UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

LUÍS CARLOS GÓIS DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS PELOS DISCENTES DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO NO ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA SUA FORMA FRACIONÁRIA

ITABAIANA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

LUÍS CARLOS GÓIS DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS PELOS DISCENTES DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO NO ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA SUA FORMA FRACIONÁRIA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Dra Marta Élid Amorim Mateus.

Coorientadora: Professora Me Viviane de Jesus Lisboa Aquino.

ITABAIANA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

O48a

Oliveira, Luís Carlos Góis de.
Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária / Luís Carlos Góis de Oliveira; orientadora Marta Élid Amorim Mateus; co-orientadora Viviane de Jesus Lisboa Aquino. – Itabaiana, 2017.
97 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Frações. 3. Teoria dos erros. 4. Estudantes – Ensino fundamental. I. Mateus, Marta Elid Amorim, orient. II. Aquino, Viviane de Jesus Lisboa, co-orient. III. Título.

CDU 511.13

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária

por

Luis Carlos Gois de Oliveira

Aprovada pela banca examinadora:

Viviane de Jesus Lisboa Aquino
Prof.ª Viviane De Jesus Lisboa Aquino - UFS
Orientador

Fábio dos Santos
Prof. Dr. Fabio dos Santos - UFS
Primeiro Examinador

Tetcheverria
Prof.ª Dr.ª Teresa Cristina Etcheverria - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Agosto de 2017

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

DIDICATÓRIA

Educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo.

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Ao nosso Deus, por iluminar sempre o meu caminho, me abençoando com tantas graças; Aos meus pais, Erivaldo e Genira, pela educação, princípios e valores transmitidos no decorrer de minha vida; Aos professores do curso, em especial, as minhas orientadoras, professora Marta e professora Viviane que estiveram incansáveis me ajudando nessa caminhada; A banca em nome do professor Fábio e da professora Tereza por terem contribuído nos ajustes da pesquisa. A minha esposa Eliana que foi muito importante para essa realização; A professora Shirley pelas dicas dadas no decorrer desse trabalho; Aos meus irmãos, Jéssica, Vinícius e Toninho pelo apoio dado. Aos meus amigos e em particular a Rokenedy, Elisângela e Rogério que fizeram parte dessa caminhada ao meu lado no PROFMAT, pela oportunidade de troca de conhecimentos, compreensão e apoio nessa caminhada, sem os quais provavelmente hoje eu não estaria concluindo esta importante etapa da minha vida.

Resumo

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de investigar quais são as dificuldades apresentadas por alunos do sétimo ano com relação as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) no estudo das Frações e ao mesmo tempo analisar se essas mesmas dificuldades persistem com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Percebe-se que este assunto é pouco explorado nos livros didáticos do Ensino Fundamental e com isso os alunos demonstraram uma certa dificuldade nas suas resoluções, visto, apresentaram mais dificuldades os alunos do ensino médio. A pesquisa fundamentou-se numa abordagem qualitativa e numa pesquisa de campo. Foi feita a aplicação de um questionário a vinte alunos da turma do sétimo ano e a vinte alunos de uma turma de primeiro ano do colégio estadual localizada na cidade de Nossa Senhora da Glória, estado de Sergipe. A análise dos dados deu-se mediante estudos dos obstáculos e análise dos erros apresentados pelos alunos na resolução do questionário. Diante de todas as dificuldades encontradas pelos alunos, concluímos que há um longo caminho a ser percorrido para que os alunos tenham um conhecimento satisfatório sobre o tema do estudo.

Palavras-chaves: Frações; Análise de erros: fundamental e médio; Comparação dos resultados.

Abstract

The present work was developed with the purpose of investigating the difficulties presented by seventh year students regarding the four fundamental operations (addition, subtraction, multiplication and division) in the study of Fractions and at the same time to analyze if these same difficulties persist with The first year of high school. It is noticed that this subject is little explored in the textbooks of elementary education and with this the students demonstrated a certain difficulty in its resolutions, since the students of the high school presented more difficulties. The research was based on a qualitative approach and a field research. A questionnaire was applied to twenty students from the seventh grade class and to twenty students from a first year class at state college, located in the city of Nossa Senhora da Glória, state of Sergipe. The analysis of the data was made through studies of the obstacles and analysis of the errors presented by the students in the resolution of the questionnaire. In the face of all the difficulties encountered by the students, we conclude that there is a long way to go so that the students have a satisfactory knowledge about the subject of the study.

Keywords: Fractions; Error analysis: basic and average; Comparison of results.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

Sumário

APRESENTAÇÃO

É enorme o número de alunos que apresentam grandes dificuldades no estudo da matemática. Ela é uma das disciplinas responsáveis pelo grande abandono da escola por parte dos jovens na Educação Básica, isso talvez por conta do ensino da matemática, na maioria das vezes, ser desenvolvido de maneira predominantemente tradicional, ou seja, o professor é o centro do processo e os conteúdos são apresentados aos alunos de maneira mecânica.

O grande número de erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental e Médio no estudo da matemática sempre despertaram curiosidade na minha atividade docente, sendo este o motivo do tema escolhido para essa pesquisa qualitativa por meio de um trabalho investigativo, que procura compreender o que leva os alunos a cometerem tantos erros.

Percebe-se que os conhecimentos referentes ao conteúdo de frações aprendidos no Ensino Fundamental não são consolidados e que, por isso, os alunos dos anos seguintes apresentam lacunas de aprendizagem no referido conteúdo. Segundo Bertoni (2009), um dos assuntos mais difíceis trabalhados no ensino fundamental são as frações. Diante dessas constatações, selecionamos como tema de investigação o processo de ensino das frações, fundando-nos na busca de possíveis respostas para os seguintes questionamentos:

- Os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e os do primeiro ano do Ensino Médio da escola escolhida, possuem domínio do conteúdo Frações?
- Após análise dos questionários aplicados, os erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e os do primeiro ano do Ensino Médio se assemelham?

No Capítulo 1 foi exposto o embasamento teórico do conteúdo estudado. No Capítulo 2 encontram-se as configurações da pesquisa e a fundamentação teórica que norteou este estudo. O Capítulo 3 traz o estudo e a interpretação dos questionários aplicados sob a perspectiva da análise de erros. Para a coleta de dados fez-se o uso de um questionário aplicado no colégio estadual no município de Nossa Senhora da Glória, Sergipe, para vinte alunos do sétimo ano e vinte do primeiro ano.

O questionário aplicado constava de oito questões objetivas tratando principalmente das operações entre frações. O Capítulo 4 trabalha relaciona os resultados obtidos no Ensino Fundamental com os do Ensino Médio. Finalizando, apresentamos as conclusões e uma proposta de pesquisa futura para tentar sanar tais dificuldades.

CAPÍTULO

CONTEÚDOS RELACIONADOS AO ESTUDO

Neste capítulo abordamos os conteúdos utilizados nos questionários da pesquisa. De início definimos o máximo divisor comum entre dois números inteiros, mínimo múltiplo comum na sequência mostraremos o Conjunto dos Números Racionais: construção e relação de ordem. Na construção desse capítulo, tomamos como referência os livros de HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT) e Fundamentos de Aritmética/Higino H. Domingues – São Paulo, Atual, 1991.

1.1 Máximo Divisor Comum (mdc)

Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um divisor comum de a e b se a e $d|a$ e $d|b$.

Exemplo: os números $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ são os divisores comuns de 16 e 24.

Definição 1: Diremos que um número $d \geq 0$ é um máximo divisor comum (mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:

(i) d é um divisor comum de a e b, e

(ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) pode ser renunciada como segue:

(iii) Se c é um divisor comum de a e b, então a e $c|d$.

Isso implica que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então, $d|d'$ e $d'|d$, o que, juntamente com as condições $d \geq 0$ e $d' \geq 0$, implicam que $d = d'$. Ou seja, o mdc de dois números, quando existe é único.

O mdc de a e b, quando existir, será denotado por (a, b).

Como o mdc de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, temos que: $(a, b) = (b, a)$.

Em alguns casos particulares, é fácil verificar a existência do mdc. Por exemplo, se a é um número inteiro, tem-se claramente que $(0, a) = |a|$, $(1, a) = 1$ e que $(a, a) = |a|$.

Mais ainda, para todo $b \in \mathbb{Z}$, temos que: $a|b \iff (a, b) = |a|$.

De fato, se $a|b$, temos que $|a|$ é um divisor comum de a e b, e se c é um divisor comum de a e b, então c divide $|a|$, o que mostra que $|a| = (a,b)$. Reciprocamente, se $(a,b) = |a|$, segue que $|a|$ divide b, logo $a|b$.

Como todo número inteiro divide 0, o mdc de a e b, onde $a = b = 0$, é 0, pois esse é um divisor comum de a e b e é o único número divisível por todos os divisores de 0. Reciprocamente, se o mdc de a e b é 0, então 0 divide a e divide b, maso único número divisível por 0 é o próprio 0, logo $a = b = 0$.

A demonstração da existência do mdc de qualquer par de números inteiros, ambos não nulos, é bem mais sutil.

Seja $d > 0$ um mdc de a e b, não nulos, supondo que exista, e seja c um divisor comum qualquer desses números, então $|c|$ divide d e, portanto, $c \leq |c| \leq d$. Isso nos mostra que o máximo divisor comum de dois números, não ambos nulos, quando existe, é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Poder-se-ia, como se faz usualmente no Ensino Fundamental, definir o máximo divisor comum de dois números a e b, não ambos nulos, como sendo o maior elemento do conjunto de todos os divisores comuns de tais números. Essa definição não garantiria automaticamente a validade da propriedade (ii) da definição de mdc, o que não é vantajoso, pois é essa propriedade que possibilita provar os resultados subsequentes, e não o fato de o mdc se o maior dos divisores comuns.

Observe que dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se existir o mdc (a,b) de a e b, então $(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$.

Assim, para efeito do cálculo do mdc de dois números, podemos sempre supor não negativos.

Lema 1: sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então, (a,b) existe e $(a,b) = (a, b - na)$.

Demonstração: Seja $d = (a, b - na)$. Como $d|a$ e $d|(b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b - na$ e, portanto, $c|d$. Isso prova que $d = (a,b)$.

1.1.1 Algoritmo de Euclides

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, podemos supor $b \leq a$. Se $b = 1$ ou $b = a$, ou ainda $b|a$, já vimos que $(a, b) = a$. Suponhamos, então, que $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever: $a = bq_1 + r_1$, com $0 < r_1 < b$.

Temos duas possibilidades:

a) $r_1|b$. Em tal caso, $r_1 = (b, r_1)$ e pelo Lema $(a, b) = (a, b - na)$, temos que:

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1 b) = (b, a) = (a, b),$$

e o algoritmo termina.

b) $r_1 \nmid b$. Em tal caso, podemos efetuar a divisão de b por r_1, obtendo:

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente temos duas possibilidades:

a') $r_2|r_1$. Nesse caso, $r_2 = (r_{1,} r_2)$ e novamente pelo Lema $(a, b) = (a, b - na)$,

$$r_2 = \left(r_{1,} r_2\right) = (r_{1,} b - q_2 r_1) = \left(r_{1,} b\right) = (a - q_1 b, b) = (a, b),$$

e paramos, pois termina o algoritmo.

b') $r_2 \nmid r_1$. Nesse caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo:

$$r_{1,} = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Continuamos esse procedimento até que pare. Isso sempre ocorre, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > \cdots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum n, temos que $r_n|r_{n-1}$, o que implica que $(a, b) = r_n$.

O algoritmo acima pode ser sintetizado e realizado na prática como mostramos a seguir.

Inicialmente, efetuamos a divisão $a = bq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama:

	q_1	
a	b	
r_1		

A seguir, continuamos efetuando a divisão $b = r_1 q_2 + r_2$ e colocamos os números envolvidos no diagrama:

	q_1	q_2	
a	b	$r_{1,}$	
r_1	r_2		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Exemplo: Calculemos o mdc de 372 e 162

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6
48	18	12	6		

Observe que, no exemplo acima, o Algoritmo de Euclides fornece-nos:

$$6 = 18 - 1 \cdot 12$$

$$12 = 48 - 2 \cdot 18$$

$$18 = 162 - 3 \cdot 48$$

$$48 = 372 - 2 \cdot 162$$

Donde segue que:

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (48 - 2 \cdot 18) = 3 \cdot 18 - 48 =$$

$$3 \cdot (162 - 3 \cdot 480 - 48 = 3 \cdot 162 - 10 \cdot 48 =$$

$$3 \cdot 162 - 10 \cdot (372 - 2 \cdot 162) = 23 \cdot 162 - 10 \cdot 372$$

Temos, então, que:

$$(372,162) = 23 \cdot 162 + (-10) \cdot 372$$

Note que conseguimos, através do Algoritmo de Euclides de trás para frente, escrever

$6 = (372,162)$ como múltiplo de 162 mais um múltiplo de 372.

1.1.2 Propriedades do mdc

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Definimos o conjunto

$$I(a,b) = \{ xa + yb; x, y \in \mathbb{Z} \}.$$

Note que se a e b não são simultaneamente nulos, então $I(a,b) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

De fato, temos que $a^2 + b^2 = a.a + b.b \in I(a,b) \cap \mathbb{N}$.

A seguir utilizaremos a notação

$d\mathbb{Z} = \{Id; I \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos. Se $d = \min I(a,b) \cap \mathbb{N}$, então

(i) d é o mdc de a e b; e

(ii) $I(a,b) = d\mathbb{Z}$

Demonstração no livro texto páginas 94 e 95.

Corolário 1: Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(na, nb) = n(a, b)$.

Demonstração: Note inicialmente que

$$I(na, nb) = nI(a,b) \quad (= \{nz;\ z \in I(a,b)\})$$

Agora, o resultado segue-se do teorema e do fato de que

$$\min(nI(a,b) \cap \mathbb{N}) = n\min(I(a,b) \cap \mathbb{N}).$$

Corolário 2: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, não nulos, tem-se que

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1.$$

Demonstração: Pelo corolário 1, temos que

$$(a,b)\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = \left((a,b)\frac{a}{(a,b)}, (a,b)\frac{b}{(a,b)}\right) = (a,b)$$

o que prova o resultado.

Dois números inteiros a e b serão ditos primos entre si, ou coprimos, se $(a,b) = 1$; ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1.

Proposição 1: Dois números inteiros a e b são primos entre si, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$.

Demonstração: Livro texto página 96.

Teorema 2: (LEMA DE GAUSS). Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \setminus bc$ e $(a,b) = 1$, então $a \setminus c$.

Demonstração: Livro texto página 96.

Corolário 3: Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com b e c não ambos nulos, temos que

$$b \setminus a \quad \text{e} \quad c \setminus a \;\Leftrightarrow\; \frac{bc}{(b,c)} \setminus a.$$

Demonstração: Livro texto página 97.

1.2 Mínimo Múltiplo Comum (mmc)

Diremos que um número inteiro é um múltiplo comum de dois números inteiros dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Em qualquer caso os números ab e 0 são sempre múltiplos de a e b.

Diremos que um número inteiro $m \geq 0$ é um mínimo múltiplo comum (mmc) dos números inteiros a e b, se possuir as seguintes propriedades:

(i) m é um múltiplo comum de a e b, e

(ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$.

Por exemplo, 12 é um múltiplo comum de 2 e 3, mas não é um mmc desses números. O número 6 é um mmc de 2 e 3.

Se m e m' são dois mínimos múltiplos comuns de a e b, então, do item (ii) da definição acima, temos que $m|m'$ e $m'|m$. Como m e m' são números inteiros não negativos, temos que $m = m'$, o que mostra que o mínimo múltiplo comum, se existe, é único.

Por outro lado, se m é o mmc de a e b e c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$. Portanto, se c é positivo, temos que $m \leq c$, mostrando que m é o menor dos múltiplos comuns positivos de a e b.

O mínimo múltiplo comum de a e b, se existe, é denotado por $[a, b]$. Caso exista $[a, b]$ é fácil mostrar que $[-a, b] = [a, -b] = [-a, -b] = [a, b]$.

Assim, para efeito de cálculo do mmc de dois números, podemos sempre os supor não negativos.

É também fácil verificar que $[a, b] = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$. De fato, se $[a, b] = 0$, então 0 divide ab, que é múltiplo de a e de b, logo $ab = 0$ e, portanto, $a = 0$ ou $b = 0$. Reciprocamente, se $a = 0$ ou $b = 0$, então 0 é o único múltiplo comum de a e b, logo $[a, b] = 0$.

Proposição 2: Dados dois números inteiros a e b, temos que $[a, b]$ existe e $[a, b](a, b) = |ab|$.

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$, a igualdade acima é trivialmente satisfeita. É também fácil verificar que a igualdade é verificada para a e b se, e somente se, ela é verificada para $\pm a$ e $\pm b$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor $a, b \in \mathbb{N}$. Ponhamos $m = \frac{ab}{(a,b)}$. Como $m = a\frac{ab}{(a,b)} = b\frac{ab}{(a,b)}$, temos que $a|m$ e $b|m$. Portanto, m é um múltiplo comum de a e b.

Seja c um múltiplo comum de a e b; $c = na = n'b$. Segue daí que $n\frac{a}{(a,b)} = n'\frac{b}{(a,b)}$.

Como $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$, daí $\frac{a}{(a,b)}$ e $\frac{b}{(a,b)}$ são primos entre si, segue-se, pelo Lema de Gaus que $\frac{a}{(a,b)}$ divide n', e, portanto, $m = \frac{a}{(a,b)}b$ divide $n'b$ que, é igual a c.

Em virtude da proposição acima, o mínimo múltiplo comum de dois inteiros ambos não nulos podem ser encontrados por meio do Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc, pois basta dividir o módulo do produto dos dois números pelo mdc.

1.3 Números racionais: construção, operação e relação de ordem

Seja $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z} \,/\, m \neq 0\}$ e consideremos sobre $\mathbb{Z} \text{ X } \mathbb{Z}^* = \{(m,n)/m \in \mathbb{Z}^*\}$ a relação $\sim$ definida por

$(m,n) \backsim (p,q)$ se, e somente se, $mq = np$

Para $\sim$ valem as três propriedades que caracterizam uma relação de equivalência, ou seja:

(i) $(m,n) \backsim (m,n)$, para todo $(m,n) \in \mathbb{Z} \text{ X } \mathbb{Z}^*$ (reflexiva)

(ii) $(m,n) \backsim (p,q) \rightarrow (p,q) \backsim (m,n)$ (simétrica)

(iii) $(m,n) \backsim (p,q)$ e $(p,q) \backsim (r,s) \rightarrow (m,n) \backsim (r,s)$ (transitiva)

Verifiquemos (iii) já que (i) e (ii) decorrem diretamente da definição.

Por hipótese: $mq = np$ e $ps = qr$. Multiplicando a primeira dessas igualdades por s e a segunda por n, resulta:

$mqs = nps$ e $nps = nqr$. Daí,

$mqs = nqr$ e portanto, cancelando q, o que é possível pois $q \in \mathbb{Z}^*$, obtém-se $\text{ms} = \text{nr}$.

Donde $(m,n) \backsim (r,s)$. $nx = my$

Logo a relação $\sim$ determina sobre $\mathbb{Z}$ X $\mathbb{Z}^*$ uma partição em classes de equivalência. Para cada um par $(m,n) \in \mathbb{Z}$ X $\mathbb{Z}^*$, a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicada por $\frac{m}{n}$. Ou seja:

$$\frac{m}{n} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \text{ X } \mathbb{Z}* \,|(x,y) \sim (m,n)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \text{ X } \mathbb{Z}* \,|\, nx = my$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \text{ X } \mathbb{Z}* \,|\text{2x} = \text{y}\} = \{(1,2);\ (-1,-2);\ (2,4);\ (-2,-4);\ \ldots\}$$

Devido à propriedade reflexiva, é claro que $(m,n) \in \frac{m}{n}$, para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}$ X $\mathbb{Z}^*$, além disso, como

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \leftrightarrow (m,n) \sim (r,s)$$

(resultado da teoria das relações de equivalência), então.

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \leftrightarrow ms = nr$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \cdots$$

O conjunto quociente de $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$ por $\sim$, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por $\sim$ sobre $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$, será designado por $\mathbb{Q}$. Logo:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} |(m,n) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*\}$$

Assim, cada a $\in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}$ ($\mathrm{m} \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^*$), essa representação é chamada de *fração*. Em cada uma delas m é o numerador e n o denominador. Duas frações que representam uma mesma classe de equivalência são chamadas de frações equivalentes.

Dois elementos a e b $\in \mathbb{Q}$ sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, então

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \; e \; \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}.$$

Pois $m(ns) = n(ms) \; e \; r(ns) = s(nr)$

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados números racionais desde de que se definam adição, multiplicação e relação de ordem, conforme o faremos nos itens seguintes.

1.3.1 Adição em $\mathbb{Q}$

Definição 2: Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se soma de a com b e indica-se por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{m}{n} . \frac{s}{s} + \frac{r}{s} . \frac{n}{n} = \frac{ms}{ns} + \frac{rn}{sn} = \frac{ms + nr}{ns}$$

Mostremos que a soma $a + b$ independe dos pares ordenados escolhidos para definir a e b. de fato, $a = \frac{m}{n} = \frac{m\prime}{n\prime}$, e $b = \frac{r}{s} = \frac{r\prime}{s\prime}$, então

$$mn' = nm' e\; rs' = sr'$$

Multiplicando a primeira dessas igualdades por ss' e a segunda por nn' e somando membro a membro as relações obtidas

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n'$$

ou seja

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

o que garante

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}$$

Portanto a correspondência

$$(a, b) \rightarrow a + b,$$

Conforme a definição 2 é uma aplicação e, portanto, trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos adição em $\mathbb{Q}$.

