



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EMANOEL LÁZARO DE SANTANA SANTOS

Planaridade em Grafos: O teorema de Kuratowski

São Cristovão

2017

EMANOEL LÁZARO DE SANTANA SANTOS

Planaridade em Grafos: O teorema de Kuratowski

Versão original

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Área de concentração: Matemática Discreta

Orientador: Profa. Dra. Giovana Siracusa Gouveia

São Cristovão

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237p Santos, Emanuel Lázaro de Santana
Planaridade em grafos : teorema de Kuratowski / Emanuel
Lázaro de Santana Santos ; orientador Giovana Siracusa
Gouveia. – São Cristóvão, 2017.
84 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) –Universidade
Federal de Sergipe, 2017.

1. Teoria dos grafos. 2. Grafo planar. 3. Kuratowski,
teorema de. I. Gouveia, Giovana Siracusa, orient. II. Título.

CDU: 519.173



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Planaridade de grafos: O teorema de Kuratowski

por

Emanoel Lazaro de Santana Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Prof.^a Dr.^a Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Orientador

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Prof.^a Dr.^a Rainelly Cunha De Medeiros - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 26 de Agosto de 2017

Dedico esta dissertação à minha esposa Kataryna e à minha filha Emanuelle pelo apoio incondicional e por compreender a minha ausência durante todo este período de estudo.

Dedico também à minha orientadora Profa. Dra. Giovana Siracusa Gouveia, pela confiança, paciência, incentivo, amizade e excelente orientação.

E por fim, dedico aos meus pais, José Lázaro e Miriam, que dignamente me apresentaram ao caminho da honestidade e da persistência.

Sem todos vocês, este trabalho não seria realizado e nenhuma conquista valeria a pena.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, pelo dom da vida, por possibilitar que eu pudesse empreender esse caminho evolutivo e por sempre abrir meus caminhos e colocar nele pessoas amigas e preciosas.

À minha querida companheira Kataryna e minha preciosa filha Emanuelle, por todo amor e carinho, e por abrirem mão da minha presença em família em prol do meu crescimento profissional. Amo muito vocês!

À minha orientadora Profa. Dra. Giovana Siracusa Gouveia, por todos os momentos de ensinamentos não só acadêmicos como também de desenvolvimento pessoal. Foi um privilégio ter sido seu orientando. Meu muito obrigado. Sem você essa conquista não seria possível. Você me fez ser um profissional e um ser humano melhor.

Aos meus pais, José Lázaro e Miriam, por todo o ensinamento e valores passados como dignidade, respeito, tolerância e persistência que me ajudaram muito nessa caminhada. Amor eterno.

À minha família em geral, em especial aos meus irmãos, Heloísa, Heloana, Júnior e Ana que sempre manifestaram sua torcida e seu carinho durante esta caminhada.

Aos professores do departamento de matemática da UFS, por todo esse tempo de convivência que tive com vocês. Em especial, agradeço a todos que foram meus professores durante o curso: Prof. Dr. Almir, Profa. Dra. Giovana, Prof. Dr. Evilson, Prof. Dr. André, Prof. Dr. Zaqueu, Prof. Dr. Bruno, Prof. Dr. Fábio e Prof. Dr. Kalasas. Vocês contribuíram de maneira muito especial para minha formação. Também agradeço aos professores que tive o prazer de conhecer e conviver durante esse período: Profa. Dra. Débora, Prof. Dr. Humberto, Prof. Dr. Danilo, Prof. Dr. Marcelo, Prof. Dr. Alejandro, Prof. Dr. José Anderson, Prof. Dr. Naldisson e Prof. Dr. Disson. Vocês com suas palavras e condutas me incentivaram e me apoiaram para seguir adiante. Meu muito obrigado a todos vocês.

Aos meus amigos de Mestrado, que compartilharam comigo esses momentos de aprendizado. Especialmente a Sóstenes, com quem compartilhei momentos de tensão, incertezas e vitórias nesse percurso.

Ao meu amigo Adailton, por me incentivar e me apresentar ao programa de mestrado PROFMAT, e aos professores mestres Wellington, Natanael e Leopoldo, por me auxiliarem no acesso ao programa. Sou grato a todos vocês.

Ao Secretário de Educação de Maruim, Prof. Aelmo, e ao seu Secretário Adjunto, Prof. Eduardo, por concederem a licença para estudos, demonstrando assim, o respeito à formação continuada do magistério.

Ao meu amigo de graduação Prof. Mst. Epifânio, pela disposição em assumir minhas turmas no Estado para que eu pudesse fazer uso da licença para estudos, esse fator foi imprescindível para este resultado. Meu muito obrigado.

Ao meu querido amigo Silvaney, que não exitou em contribuir com a construção da parte histórica deste trabalho. Sou grato por isso.

Por fim, a todos aqueles que de uma maneira ou de outra torceram pelo meu sucesso. Obrigado!

RESUMO

SANTOS, Emanuel Lázaro de Santana. **Planaridade em Grafos**: O teorema de Kuratowski. 2017. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

A presente dissertação tem como objetivo introduzir os conceitos básicos da teoria dos grafos para explorar o conceito de planaridade e apresentar um belo teorema ligado a esse tema. A teoria dos grafos é uma ferramenta muito eficaz na resolução de problemas que envolvem diversas áreas de conhecimento. Alguns destes problemas estão relacionados à planaridade de grafos. Dessa forma, este trabalho apresenta o teorema de Kuratowski, com a beleza de sua demonstração, que fornece uma condição necessária e suficiente para um grafo ser planar, observando se o mesmo contém um tipo específico de subgrafo relacionado a grafos completos e bipartidos.

Palavras-chaves: Teoria dos Grafos, Grafo Planar, Teorema de Kuratowski.

ABSTRACT

SANTOS, Emanuel Lázaro de Santana. **Planarity in Graphs: Kuratowski's theorem.** 2017. 84 p. Dissertation (Master of Mathematics) – PROFMAT, Federal University of Sergipe, São Cristóvão, 2017.

The present dissertation aims to introduce the basic concepts of graph theory to explore the concept of planarity and present a beautiful theorem connected to this theme. Graph theory is a very effective tool for solving problems involving several areas of knowledge. Some of these problems are related to planarity of graphs. Thus, this work presents Kuratowski's theorem, with the beauty of its demonstration, which provides a necessary and sufficient condition for a graph to be planar, observing if it contains a specific type of subgraph related to complete and split graphs.

Keywords: Theory of Graphs, Planar Graph, Kuratowski's Theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa da cidade de Königsberg e sua representação gráfica.	13
Figura 2 – Mapa moderno de Kaliningrado (antiga Königsberg). As localizações das pontes restantes são realçadas em verde, enquanto as destruídas são destacadas em vermelho.	17
Figura 3 – Diagrama do grafo G do Exemplo 1.1	19
Figura 4 – Diagrama do grafo G do Exemplo 1.1	20
Figura 5 – Diagramas de grafo simples	21
Figura 6 – Grafos completos K_1, \dots, K_5	22
Figura 7 – Exemplo de um grafo G com alguns dos seus subgrafos	23
Figura 8 – Exemplo de um grafo G com dois dos seus subgrafos	24
Figura 9 – Exemplo de grafos bipartidos	25
Figura 10 – Grafo G	26
Figura 11 – Grafos isomorfos do Exemplo 1.9	33
Figura 12 – Circuito (grafo G) e ciclo (grafo H) do Exemplo 1.10	36
Figura 13 – Grafo G do Exemplo 1.11	37
Figura 14 – Ilustração da demonstração do Teorema 1.3	39
Figura 15 – Exemplo de um grafo conexo (grafo G) e desconexo (grafo H)	40
Figura 16 – Ilustração da eliminação das arestas entre w	41
Figura 17 – Grafo G do Exemplo 2.1	42
Figura 18 – Exemplos de arestas e vértice de corte	43
Figura 19 – Subconjunto de articulação	44
Figura 20 – Conjunto de corte	45
Figura 21 – Grafo G com $\kappa(G) = 2$; grafo K_4 com $\kappa(K_4) = 3$	46
Figura 22 – Exemplo de um grafo G com $\kappa'(G) = 3$	47
Figura 23 – Ilustração referente à demonstração do Teorema 2.2	48
Figura 24 – Ilustração referente a Observação 2.9	49
Figura 25 – Ilustração da demonstração do Teorema 2.3	50
Figura 26 – Sequência de subdivisão de arestas do grafo K_4	51
Figura 27 – Ilustração da demonstração do Corolário 2.5	52
Figura 28 – O problema das três fontes de suprimento	53

Figura 29 – Mapa do Brasil colorível com quatro cores	54
Figura 30 – Grafo correspondente ao mapa da Figura 29	54
Figura 31 – (a) Um grafo planar G ; (b) Um mergulho planar de G	55
Figura 32 – Uma curva de Jordan	56
Figura 33 – Grafo bipartido $K_{3,3}$ e uma curva de Jordan C extraída dele	57
Figura 34 – Ilustração da intersecção da aresta cz na curva de Jordan C	57
Figura 35 – Ilustração da intersecção da aresta bz na curva de Jordan C_1	58
Figura 36 – Ilustração da intersecção da aresta az na curva de Jordan C_2	58
Figura 37 – Grafo K_5 e uma curva de Jordan C extraída dele	59
Figura 38 – Ilustração da intersecção da aresta v_4v_5 na curva de Jordan C	59
Figura 39 – Ilustração da intersecção da aresta v_3v_5 na curva de Jordan C_1	59
Figura 40 – (a) Ilustração da intersecção da aresta v_1v_5 na curva de Jordan C_2 ; (b) Ilustração da intersecção da aresta v_2v_5 na curva de Jordan C_3	60
Figura 41 – Grafo planar G	62
Figura 42 – Pontes de H em um grafo G	67
Figura 43 – Pontes de H em um grafo G	67
Figura 44 – Pontes de C em um grafo G	68
Figura 45 – Pontes de C em um grafo G	69
Figura 46 – Ilustração da demonstração do Teorema 3.10	71
Figura 47 – Pontes internas e externas de um grafo plano	71
Figura 48 – Ilustração do 1º caso da demonstração do Teorema 3.11	72
Figura 49 – Ilustração do 2º caso da demonstração do Teorema 3.11	72
Figura 50 – Ilustração da transferência de uma ponte em um mergulho planar	73
Figura 51 – Ilustração da transferência de uma ponte em um mergulho planar	73
Figura 52 – Exemplo de subdivisão dos grafos K_5 e $K_{3,3}$	74
Figura 53 – Exemplo	75
Figura 54 – (a) ponte H é uma 3-ponte; (b) ponte H é uma 2-ponte que evita uv	77
Figura 55 – Ilustração do Caso 1 da demonstração do Teorema 3.13	78
Figura 56 – Ilustração do Caso 1a da demonstração do Teorema 3.13	78
Figura 57 – Ilustração do Caso 1b da demonstração do Teorema 3.13	78
Figura 58 – Ilustração do Caso 2a da demonstração do Teorema 3.13	79
Figura 59 – Ilustração do Caso 2b da demonstração do Teorema 3.13	79
Figura 60 – Grafos platônicos não triviais	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distância entre vértices do grafo representado na Figura 13	38
Tabela 2 – A relação entre pontes representadas na Figura 45	69

SUMÁRIO

1	Conceitos básicos	16
1.1	Breve histórico	16
1.2	Definição de grafo	19
1.3	Grafo simples, grafo completo e subgrafo	20
1.4	Grafo bipartido e grau do vértice	24
1.5	O uso de matrizes em grafos	27
1.6	Igualdade e Isomorfismo de grafos	30
1.7	Passeio, trilhas e caminho	35
2	Conexidade e Conectividade de grafos	40
2.1	Conexidade	40
2.2	Conectividade	45
3	Planaridade de grafos	53
3.1	Curva de Jordan	56
3.2	Fórmula de Euler	60
3.3	O teorema de Kuratowski	66
	Apêndice A – Grafos Platônicos	81
	Referências¹	84

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos teve seu surgimento na história da matemática em meados do século XVIII. Entende-se que o pontapé inicial ao estudo dessa teoria tenha sido dado pelo matemático suíço Leonhard Euler, quando este resolveu o desafio das pontes de Königsberg, em 1736. Utilizando pontos e traços para representar as partes da cidade e as pontes (ver Figura 1), respectivamente, Euler mostrou que era impossível percorrer todas as partes da cidade passando por cada ponte uma única vez. Essa solução seria mais tarde um dos primeiros problemas resolvidos da teoria de redes (ligada à teoria dos grafos). Porém, naquele momento, o mundo científico não deu a importância devida à solução de Euler. E durante aproximadamente 150 anos não houve um avanço significativo nessa teoria (NETO, 2013).

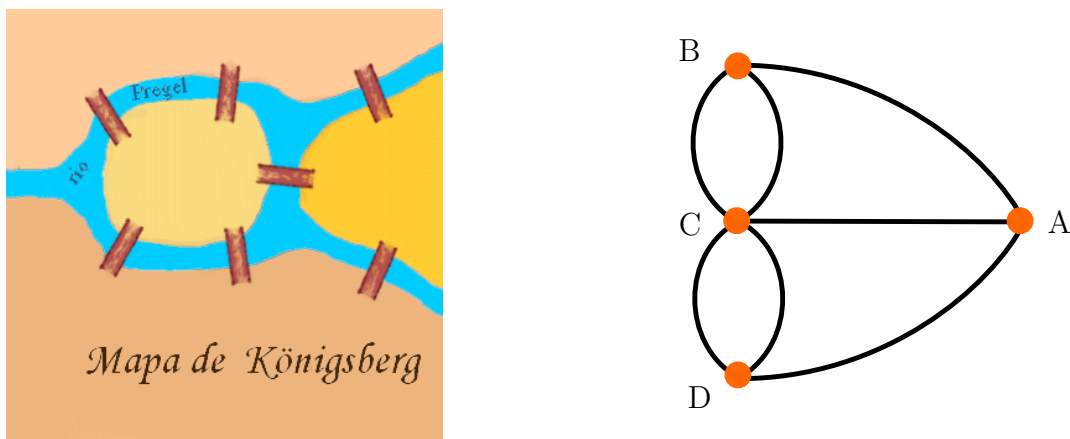


Figura 1 – Mapa da cidade de Königsberg e sua representação gráfica.

Fonte: <http://webpages.fc.ul.pt/~pmduarte/tmf/Problemas/konigsberg.html>

Em 1852, um jovem matemático, chamado Francis Guthrie, apresenta um problema aparentemente simples de ser demonstrado. Recém saído da University College, em Londres, Guthrie se questiona sobre a possibilidade de colorir qualquer mapa com apenas quatro cores. Experimentalmente, ele consegue colorir vários mapas, mas ao tentar demonstrar matematicamente, percebeu a complexidade da prova. Assim, resolve dividir o problema com seu irmão, também matemático, Frederick Guthrie e esse, por sua vez, expõe ao seu professor Augusto De Morgan (o mesmo das leis de De Morgan da teoria de conjuntos). Dessa forma, o problema rapidamente ganha o mundo acadêmico e faz ressurgir a pesquisa e o estudo da teoria dos grafos. As várias tentativas de demonstração desse problema contribuíram de forma significativa para o avanço dessa teoria (SAMPAIO, 2004).

Assim, o objetivo deste trabalho é fazer uma introdução à teoria de grafos, com foco na contribuição do matemático polonês Kazimierz Kuratowski à cerca da planaridade de um grafo. Esse ilustre matemático concluiu sua graduação em 1918, na Glasgow. Sua tese de doutorado, em 1921, foi dividida em duas partes: Uma fundamentação axiomática da topologia e uma decisão definitiva do problema do contínuo irreduzível. No mesmo ano, habilitou-se na Universidade de Varsóvia com a solução de um problema da teoria de conjuntos. Em 1945, foi membro efetivo da Academia de Ciências da Polônia, sendo vice-presidente de 1957 a 1968. Participou de forma intensa de vários trabalhos da Sociedade Científica de Varsóvia e da Sociedade Matemática Polonesa, bem como, foi membro de várias outras sociedades e academias estrangeiras, como por exemplo a da Alemanha, da Itália e da antiga União Soviética (SNEDDON, 1982).

Voltando para a sua contribuição na teoria dos grafos, foi em 1930 que Kuratowski provou um teorema que fornece uma condição necessária e suficiente para um grafo ser planar, simplesmente, verificando se ele contém um tipo específico de subgrafo. Para tratar de planaridade e do teorema de Kuratowski, este trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro capítulo tratamos sobre os conceitos básicos da teoria dos grafos, mostrando inicialmente a sua construção através de um breve relato histórico. Também abordamos as definições de grafo e tipos de grafo. Esta última, trás os grafos completos e os grafos bipartidos que são os tipos específicos de subgrafos tratados por Kuratowski. Ainda no primeiro capítulo, mostramos uma representação matricial de um grafo que é utilizada na construção de grafos em computadores e concluímos, tratando dos conceitos de isomorfismo, passeios, trilha e caminho. Utilizamos para esse capítulo as seguintes referências: (BONDY; MURTY, 2008); (NETTO PAULO OSWALDO; JURKIEWICZ, 2009); (NETTO, 2006) e (CARDOSO DOMINGOS MOREIRA; SZYMANSKI, 2009).

Para o segundo capítulo, abordamos o conceito de conexidade e conectividade de um grafo. Através deles, por exemplo, podemos verificar o quanto que uma rede de abastecimento de água é segura ou não. Nesse capítulo, temos alguns teoremas importantes para este trabalho. Utilizamos para esse capítulo as seguintes referências: (BONDY; MURTY, 1979); (BONDY; MURTY, 2008) e (CARDOSO DOMINGOS MOREIRA; SZYMANSKI, 2009).

Já no último capítulo, temos o objeto principal de estudo deste trabalho: a planaridade de grafos e a prova do teorema de Kuratowski. Iniciamos o capítulo enunciando de forma intuitiva o teorema da curva de Jordan. Em seguida, mostramos a Fórmula de Euler

que utilizamos, juntamente com outros lemas, na demonstração da não planaridade de um grafo. Por fim, é feita a construção da demonstração do teorema de Kuratowski. Utilizamos para esse capítulo as seguintes referências: (BONDY; MURTY, 1979); (SANTOS JOSÉ PLÍNIO O.; MELLO, 2007) e (SCHEINERMAN, 2015).

1 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, abordamos os conceitos básicos da teoria dos grafos relevantes ao nosso trabalho e apresentamos um breve histórico mostrando os principais matemáticos que deram sua contribuição para o desenvolvimento dessa teoria.

1.1 BREVE HISTÓRICO

O campo da teoria matemática que envolve relações entre elementos de conjuntos discretos passa por um processo de conquistas recentes se comparado aos sucessos da “matemática do contínuo” que teve seu impulso após a invenção do cálculo infinitesimal por **Newton** e **Leibnitz**. Este último com a sua “geometria de posição” estudava as propriedades geométricas não afetadas por mudanças de forma. O estudo dos nós e das superfícies, mesmo em uma abordagem elementar, exigia um alto nível de abstração. Em contrapartida, o estudo da topologia envolvendo estrutura da teoria das redes parecia ser algo mais simples (NETTO, 2006, p.1).

