocolo do aluno A22 .....	69
Figura 45: protocolo do aluno A29 .....	69

## Sumário

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>16</b>
<b>CONTEÚDOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS AO ESTUDO.....</b>	<b>16</b>
1.1    Máximo Divisor Comum .....	16
1.1.1    Algoritmo de Euclides.....	18
1.1.2    Propriedades do mdc .....	21
1.2    Mínimo Múltiplo Comum .....	22
1.3    Os Números Racionais.....	24
1.3.1    Construção por relação de ordem .....	24
1.3.2    Adição em $\mathbb{Q}$ .....	25
1.3.3    Multiplicação em $\mathbb{Q}$ .....	27
1.3.4    Relação de ordem em $\mathbb{Q}$ .....	28
1.3.5    Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ (os inteiros como particulares números racionais).....	30
<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>32</b>
<b>ASPECTOS DA PESQUISA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>32</b>
2.1    Justificativa .....	32
2.2    Metodologia de Pesquisa .....	32
2.3    Fundamentos Teóricos.....	34
2.3.1    Revisão de Literatura.....	34
2.3.2    Como os livros didáticos abordam o conteúdo de números racionais .....	36
2.3.3    Análise de Erros.....	37
2.4    Metodologia da Resolução de Problemas.....	38
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>41</b>
<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>41</b>
3.1    Procedimento de Análise .....	41
3.2    Desempenho Geral dos Estudantes .....	42
3.3    Desempenho dos estudantes nas questões que envolvem reconhecimento de uma fração ....	43
3.4    Desempenho dos alunos nas questões que envolvem soma de frações com o mesmo denominador.....	48

3.5 Desempenho dos discentes nas questões que envolvem soma de frações com denominadores diferentes .....	52
3.6 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem a subtração de um número inteiro por uma fração .....	57
3.7 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem a multiplicação de um número inteiro por uma fração .....	61
3.8 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem a divisão de um número inteiro por uma fração .....	66
3.9 Análise do Questionário II por Polya .....	70
<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>73</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>76</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>78</b>
<b>APÊNDICE I: Questionário I.....</b>	<b>79</b>
<b>APÊNDICE II: Questionário II .....</b>	<b>81</b>

## INTRODUÇÃO

Sendo a matemática uma ciência presente na vida cotidiana do ser humano, é essencial aprendê-la e principalmente compreendê-la. Sendo assim torna-se necessário adquirir o conhecimento das regras básicas e próprias dessa ciência tão particular, aprimorando-o de acordo com a necessidade de cada um no decorrer da vida. Para isso, é essencial a busca de meios significativos e prazerosos para seu ensino. A utilização de materiais manipuláveis que nos permitam descobrir os maiores erros e as maiores dificuldades do aluno em determinado conteúdo, pode vir a ser um primeiro passo para que isso ocorra.

A nossa escolha pelo tema surgiu durante o primeiro encontro com a orientadora. A partir dessa reunião começamos a elaborar um questionário que busca descobrir quais os erros e quais as maiores dificuldades dos alunos de 6º ano referente ao conteúdo frações e suas operações e problemas. Percebemos que as dificuldades de quase todos os alunos que responderam aos questionários concentram-se na esquematização e organização de problemas, mas mantendo uma grande margem de erros nas questões com operações armadas.

Este trabalho teve como objetivo principal identificar os erros cometidos por alunos do 6º na resolução de questões e problemas referentes ao conteúdo de operações com frações. O método utilizado foi uma pesquisa qualitativa e quantitativa, pois buscamos medir e enumerar determinado evento.

Os objetivos específicos foram: Identificar as dificuldades dos alunos de 6º ano na resolução de questões e problemas referentes as operações com frações, bem como, analisar os erros de pesquisa. Por isso indagamos as seguintes questões de pesquisa:

- Quais os erros cometidos por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola da Rede Pública Estadual na resolução de questões referentes às operações com frações?

- Quais as problemáticas encontradas por eles na resolução de problemas envolvendo operações com frações?

O presente estudo teve como metodologia um estudo qualitativo e quantitativo, com aplicação de questionários com questões abertas sobre o conteúdo de fração, para que os alunos do 6º ano resolvessem individualmente, com intuito de coletar dados para responder nossas indagações a respeito das dificuldades enfrentadas por eles na resolução desses problemas e questões.

Encontram-se no 1º capítulo os conteúdos matemáticos relacionados ao estudo. No qual de início definimos o Algoritmo da divisão de Euclides. Na sequência mostramos a definição de Máximo divisor Comum, em seguida, descrevemos Mínimo Múltiplo Comum. Definimos também O Conjunto dos Números Racionais no qual abordamos: Divisão em  $\mathbb{Z}$ , Construção e relação de ordem em  $\mathbb{Z}$ , Adição em  $\mathbb{Q}$ , multiplicação em  $\mathbb{Q}$ , divisão em  $\mathbb{Q}$ , relação de ordem em  $\mathbb{Q}$ , imersão de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Q}$ .

No 2º capítulo descrevemos os aspectos da pesquisa e a fundamentação teórica. É composto pela justificativa, os objetivos de pesquisa, as questões de pesquisa, a metodologia de pesquisa, a fundamentação teórica e a revisão de literatura, utilizados na realização desse trabalho.

No 3º capítulo relatamos a análise de resultados e a concepção da análise dos erros. Ao término fizemos as considerações finais. Trabalhando essa análise sob a perspectiva da análise de erros (Cury, 1994). A análise foi feita em cada uma das questões dos dois questionários. Além da análise do segundo questionário seguindo as fases da resolução de problemas tratadas por Polya.

Para realizar o trabalho procuramos uma escola regular da Rede Pública Estadual do Agreste de Sergipe, a fim de coletar uma amostra de alunos matriculados no 6º ano do Ensino Fundamental. E através da aplicação de dois questionários constituídos por uma série de perguntas respondidas por escrito e sem a ajuda do aplicador, analisamos o grau de conhecimento que eles possuíam sobre o conteúdo que seria abordado. Após a coleta das informações detectamos algumas das maiores dificuldades dos alunos na resolução dos exercícios referentes ao conteúdo.

A aplicação dos dois questionários ocorreu no dia 24 de fevereiro de 2017 e foram necessários dois horários para sua realização, ou seja, 1h40min. Os questionários foram nomeados em Questionário I e Questionário II. Para a aplicação recebemos o auxílio do professor regente.

Houve também a necessidade de uma pesquisa bibliográfica, que possibilitou uma investigação em livros que apresentam o conteúdo de frações, dando uma ênfase maior à abordagem do conteúdo de frações nos livros didáticos de 6º ano do Ensino Fundamental.

## CAPÍTULO 1

### CONTEÚDOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS AO ESTUDO

Neste capítulo abordamos os conteúdos utilizados nos questionários da pesquisa. De início mostramos a definição de Máximo divisor Comum. Na sequência definimos o Algoritmo de Euclides, em seguida, descrevemos Mínimo Múltiplo Comum. Definimos também O Conjunto dos Números Racionais no qual abordamos: Construção e relação de ordem em  $\mathbb{Z}$ , Adição em  $\mathbb{Q}$ , multiplicação em  $\mathbb{Q}$ , divisão em  $\mathbb{Q}$ , relação de ordem em  $\mathbb{Q}$ , imersão de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Q}$ . Na construção desse capítulo, tomamos como referência os livros: HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT) e Fundamentos de Aritmética/ Higino H. Domingues – São Paulo, Atual, 1991.

#### 1.1 Máximo Divisor Comum

Sejam dados dois inteiros  $a$  e  $b$ , distintos ou não. Um número inteiro  $d$  será dito um divisor comum de  $a$  e  $b$  se  $a$  e  $d|a$  e  $d|b$ .

Exemplo: os números  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  são os divisores comuns de 16 e 24.

**Definição 1:** Diremos que um número  $d \geq 0$  é um máximo divisor comum (mdc) de  $a$  e  $b$ , se possuir as seguintes propriedades:

- i)  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ ,
- ii)  $d$  é divisível por todo divisor comum de  $a$  e  $b$ .

A condição ii) pode ser reenunciada como segue:

- ii') Se  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , então  $c|d$ .

Isso implica que, se  $d$  e  $d'$  são dois mdc de um mesmo par de números, então,  $d|d'$  e  $d'|d$ , o que, juntamente com as condições  $d \geq 0$  e  $d' \geq 0$ , implicam que  $d = d'$ . Ou seja, o mdc de dois números, quando existe é único.

O mdc de  $a$  e  $b$ , quando existir, será denotado por  $(a, b)$ .

Como o mdc de  $a$  e  $b$  não depende da ordem em que  $a$  e  $b$  são tomados, temos que:  
 $(a, b) = (b, a)$ .



Em alguns casos particulares, é fácil verificar a existência do mdc. Por exemplo, se  $a$  é um número inteiro, tem-se claramente que  $(0, a) = |a|$ ,  $(1, a) = 1$  e que  $(a, a) = |a|$ .

Mais ainda, para todo  $b \in \mathbb{Z}$ , temos que:  $a|b \Leftrightarrow (a, b) = |a|$ .

De fato, se  $a|b$ , temos que  $|a|$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , e se  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , então  $c$  divide  $|a|$ , o que mostra que  $|a| = (a, b)$ . Reciprocamente, se  $(a, b) = |a|$ , segue que  $|a|$  divide  $b$ , logo  $a|b$ .

Como todo número inteiro divide 0, o mdc de  $a$  e  $b$ , onde  $a = b = 0$ , é 0, pois esse é um divisor comum de  $a$  e  $b$  e é o único número divisível por todos os divisores de 0. Reciprocamente, se o mdc de  $a$  e  $b$  é 0, então 0 divide  $a$  e divide  $b$ , maso único número divisível por 0 é o próprio 0, logo  $a = b = 0$ .

A demonstração da existência do mdc de qualquer par de números inteiros, ambos não nulos, é bem mais sutil.

Seja  $d > 0$  um mdc de  $a$  e  $b$ , não nulos, supondo que exista, e seja  $c$  um divisor comum qualquer desses números, então  $|c|$  divide  $d$  e, portanto,  $c \leq |c| \leq d$ . Isso nos mostra que o máximo divisor comum de dois números, não ambos nulos, quando existe, é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Poder-se-ia, como se faz usualmente no ensino fundamental, definir o máximo divisor comum de dois números  $a$  e  $b$ , não ambos nulos, como sendo o maior elemento do conjunto de todos os divisores comuns de tais números. Essa definição não garantiria automaticamente a validade da propriedade ii) da definição de mdc, o que não é vantajoso, pois é essa propriedade que possibilita provar os resultados subsequentes, e não o fato de o mdc se o maior dos divisores comuns.

Observe que dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se existir o mdc  $(a, b)$  de  $a$  e  $b$ , então  $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$ .

Assim, para efeito do cálculo do mdc de dois números, podemos sempre supô-los não negativos.

**Lema 1:** sejam  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ . Se existe  $(a, b - na)$ , então,  $(a, b)$  existe e  $(a, b) = (a, b - na)$ .

Demonstração: Seja  $d = (a, b - na)$ . Como  $d|a$  e  $d|(b - na)$ , segue que  $d$  divide  $b = b - na + na$ . Logo,  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ . Suponha agora que  $c$  seja um divisor comum de  $a$  e  $b$ . Logo,  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b - na$  e, portanto,  $c|d$ . Isso prova que  $d = (a, b)$ .

### 1.1.1 Algoritmo de Euclides

Dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , podemos supor  $b \leq a$ . Se  $b = 1$  ou  $b = a$ , ou ainda  $b|a$ , já vimos que  $(a, b) = a$ . Suponhamos, então, que  $1 < b < a$  e que  $b \nmid a$ . Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever:  $a = bq_1 + r_1$ , com  $0 < r_1 < b$ .

Temos duas possibilidades:

a)  $r_1|b$ . Em tal caso,  $r_1 = (b, r_1)$  e pelo Lema  $(a, b) = (a, b - na)$ , temos que:

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1b) = (b, a) = (a, b),$$

e o algoritmo termina.

b)  $r_1 \nmid b$ . Em tal caso, podemos efetuar a divisão de  $b$  por  $r_1$ , obtendo:

$$b = r_1q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente temos duas possibilidades:

a')  $r_2|r_1$ . Nesse caso,  $r_2 = (r_1, r_2)$  e novamente pelo Lema  $(a, b) = (a, b - na)$ ,

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2r_1) = (r_1, b) = (a - q_1b, b) = (a, b),$$

e paramos, pois termina o algoritmo.

b')  $r_2 \nmid r_1$ . Nesse caso, podemos efetuar a divisão de  $r_1$  por  $r_2$ , obtendo:

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Continuamos esse procedimento até que pare. Isso sempre ocorre, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais  $b > r_1 > r_2 > \dots$  que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum  $n$ , temos que  $r_n|r_{n-1}$ , o que implica que  $(a, b) = r_n$ .

O algoritmo acima pode ser sintetizado e realizado na prática como mostramos a seguir.

Inicialmente, efetuamos a divisão  $a = bq_1 + r_1$  e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama:

	$q_1$	
$a$	$b$	
$r_1$		

A seguir, continuamos efetuando a divisão  $b = r_1q_2 + r_2$  e colocamos os números envolvidos no diagrama:

	$q_1$	$q_2$	
$a$	$b$	$r_1$	
$r_1$	$r_2$		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos:

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	...	$q_{n-1}$	$q_n$	$q_{n+1}$
$a$	$b$	$r_1$	$r_2$	...	$r_{n-2}$	$r_{n-1}$	$r_n = (a, b)$
$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	...	$r_n$		

**Exemplo 1:** Calculemos o mdc de 840 e 242

	3	2	8	7
840	242	114	14	2
114	14	2		

Observe que, no exemplo acima, o Algoritmo de Euclides fornece-nos:

$$2 = 114 - 8 \cdot 14$$

$$14 = 242 - 2 \cdot 114$$

$$114 = 840 - 3 \cdot 242$$

Donde segue que:

$$2 = 114 - (242 - 2 \cdot 114) \cdot 8 = 114 - 8 \cdot 242 + 16 \cdot 114 = 17 \cdot 114 - 8 \cdot 242 =$$

$$17 \cdot (840 - 3 \cdot 242) - 8 \cdot 242 = 17 \cdot 840 - 51 \cdot 242 - 8 \cdot 242 = 17 \cdot 840 - 59 \cdot 242$$

Temos, então, que:

$$(840, 242) = 17 \cdot 840 + (-59) \cdot 242$$

Note que conseguimos, através do Algoritmo de Euclides de trás para frente, escrever  $2 = (242, 840)$  como múltiplo de 242 mais um múltiplo de 840.