Para a adição em $\mathbb{Q}$ valem as seguintes propriedades:

(i) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall\, a, b\; e\; c\; \in \mathbb{Q}$ (associativa)

(ii) $a + b = b + a,\; \forall\, a, b \;\in \mathbb{Q}$ (comutativa)

(iii) Existe elemento neutro: é a classe de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \cdots$, que indicamos por 0 apenas. De fato

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m.1 + 0.n}{n.1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n}$$

Para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

(iv)Todo a $\in$ $\mathbb{Q}$ admite simétrico aditivo (oposto) em $\mathbb{Q}$: se $a = \frac{m}{n}$, então $-a = \frac{-m}{n}$, pois

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn = (-m)n}{mn} = \frac{0}{mn} = 0$$

Usaremos a notação $\mathbb{Q}^* = \{a \in \mathbb{Q} | a \neq 0\}$

Definição 3: Se $a, b \in \mathbb{Q}$, denomina-se diferença entre a e b, e indica-se por, $a - b$ o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a - b = a + (-b)$$

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$, para todo $b \in \mathbb{Q}$, então

$$(a, b) \to a - b$$

É uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos subtração em $\mathbb{Q}$.

Tal como ocorre em $\mathbb{Z}$, valem em $\mathbb{Q}$ as seguintes propriedades, envolvendo a ideia de oposto e de subtração:

- $-(a + b) = -a - b$
- $(a - b) + b = a$
- $a + x = b \Rightarrow x = b - a$
- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

1.3.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Definição 4: Chamamos produto de $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ por $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ o elemento $ab = a.b = \frac{mr}{ns} \in \mathbb{Q}$

A multiplicação em $\mathbb{Q}$ é a operação definida por

$$(a, b) \to ab$$

para quaisquer a e $b \in \mathbb{Q}$.

Valem as seguintes propriedades:

(i): $a(ac) = (ab)c, \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

(ii): $ab = ba, \forall a, b \in \mathbb{Q}$ (comutitativa)

(iii): Existe elemento neutro: é a classe $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots$

Que indicamos simplesmente por 1. De fato:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n}$$

Para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

(iv): Todo $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$, admite simétrico multiplicativo (inverso): se

$$a = \frac{m}{n}$$

Então $m \neq 0$ e daí $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e portanto

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{m.n}{n.m} = 1$$

Indicando por a^{-1}, como o é praxe, inverso de a, então

$$a = \frac{m}{n}, a \neq 0 \ \rightarrow a^{-1} = \frac{n}{m}$$

Disso decorre também que se $a \neq 0$;

$$(a^{-1})^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n} = a$$

Outro fato importante no que se refere aos inversos é que se a e b são elementos não nulos:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

De fato, como

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$$

Então efetivamente $a^{-1}b^{-1}$ é o inverso de ab.

A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$

Convém ainda destacar os seguintes resultados para a multiplicação em $\mathbb{Q}$:

- $a(b - c) = ab - ac$
- $a(0) = 0$
- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \ ou \ b = 0$

Definição 5: A operação de $\mathbb{Q} \, X \, \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por:

$$(a, b) \longrightarrow ab^{-1}$$

O elemento ab^{-1}é chamado quociente de a por b e pode ser indicado por $a : b$. Por exemplo, se $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$, então:

$$a : b = \frac{2}{3} . \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \ . \ \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

Para a divisão em $\mathbb{Q}$ vale a seguinte propriedade: se $a, b, c \ \in \ \mathbb{Q} \ e \ c \ \neq 0$, então:

$$(a + b): c = a : c + b : c$$

De fato, se $c = \frac{r}{s}$ $(r, s \ \in \ \mathbb{Z}^*)$, então:

$(a + b): c = (a \ + b \ ).\frac{s}{r} = a \ .\frac{s}{r} + b \ .\frac{s}{r} = a \ : \frac{r}{s} + b \ : \ \frac{r}{s} = a \ : c + b \ : c.$

CAPÍTULO 2

CONFIGURAÇÕES DA PESQUISA E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Configurações da pesquisa

O presente estudo busca encontrar elementos para entender as dificuldades de aprendizado do conteúdo frações em alunos da Educação Básica, buscando refletir sobre os motivos que os levam a ter insucesso nesse conteúdo.

Os alunos devem ser os protagonistas de sua aprendizagem, mas para isso, é necessário que sejam “provocados” pelos docentes e que os mesmos mostrem a eles que o conhecimento construído servirá de “ponte” para transformação de suas vidas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, “a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” (BRASIL, 1997, p. 19).

2.1.1 Antecedentes e motivações

Ser docente é algo muito sério, pois exige que o professor analise sua prática pedagógica e verifique se as suas metodologias estão despertando nos alunos a vontade de aprender. Ao observar a enorme quantidade de erros cometidos pelos alunos de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, comecei a refletir sobre o que poderia ser feito para melhorar o aprendizado desses discentes e o porquê do fracasso escolar deles.

Há mais de dez anos lecionando matemática na rede pública de ensino, percebi a grande dificuldade dos alunos em aprender os conteúdos relacionados ao Conjunto dos Números Racionais, de maneira mais específica, o estudo das frações. Grande foi meu esforço para amenizar esses problemas, por meio da aplicação de exercícios diversificados, correções e explicações dos conteúdos, usando diversas metodologias e avaliando-os sempre de forma diagnóstica, formativa e somativa.

Mesmo assim, os erros persistiram e, dessa forma, percebi que era necessária uma investigação para dar respostas às minhas angústias e inquietações, para compreender o que acontece com a aprendizagem desse conteúdo, que os leva a cometer tantos erros. Percebo também que essa dificuldade de entender o conteúdo de frações não se limita ao Ensino Fundamental, na verdade persiste nos alunos do Ensino Médio.

A matemática, geralmente, é vista como um “bicho de sete cabeças”, o que faz dessa disciplina uma das mais difíceis na Educação Básica. Essa visão que os alunos e a sociedade têm da Matemática precisa ser mudada e cabe aos docentes reverter essa situação. Percebo também que a problemática acontece devido à forma como os conteúdos são trabalhados em sala de aula, pois, geralmente, são pouco explorados em todo o Ensino Fundamental e, muitas vezes, no Ensino Médio a matemática continua sendo mostrada de maneira tradicional, mecânica e desinteressante, provocando bastantes problemas, por exemplo: excesso de reprovação, falta de interesse e aversão à disciplina.

O maior desafio da maioria dos docentes é que, pelo fato de terem sido educados pelo método tradicional, imaginam que deveriam lecionar da mesma forma. Ficar livre da antiga maneira de ensinar e reinventar uma nova é o desafio que temos neste milênio. De acordo com Freire,

> É próprio do pensar certo da disponibilidade ao risco, a aceitação do novo que não pode ser negado ou acolhido só porque é novo, assim como o critério de recusa ao velho não é apenas o cronológico. O velho que preserva sua validade ou encarna uma tradição ou marca uma presença no tempo continua novo. (FREIRE, 1996, p.39).

O educador deve buscar alternativas para tentar ajudar o aluno no processo de ensino e aprendizagem. Na minha prática docente, no conteúdo de frações, tento relacionar o estudo das frações com problemas do cotidiano para motivar os alunos a aprender o conteúdo de forma dinâmica e contextualizada. A partir do momento que o professor começa a refletir sua prática docente, a mudança já começou a acontecer. É necessário que o mesmo reflita sua prática constantemente para não permanecer no erro e perceba que sua ação pedagógica é o que transforma erros em acertos. Ainda nessa perspectiva, concordo com Enricone, quando diz que,

> São os professores que, em última instância, decidem ou não se querem ou não mudar. Cabe toda uma análise sobre o professor como profissional e, sobretudo, como um profissional reflexivo. Aumentam as responsabilidades dos professores que, pois, além dos conhecimentos de suas disciplinas, devem ser facilitadores da aprendizagem de seus alunos e organizadores das atividades na sala de aula. (ENRICONE, 2001, p. 52).

Após análise da minha prática e das leituras sobre como transformá-la, decidi aceitar o desafio de mudança de atitude em sala de aula e creio que já estou agindo socialmente, pois, ao procurar me conscientizar de que as dificuldades dos estudantes podem ser um reflexo da minha forma de ensinar, comecei a questionar seus raciocínios e estou permitindo o desenvolvimento de atitudes críticas, que são importantes não só na vida escolar, mas também no convívio social e nas atitudes face aos problemas do cotidiano.

2.1.2 Objetivos e questões de pesquisa

O objetivo desta pesquisa é contribuir para o enriquecimento do estudo sobre o Conjunto dos Números Racionais, em sua forma fracionária. O presente trabalho busca identificar e analisar as dificuldades de aprendizagem em frações dos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio estadual, situado no município de Nossa Senhora da Glória, estado de Sergipe. E após analisar os dados coletados no questionário aplicado, verificar se as dificuldades apresentadas são as mesmas. Segundo Alves-Mazotti (1998, p. 149), "Um projeto de pesquisa consiste basicamente em um plano para uma investigação sistemática que busca uma melhor compreensão de um dado problema".

Tendo em vista o que se pretende alcançar nesta pesquisa e o que nos motivou a propor o estudo dessa problemática, temos as seguintes questões norteadoras:

- Os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e os do primeiro ano do Ensino Médio da escola escolhida, possuem domínio do conteúdo frações?
- Os erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e os do primeiro ano do Ensino Médio são os mesmos?

Vale ressaltar que a pesquisa foi realizada com vinte alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e vinte alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Com a aplicação desse questionário, pretende-se obter um diagnóstico de como os alunos estão assimilando o conteúdo de frações.

2.1.3 Metodologia de pesquisa

Essa pesquisa está classificada, de acordo Fiorentini e Lorenzato (2006), como naturalista ou de campo, visto que os dados foram coletados no colégio estadual em turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. De acordo com Fiorentini e Lorenzato a pesquisa de campo,

> [...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa - ação, aplicação de questionário, teste, entre outros. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 106).

No nosso caso, optamos pela aplicação do questionário numa escola localizada no sertão sergipano, município de Nossa Senhora da Glória - Sergipe, que conta com um grande número de professores de matemática e de alunos. Desde o primeiro instante, o contato com a direção foi receptivo, valorizando o pesquisador e a pesquisa como instrumentos de transformação no processo ensino e aprendizagem. A escola atrai discentes de diversos povoados do município, por ser conceituada na região.

Foram colhidas amostras no universo escolar das turmas citadas, e selecionados 20 alunos do sétimo ano e 20 alunos do primeiro ano. Os 40 alunos foram identificados da seguinte forma: do F1 até o F20 são os alunos do sétimo ano e do M1 até o M20 são os alunos do primeiro ano. Esta ordem não foi estabelecida por nenhum critério específico.

O instrumento de avaliação foi a aplicação de um questionário com questões abertas, contextualizadas e não contextualizadas, objetivando analisar se os discentes conseguem montar o algoritmo dos problemas. O questionário foi composto por oito questões abertas, que abordavam os conteúdos de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, frações equivalentes, questões com figuras e problemas envolvendo frações, e foi aplicado em turnos distintos, matutino e vespertino.

Foi destinado para a aplicação do questionário uma hora e trinta minutos, que corresponde a dois horários de aula. Antes da aplicação, solicitei que os alunos fizessem uma leitura minuciosa das informações que estavam no cabeçalho. Além disso, ficou esclarecido que o objetivo era avaliar os seus conhecimentos sobre o assunto e utilizá-los como objeto de uma pesquisa, possibilitando a análise dos erros dos mesmos, tendo como referência os teóricos que discutem o obstáculo e o erro no processo de aprendizagem.

É notório que extinguir o erro no processo ensino e aprendizagem é impossível, pois é por meio dele que os estudantes podem se conscientizar de suas dificuldades e tentar construir seu conhecimento.

2.1.4. A elaboração do instrumento da pesquisa

Com o intuito de elaborar um questionário eficiente e que atendesse à expectativa da pesquisa, realizamos consultas sobre o conteúdo de frações em coleções matemáticas, do Ensino Fundamental. Várias foram as referências, entre elas estão: “A Conquista da Matemática” de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2014); “Projeto Teláris”, de Luiz Roberto Dante (2016); “Vontade de Saber”, de Joamir Sousa e Patrícia Moreno Pataro (2015), “Matemática Uma Nova Abordagem” de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (2010) e “Projeto Araribá”, de Fábio Martins de Leonardo (2013).

Com o objetivo de analisar se os erros dos alunos que participaram da pesquisa eram os mesmos, o questionário aplicado foi idêntico para ambas as turmas.

O questionário aplicado foi a ferramenta utilizada para construção e validação dessa pesquisa, pois através dele buscamos responder às questões norteadoras deste trabalho. Vale ressaltar que no questionário aplicado as questões eram todas abertas com a seguinte configuração:

A questão número um solicita resolução das somas e subtrações de frações presentes nos itens a), b), c) e d), envolvendo operações de frações com denominadores iguais, nos itens a) e b) e denominadores diferentes, nos itens c) e d).

Questão 1 - Resolva as operações abaixo:

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$

A questão número dois solicita resolução das multiplicações e divisões de frações presentes nos itens a), b), c) e d), envolvendo operações com números naturais e frações.

Questão 2 - Resolva as operações abaixo:

a) $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$ b) $6 \times \frac{2}{5}$ c) $\frac{8}{6} \div \frac{2}{3}$ d) $10 \div \frac{2}{5}$

A questão número três solicita resolução de uma potenciação com fração no item a) e de uma radiciação com fração no item b).

Questão 3 - Determine:

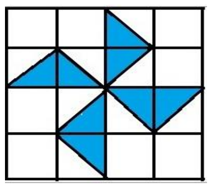
a) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ b) $\sqrt{\frac{64}{25}}$

A questão número quatro solicita que o discente interprete a questão, monte o algoritmo matemático e em seguida resolva.

Questão 4 - João reservou $\frac{1}{5}$ de seu salário para gastar com lazer e $\frac{1}{4}$ para comprar roupas. Que fração de seu salário João reservou para os gastos com lazer e compra de roupas?

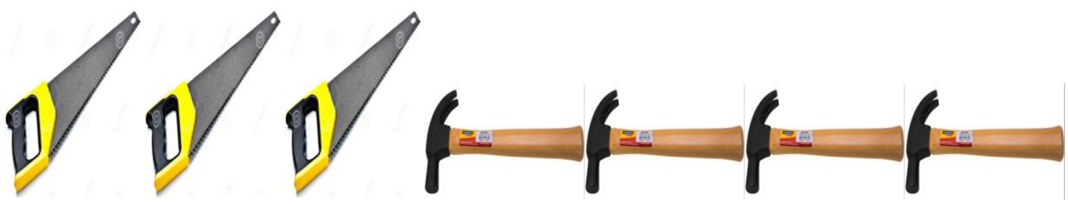
A questão número cinco busca que o aluno identifique uma fração como parte de um todo.

Questão 5 - A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em azul corresponde a que fração da área do quadrado?



A questão número seis, assim como a questão cinco, solicita que o aluno identifique uma fração como parte de um todo.

Questão 6 - Qual fração corresponde aos serrotes neste grupo de ferramentas?



A questão número sete propunha analisar se os alunos tinham a noção do que sejam frações equivalentes;

Questão 7- Pedrinho aprontou mais uma vez! João tinha separado as cartelas com as frações equivalentes a $\frac{5}{9}$, e Pedrinho misturou tudo. Vamos ajudar a João, indicando as frações equivalentes a $\frac{5}{9}$.

$\frac{72}{45}$ $\frac{45}{72}$ $\frac{25}{81}$ $\frac{15}{27}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{10}{18}$

A questão número oito solicita de aluno no item a) a interpretação de que precisa utilizar a noção de frações equivalentes para resolvê-la, e no item b) associa que para encontrar a solução necessita da multiplicação de um número natural por uma fração.

Questão 8 - Na partida final de um campeonato de basquete, Alice marcou $\frac{7}{42}$ do total de pontos marcados, Mônica, $\frac{5}{58}$, e Sílvia, $\frac{1}{6}$.

a) Quais das atletas marcaram o mesmo número de pontos?
b) Sabendo que o total de pontos marcados nessa partida foi de 174, quantos pontos foram marcados por:

- Alice?
- Mônica?
- Sílvia?

2.1.5. Como os livros didáticos abordam os conteúdos

O ensino de frações não está tendo, pelo professor, merecida importância entre os conteúdos de matemática trabalhados no 7º ano. Na maioria das vezes, o professor trabalha em sala de aula de forma mecânica e tradicional, e não permite que o educando faça conexão entre a teoria e a prática. O professor apresenta o conteúdo de forma abstrata, dedica pouco tempo à parte conceitual de frações e muito tempo para os cálculos.

Um exemplo de como é trabalhada a parte conceitual temos: um retângulo representa uma barra de chocolate, que é repartido em três partes e distribuído igualmente para três pessoas. Quanto cada pessoa vai receber de chocolate? Como representamos isso usando frações? Essa forma de se trabalhar não permite que o educando compreenda e relacione o problema, contextualizando-o.

Já na realização dos cálculos, quando se adiciona ou subtrai frações age-se mecanicamente seguindo a regra: se as frações possuem mesmo denominador, conservam-se os denominadores e somam-se ou subtraem-se os numeradores. Quando os denominadores são diferentes, realiza-se o cálculo do mínimo múltiplo comum entre eles e realizam-se os cálculos para tornar as frações equivalentes às iniciais. A adição e a subtração de frações não são trabalhadas em situações-problema, que levam o educando a pensar na realização da atividade, pois as questões apresentadas não são contextualizadas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (1998), ao tratarem da abordagem do conteúdo dos números racionais, tanto na forma fracionária como na decimal, destacam que, mesmo que o conteúdo seja abordado no primeiro e no segundo ciclos, os educandos chegam ao terceiro ciclo com dificuldade em compreender os mais variados significados e em realizar cálculos relacionados a esses números. Ainda ressaltam que para o terceiro e quarto ciclos a abordagem dos números racionais tem como objetivo:

> (...) levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. (...) Os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte/todo, divisão e razão. A relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais (BRASIL, 1998, p. 101)

Uma possível causa para a deficiência citada é a não conexão das ideias construídas nos números naturais com o conteúdo dos números racionais.

2.2 Fundamentos Teóricos

Para a construção desse trabalho, foram utilizados alguns referenciais teóricos para dar suporte à pesquisa. Para isso, fizemos um levantamento de autores e pesquisadores do tema.

É sabido que existe uma grande preocupação por parte dos estudiosos da Educação Matemática em buscar alternativas para sanar o alto índice de fracasso dos alunos na disciplina matemática. E para isso eles recorrem à pesquisa, à investigação e aos documentos oficiais brasileiros que falam das metodologias e maneiras de se trabalhar os conteúdos dessa disciplina.

O conteúdo frações é de extrema importância para o sucesso na carreira escolar do aluno, visto que ele aparece constantemente associado a outros e consequentemente será uma “barreira” para aqueles que não têm domínio do mesmo.

Outros autores já abordaram os possíveis erros encontrados na resolução de questões sobre frações, entre eles: Llinares e Sanchez (1988), Costa (1988), Perrenoud (2000), Nunes (1997) e Vasconcelos (2007). Além desses, temos como referenciais o trabalho de Gama e Lima (2016).

Um dos documentos oficiais brasileiros que falam dos conteúdos matemáticos e da forma como devem ser trabalhados, são os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Esses documentos dão três interpretações para a fração: relação parte-todo, quociente e índice comparativo. Mostram a fração como operadora e assinalam que esta interpretação é trabalhada somente no terceiro e quarto ciclos e que a relação parte-todo, geralmente, é a mais trabalhada pelos docentes nos anos iniciais, como divisão de um bolo ou de uma pizza em partes iguais.