Nesse contexto, o grande matemático e geômetra suíço **Leonhard Euler**, no século XVIII, em meio à sua fantástica produção científica, formulou e resolveu um dos primeiros problemas da teoria de redes. De acordo com (NETTO PAULO OSWALDO; JURKIEWICZ, 2009, p.2), ao visitar a cidade de Königsberg na então Prússia Oriental (atualmente ela se chama Kaliningrad e fica em uma pequena porção da Rússia, entre a Polônia e a Lituânia), em 1736, se deparou com o problema das sete pontes de Königsberg que a primeira vista parecia ser simples porém, matematicamente complexo. Como haviam sete pontes interligando as partes da cidade que eram cortadas por vertentes do rio Pregel, formando uma ilha na parte central, o desafio consistia em fazer um passeio por toda a cidade passando pelas sete pontes uma única vez (ver Figura2). Euler conseguiu resolver o desafio utilizando o que chamamos hoje, teoria dos grafos. Infelizmente, a solução do problema não chamou a atenção do mundo científico, o que fez com que a teoria dos grafos passasse por um longo período de isolamento principalmente pela falta de aplicações práticas. Somente a partir da segunda metade do século XIX é que “o desenvolvimento da teoria dos grafos veio se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa

operacional”. Para tal, o computador foi indispensável. Sem o mesmo as aplicações dos grafos seriam impossíveis (NETTO, 2006, p.2).

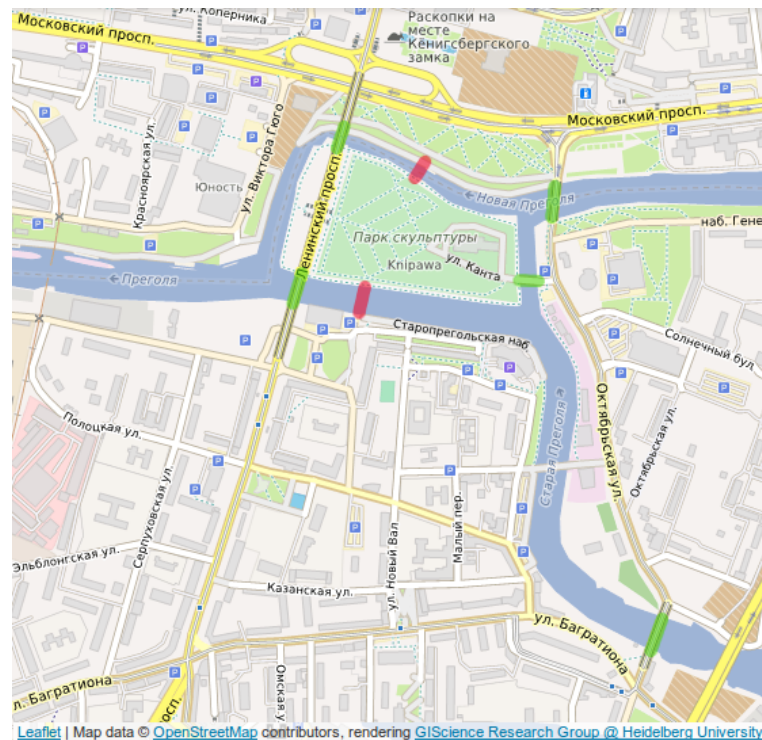


Figura 2 – Mapa moderno de Kaliningrado (antiga Königsberg). As localizações das pontes restantes são realçadas em verde, enquanto as destruídas são destacadas em vermelho.

Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons>

O termo grafo (ou o seu equivalente graph em inglês) foi utilizado pela primeira vez por **Sylvester** em 1878. Mais de cinquenta anos após esse termo surgir, se teve a publicação do primeiro livro sobre grafos de autoria de **König**, em 1936, momento em que a teoria constituía o que o autor chama de “campo morto”. Em outras palavras, espaço de tempo em que os grafos não possuíam importância para os estudos desenvolvidos.

Mesmo anterior ao termo e sem a aplicabilidade devida, alguns estudos pioneiros merecem destaque: **Kirchhoff** (1847) e **Cayley** (1857). O primeiro utilizou modelos de grafos em circuitos elétricos chegando a criar a “teoria das árvores”, que é uma classe de grafos; o segundo seguiu o mesmo caminho, porém, descartava a numeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica. Um terceiro que merece ser citado aqui é **Jordan** (1869), que também se ocupou das árvores, todavia, a partir de uma visão estritamente matemática.

Outros eventos importantes, mas sem um destaque para a aplicação prática da teoria dos grafos foram os estudos de **Hamilton** (1859) e vinte anos depois **Kempe**. **Hamilton** inventou um jogo que buscava um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de modo tal que cada um deles fosse visitado uma única vez (sua aplicação veio somente dois séculos depois no campo da pesquisa operacional). Por outro lado, **Kempe** tentou demonstrar a “conjetura das cores”. Com interesse apenas teórico, trata-se de provar que todo mapa desenhado no plano e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com até quatro cores sem que duas regiões fronteiriças recebam a mesma cor. **Heawood** (1890) vai contrapor **Kempe** mostrando que a prova deste estava errada, obtendo uma prova válida para cinco cores. Sobre a necessidade da aplicabilidade da teoria, o autor salienta: “A importância do problema reside nos desenvolvimentos teóricos trazidos pelas tentativas de resolvê-lo, as quais enriquecem a teoria dos grafos em diversos recursos ao longo da metade do século XX” (NETTO, 2006, p.2).

Na segunda metade do século XX o interesse pela teoria dos grafos se intensificou. Contribuíram para isso, os estudos de **Ford**, **Fulkerson**, **Berge** e **Ore**. Superando o crescente número de artigos sobre a temática dos grafos, nos anos 1970 são publicados livros na referida área, sobretudo, por influência de **Berge** e **Harary**. Apenas com a utilização e desenvolvimento dos computadores para fins acadêmicos várias obras dedicadas aos algoritmos de grafos vieram a lume, o que possibilitou a utilização prática da teoria dos grafos.

No Brasil, a teoria dos grafos vem sendo bastante discutida no meio acadêmico. De acordo com (NETTO, 2006), o estado da arte deste campo no Brasil mostra-se promissor desde 1968 com o I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Diversos autores se debruçam sobre a alusiva temática, dentre eles **Barbosa**, **Furtado**, **Campello** e **Maculan**.

Hoje pode-se afirmar que a teoria dos grafos no Brasil vem sendo utilizada em diversas áreas tais como economia, administração, pesquisa operacional, entre outras. Nesse sentido, as universidades foram os principais centros irradiadores desse campo. Dentre elas tem-se a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), a Universidade de São Paulo (USP), a Universidade de Campinas (UNICAMP), a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), entre outras que fazem da teoria dos grafos um campo fértil e promissor no país.

1.2 DEFINIÇÃO DE GRAFO

Definição 1.1 Um grafo G é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ que consiste de um conjunto não-vazio $V(G)$ de vértices, um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de arestas e uma relação de incidência ψ_G que associa a cada aresta de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G .

Exemplo 1.1 Seja $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ um grafo, onde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ e ψ_G é definida por

$$\begin{aligned} \psi_G(e_1) &= v_1v_2, & \psi_G(e_2) &= v_2v_3, \\ \psi_G(e_3) &= v_3v_3, & \psi_G(e_4) &= v_3v_4, \\ \psi_G(e_5) &= v_4v_1, & \psi_G(e_6) &= v_1v_4, \\ \psi_G(e_7) &= v_1v_6. \end{aligned}$$

Sejam e uma aresta e u, v vértices, onde $e \in E(G)$ e $u, v \in V(G)$, tais que $\psi_G(e) = uv$, então dizemos que a aresta e conecta os vértices u e v , e neste caso, os vértices u e v são chamados de extremidades da aresta e .

Para representar graficamente um grafo, associamos cada vértice do grafo a um ponto e cada aresta a uma linha que tem como extremidades um par de vértices (não necessariamente distintos). Podemos denominar a representação gráfica de um grafo por *diagrama*. Assim, a Figura 3 mostra o diagrama do grafo G do Exemplo 1.1.

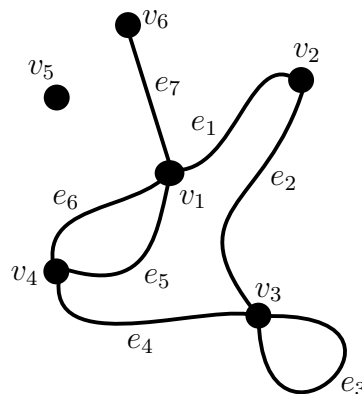


Figura 3 – Diagrama do grafo G do Exemplo 1.1

É comum associarmos a representação gráfica do grafo ao próprio grafo. Dessa forma, chamaremos seus pontos de *vértices* e suas linhas de *arestas*. O termo *grafo* surge do fato dele possuir uma representação gráfica. Vale ressaltar que não existe uma única

forma de representação gráfica de um grafo. Na Figura 4, por exemplo, temos uma outra representação gráfica do grafo G do Exemplo 1.1.

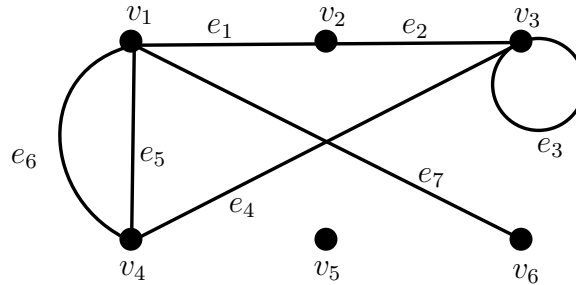


Figura 4 – Diagrama do grafo G do Exemplo 1.1

As extremidades de uma aresta (*vértices*) são ditas incidentes à aresta, e vice-versa. Dessa maneira, dois vértices distintos são denominados *adjacentes* quando são incidentes a uma mesma aresta e duas arestas distintas que são incidentes ao mesmo vértice serão denominadas *arestas adjacentes*. Uma aresta com vértices idênticos é chamada de *laço*, e uma ou mais arestas incidentes ao mesmo par de vértices são chamadas de *arestas paralelas* ou *arestas múltiplas*. Por exemplo, tanto na Figura 3 como na Figura 4, a aresta e_3 de G é um laço. Já as arestas e_5 e e_6 são arestas múltiplas.

1.3 GRAFO SIMPLES, GRAFO COMPLETO E SUBGRAFO

Este trabalho está voltado para o estudo de grafos simples então, faz-se necessário enunciarmos sua definição.

Definição 1.2 Um grafo é dito simples quando não possui nenhum laço (aresta com vértices idênticos) e nenhuma aresta múltipla (arestas ligadas ao mesmo par de vértices).

Definição 1.3 Diz-se que um grafo é trivial quando o grafo possui apenas um vértice e que é um multigrafo quando o grafo possui arestas múltiplas ou laços.

Dessa forma, podemos afirmar que o grafo G , apresentado nas Figuras 3 e 4, é um multigrafo, já que possui laço e arestas múltiplas. Enquanto que, na Figura 5, os grafos G e H representam grafos simples.

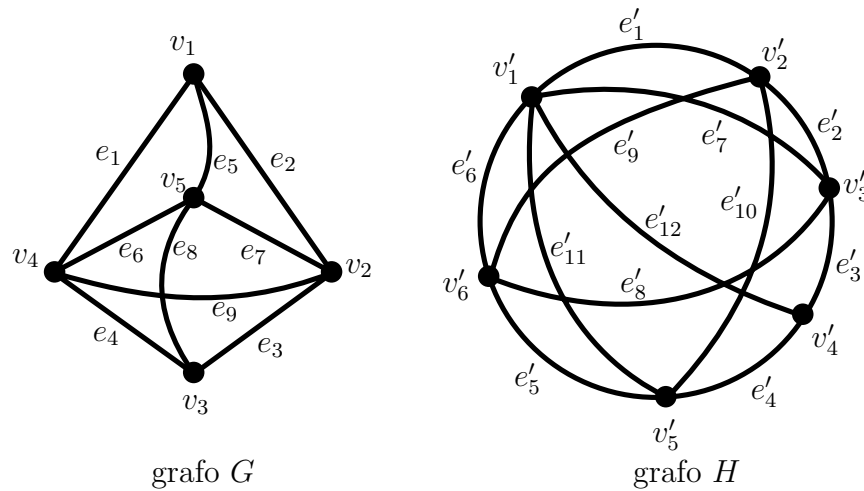


Figura 5 – Diagramas de grafo simples

Existem grafos finitos e infinitos, porém restringiremos nosso estudo aos grafos finitos.

Definição 1.4 Um grafo é finito se tanto seu conjunto de vértices como seu conjunto de arestas são finitos.

Utilizaremos os símbolos $v(G)$ e $\varepsilon(G)$ para denotar, respectivamente, os números de vértices e arestas no grafo G , ou seja, $v(G) = |V(G)|$ e $\varepsilon(G) = |E(G)|$. É comum denotarmos por V , E , v e ε os conjuntos e números $V(G)$, $E(G)$, $v(G)$ e $\varepsilon(G)$, quando estivermos tratando com apenas um grafo.

Observação 1.1 O símbolo $|X|$ descreve a cardinalidade do conjunto X .

Exemplo 1.2 Os grafo G e H apresentados na Figura 5 possuem $v(G) = 5$, $v(H) = 6$, $\varepsilon(G) = 9$ e $\varepsilon(H) = 12$.

Além da definição de grafo simples e de grafo finito, será muito importante para o nosso estudo a definição de um grafo simples completo.

Definição 1.5 Um grafo simples G é dito completo se todo vértice de G é adjacente a todos os outros vértices de G .

Um grafo completo com $v = n$ é denotado por K_n . Na Figura 6, temos exemplos de grafos K_1 , K_2 , K_3 , K_4 e K_5 .

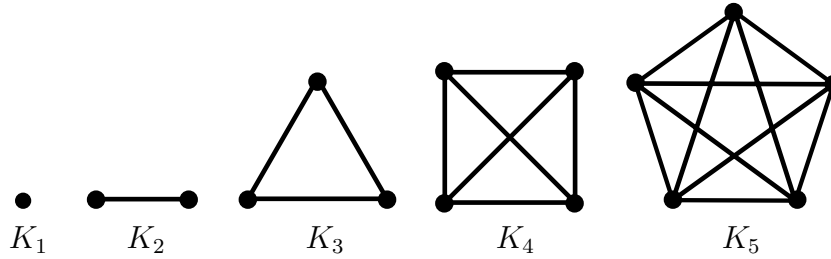


Figura 6 – Grafos completos K_1, \dots, K_5

Observação 1.2 *O grafo K_5 da Figura 6 será um grafo muito relevante para o nosso trabalho. Trataremos do seu estudo no Capítulo 3.*

Outra definição relacionada a grafos é a de subgrafo que trataremos a seguir.

Definição 1.6 Dados dois grafos G e H , diz-se que H é um subgrafo de G (denota-se por $H \subseteq G$), se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto $E(H)$, isto é, se $e \in E(H)$ então $\psi_H(e) = \psi_G(e)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \psi_G|_{E(H)} : E(H) &\longrightarrow V(G) \times V(G) \\ e &\longmapsto \psi_G|_{E(H)}(e) = \psi_G(e) \end{aligned}$$

Se $H \subseteq G$ e $H \neq G$, então H designa-se por subgrafo próprio de G e denota-se por $H \subsetneq G$.

Observação 1.3 *Se H é um subgrafo de G , então pode-se dizer que G é um supergrafo de H .*

Exemplo 1.3 *Sejam*

$$G = (V(G), E(G), \psi_G), \quad G_1 = (V(G_1), E(G_1), \psi_{G_1}) \quad e \quad G_2 = (V(G_2), E(G_2), \psi_{G_2})$$

grafos tais que

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, & V(G_1) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, & V(G_2) &= \{v_1, v_2, v_3\}, \\ E(G) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, & E(G_1) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, & E(G_2) &= \{e_1, e_2, e_5\}, \\ \psi_G(e_1) &= v_1v_2, & \psi_{G_1}(e_1) &= v_1v_2, & \psi_{G_2}(e_1) &= v_1v_2, \\ \psi_G(e_2) &= v_2v_3, & \psi_{G_1}(e_2) &= v_2v_3, & \psi_{G_2}(e_2) &= v_2v_3, \\ \psi_G(e_3) &= v_3v_4, & \psi_{G_1}(e_3) &= v_3v_4, & \psi_{G_2}(e_5) &= v_1v_3, \\ \psi_G(e_4) &= v_4v_1, & \psi_{G_1}(e_4) &= v_4v_1, & & \\ \psi_G(e_5) &= v_1v_3, & & & & \\ \psi_G(e_6) &= v_2v_4. & & & & \end{aligned}$$

Observe que $V(G_1) \subset V(G)$, $V(G_2) \subset V(G)$, $E(G_1) \subset E(G)$, $E(G_2) \subset E(G)$ e que $\psi_{G_1} = \psi_G|_{E(G_1)}$, como também $\psi_{G_2} = \psi_G|_{E(G_2)}$. Logo, G_1 e G_2 são subgrafos próprios de G . Na Figura 7, temos suas representações.

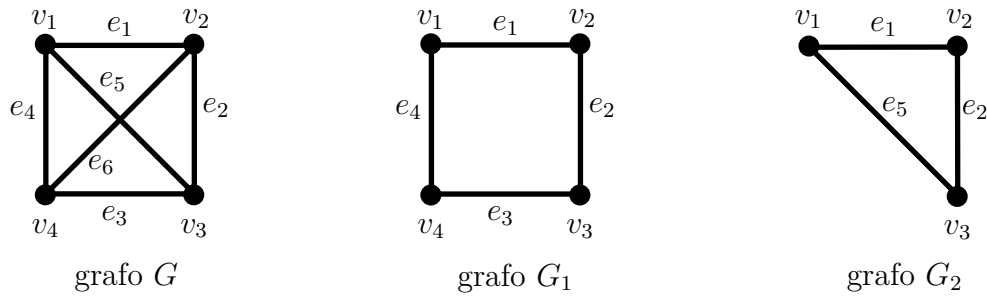


Figura 7 – Exemplo de um grafo G com alguns dos seus subgrafos

Dado um grafo G , eliminando todos os laços e substituindo cada conjunto de arestas múltiplas por uma única aresta, obtém-se o subgrafo abrangente de G que se designa por *subgrafo de suporte das arestas de G* . Nestas condições, podemos concluir que os grafos simples coincidem com seu subgrafo de suporte das arestas.

Suponha que \hat{V} é um subconjunto não vazio de $V(G)$. Diz-se que um subgrafo de G é induzido por \hat{V} (vértices) e denota-se por $G[\hat{V}]$, se o conjunto de vértices é \hat{V} e o conjunto de arestas coincide com as arestas de G com extremos em \hat{V} . O subgrafo induzido $G[V - \hat{V}]$ é denotado por $G - \hat{V}$ e obtido de G após a eliminação dos vértices do subconjunto \hat{V} juntamente com suas arestas incidentes. Se $\hat{V} = \{v\}$, em vez de escrever $G - \{v\}$ escreve-se, simplesmente, $G - v$. Na Figura 7, temos um exemplo de subgrafo induzido por vértices. Observe que o grafo G_2 é um subgrafo de G induzido por $\hat{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Suponha também que \hat{E} é um subconjunto não vazio de $E(G)$. Diz-se que um subgrafo de G é induzido por \hat{E} (arestas) e denota-se por $G[\hat{E}]$, se o conjunto de vértices é o conjunto de extremidades das arestas em \hat{E} . O subgrafo de abrangência de G com conjunto de arestas $E - \hat{E}$ é denotado por $G - \hat{E}$ e obtido de G após a eliminação das arestas do subconjunto \hat{E} . Se $\hat{E} = \{e\}$, em vez de escrever $G - \{e\}$ escreve-se, simplesmente, $G - e$. Na Figura 7, também temos um exemplo de subgrafo induzido por aresta. Neste caso, o grafo G_1 é um subgrafo de G induzido por $\hat{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Observação 1.4 Dado um grafo simples $G = (V, E, \psi_G)$ observa-se que, em geral, os grafos $G[E - \hat{E}]$ e $G - \hat{E}$ são distintos. O Exemplo 1.4, que será mostrado a seguir,

ilustra esta situação. Por outro lado, podemos concluir que $G = G[V]$, mas nem sempre se verifica a igualdade $G = G[E]$. Com efeito, $G = G[E]$ se, e somente se, G não tem vértices isolados.