**Exemplo 2:** Determinar  $\text{mdc}(-340, 280)$ .

- Dividindo 360 por 280 obtém 1 de quociente e 60 de resto

	1			
340	280			
60				

-Dividindo 280 por 60 obtém 4 de quociente e 40 de resto

	1	4		
340	280	60		
60	40			

- Dividindo 60 por 40 obtém 1 de quociente e 20 de resto

	1	4	1	
340	280	60	40	
60	40	20		

- Dividindo 40 por 20 obtém 2 de quociente e 0 de resto

	1	4	1	2
340	280	60	40	20
60	40	20	0	

Como o resto é 0 (zero), o último divisor é o mdc. Portanto:

$$\text{mdc}(-340, 280) = \text{mdc}(340, 280) = 20$$

Como já vimos:

$$340 = 280 \cdot 1 + 60$$

$$280 = 60 \cdot 4 + 40$$

$$60 = 40 \cdot 1 + 20$$

$$40 = 20 \cdot 2 + 0$$

Onde destacamos os elementos principais do processo. Como  $\text{mdc}(340, 280) = 20$ , torna-se a igualdade onde o resto é 20 e faz-se:

$$20 = 60 - 40 \cdot 1$$

Como  $40 = 280 - 60 \cdot 4$ , então:

$$20 = 60 - (280 - 60 \cdot 4) \cdot 1 = 280 \cdot (-1) + 60 \cdot 5$$

Como  $60 = 340 - 280 \cdot 1$ , então:

$$20 = 280 \cdot (-1) + (340 - 280 \cdot 1) \cdot 5$$

$$20 = 340 \cdot (5) + 280 \cdot (-6)$$

### 1.1.2 Propriedades do mdc

Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Definimos o conjunto

$$I(a, b) = \{ xa + yb; x, y \in \mathbb{Z} \}.$$

Note que se  $a$  e  $b$  não são simultaneamente nulos, então  $I(a, b) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ .

De fato, temos que  $a^2 + b^2 = a \cdot a + b \cdot b \in I(a, b) \cap \mathbb{N}$ .

A seguir utilizaremos a notação

$$d\mathbb{Z} = \{ Id; I \in \mathbb{Z} \}.$$

**Teorema 1:** Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , não ambos nulos. Se  $d = \min I(a, b) \cap \mathbb{N}$ , então

i)  $d$  é o mdc de  $a$  e  $b$ ; e

ii)  $I(a, b) = d\mathbb{Z}$

Demonstração no livro texto Livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), páginas 94 e 95.

**Corolário 1:** Quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , não ambos nulos, e  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $(na, nb) = n(a, b)$ .

Demonstração: Note inicialmente que

$$I(na, nb) = nI(a, b) \quad (= \{nz; z \in I(a, b)\})$$

Agora, o resultado segue-se do teorema e do fato de que

$$\min(nI(a, b) \cap \mathbb{N}) = n \min(I(a, b) \cap \mathbb{N}).$$

**Corolário 2:** Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , não nulos, tem-se que

$$\left( \frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)} \right) = 1.$$

Demonstração: Pelo corolário 1, temos que

$$(a, b) \left( \frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)} \right) = \left( (a, b) \frac{a}{(a, b)}, (a, b) \frac{b}{(a, b)} \right) = (a, b)$$

o que prova o resultado.

Dois números inteiros  $a$  e  $b$  serão ditos primos entre si, ou coprimos, se  $(a, b) = 1$ ; ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1.

**Proposição 1:** Dois números inteiros  $a$  e  $b$  são primos entre si, e somente se, existem números inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $ma + nb = 1$ .

Demonstração: Livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), página 96.

**Teorema 2:** (LEMA DE GAUSS). Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números inteiros. Se  $a \mid bc$  e  $(a, b) = 1$ , então  $a \mid c$ .

Demonstração: Livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), página 96.

**Corolário 3:** Dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , com  $b$  e  $c$  não ambos nulos, temos que

$$b \mid a \text{ e } c \mid a \Leftrightarrow \frac{bc}{(b,c)} \mid a.$$

Demonstração: Livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), página 97.

## 1.2 Mínimo Múltiplo Comum

Diremos que um número inteiro é um múltiplo comum de dois números inteiros dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Em qualquer caso os números  $ab$  e  $0$  são sempre múltiplos de  $a$  e  $b$ .

Diremos que um número inteiro  $m \geq 0$  é um mínimo múltiplo comum (mmc) dos números inteiros  $a$  e  $b$ , se possuir as seguintes propriedades:

- (i)  $m$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , e
- (ii) se  $c$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , então  $m \mid c$ .

Por exemplo, 12 é um múltiplo comum de 2 e 3, mas não é um mmc desses números. O número 6 é um mmc de 2 e 3.

Se  $m$  e  $m'$  são dois mínimos múltiplos comuns de  $a$  e  $b$ , então, do item (ii) da definição acima, temos que  $m \mid m'$  e  $m' \mid m$ . Como  $m$  e  $m'$  são números inteiros não negativos, temos que  $m = m'$ , o que mostra que o mínimo múltiplo comum, se existe, é único.

Por outro lado, se  $m$  é o mmc de  $a$  e  $b$  e  $c$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , então  $m \mid c$ . Portanto, se  $c$  é positivo, temos que  $m \leq c$ , mostrando que  $m$  é o menor dos múltiplos comuns positivos de  $a$  e  $b$ .

O mínimo múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , se existe, é denotado por  $[a, b]$ . Caso exista  $[a, b]$  é fácil mostrar que  $[-a, b] = [a, -b] = [-a, -b] = [a, b]$ .

Assim, para efeito de cálculo do mmc de dois números, podemos sempre supô-los não negativos.

È também fácil verificar que  $[a, b] = 0$  se, e somente se,  $a = 0$  ou  $b = 0$ . De fato, se  $[a, b] = 0$ , então 0 divide  $ab$ , que é múltiplo de  $a$  e de  $b$ , logo  $ab = 0$  e, portanto,  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Reciprocamente, se  $a = 0$  ou  $b = 0$ , então 0 é o único múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , logo  $[a, b] = 0$ .

**Proposição 2:** Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , temos que  $[a, b]$  existe e  $[a, b](a, b) = |ab|$ .

Demonstração: Se  $a = 0$  ou  $b = 0$ , a igualdade acima é trivialmente satisfeita. È também fácil verificar que a igualdade é verificada para  $a$  e  $b$  se, e somente se, ela é verificada para  $\pm a$  e  $\pm b$ . Então, sem perda de generalidade, podemos supor  $a, b \in \mathbb{N}$ . Ponhamos  $m = \frac{ab}{(a,b)}$ . Como  $m = a \frac{ab}{(a,b)} = b \frac{ab}{(a,b)}$ , temos que  $a|m$  e  $b|m$ . Portanto,  $m$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ .

Seja  $c$  um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ ;  $c = na = n'b$ . Segue daí que  $n \frac{a}{(a,b)} = n' \frac{b}{(a,b)}$ .

Como  $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$ , daí  $\frac{a}{(a,b)}$  e  $\frac{b}{(a,b)}$  são primos entre si, segue-se, pelo Lema de Gaus que  $\frac{a}{(a,b)}$  divide  $n'$ , e, portanto,  $m = \frac{a}{(a,b)}b$  divide  $n'b$  que, é igual a  $c$ .

Em virtude da proposição acima, o mínimo múltiplo comum de dois inteiros ambos não nulos pode ser encontrado por meio do Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc, pois basta dividir o módulo do produto dos dois números pelo mdc.

$$\text{Exemplo 1: } mmc[340,280] = \frac{340 \cdot 280}{mdc(340,280)} = \frac{95200}{20} = 4760$$

$$\text{Exemplo 2: } mmc[12,16] = \frac{12 \cdot 16}{mdc(12,16)} = \frac{192}{4} = 48$$

### 1.3 Os Números Racionais

#### 1.3.1 Construção por relação de ordem

Seja  $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z} | m \neq 0\}$  e consideremos sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$  a relação  $\sim$  definida por

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ se, e somente se, } mq = np$$

Para  $\sim$  valem as três propriedades que caracterizam uma relação de equivalência, ou seja:

i  $(m, n) \sim (m, n)$ , para todo  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  (reflexiva)

ii  $(m, n) \sim (p, q) \rightarrow (p, q) \sim (m, n)$  (simétrica)

iii  $(m, n) \sim (p, q)$  e  $(p, q) \sim (r, s) \rightarrow (m, n) \sim (r, s)$  (transitiva)

Verifiquemos iii já que i e ii decorrem diretamente da definição de  $\sim$ .

Por hipótese:  $mq = np$  e  $ps = qr$ . Multiplicando a primeira dessas igualdades por  $s$  e a segunda por  $n$ , resulta:  $mqs = nps$  e  $nps = nqr$ . Daí,  $mqs = nqr$  e portanto, cancelando  $q$ , o que é possível pois  $q \in \mathbb{Z}^*$ , obtém-se  $ms = nr$ .

Donde  $(m, n) \sim (r, s)$ .

Logo a relação  $\sim$  determina sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  uma partição em classes de equivalência. Para cada um par  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicada por  $\frac{m}{n}$ . Ou seja:

$$\frac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (x, y) \sim (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | nx = my\}$$

Por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | 5x = 2y\} = \{(2, 5); (-2, -5); (4, 10); (-4, -10); \dots\}$$

Devido à propriedade reflexiva, é claro que  $(m, n) \in \frac{m}{n}$ , para todo  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , além disso, como

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \leftrightarrow (m, n) \sim (r, s)$$

(resultado da teoria das relações de equivalência), então.

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \leftrightarrow ms = nr$$

Por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{-2}{-5} = \frac{4}{10} = \frac{-4}{-10} = \dots$$



O conjunto quociente de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  por  $\sim$ , ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por  $\sim$  sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , será designado por  $\mathbb{Q}$ . Logo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Assim, cada  $a \in \mathbb{Q}$  admite infinitas representações  $\frac{m}{n}$  ( $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}^*$ ). Em cada uma delas  $m$  é o numerador e  $n$  o denominador. Dois elementos  $a$  e  $b \in \mathbb{Q}$  sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, se  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{r}{s}$ , então:

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \text{ e } \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}.$$

$$\text{Pois } m(ns) = n(ms) \text{ e } r(ns) = s(nr).$$

### 1.3.2 Adição em $\mathbb{Q}$

**Definição 2:** Sejam  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{r}{s}$  elementos de  $\mathbb{Q}$ . Chama-se soma de  $a$  com  $b$  e indica-se por  $a + b$  o elemento de  $\mathbb{Q}$  definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + nr}{ns}$$

Mostremos que a soma  $a + b$  independe dos pares ordenados escolhidos para definir  $a$  e  $b$ . de fato,  $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ , e  $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ , então

$$mn' = nm' \text{ e } rs' = sr'$$

Multiplicando a primeira dessas igualdades por  $ss'$  e a segunda por  $nn'$  e somando membro a membro as relações obtidas

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n',$$

ou seja,

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

o que garante

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}.$$

Portanto a correspondência

$$(a, b) \rightarrow a + b,$$

Conforme a definição 2, é uma aplicação e, portanto, trata-se de uma operação sobre  $\mathbb{Q}$ , à qual chamamos adição em  $\mathbb{Q}$ .

Para a adição em  $\mathbb{Q}$  valem as seguintes propriedades:

$$a_1 (a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b \text{ e } c \in \mathbb{Q} \text{ (associativa)}$$

$$a_2 \quad a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ (comutativa)}$$

$a_3$  Existe elemento neutro: é a classe de equivalência  $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \dots$ , que indicamos por 0 apenas. De fato

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m \cdot 1 + 0 \cdot n}{n \cdot 1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

Para todo  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ .

$a_4$  Todo  $a \in \mathbb{Q}$  não nulo admite simétrico aditivo (oposto) em  $\mathbb{Q}$ : se  $a = \frac{m}{n}$ , então  $-a = \frac{-m}{n}$ , pois

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn + (-m)n}{mn} = \frac{0}{mn} = 0$$

Usaremos a notação  $\mathbb{Q}^* = \{a \in \mathbb{Q} | a \neq 0\}$

**Definição 3:** Se  $a, b \in \mathbb{Q}$ , denomina-se diferença entre a e b, e indica-se por  $a - b$ , o seguinte elemento de  $\mathbb{Q}$ :

$$a - b = a + (-b)$$

Como  $(-b) \in \mathbb{Q}$ , para todo  $b \in \mathbb{Q}$ , então

$$(a, b) \rightarrow a - b$$

É uma operação sobre  $\mathbb{Q}$ , à qual chamamos subtração em  $\mathbb{Q}$ .

Tal como ocorre em  $\mathbb{Z}$ , valem em  $\mathbb{Q}$  as seguintes propriedades, envolvendo a ideia de oposto e de subtração:

- $-(a + b) = -a - b$

Exemplo:  $-\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) = -\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$

- $(a + b) + (-b) = a$

Exemplo:  $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3}$

- $a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$  o mesmo usado para

Para demonstrá-las, o procedimento pode ser  $\mathbb{Z}$ .

### 1.3.3 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

**Definição 4:** Chamamos produto de  $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  por  $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  o elemento

$$ab = a \cdot b = \frac{mr}{ns} \in \mathbb{Q}$$

O qual, pode-se mostrar tal como foi feito para a soma, não depende das particulares representações tomadas para a e b.

A multiplicação em  $\mathbb{Q}$  é a operação definida por

$$(a, b) \rightarrow ab$$

para quaisquer  $a$  e  $b \in \mathbb{Q}$ .

Valem as seguintes propriedades:

$$p_1 : a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ (associativa)}$$

$$p_2 : ab = ba, \forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ (comutativa)}$$

$$p_3 : \text{Existe elemento neutro: é a classe } \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots$$

Que indicamos simplesmente por 1. De fato:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

Para todo  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ .

$p_4$  : Todo  $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ , admite simétrico multiplicativo (inverso): se

$$a = \frac{m}{n}$$

Então  $m \neq 0$  e daí  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  e portanto

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{m \cdot n}{n \cdot m} = 1$$

Indicando por  $a^{-1}$ , como é praxe, inverso de a, então,

$$a = \frac{m}{n}, a \neq 0 \rightarrow a^{-1} = \frac{n}{m}$$

Disso decorre também que se  $a \neq 0$ ;

$$(a^{-1})^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n} = a$$

Outro fato importante no que se refere aos inversos é que se a e b são elementos não nulos:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

De fato, como

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$$

Então efetivamente  $a^{-1}b^{-1}$  é o inverso de  $ab$ .