Ainda, de acordo com os PCN, ensinar frações e números racionais requer muito tempo do aluno e do professor e que o ensino deve ser iniciado no segundo ciclo do Ensino Fundamental, e retomado nos demais ciclos deste ensino. Os conteúdos que se referem aos números racionais têm o enfoque para a forma fracionária:

- Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionarias de uso frequente;
- Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes representações na forma fracionaria;
- Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas;
- Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problemas: parte todo, quociente e razão. (BRASIL, 1997, p. 58)

E sobre as operações:

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situação-problema compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números e racionais.
- Desenvolvimento de estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental e da calculadora. (Idem, p. 60)

Esse trabalho abrange a matemática do Ensino Fundamental, no seu segundo ciclo, e neste os alunos geralmente são mais concentrados que os do primeiro ciclo, possuem maior capacidade de expor suas dúvidas e questionamentos, e, além disso, conseguem lidar de forma melhor com as escritas matemáticas. Consideramos importante destacar alguns pontos abordados no documento citado anteriormente, pois, de acordo com ele, no segundo ciclo do ensino de matemática o aluno deve:

> - Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.
> - Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal.
> - Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais. (BRASIL, 1998, p. 55 - 56)

Os números racionais, objeto de estudo desta pesquisa, aparecem constantemente intercalados com os conteúdos no Ensino Médio e os discentes devem ter domínio dos mesmos para que ocorra aprendizagem dos conteúdos das séries. Além disso, os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados de forma contextualizada utilizando as tendências da Educação Matemática como, Resolução de Problemas, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Jogos e Tecnologias, numa abordagem que venha a estimular e motivar os alunos. Segundo o PCN do Ensino Médio:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (BRASIL, 1998, p. 44)

A metodologia de ensino conhecida como análises de erros pode favorecer a aprendizagem e o desenvolvimento do aluno dentro do universo matemático. Essa pesquisa vem crescendo dentro dos estudos da Educação Matemática e possui fundamentações variadas, que podem ser trabalhadas conforme a necessidade. A análise de erros é extremamente importante, pois através dela o professor se torna um mediador no processo de ensino e aprendizagem e auxilia o discente na construção do conhecimento, trabalhando com suas dúvidas e inquietações. Seja na graduação ou em cursos de formação continuada, professores ou futuros professores, devem buscar uma maneira de atrair e instigar o conhecimento dos alunos. Nessa perspectiva, Cury diz que:

> Se estamos interessados no processo de aprendizagem da Matemática, o erro pode ser visto como instrumento de identificação dos problemas do currículo e da metodologia, e, ao resolvê-los, os erros serão eliminados; se, no entanto, queremos explorar o erro, esse pode constituir-se em instrumento para a compreensão dos processos cognitivos. (CURY, 1995, p.9 - 10)

Diante do exposto, podemos verificar que é necessário que o professor veja o aluno como agente da construção do seu conhecimento e que perceba que o seu "papel" ganha novas dimensões que exigem mudanças de metodologias em sala de aula. Para isso, o docente deve conhecer as condições socioculturais, as expectativas e a competência cognitiva dos alunos, pois precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conhecimentos e procedimentos que alimentam o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. Além disso, deve ser um mediador do conhecimento, ou seja, um facilitador que busca mecanismos que venham despertar o interesse do aluno em aprender matemática.

2.2.1 Utilização do erro como ferramenta para identificar e superar as dificuldades dos alunos

De acordo com o dicionário de Evanildo Bechara (2011, p. 518), a palavra erro significa "Ato ou efeito de errar; qualidade do que é incorreto; imprecisão, inexatidão; Ideia ou conceito que não condiz com a realidade; engano, desacerto, equívoco; Comportamento censurável; desvio". Neste trabalho, toma-se o significado de erro como incorreção, e erro de raciocínio como sendo a interpretação equivocada da resolução do exercício ou do problema, e erro de cálculo, os erros ocorridos na execução de algoritmos.

A análise de erro favorece a aprendizagem, estimula o raciocínio do aluno e é um ramo da pesquisa em Educação Matemática que vem crescendo, devido à sua eficácia no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Segundo Costa (1988, p. 20), "A análise do erro pode oferecer pistas ricas para o redimensionamento de uma prática pedagógica que seja mais comprometida com as nossas crianças brasileiras". Ao corrigir seu erro, o discente entende que pode mudar sua aprendizagem.

Nem sempre o erro significa que o aluno não tem condições de resolver um problema, pois, às vezes, ele pode errar por falta de atenção ou descuido. Ao tomar ciência do seu erro, o correto é que o mesmo refaça o procedimento e aprenda a partir dele. Caso o problema seja de dificuldade de interpretação da situação exposta no problema e o mesmo tenha uma dificuldade maior, ela irá persistir, até que o aluno se sinta estimulado a sanar suas limitações matemáticas. PERRENOUD evidencia que o trabalho a partir dos erros poderá proporcionar uma nova perspectiva para a aprendizagem:

> A didática das disciplinas interessa-se cada vez mais pelos erros e tenta compreendê-los. Astolfi (1997) propõe que se considere o erro como uma ferramenta para ensinar, um revelador dos mecanismos de pensamento do aprendiz. Para desenvolver esta competência o professor deve, evidentemente, ter conhecimentos em didática e em psicologia cognitiva. De início, deve interessar-se pelos erros aceitando-os como etapas estimáveis do esforço de compreender, esforçar-se, não os corrigir ("Não diga, mas diga!"), proporcionando ao aprendiz, porém, os meios para tomar consciência deles, identificar sua origem e transpô-los. (2000, p. 32)

Analisar as causas de um erro é uma tarefa difícil, visto que o pensar do aluno muitas vezes não se mostra de forma explicita na sua resolução. Ao corrigir as atividades ou provas escrita dos alunos, o docente deve utilizá-la como uma estratégia de análise do que ele deve pesquisar e realizar para o aperfeiçoamento de sua ação pedagógica. Para que isso aconteça, é necessário que lance um olhar mais significativo para esse erro. Sobre essa perspectiva, os PCN (1997) dizem que:

> Diferentes fatores podem ser causa de um erro. Por exemplo, um aluno que erra o resultado da operação (adição, subtração, multiplicação ou divisão) pode não ter estabelecido uma correspondência entre os dígitos ao “armar” a conta; pode ter subtraído 6 de 9, apoiado na ideia de que na subtração se retira o número menor do número maior; pode ter colocado qualquer número como resposta por não ter compreendido o significado da operação; pode ter utilizado um procedimento aditivo ou contar errado; pode ter cometido erros de cálculo por falta de um repertório básico. Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação. (BRASIL, 1997, p. 41)

Com esse trabalho, não se pretende fazer uma apologia ao erro e nem tampouco levar o professor a aceitar tudo o que o discente produz. Mas queremos destacar a importância que o professor deve dar ao analisar os erros, ou seja, eles não devem ser descartados sem a preocupação de entender o porquê daquele resultado. É de extrema importância valorizar o saber fazer do aluno, pois a partir desse zelo, os discentes podem “despertar” e se sentir motivados a gostar da disciplina, e esse fato pode gerar resultados altamente positivos para seu processo de aprendizagem. Valorizar esse saber

> [...] não significa observar e deixar como está, ou acreditar que um dia ele virá a descobrir. Pelo contrário, o “considerar” exige do professor a reflexão teórica necessária para o planejamento de situações provocativas ao aluno que favoreçam a sua descoberta, o seu aprofundamento em determinada área do saber (HOFFMAN, 2006, p. 86).

O docente deve buscar maneiras de melhorar sua prática pedagógica, pois ela reflete diretamente no seu posicionamento em sala de aula e faz com que o mesmo passe a refletir sua postura diante dos discentes e isso é, sem dúvida, extremamente importante para os alunos. Com essas mudanças, os docentes começam a criar novos mecanismos para ensinar e avaliar seus alunos, ampliando os aspectos formativos da aprendizagem e transformando suas aulas em uma ação eficaz.

CAPÍTULO 3

ESTUDO E INTERPRETAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS SOB A PERSPECTIVA DA ANÁLISE DE ERROS.

Objetivando analisar e interpretar o foco dessa pesquisa, apresentamos os resultados e discussões do questionário sob a perspectiva da análise de erros segundo Cury (1994). Iniciamos quantificando numa tabela os dados apresentados no trabalho, por meio da classificação das resoluções das questões em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. Temos uma tabela referente ao questionário aplicado ao sétimo ano do Ensino Fundamental e outra referente ao aplicado no primeiro ano do Ensino Médio e, diante disso, fizemos uma análise do desempenho de cada aluno. De acordo com Cury, o erro não é somente efeito da ignorância, mas deve ser visto como uma forma de investigar o que levou o aluno a errar e como ele pensa, ou seja:

> Os erros cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático. (CURY, 1994, p.132)

Sabemos que o processo de avaliação é contínuo e que cabe ao professor tornar esse processo rotineiro e investigar como seus alunos estão aprendendo e o que os leva ao erro. Uma vez diagnosticado, o erro deve ser utilizado como um processo avaliativo que induz o aluno ao acerto. Os Parâmetros Curriculares Nacionais falam da necessidade do repensar as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia. A tarefa do professor é interpretar os sinais e indícios a fim de reunir elementos que lhes permitam rever sua atividade pedagógica.

3.1 Análise dos resultados

Neste tópico, fazemos a análise e interpretação dos questionários aplicados, tentando entender o que leva o aluno ao erro e se identificamos os mesmos erros em diferentes etapas da educação básica. Para isso, verificamos os erros cometidos pelos alunos.

Inicialmente foi feita uma leitura “superficial” de todo o material, como sugere Cury (2007), para avaliar as respostas; em seguida, as respostas foram separadas em categorias: Corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e em branco (B). Dessa forma, achamos por bem defini-los usando os critérios que consideramos em cada um desses aspectos:

- **Corretas:** São as respostas onde os alunos conseguiram utilizar os conhecimentos matemáticos adequados e chegaram à resposta correta da questão.
- **Parcialmente corretas:** Nesse caso, o aluno revela alguma lógica em seu raciocínio matemático e consegue mostrar que sabe identificar algumas operações matemáticas, no entanto, não utiliza as técnicas corretas e não chega ao resultado esperado.
- **Incorretas:** Nesse caso, podemos classificar assim, as questões que usavam raciocínios inapropriados ou propriedades incabíveis na sua resolução. Mostrando que não conseguem visualizar as operações básicas da matemática necessária para tentar resolver as questões.
- **Em branco:** São as questões não respondidas pelos alunos.

O questionário aplicado tinha oito questões que foram denotadas por Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7 e Q8 respectivamente.

A Análise de Erros foi a metodologia para discutirmos o questionário aplicado, pois sabemos que o processo avaliativo não pode se basear somente em radicalismo do certo e do errado, sem considerar o raciocínio dos alunos e os processos cognitivos que os levaram a determinado resultado. Segundo CURY,

> As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciandos em Matemática estão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as

> possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de suas práticas, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade. (2007, p 93)

Investigamos os erros encontrados nos questionários aplicados com os alunos do Ensino Fundamental e, em seguida, categorizamos os erros encontrados nas respostas dos alunos do Ensino Fundamental e mostramos exemplares desses erros. A seguir, vamos analisar as questões do questionário aplicado.

3.1.1 Análise das respostas dos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental.

A tabela a seguir contém o quantitativo de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco, em cada questão (item) do questionário aplicado, por parte dos alunos do 7º ano participantes dessa pesquisa.

Tabela 1: Desempenho dos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental no Questionário

	Corretas	Parcialmente corretas	Incorretas	Em branco
Questão 1	a) 11 b) 13 c) 3 d) 1	a) 0 b) 0 c) 5 d) 6	a) 9 b) 7 c) 12 d) 11	a) 0 b) 0 c) 0 d) 2
Questão 2	a) 17 b) 11 c) 0 d) 1	a) 0 b) 0 c) 0 d) 0	a) 3 b) 9 c) 18 d) 17	a) 0 b) 0 c) 2 d) 2
Questão 3	a) 7 b) 16	a) 0 b) 0	a) 8 b) 2	a) 5 b) 2
Questão 4	0	16	3	1
Questão 5	6	0	13	1
Questão 6	0	0	19	1
Questão 7	0	9	1	10
Questão 8	a) 2 b) 0	a) 0 b) 0	a) 9 b) 4	a) 9 b) 16

Fonte: Questionário da pesquisa

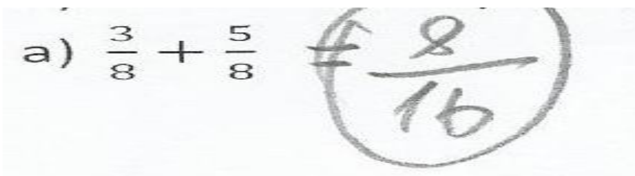
De acordo com os dados dispostos na tabela, podemos notar que foi na questão de multiplicação de frações que os alunos apresentaram o melhor desempenho. Isso talvez se deu pelo fato de a multiplicação ser uma operação direta, ou seja, multiplica numerador pelo numerador e denominador pelo denominador. As questões sete e oito foram as que apresentaram uma maior quantidade de respostas em branco, o que mostra uma grande falta de conhecimento do conteúdo frações, além do pouco domínio nas questões interpretativas.

- **Análise da primeira questão (Q1)**

Essa questão tinha por objetivo analisar se o aluno consegue compreender as diferenças entre questões que envolvem frações com denominadores iguais e as que envolvem frações com denominadores diferentes. Para resolvê-la, os alunos deveriam ter habilidades relacionadas aos algoritmos que envolvem as operações com frações.

Na Tabela 1 do questionário referente ao Ensino Fundamental, sétimo ano, podemos verificar que o item a) teve nove respostas incorretas. Todos os nove alunos que erraram cometeram o mesmo tipo de erro, a saber, somar os numeradores e os denominadores. Como exemplar, segue a resolução do aluno que identificamos como F8.

Figura 1: Resposta do aluno F8

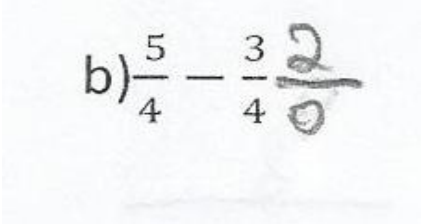


Fonte: Acervo da pesquisa

Observe que ele mostra ter domínio da operação com números naturais, no entanto, não possui domínio das regras de operações com frações para se chegar ao resultado desejado $\frac{8}{8}$, oito oitavos, que, simplificando, obteríamos o número 1 como resposta.

O item b) trouxe uma subtração de frações com denominadores iguais. Os erros cometidos nesse item se assemelham aos encontrados no item anterior. Todos os sete alunos que erraram, conforme mostrado na Tabela 1, cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, subtrair numeradores e denominadores chegando ao resultado $\frac{2}{0}$. Nesse caso, podemos observar que, além de não ter a noção correta de como resolver a questão, o aluno não compreende que há a impossibilidade da divisão por 0. Vejamos no exemplar da Figura 2.

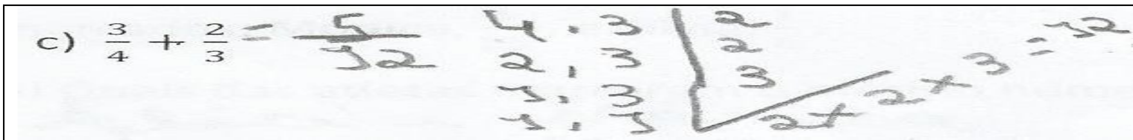
Figura 2: Resposta do aluno F15



Fonte: Acervo da pesquisa

Com o item c) da questão um, buscamos identificar as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem soma de frações com denominadores diferentes. Na Tabela 1, podemos verificar que houveram sete respostas parcialmente corretas e nelas todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, conforme o exemplar a seguir:

Figura 3: Resposta do aluno F1

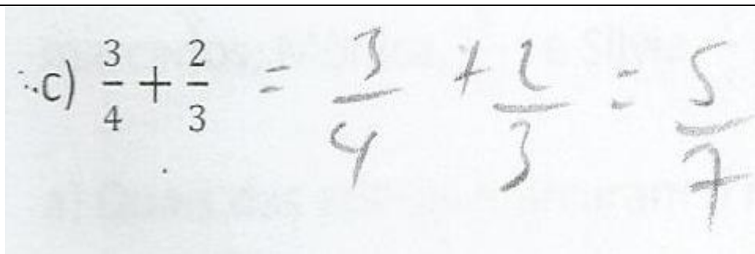


Fonte: Acervo da pesquisa

Vejamos que o aluno F1 verificou que se tratava de uma questão de frações com denominadores diferentes e observamos que possuía a noção de mínimo múltiplo comum (mmc), porém não utilizou as regras matemáticas necessárias para se chegar ao resultado correto.

A Tabela 1 traz ainda a informação de que 12 alunos responderam incorretamente. Todos eles cometeram o mesmo tipo de erro, ou seja, somaram numerador com numerador e denominador com denominador. Como exemplar, segue a resolução do aluno que identificamos por F13.

Figura 4:Resposta do aluno F13.

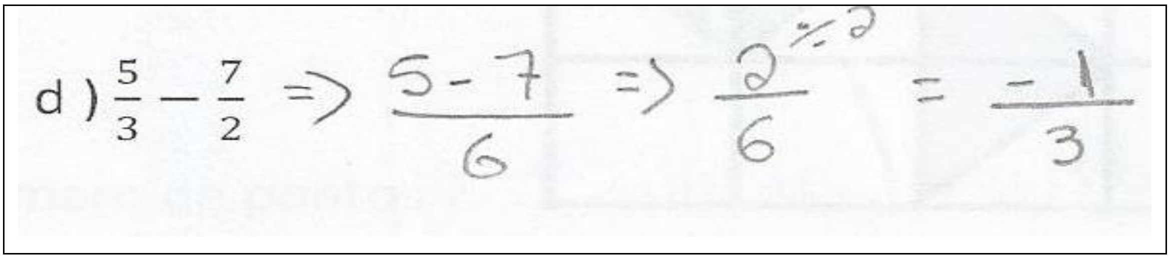


Fonte: Acervo da pesquisa

Observamos que os discentes desconhecem que o correto a ser feito na questão era ter efetuado o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc) e, em seguida, aplicar as técnicas de resolução apropriadas para aquele caso, chegando ao erro. Com isso, podemos concluir que a maioria dos alunos resolvem da mesma maneira a soma de frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes, somando numerador com numerador e denominador com denominador.

Com o item d), tínhamos por objetivo identificar as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem subtração de números racionais com denominadores diferentes. Pudemos verificar que esse item teve seis respostas parcialmente corretas, nas quais todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, os discentes conseguiram visualizar que se tratava de uma questão com denominadores diferentes e efetuaram o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), mas, no entanto, não aplicaram as técnicas de resolução corretamente, conforme o protocolo do aluno F15.

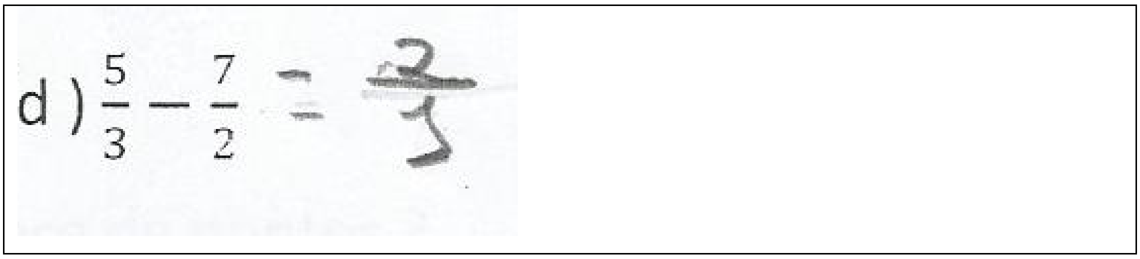
Figura 5: Resposta do aluno F16



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação ao item d), de acordo com a Tabela 1, podemos notar que esse item teve 11 respostas incorretas e todas com o mesmo tipo de erro, isto é, os discentes mostram não ter domínio do procedimento usado para trabalhar frações com denominadores diferentes. Nessa questão, eles omitem o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), fazendo a subtração do numerador com numerador e do denominador com denominador. Como exemplar, segue a resolução do aluno que identificamos por F18.

Figura 6:Resposta do aluno F18



Fonte: Acervo da pesquisa

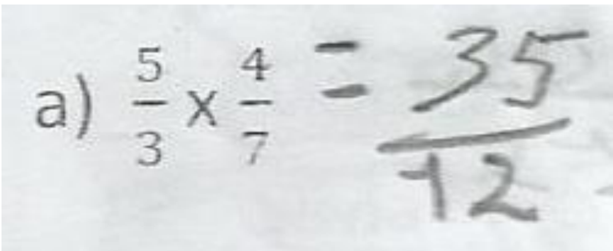
Percebemos que a maioria dos discentes possuem grandes dificuldades em resolver questões que envolvem soma e subtração de frações. Esses tipos de erros foram encontrados também por Gama e Lima (2016).

- **Análise da segunda questão (Q2)**

A questão dois foi elaborada com o objetivo de analisarmos as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem multiplicação e divisão com números fracionários.

A enorme quantidade de acertos no item a) é pelo fato de que o processo de multiplicação de frações é muito simples e facilmente compreendido. Isso ocorre devido à grande semelhança com a multiplicação entre números naturais. Na Tabela 1 do questionário referente ao Ensino Fundamental, sétimo ano, podemos verificar que o item a) teve três respostas incorretas. Na resolução do aluno F1, percebemos que o discente não possuía domínio de como resolver as multiplicações de frações ou deve ter confundido o “X” entre as frações como a multiplicação com números diretamente proporcionais e multiplicado extremos e meios. Observamos que o mesmo conseguiu visualizar que se tratava de uma questão onde era necessário efetuar a operação de multiplicação, no entanto, aplicou as técnicas de resolução de divisão de frações. Vejamos na Figura 7 sua solução.

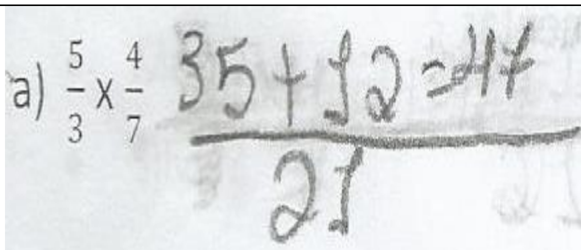
Figura 7:Resposta do aluno F1



Fonte: Acervo da pesquisa

Outros dois alunos que erraram a resolução desse item, cometeram o mesmo erro, a saber, ao tentar resolver a multiplicação de frações, utilizaram a técnica de resolução de adição de frações com denominadores distintos, deixando evidente que não têm o domínio do processo de resolução da multiplicação de frações. Como exemplar, segue a resolução do aluno F7.