Exemplo 1.4 Seja $G = (V, E, \psi_G)$ um grafo, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e ψ_G é definida por $\psi_G(e_1) = v_1v_2$, $\psi_G(e_2) = v_2v_3$, $\psi_G(e_3) = v_3v_4$, $\psi_G(e_4) = v_4v_5$ e $\psi_G(e_5) = v_5v_1$. Considerando $\hat{E} = \{e_1, e_2\}$, observa-se na Figura 8 que os grafos $G[E - \hat{E}]$ e $G - \hat{E}$ são distintos.

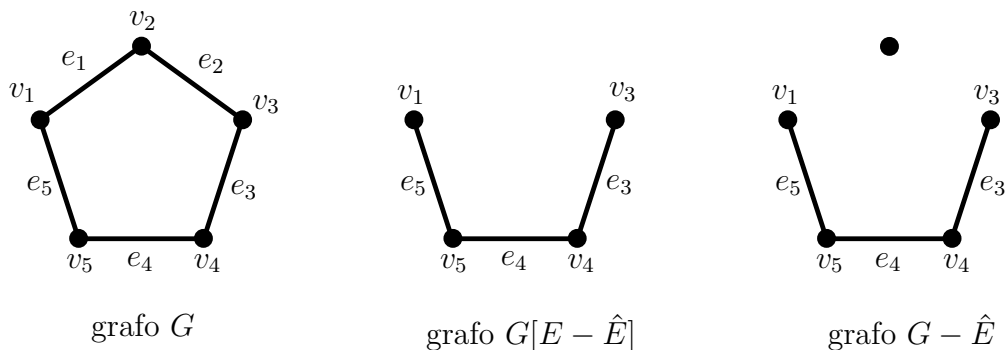


Figura 8 – Exemplo de um grafo G com dois dos seus subgrafos

1.4 GRAFO BIPARTIDO E GRAU DO VÉRTICE

Um outro conceito relevante à este trabalho que trataremos a seguir é o de grafo bipartido.

Definição 1.7 Um grafo G diz-se bipartido, se existe uma partição do seu conjunto de vértices em dois conjuntos disjuntos X e Y , tal que não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y (ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y). Esta partição (X, Y) do conjunto dos vértices de G designa-se por bipartição do grafo.

Definição 1.8 Um grafo G diz-se bipartido completo quando é um grafo simples e bipartido com bipartição (X, Y) em que cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y . Se $|X| = m$ e $|Y| = n$, então esse grafo é denominado por $K_{m,n}$.

Proposição 1.1 *Seja G um grafo bipartido completo, então existe apenas uma partição (X, Y) do seu conjunto de vértices.*

Demonstração: Seja G um grafo bipartido completo. Suponhamos que (X, Y) e (\tilde{X}, \tilde{Y}) sejam bipartições do grafo G . Fixemos um $v \in V(G)$ qualquer. Dessa forma, sem perda de generalidade, se $v \in X$ e sabendo que G é um grafo bipartido completo, temos que

$$X = \{u \in V(G); uv \notin E(G)\} \quad \text{e} \quad Y = \{w \in V(G); vw \in E(G)\}.$$

Por outro lado, como (\tilde{X}, \tilde{Y}) é também uma bipartição de G , suponhamos, sem perda de generalidade, que $v \in \tilde{X}$, então

$$\tilde{X} = \{u \in V(G); uv \notin E(G)\} \quad \text{e} \quad \tilde{Y} = \{w \in V(G); vw \in E(G)\}.$$

Logo, temos que $X = \tilde{X}$ e $Y = \tilde{Y}$. ■

Exemplo 1.5 *Na Figura 9, temos dois exemplos de grafos bipartidos.*

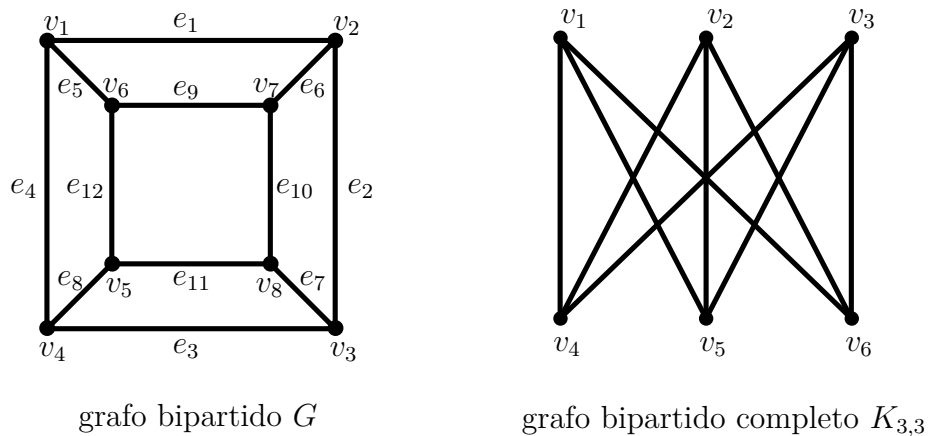


Figura 9 – Exemplo de grafos bipartidos

O primeiro exemplo é o grafo bipartido $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ definido pelos vértices e arestas de um cubo, onde

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \quad \text{e} \\ E(G) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}, \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{array}{lll}
\psi_G(e_1) = v_1v_2, & \psi_G(e_2) = v_2v_3, & \psi_G(e_3) = v_3v_4, \\
\psi_G(e_4) = v_4v_1, & \psi_G(e_5) = v_1v_6, & \psi_G(e_6) = v_2v_7, \\
\psi_G(e_7) = v_3v_8, & \psi_G(e_8) = v_4v_5, & \psi_G(e_9) = v_5v_6, \\
\psi_G(e_{10}) = v_6v_7, & \psi_G(e_{11}) = v_7v_8, & \psi_G(e_{12}) = v_8v_5.
\end{array}$$

Considerando $X = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ e $Y = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ temos uma partição (X, Y) do conjunto dos vértices de G . Observe que este grafo não é completo, pois, por exemplo, v_1 não é adjacente à v_8 .

Já o segundo exemplo mostra o grafo bipartido completo $K_{3,3}$. O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ terá um papel muito importante para o nosso trabalho e será estudado no Capítulo 3.

Dando continuidade as definições básicas de grafos, trataremos a seguir sobre o número de incidência de arestas sobre o vértice de um grafo.

Definição 1.9 Dado um grafo $G = (V, E, \psi_G)$, definimos o grau de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d_G(v)$, como sendo o número de arestas de G incidentes a v .

Observação 1.5

- (i) Cada laço associado a um vértice v será contado como duas arestas incidentes.
- (ii) Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices de G , isto é, $\delta(G) = \min\{d_G(v); v \in V(G)\}$ e $\Delta(G) = \max\{d_G(v); v \in V(G)\}$.

Exemplo 1.6 Vamos determinar os graus dos vértices do Grafo G representado na Figura 10, bem como $\delta(G)$ e $\Delta(G)$.

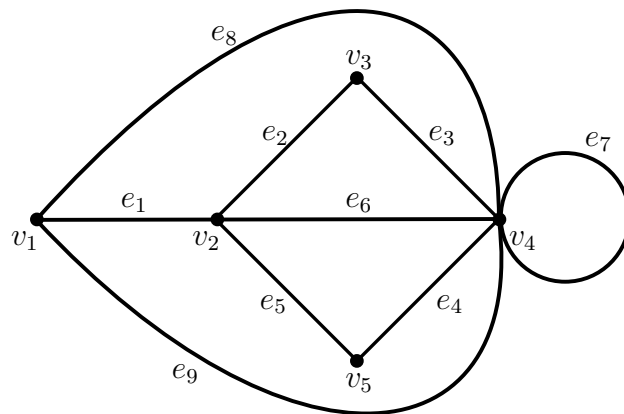


Figura 10 – Grafo G

Observa-se a partir da Figura 10 que

$$\begin{aligned} d_G(v_1) &= 3, & d_G(v_2) &= 4, \\ d_G(v_3) &= 2, & d_G(v_4) &= 7, \\ d_G(v_5) &= 2. \end{aligned}$$

Logo, $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 7$.

Utilizando o conceito de grau de vértice podemos definir grafo regular.

Definição 1.10 Um grafo G é dito ser k -regular se todos os seus vértices têm grau k e é dito regular se é k -regular para algum k .

Exemplo 1.7 São exemplos de grafos regulares, o grafo nulo (que não possui aresta) que é 0-conexo e o grafos completos K_n , que são $(n - 1)$ -regular.

Observação 1.6 Apenas no caso do grafo trivial se verifica a igualdade com o grafo nulo, ou seja, K_1 é 0-conexo.

1.5 O USO DE MATRIZES EM GRAFOS

Uma maneira natural de representar um grafo no computador é utilizando uma matriz, aproveitando assim, todas as manipulações permitidas pela álgebra linear. Basicamente, existem dois tipos de matrizes para representar um grafo: matrizes de incidência e matrizes de adjacência. Vamos definir as duas a seguir.

Definição 1.11 (Matriz de incidência). Dado um grafo G , tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$, designa-se por matriz de incidência de G , como sendo a matriz $M_G = (m_{ij})_{v \times \varepsilon}$, tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } e_j = v_p v_q, \text{ com } i \notin \{p, q\}; \\ 1, & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ com } k \neq i; \\ 2, & \text{se } e_j = v_i v_i. \end{cases}$$

Observação 1.7 Uma forma prática de observamos a matriz de incidência do grafo G é mostrada a seguir, onde as linhas à esquerda da matriz representam os vértices de $V(G)$, as colunas superiores representam as arestas de $E(G)$ e as linhas à direita representam

o somatório das entradas em cada linha da matriz de incidência. Observe que $\sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik}$ representa o número de arestas incidentes ao vértice v_i , ou seja, $d_G(v_i) = \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik}$.

$$M_G = (m_{ij})_{v \times \varepsilon} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_v \end{array} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_\varepsilon \\ m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1\varepsilon} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2\varepsilon} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{v1} & m_{v2} & \cdots & m_{v\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{1k} = d_G(v_1) \\ \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{2k} = d_G(v_2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{vk} = d_G(v_v) \end{array}$$

Definição 1.12 (Matriz de adjacência). Dado um grafo G , tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$, designa-se por matriz de adjacência dos vértices de G ou, simplesmente, matriz de adjacência de G e denota-se por $A_G = (a_{ij})$, a matriz de ordem $v \times v$, tal que a_{ij} representa o número de arestas entre os vértices v_i e v_j .

Observação 1.8 A matriz de adjacência do grafo G , vista de forma prática, é mostrada a seguir, onde as linhas à esquerda da matriz e as colunas superiores representam os vértices de $V(G)$.

$$A_G = (a_{ij})_{v \times v} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_v \end{array} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_v \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vv} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.8 Considere o grafo G representado na Figura 10, isto é, $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e} \\ E(G) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}, \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} \psi_G(e_1) &= v_1v_2, & \psi_G(e_2) &= v_2v_3, & \psi_G(e_3) &= v_3v_4, \\ \psi_G(e_4) &= v_4v_5, & \psi_G(e_5) &= v_5v_2, & \psi_G(e_6) &= v_2v_4, \\ \psi_G(e_7) &= v_4v_4, & \psi_G(e_8) &= v_4v_1, & \psi_G(e_9) &= v_1v_4. \end{aligned}$$

Segue que $v = 5$ e $\varepsilon = 9$. Assim, a matriz de incidência de ordem 5×9 é descrita por

$$M_G = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de adjacência de ordem 5×5 é descrita por

$$A_G = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma aplicação da matriz de incidência na obtenção de resultados relacionados com a estrutura de um grafo é apresentada na demonstração do teorema a seguir.

Teorema 1.1 *Dado um grafo G , verifica-se que a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\varepsilon.$$

Demonstração: Sejam $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$ e $M_G = (m_{ij})_{v \times \varepsilon}$ a matriz de incidência de G , ou seja,

$$M_G = (m_{ij})_{v \times \varepsilon} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1\varepsilon} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2\varepsilon} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{v1} & m_{v2} & \cdots & m_{v\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $\sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik}$ representa o número de arestas incidentes ao vértice v_i , ou seja, $d_G(v_i) = \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik}$. Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^v d_G(v_i) = \sum_{i=1}^v \left(\sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^v m_{ik} \right) \quad (1)$$

Por outro lado, $\sum_{i=1}^v m_{ik}$ representa o número de vértices incidentes à aresta e_k , isto é,

$$\sum_{i=1}^v m_{ik} = 2 \quad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1) temos,

$$\sum_{i=1}^v d_G(v_i) = \sum_{k=1}^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^v m_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{\varepsilon} (2) = 2\varepsilon$$

■

Corolário 1.2 *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração: Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} I &= \{v \in V(G) \mid d_G(v) \text{ é ímpar}\} \quad \text{e} \\ P &= \{v \in V(G) \mid d_G(v) \text{ é par}\}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in I} d_G(v) + \sum_{v \in P} d_G(v).$$

Como $\sum_{v \in P} d_G(v)$ é par, pois $d_G(v)$ é par, e pelo Teorema 1.1 temos que $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\varepsilon$.

Segue que, $\sum_{v \in I} d_G(v)$ é par, ou seja, o número de vértices de grau ímpar é par. ■

1.6 IGUALDADE E ISOMORFISMO DE GRAFOS

A comparação é algo inevitável na matemática. Uma das formas de comparação se faz com o uso do conceito de igualdade. Através desse conceito, por exemplo, comparamos números, conjuntos, matrizes, ..., e assim, também faremos com os grafos na definição a seguir.

Definição 1.13 Dois grafos $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ são ditos iguais se, e somente se, $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $\psi_G = \psi_H$.

No entanto, é possível que grafos que possuam os conjuntos de arestas e vértices distintos possuam uma relação que os identifique. Essa relação é chamada de *isomorfismo* e será tratada formalmente na definição a seguir.

Definição 1.14 Dois grafos $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ são isomorfos se existirem funções bijetivas $f : V(G) \rightarrow V(H)$ e $g : E(G) \rightarrow E(H)$ tais que $\psi_G(e) = uv$ se, e somente se, $\psi_H(g(e)) = f(u)f(v)$. Tal par, (f, g) , de funções é chamado um isomorfismo entre G e H e denotamos por $G \sim H$ para significar que G e H são isomorfos.

Observação 1.9 A relação \sim é uma relação de equivalência, isto é, quaisquer que sejam G, H e L grafos, temos as seguintes propriedades:

- (i) $G \sim G$;
- (ii) Se $G \sim H$, então $H \sim G$;
- (iii) Se $G \sim H$ e $H \sim L$ então $G \sim L$.

Demonstração:

(i) Seja $G = (V, E, \psi_G)$ um grafo, então temos bijeções através das funções identidades

$$\begin{array}{ccc} id_V : V & \longrightarrow & V \\ v & \mapsto & v \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} id_E : E & \longrightarrow & E \\ e & \mapsto & e \end{array}$$

de tal forma que

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_G(id_E(e)) = id_V(u)id_V(v).$$

Logo, $G \sim G$.

(ii) Se $G \sim H$, então existem bijeções

$$\begin{array}{ccc} f : V(G) & \longrightarrow & V(H) \\ v & \mapsto & f(v) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} g : E(G) & \longrightarrow & E(H) \\ e & \mapsto & g(e) \end{array}$$

de tal forma que

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(g(e)) = f(u)f(v).$$

Considere as funções inversas $f^{-1} : V(H) \rightarrow V(G)$ e $g^{-1} : E(H) \rightarrow E(G)$ e considere também $e \in E(H)$ tal que $\psi_H(e) = uv$. Pela sobrejetividade das funções f e g , existem $\tilde{e} \in E(G)$ e $\tilde{u}, \tilde{v} \in V(G)$ tais que $g(\tilde{e}) = e$, $f(\tilde{u}) = u$ e $f(\tilde{v}) = v$, ou seja, $\tilde{e} = g^{-1}(e)$,

$\tilde{u} = f^{-1}(u)$ e $\tilde{v} = f^{-1}(v)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\psi_G(\tilde{e}) = \tilde{u}\tilde{v} &\iff \psi_H(g(\tilde{e})) = f(\tilde{u})f(\tilde{v}) \\ &\iff \psi_H(e) = uv\end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi_H(e) = uv \iff \psi_G(g^{-1}(e)) = f^{-1}(u)f^{-1}(v)$$

Logo, $H \sim G$.

(iii) Se $G \sim H$ e $H \sim L$, então existem funções bijetivas

$$\begin{aligned}f_1 : V(G) &\longrightarrow V(H) \\ g_1 : E(G) &\longrightarrow E(H) \\ f_2 : V(H) &\longrightarrow V(L) \\ g_2 : E(H) &\longrightarrow E(L)\end{aligned}$$

tais que

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(G(e)) = f_1(u)f_1(v) \quad (3)$$

e

$$\psi_H(\tilde{e}) = \tilde{u}\tilde{v} \iff \psi_L(g_2(\tilde{e})) = f_2(\tilde{u})f_2(\tilde{v}). \quad (4)$$

Dessa forma, considere as seguintes bijeções

$$F = (f_2 \circ f_1) : V(G) \longrightarrow V(L)$$

e

$$G = (g_2 \circ g_1) : E(G) \longrightarrow E(L).$$

Assim, a partir de (3) e (4), temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}\psi_G(e) = uv &\iff \psi_H(g_1(e)) = f_1(u)f_1(v) \\ &\iff \psi_L(g_2(g_1(e))) = f_2(f_1(u))f_2(f_1(v)) \\ &\iff \psi_L((g_2 \circ g_1)(e)) = (f_2 \circ f_1)(u)(f_2 \circ f_1)(v) \\ &\iff \psi_L(G(e)) = F(u)F(v)\end{aligned}$$

Logo, $G \sim L$. ■

No caso de grafos simples, nos quais suas arestas são definidas pelos seus respectivos extremos, a relação de isomorfismo fica resumida a bijeção existente entre seus respectivos conjuntos de vértices que preserva a adjacência. Trataremos a formalidade da definição a seguir.

Definição 1.15 Dois grafos simples G e H são ditos isomorfos se existir uma função bijetiva f de $V(G)$ em $V(H)$ tal que quaisquer dois vértices v e w são adjacentes em G se, e somente se, $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H . Neste caso, f é chamada de isomorfismo entre G e H .

Observação 1.10 Observe que a Definição 1.15 implica na Definição 1.14.

De fato, considerando dois grafos simples $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$, temos que suas arestas serão definidas pelos seus extremos, ou seja, seus vértices, já que não possuem laços e nem arestas múltiplas. Assim, quando estabelecemos uma função bijetiva f de $V(G)$ em $V(H)$, implicitamente estamos também estabelecendo uma função bijetiva g de $E(G)$ em $E(H)$. E quando impomos que dois vértices v e w são adjacentes em G se, e somente se, $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H , é o mesmo que afirmar que $\psi_G(e) = uv$ se, e somente se, $\psi_H(g(e)) = f(u)f(v)$, já que, como foi dito anteriormente, cada aresta é definida pelos seus respectivos vértices.