A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$$

Convém ainda destacar os seguintes resultados para a multiplicação em  $\mathbb{Q}$ :

- $a(b - c) = ab - ac$
- $a(0) = 0$
- $a(-b) = (-ab) = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$

**Definição 5:** A operação de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$  em  $\mathbb{Q}$  definida por:

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

O elemento  $ab^{-1}$  é chamado quociente de  $a$  por  $b$  e pode ser indicado por  $a : b$ .

Por exemplo, se  $a = \frac{2}{3}$  e  $b = \frac{1}{5}$ , então:

$$a : b = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

Para a divisão em  $\mathbb{Q}$  vale a seguinte propriedade: se  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  e  $c \neq 0$ , então:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

De fato, se  $c = \frac{r}{s}$  ( $r, s \in \mathbb{Z}^*$ ), então:

$$(a + b) : c = (a + b) \cdot \frac{s}{r} = a \cdot \frac{s}{r} + b \cdot \frac{s}{r} = a : \frac{r}{s} + b : \frac{r}{s} = a : c + b : c.$$

### 1.3.4 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Seja  $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ . Como  $a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n}$

Pois  $m(-n) = n(-m)$ , então sempre podemos considerar, para todo  $a \in \mathbb{Q}$ , uma representação em que o denominador seja maior que zero (em  $\mathbb{Z}$ ).

Por exemplo:  $\frac{8}{-3} = \frac{-8}{3}$  e  $\frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$

**Definição 6:** Sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $\mathbb{Q}$  e tomemos, para cada um deles, uma representação  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{r}{s}$  em que o denominador seja estritamente positivo. Nessas condições, diz-se que  $a$  é menor que ou igual a  $b$ , e escreve-se  $a \leq b$ , se  $ms \leq nr$

(obviamente esta última relação é considerada em  $\mathbb{Z}$ ). Equivalentemente pode-se dizer que  $b$  é maior que ou igual a  $a$  e anotar  $b \geq a$ . Com as mesmas hipóteses, se  $ms < nr$ , diz-se que  $a$  é menor que  $b$  (notação:  $a < b$ ) ou que  $b$  é maior que  $a$  (notação:  $b > a$ ).

Por exemplo:  $\frac{-8}{3} < \frac{3}{4}$ , porque  $-32 < 9$  e  $\frac{7}{6} > \frac{3}{5}$  porque  $35 > 18$

Um elemento  $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  onde  $n > 0$ , se diz positivo se  $a \geq 0$ . Lembrando que  $0 = \frac{0}{1}$ , então:  $a \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m}{n} \geq \frac{0}{1} \Leftrightarrow m \geq 0$

Quando  $a > 0$ , o que equivale (supondo como sempre  $n > 0$ ) a  $m > 0$ ,  $a$  se diz estritamente positivo. Se  $a < 0$  ( $\Leftrightarrow m < 0$  se  $n > 0$ ), então o elemento  $a$  é estritamente negativo.

Mostraremos a seguir que  $\leq$ , conforme definição 5, é uma relação de ordem total sobre  $\mathbb{Q}$ , compatível com a adição e a multiplicação definidas em 3.1 e 3.2. Para tanto admitiremos que todos os denominadores que intervierem nos enunciados das propriedades sejam inteiros estritamente positivos.

$$O_1 \quad \frac{m}{n} \leq \frac{m}{n} \quad (\text{reflexiva})$$

Evidente, pois  $mn \leq nm$

$$O_2 \quad \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \text{ e } \frac{r}{s} \leq \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s} \quad (\text{anti-simétrica})$$

Como  $ms \leq nr$  e  $rn \leq sm$  (em  $\mathbb{Z}$ ), então  $ms = nr$ . Logo:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$$

$$O_3 \quad \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \text{ e } \frac{r}{s} \leq \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad (\text{transitiva})$$

De fato, como  $ms \leq nr$  e  $rq \leq sp$ , multiplicando a primeira dessas relações por  $q > 0$  e a segunda por  $n > 0$ :

$$msq \leq nrq \text{ e } rqn \leq spn$$

Daí, usando a transitividade de  $\leq$  em  $\mathbb{Z}$ ,

$$msq \leq spn$$

E, uma vez que  $s > 0$ , pode-se concluir que

$$mq \leq pn$$

Logo:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$$

$$O_4 \quad \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \text{ ou } \frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$$

Evidente, pois em  $\mathbb{Z}$ :  $ms \leq nr$  ou  $nr \leq ms$ .

**Nota:** As propriedades  $O_1$ -a  $O_4$  garantem que  $\leq$ , conforme definição 5, é uma relação de ordem total sobre  $\mathbb{Q}$ .

$$O_5 \quad \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} + \frac{p}{q}, \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (\leq \text{ é compatível com a adição de } \mathbb{Q}).$$

De fato, como hipótese  $ms \leq nr$ , então  $msq^2 \leq nrq^2$ , e daí:

$$msq^2 + pnsq \leq nrq^2 + pnsq$$

Ou seja:

$$(mq + pn)sq \leq nq(rq + ps)$$

Donde:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \leq \frac{rq + ps}{sq} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$$

$$O_6 \quad \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \text{ e } 0 \leq \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} (\leq \text{ é compatível com a multiplicação de } \mathbb{Q}).$$

Por hipótese,  $ms \leq nr$  e  $p \geq 0$  (além de  $n, s, q > 0$ ). Assim  $pq \geq 0$  e portanto

$$(ms)(pq) \leq (nr)(pq)$$

ou

$$(mp)(sq) \leq (nq)(rp)$$

Onde  $sq > 0$  e  $nq > 0$ . Logo:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \leq \frac{rp}{sq} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$$

Portanto  $\mathbb{Q}$  é um corpo ordenado.

### 1.3.5 Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ (os inteiros como particulares números racionais)

Consideremos o número  $2 \in \mathbb{Z}$ , e o elemento:

$$\frac{8}{4} = \{(2,1); (-2,-1); (4,2); (-4,-2); \dots\}$$

Por exemplo. É de se esperar, tendo em vista o objetivo da construção de  $\mathbb{Q}$ , que tais elementos possam ser identificados. Mas o que justificaria essa identificação se se trata de coisas que num primeiro exame se mostram muito diferente?

Seja  $f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Q}$  definida por:

$$f(m) = \frac{m}{1}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Para essa aplicação vale o seguinte:

- $f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m = n$  e, portanto,  $f$  é injetora.

- Para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$  :

$$f(m+n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n)$$

- Para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

$$f(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = f(m)f(n)$$

- Se  $m \leq n$ , então:

$$f(m) = \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} = f(n)$$

Essas propriedades de  $f$  significam que a imagem de  $\mathbb{Z}$  por  $f$ , ou seja,

$$Im(f) = \left\{ \frac{m}{1} / m \in \mathbb{Z} \right\}$$

pode ser vista como uma cópia de  $\mathbb{Z}$ . Devido a esse fato cada inteiro  $m$  se confunde com sua imagem  $\frac{m}{1}$  (ou seja  $m = \frac{m}{1}$ ) e portanto  $\mathbb{Z}$  passa a ser identificado com  $Im(f)$ . Como  $Im(f) \subset \mathbb{Q}$ , então  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Levando em conta que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ , pode-se concluir que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . A função  $f$  é chamada função imersão de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Q}$ .

Isso posto, se  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ , então:

$$m:n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Por outro lado, dado um número racional  $\frac{m}{n}$ , então

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m:n.$$

Por isso chamamos cada representação  $\frac{m}{n}$  ( $m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0$ ) de um número racional dado de fração ordinária de numerador  $m$  e denominador  $n$ . Se o  $mdc(m, n) = 1$ , a fração se diz irredutível.

Ademais, se  $m$  é múltiplo de  $n$ , digamos  $m = nr$  ( $r \in \mathbb{Z}$ ), então:

$$m:n = \frac{m}{n} = \frac{nr}{n} = \frac{r}{1} = r$$

Ou seja, a divisão de um inteiro  $m$  por um inteiro  $n \neq 0$  não só é sempre possível em  $\mathbb{Q}$  como, quando  $m$  é um múltiplo de  $n$ , o resultado coincide com o que se teria em  $\mathbb{Z}$ .

O conjunto  $\mathbb{Q}$ , construído de maneira como fizemos, com a adição, a multiplicação e a relação de ordem que definimos, é o conjunto dos números racionais e seus elementos, os números racionais, como já havíamos antecipado ao início deste parágrafo.

## CAPÍTULO 2

### ASPECTOS DA PESQUISA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos os objetivos de pesquisa, as questões de pesquisa, a metodologia e a fundamentação teórica utilizados na realização desse trabalho.

#### **2.1 Justificativa**

Decorridos mais de doze anos como professor de matemática da rede pública estadual e da rede particular, já me deparei com diversas situações de dificuldades de aluno, referente às operações básicas da matemática e principalmente à resolução de problemas. Seja por falta de uma boa base de conteúdos, pela metodologia dos professores, ou por desinteresse do próprio aluno. Mas, independente do motivo, é real e preocupante as dificuldades enfrentadas por boa parte dos discentes. E em decorrência dessas dificuldades, os conteúdos específicos tornam-se ainda mais complexos para esses estudantes.

Nas operações com Números Fracionários, percebemos que boa parte dos alunos cometem erros pelo fato de não saberem interpretar ou mesmo realizar operações. Sempre que trabalhamos com operações envolvendo frações, as dificuldades enfrentadas por eles são ainda maiores, principalmente na adição de frações com denominadores diferentes.

Por esse motivo, e por trabalhar com alunos com esse perfil, é que me encorajei a fazer uma pesquisa para tentar identificar quais são os erros mais comuns, no intuito de futuramente buscar maneiras de amenizar ou até mesmo solucionar essas dificuldades.

#### **2.2 Metodologia de Pesquisa**

Este trabalho teve como objetivo principal analisar os erros cometidos por alunos do 6º na resolução de questões e situações problema referentes ao conteúdo de operações com frações. Deste objetivo, derivam-se outros, a saber, analisar as dificuldades dos alunos na resolução de questões armadas e situações problema envolvendo frações, bem como, analisar os erros cometidos pelos participantes da pesquisa que nos servirão como apoio para futuramente encontramos formas de resolver ou diminuir essas dificuldades.

Buscando alcançar estes objetivos, formulamos as seguintes questões de pesquisa:



- Quais os erros cometidos por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola da Rede Pública Estadual na resolução de questões referentes às operações com frações?

- Quais as problemáticas encontradas por eles na resolução de problemas envolvendo operações com frações?

A pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo de seu desenvolvimento, enquanto que, a pesquisa quantitativa busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, emprega instrumental estatístico para análise de dados. Fizemos também uma pesquisa bibliográfica em livros que contenham o conteúdo de frações, que nos possibilitou uma investigação mais detalhada do conteúdo, dando-nos uma maior bagagem de informações sobre como trabalhar o conteúdo.

Para iniciar o trabalho buscamos junto a uma escola regular uma turma de alunos matriculados no 6º ano do Ensino Fundamental e aplicamos dois questionários respondidos por escrito e sem a ajuda do aplicador, que constituíram os instrumentos para a coleta de dados. A aplicação dos dois questionários ocorreu no dia 24 de fevereiro de 2017 e foram necessários dois horários para sua realização, ou seja, 1h40min. Os mesmos foram nomeados em Questionário I e Questionário II. Para a aplicação contamos com o auxílio do professor regente.

Participaram da pesquisa 29 alunos de uma turma de 6º ano sendo que todos se disponibilizaram voluntariamente a participar. Dos 29 alunos, apenas três deixaram os dois questionários totalmente em branco. Os questionários abordam os seguintes conteúdos: representação de uma fração, simplificação de uma fração, adição de frações com o mesmo denominador e denominadores diferentes, subtração de um número inteiro por uma fração, multiplicação de um número inteiro por uma fração e divisão de um número inteiro por uma fração. Sendo que o questionário II trabalha esses conteúdos com questões em forma de problemas.

No momento de fazer a análise dos dados, procuramos preservar a identidade de cada aluno e, por isso, antecedendo a análise de dados, todos os protocolos foram identificados pela letra A (aluno) e um número. Dessa forma os 29 alunos participantes da pesquisa foram identificados de A1 a A29 à medida que os seus protocolos iam sendo analisados, sem nenhum critério específico de ordenação.

Foi feito inicialmente a análise dos dados do Questionário I, segundo categorias de Cury (1994). Da mesma forma foi feito com o Questionário II, mas utilizando as quatro fases de Polya (1995). Fases essas que serão descritas posteriormente.

## 2.3 Fundamentos Teóricos

São várias as dificuldades encontradas por alunos e professores no processo de ensino aprendizagem da matemática. Muitas vezes os alunos não compreendem a matemática que lhe é ensinada. Dessa forma, se faz necessário que o professor inove o ensino, utilizando de métodos que despertem o interesse dos alunos, buscando resultados melhores.

Para isso o professor é amparado por documentos que regem a educação e os auxiliam na tarefa de elaborar e organizar a instrução de maneira a fornecer o aprendizado dos seus alunos. Alguns deles são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Currículo Básico Comum (CBC) que tem como um dos objetos criar estratégias de ensino-aprendizagem com intuito de dar assistência ao professor com novos recursos que podem ser aplicados em sala de aula, podendo dessa forma, despertar o interesse dos alunos em aprender o conteúdo abordado. Tais estratégias podem ocorrer com: situações problemas vivenciadas no cotidiano do aluno, materiais manipuláveis, utilização correta da calculadora, jogos, entre outros. Dentre as finalidades dos PCN, destacamos a de “fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área de conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros”. (BRASIL, 1997, p. 15).

Sendo os números racionais introduzidos no 5º ano e sendo aprimorado até o 9º ano do ensino fundamental o professor deve preparar o aluno para cada aprofundamento do conteúdo, estando ciente que a cada série que se passa aumenta o grau de dificuldade e assimilação do conteúdo pelos alunos.