Figura 8:Resposta do aluno F7

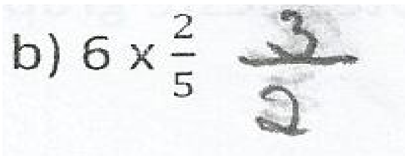


Fonte: Acervo da pesquisa

O item b) se tratava de uma questão que envolve o produto de um número natural por uma fração. Na multiplicação de um número natural por uma fração, o resultado tem como numerador o produto do número natural pelo numerador e tem como denominador o mesmo denominador da fração. De acordo com a Tabela 1 deste trabalho, podemos verificar que esse item teve nove respostas incorretas.

Em duas dessas respostas, encontramos o mesmo tipo de erro, o qual utiliza-se de raciocínios inapropriados e propriedades incabíveis para tentar resolver a questão. Como exemplar, segue a resolução do aluno que F15.

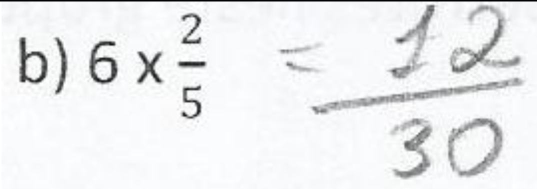
Figura 9: Resposta do aluno F15



Fonte: Acervo da pesquisa

Os outros sete erros foram do mesmo tipo, isto é, os discentes efetuaram a multiplicação do número natural 6 com o numerador 2 da fração corretamente, obtendo como resultado o número 12, mas, fizeram a multiplicação também do número 6 com o denominador da segunda fração, obtendo o valor 30. Esse fato mostra a falta de domínio nas técnicas de resolução de multiplicações de frações quando o denominador é um, pois os discentes tendem a utilizar o numerador para multiplicar o numerador e também o denominador da segunda fração, ou utilizam o método que lhes foi ensinado para construir frações equivalentes (multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número). Como exemplar, segue a resolução do aluno F9.

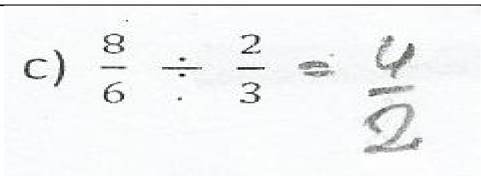
Figura 10:Resposta do aluno F9



Fonte: Acervo da pesquisa

O item c) da questão dois tinha por objetivo analisar as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem divisão de frações. Na Tabela 1, podemos verificar que esse item teve 18 respostas incorretas. Todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, a saber, dividiram numerador por numerador e denominador por denominador, quando o correto numa divisão envolvendo fração, com divisor diferente de zero, seria multiplicarmos o primeiro termo pelo inverso do segundo. Os discentes utilizam o mesmo método de resolução de multiplicação de frações, isto é, numerador operado com numerador e denominador operado com denominador. Segue, como exemplar, a resolução do aluno F4.

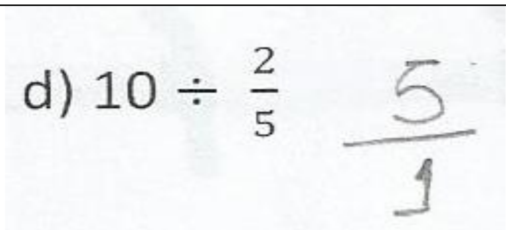
Figura 11:Resposta do aluno F4



Fonte: Acervo da pesquisa

No item d), trouxemos uma divisão de um número natural por uma fração. De acordo com a Tabela 1, podemos verificar que esse item teve 17 respostas incorretas. Para efetuar tal divisão, basta conservar o número natural e multiplicá-lo pela fração invertida. Duas das respostas contém o seguinte erro, os alunos dividem o número natural 10 pelo numerador da fração dois quintos, obtendo como resposta o número 5. Assim, os discentes mostram não saber as técnicas de resolução de divisão de frações e, observamos que apenas possuem os conhecimentos básicos da operação de divisão. Como exemplar, segue a resolução do aluno F5.

Figura 12: Resposta do aluno F5

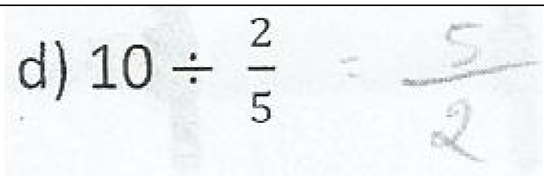


Fonte: Acervo da pesquisa

Analisando tal resolução, observamos a falta de domínio do conteúdo trabalhado e que o aluno não tem noção do algoritmo de resolução de divisão de frações.

Outros cinco alunos cometeram o seguinte erro: dividem o número natural 10 pelo numerador da fração dois quintos, obtendo como resultado 5 e, em seguida, dividem o mesmo número natural 10 pelo denominador, obtendo 2, chegando à fração cinco meios. Como exemplar, segue a resolução do aluno F18.

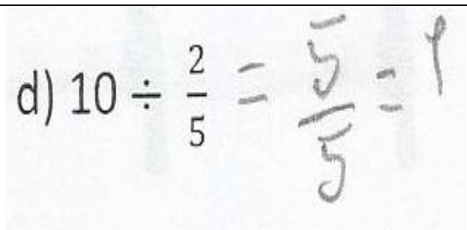
Figura 13:Resposta do aluno F18



Fonte: Acervo da pesquisa

Os 10 erros restantes foram do mesmo tipo, isto é, os discentes dividiram o número natural 10 pelo numerador da fração dois quintos, obtendo o número 5 e conservaram o denominador. Fizeram a simplificação da fração cinco quintos e obtiveram como resultado o número 1. Esse fato mostra como os discentes estão desprovidos de domínio do conteúdo matemático para resolver situações que envolvam divisões com frações. Como exemplar, segue a resolução do aluno F14.

Figura 14: Resposta do aluno F14



Fonte: Acervo da pesquisa

Os erros encontrados na multiplicação de frações e na divisão de frações também foram vistos por Monteiro (2013) no seu trabalho, Estudo de Recuperação do Conteúdo de Frações com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação.

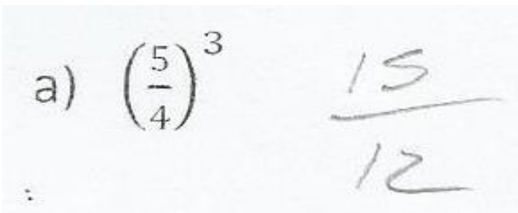
- **Análise da terceira questão (Q3)**

A questão busca verificar as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem potenciação e radiciação de números racionais.

Na Tabela 1 do questionário referente ao Ensino Fundamental, sétimo ano, podemos verificar que o item a) teve oito respostas incorretas. Já o item b) teve duas.

Na aprendizagem, para operar potências, a primeira e mais simples regra que dominamos é que devemos sempre multiplicar a base por ela mesma quantas vezes indicar o expoente. No meio de oito questões incorretas, seis alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, os discentes multiplicaram o numerador 5 pelo expoente 3, obtendo como resposta 15 e em seguida multiplicaram o denominador 4 pelo expoente 3, obtendo 12. Com isso, os alunos chegaram ao resultado de quinze doze avos, mas, evidentemente a solução está errada, demonstrando que os mesmos não possuem domínio das técnicas matemáticas para resolver potências envolvendo números naturais. Segue, como exemplar, a solução do aluno F2.

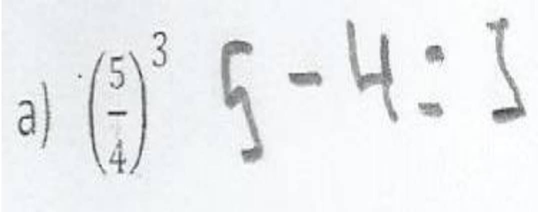
Figura 15: Resposta do aluno F2



Fonte: Acervo da pesquisa

Nas duas respostas incorretas restantes, encontramos o mesmo tipo de erro, isto é, os discentes fizeram a subtração do numerador 5 com o denominador 4, obtendo 1 e em seguida resolveram a potência, ou seja, 1 elevado ao cubo chegando ao resultado 1. Como exemplar, segue a resolução do aluno F19.

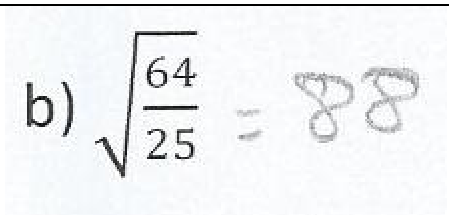
Figura 16: Resposta do aluno F19



Fonte: Acervo da pesquisa

Analisando o item b) da terceira questão, os dois alunos que erraram cometeram o mesmo erro, uma solução que aparentemente não chega a nenhuma conclusão. Os discentes demonstraram falta de conhecimento das operações matemáticas e não conseguiram visualizar o que a questão pede para fazer. Segue, como exemplar, a solução do aluno que identificamos por F19.

Figura 17: Resposta do aluno F19



Fonte: Acervo da pesquisa

- **Análise da quarta questão (Q4)**

Faremos a análise da questão quatro do questionário aplicado, que busca avaliar as dificuldades que os estudantes apresentam em situações problemas com os números racionais. Na Tabela 1, referente ao Ensino Fundamental, sétimo ano, podemos verificar que a questão quatro teve 16 respostas parcialmente corretas e três incorretas.

Vejamos que inúmeras foram as dificuldades apresentadas pelos discentes ao resolver a questão citada acima. Selecionamos algumas respostas e fizemos uma análise dos resultados. Seu conteúdo versava sobre soma de fração como a primeira questão, no entanto, não vem com o algoritmo pronto para o aluno. Este deveria ler o problema proposto e, em seguida, montá-lo para que observássemos o seu desempenho em uma situação problema que envolvia soma de frações.

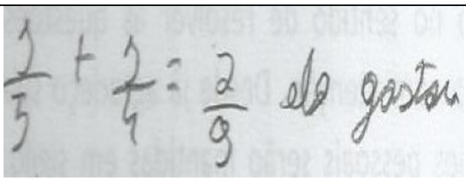
Observamos que dentre as 16 respostas consideradas parcialmente corretas, quatro discentes cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, os alunos conseguiram interpretar o enunciado da questão montando as frações e, na tentativa de resolver a soma das frações, os mesmos verificaram que era necessário o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), mas não conseguiram realizar as técnicas necessárias para a adição das frações com denominadores diferentes e, mais uma vez, diagnosticamos a falta de domínio das operações que envolvem frações com denominadores distintos. Como exemplar, segue a resolução do aluno F9.

Figura 18: Resposta do aluno F9

Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação à quarta questão, outro tipo de resolução considerada parcialmente correta foi cometida por 12 alunos. Os discentes fizeram a leitura do exercício, interpretaram que se tratava de uma questão de soma de frações, montaram o algoritmo da resposta, porém, somaram numerador com numerador e denominador com denominador, deixando claro a falta de conhecimento para somar frações com denominadores distintos. Como exemplar, segue a resolução do aluno F10.

Figura 19: Resposta do aluno F10

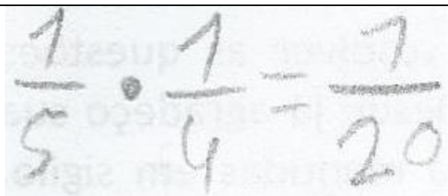


Fonte: Acervo da pesquisa

Os alunos não se deram conta de que para resolver a operação era necessário encontrar frações equivalentes com denominador comum e uma das maneiras de fazer é com o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), conforme demonstrado no Capítulo 1.

Além disso, encontramos outro erro dos alunos ao resolver esta questão. Todas as respostas incorretas contêm o mesmo tipo de erro, a saber, os discentes não conseguiram identificar que a questão se tratava de uma soma de frações e multiplicaram a fração um quinto pela fração um quarto. E esse fato mostra a dificuldade para interpretar questões matemáticas quando apresentadas de modo subjetivo. Segue como exemplar, a resolução do aluno F12.

Figura 20:Resposta do aluno F12



Fonte: Acervo da pesquisa

Esses tipos de erros são considerados, segundo Santos e Buriasco (2008), como erros advindos de deficiência de pré-requisito no aprendizado de habilidades, conceitos e fatos.

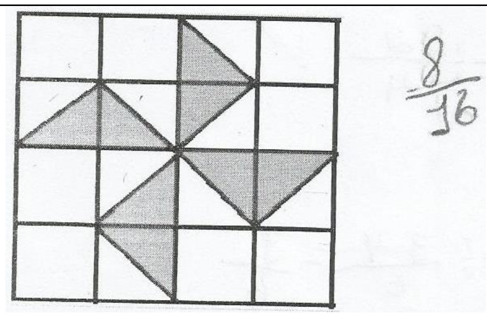
- **Análise da quinta questão (Q5)**

Essa questão busca sondar as estratégias utilizadas pelos discentes em exercícios que envolvem as relações conceituais associadas às representações dos números racionais. Como podemos observar na Tabela 1 do questionário referente ao Ensino Fundamental, verificamos que a questão cinco teve 13 respostas incorretas.

Nela solicitávamos a fração considerada como parte de um inteiro que foi dividido em partes exatamente iguais, ou seja, associar a parte pintada da figura com a fração correspondente.

Observamos que 10 dos 13 alunos que erraram a resposta não souberam escrever a fração que representava as figuras. Os alunos compreenderam que havia um quadrado maior e nele havia 16 quadrados menores, porém, ao contar a parte pintada, representada por um triângulo, os alunos não tinham ideia de que seria a metade de um quadrado menor, ou seja, não visualizaram a ideia explícita na questão, respondendo que a fração que representa essa figura era o quociente entre o número de partes pintadas na figura e os quadrados menores. Para Vasconcelos (2007), esse erro advém das dificuldades dos alunos em determinar uma fração, baseada na relação parte-todo. Como exemplar, segue a resolução do aluno F7.

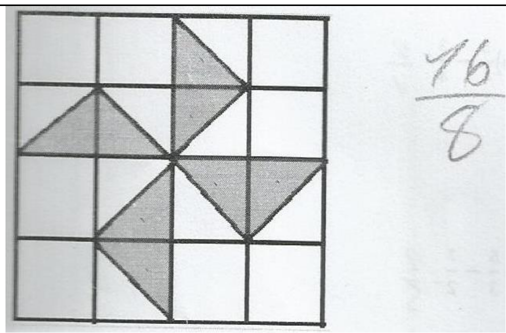
Figura 21:Respostas dos alunos F7



Fonte: Acervo da pesquisa

Nas três respostas restantes, os alunos cometeram o mesmo erro, isto é, não levaram em consideração que a parte-todo seria o denominador e a parte pintada seria o numerador. Podemos concluir que os alunos tiveram a mesma ideia do Aluno F7, da Figura 21, porém, inverteram o numerador com o denominador. Observa-se que é possível que os alunos não tenham a compreensão do significado da relação parte-todo e da necessidade de fixar uma unidade de medida (área). Segue como exemplar, a resolução do aluno F4.

Figura 22: Resposta do aluno F4



Fonte: Acervo da pesquisa

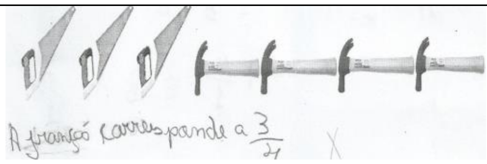
- **Análise da sexta questão (Q6)**

Na Tabela 1 do questionário referente ao Ensino Fundamental, sétimo ano, podemos verificar que a questão seis teve 19 respostas incorretas.

Na questão seis, temos a figura composta por um grupo de ferramentas, sendo três serrotes e quatro martelos. Com essa questão, buscávamos observar se os alunos conseguiam visualizar cada ferramenta com a noção de “todo”, visto como parte do “todo”.

Analisando as respostas dos alunos, percebemos que, dentre as 19 respostas incorretas, 18 alunos cometeram o mesmo tipo de erro, a saber, dividiram o número de serrotes pelo número de martelos. Vemos então que os discentes não têm compreensão do significado da relação parte-todo, pois não consideraram a quantidade total de elementos ao responder sua questão. Segue como exemplar, a resolução do aluno F7.

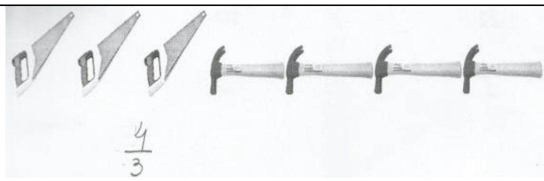
Figura 23:Resposta do aluno F7



Fonte: Acervo da pesquisa

Os alunos restantes cometeram um erro similar aos demais. Os discentes partiram da mesma ideia, no entanto, além de não considerar que a parte-todo seria o denominador e a parte pintada seria o numerador, eles inverteram o resultado da fração, chegando à resposta quatro terços. Segue a resolução do aluno F9.

Figura 24: Resposta do aluno F9



Fonte: Acervo da pesquisa

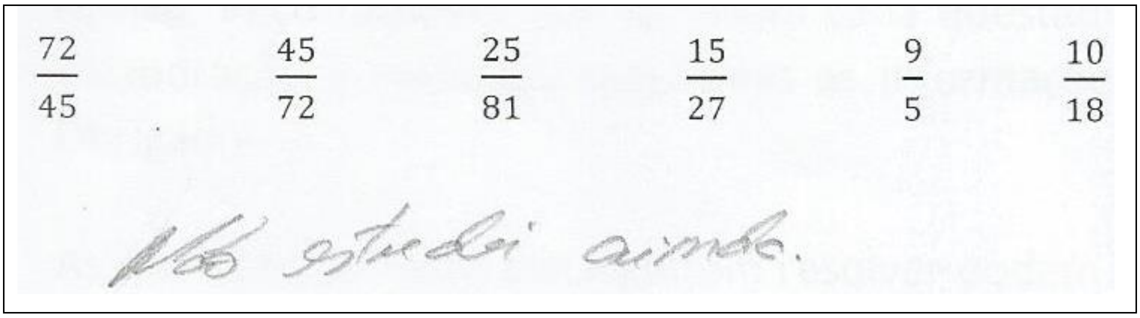
- **Análise da sétima questão (Q7)**

A questão sete desse trabalho busca identificar se os alunos sabem simplificar frações e se compreendem o que são frações equivalentes. Como podemos verificar na Tabela 1, referente ao sétimo ano, tivemos nove respostas consideradas parcialmente corretas e uma incorreta.

Sabemos que, para identificar se duas ou mais frações são equivalentes, é necessária a noção de simplificação de frações, isto é, dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número inteiro, reduzindo a fração à forma irredutível, ou seja, quando o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador é igual a 1. Se ao realizarmos esse procedimento obtivermos formas irredutíveis idênticas, as frações serão equivalentes.

Ao analisarmos a Figura 25, observamos que o aluno F2 não resolveu a questão e alega nunca ter estudado o assunto, embora o conteúdo, além de ser ensinado no sétimo ano, também era conteúdo programático de séries anteriores. Dos 10 alunos que deixaram essa questão em branco, três fizeram o mesmo comentário do aluno F2.

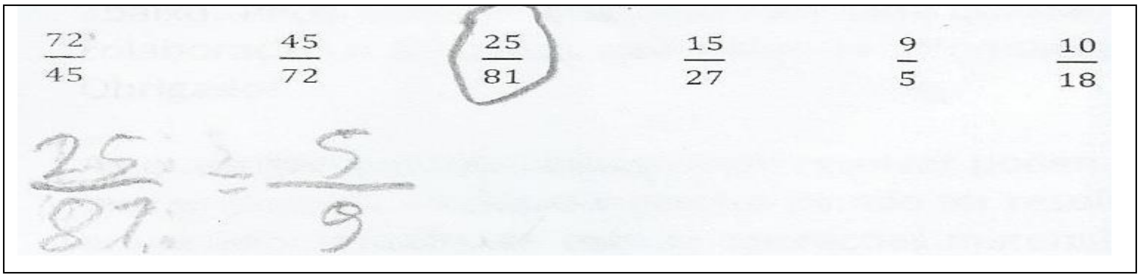
Figura 25: Resposta do aluno F2



Fonte: Acervo da pesquisa

Observando a resposta do aluno F12, Figura 26, podemos verificar que o discente não fez os cálculos corretamente para encontrar as frações equivalentes, mas sua resposta nos leva a deduzir que o aluno calculou a raiz quadrada da fração vinte e cinco oitenta e um avos e, portanto, percebemos que o aluno mostrou que não tinha conhecimento de como proceder à resolução do exercício. Esse tipo de erro só foi cometido por esse aluno.