Exemplo 1.9 Considere dois grafos G e H representados na Figura 11. Vamos mostrar que são isomorfos, ou seja, $G \sim H$.

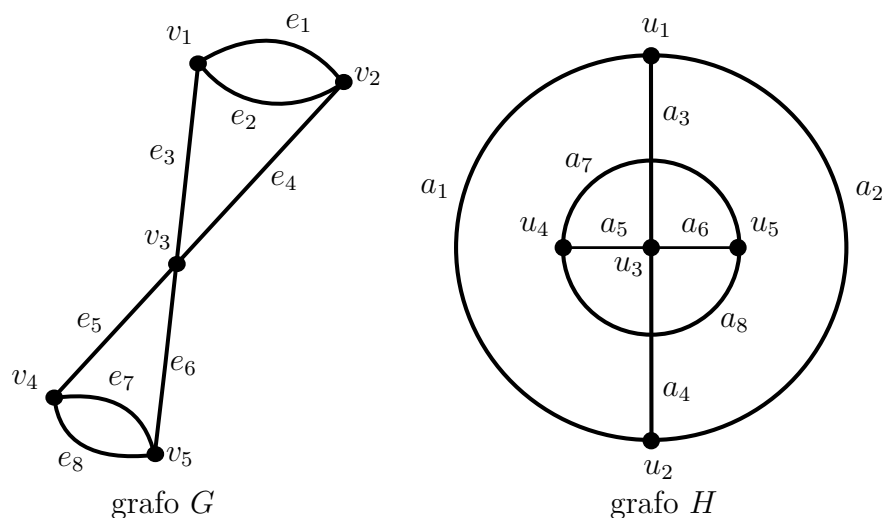


Figura 11 – Grafos isomorfos do Exemplo 1.9

Afirmar isso, é garantir que existe um par, (f, g) , de funções bijetivas dadas por $f : \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \longrightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ e $g : \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \longrightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ que preservam as relações de adjacência e de incidência. Dessa forma, tomando

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_1, & g(e_1) &= a_1, \\ f(v_2) &= u_2, & g(e_2) &= a_2, \\ f(v_3) &= u_3, & g(e_3) &= a_3, \\ f(v_4) &= u_4, & g(e_4) &= a_4, \\ f(v_5) &= u_5, & g(e_5) &= a_5, \\ & & g(e_6) &= a_6, \\ & & g(e_7) &= a_7, \\ & & g(e_8) &= a_8. \end{aligned}$$

Temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \psi_G(e_1) = v_1v_2 &\iff \psi_H(g(e_1)) = f(v_1)f(v_2), \\ \psi_G(e_2) = v_1v_2 &\iff \psi_H(g(e_2)) = f(v_1)f(v_2), \\ \psi_G(e_3) = v_1v_3 &\iff \psi_H(g(e_3)) = f(v_1)f(v_3), \\ \psi_G(e_4) = v_2v_3 &\iff \psi_H(g(e_4)) = f(v_2)f(v_3), \\ \psi_G(e_5) = v_3v_4 &\iff \psi_H(g(e_5)) = f(v_3)f(v_4), \\ \psi_G(e_6) = v_3v_5 &\iff \psi_H(g(e_6)) = f(v_3)f(v_5), \\ \psi_G(e_7) = v_4v_5 &\iff \psi_H(g(e_7)) = f(v_4)f(v_5), \\ \psi_G(e_8) = v_4v_5 &\iff \psi_H(g(e_8)) = f(v_4)f(v_5). \end{aligned}$$

Assim, (f, g) é um isomorfismo de G e H .

No Exemplo 1.9 o isomorfismo entre os grafos G e H preservou o grau dos vértices. Será que isso ocorre para qualquer isomorfismo entre grafos? A resposta é apresentada na proposição a seguir.

Proposição 1.2 *Isomorfismo entre grafos preserva os graus dos vértices.*

Demonstração: Inicialmente, trataremos da prova para o caso de grafos simples. Sejam G e H dois grafos simples isomorfos e seja f um isomorfismo entre G e H . Então, $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ é uma bijeção que preserva a relação de adjacência. Sendo $v \in V(G)$, com $d_G(v) = k$, onde $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ representa o conjunto de vértices adjacentes a v ,

podemos concluir que os vértices $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_k)$ são todos distintos e adjacentes ao vértice $f(v)$ em H . Por outro lado, considerando a Definição 1.15, não existem outros vértices de H adjacentes a $f(v)$. Logo, $d_H(f(v)) = k$.

Consideremos então o caso geral, ou seja, \tilde{G} e \tilde{H} multigrafos isomorfos. Removendo os laços e as arestas múltiplas dos multigrafos \tilde{G} e \tilde{H} , obtemos grafos simples isomorfos G e H , que pela primeira parte da demonstração, temos

$$d_G(v) = d_H(f(v))$$

onde f é a bijeção entre os conjuntos de vértices de G e H . Se $v \in G$ possui aresta múltipla ou laço em \tilde{G} , então $f(v) \in H$ também terá aresta múltipla ou laço em \tilde{H} (pela definição de isomorfismo), ou seja,

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}}(v) &= d_G(v) + |A_v| + 2 \cdot |L_v| \\ &= d_H(f(v)) + |A_{f(v)}| + 2 \cdot |L_{f(v)}| \\ &= d_{\tilde{H}}(f(v)) \end{aligned}$$

onde A_v representa o conjunto das arestas múltiplas que tem uma extremidade em v e L_v representa o conjunto dos laços que tem extremidade em v . ■

1.7 PASSEIO, TRILHAS E CAMINHO

A seguir, apresentamos alguns conceitos topológicos relacionados a teoria dos grafos com a introdução das definições de passeio, trilha e caminho.

Definição 1.16 Dado um grafo G , chamamos de passeio em G toda a sequência não vazia

$$\mathcal{P} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k,$$

tal que $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$, $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ e os vértices v_{i-1} e v_i são vértices extremos da aresta e_i , para $i = 1, \dots, k$. O vértice v_0 é chamado de vértice inicial, o vértice v_k é chamado de vértice final e os vértices v_1, \dots, v_{k-1} são chamados de vértices intermediários do passeio \mathcal{P} . Neste caso, também se diz que \mathcal{P} é um passeio entre os vértices v_0 e v_k ou um (v_0, v_k) -passeio. Se em \mathcal{P} , todas as arestas são distintas então o passeio \mathcal{P} é chamado de trilha e se, adicionalmente, todos os vértices são distintos o passeio \mathcal{P} é chamado de caminho.

Observação 1.11

- (i) Um circuito ou trilha fechada é uma trilha com pelo menos uma aresta tal que $v_0 = v_k$;
(ii) Um ciclo ou caminho fechado é um passeio com pelo menos uma aresta e sem repetição de arestas nem vértices (com exceção dos vértices inicial e final).

No caso dos grafos simples, como todas as suas arestas são determinadas pelos seus extremos (*vértices*), temos que um *passeio* é determinado pela sequência dos sucessivos vértices, ou seja, $\mathcal{P} = v_0v_1 \dots v_k$.

Exemplo 1.10 Considerando os grafos G e H representados na Figura 12, temos que o grafo G representa um circuito (conforme Observação 1.11) e o grafo H representa um ciclo (conforme Observação 1.11). Observe também, que no grafo G da Figura 12 temos destacados três ciclos que estão representados por $\mathcal{P}_1 = v_1v_2v_3$, $\mathcal{P}_2 = v_3v_4v_5$ e $\mathcal{P}_3 = v_5v_6v_7$.

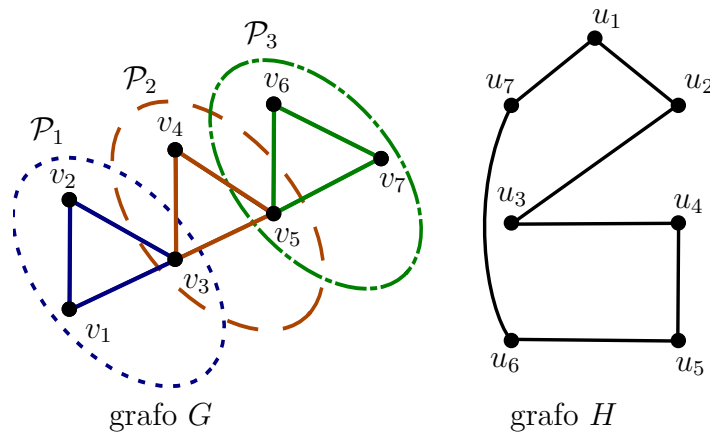


Figura 12 – Circuito (grafo G) e ciclo (grafo H) do Exemplo 1.10

Podemos também concatenar (unir) passeios como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.3 Seja G um grafo e suponhamos que \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sejam os seguintes passeios:

$$\mathcal{P}_1 = u_0e_1u_1e_2 \dots e_ku_k$$

$$\mathcal{P}_2 = v_0f_1v_1f_2 \dots f_lv_l$$

e suponhamos ainda que $u_k = v_0$. Sua concatenação, denotada por $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, é o passeio

$$u_0e_1u_1e_2 \dots e_ku_kf_1v_1f_2 \dots f_lv_l$$

Podemos determinar o comprimento de um passeio através de suas arestas, como mostra a definição a seguir.

Definição 1.17 Dado um passeio \mathcal{P} de um grafo G , chamamos de comprimento de \mathcal{P} e denota-se por $\text{comp}(\mathcal{P})$, o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui. No caso de caminhos, o comprimento coincide exatamente com o respectivo número de arestas.

Observação 1.12 *Através dessa definição, podemos associar uma aresta a um caminho de comprimento 1 (um) e um vértice um caminho de comprimento 0 (zero). Assim como um triângulo é um ciclo de comprimento 3 (três).*

Utilizando a definição de comprimento de passeio, podemos também definir distância entre vértices.

Definição 1.18 Dados dois vértices $u, v \in V(G)$, denotaremos por $\mathcal{P}_{u,v}$ o conjunto de todos os (u, v) -caminhos de G . Designa-se por distância entre vértices de G a função $\text{dist}_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \{0, \dots, v(G) - 1, \infty\}$ tal que

$$\text{dist}_G(u, v) = \begin{cases} \min_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{u,v}} \text{comp}(\mathcal{P}) & \text{se } \mathcal{P}_{u,v} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{u,v} = \emptyset. \end{cases}$$

Exemplo 1.11 *Considere o grafo G representado na Figura 13. Vamos determinar todas as distâncias entre seus vértices.*

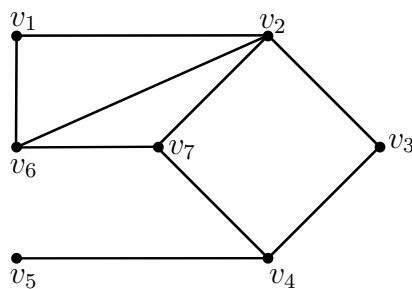


Figura 13 – Grafo G do Exemplo 1.11

Observe que, por definição, $\text{dist}_G(v_1, v_1) = 0$, $\text{dist}_G(v_1, v_2) = 1$ uma vez que $\min_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{v_1, v_2}} \text{comp}(\mathcal{P}) = 1$, $\text{dist}_G(v_1, v_3) = 2$ uma vez que $\min_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{v_1, v_3}} \text{comp}(\mathcal{P}) = 2$, etc. Assim, na Tabela 1 temos todas as distâncias entre os vértices de G .

dist	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	2	3	4	1	2
v_2	1	0	1	2	3	1	1
v_3	2	1	0	1	2	3	2
v_4	3	2	1	0	1	2	1
v_5	4	3	2	1	0	3	2
v_6	1	1	3	2	3	0	1
v_7	2	1	2	1	2	1	0

Tabela 1 – Distância entre vértices do grafo representado na Figura 13

Com a ideia de ciclos e de comprimento entre vértices, podemos agora enunciar um teorema que possui uma caracterização muito forte para grafos bipartidos.

Observação 1.13 *Na demonstração do teorema a seguir faremos uso do conceito de grafo conexo, que será definido apenas no próximo capítulo na Definição 2.1. Porém, para uma melhor comodidade do leitor, temos que um grafo G é dito conexo se, para qualquer par $u, v \in V(G)$, existe um (u, v) -caminho que os une.*

Teorema 1.3 *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém qualquer ciclo de comprimento ímpar.*

Demonstração: (\implies) Suponhamos que G seja bipartido, com bipartição (X, Y) . Se G não possui ciclos, não temos o que provar. Seja então $C = v_0v_1 \dots v_kv_0$ um ciclo de G , e sem perda de generalidade, suponhamos que $v_0 \in X$. Como $v_0v_1 \in E(G)$ e G é bipartido, então $v_1 \in Y$. Pelo mesmo argumento $v_2 \in X$ e, por indução temos $v_{2i} \in X$ e $v_{2i+1} \in Y$. Como v_k é adjacente a v_0 , temos que $v_k \in Y$ e $k = 2i + 1$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Como $\text{comp}(C) = k + 1$, temos que C é um ciclo par.

(\impliedby) Seja G um grafo com no mínimo dois vértices e que não contém ciclo ímpar. Podemos supor, sem perda de generalidade, G conexo, pois caso contrário consideraríamos cada componente conexa separadamente. Tomemos $u \in V(G)$ qualquer e definamos os seguintes conjuntos

$$X = \{x \in V(G); d(u, x) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V(G); d(u, y) \text{ é ímpar}\}.$$

Vamos mostrar que (X, Y) é uma bipartição de G . Suponhamos que v e w são dois vértices de X . Sejam \mathcal{P} o (u, v) -caminho de menor comprimento e \mathcal{Q} o (u, w) -caminho de menor comprimento. Denotemos por u_1 o último vértice comum a \mathcal{P} e \mathcal{Q} (ver Figura

14). Como \mathcal{P} e \mathcal{Q} são caminhos mais curtos de u a v e de u a w , respectivamente, então serão os caminhos mais curtos de u a u_1 e portanto tem o mesmo comprimento. Como os comprimentos de \mathcal{P} e \mathcal{Q} são pares, então os comprimentos das (u_1, v) -seção \mathcal{P}_1 de \mathcal{P} e (u_1, w) -seção \mathcal{Q}_1 de \mathcal{Q} devem ter a mesma paridade. Segue que (v, w) -caminho $\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{Q}_1$ é de comprimento par. Se v é adjacente a w , então $\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{Q}_1v$ deverá ser um ciclo ímpar, contrariando nossa hipótese. Portanto, não existem dois vértices de X adjacentes. Analogamente mostra-se que não existem dois vértices de Y que são adjacentes. Logo, (X, Y) é uma bipartição de G . ■

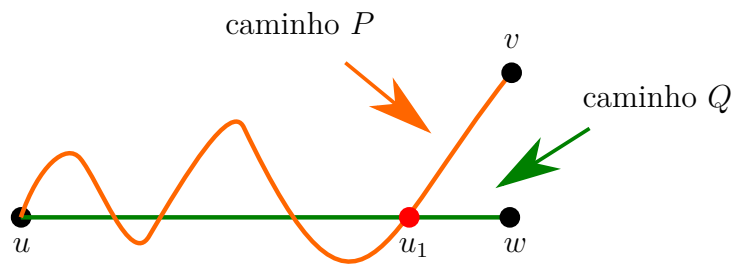


Figura 14 – Ilustração da demonstração do Teorema 1.3

2 CONEXIDADE E CONECTIVIDADE DE GRAFOS

Neste capítulo, tratamos de dois conceitos importantes da teoria dos grafos, a conexidade e conectividade de um grafo. Podemos aplicá-los em qualquer problema envolvendo rede, como por exemplo rede ferroviária, rede de telecomunicações ou rede elétrica. A seguir, vamos à definição de conexidade.

2.1 CONEXIDADE

Definição 2.1 Um grafo G é dito conexo se, para qualquer par $u, v \in V(G)$, existe um (u, v) -caminho que os une. Caso contrário, o grafo é dito desconexo (ou não conexo).

Observação 2.1 Um grafo com um único vértice v é conexo, já que podemos considerar a existência de um caminho de comprimento nulo, ou seja, um (v, v) -caminho sem aresta.

Na Figura 15, temos o exemplo de um grafo conexo (grafo G) e de um grafo desconexo (grafo H).

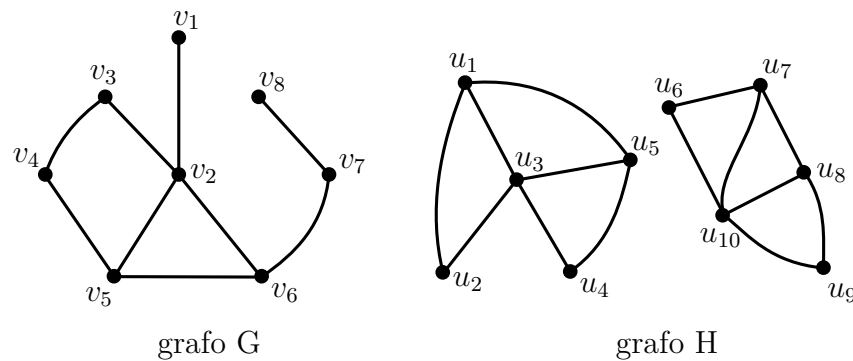


Figura 15 – Exemplo de um grafo conexo (grafo G) e desconexo (grafo H)

Pela Definição 2.1 fica evidente que a conexidade de um grafo está ligada a existência de um caminho entre seus vértices. Dessa forma, podemos estender a noção de grafos conexos para conexidade entre vértices.

Definição 2.2 Dado um grafo G , dois vértices $u, v \in V(G)$ dizem-se conectados, se existe em G um (u, v) -caminho.

É importante destacar que a existência de um (u, v) -passeio implica na existência de um (u, v) -caminho. Mostraremos esse fato no lema a seguir.

Lema 2.1 *Sejam G um grafo e $u, v \in V(G)$. Se existe um (u, v) -passeio em G , então existe um (u, v) -caminho em G .*

Demonstração: Como o comprimento de um passeio é dado por um número natural, uma vez que exista um (u, v) -passeio em G , temos pelo Princípio da Boa Ordem, que existe um (u, v) -passeio mínimo, ou seja, existe um passeio entre os vértices u e v de comprimento mínimo. Denotemos esse passeio por \mathcal{P} .

Afirmamos que \mathcal{P} é um (u, v) -caminho. De fato, se \mathcal{P} não for um caminho, então deverá existir um vértice w que é repetido em \mathcal{P} . Se eliminarmos as arestas e vértices entre as duas aparições de w (ver Figura 16) teremos um novo (u, v) -passeio, denotado por \mathcal{P}' . Dessa forma, \mathcal{P}' passará a ter um comprimento menor do que \mathcal{P} , contrariando a minimalidade do passeio \mathcal{P} . ■

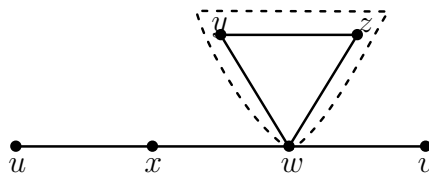


Figura 16 – Ilustração da eliminação das arestas entre w

A relação de conexidade entre vértices é uma relação de equivalência como mostramos na proposição a seguir.

Proposição 2.1 *A conexidade entre pares de vértices em um grafo G é uma relação de equivalência em $V(G)$, ou seja, quaisquer que sejam $u, v, w \in V(G)$, temos as seguintes propriedades:*

- (i) u está conectado a si mesmo;
- (ii) Se u está conectado a v , então v está conectado a u ;
- (iii) Se u está conectado a v e v está conectado a w , então u está conectado a w .