### 2.3.1 Revisão de Literatura

A respeito do ensino de frações, é de fundamental importância abordar alguns aspectos dos números fracionários, tais como o seu conceito, seus diferentes significados, suas formas de representação e demais elementos a eles relacionados. A exemplo dos termos das frações, da noção de equivalência, da ação de comparação de frações, da classificação e das operações com números fracionários, além da própria história do desenvolvimento das frações, como dos demais conteúdos matemáticos, conforme sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN:

Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos frequente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica,

entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Também nas situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão, uma vez que na forma decimal é preciso fazer aproximações. (BRASIL, 1998 Pág. 103)

Os PCN (1997) recomendam que, para abordar o estudo dos números racionais, deve-se recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas, de forma a possibilitar bons contextos para o seu ensino. Nesse sentido, pode-se discutir com os alunos, por exemplo, como os egípcios já os usavam, por volta de 2000 a. C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias, com exceção de  $\frac{2}{3}$ . Assim, em uma situação na qual precisavam dividir, por exemplo, 19 por 8, eles utilizavam um procedimento que, na nossa notação, pode ser expresso por:  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ . A sugestão dos PCN é que esse tipo de problema seja explorado e discutido com os alunos, assim como, por exemplo, seja solicitado aos alunos que mostrem que a soma acima indicada é  $\frac{19}{8}$ .

As recomendações feitas pelos PCN propõem uma inovação para o ensino de fração, especialmente ao analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Essa inovação é trazida pela ênfase dada pelos Parâmetros Curriculares ao ensino de fração baseado na resolução de situações-problema, levando-se em consideração dois aspectos fundamentais: os significados que a fração poderá assumir em cada situação e as diferentes formas para sua representação.

Patrono (2011), em sua dissertação de mestrado, intitulada “A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental: a análise de uma proposta de ensino”, identifica que as maiores dificuldades dos alunos de 6º ano encontram-se nas operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Já Vasconcelos (2007), em sua dissertação “A construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental”, tem como objetivo comparar as estratégias cognitivas utilizadas por alunos da 4ª à 8ª séries (5º ao 9º anos) do Ensino Fundamental com bom desempenho na matemática com as estratégias cognitivas utilizadas por alunos das mesmas séries que tenham baixo desempenho na matemática, durante o processo de aquisição dos diferentes significados dos números fracionários. A autora conclui que até mesmo os alunos de 8º e 9º anos apresentam grandes dificuldades em

entender e resolver situações-problema e até mesmo em perceber o resultado de uma divisão e a parte a ser dividida.

Vasconcelos (2007) destaca que é necessário que os alunos tenham tempo para integrar os diferentes significados, com seus símbolos e suas representações, considerando um ensino efetivo e uma aprendizagem significativa, que reverta o quadro de dificuldades no ensino dos números fracionários.

Burda (2012) em sua dissertação Pró-letramento em Matemática “Problematizando a construção do conceito de frações - uma construção para a formação de professores” teve como objetivos: identificar quais conceitos sobre números fracionários são dominados pelos professores que atuam nos anos iniciais; identificar os procedimentos metodológicos utilizados pelos professores no ensino de frações; explorar nas oficinas pedagógicas o conceito de fração, a representação fracionária e as operações de adição e subtração; e elaborar um caderno pedagógico para professores formadores contendo oficinas com alternativas para o ensino dos números fracionários. Após análise e discussão dos resultados, a autora afirma que as dificuldades enfrentadas pelos alunos podem estar relacionadas à forma como o professor aborda o conteúdo, visto que, sua pesquisa mostra que um dos fatores principais é o desinteresse dos alunos pelo conteúdo e este está relacionado à abordagem utilizada pelo professor. Ela ainda concluiu que a formação continuada promovida por meio de oficinas pedagógicas foi eficaz para potencializar a competência dos professores no ensino de frações, como também, contribuíram para ampliar o conhecimento dos professores.

### **2.3.2 Como os livros didáticos abordam o conteúdo de números racionais**

Ao analisar a coleção Matemática e realidade - Ensino Fundamental (2011, 2012, 2013), foi possível observar como é distribuído o conteúdo dos números racionais de acordo com as séries do Ensino Fundamental.

No 6º ano é introduzido o conteúdo de frações, onde há indicação que o professor prepare o aluno para reconhecer o que é uma fração, os tipos de frações, o grau de equivalência, além das quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) com os números fracionários e decimais.

No 7º ano faz uma abordagem da representação geométrica através da reta numérica, principalmente com os números decimais, onde são abordadas as propriedades da adição e

multiplicação com racionais. É a partir do 7º ano que se inicia o trabalho de média aritmética e porcentagem.

No 8º e 9º ano têm-se uma revisão detalhada sobre o conteúdo de números racionais, pois é a partir dessas séries que é feita uma introdução às noções algébricas, na qual, faz-se utilização constante dos números racionais.

A partir do final do 7º ano o aluno está capacitado para reconhecer as várias representações e significados dos racionais, assim como sua utilização nos acontecimentos do cotidiano. É o que explica o Currículo Básico Comum (CBC) 2008:

O aluno de 6º e 7º ano é capaz de: “3.2. Operar com números racionais em forma decimal e fracionária: adicionar, multiplicar, subtrair, dividir/.../ 3.3. Associar uma fração à sua representação decimal e vice-versa. 3.4. Resolver problemas que envolvam números racionais. (CBC, 2008, p.18).

Assim, cabe ao professor e aluno trabalharem de maneira que o que é proposto aconteça também na prática diária da sala de aula.

### **2.3.3 Análise de Erros**

Numa única atividade podemos detectar diversas formas de erro e diferentes caminhos na tentativa de resolver uma situação-problema. A resolução de uma atividade pelo aluno, de certa forma, representa o alcance que sua aprendizagem pode atingir ou como ele pensa naquele momento e naquela situação em que se encontra. Pode acontecer que em um contexto escolar o aluno apresente uma resposta e fora dele apresente outra, ou consiga resolver uma situação num contexto, mas, não em outro. Para Cury (1994):

O ensino de matemática, em consonância com essa visão, deve proporcionar ao aluno o envolvimento com os problemas de sua realidade sociocultural e a possibilidade de construir suas próprias soluções. Os erros cometidos pelos alunos fazem parte do próprio processo de elaboração do conhecimento e devem ser fonte de exploração de novas ideias e novos conteúdos matemáticos. (p.20)

Analisando o que seria o erro e como ele poderia ajudar, os PCN abordam que:

Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para a busca do acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e ao diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho. (BRASIL, 1998, p.55)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) baseados em princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, admitem que:

O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias: da parte de quem ensina, a comprovada importância da área de conhecimento; do lado de quem aprende, a insatisfação diante do baixo rendimento, apresentado com muita frequência, em relação à sua aprendizagem (BRASIL, 1997, p. 15).

Como a matemática é uma disciplina que apresenta elevadas taxas de reprovação, consideramos necessário que se faça uma análise de como está sendo feito o trabalho educacional, para procurarmos melhorar essa situação. Julgamos como um ponto importante a identificação e análise dos erros dos alunos em relação aos conteúdos de matemática, pois é um instrumento eficaz no processos ensino-aprendizagem.

Sobre as causas de um erro, os PCN (1997) apontam:

Diferentes fatores podem ser causa de um erro. Por exemplo, um aluno que erra o resultado da operação  $126 - 39$  pode não ter estabelecido uma correspondência entre os dígitos ao “armar” a conta; pode ter subtraído 6 de 9, apoiado na ideia de que na subtração se retira o número menor do número maior; pode ter colocado qualquer número como resposta por não ter compreendido o significado da operação; pode ter utilizado um procedimento aditivo ou contar errado; pode ter cometido erros de cálculo por falta de um repertório básico. Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação.

Sendo assim, conseguindo identificar os fatores que podem ter causado o erro, será possível que os professores elaborarem estratégias os auxiliem na diminuição desses fatores em sala de aula.

## 2.4 Metodologia da Resolução de Problemas

A atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento. Nesse sentido os PCN apontam que:

Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja

aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. (BRASIL, 1997, p.34)

Na matemática, um dos grandes responsáveis por inúmeras dúvidas entre os alunos, são os problemas matemáticos, pois esses alunos não sabem relacionar as informações com os símbolos, adequados para resolverem os problemas. Eles entendem a situação, reconhecendo a operação mais adequada para a resolução, e isso só se consegue com uma leitura atenciosa durante o processo interpretativo.

Segundo os PCN de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Existem diferenças básicas entre exercícios e problemas. No primeiro, o aluno não precisa decidir sobre o procedimento a ser utilizado para se chegar à solução. Pozo (1998, apud, SOARES & PINTO, 2001, p. 3) exemplifica:

As tarefas em que precisa aplicar uma fórmula logo depois desta ter sido explicada em aula, ou após uma lição na qual ela aparece explicitamente ... servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas ...

No que se refere à resolução de problemas, Polya traz uma abordagem sobre etapas necessárias para fazê-la. Como um dos matemáticos do século XX que considera a Matemática uma “ciência observacional”, na qual a observação e a analogia desempenham um papel fundamental, ele afirma que há semelhança entre os processos criativos na Matemática e nas ciências naturais, que também se fundamentam na observação e na análise desta.

Polya foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Por isso, Polya representa uma referência no assunto, uma vez que suas ideias representam uma grande inovação em relação às ideias de resolução de problemas existentes até então. Em seu livro, Polya estabeleceu um método sistemático de resolução de problemas em quatro passos:

**Compreender o problema:** Para compreendermos um problema é preciso lê-lo com muita atenção. Durante a leitura do problema procure encontrar respostas para as seguintes

questões: Qual é a pergunta do problema? O que o problema quer saber? Quais são os dados do problema? Há alguma restrição? Quais? Não continue a resolução do problema enquanto não compreender bem o problema. Gaste o tempo que for preciso nesta etapa, pois o sucesso das demais etapas depende diretamente desta.

**Estabelecer um plano de resolução:** Faça um esquema, um desenho ou um resumo da resolução do problema. Procure responder questões como: Quais as ideias envolvidas neste problema? Você resolveu algum outro problema semelhante a este? Que estratégia utilizou? Que operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, etc) é necessário fazer para solucionar este problema? Existe alguma fórmula, teorema, propriedade ou resultado que você conhece e que pode auxiliar na solução deste problema?

**Executar o plano:** Esta é a etapa mais fácil do processo, pois já existe uma estratégia elaborada, basta colocá-la em prática para obter a solução do problema. Execute a estratégia com muito cuidado e faça os cálculos que forem necessários. Verifique cada passagem, comprove cada cálculo executado e observe se consegue mostrar que cada um deles está correto.

**Análise da Solução obtida e elaboração da resposta:** Verifique se as soluções obtidas satisfazem o problema, os argumentos utilizados e os resultados, refaça os cálculos. Não há mais soluções? Elabore, então, a resposta para o problema.

Estas quatro etapas podem ajudar o aluno a organizar o seu processo de resolução de um dado problema. Ao longo das quatro etapas o aluno deverá colocar a si próprio uma série de questões que têm como objetivo organizar o seu pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz.



## CAPÍTULO 3

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, abordaremos os resultados obtidos. Em um primeiro momento trabalhamos sob a perspectiva da análise de erros (Cury, 1994) colocando os dados em tabelas e realizando a descrição e discussão dos erros ocorridos em cada uma das questões dos dois questionários. Em seguida, analisamos os dados do Questionário II sob o ponto de vista das etapas da resolução de problemas trazidas por Polya.

#### **3.1 Procedimento de Análise**

A análise dos erros, objetiva dar um suporte ao professor para que ele possa entender quais foram os erros cometidos durante a resolução das questões pelos alunos e com isso estudar estratégias para tentar sanar as dificuldades apresentadas pelos estudantes que geraram tais erros.

No primeiro momento, foram analisados os erros e acertos de cada questão, tanto no Questionário I que aborda as questões diretas\* com dados explícitos, quanto no Questionário II que aborda as questões de resolução de problemas que exigem interpretação, e elaboramos tabelas com os dados obtidos.

O Questionário I é composto por 7 questões, no entanto a Questão 2 não vai ser analisada nesse trabalho, pois o Questionário II (composto por 6 questões) não tem uma questão equivalente para comparar com ela.

Procurando um melhor entendimento para os dados coletados, organizamos esses dados em tabelas onde foram estabelecidos os seguintes critérios: questões corretas (C), questões parcialmente corretas (PC), questões incorretas (I) e questões em branco (B). Logo após, apresentamos a análise dos erros encontrados.

Descrevemos, a seguir, os critérios para enquadrar cada uma das respostas nas categorias elencadas anteriormente:

- **Corretas (C):** Quando todas as operações estão corretas e se chega ao resultado esperado.
- **Parcialmente corretas (PC):** quando inicialmente as operações estão corretas, mas não se chega ao resultado esperado ou consegue montar um problema, mas não efetuou as operações corretas.

---

\* questões diretas: os dados já estão organizados.

-**Incorretas (I)**: quando a partir do princípio do problema já ocorre erro.

-**Em branco (B)**: quando não se escreve nada, ou escreve expressões do tipo “não sei”, “não entendi”, etc.

### 3.2 Desempenho Geral dos Estudantes

Vejamos as tabelas com o resultado dos participantes nas resoluções dos questionários I e II.

**Tabela 1:** Desempenho dos estudantes no Questionário I

<b>Tipo de Questão</b>	<b>(C)</b>	<b>(PC)</b>	<b>(I)</b>	<b>(B)</b>
<b>Nº</b>				
<b>1</b>	19	0	7	3
<b>3</b>	14	8	2	5
<b>4</b>	1	1	23	4
<b>5</b>	7	0	17	5
<b>6</b>	8	5	5	11
<b>7</b>	6	0	9	14

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Verificando os resultados de desempenho dos alunos no Questionário I, notamos que apenas na Questão 1 o número de acertos é superior aos outros três critérios de erros. Nas demais questões, os critérios de erros superam os acertos. Principalmente nas questões referentes à subtração de um número inteiro por uma fração e em multiplicação e divisão de um número inteiro por uma fração. Esses resultados mostram que os alunos pesquisados têm dificuldades com todas as operações com frações.

**Tabela 2:** Desempenho dos alunos no Questionário II

<b>Tipo de Questão</b>	<b>(C)</b>	<b>(PC)</b>	<b>(I)</b>	<b>(B)</b>
<b>Nº</b>				
<b>1</b>	15	0	9	5
<b>2</b>	17	5	2	5
<b>3</b>	2	15	6	6
<b>4</b>	4	0	6	19
<b>5</b>	4	5	5	15
<b>6</b>	4	0	5	20

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Analisando a Tabela 2 notamos que nas questões 1 e 2 o número de acertos foi um pouco maior que o total dos outros critérios. Na Questão 3 tivemos a menor quantidade de acertos, mas o número de acertos parciais foi superior a 50%, mostrando que a maioria dos alunos pesquisados conseguiu interpretar a questão. Já as demais questões tiveram um alto número de questões em branco e um pequeno número de acertos.

Fazendo uma verificação do desempenho dos alunos no Questionário II e comparando com o desempenho dos alunos no Questionário I percebemos que as dificuldades dos alunos são ainda maiores com questões de resolução de problemas.