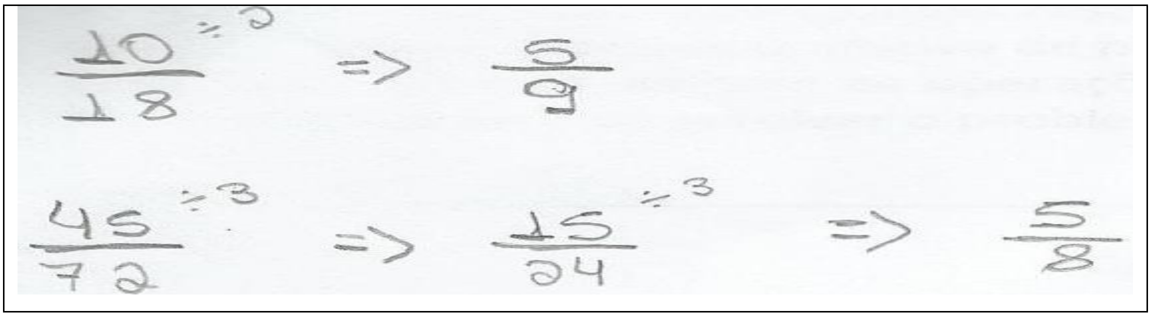
Figura 26: Resposta do aluno F12



Fonte: Acervo da pesquisa

Observamos que, dentre as nove respostas consideradas parcialmente corretas, todos os discentes cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, os alunos efetuaram as simplificações corretamente, mas não resolveram completamente a questão. Como exemplar, segue a resolução do aluno F3.

Figura 27: Resposta do aluno F3.



Fonte: Acervo da pesquisa

- **Análise da oitava questão (Q8)**

Com a questão oito, buscamos avaliar as dificuldades que os estudantes apresentam em situação problemas com os números racionais e está subdividida em dois itens enumerados com as letras a) e b). Como podemos observar na Tabela 1 referente ao Ensino Fundamental, verificamos que no item a) houve nove respostas consideradas incorretas. Já no item b), tivemos quatro respostas incorretas.

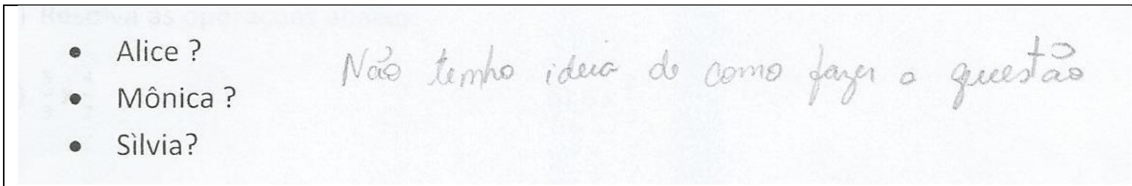
No item a), todas as nove respostas incorretas apresentam o mesmo tipo de erro, no qual os alunos deixam claro na sua solução que não têm ideia de como proceder à resposta. Veja que os discentes respondem “Alice e Mônica” e nem sequer colocam uma justificativa. Além disso, os discentes não tiveram a ideia que poderia verificar quais frações eram equivalentes, isto é, frações que correspondem ao mesmo valor numérico. Como exemplar, segue a resolução do aluno F1.

Figura 28 Resposta do aluno F1

Fonte: Acervo da pesquisa

No item b) da questão oito, podemos observar que o aluno F16, Figura 28, deixa como resposta o seguinte comentário “Não tenho ideia de como resolver a questão”. O que será que levou o aluno a não querer nem montar o algoritmo da questão? Será que questões contextualizadas não foram trabalhadas em sala de aula ou será que ainda não consegue desenvolver suas atividades cognitivas para montar problemas matemáticos? Observamos que três alunos fizeram esse comentário.

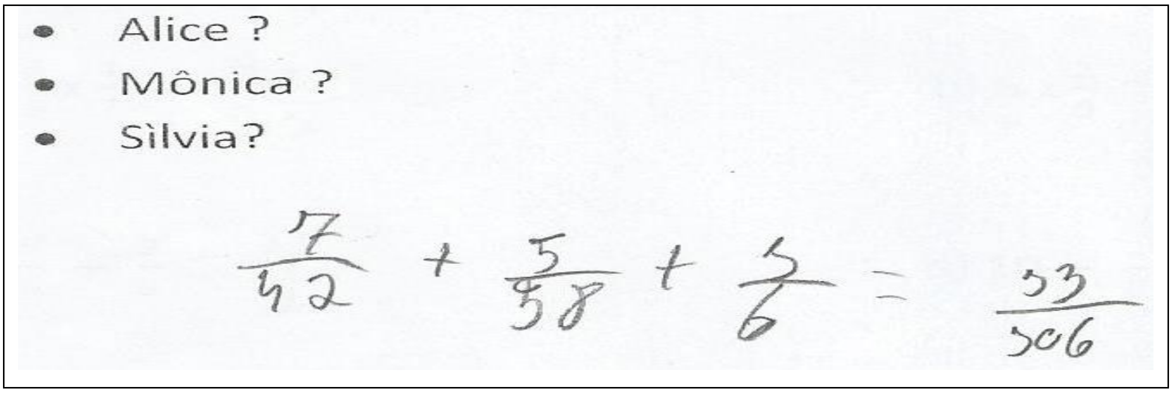
Figura 29: Resposta do aluno F16



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação ao item b) do exercício oito, no meio de quatro questões incorretas, todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, a saber, os alunos entendem que o total de pontos marcados por cada atleta seria a soma das frações que representa a pontuação de cada atleta. Mesmo assim, os discentes cometem o erro de somar as frações com denominadores iguais, onde somam numerador com numerador e denominador com denominador. Como exemplar, segue a resolução do aluno F10.

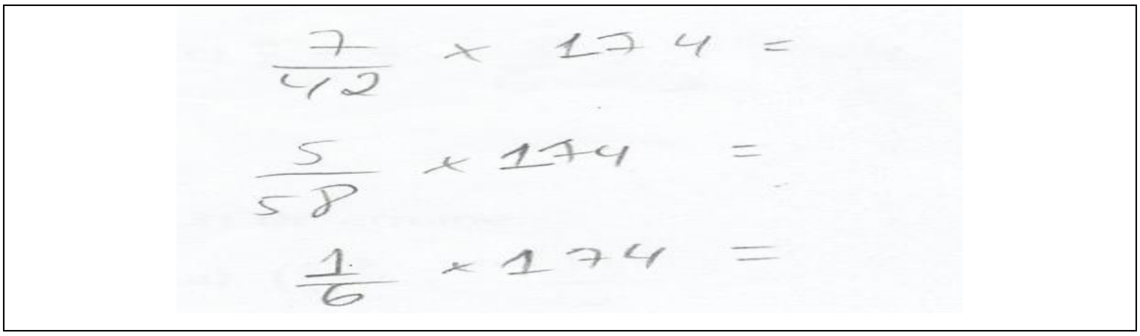
Figura 30: Resposta do aluno F10



Fonte: Acervo da pesquisa

Outra solução interessante foi do aluno F13, Figura 31. Observe que ele compreende que a pontuação marcada por cada atleta seria um produto do total de pontos com a fração que correspondia à pontuação do atleta, mas o aluno não consegue finalizar a multiplicação, deixando a resposta parcialmente correta.

Figura 31: Resposta do aluno F13



Fonte: Acervo da pesquisa

Vimos que, mesmo alunos de uma mesma turma, apresentam diferentes formas de resolver uma questão, mesmo que errada. Esse fato, nos leva a refletir sobre a maneira com que temos que planejar as nossas aulas para que os nossos alunos consigam superar tais dificuldades e garantam um bom desempenho em outros conteúdos matemáticos que exigem a resolução de operações envolvendo frações.

3.1.2 Análise dos resultados do questionário do primeiro ano do Ensino Médio.

Neste tópico, faremos a análise das respostas ao questionário aplicado no primeiro ano do Ensino Médio, no mesmo colégio em que foi aplicado para o Ensino Fundamental. Como as questões respondidas pelos alunos do primeiro ano do Ensino Médio são as mesmas que o sétimo ano respondeu faremos poucos comentários sobre os conteúdos e objetivos de cada questão.

Na Tabela 2, apresentamos os dados relacionados aos questionários aplicados aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio nas mesmas condições da Tabela 1.

Tabela 2: Desempenho dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio no Questionário

	Corretas	**Parcialmente corretas**	**Incorretas**	**Em branco**
Questão 1	a) 2 b) 4 c) 1 d) 0	a) 0 b) 0 c) 0 d) 0	a) 18 b) 14 c) 18 d) 18	a) 0 b) 2 c) 1 d) 2
Questão 2	a) 14 b) 7 c) 1 d) 1	a) 0 b) 0 c) 0 d) 0	a) 3 b) 8 c) 13 d) 10	a) 3 b) 5 c) 6 d) 9
Questão 3	a) 15 b) 10	a) 0 b) 0	a) 4 b) 3	a) 1 b) 7
Questão 4	0	8	5	7
Questão 5	6	0	8	6
Questão 6	7	0	9	4
Questão 7	1	0	8	11
Questão 8	a) 3 b) 1	a) 0 b) 0	a) 7 b) 3	a) 10 b) 16

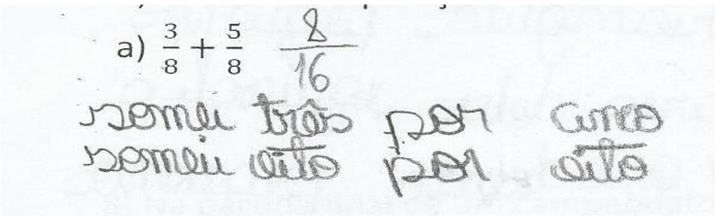
Fonte: Questionário da pesquisa

De acordo com os dados tabelados, podemos notar uma semelhança com a Tabela 1, porém houve um número maior de erros na questão um e que mais questões foram deixadas em branco, a exemplo da questão oito. Um dado importante é que a questão seis foi respondida de maneira correta por sete alunos. Já no Ensino Fundamental, essa mesma questão não registramos nenhum acerto.

- **Analise da primeira questão (Q1)**

O objetivo dessa questão era trabalhar com as operações de soma e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes. Conforme vemos na Tabela 2, referente ao questionário do primeiro ano do Ensino Médio, podemos verificar que o item a) teve 18 respostas incorretas. Dentre elas, 17 alunos cometeram o mesmo tipo de erro ao somar numerador com numerador e denominador com denominador. Desse modo, podemos concluir que os discentes resolveram a questão de forma errada, mostrando não ter domínio sobre as técnicas de resolução de frações com denominadores iguais. Como exemplar, segue a resolução do aluno M19.

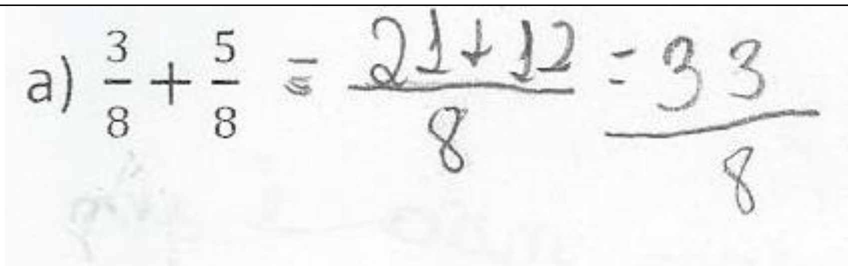
Figura 32:Resposta do aluno M19



Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse item a), identificamos outro tipo de erro. Na resolução observamos que o aluno repetiu o numerador da fração procedendo de forma correta a parte da operação de soma de frações com denominadores iguais, mas fez um cálculo errado no numerador de modo que não conseguimos identificar como chegou ao resultado trinta e três oitavos. Segue a solução do aluno M8.

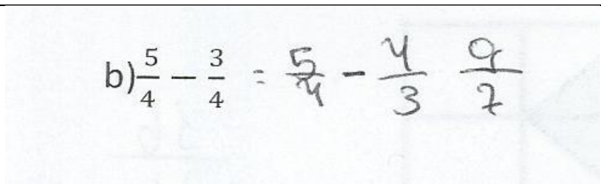
Figura 33: Resposta do aluno M8



Fonte: Acervo da pesquisa

No item b), uma das soluções erradas mostra que o aluno pode ter confundido com a divisão, pois copiou a primeira fração e subtraiu pelo inverso da segunda fração, porém, apesar de indicar a subtração, realizou a adição. Isso pode ser o resultado do ensino de regras. Das 14 resoluções incorretas, detectamos apenas uma com este tipo de erro, a solução do aluno M18.

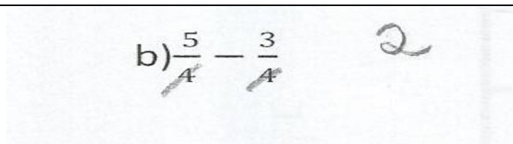
Figura 34: Resposta do aluno M18



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda no item b) da primeira questão, podemos identificar outro tipo de erro que foi cometido por quatro alunos, os quais eliminaram os denominadores e subtraíram os numeradores, conforme Figura 35, a seguir.

Figura 35: Resposta do aluno M14

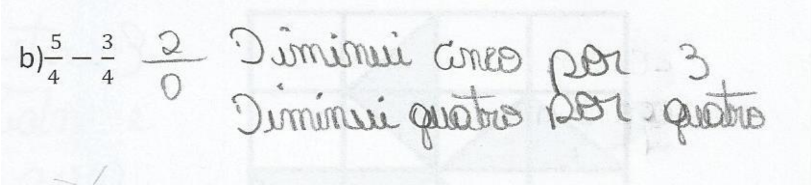


Fonte: Acervo da pesquisa

Vasconcelos (2007) atribui esse erro à falta de compreensão do número fracionário como outro conjunto numérico e o traço da fração é apenas para indicar que dois números inteiros estão sobrepostos, podendo ser manipulados aritmeticamente como se fossem números inteiros.

Outros sete alunos cometeram o seguinte erro: subtrair os numeradores e denominadores, chegando ao resultado dois sobre zero, que se trata de uma impossibilidade. Logo, observamos que, além de os discentes não saberem as técnicas de resolução de subtração de fração com denominadores iguais, eles desconhecem que não se pode dividir por zero. Como exemplar, segue a resolução do aluno M19.

Figura 36: Resposta do aluno M19



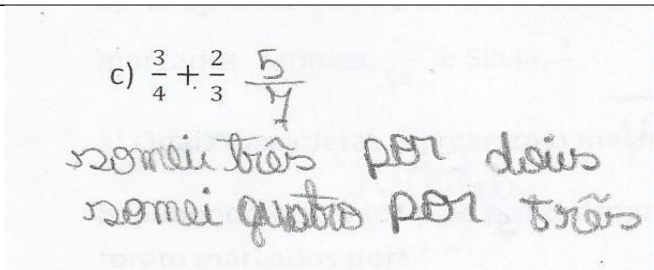
Fonte: Acervo da pesquisa

Analisando as respostas dos alunos nos itens a) e b) da primeira questão, que pretendia verificar se os alunos possuíam domínio de adição e subtração de frações com denominadores iguais, podemos observar que os discentes utilizaram algoritmos semelhantes, embora errados, para resolver essas questões.

A partir de agora, serão analisados os itens c) e d) da primeira questão, na qual se abordam as frações com denominadores distintos.

Conforme podemos constatar observando a Tabela 2, a letra c) teve 18 respostas incorretas, na qual todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, somando numerador com numerador e denominador com denominador. Percebemos assim que os discentes, ao resolver a questão, não percebem que por se tratar de uma soma de frações com denominadores distintos, sua solução necessita de um cálculo auxiliar como o mínimo múltiplo comum (mmc) ou frações equivalentes, conforme demonstrado no Capítulo 1 e, apenas somam como se trabalhasse com números naturais. Como exemplar, segue a resolução do aluno M19.

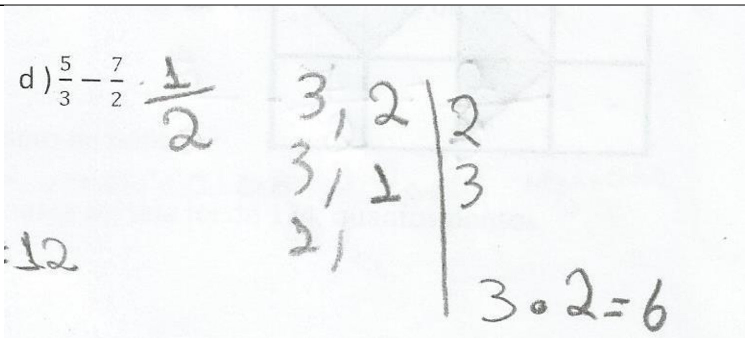
Figura 37: Resposta do aluno M19



Fonte: Acervo da pesquisa

O item d), conforme observamos na Tabela 2, teve 18 respostas incorretas. Dentre elas, uma solução chamou atenção. Observamos que o aluno, ao resolver esse item, mostrou saber que se tratava de uma questão que envolvia frações com denominadores distintos e fez corretamente o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc). No entanto, verificamos que o mesmo não sabia proceder os demais algoritmos para chegar ao resultado correto. Segue a resolução do aluno M5

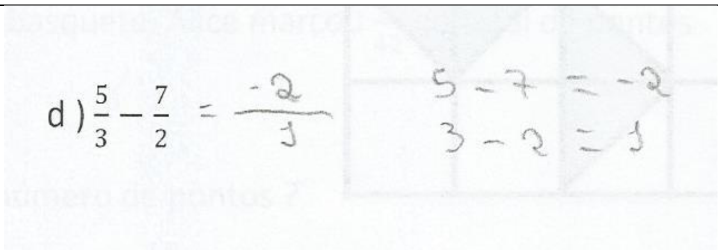
Figura 38:Resposta do aluno M5



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação ao item d), os outros 17 alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, subtraíram o numerador com o numerador e o denominador com o denominador. Vimos assim que os discentes não compreendem que, em uma questão que envolve subtração de frações com denominadores diferentes, é necessário o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), mostrando mais uma vez não terem domínio do conteúdo trabalhado na questão. Como exemplar, segue a resolução do aluno M17.

Figura 39:Resposta do aluno M17



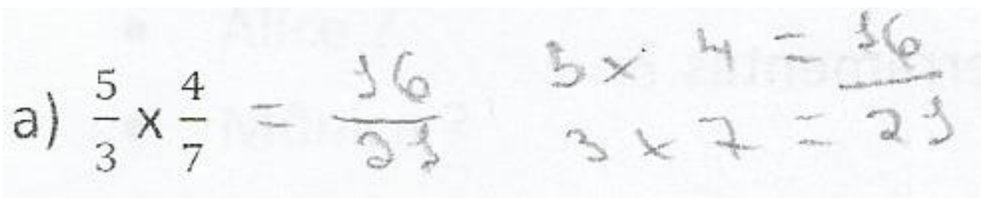
Fonte: Acervo da pesquisa

Com esses resultados, verificamos que a questão um teve um número expressivo de respostas erradas e, com isso, podemos afirmar que a maioria dos discentes do primeiro ano, do referido colégio estadual, possuem muita dificuldade em distinguir os algoritmos para se resolver questões que envolvem adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.

- **Análise da segunda questão (Q2)**

Esta questão busca analisar as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem multiplicação e divisão de números racionais. Como podemos ver na Tabela 2 do questionário referente ao Ensino Médio, o item a) teve 3 respostas incorretas. Dentre os erros ocorridos, dois alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, eles fizeram a multiplicação dos numeradores, 5 por 4, e obtiveram como resposta 16. Os estudantes mostram domínio de como resolver as multiplicações de frações, mas erraram na hora de fazer a multiplicação no numerador. Segue como exemplar a resolução do aluno M17.

Figura 40:Resposta do aluno M17



Fonte: Acervo da pesquisa

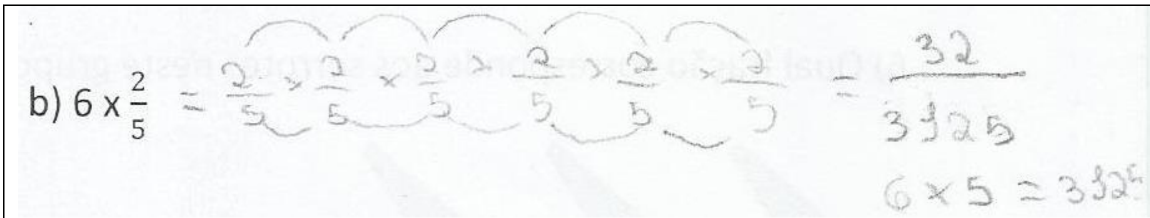
Ainda com relação ao item a), outra solução chamou bastante atenção. O discente fez uma grande “confusão” ao tentar resolver a questão proposta, no entanto, ressaltamos que multiplicou os números naturais corretamente. Porém, não utilizou as técnicas necessárias para a resolução de multiplicação de frações, pois, provavelmente o discente utilizou a resolução de divisão de frações, ou seja, repetiu a primeira fração e multiplicou pelo o inverso da segunda, ou até mesmo resolveu a operação fazendo a multiplicação de meios por extremos. Conforme protocolo do aluno M2 a seguir.

Figura 41: Resposta do aluno M2

Fonte: Acervo da pesquisa

O item b) teve 8 respostas incorretas. Dentre elas, tivemos a seguinte resolução: o discente teve a ideia de que se tratava de uma multiplicação de um número inteiro por uma fração e a fração dois quintos se repetia seis vezes. Porém, ao invés de somar as frações, o aluno cometeu o erro de multiplicá-las, consequentemente errando a resolução do exercício. Como mostrado a seguir na resolução do aluno M17.