Demonstração:

(i) Cada vértice u está conectado a si mesmo, pois como vimos na Observação 2.1 existe um caminho de comprimento nulo entre u e u .

(ii) Se u está conectado a v então existe um (u, v) -caminho denotado por \mathcal{P} e descrito por $\mathcal{P} = v_0 e_1 v_1 \dots v_{n-1} e_n v_n$, sendo $v_0 = u$ e $v_n = v$. Dessa forma, $\mathcal{P}' = v_n e_n v_{n-1} \dots v_1 e_1 v_0$ é um (v, u) -caminho. Portanto, v está conectado a u .

(iii) Finalmente, para quaisquer três vértices u , v , e w de $V(G)$, se existem (u, v) -caminho e (v, w) -caminho descritos por $\mathcal{P}_1 = u_0e_1u_1 \dots u_{k-1}e_ku_k$ e $\mathcal{P}_2 = v_0f_1v_1 \dots v_{l-1}f_lv_l$, respectivamente, sendo $u_0 = u$, $u_k = v_0 = v$ e $v_l = w$, então por concatenação, conforme Proposição 1.3, temos que $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ é um (u, w) -passeio, e pelo Lema 2.1 temos que a existência de um (u, w) -passeio implica na existência de um (u, w) -caminho. Portanto, u está conectado a w . ■

Uma vez que a relação de conexidade entre vértices de um grafo G é uma relação de equivalência sobre o conjunto $V(G)$, podemos particionar o conjunto $V(G)$ em classes de equivalência, onde dois vértices $u, v \in V(G)$ estão na mesma classe se, e somente se, u está conectado a v . Ao subgrafo induzido por alguma dessas classes, denotamos por componente conexa.

Definição 2.3 Seja G um grafo. Suponha que $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, onde V_i , com $i = 1, 2, \dots, k$, representa uma classe de equivalência. Denotamos por componente conexa (ou, simplesmente, componente) de G cada um dos subgrafos induzidos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$.

Observação 2.2 Seja G um grafo. Indicamos por $C(G)$ o número de componentes conexas de G . Assim, um grafo é dito conexo quando $C(G) = 1$, caso contrário, o grafo é dito desconexo.

Exemplo 2.1 Considere o grafo G representado na Figura 17. Observe que as classes de equivalência da relação de conexidade sobre $V(G)$ são $\{v_1\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$ e $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$, denotadas por \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 e \mathcal{P}_4 , respectivamente. Assim, o grafo G possui quatro componentes conexas, que são dadas por $G[\mathcal{P}_1]$, $G[\mathcal{P}_2]$, $G[\mathcal{P}_3]$ e $G[\mathcal{P}_4]$. Como $C(G) = 4$, temos que o grafo G é desconexo.

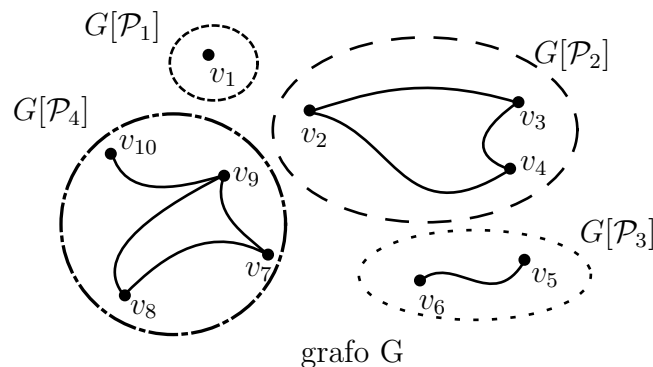


Figura 17 – Grafo G do Exemplo 2.1

Observe na Figura 17, que se for removida a aresta adjacente aos vértices v_2 e v_3 , a componente $G[\mathcal{P}_2]$ permanece conexa, porém se removermos a aresta adjacente aos vértices v_9 e v_{10} , ou se removermos o próprio vértice v_9 , a componente $G[\mathcal{P}_4]$ deixa de ser conexa (ver Figura 18). A essa aresta ou vértice, que quando removidos desconecta o grafo, denominamos aresta de corte ou vértice de corte. Faremos a definição formal a seguir.

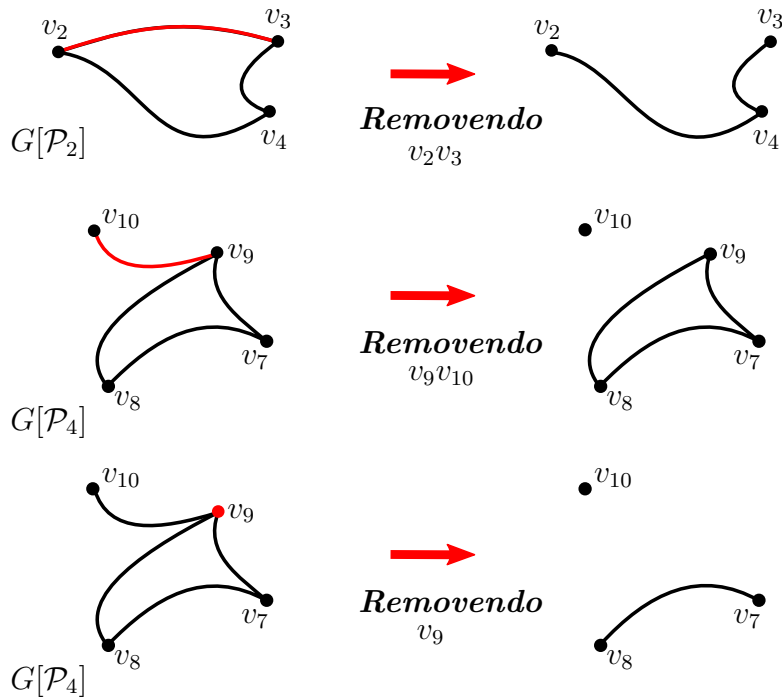


Figura 18 – Exemplos de arestas e vértice de corte

Definição 2.4 Seja G um grafo. Um vértice $v \in V(G)$ é chamado vértice de corte ou ponto de articulação de G , desde que $G - v$ tenha mais componentes do que G . Se o grafo G for conexo antes da remoção de v , então $G - v$ será desconexo. Da mesma forma, uma aresta $e \in E(G)$ é denominada ponte ou aresta de corte de G , desde que $G - e$ tenha mais componentes do que G . Se o grafo G for conexo antes da remoção de e , então $G - e$ será desconexo.

Teorema 2.1 *Seja G um grafo conexo. Uma aresta $e \in E(G)$ é uma aresta de corte se, e somente se, não está contida em nenhum ciclo.*

Demonstração: (\implies) Suponhamos que $e \in E(G)$ seja uma aresta de corte. Consideremos x e y as suas extremidades. Dessa forma, $G - e$ possui duas componentes conexas e disjuntas, ou seja, x não está conectado a y em $G - e$. Suponhamos, por contradição, que e esteja

contida em um ciclo $C = xey_1y_1 \dots e_kx$. Portanto, $C_1 = ye_1y_1 \dots e_kx$ é um (y, x) -caminho em $G - e$, o que contraria o fato de x e y estarem em componentes distintas em $G - e$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponhamos que $e \in E(G)$ não esteja contida em um ciclo de G . Consideremos x e y sendo as extremidades de e . Afirmamos que não pode haver um (x, y) -caminho em $G - e$. De fato, se um tal caminho existisse, digamos um (x, y) -caminho $C = xe_1x_1 \dots e_ny$ em $G - e$, então $C_1 = xe_1x_1 \dots e_nyex$ seria um ciclo em G , o que contraria nossa hipótese. Mostrando assim que $G - e$ é desconexo. ■

Seja G um grafo conexo que não possui vértice de corte e nem aresta de corte. Uma questão a ser considerada é se existe um subconjunto de vértices ou de arestas, que ao ser removido desconecta o grafo. Esclareceremos esse fato na definição seguinte.

Definição 2.5 Sejam G um grafo conexo e $S \subset V(G)$. Dizemos que S é um subconjunto de articulação em G , se ao removermos S obtivermos um subgrafo desconexo de G (ver Figura 19).

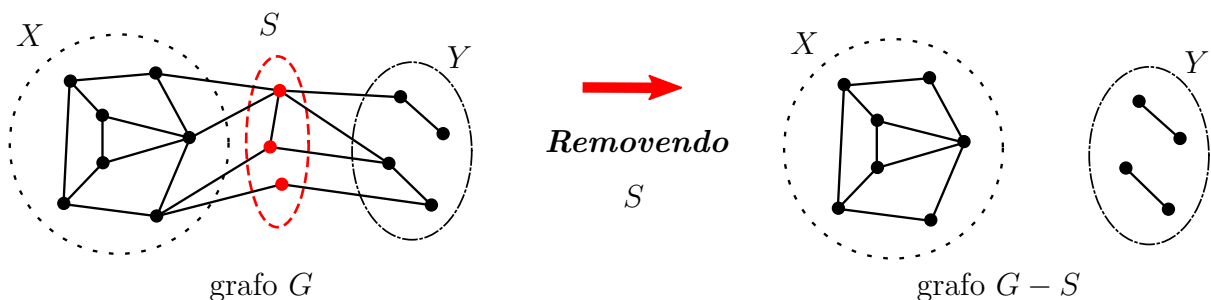


Figura 19 – Subconjunto de articulação

Observação 2.3 *Trabalharemos com os subconjuntos de articulações minimais.*

Afirmar que S é um subconjunto de articulação minimal de G , significa dizer que não existe nenhum subconjunto próprio de S que divide $V(G)$ em dois conjuntos disjuntos X e Y , ou seja, que separa X de Y ou que, em particular, separa todo $x \in X$ de todo $y \in Y$.

Definição 2.6 Sejam G um grafo conexo e $T \subset E(G)$. Dizemos que T é um conjunto de corte em G , se ao removermos T obtivermos um subgrafo desconexo de G (ver Figura 20).

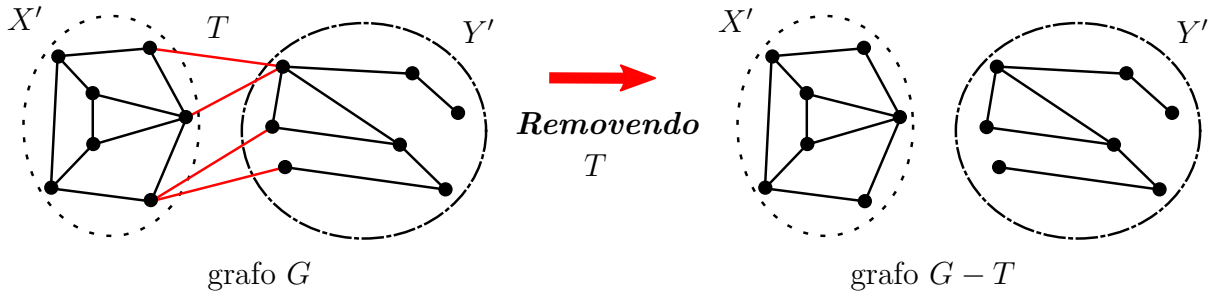


Figura 20 – Conjunto de corte

Observação 2.4 *Trabalharemos com os conjuntos de corte minimais.*

Afirmar que T é um conjunto de corte minimal de G , significa dizer que não existe nenhum subconjunto próprio de T que divide $V(G)$ em dois conjuntos disjuntos X' e Y' , ou seja, que separa X' de Y' ou que, em particular, separa todo $x \in X'$ de todo $y \in Y'$.

2.2 CONECTIVIDADE

O quanto que um grafo é conexo? Quando um grafo é mais conexo que outro grafo? Quantas arestas (ou vértices) precisam ser removidas de um grafo conexo para que ele se torne desconexo? Essas perguntas podem ser respondidas com uma única palavra: conectividade. Dessa forma, vamos a definição.

Definição 2.7 A conectividade (ou conectividade de vértices) de um grafo G , denotada por $\kappa(G)$, é o número mínimo de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice.

Observação 2.5 (i) *O último caso citado na definição acima se refere aos grafos completos, uma vez que todo subgrafo induzido por vértices de um K_v é completo. Assim, temos que $\kappa(K_v) = v - 1$. Caso G não seja completo, existem dois vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes. Neste caso, obtemos um grafo desconexo pela remoção dos demais $v - 2$ vértices. Logo, $\kappa(G) \leq v - 2$ para todo grafo G não completo.*

(ii) *Das definições de conectividade e de subconjunto de articulação se conclui imediatamente que*

$$\kappa(G) = \min_{S \in SC} |S|$$

onde SC é o conjunto dos subconjuntos de articulações minimais de G .

Exemplo 2.2 Seja G um grafo conexo e K_4 um grafo completo (ver Figura 21). Os conjuntos $\{v_2, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$ e $\{v_5, v_7\}$ são subconjuntos de articulação minimais de G . Logo, $\kappa(G) = 2$. Já o grafo completo K_4 possui $\kappa(K_4) = 3$.

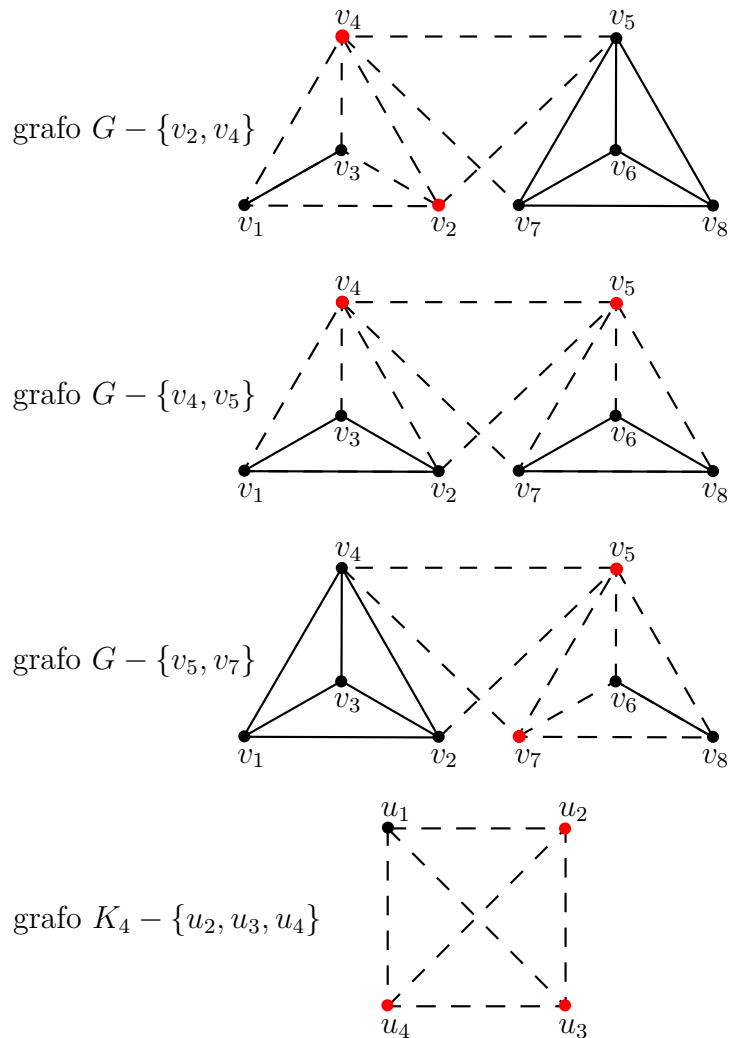


Figura 21 – Grafo G com $\kappa(G) = 2$; grafo K_4 com $\kappa(K_4) = 3$

Definição 2.8 Seja G um grafo. Dizemos que G é k -vértice-conexo, ou simplesmente k -conexo, se não existe $W \subseteq V(G)$ tal que $|W| < k$ e $G - W$ é desconexo. Adicionalmente, $\kappa(G)$ é o maior k tal que G é k -conexo.

Observação 2.6 (i) Se G é um grafo k -conexo, então G possui ao menos $k + 1$ vértices;
(ii) Dizemos que um grafo é k -conexo, se $\kappa(G) \geq k$, com $k \geq 1$ (o limite inferior não é zero porque 0-conexo representa, por convenção, um grafo não conexo ou um K_1).
Logo, se $t \geq r$, então um grafo t -conexo é também r -conexo.

Exemplo 2.3 Na Figura 21, o grafo G é 2-conexo, ou seja, não existe um subconjunto de articulação em G com cardinalidade menor que 2. Adicionalmente, podemos dizer que G é 1-conexo. Já o grafo K_4 é 3-conexo e, adicionalmente, podemos dizer que é 2-conexo ou até mesmo 1-conexo.

Definição 2.9 A conectividade de arestas de um grafo G , denotada por $\kappa'(G)$, é o menor número de arestas cuja remoção resulta em um subgrafo desconexo.

Observação 2.7 Das definições de conectividade e de conjunto de corte se conclui imediatamente que

$$\kappa'(G) = \min_{T \in CC} |T|$$

onde CC é o conjunto dos conjuntos de corte minimais de G .

Exemplo 2.4 Seja G um grafo conexo (ver Figura 22). Seu conjunto de corte com menor cardinalidade é dado por $\{v_2v_5, v_4v_5, v_4v_7\}$. Logo, $\kappa'(G) = 3$.

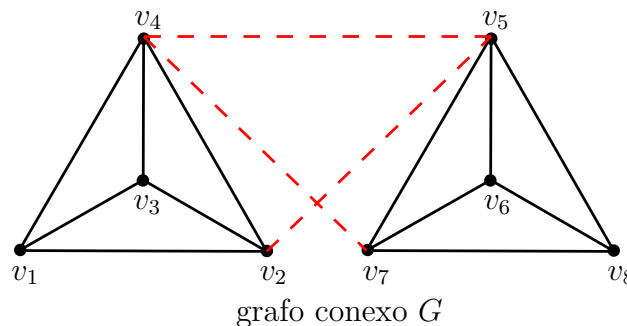


Figura 22 – Exemplo de um grafo G com $\kappa'(G) = 3$

Definição 2.10 Seja G um grafo. Dizemos que G é k -aresta-conexo se não existe $F \subseteq E(G)$ tal que $|F| < k$ e $G - F$ é desconexo. Adicionalmente, $\kappa'(G)$ é o maior k tal que G é k -aresta-conexo.

Observação 2.8 (i) Se G é um grafo k -aresta-conexo, então G possui ao menos dois vértices;

(ii) Por convenção, considera-se $\kappa'(K_1) = 0$.

Exemplo 2.5 Na Figura 22, o grafo G é 3-aresta-conexo, ou seja, não existe um conjunto de corte em G com cardinalidade menor que 3. Adicionalmente, podemos dizer que G é 2-aresta-conexo ou até mesmo 1-aresta-conexo.

Dado um grafo G , existe uma relação muito importante entre a conectividade de vértices, a conectividade de arestas e o grau mínimo de seus vértices que veremos no teorema a seguir.