### **3.3 Desempenho dos estudantes nas questões que envolvem reconhecimento de uma fração**

Fazendo uma análise detalhada dos questionários I e II e comparando os resultados das questões de mesmo conteúdo, temos os seguintes resultados:

Na primeira questão do Questionário I, temos:

Na figura abaixo, represente a fração da parte pintada.



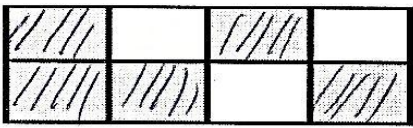
**Uma solução correta:**  $\frac{5}{8}$  (*parte considerada ou parte pintada*)  
(*o todo*)

Esse item refere-se a como representar uma fração indicada em uma figura com partes pintadas.

Dois alunos A11 e A18 cometeram o erro de escrever o numerador correto, representando a parte pintada, mas escrever o denominador incorreto, representando a parte sem pintar. Como veremos no protocolo a seguir:

**Figura 1:** Protocolo do aluno A18

1. Na figura abaixo, represente a fração da parte pintada.

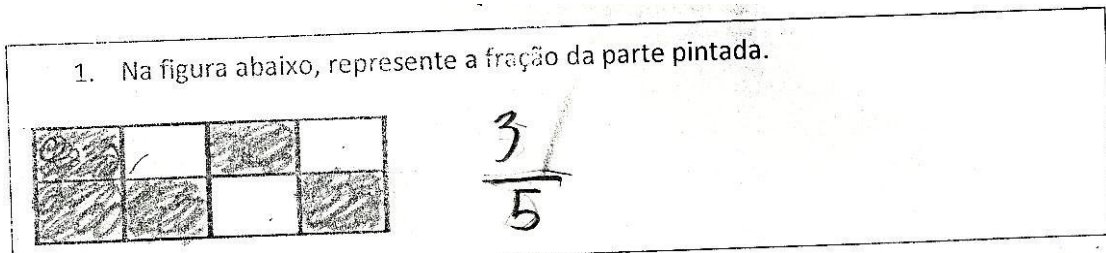


$\frac{5}{3}$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

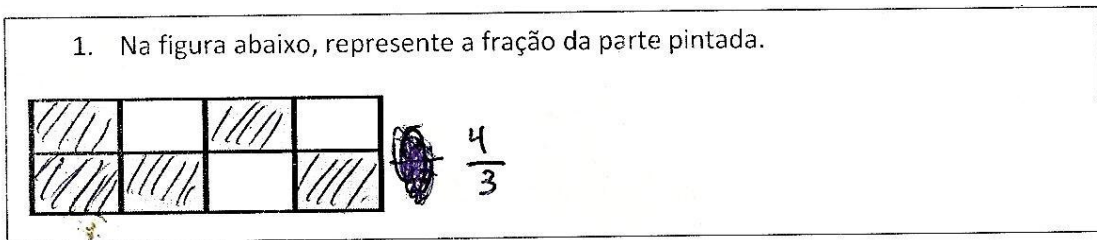
Entendemos que os estudantes cometeram esse erro em virtude da interpretação errônea de que a figura está dividida em duas partes, e estas representam o numerador (parte pintada) e o denominador (parte em branco). Os alunos ainda não se apropriaram do significado de fração como parte-todo, onde o numerador representa a parte e o denominador o todo, o inteiro.

Os estudantes A1, A15, A16 e A27 escreveram o numerador representando a parte sem pintar e denominador representando a parte pintada. Ilustrado no protocolo do aluno A16. Os alunos interpretaram quase da mesma maneira que os colegas que cometeram o erro anterior, invertendo apenas a posição do numerador e do denominador. Esses erros também foram encontrados por Vasconcelos (2007) em sua dissertação “A construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental”.

**Figura 2:** Protocolo do aluno A16

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A29 cometeu o erro de escrever a parte sem pintar no denominador e um número qualquer no numerador. Acreditamos que ele considerou que o numerador é representado pela quantidade de retângulos de uma linha e que o denominador é representado pelos retângulos em branco. Ilustramos esse fato com o protocolo do aluno.

**Figura 3:** Protocolo do aluno A29

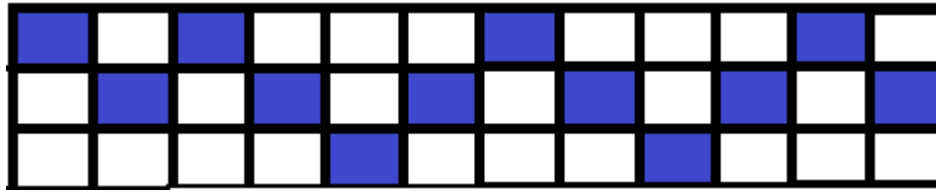
**Fonte:** Acervo da pesquisa

Notamos que 34,5% dos alunos pesquisados não sabem representar uma fração indicada por uma figura com partes pintadas. Esses alunos se confundem ao representar o numerador e o denominador da fração.

A questão número 1 do Questionário II está relacionada com a ideia de parte-todo, mas exige do aluno interpretação do problema e, possivelmente, a construção da figura é a seguinte:

De uma tela repartida em 36 partes iguais, Pedro pintou 12 partes. Que fração da tela ele pintou?

**Uma solução correta:**  $\frac{12}{36} = \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



Este item refere-se à montagem de uma figura repartida em partes iguais e à representação da fração.

Sobre os erros cometidos, notamos que os alunos A2, A3, A15 e A29 não apresentaram uma figura e na representação da fração, escreveram o número que representa a parte pintada (parte considerada) no denominador e o número que representa o todo no numerador. Como apresenta o protocolo do aluno A29.

**Figura 4:** Protocolo do aluno A29

1) De uma tela repartida em 36 partes iguais, Pedro pintou 12 partes. Que fração da tela ele pintou?

$$\frac{36}{12}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Com isso percebemos que os alunos sabem que se representa uma fração com a parte pintada e o todo, mas não conseguem distinguir numerador de denominador.

O aluno A1 errou ao efetuar uma soma da parte total pela parte pintada e escrever o algarismo das dezenas como sendo numerador e o algarismo das unidades como sendo denominador. Mostrado no seu protocolo, abaixo. Esse aluno entendeu que o problema se tratava de adição e não representa uma fração equivocada.

**Figura 5:** Protocolo do aluno A1

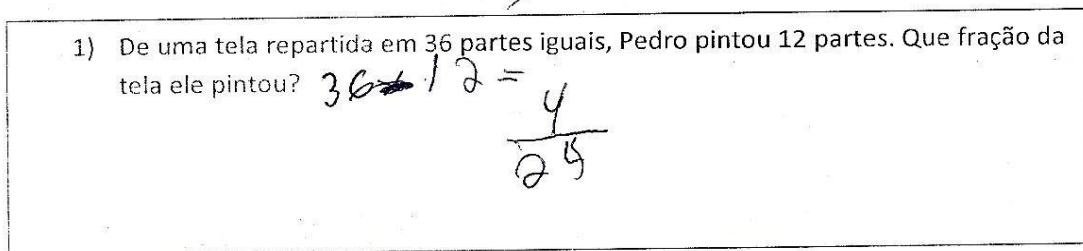
1) De uma tela repartida em 36 partes iguais, Pedro pintou 12 partes. Que fração da tela ele pintou?

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 12 \\ \hline 48 \end{array} = \frac{4}{8}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O erro do aluno A27 foi o de efetuar uma subtração da parte total pela parte pintada, ilustrado no seu protocolo. Esse aluno interpretou o problema como sendo referente à subtração e representou o numerador pelo algarismo das unidades e o denominador pelo resultado da subtração.

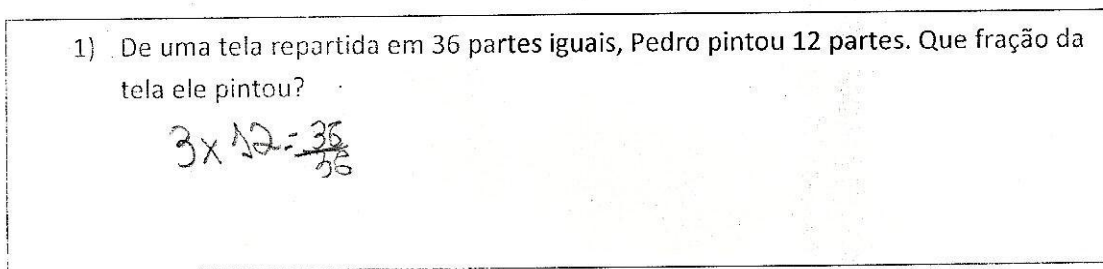
**Figura 6:** Protocolo do aluno A27



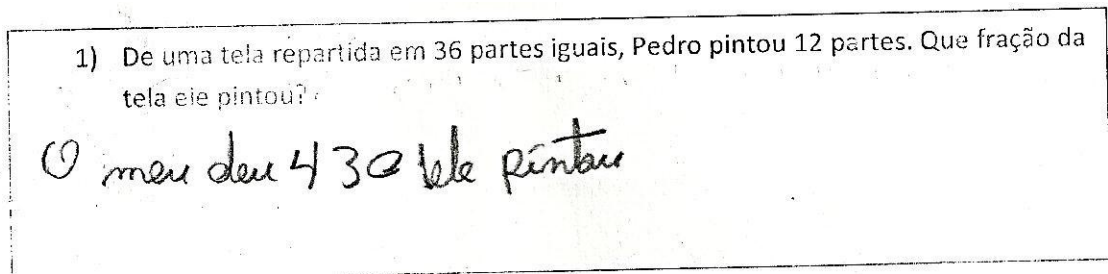
**Fonte:** Acervo da pesquisa

Os alunos A4, A6, escreveram o numerador como um produto de  $3 \times 12$  e o denominador representaram corretamente. Acreditamos que eles entendem que o denominador representa o todo, mas não sabem como representar o numerador. Já o aluno A28 escreveu um resultado qualquer. Entendemos que esse aluno não faz ideia de como se representa uma fração. Nos protocolos dos alunos A4 e A28 observamos esses fatos.

**Figura 7:** Protocolo do aluno A4



**Fonte:** Acervo da pesquisa

**Figura 8:** Protocolo do aluno A28

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Percebemos que 51,7% dos alunos sabem interpretar o problema e armar a fração, mas 48,3% não sabem nem armar nem interpretar o problema.

Fazendo comparações entre as questões de número 1 dos dois questionários, notamos que em relação à representação de fração, os alunos tiveram praticamente as mesmas dificuldades na questão direta e na questão que envolveu interpretação e resolução do problema.

**Tabela 3: Comparação entre a questão 1 do Questionário I e a questão 1 do Questionário II**

Acertos de ambas	14
Acertos apenas no Questionário I	5
Acertos apenas no Questionário II	1

### 3.4 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem soma de frações com o mesmo denominador

Na Questão 3 do Questionário I, que envolve soma de frações de mesmo denominador, temos: Some as frações  $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ .

**Uma solução correta:**  $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$  (somamos os numeradores e conservamos o denominador)

Entre os erros encontrados sete alunos A5, A9, A12, A13, A19, A20, A26 cometeram o erro de somar os numeradores e os denominadores. Os alunos têm domínio da soma dos inteiros, mas não sabem que para somar frações de mesmo denominador, basta somar os numeradores e conservar o denominador. Representamos esse tipo de erro pelo protocolo do aluno A13.



**Figura 9:** Protocolo do aluno A13

3. Some as frações  $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ .

$$\frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{16}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Os alunos A24 e A25 somaram corretamente os numeradores, mas escreveram um número qualquer no denominador. O aluno tem domínio da soma dos inteiros, mas não compreende que o denominador representa o todo.

**Figura 10:** Protocolo do aluno A24

3. Some as frações  $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ .

$$\frac{2+5}{8} = \frac{7}{36}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A27 cometeu o erro de multiplicar os numeradores e conservar o denominador. O aluno interpretou como uma multiplicação, mas mesmo se fosse multiplicação estaria errado, pois ele conservou o denominador ao invés de multiplica-los. Vejamos no protocolo, a seguir.

**Figura 11:** Protocolo do aluno A27

3. Some as frações  $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ .

$$\frac{10}{8}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Constatamos que, aproximadamente, 48,27% dos alunos pesquisados sabem somar frações de mesmo denominador. Dentre aqueles que não souberam responder a questão

corretamente, 27,59% sabem que devem somar os numeradores, mas cometem o erro de somar os denominadores e 24,14% não apresentam uma resolução que se aproxime da definição em Q.

Na Questão 2 do Questionário II, temos: Pedro tem  $\frac{4}{9}$  de uma quantia e Lucas tem  $\frac{2}{9}$  dessa mesma quantia. Que fração eles têm juntos?

**Uma solução correta:** Somando a quantia de Pedro com a quantia de Lucas, temos:

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \text{ (somamos os numeradores e conservamos o denominador.)}$$

$\frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$  (para simplificar a fração, dividimos numerador e denominador por um mesmo número)

Este item refere-se a um problema utilizando adição de frações com o mesmo denominador.

Sobre os erros encontrados os alunos A5, A12, A13 e A26 armaram o problema corretamente, mas repetiram o erro cometido na Questão 3 do Questionário I, ilustrado no protocolo do aluno A5.

**Figura 12: Protocolo do aluno A5**

2) Pedro tem  $\frac{4}{9}$  de uma quantia e Lucas tem  $\frac{2}{9}$  dessa mesma quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{78}$$

**Fonte:** acervo da pesquisa

Percebe-se que os alunos interpretaram corretamente o problema e armaram corretamente a operação, mas não compreendem que para somar frações de mesmo denominador, deve-se somar os numeradores e conservar o denominador conforme Definição 2 no Capítulo 1.

O aluno A16 não armou o problema e colocou apenas o resultado onde o denominador representa a soma dos dois denominadores. O aluno em questão entende o problema como uma soma de numeradores e também soma de denominadores percebe-se então que ele não entende que o denominador representa o todo. Conforme seu protocolo a seguir.

**Figura 13:** Protocolo do aluno A16

2) Pedro tem  $\frac{4}{9}$  de uma quantia e Lucas tem  $\frac{2}{9}$  dessa mesma quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{6}{18} \text{ uncao}$$

**Fonte:** acervo da pesquisa

O aluno A27 representou o problema incorretamente somando a primeira fração com o inverso da segunda. Seguindo na resolução, o aluno somou numeradores e também denominadores. Já o aluno A1 representou a soma das frações, mas cometeu o erro de multiplicar os numeradores.