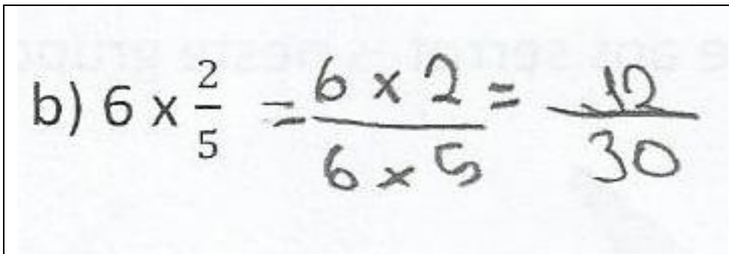
Figura 42:Resposta do aluno M17



Fonte: Acervo da pesquisa

Outros cinco alunos cometeram o mesmo tipo de erro, a saber, os discentes multiplicaram o número natural 6 pelo numerador e pelo denominador da fração, obtendo o resultado doze trinta avos Como exemplar, segue a resolução do aluno M3.

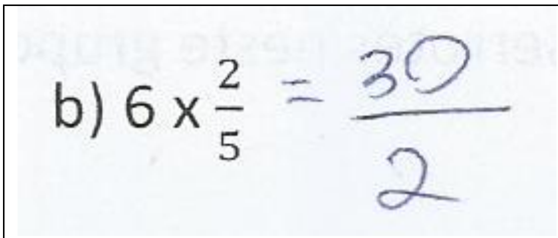
Figura 43: Resposta do aluno M3



Fonte: Acervo da pesquisa

Os dois alunos restantes cometeram outro tipo de erro. Os discentes multiplicaram o número inteiro 6 pelo denominador 5 da fração dois quintos, encontrando como resposta a fração trinta meios. Podemos verificar que os alunos não têm domínio das técnicas de resolução para se chegar ao resultado correto da questão. Podemos considerar ainda que os discentes realizaram o produto dos meios pelos extremos, considerando que o número 6 é igual à fração seis sobre um. Como exemplar, segue a resolução do aluno M2.

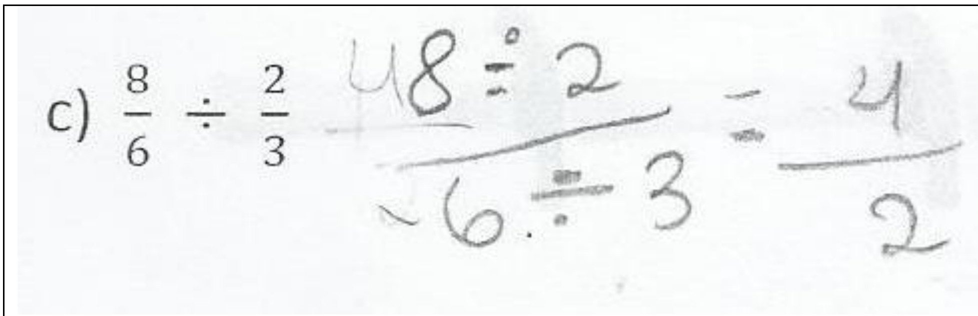
Figura 44: Resposta do aluno M2



Fonte: Acervo da pesquisa

O item c) teve 13 respostas incorretas. Todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, ou seja, dividiram numerador por numerador e denominador por denominador. Segue, como exemplar, a resolução do aluno M12.

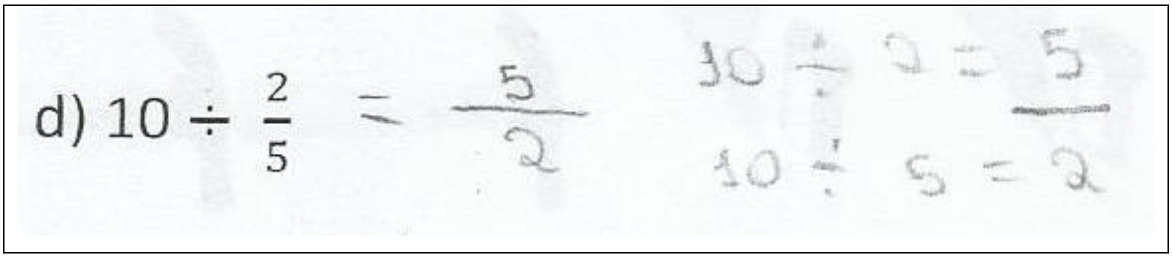
Figura 45: Resposta do aluno M12



Fonte: Acervo da pesquisa

Já no item d) houve 10 respostas incorretas. Dentre elas, cinco alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, dividiram o número natural 10 pelo numerador da fração dois quintos, obtendo como resposta o número 5. Em seguida, concluíram suas respostas com a fração cinco meios. Com isso, verificamos que os discentes mostram não saber as técnicas de resolução de divisão de frações. Como exemplar, segue a resolução do aluno F5.

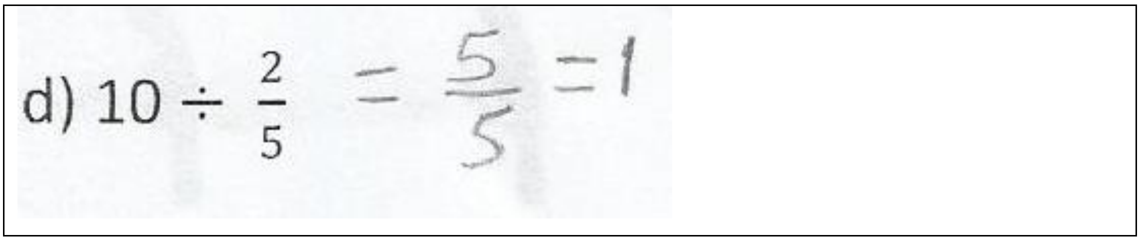
Figura 46: Resposta do aluno M17



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação ao item d), conseguimos identificar outro tipo de resolução incorreta, cometido pelos cinco alunos restantes. Verificamos que os discentes dividiram o número natural 10 pelo numerador da fração dois quintos, obtendo o número 5 e conservaram o denominador. Fizeram a simplificação da fração cinco quintos e obtiveram como resultado o número 1. Esse fato mostra como os discentes estão desprovidos de domínio do conteúdo matemático para resolver situações que envolvam divisões com frações. Como exemplar, segue a resolução do aluno M16.

Figura 47: Resposta do aluno M16



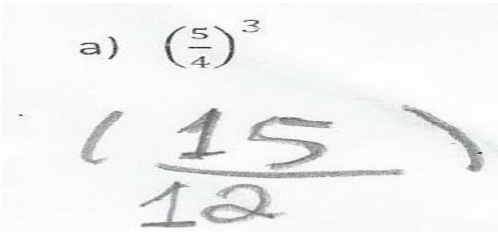
Fonte: Acervo da pesquisa

- **Analise da terceira questão (Q3)**

Esta questão busca verificar as dificuldades dos alunos em questões algorítmicas que envolvem potenciação e radiciação de números racionais. O item a) teve quatro respostas incorretas e o item b) teve três.

No item a), de quatro respostas incorretas, três alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, os discentes fizeram a multiplicação do numerador e do denominador pelo expoente, com isso concluíram que sua resposta é quinze doze avos. Vejamos que os alunos não têm noção das técnicas matemáticas para resolver potências. Como exemplar, segue a resolução do aluno M9.

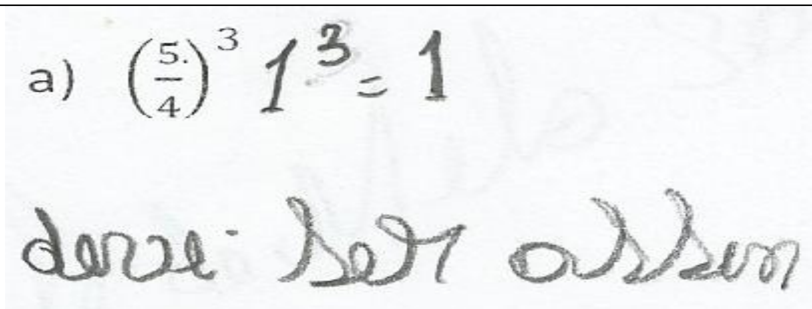
Figura 48: Resposta do aluno M9



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação ao item a) da terceira questão, selecionamos outra solução, na qual o discente M11 faz a subtração do numerador por denominador e, em seguida, resolve a potenciação. Segue a resolução do aluno M11.

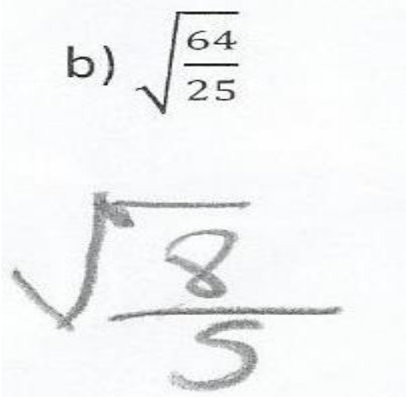
Figura 49: Resposta do aluno M11



Fonte: Acervo da pesquisa

Vejamos agora alguns erros cometidos pelos alunos no item b). Dentre as três respostas incorretas, dois alunos cometeram o mesmo tipo de erro, isto é, os discentes repetem o símbolo da raiz quadrada. Assim notamos que os alunos, ao resolverem o exercício, demonstram conhecimento das operações matemáticas e cometem o erro apenas na notação. Segue como exemplar, a resolução do aluno M9.

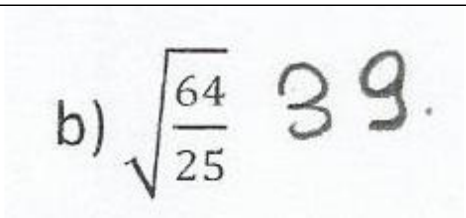
Figura 50:Resposta do aluno M9



Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação ao item b), vejamos mais uma solução incorreta encontrada. Observamos que o discente não tem domínio de conteúdo para resolver a radiciação, ou seja, o estudante desconsidera o radical e provavelmente faz a subtração do numerador pelo denominador, obtendo 39 como resposta. Percebe-se que o aluno cria sua própria resolução, demonstrando falta de conhecimento sobre o procedimento de resolução. Segue o protocolo do aluno M11.

Figura 51:Resposta do aluno M11



Fonte: Acervo da pesquisa

- **Análise da quarta questão (Q4)**

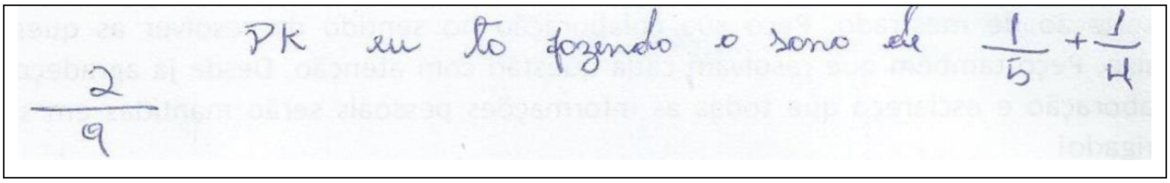
A questão busca avaliar as dificuldades que os estudantes apresentam em situações problemas com os números racionais. Podemos verificar que a questão quatro teve cinco respostas incorretas e oito parcialmente corretas.

Todas as respostas consideradas parcialmente corretas apresentavam o mesmo tipo de erro. Os alunos visualizam que o problema é uma questão contextualizada e conseguem realizar parte do que foi objetivado para a questão, identificando qual operação deveriam realizar para solucionar o problema.

Conseguem montar a expressão que representa a solução, no entanto, realizam a soma do numerador com o numerador e do denominador com o denominador. Uma das maneiras de resolver o exercício corretamente é utilizando o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), conforme demonstrado no Capítulo 1.

Os discentes deixam claro que possuem dificuldades com a soma de frações com denominadores diferentes. Como exemplar, segue a resolução do aluno M10.

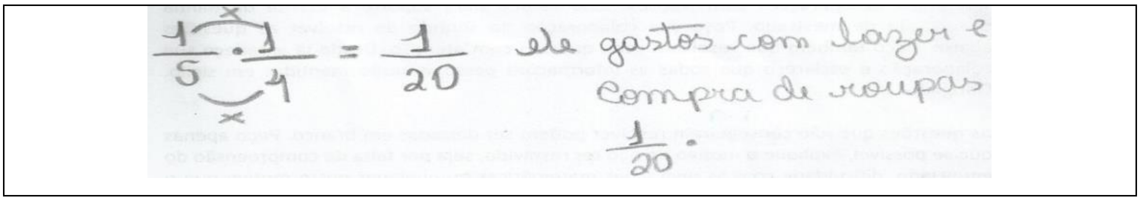
Figura 52: Resposta do aluno M10



Fonte: Acervo da pesquisa

Dentre as respostas incorretas, três discentes cometeram o mesmo erro, no qual, observamos que eles não conseguem verificar que a questão é de soma de frações. Em sua resolução, os alunos colocam como um produto de frações e efetuam corretamente a operação de multiplicação de frações. Como exemplar, segue a resolução do aluno M9.

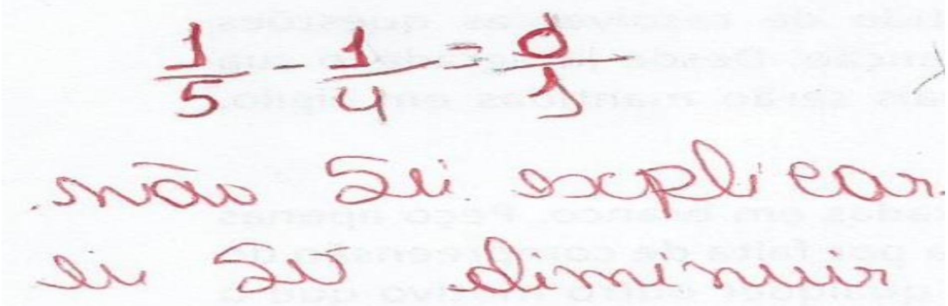
Figura 53: Resposta do aluno do M9



Fonte: Acervo da pesquisa

Os dois alunos restantes cometeram o mesmo tipo de erro e não percebem que se trata de uma soma de frações. Os alunos apenas subtraem, erroneamente, os numeradores e os denominadores. Com essa solução, os alunos deixam claro a falta de interpretação do problema. Como exemplar, segue a resolução do aluno M13.

Figura 54:Resposta do aluno M13



Fonte: Acervo da pesquisa

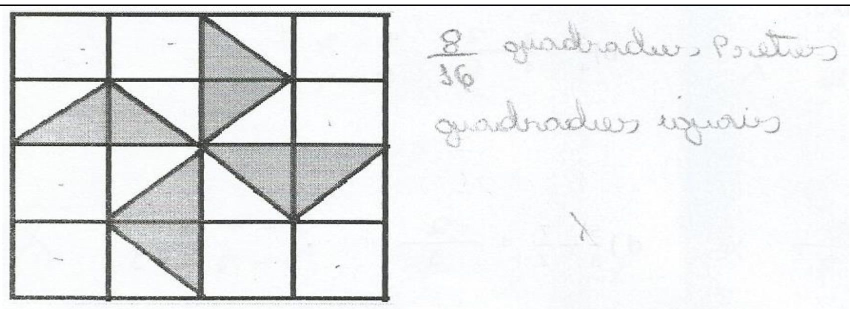
- **Analise da quinta questão (Q5)**

A questão cinco tem o objetivo de sondar estratégias utilizadas pelos discentes em questões que envolvem as relações conceituais, associado às representações dos números racionais. Na Tabela 2 do questionário referente ao Ensino Médio, a questão teve oito respostas incorretas.

Observamos que grande parte dos discentes não soube escrever a fração que representava as figuras, ou seja, não tinha a noção matemática necessária para visualizar que cada figura (ou o conjunto delas) estava associada a uma fração. Ressalta-se que, quando esse tipo de questão é apresentado com uma figura diferente da usual, os alunos enfrentam dificuldades de interpretação.

Das oito respostas incorretas, quatro delas estavam relacionadas ao erro de anotar no numerador as partes pintadas e no denominador o total de quadrados sem perceber que aquelas representam metade de um quadrado branco. Segue, como exemplar, a resolução do aluno M17.

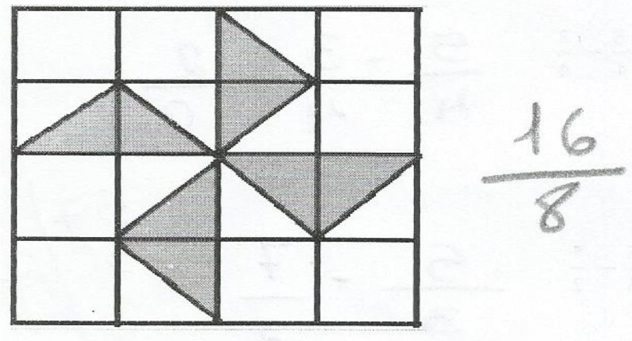
Figura 55: Resposta do aluno M17



Fonte: Acervo da pesquisa

Outros três alunos seguiram o mesmo raciocínio, porém inverteram a posição dos valores na fração, ou seja, colocaram no numerador o total de quadrados e no denominador o total de triângulos pintados. Com essa solução, os alunos deixam transparecer a falta de conhecimento do conceito de fração como parte-todo na interpretação do problema. Segue, como exemplar, a resolução do aluno M17.

Figura 56:Resposta do aluno M9

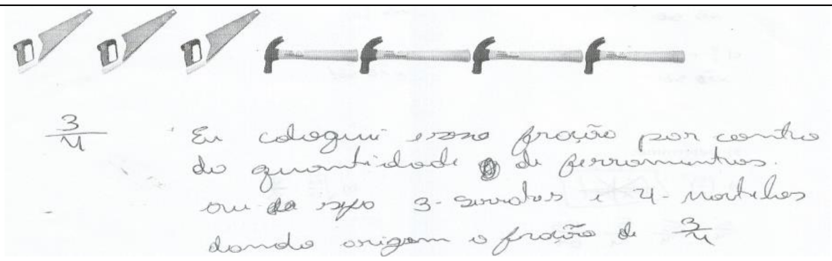


Fonte: Acervo da pesquisa

- **Análise da sexta questão (Q6)**

Na Tabela 2, podemos verificar que a questão seis teve nove respostas incorretas. Todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, a saber, os discentes não têm compreensão do significado da relação parte-todo, pois não consideraram a quantidade total de elementos ao apresentar suas respostas, representando como solução a fração três quartos, ou seja, dividiram o número de serrotes pelo número de martelos. Segue, como exemplar, a resolução do aluno M18.

Figura 57:Resposta do aluno M18



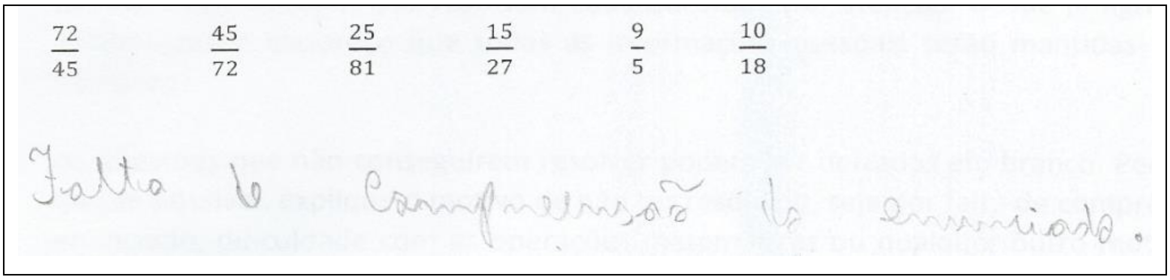
Fonte: Acervo da pesquisa

- **Análise da sétima questão (Q7)**

O objetivo da questão sete é identificar se os alunos sabem simplificar frações e se compreendem o que são frações equivalentes. Na Tabela 2, referente ao Ensino Médio, podemos verificar que essa questão teve oito respostas incorretas.

Entre as 11 respostas em branco, três alunos fizeram o comentário apresentado na Figura 58, na qual o aluno M7 alega falta de compreensão do enunciado.

Figura 58: Resposta do aluno M7

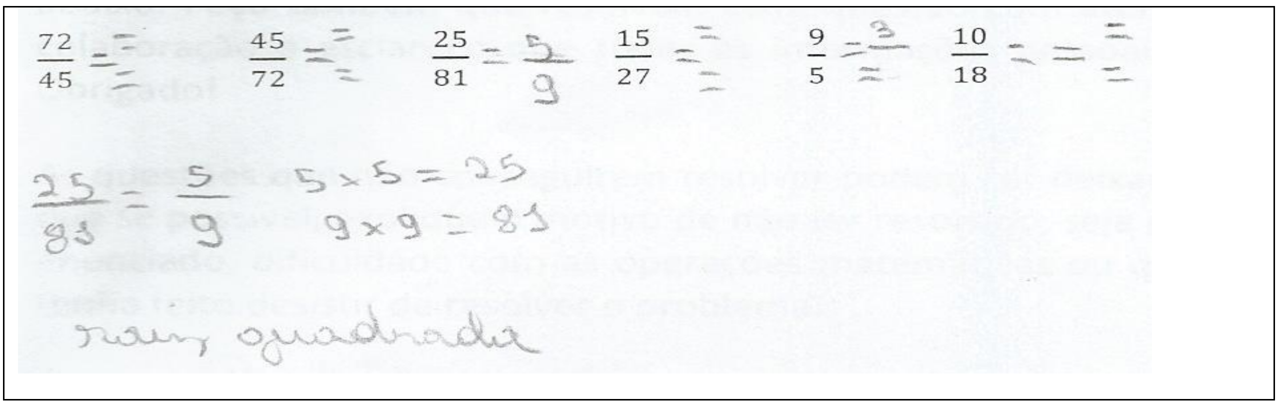

$\frac{72}{45}$ $\frac{45}{72}$ $\frac{25}{81}$ $\frac{15}{27}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{10}{18}$

Falta de compreensão do enunciado.