Teorema 2.2 *Para todo grafo conexo G , tem-se*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G). \quad (5)$$

Demonstração: A remoção de arestas de um vértice de G com grau mínimo produz um grafo desconexo, o que prova a segunda desigualdade. Para provar a primeira desigualdade, observemos que ela é válida para $\kappa'(G) = 0$, uma vez que isso implica que G é desconexo ou possui apenas um vértice e, em ambos os casos, $\kappa(G) = 0$. Se $\kappa'(G) = 1$, então o grafo contém uma ponte, que será removida ao removermos um de seus vértices, ou seja, $\kappa(G) = 1$. Para $\kappa'(G) \geq 2$, observemos que a remoção de $\kappa'(G) - 1$ arestas produzirá um grafo com uma ponte (u, v) . Analisemos separadamente as duas seguintes situações:

- (i) Ao removermos um vértice do extremo de cada uma das $\kappa'(G) - 1$ arestas consideradas, o grafo obtido será desconexo. Neste caso, $\kappa(G) \leq \kappa'(G) - 1 < \kappa'(G)$;
- (ii) Ao removermos um vértice do extremo de cada uma das $\kappa'(G) - 1$ arestas consideradas dentre todas as $2^{\kappa'(G)-1}$ possibilidades de escolhas, o grafo obtido será conexo. Nesse caso, ao removermos um extremo de cada uma das $\kappa'(G) - 1$, a aresta uv será uma ponte e, portanto o grafo obtido terá conectividade por arestas igual a 1 e, pela análise feita anteriormente, a conectividade por vértices também será 1. Portanto, $\kappa(G) \leq (\kappa'(G) - 1) + 1 = \kappa'(G)$.

■

A Figura 23 ilustra e esclarece os dois casos finais da demonstração do Teorema 2.2.

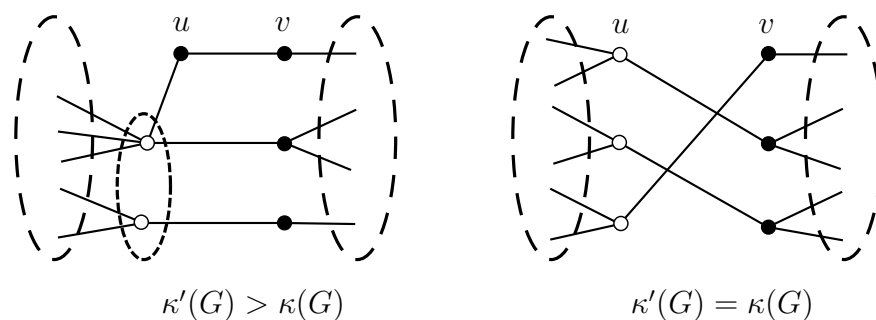


Figura 23 – Ilustração referente à demonstração do Teorema 2.2

Dizemos que um grafo é maximalmente conexo quando o mesmo verifica as duas igualdades em (5). Caso o grafo verifique apenas a segunda igualdade, diremos que é maximalmente aresta-conexo.

Trataremos a seguir os conceitos de bloco e bloco de um grafo que são conceitos relacionados com a k -conexidade.

Definição 2.11 Um grafo conexo que não possui vértices de corte é chamado de bloco. Cada bloco com pelo menos três vértices é 2-conexo. Dado um grafo G conexo, chamaremos por bloco de G todo o subgrafo maximal conexo de G que não possui vértices de corte.

Observação 2.9 *Todo grafo é a união de seus blocos (ver Figura 24).*

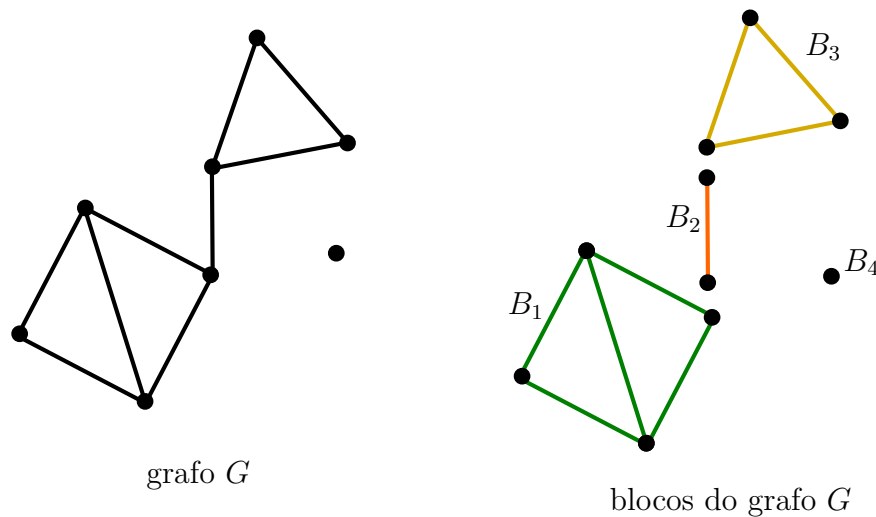


Figura 24 – Ilustração referente a Observação 2.9

Uma família de caminhos em um grafo G é dita internamente-disjunto se nenhum vértice de G é um vértice interno de mais de um caminho da família. O seguinte teorema é devido a Whitney ¹.

Teorema 2.3 *Um grafo G com $v \geq 3$ é 2-conexo se, e somente se, dois vértices de G estiverem conectados por pelo menos dois caminhos internamente disjuntos.*

Demonstração: (\Leftarrow) Se dois vértices de G estiverem conectados por pelo menos dois caminhos internamente disjuntos então, G é conexo e não possui vértice de corte. Logo, G é 2-conexo.

¹ Hassler Whitney (23 de março de 1907 - 10 de maio de 1989) era um matemático americano. Ele foi um dos fundadores da teoria da singularidade, e fez o trabalho fundacional em colectores, incorporações, imersões, classes características e teoria de integração geométrica. Em 1932, Whitney mostrou que um grafo G com a ordem $n \geq 3$ é 2-conexo se, e somente se, dois vértices de G estiverem conectados por pelo menos dois caminhos internamente disjuntos.

(\implies) Suponhamos que G é um grafo 2-conexo. Devemos provar, por indução na distância $d(u, v)$, entre u e v , que quaisquer dois vértices u e v estão conectados por pelo menos dois caminhos internamente disjuntos.

Suponhamos, em primeiro lugar, que $d(u, v) = 1$. Então, uma vez que G é 2-conexo, a aresta uv não é uma aresta de corte e, portanto, pelo Teorema 2.1, está contida em um ciclo. Segue-se que u e v estão conectados por dois caminhos internamente disjuntos em G .

Suponhamos que o teorema seja válido para qualquer dois vértices a uma distância menor do que k , e que $d(u, v) = k$, com $k \geq 2$. Consideremos um (u, v) -caminho de comprimento k e seja w o vértice que precede v neste caminho. Como $d(u, w) = k - 1$, segue-se a partir da hipótese de indução que existem dois (u, w) -caminhos internamente disjuntos, P e Q , em G . Além disso, como G é 2-conexo, $G - w$ é conexo e, portanto, contém um (u, v) -caminho P' . Seja x o último vértice de P' que também está em $P \cup Q$ (ver Figura 25). Como $u \in P \cup Q$ então, existe tal x ; Não excluimos a possibilidade de que $x = v$.

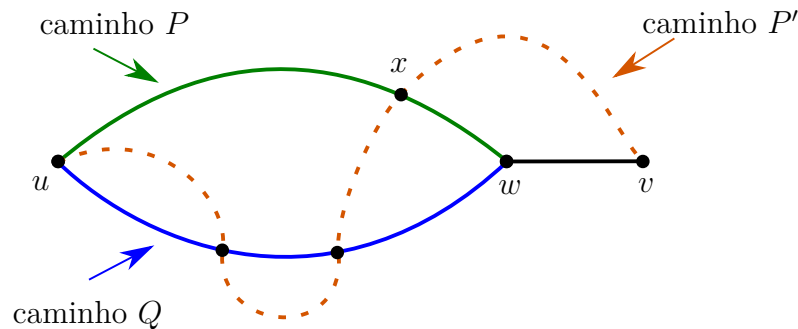


Figura 25 – Ilustração da demonstração do Teorema 2.3

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x \in P$. Então G tem dois (u, v) -caminhos internamente disjuntos, um composto da seção de P de u para x juntamente com a seção de P' de x para v , e o outro composto de Q junto com o (w, v) -caminho. ■

Corolário 2.4 *Se G é 2-conexo então, dois vértices de G ficam em um ciclo comum.*

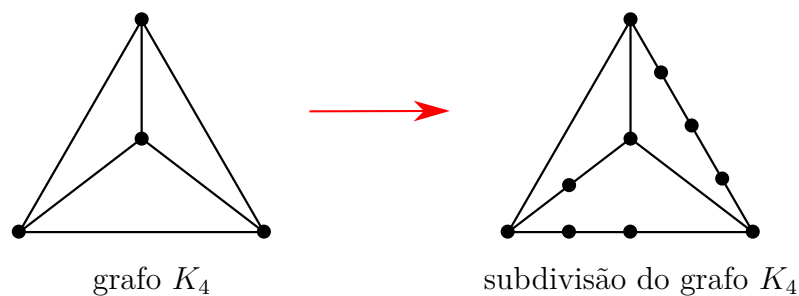
Demonstração: Isso segue imediatamente a partir do Teorema 2.3, uma vez que dois vértices ficam em um ciclo comum se, e somente se, eles estiverem conectados por dois caminhos internos disjuntos. ■

A seguir, a partir do conceito de caminho, faremos a definição de subdivisão de aresta e de subdivisão de grafo.

Definição 2.12 Uma aresta e é dita ser subdividida quando ela é deletada e trocada por um caminho de comprimento 2 ligando suas extremidades. O vértice interno deste caminho será um novo vértice. Tal caminho é dito ser subdivisão de aresta.

Definição 2.13 Uma subdivisão de um grafo G é um grafo que pode ser obtido de G por uma sequência de subdivisão de arestas.

Exemplo 2.6 Na Figura 26, temos o grafo K_4 e uma subdivisão dele gerada por uma sequência de subdivisão de arestas.



PASSO A PASSO:

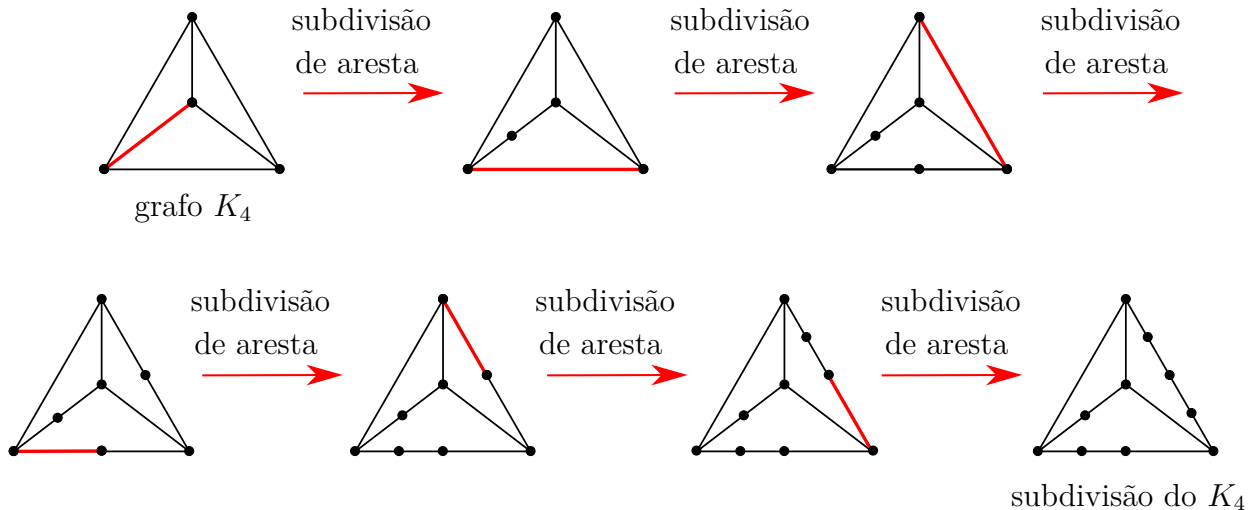


Figura 26 – Sequência de subdivisão de arestas do grafo K_4

Pode-se ver que a classe de blocos com pelo menos três vértices é fechada sob a operação de subdivisão. A prova do próximo corolário usa esse fato.

Corolário 2.5 Se G é um bloco com $v \geq 3$ então, as duas arestas de G pertencem a um ciclo comum.

Demonstração: Sejam G um bloco com $v \geq 3$ e, e_1 e e_2 , duas aresta de G . Forme um novo grafo, G' , subdividindo e_1 e e_2 , e denote os novos vértices por v_1 e v_2 . Assim, G' é um bloco com pelo menos cinco vértices, e, portanto, é 2-conexo. Resulta do Corolário 2.4 que v_1 e v_2 se situam em um ciclo comum de G' . Assim, e_1 e e_2 ficam em um ciclo comum de G (ver Figura 27). ■

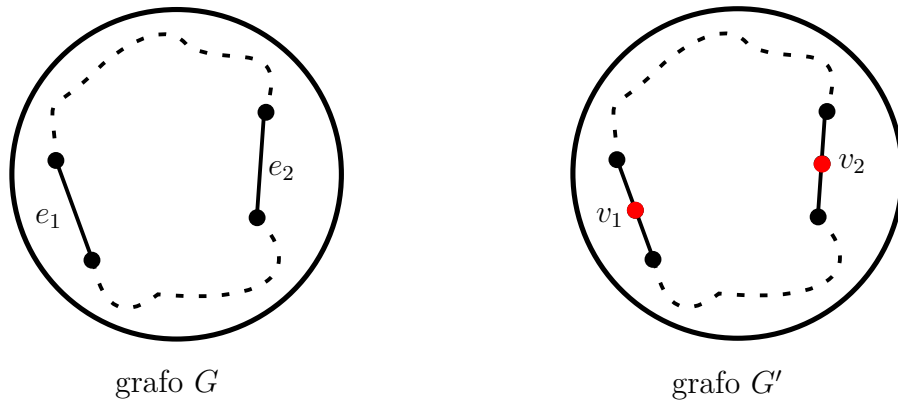


Figura 27 – Ilustração da demonstração do Corolário 2.5

3 PLANARIDADE DE GRAFOS

Uma das motivações mais antigas para o estudo da planaridade de um grafo é o famoso *problema das três casas*. Este problema foi proposto por Henry Dudeney ¹ em 1913, e consiste em:

“Três companhias públicas devem fornecer três tipos de serviços, água, telefone e eletricidade, a três casas. Decidiu-se usar tubulações subterrâneas, todas à mesma profundidade, por motivos de segurança. O mapa das linhas de suprimento dá origem a um grafo de 6 vértices e 9 arestas, como mostra a Figura 28. É possível descruzar as linhas de suprimento?”

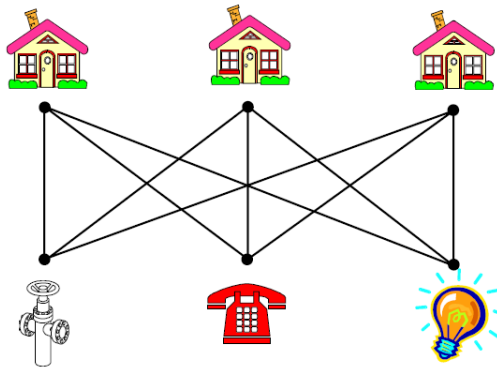


Figura 28 – O problema das três fontes de suprimento

Fonte: (SAMPAIO, 2004)

Podemos também enunciá-lo de forma matemática. Para isso, associemos cada companhia pública e cada casa a um vértice, e as tubulações subterrâneas às arestas. Assim, o problema passa a ser enunciado da seguinte forma:

Dado um grafo $K_{3,3}$, sabemos que este é um grafo bipartido, completo, gostaríamos de saber se este grafo pode ser desenhado no plano de forma que nenhuma aresta cruze outra. É possível tal desenho?

A resposta é não, porém a explicação será dada mais a frente. Por enquanto, vamos mostrar um outro problema envolvendo grafos planares, talvez o mais famoso e conhecido na teoria dos grafos, que desafiou matemáticos famosos por muito tempo. O Problema das Quatro Cores, descrito a seguir.

¹ Henry Ernest Dudeney (10 de abril de 1857 - 23 de abril de 1930) foi um autor e matemático inglês que se especializou em enigmas de lógica e jogos matemáticos. Ele é conhecido como um dos principais criadores de enigmas matemáticos da Inglaterra.

“É possível colorir as regiões de qualquer mapa desenhado no plano, usando até quatro cores, de maneira que nenhum par de regiões que tenham uma fronteira em comum (não apenas um ponto) seja da mesma cor?” (ver Figura 29)



Figura 29 – Mapa do Brasil colorível com quatro cores

Podemos também enunciá-lo de forma matemática. Para isso, associemos cada região a um vértice e afirmemos que vértices adjacentes correspondem à regiões com fronteiras em comum. Assim, o problema passa a ser enunciado da seguinte forma:

É possível colorir os vértices de um grafo desenhado no plano, de forma que nenhuma aresta cruze outra, usando no máximo quatro cores, de maneira que vértices adjacentes tenham cores diferentes? (ver Figura 30)

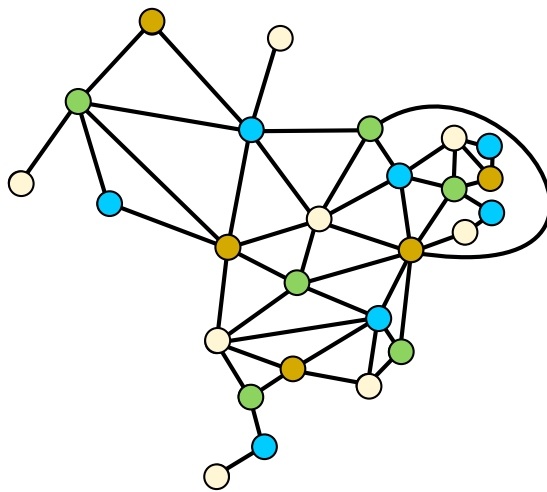


Figura 30 – Grafo correspondente ao mapa da Figura 29

A resposta é sim, segundo Santos José Plínio O.; Mello (2007, p.331)

... As várias tentativas de demonstrá-la produziram grandes avanços em teoria dos grafos e assuntos correlatos. Finalmente, em 1976, K. Appel e W. Haken (APPEL K.L., 1976) apresentaram uma prova de que a conjectura estava correta. Esta prova envolve, além de argumentos elaborados e sofisticados, 1.200 horas de cálculo em computador (foi usado predominantemente um IBM 370). Este artigo despertou grande interesse e controvérsia e alguns matemáticos não estão ainda plenamente satisfeitos com a demonstração. ...

Os dois problemas, mencionados acima, fizeram considerações à um grafo desenhado num plano onde suas arestas não se intersectam. Façamos então, a definição formal desse grafo.

Definição 3.1 Um grafo é dito ser **mergulhado** no plano, ou planar, se ele pode ser desenhado no plano tal que suas arestas se intersectem apenas nas extremidades. Tal desenho de um grafo planar G é chamado de **mergulho planar de G** .

Um mergulho planar \tilde{G} de G pode ele mesmo ser visto como um grafo isomorfo a G . O conjunto de vértices de \tilde{G} é o conjunto de pontos que representam os vértices de G , o conjunto de arestas de \tilde{G} é o conjunto de linhas que representam as arestas de G , e os vértices de \tilde{G} são incidentes com todas as arestas de \tilde{G} que os contém. Muitas vezes nos referimos ao mergulho planar de um grafo planar como um grafo plano. A Figura 31b mostra um mergulho planar do grafo planar da Figura 31a.