**Figura 14:** Protocolo do aluno A27

2) Pedro tem  $\frac{4}{9}$  de uma quantia e Lucas tem  $\frac{2}{9}$  dessa mesma quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{4}{9} + \frac{9}{2} = \frac{14}{11}$$

**Fonte:** acervo da pesquisa

**Figura 15:** Protocolo do aluno A1

2) Pedro tem  $\frac{4}{9}$  de uma quantia e Lucas tem  $\frac{2}{9}$  dessa mesma quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

**Fonte:** acervo da pesquisa

Notamos que 58,62 % dos alunos pesquisados conseguiram armar os dados do problema e efetuar corretamente a adição, enquanto que 17,24 % sabem armar o problema, mas não sabem efetuar a soma corretamente e 24,14% nem sabem armar os dados do problema, nem efetuar a soma.

Fazendo uma comparação dos resultados da Questão 3 do Questionário I com a questão 2 do Questionário II, percebe-se que as maiores dificuldades dos alunos estão em efetuar a soma das frações. Como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 4: Comparação entre a Questão 3 do Questionário I e a questão 2 do Questionário II**

Acertos de ambas	13
Acertos apenas no Questionário I	1
Acertos apenas no Questionário II	4
Apenas montou o problema no Questionário II	5

**Fonte:** Acervo da pesquisa

### 3.5 Desempenho dos discentes nas questões que envolvem soma de frações com denominadores diferentes

Na Questão 4 do Questionário I, que aborda a soma de frações com denominadores diferentes, temos: Some as frações  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ .

**Uma solução correta:** Calculando o mmc entre os denominadores, temos que:

$$mmc(4, 3) = \frac{|4 \cdot 3|}{mdc(4,3)} = 12$$

Dessa forma,  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$  (Em cada fração, dividimos o mmc pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador; somamos os numeradores e conservamos o denominador).

Entre os alunos pesquisados 22 cometeram o erro de somar os numeradores e os denominadores. Os alunos têm a ideia que para somar frações, basta somar os numeradores e também somar os denominadores. Ou seja, eles não compreenderam a Definição 2 do Capítulo 1. Exemplificamos esse tipo de erro como o protocolo do aluno A3, que segue.

**Figura 16:** Protocolo do aluno A3

4. Some as frações  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ .

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

O discente A6 calculou o mmc, mas dividiu pelo denominador e multiplicou o resultado pelo numerador, apenas na primeira fração. Como mostra o seu protocolo a seguir. Este aluno conhece uma forma de somar frações com denominadores diferentes, mas não teve a atenção de armar as contas corretamente.

**Figura 17:** Protocolo do aluno A6

4. Some as frações  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ .

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{32 : 4 \times 3 = 9}{32}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ \hline & 12 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

O aluno A25 escreveu no numerador a soma dos denominadores e no denominador a soma dos numeradores. Acreditamos que ele também tem a ideia que para somar frações, basta somar os numeradores e também somar os denominadores, mas escreveu de forma invertida, o que podemos constatar no protocolo que segue:

**Figura 18:** Protocolo do aluno A25

4. Some as frações  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ .

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{5}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Notamos que apenas 3,45% dos alunos pesquisados sabem como somar frações com denominadores diferentes. Mas a grande maioria, 96,55% não sabe como resolver esse tipo de operação, sendo que destes apenas 3,45% tem uma pequena noção de como iniciar a resolução.

Na abordagem da Questão 3 do Questionário II, temos: Antônio tem  $\frac{4}{5}$  de uma quantia, Lucas tem  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração eles têm juntos?

**Uma solução correta:** Armando o problema, temos :  $\frac{4}{5} + \frac{3}{8}$ .

Calculando o mmc como vimos no Capítulo 1 temos:  $mmc(5, 8) = \frac{|5 \cdot 8|}{mdc(5,8)} = 40$

Fazendo as operações, obtemos  $\frac{4}{5} + \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{32 + 15}{40} = \frac{47}{40}$ . (Multiplicamos os denominadores e encontramos o mmc. Em cada fração, dividimos o mmc pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador; somamos os numeradores e conservamos o denominador).

O aluno A27 armou o problema somando a primeira fração com o inverso da segunda fração e com o problema armado cometeu outro erro somando numeradores e denominadores, ilustrado na Figura 19. É possível que o referido aluno ao armar a operação confundiu a adição com a divisão e na resolução cometeu o erro de somar numeradores e também denominadores.

**Figura 19:** Protocolo do aluno A27

3) Antônio tem  $\frac{4}{5}$  de uma quantia, Lucas tem  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{4 + 8}{5 + 3} = \frac{12}{8}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Dos 29 alunos pesquisados, 17 armaram o problema corretamente, mas cometeram o erro de somar os numeradores e somar os denominadores, como exemplificado na Figura 20.

Entendemos que eles conseguem interpretar a situação-problema e armar o cálculo, mas não apresentam o conhecimento adequado para somar frações com denominadores diferentes.

**Figura 20:** Protocolo do aluno A28

3) Antônio tem  $\frac{4}{5}$  de uma quantia, Lucas tem  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{8} = \frac{7}{13} \text{ Eles tem } \frac{7}{13} \text{ juntos}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A21 armou o cálculo corretamente, mas escreveu qualquer resultado. Nota-se que o aluno conseguiu interpretar a situação-problema e armar o cálculo, mas não compreende o processo de somar frações com denominadores diferentes, conforme vimos no Capítulo 1.

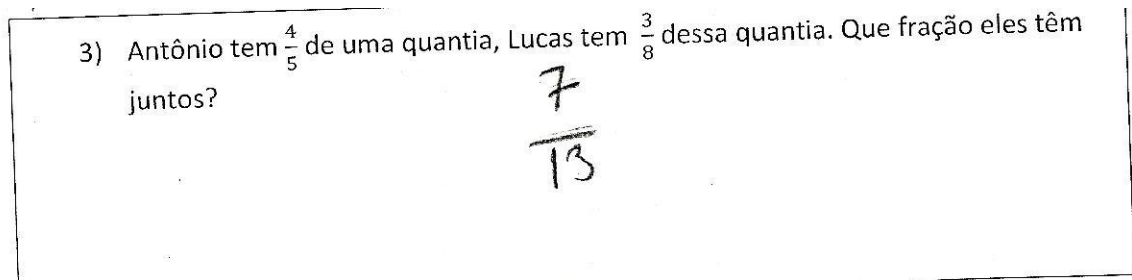
**Figura 21:** Protocolo do aluno A21

3) Antônio tem  $\frac{4}{5}$  de uma quantia, Lucas tem  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração eles têm juntos?

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{2}{15}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Os alunos A1 e A2 apenas escreveram o resultado como sendo a soma dos numeradores no numerador e a soma dos denominadores no denominador. Entendemos que assim como os 17 (dezessete) alunos que armaram a conta, eles dois conseguem interpretar, só não registraram a conta, e também não apresentam um procedimento correto para a soma de frações com denominadores diferentes.

**Figura 22:** Protocolo do aluno A2

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Notamos que 6,9% dos alunos pesquisados tem conhecimento de como armar um problema e como somar frações de denominadores diferentes, mas 51,72% sabem armar a conta, mas não realizam de forma correta a adição e 41,38% não conseguiram sequer armar a conta.

Fazendo comparações entre a Questão 4 do Questionário I e a Questão 3 do Questionário II, percebemos que a grande maioria dos alunos pesquisados consegue interpretar o problema e armar a conta, mas não sabem resolver as operações de adição de frações com denominadores diferentes, como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 5: Comparação entre a questão 4 do Questionário I e a questão 3 do Questionário II**

Acertos de ambas	1
Acertos apenas no Questionário I	0
Acertos apenas no Questionário II	1
Apenas montou o problema no Questionário II	15

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Como apoio a esses dados temos Patrono (2011), em sua dissertação de mestrado, intitulada “A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental: a análise de uma proposta de ensino” que identifica que as maiores dificuldades dos alunos de 6º ano encontram-se nas operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.



### 3.6 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem a subtração de um número inteiro por uma fração

Na Questão 5 do Questionário I, temos: Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

**Uma solução correta:** Escrevemos o número inteiro como uma fração de denominador 1;

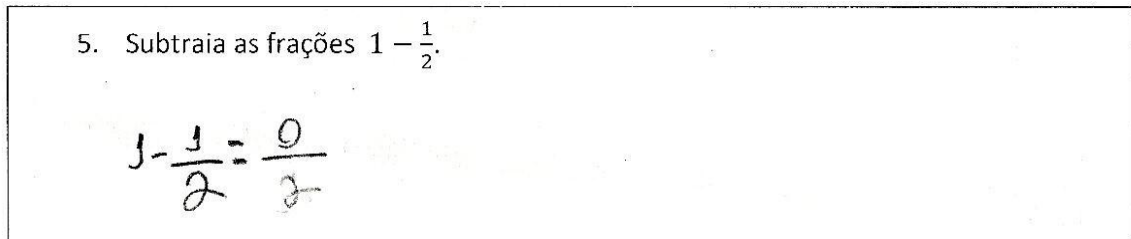
Calculando o mmc como vimos no Capítulo 1, temos que:  $mmc(1, 2) = \frac{|1 \cdot 2|}{mdc(1,2)} = 2$

Então temos:  $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ . (Em cada fração, dividimos o mmc pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador; subtraímos os numeradores e conservamos o denominador)

O referido item aborda a subtração de um número inteiro por uma fração.

Sete alunos cometeram o erro de efetuar uma subtração do número inteiro pelo numerador da fração e conservar o denominador da fração, mostrado pelo protocolo do aluno A23. Entende-se que eles não visualizaram que o número inteiro representa uma fração de denominador igual a 1. Com isso, eles aplicaram as regras corretas para frações com o mesmo denominador, mas que são incorretas para frações com denominadores diferentes.

**Figura 23:** Protocolo do aluno A23



5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A14 efetuou uma subtração dos numeradores e subtraiu o denominador da fração pelo número inteiro. Observamos um erro parecido com o anterior, onde o aluno aplicou as regras para frações com o mesmo denominador, mas de forma errada.

**Figura 24:** Protocolo do aluno A14

5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Os alunos A3 e A4 conservaram o denominador, multiplicaram corretamente o denominador pelo número inteiro, mas cometeram o erro de somar o resultado com o numerador da fração, como vemos no protocolo do aluno A3.

**Figura 25:** Protocolo do aluno A3

5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

$$\begin{array}{r} + \\ 1 \\ - \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \quad \frac{3}{2}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Possivelmente, os alunos realizam esse tipo de cálculo mecanicamente, não tendo clareza do significado do procedimento e tão pouco da resposta encontrada, e por isso não se atentaram para o sinal da operação.

Três alunos, A11, A15 e A18, multiplicaram corretamente o denominador da fração pelo número inteiro e subtraíram o resultado pelo numerador da fração, mas cometeram o erro de escrever o número inteiro no denominador do resultado. Esse fato ilustraremos pelo protocolo do aluno A15.

**Figura 26:** Protocolo do aluno A15

5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Os alunos A1, A19 e A20 subtraíram os numeradores e como o resultado da subtração deu zero, eles escreveram a fração  $\frac{0}{0}$ , como está ilustrado no protocolo do aluno A1.

Acreditamos que o fato de escreverem o resultado  $\frac{0}{0}$  foi por entenderem que zero dividido por qualquer número é igual à zero.

**Figura 27:** Protocolo do aluno A1

5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{0}{0}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A28 escreveu um resultado onde, multiplicou o denominador da fração pelo número inteiro e o resultado dessa multiplicação ele multiplicou pelo numerador da fração (ver Figura 28). Acreditamos que esse aluno não compreendeu o conceito de fração e por isso não consegue realizar a operação.

**Figura 28:** Protocolo do aluno A28

5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

$$1 - \frac{1}{2} = 2$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Percebemos que 24,1% entre os alunos pesquisados souberam resolver os cálculos da subtração de um número inteiro por uma fração. E a grande maioria 75,9% não soube efetuar esse tipo de operação.

Na Questão 4 do Questionário II, temos: Pedro tem uma certa quantia, se ele gastar  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração ele fica?

**Uma solução correta:** Escrevendo uma quantia inteira para Pedro e subtraindo o que ele gastou, temos:  $1 - \frac{3}{8}$

Escrevemos o número inteiro como uma fração de denominador 1 e calculando o  $mmc(1, 8) = \frac{|1 \cdot 8|}{mdc(1,8)} = 8$

Então temos:  $\frac{1}{1} - \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 8 - 3 \cdot 1}{1 \cdot 8} = \frac{8-3}{8} = \frac{5}{8}$ . (Multiplicamos os denominadores e encontramos o mmc. Em cada fração, dividimos o mmc pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador; subtraímos os numeradores e conservamos o denominador, conforme apresentamos no Cálculo 1).

Cinco alunos armaram incorretamente o problema, escrevendo subtração de uma fração qualquer pela fração gasta. Representado pelo protocolo do aluno A9. Percebe-se que estes alunos não conseguiram interpretar o problema, armaram um cálculo errado e cometeram outro erro ao subtrair os numeradores e também os denominadores.

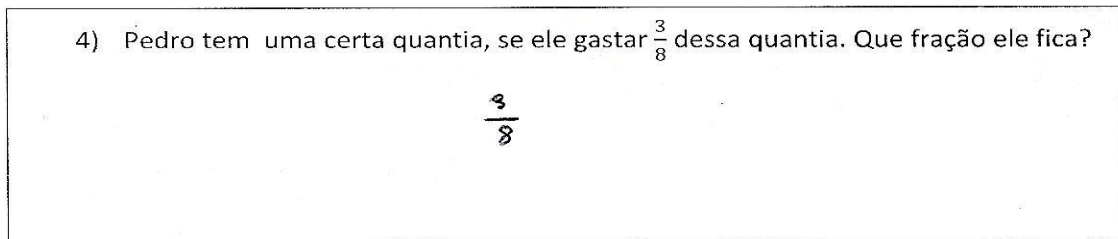
**Figura 29:** Protocolo do aluno A9

4) Pedro tem uma certa quantia, se ele gastar  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração ele fica?

$$\frac{6}{18} - \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A29 escreveu a fração dada no item, como resposta, sem nem tentar armar o problema (Figura 30). Entendemos que ele não assimilou o problema e arriscou um resultado.

**Figura 30:** Protocolo do aluno A29

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Notamos que apenas 13,8% dos alunos pesquisados sabem armar e resolver problemas referentes à subtração de um número inteiro por uma fração, e que a grande maioria, 86,2%, disse não entender ou não saber resolver o problema.