Fonte: Acervo da pesquisa

Dentre as oito respostas incorretas, três alunos cometeram o mesmo tipo de erro e não fizeram os cálculos corretamente para encontrar as frações equivalentes. Criaram suas estratégias de resolução, por meio das quais calcularam a raiz quadrada da fração vinte e cinco e oitenta e um avos, Considerando-a equivalente à fração cinco nonos, percebemos então que o aluno não tinha conhecimento de como proceder a resolução do exercício. Como exemplar, segue a resolução do aluno M17.

Figura 59: Resposta do aluno M17


$\frac{72}{45} =$ $\frac{45}{72} =$ $\frac{25}{81} = \frac{5}{9}$ $\frac{15}{27} =$ $\frac{9}{5} =$ $\frac{10}{18} =$

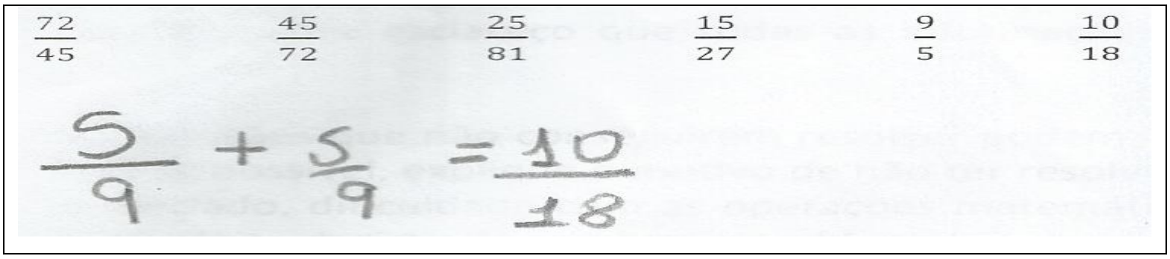
$\frac{25}{81} = \frac{5}{9}$ $5 \times 5 = 25$ $9 \times 9 = 81$

raiz quadrada

Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda com relação à sétima questão, nas cinco respostas restantes verificamos que os alunos criam suas estratégias de resolução, e com isso mostram que não sabem somar frações com denominadores iguais. Como exemplar, segue a resolução do aluno M9.

Figura 60: Resposta do aluno M9.



Fonte: Acervo da pesquisa

- **Análise da oitava questão (Q8)**

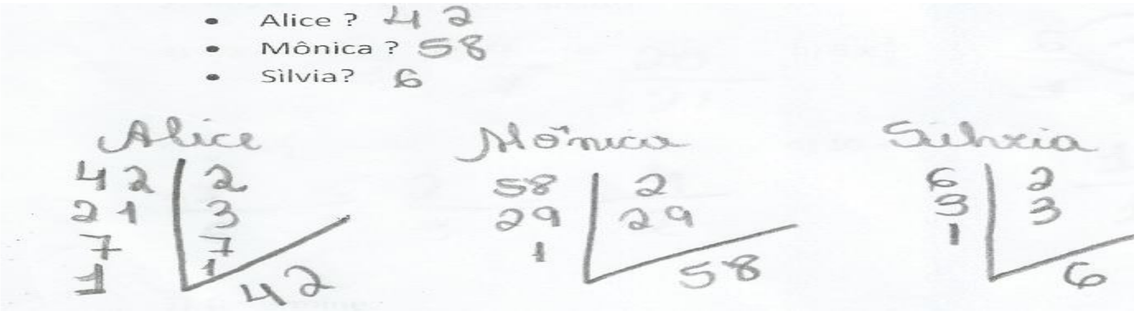
A questão oito tem o objetivo de avaliar as dificuldades que os estudantes apresentam em situações problemas com os números racionais. Foi subdividida em dois itens enumerados com as letras a) e b). Na Tabela 2, referente ao Ensino Médio, podemos verificar que a questão oito, no item a), teve sete respostas incorretas. Já no item b), foram três respostas incorretas.

Dentre as sete respostas incorretas no item a), dois alunos cometeram o mesmo tipo de erro, no qual os estudantes, ao responderem o exercício, não deixaram claro na sua solução que método ou que operação eles utilizaram para saber quais atletas marcaram a mesma pontuação, apresentando a solução Alice e Mônica que está errada.

Ainda com relação ao item a) da oitava questão, outros quatro alunos cometeram o erro de apresentar o nome de uma das atletas. Notamos que os discentes não têm a mínima ideia de como proceder na solução do exercício, além de não deixar claro que operação matemática utilizaram para a justificativa da sua resposta.

No item b) da oitava questão, todos os alunos cometeram o mesmo tipo de erro, no qual observamos que os alunos tentam criar sua própria estratégia de solução para o exercício. Os discentes fatoraram os números 42, 58 e 6 e depois concluíram que a pontuação marcada por cada atleta é a fatoração de cada número. Com essa resposta, os estudantes deixaram claro que não têm domínio do conteúdo para a solução desse exercício. Vale ressaltar que o item b) da oitava questão teve um grande número de respostas em branco. Segue, como exemplar, a resolução do aluno M9.

Figura 61: Resposta do aluno M9



Fonte: Acervo da pesquisa

Vimos que a maioria dos erros encontrados no Ensino Médio também foram vistos no Ensino Fundamental. Esse fato, leva-nos a refletir sobre a maneira com que temos que planejar as nossas aulas para que os estudantes não concluam a Educação Básica com as mesmas deficiências.

CAPÍTULO 4

RELACIONANDO OS RESULTADOS DO ENSINO FUNDAMENTAL COM O ENSINO MÉDIO

No capítulo anterior, foram discutidos, separadamente, os questionários aplicados no Ensino Fundamental e Ensino Médio de um colégio estadual, situado no município de Nossa Senhora da Glória, Sergipe. Nele fizemos uma análise minuciosa e investigativa dos erros cometidos pelos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio ao responder questões que envolvem as frações e suas operações.

Nesse capítulo, fazemos uma análise comparativa dos erros. Para tanto, construímos uma tabela para cada questão, comparando os tipos de erro encontrados na resolução dos participantes da pesquisa. No entanto, mostramos na Tabela 3 apenas a comparação de erros da primeira questão para que tenhamos uma visão geral dos erros cometidos pelos discentes.

Vale a pena lembrar que a questão número um do questionário aplicado envolvia adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes e estava expressa de maneira direta, sem nenhum texto interpretativo.

Tabela 3: TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS NA QUESTÃO 1

SOLICITADO NA QUESTÃO	**ERROS ENCONTRADOS**	**ENSINO FUNDAMENTAL**	**ENSINO MÉDIO**
Adição de frações com denominadores iguais.	Soma de numerador com numerador e denominador com denominador.	9	17
	Resolveu de forma ilógica, impossibilitando a interpretação do seu cálculo.	0	1
Subtração de frações com denominadores iguais.	Subtrai numerador com numerador e denominador com denominador.	7	7
	Resolveu de forma ilógica, impossibilitando a interpretação do seu cálculo.	0	1

	Elimina o denominador da fração e subtrai os numeradores.	0	4
Adição de frações com denominadores distintos	Efetuou o mínimo múltiplo comum, mas não aplicou as técnicas necessária para a resolução.	7	0
	Soma de numerador com numerador e denominador com denominador.	12	18
Subtração de frações com denominadores distintos.	Calculou o mínimo múltiplo comum, mas não aplicou as técnicas necessária para a resolução.	4	1
	Subtrai numerador com numerador e denominador com denominador.	11	10

Fonte: Questionário da pesquisa

Analisando a Tabela 3, podemos verificar que os alunos do Ensino Médio, no que se refere a questões que envolvam adição de frações com denominadores iguais, cometeram mais erros que os alunos do Ensino Fundamental. O mesmo acontece com as questões que envolviam subtração de frações com denominadores iguais. Segundo os resultados tabelados, podemos inferir que os alunos do Ensino Médio, no que se refere a adição e subtração de frações com denominadores iguais, possuem mais dificuldades que os do Ensino Fundamental. Isso pode ser justificado pelo fato de esse conteúdo ser trabalhado de forma específica no sétimo ano, ficando o discente afastado da base do conteúdo, mesmo as frações estando presentes nos demais conteúdos matemáticos.

Já no item que envolvia adição de frações com denominadores distintos, no qual o erro era “efetuou o mínimo múltiplo comum, mas, não se aplicaram as técnicas necessárias para a resolução”, os alunos do Ensino Médio não tiveram erros desse tipo, visto que somente um aluno conseguiu resolver de forma correta esse exercício e o restante respondeu aplicando a soma entre os numeradores e entre os denominadores. Percebemos que os alunos do sétimo ano podem ter cometido esse tipo de erro porque não têm o domínio completo para trabalhar com frações que envolvem o cálculo do mínimo múltiplo comum.

O erro de somar numerador com numerador e denominador com denominador ocorreu em grandes proporções tanto com os alunos do Ensino Fundamental quanto do Ensino médio. Isso leva a crer que os discentes trabalham ou operam com as frações desconsiderando o "traço" que denota a divisão, operando os números como se estivessem no Conjunto dos Números Naturais. Além disso, os estudantes do Ensino Médio, no decorrer dos seus estudos, não conseguiram sanar tais dificuldades.

Somente nas questões que envolviam subtração de frações com denominadores distintos, em todos os tipos de erros destacados da tabela, podemos verificar que os alunos do Ensino Fundamental obtiveram uma quantidade maior de erros que os do Ensino Médio, permitindo-nos conjecturar que o aluno do Ensino Médio, no decorrer da sua vida acadêmica, adquiriu maiores habilidades nas suas resoluções por possuir uma bagagem maior de conteúdos matemáticos.

Os erros de soma ou subtração entre os numeradores e entre os denominadores ocorreram em grande número em todos os itens nas duas turmas, o que pode indicar a utilização das operações com números naturais para realizar as operações com frações. Além disso, temos também o fato de a maioria dos professores trabalharem esse assunto utilizando procedimentos mecânicos. É importante que o professor trabalhe utilizando outros métodos e que proponha mecanismos lógicos e práticos de resolução.

De modo geral, no que se refere à primeira questão, podemos notar que os alunos do Ensino Médio erraram mais que os do Ensino Fundamental, o que pode ser justificado pelo fato de esse conteúdo ser trabalhado na maioria dos livros didáticos, de forma específica, no sétimo ano e, ao chegar no Ensino Médio, os discentes não conseguem mais associar as ideias utilizadas anteriormente para resolver as operações com frações. Talvez isso seja um dos fatores predominantes que levaram os alunos do Ensino Médio a cometerem mais erros que os do Ensino Fundamental.

Conforme citado no início desse capitulo, deixaríamos tabelados somente os dados da primeira questão e, para as demais, os dados mais importantes serão expostos ao discutirmos seus resultados.

Após analisar os resultados da questão dois, podemos verificar que os alunos do Ensino Médio, no que se refere ao erro de "multiplicar as frações utilizando a técnica de divisão de frações", cometeram mais erros que os alunos do Ensino Fundamental, errando respectivamente, três e uma questões. Os alunos aprenderam na divisão de frações que "repete a primeira e multiplica pelo o inverso da segunda" e, nesse caso, podem estar aplicando algo que decoraram e acham que vale também para multiplicação. O fato de esse erro ter aparecido mais na resolução dos alunos do Ensino Médio que do Ensino Fundamental pode ser justificado porque muitos alunos aprenderam o conteúdo de maneira mecânica e tentam reproduzi-lo nos anos seguintes.

Quanto ao erro de “Multiplicar as frações utilizando a técnica de adição de frações”, aconteceu com dois alunos do Ensino Fundamental e apenas um do Ensino Médio. Talvez esse tipo de resolução se deu pelo fato de os alunos não prestarem atenção ao enunciado, até porque a dificuldade na adição e subtração de frações com denominadores distintos é bem maior que na multiplicação.

Houve respostas de difícil compreensão no que se refere à multiplicação de frações, em que os discentes resolveram de forma ilógica, impossibilitando a interpretação do seu cálculo. Nesse quesito, tivemos apenas um aluno do Ensino Fundamental e um do Ensino Médio com esse tipo de erro.

Ainda em relação à multiplicação, tivemos o erro “Multiplicar o número natural pelo numerador e pelo denominador”, com sete alunos do Ensino Fundamental e cinco do Ensino Médio cometendo esse erro. Vimos que a multiplicação é a operação em que os alunos apresentaram melhor desempenho. É possível que isso esteja ligado à possibilidade de resolução semelhante aos números naturais, e os alunos resolvem o algoritmo como uma regra, multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador. Podemos intuir que os alunos utilizaram essa ideia e multiplicaram o número natural pelo numerador e pelo denominador ou utilizaram o método que lhes foi ensinado para construir frações equivalentes (multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número). Essa situação indica que o estudante leva consigo a ideia de que a fração representa dois números.

Tivemos casos em que os alunos nem sabiam efetuar uma multiplicação com números naturais ou inteiros, ou seja, o discente multiplica um número natural por uma fração como se fosse aquela fração multiplicada por ela mesma a quantidade de vezes do número natural. E esse erro foi cometido por um aluno do Ensino Médio e por nenhum do Ensino Fundamental, o que nos leva a crer que no decorrer dos estudos o aluno criou sua própria forma de resolver o exercício (usando o conceito de potenciação no lugar da multiplicação). Argumentamos que tal situação se deve ao fato de o mesmo ter estudado conteúdos a mais que o discente do fundamental, o que influenciou na sua resposta errada.

Para divisão, classificamos mais cinco tipos de erros. O primeiro foi “Dividir o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador” e tivemos dezoito alunos no Ensino Fundamental com esse tipo de erro e treze no Ensino Médio. Com esse resultado, é possível concluir que os alunos resolvem divisão de duas frações como se estivessem usando operações com números naturais. Além disso, podemos intuir que os estudantes do primeiro ano não conseguiram superar a dificuldade na divisão de frações nos anos subsequentes, visto que eles continuam cometendo os mesmos erros dos alunos do sétimo ano.

Tivemos o erro denominado por “Dividir o número natural pelo numerador e também pelo denominador”, e nesse caso cinco alunos do Ensino Fundamental e cinco do Ensino Médio cometeram o mesmo erro. É possível que isso esteja ligado à possibilidade de resolução semelhante aos números naturais, pois os alunos resolvem como uma regra. Pela quantidade de erros, é possível notar que a maioria dos discentes terminam o Ensino Fundamental e não aprendem a maneira correta de resolver esse tipo de exercício.

No erro “Dividir o número natural pelo numerador e repetir o denominador”, cinco alunos do Ensino Médio e 10 do Ensino Fundamental cometeram este tipo de erro, que pode ter acontecido porque o estudante desconsidera que está trabalhando com fração e efetua as operações como se estivesse no conjunto dos números naturais ou talvez a maioria dos alunos resolveu essa divisão utilizando o mesmo procedimento da multiplicação de um número natural por uma fração.

Ainda na divisão de frações, tivemos respostas de difícil compreensão, as quais os discentes resolveram de forma ilógica, impossibilitando a interpretação do seu cálculo. Nesse quesito, tivemos apenas um aluno do Ensino Fundamental e nenhum do Ensino Médio cometeu esse tipo de erro.

Llinares; Sánchez, (2013, apud Monteiro) trazem que

> Os mesmos símbolos dos Números Naturais também são utilizados para as frações, diferenciando-se apenas no traço na horizontal. As experiências que os alunos têm com os Números Naturais às levam à tendência de ver as frações como um conjunto de dois Números Naturais separados por um traço. Como consequência, acabam utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais para as frações. Isso contribui o que alguns autores denominam de “efeito de distração dos Números Naturais” (p. 54).

Especificamente sobre a divisão, para Llinares e Sánchez (1988),

> A operação de dividir Frações corresponde já diretamente a uma operação de sentido algébrico. Sua vinculação a procedimentos ou situações intuitivas é tão remota que podemos aceitar que não existem. Há diversas estratégias para apresentar essa operação, mas a mais conhecida é a que se fundamenta na ideia de Frações inversas. [...] Assim, ao apoiar a introdução da divisão de Frações ao da ideia de Frações inversas se está considerando a ideia de operação inversa da multiplicação (a saber, relações de natureza algébrica) (p. 151-152).

Ao se relacionar as frações com as operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão, as dificuldades são notórias, principalmente quando as frações são de denominadores diferentes e é necessário cálculo do mínimo múltiplo comum ou a utilização de frações equivalentes.

Uma das propostas para tentar diminuir o índice de erros em questões que envolvem frações é trazida por Toledo e Toledo (1996). Segundo ele, ao se iniciar as operações com números fracionários, o docente deve utilizar material concreto para agilizar o processo de facilitação do aprendizado do aluno sem o uso das regras, na construção de cada algoritmo, iniciando pelos casos mais simples nas operações.

É necessário um trabalho continuado com todos esses alunos para tentar sanar suas dúvidas e buscar soluções para esse problema, fazendo com que os alunos se motivem e vejam a matemática como uma disciplina interessante e percebendo sua importância para sociedade.

Desse modo, a missão do docente não é de apenas transmitir os conteúdos, mas de diagnosticar se os discentes estão aprendendo os conteúdos ministrados na aula, e caso perceba que os mesmos não estão aprendendo, reflita sobre suas metodologias de ensino e diversifique suas aulas.

A questão três está subdividida em dois itens, a) e b). No item a), trabalhamos com potenciação e, no item b), com radiciação. Nessa questão, observamos uma grande quantidade de erros semelhantes, cometidos pelos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

No item a), um dos tipos de erros comuns aos alunos do Fundamental e Médio foi que os estudantes, ao resolver uma potência, multiplicaram a base pelo expoente. O que pode ter acontecido nesse caso é que o aluno visualiza numa potência de base e expoente iguais a dois o resultado como produto de dois por dois e leva esse raciocínio para as demais potências. Com isso, evidenciamos a dificuldade na formação do conceito de potenciação e no domínio de suas propriedades básicas. O fato de esse erro ter aparecido mais na resolução dos alunos do Ensino Fundamental (seis) que do Ensino Médio (três) pode ser justificado porque no primeiro ano é feita uma breve revisão de potência quando é trabalhada equação exponencial.

Verificamos outro tipo de erro nesse item a), pois, os alunos, ao resolverem a potência de base fracionária, subtraíram o numerador pelo denominador e resolveram a potência, obtendo como resposta o número um. Foi detectado que dois alunos cometeram este tipo de erro no Ensino Fundamental e um no Ensino Médio. Nesse caso, concluímos que o estudante tenta criar sua própria estratégia de solução.

No Ensino Fundamental, dois alunos cometeram um erro cujo raciocínio não foi possível entender, visto que a operação feita não tem nenhum sentido lógico na matemática.

Com essas resoluções no item a), ficou claro a semelhança de erros dos alunos do Fundamental e Médio. Uma das justificativas desses erros persistirem na vida acadêmica dos alunos é que os livros didáticos no Ensino Fundamental dedicam poucos capítulos ao ensino específico de frações.

Já no item b), três alunos cometeram erros e não conseguimos identificar o que eles fizeram, sendo dois do sétimo ano e um do primeiro.

Verificamos também que dois alunos do Ensino Médio erraram apenas na notação, ou seja, calcularam a raiz quadrada e mantiveram o radical. Isso mostra apenas uma falta de atenção na escrita matemática, mas tal fato não foi identificado com alunos do Ensino Fundamental.

A questão quatro tratava de uma situação contextualização. Situações problemas que envolvem o cotidiano do aluno vêm sendo utilizadas com bastante frequência no ensino das frações, possibilitando que o discente desenvolva seu raciocínio e adquira conhecimento, evitando que o aluno apenas memorize.

Vimos que a maioria dos alunos conseguiu realizar parte do que foi proposto para a questão, identificando qual operação deveria realizar para solucionar o problema. No entanto, fizeram a soma entre os numeradores e entre os denominadores como se somassem números naturais. Doze alunos do Ensino Fundamental e oito do Ensino Médio cometeram este tipo de erro. Percebemos nas respostas dos alunos que eles trabalham com a ideia de números naturais. Além disso, observamos que alguns alunos do primeiro ano não conseguiram aprender o cálculo da soma de frações com denominadores distintos no decorrer de sua vida acadêmica até chegar ao Ensino Médio. Notamos que não houve uma grande diferença de alunos entre o Ensino Fundamental e o Ensino Médio que cometeram este tipo de erro. Logo, intuímos que não foram sanados os motivos pelos quais eles os cometeram.

Os PCN (1997) evidenciam que o contato dos alunos com a representação fracionária dos números racionais é pouco frequente em seu contexto diário, pois se limita ao uso de metades, terços, quartos, na maioria das vezes pela via da linguagem oral mais do que das representações escritas.

A quarta questão é um tipo de exercício que faz o aluno pensar, pois as respostas não estão explícitas, necessitando que o estudante busque formas de encontrá-las, decidindo as operações a utilizar. Como relatam os PCN (1997):

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL 1997 p.32).