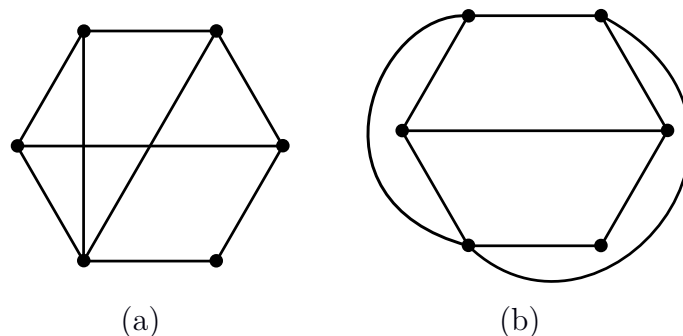


Figura 31 – (a) Um grafo planar G ; (b) Um mergulho planar de G

3.1 CURVA DE JORDAN

A partir da definição de mergulho planar, percebesse que o estudo de grafos planares envolve necessariamente a topologia do plano, já que vamos lidar com desenhos no plano. Definir matematicamente traçados no plano, como por exemplo uma curva, exigiria conceitos de matemática contínua que não desenvolvemos e que foge da nossa proposta de trabalho. Assim, trataremos as questões topológicas, de maneira intuitiva. Dessa forma, definiremos como curva simples uma curva que liga dois pontos distintos no plano, e não se intercepta. Já a curva simples onde os pontos de origem e fim coincidem é denotada de curva fechada simples, também conhecida como curva de Jordan.

Os resultados de topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são aqueles que envolvem curvas de Jordan. A união das arestas em um ciclo de um grafo plano constitui uma curva de Jordan, esta é a razão pela qual as propriedades da curva de Jordan nos trazem elementos da teoria dos grafos planares. Devemos recordar um teorema bem conhecido sobre curvas de Jordan e usá-lo para demonstrar a não planaridade de $K_{3,3}$ e K_5 .

Teorema 3.1 *Seja J uma curva fechada simples no plano, ou seja, uma curva de Jordan no plano. Então, o restante do plano é particionado em dois conjuntos disjuntos chamados de interior e exterior de J . Devemos denotar o interior e o exterior de J , respectivamente, por $\text{int } J$ e $\text{ext } J$, e seus fechados por $\text{Int } J$ e $\text{Ext } J$. Dessa forma, temos que $\text{Int } J \cap \text{Ext } J = J$. Assim, qualquer linha que unir um ponto no $\text{int } J$ a um ponto no $\text{ext } J$ deve intersectar J em algum ponto. (Ver Figura 32)*

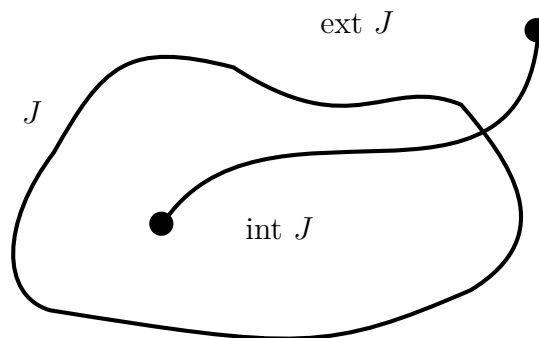


Figura 32 – Uma curva de Jordan

Embora este teorema seja intuitivamente óbvio, uma prova formal disso é bastante difícil. Dessa forma, vamos aceitá-lo e utilizá-lo.

Teorema 3.2 $K_{3,3}$ é não planar.

Demonstração: A prova será feita por contradição. Suponhamos que G seja um mergulho planar do grafo $K_{3,3}$. Como G é bipartido completo temos, pela Proposição 1.1, que existe apenas uma bipartição (X, Y) de G , tomando $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{x, y, z\}$, temos que quaisquer dois vértices $u \in X$ e $v \in Y$ são unidos por uma aresta, ou seja,

$$E(G) = \{ax, ay, az, bx, by, bz, cx, cy, cz\}.$$

O ciclo $C = aybxa$ é uma curva de Jordan no plano e o ponto c deve situar-se em $\text{int } C$ ou em $\text{ext } C$. Suponhamos que $c \in \text{int } C$ (o caso em que $c \in \text{ext } C$ pode ser tratado de forma análoga). Em seguida, as arestas cx e cy dividem o $\text{int } C$ em duas regiões $\text{int } C_1$ e $\text{int } C_2$, onde $C_1 = aycxa$ e $C_2 = bxcyb$ (ver Figura 33).

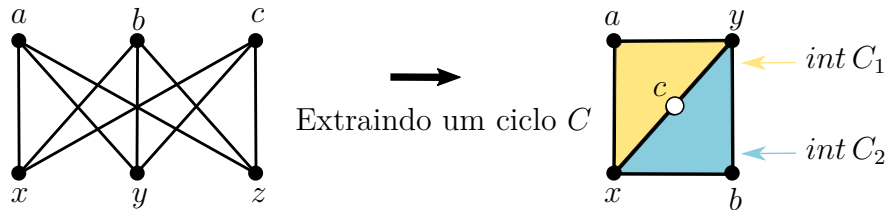


Figura 33 – Grafo bipartido $K_{3,3}$ e uma curva de Jordan C extraída dele

Observemos que z deve estar em uma das três regiões $\text{ext } C$, $\text{int } C_1$ ou $\text{int } C_2$. Analisemos cada uma das situações.

- Se $z \in \text{ext } C$ então, como $c \in \text{int } C$ segue-se do Teorema 3.1 que a aresta cz deve intersectar C em algum ponto (ver Figura 34). O que contraria a suposição de que G é um grafo plano.

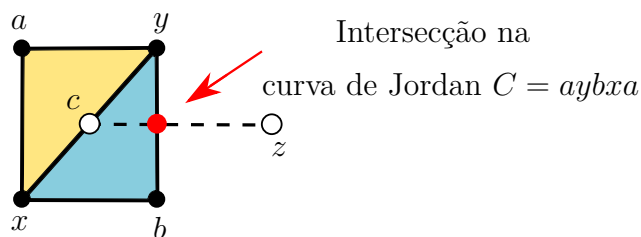


Figura 34 – Ilustração da intersecção da aresta cz na curva de Jordan C

- Se $z \in \text{int } C_1$ então, como $b \in \text{ext } C_1$ segue-se do Teorema 3.1 que a aresta bz deve intersectar C_1 em algum ponto (ver Figura 35). Novamente contrariando a suposição de que G é um grafo plano.

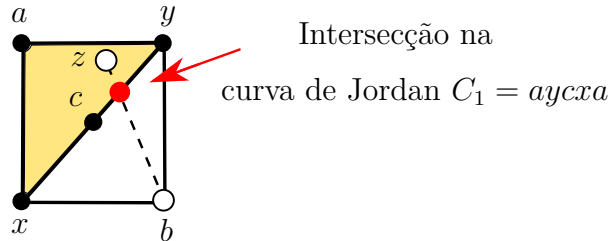


Figura 35 – Ilustração da intersecção da aresta bz na curva de Jordan C_1

- Por fim, se $z \in \text{int } C_2$ então, como $a \in \text{ext } C_2$ segue-se do Teorema 3.1 que a aresta az deve intersectar C_2 em algum ponto (ver Figura 36). Obtendo novamente uma contradição.

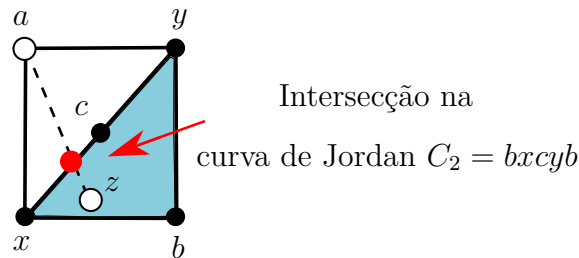


Figura 36 – Ilustração da intersecção da aresta az na curva de Jordan C_2

■

Teorema 3.3 K_5 é não planar.

Demonstração: A prova será feita por contradição. Suponhamos que G seja um grafo plano correspondente a K_5 . Denotemos os vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 . Uma vez que G é completo, qualquer dois dos seus vértices são unidos por uma aresta. O ciclo $C = v_1v_2v_3v_1$ é uma curva de Jordan no plano, e o ponto v_4 deve situar-se no $\text{int } C$ ou $\text{ext } C$. Suponhamos que $v_4 \in \text{int } C$ (o caso em que $v_4 \in \text{ext } C$ pode ser tratado de forma análoga). Em seguida, as arestas v_4v_1, v_4v_2 e v_4v_3 dividem o $\text{int } C$ nas três regiões $\text{int } C_1, \text{int } C_2$ e $\text{int } C_3$, onde $C_1 = v_1v_4v_2v_1, C_2 = v_2v_4v_3v_2$ e $C_3 = v_3v_4v_1v_3$ (ver Figura 37).

O vértice v_5 deve estar em uma das quatro regiões $\text{ext } C, \text{int } C_1, \text{int } C_2$ ou $\text{int } C_3$. Analisemos cada uma das situações.

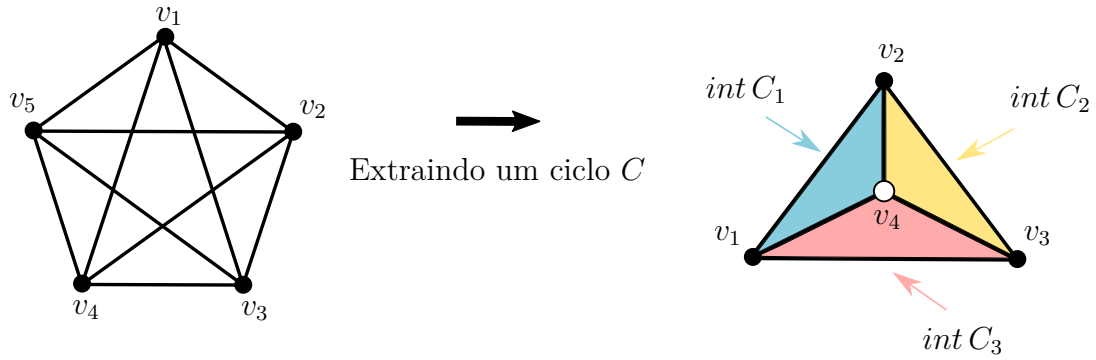


Figura 37 – Grafo K_5 e uma curva de Jordan C extraída dele

- Se $v_5 \in ext C$ então, como $v_4 \in int C$ segue-se do Teorema 3.1 que a aresta v_4v_5 deve intersectar C em algum ponto (ver Figura 38), contrariando a suposição de que G é um grafo plano.

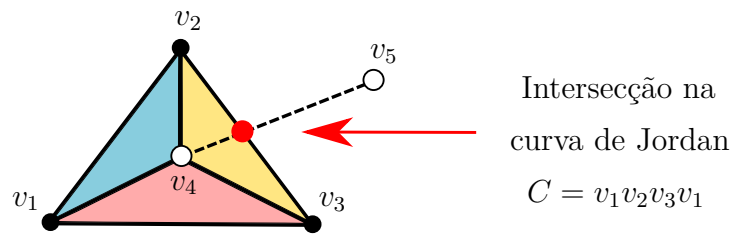


Figura 38 – Ilustração da intersecção da aresta v_4v_5 na curva de Jordan C

- Se $v_5 \in int C_1$ então, como $v_3 \in ext C_1$ segue-se do Teorema 3.1 que a aresta v_3v_5 deve intersectar C_1 em algum ponto (ver Figura 39), contrariando a suposição de que G é um grafo plano.

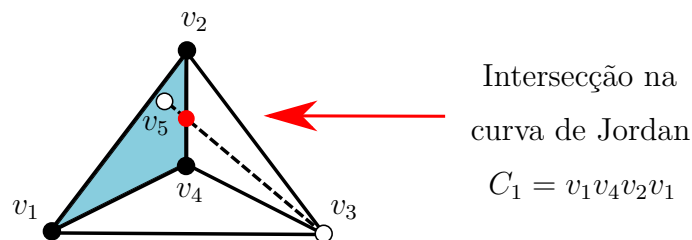


Figura 39 – Ilustração da intersecção da aresta v_3v_5 na curva de Jordan C_1

- os casos $v_5 \in int C_2$ e $v_5 \in int C_3$ são análogos ao caso anterior (ver Figura 40).

■

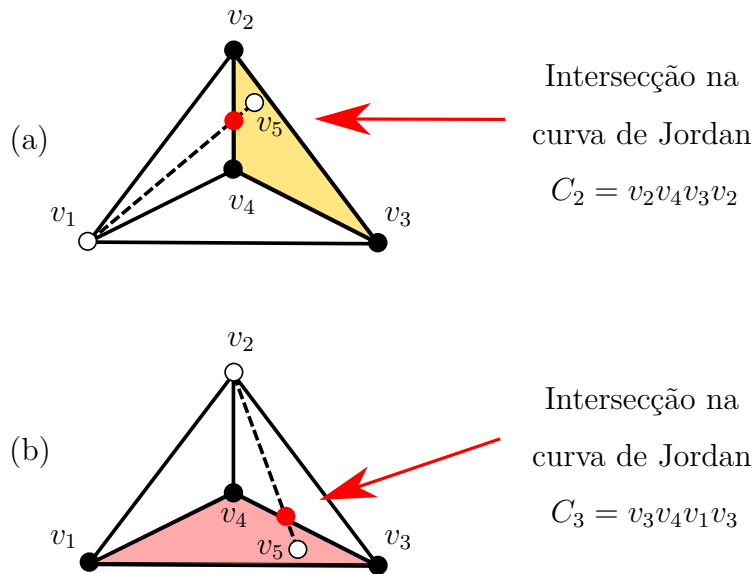


Figura 40 – (a) Ilustração da intersecção da aresta v_1v_5 na curva de Jordan C_2 ;
 (b) Ilustração da intersecção da aresta v_2v_5 na curva de Jordan C_3

3.2 FÓRMULA DE EULER

A partir do Teorema 3.1 (curva de Jordan), provamos que os grafos $K_{3,3}$ e K_5 não são grafos planares. Porém, analisar a planaridade de um grafo não é algo simples. É preciso estabelecer condições necessárias e suficientes para perceber se um grafo é, ou não, planar. Com isso, inicialmente, mostraremos os três resultados mais conhecidos que tratam de condições de planaridade e, posteriormente, apresentaremos o teorema de Kuratowski que é o principal objetivo deste trabalho.

O fato do grafo possuir um mergulho planar, implica que o plano onde ele está inserido seja dividido, finitamente, em regiões, chamadas de faces. Assim, o primeiro resultado que apresentaremos é o teorema de Euler, que nos trás uma condição necessária para um grafo ser planar.

Teorema 3.4 (Fórmula de Euler) *Seja G um grafo planar conexo com v vértices e ε arestas. Escolhamos um mergulho planar de G e seja f o número de faces nesse mergulho planar. Então,*

$$v - \varepsilon + f = 2. \quad (6)$$

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução sobre o número de arestas, tendo em conta que o resultado é verdadeiro para grafos conexos, planos, não nulos e com zero ou uma aresta. De fato,

- Para $\varepsilon = 0$, teremos $v = 1$ (pois o grafo é não nulo) e $f = 1$. Logo, a Equação 6 é satisfeita.
- Para $\varepsilon = 1$, teremos $v = 2$ e $f = 1$ (uma vez que o grafo é simples). Logo, a Equação 6 é satisfeita.

Suponhamos que a Fórmula de Euler seja verificada para todo grafo conexo planar com p arestas, sendo $p < \varepsilon$ e $\varepsilon > 1$. Considere G_ε um grafo com ε arestas e seja e uma aresta desse grafo. Assim, temos dois casos a considerar.

1º caso: A aresta e é uma aresta de corte.

Neste caso, $G_\varepsilon - e$ é um grafo que contém duas componentes conexas C_1 e C_2 . As componentes C_1 e C_2 possuem $\varepsilon(C_1)$ e $\varepsilon(C_2)$ arestas com $\varepsilon(C_1)$ e $\varepsilon(C_2)$ menor que ε e, por hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} v(C_1) - \varepsilon(C_1) + f(C_1) &= 2 \quad e \\ v(C_2) - \varepsilon(C_2) + f(C_2) &= 2. \end{aligned}$$

Como $C_1 \cup C_2 \cup e = G_\varepsilon$, então

$$\begin{aligned} v(G_\varepsilon) &= v(C_1) + v(C_2), \\ \varepsilon(G_\varepsilon) &= \varepsilon(C_1) + \varepsilon(C_2) + 1 \quad e \\ f(G_\varepsilon) &= f(C_1) + f(C_2) - 1. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} v(G_\varepsilon) - \varepsilon(G_\varepsilon) + f(G_\varepsilon) &= v(C_1) - \varepsilon(C_1) + f(C_1) + v(C_2) - \varepsilon(C_2) + f(C_2) - 1 - 1 \\ v(G_\varepsilon) - \varepsilon(G_\varepsilon) + f(G_\varepsilon) &= 2 + 2 - 1 - 1 \\ v(G_\varepsilon) - \varepsilon(G_\varepsilon) + f(G_\varepsilon) &= 2 \end{aligned}$$

2º caso: A aresta e não é uma aresta de corte.

Assim, pelo Teorema 2.1, temos que e está contida em um ciclo de G_ε . Dessa forma, sua remoção une duas faces do grafo G_ε . Portanto,

$$\begin{aligned} v(G_\varepsilon) &= v(G_\varepsilon - e), \\ \varepsilon(G_\varepsilon) &= \varepsilon(G_\varepsilon - e) + 1 \quad e \\ f(G_\varepsilon) &= f(G_\varepsilon - e) + 1. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} v(G_\varepsilon) - \varepsilon(G_\varepsilon) + f(G_\varepsilon) &= v(G_\varepsilon - e) - \varepsilon(G_\varepsilon - e) - 1 + f(G_\varepsilon - e) + 1 \\ v(G_\varepsilon) - \varepsilon(G_\varepsilon) + f(G_\varepsilon) &= v(G_\varepsilon - e) - \varepsilon(G_\varepsilon - e) + f(G_\varepsilon - e) \end{aligned}$$

Como $E(G_\varepsilon - e) = \varepsilon - 1$, por hipótese de indução, temos

$$v(G_\varepsilon - e) - \varepsilon(G_\varepsilon - e) + f(G_\varepsilon - e) = 2$$

■

Para demonstrar o segundo resultado acerca de grafo planar, precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.1 *Sejam f o número de faces de um grafo conexo planar G e ε o número de arestas de G , onde $\varepsilon \geq 2$. Então,*

$$3f \leq 2\varepsilon. \quad (7)$$

Demonstração: Note que cada aresta ou faz fronteira entre duas faces ou pertence à fronteira de uma única face. Por exemplo, na Figura 41, temos que a face interior do grafo G possui três arestas: v_1v_2 , v_2v_3 e v_1v_3 . Já a face exterior possui quatro arestas, sendo as três da face interior mais a aresta v_3v_4 , que pertence exclusivamente a ela.

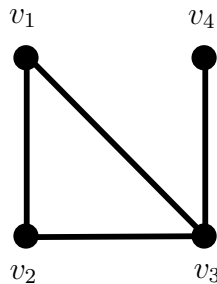


Figura 41 – Grafo planar G

Portanto, se denotarmos por f_i o número de faces com exatamente i arestas na fronteira, temos

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots \leq 2\varepsilon,$$

pois cada aresta é contabilizada no máximo duas vezes. Se $\varepsilon = 2$, a única possibilidade para G é possuir uma única face, já que não podemos ter laços e nem arestas múltiplas. Assim, com $f = 1$ e $\varepsilon = 2$, temos que a desigualdade (7) é satisfeita.