Comparando a Questão 5 do Questionário I com a Questão 4 do Questionário II, notamos que os alunos têm uma imensa dificuldade em interpretar e traçar uma estratégia para resolver um problema de subtração envolvendo números fracionários. Como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 6: Comparação entre a questão 5 do Questionário I e a questão 4 do Questionário II**

Acertos de ambas	0
Acertos apenas no Questionário I	7
Acertos apenas no Questionário II	4
Apenas montou o problema no Questionário II	0

**Fonte:** Acervo da pesquisa

### 3.7 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem a multiplicação de um número inteiro por uma fração

Na abordagem da Questão 6 do Questionário I, temos: Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

**Uma solução correta:** Multiplicando o número inteiro pelo numerador e dividindo o resultado pelo denominador, temos:  $\frac{640}{5} = 128$ . Como vimos na Definição 4 do Capítulo 1.

Os alunos A14, A21, A22 e A23 cometeram o erro de multiplicar o número inteiro tanto pelo numerador quanto pelo denominador. Erro ilustrado no protocolo do aluno A22. Entende-se que os alunos usaram a regra de multiplicar duas frações, cometendo o erro de considerar o número inteiro como numerador e denominador da fração.

**Figura 31:** Protocolo do aluno A22

6. Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$320 \times \frac{2}{5} = \frac{640}{5} = 128$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 5 \\ \hline 1600 \end{array}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Os alunos A1 e A2 escreveram um número qualquer como resposta da multiplicação, como podemos ver no protocolo do aluno A2. Nota-se que os alunos nem tentaram efetuar essa multiplicação.

**Figura 32:** Protocolo do aluno A2

6. Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$320 \times \frac{2}{5} = 30$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O erro cometido pelos alunos A11 e A18 foi o de multiplicar o número inteiro por um número inteiro formado a partir da junção do numerador com o denominador da fração, conforme ilustrado no protocolo do aluno A18. Referente a esse tipo de erro, nós não conseguimos imaginar qual foi a linha de raciocínio destes alunos.

**Figura 33:** Protocolo do aluno A18

6. Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 25 \\ \hline 1600 \\ 9400 \\ \hline 8000 \end{array}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A19 multiplicou corretamente o número inteiro pelo numerador da fração, mas quando foi dividir o resultado do produto pelo denominador, cometeu um erro no resto. Ilustrado em seu protocolo a seguir. Esse erro provavelmente foi cometido por falta de atenção.

**Figura 34:** Protocolo do aluno A19

6. Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$\frac{640}{5}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 14} \\ \underline{10} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 00 \end{array}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A20 multiplicou corretamente o número inteiro pelo numerador da fração e conservou o denominador, mas não efetuou a divisão do resultado da multiplicação, pelo denominador. Esse erro provavelmente também foi cometido por falta de atenção.

**Figura 35:** Protocolo do aluno A20

6. Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$= \frac{640}{5}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Temos que 27,5% dos alunos pesquisados sabem efetuar multiplicação de um número inteiro por uma fração. Verifica-se ainda que 17,24% dominam o procedimento de multiplicar um número inteiro por um número fracionário, mas ainda possuem muitas dificuldades em realizar multiplicação e divisão com números inteiros e 55,17% não sabem resolver esse tipo de problema.

Na abordagem da Questão 5 do Questionário II, temos: Maria e Lúcia foram à feira comprar frutas. Maria levou R\$ 380,00 e Lúcia levou  $\frac{4}{5}$  da quantia de Maria. Quanto Lúcia levou para a feira?

**Uma solução correta:** Armando o problema, temos:  $380 \cdot \frac{4}{5}$

Multiplicando o número inteiro pelo numerador e conservando o denominador, temos:

$$380 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1520}{5} = 304.$$

O referido item aborda um problema envolvendo a multiplicação de um número inteiro por uma fração.

Os alunos A5 e A13 multiplicaram corretamente o número inteiro pelo numerador, mas cometeram um erro na divisão do resultado pelo denominador, ilustrado no protocolo do aluno A5. Nota-se que esses alunos interpretaram corretamente o problema e aplicaram as operações corretas, cometendo apenas um pequeno erro de divisão que pode ter sido por falta de atenção ou por certa deficiência nessa operação.

**Figura 36:** Protocolo do aluno A5

5) Maria e Lúcia foram à feira comprar frutas. Maria levou R\$ 380,00 e Lúcia levou  $\frac{4}{5}$  da quantidade de Maria. Quanto Lúcia levou para a feira?

Fonte: Acervo da pesquisa

Os alunos A2, A16 e A27 escreveram um resultado qualquer para o problema. Mostrando que eles não conseguiram interpretar o problema.

Cometeram o erro de multiplicar o número inteiro pelo denominador, os alunos A19 e A20. Mostrado no protocolo do aluno A20.

**Figura 37:** Protocolo do aluno A20

5) Maria e Lúcia foram à feira comprar frutas. Maria levou R\$ 380,00 e Lúcia levou  $\frac{4}{5}$  da quantidade de Maria. Quanto Lúcia levou para a feira?

Fonte: Acervo da pesquisa



Os alunos A10 e A25 dividiram corretamente o número inteiro pelo denominador da fração, mas não souberam ou esqueceram, de multiplicar o resultado pelo numerador. Ilustrado no protocolo do aluno A10. Nota-se que os alunos têm certa noção referente à resolução de problemas.

**Figura 38:** Protocolo do aluno A10

5) Maria e Lúcia foram à feira comprar frutas. Maria levou R\$ 380,00 e Lúcia levou  $\frac{4}{5}$  da quantia de Maria. Quanto Lúcia levou para a feira?

$$\begin{array}{r} 380 \overline{) 5} \\ \underline{35} \phantom{0} \\ 030 \\ \underline{30} \\ 00 \end{array}$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A9 dividiu corretamente o número inteiro pelo denominador da fração, mas multiplicou incorretamente o resultado pelo numerador. Assim vemos que ele interpretou corretamente o problema e aplicou as operações corretas, cometendo apenas um pequeno erro de multiplicação que pode ter sido por falta de atenção.

**Figura 39:** Protocolo do aluno A9

5) Maria e Lúcia foram à feira comprar frutas. Maria levou R\$ 380,00 e Lúcia levou  $\frac{4}{5}$  da quantia de Maria. Quanto Lúcia levou para a feira?

$$\begin{array}{r} 380 \overline{) 5} \\ \underline{35} \phantom{0} \\ 030 \\ \underline{30} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 4 \\ \hline 294 \end{array}$$

Lúcia levou para a feira R\$ 294,00

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Temos que apenas 17,24%, aproximadamente, sabem armar e resolver problemas envolvendo multiplicação de um número inteiro por uma fração. E aproximadamente 13,79% sabem apenas armar a conta, mas não conseguem resolvê-la e a grande maioria, 68,97%, nem sabe armar a conta nem resolvê-la.

Fazendo um comparativo de quantos acertaram a Questão 6 do Questionário I, mas mesmo dominando o procedimento de resolução não conseguiram acertar a questão

relacionada 5 no Questionário II, pois não conseguiram interpretar o problema, temos os seguintes resultados: 24,14% sabem interpretar e elaborar um plano e apenas 3,4% dos alunos pesquisados sabem interpretar, estabelecer e executar um plano corretamente.

**Tabela 7: Comparação entre a questão 6 do Questionário I e a questão 5 do Questionário II**

Acertos de ambas	1
Acertos apenas no Questionário I	1
Acertos apenas no Questionário II	3
Acertou no Questionário I e apenas montou o problema no Questionário II	6

**Fonte:** Acervo da pesquisa

### 3.8 Desempenho dos alunos nas questões que envolvem a divisão de um número inteiro por uma fração

Na abordagem da questão 7 do Questionário I, temos: Encontre a fração irredutível de  $400 \div \left(\frac{2}{5}\right)$ .

**Uma solução correta:** Como dado na Definição 5 do Capítulo 1, multiplicando o número inteiro pelo inversa da fração, temos:

$$400 \cdot \frac{5}{2} = \frac{2000}{2} = 1000.$$

Este item refere-se à divisão de um número inteiro por uma fração.

Os alunos A10 e A24 multiplicaram o número inteiro pelo numerador e dividiram o mesmo número inteiro pelo denominador, como mostra o protocolo do aluno A24. Acreditamos que esses alunos confundiram o processo prático, onde eles deveriam multiplicar o número inteiro pelo denominador da fração e dividir o resultado pelo numerador.

**Figura 40:** Protocolo do aluno A24

7. Encontre a fração irredutível de  $400 \div \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$400 \times 2 = 800$$

$$800 \div 5 = 160$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Dos alunos pesquisados, seis cometeram o erro de dividir o número inteiro pelo denominador e multiplicar o resultado pelo numerador, conforme ilustrado pelo protocolo do aluno A22, a seguir.

**Figura 41:** Protocolo do aluno A22

7. Encontre a fração irredutível de  $400 \div \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$400 \div 5 = 80$$

$$80 \cdot 2 = 160$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa

O aluno A7 dividiu o número inteiro pelo denominador e dividiu o resultado pelo numerador, mostrado no seu protocolo, abaixo. Entende-se que o referido aluno não lembra que na divisão multiplica-se o número pelo inverso da fração.

**Figura 42:** Protocolo do aluno A7

7. Encontre a fração irredutível de  $400 \div \left(\frac{2}{5}\right)$ .

$$\begin{array}{r} 400 \overline{) 15} \\ -400 \quad 70 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \overline{) 40} \\ -80 \quad 40 \\ \hline 00 \end{array}$$

(40)

**Fonte:** Acervo da pesquisa

Temos que 20,7% dos alunos pesquisados sabem efetuar divisão de um número inteiro por uma fração. Mas 79,3% desses alunos não sabem fazer esse tipo de operação.

Na abordagem da Questão 6 do Questionário II, temos: Paulo tem um depósito com 900 metros quadrados de área. Ele pretende colocar piso em toda a área. Se cada pedra tem  $\frac{1}{3}$  de metro quadrado de área, quantas pedras ele vai utilizar?

**Uma solução correta:** Armando o problema, temos:

Tamanho do depósito:  $900 \text{ m}^2$

Tamanho de cada pedaço:  $\frac{1}{3} \text{ m}^2$

Logo, temos:  $900 \div \frac{1}{3}$

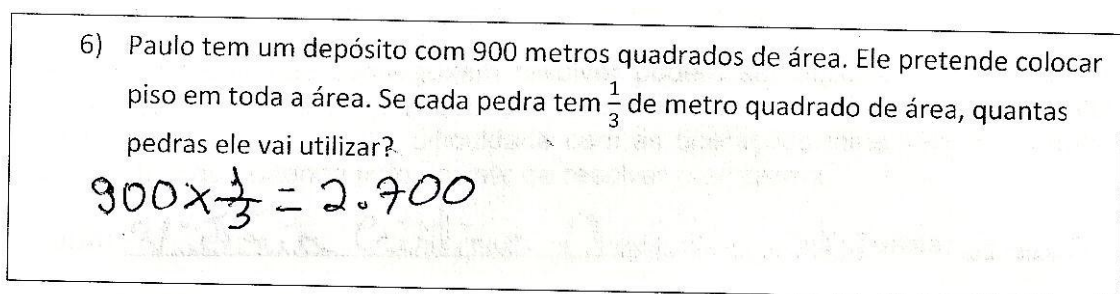
Sabendo que a inversa de uma fração  $\frac{a}{b}$  é  $\frac{b}{a}$ , pois  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Multiplicamos o número inteiro pelo inversa da fração e temos:

$900 \cdot \frac{3}{1} = \frac{2700}{1} = 2700$ . (Nesse produto, multiplicamos o número inteiro pelo numerador e dividimos o resultado pelo denominador).

Dois alunos, A10 e A25, cometeram o erro de armar o problema fazendo uma multiplicação do número inteiro pela fração dada. Ilustrado no protocolo do aluno A10. Esses alunos armaram incorretamente, porém obtiveram a resposta correta, pois multiplicaram de forma inversa.

**Figura 43:** protocolo do aluno A10



**Fonte:** Acervo da pesquisa

Dois alunos, A14 e A22, armaram incorretamente o cálculo, pois dividiram o número inteiro pelo denominador da fração. Como mostra o protocolo do aluno A22. Entende-se que estes alunos aplicaram as regras de multiplicação de um número inteiro por uma fração.

**Figura 44:** protocolo do aluno A22

6) Paulo tem um depósito com 900 metros quadrados de área. Ele pretende colocar piso em toda a área. Se cada pedra tem  $\frac{1}{3}$  de metro quadrado de área, quantas pedras ele vai utilizar?

$$\begin{array}{r} 900 \overline{) 3} \\ - 300 \\ \hline 000 \end{array}$$
300
(300)

Fonte: Acervo da pesquisa

O aluno A29 cometeu o erro de somar o número inteiro com o numerador e com denominador, da fração. Ilustrado em seu protocolo, a seguir.

**Figura 45:** protocolo do aluno A29

6) Paulo tem um depósito com 900 metros quadrados de área. Ele pretende colocar piso em toda a área. Se cada pedra tem  $\frac{1}{3}$  de metro quadrado de área, quantas pedras ele vai utilizar?

$$\begin{array}{r} 900 \\ + \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$
 ele vai utilizar 304

Fonte: Acervo da pesquisa

Destacamos que apenas 13,8% sabem armar e resolver problemas envolvendo divisão de um número inteiro por uma fração e que, a grande maioria 86,2% não sabe armar o problema e quando sabe armar não sabe resolver como já mostrava a Questão 7 do Questionário I.

Fazendo comparações entre a Questão 7 do Questionário I e a Questão 6 do Questionário II, percebemos que a grande maioria dos alunos pesquisados não sabe resolver problemas envolvendo divisão de frações e apenas 13,8% resolveu corretamente as duas questões. Como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 8: Comparação entre a Questão 7 do Questionário I e a questão 6 do Questionário II**

Acertos de ambas	4
Acertos apenas no Questionário I	2

Acertos apenas no Questionário II	0
Apenas montou o problema no Questionário II	0

Fonte: Acervo da pesquisa

### 3.9 Análise do Questionário II por Polya

Segue a análise das respostas do Questionário II quanto aos alunos que não conseguiram aplicar corretamente as fases de resolução de problemas segundo Polya. Consideramos para os números dessa tabela que se os alunos deixaram o item em branco, então, eles não compreenderam o problema.

Consideramos a análise os dados abaixo da seguinte maneira:

**Não compreendeu o problema:** o aluno que aplicou operações diferentes da exigida no problema ou aquele que deixou a questão em branco.

**Não estabeleceu um plano de resolução correto:** o aluno que compreendeu o problema, mas não identificou todos os dados do problema.