Foi encontrado outro tipo de erro nessa questão, seis alunos, sendo três do Fundamental e três do Médio, entenderam que a resposta seria encontrada através de uma multiplicação de frações. Nesse tipo de erro, observamos que os estudantes não conseguiram interpretar corretamente o enunciado. A relação entre os erros no Ensino Fundamental com o Ensino Médio nos permite conjecturar que os alunos não conseguiram absorver o conteúdo trabalhado no Ensino Fundamental e reproduzem na mesma forma o que aprenderam ou, até mesmo, criam sua própria estratégia de resolução.

Observamos um tipo de erro na questão quatro, que só foi visto no Ensino Fundamental, quando os alunos perceberam que o exercício tratava de uma adição de frações e notaram que necessitava do cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc), porém não concluíram os cálculos de maneira correta. Por essa solução, podemos intuir que o aluno aprendeu de maneira mecânica e esqueceu algum passo para finalizar a resolução. Vale ressaltar que nenhum aluno do Ensino Médio resolveu ou tentou resolver este exercício fazendo o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc). Esse fato pode ter acontecido pela falta de domínio do conteúdo por parte dos alunos do primeiro ano. Com isso, podemos intuir que os alunos não conseguiram aprender a resolver esse tipo de problema ao longo do Ensino Fundamental.

Observamos que dois alunos do Ensino Médio interpretaram o exercício como se fosse uma questão de subtração de frações, o que não aconteceu no Ensino Fundamental. Mais uma vez, vimos nesse tipo de erro uma dificuldade na interpretação do exercício. O discente cria sua própria estratégia de resolução, talvez para não deixar a questão em branco ou por uma falta de atenção na interpretação do exercício. Além disso, não resolve de maneira correta a subtração de frações com denominadores distintos. Essa ocorrência por parte dos alunos do Ensino Médio pode ter acontecido pelo fato de os discentes acumularem uma maior bagagem de conteúdos e com isso criarem sua própria solução para não deixar o exercício sem resposta.

A questão número cinco trabalha a noção de fração como parte-todo, com uma figura não utilizada usualmente. Observamos que a maioria dos erros encontrados foram por contar a quantidade de partes brancas e pintadas, desconsiderando a unidade de medida. Do total de quarenta alunos investigados neste trabalho, detectamos que dez alunos cometeram esse erro no Ensino Fundamental e quatro no Ensino Médio.

Seis alunos, sendo três do sétimo ano e três do primeiro ano, tiveram o mesmo raciocínio do erro anterior, porém inverteram a posição dos valores na fração, ou seja, colocaram no numerador o total de quadrados e no denominador o total de triângulos pintados. Nesse contexto, segundo o PCN (BRASIL, 1997), o aluno deveria compreender a relação existente entre um número de partes e o total de partes equivalentes.

Na questão seis, assim como na cinco, os alunos teriam que saber reconhecer o que é uma fração e descrevê-la. Observamos que a maioria não soube reconhecer a fração. Os alunos do Ensino Fundamental demonstraram uma maior dificuldade na resolução desse exercício, pois, dos vinte alunos investigados dezoito não conseguiram identificar a fração que correspondia ao número de serrotes. Já no Ensino Médio, isso ocorreu com nove alunos. O que pode ter acontecido é que os estudantes não conhecem o significado da relação parte-todo, pois não consideram a quantidade total de elementos. Outra possibilidade é terem estabelecido uma relação entre os elementos, interpretando como uma razão da quantidade de serrotes pela quantidade de martelos. Usando esse mesmo raciocínio, um aluno do Ensino Fundamental cometeu esse mesmo erro, porém ele inverteu a posição do numerador com o denominador.

Podemos observar que, mesmo sendo essa uma questão que trabalhava o significado parte-todo, como as usualmente encontradas nos livros didáticos, e que, segundo Nunes e Bryant (1997), é também o tipo de atividade a que normalmente o professor dá mais ênfase em sala de aula, a maioria dos alunos apresentou dificuldades, pois o resultado encontrado traz a possibilidade de que esse trabalho não tenha sido realizado a contento. No entanto, a grande diminuição da ocorrência desse erro no Ensino Médio em relação ao Ensino Fundamental nos permite conjecturar que os alunos, no decorrer dos anos seguintes, conseguiram assimilar o significado de uma representação fracionária por meio de figuras.

Esperávamos que os alunos, mesmo os do sétimo ano, apresentassem um melhor desempenho das questões propostas, visto que, já têm contato com o conteúdo de fração desde os anos iniciais e, nessa fase, já deveriam ter superado as dificuldades apresentadas ao chegarem no terceiro ciclo, previstas nos PCN (1998):

> Embora a representação fracionária e decimal dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de números e tampouco os procedimentos e cálculo. (BRASIL, 1998, p.100 e 101).

O objetivo da questão sete era verificar se os alunos saberiam reconhecer quando duas frações são equivalentes, e foi a questão que apresentou o maior número respostas em branco. Dentre as respostas, observamos que seis alunos, três do Ensino Fundamental e três do Ensino Médio, fizeram comentários semelhantes nas suas resoluções, citando que: “não estudei ainda” e “falta de compreensão do enunciado”. O que pode indicar que nem mesmo reconhecem o termo “frações equivalentes”.

Um aluno do sétimo ano e três do primeiro ano utilizaram o conceito de radiciação nas suas resoluções. Observamos aqui que os alunos tentaram criar suas estratégias de resolução. Esse tipo de erro foi mais frequente no Ensino Médio, talvez pelo fato de os estudantes já terem uma maior vivência na vida acadêmica, aumentando a gama de possíveis estratégias para tentar resolver o exercício.

Foi observado também que nove alunos do Ensino Fundamental deixaram a questão incompleta, isto é, simplificaram uma fração e não prosseguiram com as outras. Esse tipo de resposta não foi verificado no Ensino Médio. Temos algumas hipóteses nesse tipo de solução, pois podemos intuir que o aluno interpretou que bastava encontrar uma fração equivalente e concluiu a resposta, ou é o tipo de estudante que tem pressa para acabar a resolução de todo exercício, até porque, se o discente conseguiu simplificar uma fração, provavelmente, iria simplificar as demais.

Cinco alunos do Ensino Médio resolveram o exercício como se fosse uma soma de frações e somaram incorretamente cinco nonos com cinco nonos, obtendo dez dezoito avos. Nenhum aluno do Ensino Fundamental utilizou esse método para solucionar o exercício. Nesse caso, o discente cria sua própria estratégia de resolução e demonstra falta conhecimento da operação de adição de frações.

Vale ressaltar a importância da equivalência das frações, pois através da equivalência o aluno poderá ter mais facilidade em operar com frações. Segundo o PCN (1997):

> Os conceitos de equivalência assim como a construção de procedimentos para obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números. (BRASIL, 1997, p.103)

Reforçando essa ideia, Llinares e Sánchez (1988) escrevem que,

> A importância da ideia de equivalência de frações se deve ao papel chave que joga em diversos aspectos: na relação de ordem (ordenar duas Frações, inserir Frações entre duas Frações dadas), no desenvolvimento dos algoritmos de adição e subtração de Frações com denominadores diferentes. Em um nível mais elevado, a conceitualização do Número Racional como classes de equivalência de Frações (entendendo como classes de equivalência o conjunto de todas as Frações que descrevem as mesmas relações entre a parte considerada e o todo) (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 117).

A questão oito está subdividida em dois itens, a) e b), sendo que o item a) tinha o objetivo de verificar se os alunos saberiam reconhecer quando frações são equivalentes. Já no item b), queríamos identificar as estratégias que os alunos utilizam para efetuar a multiplicação de um número natural por uma fração.

O exercício pedia para o estudante analisar quais atletas tinham marcado a mesma pontuação numa partida de basquete, sendo que foi dada a fração correspondente a cada um dos atletas, no entanto onze alunos, nove do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio, responderam sem nenhuma justificativa dois nomes de atletas cujas frações não eram equivalentes.

Quatro alunos do Ensino Médio responderam apenas a atleta “Silvia”, sem sequer mostrar a equivalência das frações, mas não foi visto nenhuma resposta semelhante a essa no Ensino Fundamental. Esse tipo de solução mostra que o aluno respondeu o exercício sem utilizar raciocínio matemático. Além disso, percebe-se que o discente não sabe fazer a interpretação da questão, até porque é pedido quais atletas marcaram a mesma pontuação. Talvez o aluno apenas não quis deixar a solução em branco e respondeu de forma aleatória.

Com relação ao item b), nove alunos do Ensino Médio fatoram os denominadores de cada fração 42, 58 e 6 e depois concluem que a pontuação marcada por cada atleta é a fatoração de cada número. Não percebemos esse tipo de erro no Ensino Fundamental. Isso nos permite concluir que os discentes do Ensino Médio acabam confundindo os vários conteúdos estudados durante seus anos de formação e com isso criam suas próprias estratégias de resolução.

Houve um aluno do Ensino Fundamental que montou o algoritmo da resolução do exercício do item b) da oitava questão e não conseguiu finalizar. Nenhum aluno do primeiro ano utilizou este raciocínio. Talvez isso pode ter ocorrido pelo tempo que o discente não conseguiu administrar no dia que o questionário foi aplicado.

Diante do que foi visto e analisado nos questionários dos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, podemos intuir que precisamos rever algumas formas de trabalhar o conteúdo frações ou até mesmo criar algumas alternativas de ensino que facilitem a aprendizagem dos estudantes, visto que os alunos estão saindo do Ensino Fundamental e ingressando no Ensino Médio com as mesmas dificuldades no estudo das frações.

CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos uma síntese do caminho percorrido na realização desse trabalho, as nossas reflexões sobre as questões de pesquisa com base nos resultados obtidos com a aplicação dos questionários, bem como nossas perspectivas para uma futura intervenção.

Lecionando matemática na rede pública de ensino, vejo uma grande dificuldade dos alunos em aprender os conteúdos relacionados ao estudo das frações. Observo que para os alunos obterem sucesso na superação dos próprios erros, não basta dizermos quais são os caminhos corretos, mas é necessário que o aluno reconheça suas dificuldades e que os seus conhecimentos ainda são insuficientes, pois só assim ele poderá saná-las trabalhando novas estratégias.

Dessa forma, percebi que era necessária uma investigação para dar respostas às minhas angústias e inquietações, para compreender o que acontece com a aprendizagem dos alunos no estudo das frações. Percebo também que esta dificuldade de entender o conteúdo de frações não se limita ao Ensino Fundamental, mas está presente ou persiste nos alunos do Ensino Médio. Aproveitar os erros que apareceram nas turmas durante as aulas, sobre um determinado conteúdo, e discutir sobre eles, promovendo um debate já é um reflexo do meu trabalho como pesquisador.

No nosso estudo tentamos encontrar elementos para entender as dificuldades de aprendizado do conteúdo frações em alunos da Educação Básica, conforme vimos no decorrer desse trabalho buscando refletir sofre os motivos que levam os alunos a ter insucesso nesse conteúdo.

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo identificar e analisar as dificuldades de aprendizagem do conteúdo frações por parte dos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio. E após analisar os dados coletados no questionário aplicado, verificar se as dificuldades apresentadas são as mesmas.

O instrumento de coleta de dados foi um questionário composto de oito questões envolvendo o conteúdo de frações. A pesquisa foi realizada com vinte alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e vinte alunos do primeiro ano do Ensino Médio e caracteriza-se como uma pesquisa de campo por ocorrer dentro do próprio ambiente em que ocorre o problema. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006)

Foram utilizados procedimento de Análise de Erros de Cury (1994), suas ideias e concepções sobre a utilização do erro como ferramenta de identificação e superação das dificuldades dos alunos, bem como a abordagem feita pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre este assunto.

Nossa opção pela análise de erros se deu por acharmos relevante o estudo dos erros e suas causas, além de nos ajudar a tentar entender o porquê de os alunos apresentarem tanta dificuldade.

Diante desses resultados e discussões que foram feitos nos capítulos anteriores, podemos expor algumas reflexões e dar respostas às nossas questões de pesquisa que foram formuladas da seguinte maneira:

- Os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e os do primeiro ano do Ensino Médio da escola escolhida, possuem domínio do conteúdo frações?
- Os erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e os do primeiro ano do Ensino Médio se assemelham?

Analisando o resultado de cada turma foi possível verificar através do questionário aplicado suas dificuldades, erros e, também, se houve alguma evolução da turma do Ensino Médio na compreensão de cada conceito trabalhado no conteúdo de frações comparado com o Ensino Fundamental.

Em resposta à primeira questão de pesquisa, analisando os dados das tabelas 1 e 2 verificamos que os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, assim como os do primeiro ano do Ensino Médio, não possuem domínio do conteúdo de frações, devido ao baixo índice de respostas corretas. Com isso, podemos concluir que os alunos do Ensino Fundamental não conseguiram compreender os diferentes significados associados à frações e os procedimentos e cálculos que envolvem esse conteúdo e que os alunos do Ensino Médio mantiveram as dificuldades no decorrer de sua vida acadêmica.

Segundo Rico (1995), os aparecimentos de erros nas produções dos alunos acontecem por várias causas, entre elas, as concepções inadequadas sobre os aspectos fundamentais da matemática, resultados de utilização de procedimentos imperfeitos que, às vezes, não podemos reconhecer ou exemplos de métodos e estratégias inventadas para solução de alguns problemas propostos.

Sobre a segunda questão de pesquisa a análise dos erros apresentados pelos alunos das duas turmas mostram que sim, os erros se assemelham. Principalmente nas operações de adição e subtração de frações, onde a maioria dos discentes cometeram o erro de operar numeradores e denominadores, como se trabalhassem com números naturais, desconsiderando o traço da fração.

Vale ressaltar que os alunos do Ensino Médio apresentaram maior diversidade de estratégias de resolução (mesmo que erradas), o que pode ser justificado pela maior bagagem acadêmica dos mesmos, o que abrange o leque de conteúdos já estudados. Por exemplo, no exercício sobre frações equivalentes, três alunos do primeiro ano aplicaram a radiciação para simplificar uma fração, e disseram que a fração original é equivalente à fração resultante da operação, erro que não apareceu entre os alunos do Ensino Fundamental.

Segundo Llinares e Sánchez (1988), há erros que aparecem de forma aleatória, por descuido, distração, etc., e outros erros se devem ao fato de que, simplesmente, o aluno não sabe a resposta correta e propõe um resultado ao acaso. Há outros tipos de erros que se devem à não compreensão total do conceito ou à aplicação de procedimentos errôneos, os quais podem ser devido à elaboração de métodos pessoais alternativos aos ensinados pelo professor ou pela modificação/esquecimento de algum passo de um algoritmo ensinado.

A partir desses resultados diagnosticamos que os alunos chegam ao Ensino Médio sem saber interpretar problemas que envolvem frações e poucos são os que aprenderam os procedimentos operatórios relacionados a adição, subtração, multiplicação e divisão. Acreditamos que se faz necessário a utilização de metodologias que amenizem estas dificuldades, visto que muitos professores trabalham com frações utilizando procedimentos mecânicos. Desta forma é necessário ensinar matemática fazendo com que os alunos construam conceitos, formulem e validem estratégias de soluções.

Como continuidade na investida que iniciamos e mediante os resultados desta pesquisa, sugerimos uma intervenção para tentar sanar tais dificuldades o que pode acontecer em uma pesquisa futura que tivesse como objetivo central avaliar a reelaboração da ação do professor em sala de aula, tendo como base a análise de erros dos discentes e voltada para colaborar para que eles criem atitudes cada vez mais positivas em relação ao ensino da matemática.

Com esse olhar, encerramos com uma afirmação de Llinares e Sánchez (1988), na qual dizem que:

> Fazer surgir nossas concepções como professores é vital para poder maximizar o resultado da conexão entre a teoria e a prática cotidiana. Proporcionar as razões que explicam tanto as decisões tomadas em relação ao ensino, aprendizagem e conteúdo que vamos tratar, como o caminho seguido para tomar essas decisões e não outras, podem ajudar-nos a ser profissionais reflexivos e não simplesmente transmissores das ideias dos outros (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 21).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BECHARA, E. **Moderna Gramática Portuguesa.** 36 ed. SP; Companhia Editora Nacional, 1997.

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionários. BOLEMA vol. 21, Nº 31 (2009)

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática, Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries).** Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares dos **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Semtec, 2002.

COSTA, D. A. F. **A análise do Erro como caminho de Descoberta do Pensamento da Criança, AMAE Educando**. v.21, n. 199, p. 14-20, out. 1988.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e sua forma de considerar o erro dos alunos.** Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

CURY, H. N. **Retrospectiva história e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática**. Zetetiké, v.3, n.4, p.39-50, nov. 1995.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DANTE, L. R. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática teoria e prática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris** – 2 ed. São Paulo: Ática 2015

DOMINGUES, H. **Fundamentos de Aritmética,** Atual Editora, São Paulo, 2001.

ENRICONE, D. (Org.). **Ser professor**. Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2009.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GAMA, P.F e LIMA, L.A.M. **Números Racionais: Uma abordagem com enfoque na Análise dos Erros. Encontro Nacional de Educação Matemática**. (ENEM). São Paulo-SP. 2016

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2014.

GIOVANNI.; BONJORNO e GIOVANNI JR., J. R. Matemática uma Nova Abordagem. São Paulo: FTD, 2010.

HEFEZ, A. *Aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

HOFFMAN, J. **Avaliação Mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade, 26ª Ed., Porto Alegre: Mediação, 2006.

LEONARDO, F. M. **Projeto Araribá.** 3. ed. São Paulo: MODERNA, 2013.

LLINARES, S. C.; SÁNCHEZ, M. V. G. **Fracciones la relacion parte-todo. Madrid:** Sintesis, 1988.

MONTEIRO, A. B. **Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de tecnologias da informação e comunicação/Alexandre Branco Monteiro**, 2013.

NUNES, K. S.; GROENWALD, C. L. O.; SEIBERT, T. E.; HOMA, A. I. R. **Inovando o currículo de Matemática através da incorporação das Tecnologias da Informação e Comunicação – ambiente de investigação com o tema Números Decimais. XVIII Salãode Iniciação Científica e Tecnológica. Canoas:** ULBRA. 2012.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas,
1997.

PERRENOUD, P.; PAQUAY, L.; ALTET, M.; CHARLIER, É.; (Org) trad. Fátima Murad e Eunice Gruman – **Formando professores profissionais-Quais estratégias? Quais competências?** 2ª ed. Ver. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

RAMOS, L. **Frações sem Mistérios.** 7ª ed. São Paulo: Ática, 1991.

RICO, L. Erroes en la aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J.; GOMES, P. RICO, L. **Educación Matemática.** Colombia: Grupo Editorial Iberoamerica, 1995. p. 69-108

SANTOS, J. R. V.; BURIASCO, R. L. C. **Da ideia de erro para as maneiras de lidar**: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. p. 87-108.

SOUZA, J. R.; PATARO P. M. **Novo olhar matemática volume 2.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2015.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática.** São Paulo: FTD, 1997

VASCONCELOS, I. C. P. **Números Fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos da 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p. 104. 2007.

Apêndice

Prezado(a) aluno(a): Estou desenvolvendo um trabalho de pesquisa que busca apontar algumas dificuldades encontradas pelos alunos em interpretar e resolver questões referentes as operações com frações. Esse estudo dará suporte à escrita da minha dissertação de mestrado. Peço sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo. Peço também que resolvam cada questão com atenção. Desde já agradeço sua colaboração e esclareço que todas as informações pessoais serão mantidas em sigilo. Obrigado!

As questões que não conseguirem resolver podem ser deixadas em branco. Peço apenas que se possível, explique o motivo de não ter resolvido, seja por falta de compreensão do enunciado, dificuldade com as operações matemáticas ou qualquer outro motivo que o tenha feito desistir de resolver o problema.

Aluno: ____ **Turma:** ______

Questionário

1) Resolva as operações abaixo:

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$

b) $\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$

2) Resolva as operações abaixo:

a) $\frac{5}{3}$ x $\frac{4}{7}$

b) 6 x $\frac{2}{5}$

c) $\frac{8}{6} \div \frac{2}{3}$

d) 10 $\div \frac{2}{5}$

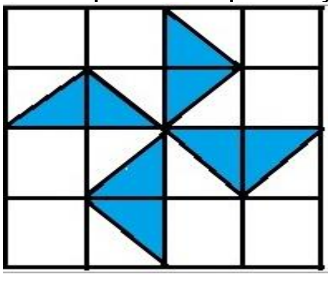
3) Determine:

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$

b) $\sqrt{\frac{64}{25}}$

4) João reservou $\frac{1}{5}$ de seu salário para gastar com lazer e $\frac{1}{4}$ para comprar roupas. Que fração de seu salário João reservou para os gastos com lazer e compra de roupas?

5) A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?



6) Qual fração corresponde aos serrotes neste grupo de ferramentas?

7) Pedrinho aprontou mais uma vez! João tinha separado as cartelas com as frações equivalentes a $\frac{5}{9}$, e Pedrinho misturou tudo. Vamos ajudar a João, indicando as frações equivalentes a $\frac{5}{9}$.

$\frac{72}{45}$ $\frac{45}{72}$ $\frac{25}{81}$ $\frac{15}{27}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{10}{18}$

8) Na partida final de um campeonato de basquete, Alice marcou $\frac{7}{42}$ do total de pontos marcados, Mônica, $\frac{5}{58}$, e Sílvia, $\frac{1}{6}$.

a) Quais das atletas marcaram o mesmo número de pontos?

b) Sabendo que o total de pontos marcados nessa partida foi de 174, quantos pontos foram marcados por:

- Alice?
- Mônica?
- Sílvia?