**Não executou o plano corretamente:** o aluno que compreendeu o problema e estabeleceu o plano corretamente, mas não conseguiu chegar ao resultado esperado.

**Errou na análise dos resultados:** o aluno que, compreendeu o problema, estabeleceu o plano e o executou corretamente, mas cometeu um lapso que se tivesse feito o retrospecto da solução conseguiria identificar que o resultado obtido estava incorreto.

Note que não é possível comprovar que o aluno que acertou analisou o resultado, pois essa análise pode ser feita apenas visualmente, relendo o enunciado ou conferindo as contas, não ficando explícita na resolução.

**Tabela 9: Classificação dos erros nas etapas de Polya**

	Etapas de Polya	Nº de alunos que cometeram erro na etapa			
		Não Compreendeu o Problema	Não Estabeleceu um plano de resolução correto	Não Executou o plano corretamente	Errou na Análise da Solução
Nº da	1	11	1	0	0

<b>Questão</b>	<b>2</b>	11	0	5	0
	<b>3</b>	12	0	15	0
	<b>4</b>	20	5	0	0
	<b>5</b>	21	0	2	0
	<b>6</b>	27	0	0	0

Destacamos que os valores da tabela acima correspondem ao número de alunos que cometeram erro em cada etapa de Polya.

Fazendo uma análise individual das questões do Questionário II em relação aos erros ocorridos nas demais etapas de Polya, temos os seguintes resultados: Na Questão 1, uma parte considerável de alunos não conseguiu compreender o problema e uma pequena minoria compreendeu, mas não conseguiu traçar um plano de resolução. Diante disso, consideramos os resultados desse item pouco satisfatórios, pois quase 40% do total de alunos nem se quer conseguiu passar da primeira fase de interpretação.

Na Questão 2, não consideramos os resultados satisfatórios, pois houve um razoável número de alunos que não compreenderam ou compreenderam e não conseguiram executar o plano, tendo em vista que um elevado índice não conseguiu passar pela primeira fase de interpretação e daqueles que passaram um grande percentual não conseguiu executar o plano.

Na Questão 3, notamos que uma boa parte dos alunos conseguiu compreender e traçar um plano de resolução, mas não executaram esse plano. O que pode ser justificado, pois já vimos no Questionário I que aproximadamente 80% não sabe resolver soma de frações com denominadores diferentes.

Na Questão 4, os dados já são críticos, pois a grande maioria não consegue compreender o problema, e os poucos que compreendem não conseguem estabelecer um plano de resolução. Isto pode ter ocorrido porque a maioria dos alunos não consegue compreender que 1 (um inteiro) pode ser representado por qualquer fração onde numerador e denominador são iguais.

A Questão 5, mostrou quase os mesmos problemas da Questão 4, pois a grande maioria não conseguiu compreender o problema e os que conseguiram compreender e traçar um plano, não o executaram. O que também pode ser justificado pelos resultados do Questionário I, onde mais de 70% não souberam como resolver as operações de multiplicação de frações.

Por último, na Questão 6, percebemos os piores resultados, pois apenas dois alunos entre todos os pesquisados conseguiram compreender, estabelecer e executar o plano. Tendo em vista que, dos que não conseguiram interpretar, a grande maioria nem tentou elaborar um plano.

Fazendo uma comparação entre as questões diretas e as de resolução de problemas, percebemos que uma parte dos alunos apresentou maior dificuldade na interpretação do que na operação, tendo em vista que conseguem resolver a questão direta, mas não montar o problema relacionado. Essa situação ocorreu, por exemplo, na subtração de um inteiro por uma fração, onde 24,14% dos discentes resolveram apenas a questão direta, mostrando que o problema maior está na interpretação. Na adição de frações com denominadores diferentes, 51,72% dos alunos conseguiram apenas montar o problema, levando-nos a entender que a maioria interpretou, mas apresentou dificuldades em responder a questão direta, além de não ter executado corretamente o plano estabelecido.

Esse resultado traz à tona um pouco da realidade, onde a maioria dos alunos de 6º ano segue nos estudos tendo pouco conhecimento a respeito das operações com frações e principalmente em relação à resolução de problemas envolvendo essas operações. Mostra também, a nós professores, que devemos repensar como abordar esse conteúdo, pois se os resultados não são satisfatórios é por que algo está errado e precisa ser reformulado.



## CONCLUSÕES

Abordamos a seguir um breve resumo de como foi estruturado esse trabalho, os objetivos, as nossas ponderações sobre as questões de pesquisa e as nossas perspectivas futuras.

Esta pesquisa teve como objetivo principal identificar os erros cometidos por alunos do 6º na resolução de questões e problemas referentes ao conteúdo de operações com frações. E como objetivos específicos identificar as dificuldades dos alunos de 6º ano na resolução de questões e problemas referentes às operações com frações, bem como, analisar os erros de pesquisa que nos servirão de apoio para futuramente encontrar formas de resolver ou diminuir essas dificuldades.

Realizamos a pesquisa com a aplicação de dois questionários. O primeiro questionário esteve composto por sete questões de operações armadas e pretendem identificar quais os erros e as dificuldades com as operações de frações. Já o segundo questionário teve seis questões com problemas referentes às operações do primeiro questionário e buscou identificar os erros e dificuldades na interpretação, montagem do cálculo e resolução das operações.

Esta pesquisa teve participação de 29 alunos voluntários de duas turmas de 6º ano de uma escola pública estadual do agreste de Sergipe e a aplicação dos questionários foi realizada em um único momento. Nos dois questionários foi feita uma análise qualitativa e quantitativa abordando a análise de erros de Cury (1994), sendo que apenas para o segundo questionário foram utilizadas as etapas de resolução de problemas de Polya (1995).

Fizemos a descrição e quantificação dos erros e concluímos que no Questionário I o desempenho dos estudantes não foi satisfatório, pois no total de 29 alunos pesquisados, obtivemos em todas as questões um índice de erros e questões em branco superior a 30%, chegando em alguns itens a ser superior a 90%. Concluímos também que em relação ao Questionário I, a maior dificuldade dos alunos encontra-se na soma e subtração de frações com denominadores diferentes, tendo também grandes dificuldades na divisão de frações.

Em relação à descrição dos erros, percebemos que muitos são comuns, tais como: na adição de frações com o mesmo denominador, o aluno somar os denominadores. Mas ocorreram erros incomuns, do tipo: na subtração de um número inteiro por uma fração, o aluno multiplicou o denominador pelo número inteiro e somou o resultado com o numerador da fração.

No que diz respeito ao Questionário II, concluímos que o desempenho desses estudantes não foi satisfatório, pois o número de erros também foi elevado. Identificamos

ainda, que em relação a estabelecer um plano de resolução dos problemas, a maior dificuldade dos alunos encontra-se na divisão de um número inteiro por uma fração, mas não deixando de ter dificuldades nas demais operações.

De acordo com os resultados mostrados nos capítulos anteriores, buscamos dar respostas as nossas questões de pesquisa que foram abordadas da seguinte maneira:

- Quais os erros cometidos por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola da Rede Pública Estadual na resolução de questões referentes às operações com frações?

- Quais as problemáticas encontradas por eles na resolução de problemas envolvendo operações com frações?

Respondendo à primeira questão de pesquisa, notamos na análise de dados que os erros mais comuns que os alunos cometem foram: representar uma fração invertendo a parte considerada, com o todo; somar ou subtrair os denominadores; multiplicar o número inteiro pelo numerador e também pelo denominador, em uma multiplicação de um inteiro por uma fração; multiplicar o número inteiro pelo numerador e dividir o resultado pelo denominador, em uma divisão de um número inteiro por uma fração. Além dos erros com operações básicas de multiplicação e divisão de números inteiros.

Perante os resultados mostrados anteriormente concluímos que devemos pensar em alternativas diferentes das já utilizadas em sala, para que possamos melhorar o desempenho desses alunos referente ao conteúdo Frações.

No que diz respeito à segunda questão de pesquisa, uma das principais dificuldades dos alunos na resolução de problemas está em compreender o problema. A pesquisa nos mostrou que relacionando o resultado entre as questões diretas e as de resolução de problemas, uma parte dos alunos consegue resolver a questão direta, mas não consegue montar o cálculo necessário para a resolução do problema. Diante disso, consideramos que é de extrema importância procurar usar com mais frequência a resolução de problemas como metodologia de ensino, pois a realidade é que os alunos não conseguem resolver situações que exigem interpretação, o que deve ser sanado para que não se torne um obstáculo ainda maior, futuramente. É importante trabalhar a resolução de problemas desde os anos iniciais, para que os alunos sejam instigados a desenvolver o raciocínio e seu próprio conhecimento.

Houve ainda aqueles que conseguem compreender, mas não conseguem estabelecer um plano de resolução e executá-lo. Tais alunos também responderam incorretamente (ou não responderam) a questão direta relacionada. Isso indica que se trata de uma problemática a falta de conhecimento e prática com as operações entre frações, esta, talvez, ainda maior que a

primeira de saber resolver a questão direta, mas não compreender o problema. Sendo assim, consideramos como fundamental reforçar o ensino do conteúdo usando uma metodologia diferente da usada anteriormente, procurando atingir um bom nível de entendimento do aluno.

Perante os resultados mostrados anteriormente concluímos que devemos pensar em alternativas diferentes das já utilizadas em sala, para que possamos melhorar o desempenho desses alunos referente ao conteúdo Frações. Uma possibilidade é o uso de jogos. Segundo os PCN (2008),

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (2008,p.46)

Nesse sentido, propomos a criação de jogos didáticos, com a participação dos alunos, que sirvam como revisão dos conteúdos em que tiveram maiores dificuldades. Para isso, tomamos como base Burda (2012) em sua dissertação Pró-letramento em Matemática “Problematizando a construção do conceito de frações - uma construção para a formação de professores”, que traz uma proposta que envolve explorar nas oficinas pedagógicas o conceito de fração, a representação fracionária e as operações de adição e subtração; e elaborar um caderno pedagógico para professores formadores contendo oficinas com alternativas para o ensino dos números fracionários. Mas essa proposta serve para uma pesquisa futura como continuidade desta.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). Brasília: A Secretaria, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). Brasília: A Secretaria, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 23julho. 2017.

BURDA, Marta Schastai. **Pró-letramento em Matemática: problematizando a construção do conceito de frações** – uma contribuição para a formação de professores. Dissertação de Mestrado Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012.

CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática os professores e sua forma de considerar o erro dos alunos**. Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2.ed. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

DOMINGUES, Higino H. Fundamentos da Aritmética, São Paulo, Atual, 1991.

GIOVANNI, José Ruy; Giovanni, Castruci; Giovanni Jr. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 2007.

GIOVANNI, José Ruy; Benedito Castrucci. **A Conquista da Matemática**. Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; Giovanni Jr. **Matemática Pensar e Descobrir. O + novo**. São Paulo: FTD, 2002.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT)

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade: 6º ano**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Atual, 2011.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade** . São Paulo: Atual, 2012.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade** . São Paulo: Atual, 2013.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo com alunos das 4<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2005.

PATRONO, Rosângela Milagres. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental**: análise de uma proposta de ensino. Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Ouro preto, 2011.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POLYA, George. **A Arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

SOARES, M. T. C., PINTO, N. B. **Metodologia da resolução de problemas**. In: 24<sup>a</sup> Reunião ANPEd, 2001, Caxambu. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp1.htm#gt19> .Acesso em: 04 jun. 2017.

VACONCELOS, Isabel Cristina P. **A Construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

## **APÊNDICES**

**APÊNDICE I: Questionário I**

Prezado(a) aluno(a): Estou desenvolvendo um trabalho de pesquisa que busca apontar algumas dificuldades encontradas pelos alunos em interpretar e resolver questões referentes as operações com frações. Esse estudo dará suporte à escrita da minha dissertação de mestrado. Peço sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo. Peço também que resolvam cada questão com atenção. Desde já agradeço sua colaboração e esclareço que todas as informações pessoais serão mantidas em sigilo. Obrigado!

As questões que não conseguirem resolver podem ser deixadas em branco. Peço apenas que se possível, explique o motivo de não ter resolvido, seja por falta de compreensão do enunciado, dificuldade com as operações matemáticas ou qualquer outro motivo que o tenha feito desistir de resolver o problema.

**Aluno:** \_\_\_\_\_ **Turma:** \_\_\_\_\_

**Questionário I**

1. Na figura abaixo, represente a fração da parte pintada.



2. Simplifique a fração  $\frac{48}{36}$  até que fique irredutível.

3. Some as frações  $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ .

4. Some as frações  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ .

5. Subtraia as frações  $1 - \frac{1}{2}$ .

6. Resolva o produto  $320 \times \left(\frac{2}{5}\right)$ .

7. Encontre a fração irredutível de  $400 \div \left(\frac{2}{5}\right)$ .



## APÊNDICE II: Questionário II

Prezado(a) aluno(a): Estou desenvolvendo um trabalho de pesquisa que busca apontar algumas dificuldades encontradas pelos alunos em interpretar e resolver questões referentes as operações com frações. Esse estudo dará suporte à escrita da minha dissertação de mestrado. Peço sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo. Peço também que resolvam cada questão com atenção. Desde já agradeço sua colaboração e esclareço que todas as informações pessoais serão mantidas em sigilo. Obrigado!

As questões que não conseguirem resolver podem ser deixadas em branco. Peço apenas que se possível explique o motivo de não ter resolvido, seja por falta de compreensão do enunciado, dificuldade com as operações matemáticas ou qualquer outro motivo que o tenha feito desistir de resolver o problema.

**Aluno:** \_\_\_\_\_ **Turma:** \_\_\_\_\_

### Questionário II

1) De uma tela repartida em 36 partes iguais, Pedro pintou 12 partes. Que fração da tela ele pintou?

2) Pedro tem  $\frac{4}{9}$  de uma quantia e Lucas tem  $\frac{2}{9}$  dessa mesma quantia. Que fração eles têm juntos?

3) Antônio tem  $\frac{4}{5}$  de uma quantia, Lucas tem  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração eles têm juntos?

4) Pedro tem uma certa quantia, se ele gastar  $\frac{3}{8}$  dessa quantia. Que fração ele fica?

5) Maria e Lúcia foram à feira comprar frutas. Maria levou R\$ 380,00 e Lúcia levou  $\frac{4}{5}$  da quantia de Maria. Quanto Lúcia levou para a feira?

6) Paulo tem um depósito com 900 metros quadrados de área. Ele pretende colocar piso em toda a área. Se cada pedra tem  $\frac{1}{3}$  de metro quadrado de área, quantas pedras ele vai utilizar?