Se $\varepsilon > 2$, o mergulho planar de G não pode conter faces delimitadas por apenas uma ou duas arestas, pois implicaria G possuir laços ou arestas múltiplas. Portanto, considerando que se trata de um grafo (e não de um multigrafo), temos que

$$\begin{aligned} 3f &= 3(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) \\ &\leq 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

■

O segundo resultado, que mostraremos a seguir, surge da junção do Lema 3.1 com o Teorema 3.4.

Corolário 3.5 *Seja G um grafo conexo planar, com $v(G) = v$ e $\varepsilon(G) = \varepsilon$, onde $\varepsilon \geq 2$. Então,*

$$\varepsilon \leq 3v - 6. \quad (8)$$

Demonstração: Do Lema 3.1, temos que

$$f \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Substituindo na fórmula de Euler do Teorema 3.4, obtemos

$$v - \varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon \geq 2,$$

que se reduz a

$$\varepsilon \leq 3v - 6.$$

■

A partir do Lema 3.1 e do Corolário 3.5 faremos uma demonstração diferente à do Teorema 3.2 da não planaridade do K_5 .

Teorema 3.6 *K_5 é não planar.*

Demonstração: Faremos a demonstração da não planaridade do K_5 de duas formas.

1º forma: Utilizando o Lema 3.1.

Antes de testarmos a validade do Lema 3.1 no grafo K_5 , precisamos supor que K_5 é um grafo planar. Dessa forma, o número f de faces de K_5 é determinado pela Fórmula de Euler (Teorema 3.4). Como $v(K_5) = 5$ e $\varepsilon(K_5) = 10$, temos então

$$f = 2 - v + \varepsilon = 7.$$

Daí, segue que $3f = 21$ e $2\varepsilon = 20$. Assim, pelo Lema 3.1 temos $21 \leq 20$ (falso). Portanto, K_5 é não planar.

2º forma: Utilizando o Corolário 3.5.

Supondo que K_5 seja planar, e como $v(K_5) = 5$ e $\varepsilon(K_5) = 10$, temos pelo Corolário 3.5 que $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ (falso). Portanto, K_5 é não planar. ■

A partir da demonstração acima, poderíamos nos perguntar se o lema ou o corolário utilizados seriam bons critérios para determinarmos se um grafo é planar ou não. Sabemos, a partir do Teorema 3.2, que o grafo $K_{3,3}$ não é planar, mas tal grafo verifica as desigualdades (7) e (8) dos respectivos lema e corolário como vemos a seguir. Lembrando que $v(K_{3,3}) = 6$, $\varepsilon(K_{3,3}) = 9$ e, pela Fórmula de Euler (supondo $K_{3,3}$ planar), $f = 5$. Assim,

$$\begin{aligned} 3f &= 15 \leq 2\varepsilon = 18 \quad (\text{Lema 3.1}) \\ \varepsilon &= 9 \leq 3v - 6 = 12 \quad (\text{Corolário 3.5}). \end{aligned}$$

Portanto, só podemos concluir a partir dos resultados, que o grafo não é planar caso não satisfaça as desigualdades em questão. Assim, a partir da demonstração do Lema 3.1 apresentaremos a seguir, um lema que também será útil como critério de não planaridade.

Lema 3.2 *Sejam f o número de faces de um grafo conexo planar G (que não contém um subgrafo K_3) e ε o número de arestas de G , onde $\varepsilon \geq 2$. Então,*

$$4f \leq 2\varepsilon. \tag{9}$$

Demonstração: Na demonstração do Lema 3.1, vimos que

$$\begin{aligned} 3f &= 3(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) \\ &\leq 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3 temos que o grafo $K_{3,3}$ (grafo bipartido completo) possui apenas ciclos pares, e como a fronteira de uma face num mergulho planar de um grafo é constituída pelas arestas em um ciclo, temos que as faces de um mergulho planar de $K_{3,3}$ (supondo que exista) terá pelo menos quatro arestas na fronteira. Assim, podemos mudar a desigualdade acima para

$$\begin{aligned} 4f &= 4(f_4 + f_6 + f_8 + \dots) \\ &\leq 4f_4 + 6f_6 + 8f_8 + \dots \\ &\leq 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

■

Por fim, o terceiro resultado surge através do corolário a seguir.

Corolário 3.7 *Seja G um grafo conexo planar, com $v(G) = v$ e $\varepsilon(G) = \varepsilon$, onde $\varepsilon \geq 4$.*

Então,

$$\varepsilon \leq 2v - 4. \quad (10)$$

Demonstração: Do Lema 3.2, temos que

$$f \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Substituindo na fórmula de Euler do Teorema 3.4, obtemos

$$v - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \geq 2,$$

que se reduz a

$$\varepsilon \leq 2v - 4.$$

■

Agora, com o Lema 3.2 e o Corolário 3.7 é possível mostrar a não planaridade de $K_{3,3}$.

Teorema 3.8 *$K_{3,3}$ é não planar.*

Demonstração: A demonstração da não planaridade do $K_{3,3}$ será feita de duas formas.

1º forma: Utilizando o Lema 3.2.

Supondo que $K_{3,3}$ possui um mergulho planar, temos pela fórmula de Euler (Teorema 3.4) que seu número de faces é dado por

$$f = 2 - v + \varepsilon = 5,$$

já que $v(K_{3,3}) = 6$ e $\varepsilon(K_{3,3}) = 9$. Daí, segue que $4f = 20$ e $2\varepsilon = 12$. Assim, pelo Lema 3.2 temos $20 \leq 12$ (falso). Portanto, $K_{3,3}$ é não planar.

2º forma: Utilizando o Corolário 3.7.

Supondo que $K_{3,3}$ seja planar, e como $v(K_{3,3}) = 6$ e $\varepsilon(K_5) = 9$, temos pelo Corolário 3.7 que $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ (falso). Portanto, $K_{3,3}$ é não planar. ■

3.3 O TEOREMA DE KURATOWSKI

O teorema de Kuratowski, diferente das outras condições citadas na seção anterior, nos fornece uma caracterização para a planaridade de grafos, ou seja, nos dá uma condição necessária e suficiente para um grafo ser planar. Antes de enunciá-lo, faremos algumas definições.

Definição 3.2 Seja H um subgrafo do grafo G . Definimos uma relação \sim em $E(G) \setminus E(H)$ da seguinte maneira:

$$e_1 \sim e_2 \text{ se existe um caminho } w \text{ tal que}$$

- (i) A primeira e última aresta de w são e_1 e e_2 , respectivamente;
- (ii) w é internamente disjunto de H , ou seja, não existe vértices internos de w que são vértices de H .

Afirmamos que \sim é uma relação de equivalência em $E(G) \setminus E(H)$. Um subgrafo de $G - E(H)$ induzido por uma classe de equivalência obtida da relação \sim é chamado de ponte de H em G .

A prova que \sim é uma relação de equivalência é feita de forma análoga à demonstração da Proposição 2.1.

Exemplo 3.1 Seja H um subgrafo do grafo G , onde $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ (ver Figura 42). Assim, B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 são pontes de H em G , ou seja, são subgrafos de $G - E(H)$ induzidos por uma classe de equivalência da relação \sim .

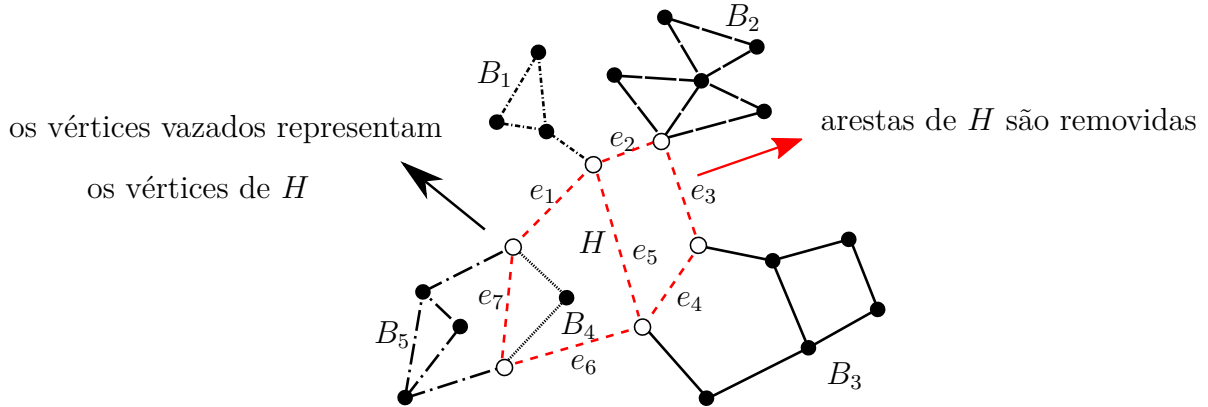


Figura 42 – Pontes de H em um grafo G

Observação 3.1 Segue da definição que se B é uma ponte de H , então B é um grafo conexo e, além disso, que quaisquer dois vértices de B são conectados por um caminho que é internamente disjunto de H . De fato, na Figura 43 temos em destaque as pontes B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 de H em G do Exemplo 3.1.

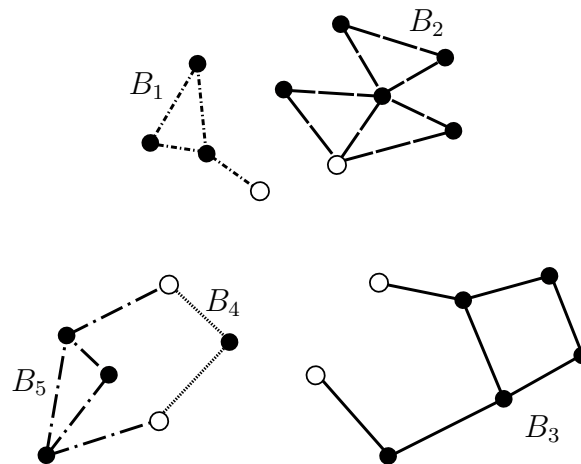


Figura 43 – Pontes de H em um grafo G

Observação 3.2 Quaisquer duas pontes distintas de H só podem possuir vértices em comum, se estes forem vértices de H . Na Figura 43, temos em destaque as pontes B_4 e B_5 de H do Exemplo 3.1 que possuem vértices em comum que também pertencem a H . As bolas vazadas representam estes vértices.

Definição 3.3 Seja B uma ponte de H . Chamamos de vértices de conexão de B em H , os vértices de B que estão em H , onde $V(B) \cap V(H) = V(B, H)$.

Na Figura 42, temos os vértices de conexão das pontes B_i em H representados pelas bolas vazadas. Já a figura 44 mostra uma variedade de pontes de um ciclo em um grafo; arestas de pontes diferentes são representadas por tipos diferentes de linhas e as bolas vazadas representam os vértices de conexão.

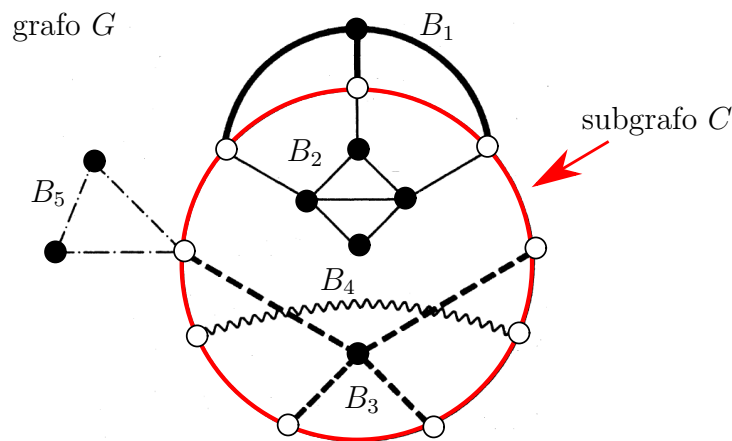


Figura 44 – Pontes de C em um grafo G

A seguir trataremos exclusivamente de pontes de subgrafos que sejam ciclos. Usaremos C para denotar estes subgrafos.

Definição 3.4 Uma ponte com k vértices de conexão é chamada de k -ponte.

Observação 3.3 Em um grafo conexo toda ponte tem ao menos um vértice de conexão.

Exemplo 3.2 Na Figura 44, temos que B_5 é 1-ponte; B_4 é 2-ponte; B_1 e B_2 são 3-ponte; e B_3 é 4-ponte.

Definição 3.5 Duas k -pontes que possuem os mesmos vértices de conexão são ditas pontes equivalentes. Neste caso, chamamos de pontes k -equivalentes.

Exemplo 3.3 Na Figura 43, B_4 e B_5 são pontes 2-equivalentes, assim como, na Figura 44, B_1 e B_2 são pontes 3-equivalentes.

Definição 3.6 Os vértices de conexão de uma k -ponte B com $k \geq 1$ particiona o subgrafo C em caminhos disjuntos por arestas, chamado de segmentos de B .

Definição 3.7 Dizemos que duas pontes B e B' se evitam, se todos os vértices de conexão de uma, estão em um único segmento da outra. Caso contrário, dizemos que as pontes se sobrepõem.

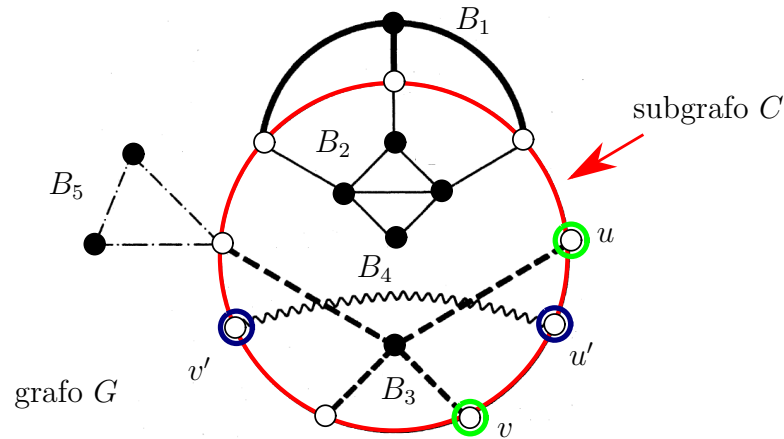


Figura 45 – Pontes de C em um grafo G

Exemplo 3.4 Na Figura 45, podemos concluir pela Definição 3.7 que as pontes B_3 e B_4 se sobrepõem. A Tabela 2 mostra a relação entre as cinco pontes de C em G .

ponte	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
B_1	se sobrepõem	se sobrepõem	se evitam	se evitam	se evitam
B_2	■	se sobrepõem	se evitam	se evitam	se evitam
B_3	■	■	se sobrepõem	se sobrepõem	se evitam
B_4	■	■	■	se evitam	se evitam
B_5	■	■	■	■	se evitam

Tabela 2 – A relação entre pontes representadas na Figura 45

Definição 3.8 Seja C um subgrafo de G . Duas pontes B e B' são distorcidas se existem quatro vértices distintos u, v, u' e v' em C , tais que u e v são vértices de conexão de B , u' e v' são vértices de conexão de B' e os quatro vértices aparecem em ordem cíclica u, u', v e v' em C .

Exemplo 3.5 Na Figura 45, temos que B_3 e B_4 são distorcidas enquanto que B_1 e B_2 não são distorcidas.

Teorema 3.9 Se duas pontes se sobrepõem, então ou elas são distorcidas ou são 3-equivalentes.

Demonstração: Suponha que as pontes B e B' se sobrepõem. Então, cada uma deve ter ao menos dois vértices de conexão. Além disso, se ou B ou B' for uma 2-ponte, então B e B' são distorcidas. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que B seja uma 2-ponte. Então, B possui dois vértices de conexão, u e v , que particiona o subgrafo C em dois segmentos. Como B e B' se sobrepõem, significa que os vértices de conexão de B' não podem estar em um único segmento gerado por B , portanto deve haver ao menos um vértice de conexão de B' , em cada um dos segmentos, chamemos tais vértices de u' e v' . Logo u, u', v e v' aparecem em ordem cíclica.

Podemos então assumir que B e B' possuem ao menos três vértices de conexão. Separemos em dois casos:

1º caso: B e B' não são pontes equivalentes.

Então B' tem um vértice de conexão u' entre dois vértices consecutivos de conexão, u e v , de B . Como B e B' se sobrepõem, algum vértice de conexão v' de B' não está no segmento de B conectando u e v . Portanto, u, u', v e v' aparecem em ordem cíclica, o que mostra que B e B' são distorcidas.

2º caso: B e B' são k -equivalentes, $k \geq 3$.

Se $k \geq 4$, então B e B' são distorcidas. De fato, como os vértices de conexão de B e B' são os mesmos, basta considerarmos quatro vértices de conexão consecutivos u_1, u_2, u_3 e u_4 . Considerando $u = u_1, v = u_3, u' = u_2$ e $v' = u_4$ temos que u, u', v e v' aparecem em ordem cíclica e, portanto, B e B' são distorcidas.

Se $k = 3$, então B e B' são 3-equivalentes.

■

Teorema 3.10 *Se uma ponte B tem três vértices de conexão v_1, v_2 e v_3 , então existe um vértice v_0 em $V(B) \setminus V(C)$ e três caminhos P_1, P_2 e P_3 em B ligando v_0 aos vértices v_1, v_2 e v_3 respectivamente, tais que, para $i \neq j$, P_i e P_j tem apenas o vértice v_0 em comum.*

Demonstração: Seja P um (v_1, v_2) -caminho em B , internamente disjunto de C . Então, P deve ter um vértice interno v , caso contrário, a ponte B deveria ser P , e não conteria o terceiro vértice v_3 . Seja Q um (v_3, v) -caminho em B , internamente disjunto a C , e denote por v_0 o primeiro vértice de Q em P . Denote por P_1 a (v_0, v_1) -seção de P^{-1} , por P_2 a (v_0, v_2) -seção de P , e por P_3 a (v_0, v_3) -seção de Q^{-1} . Dessa forma, P_1, P_2 e P_3 satisfazem as condições desejadas (ver Figura 46).

■

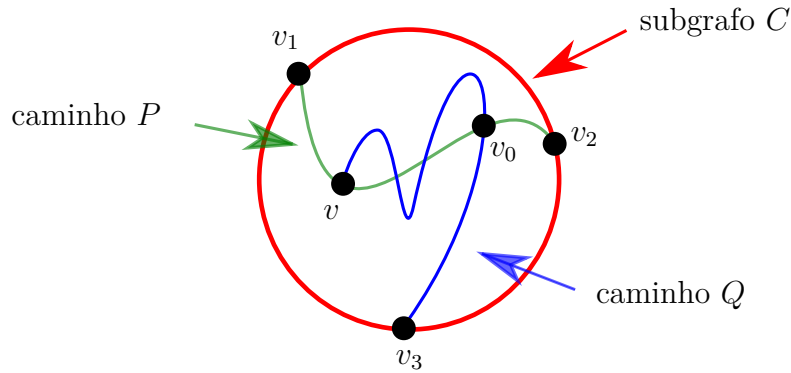


Figura 46 – Ilustração da demonstração do Teorema 3.10

A seguir, vamos considerar pontes em grafos planos. Suponha que G seja um grafo plano e que C seja um ciclo em G . Então, existe um mergulho planar de G no qual C é uma curva Jordan e cada aresta de $E(G) \setminus E(C)$ está contida em uma das duas regiões $Int C$ e $Ext C$. Segue-se que uma ponte de C está contida inteiramente em $Int C$ ou $Ext C$. Uma ponte contida em $Int C$ é chamada de uma ponte interna e uma ponte contida em $Ext C$, uma ponte externa. Na Figura 47, B_1 e B_3 são pontes internas e, B_2 e B_4 são pontes externas.

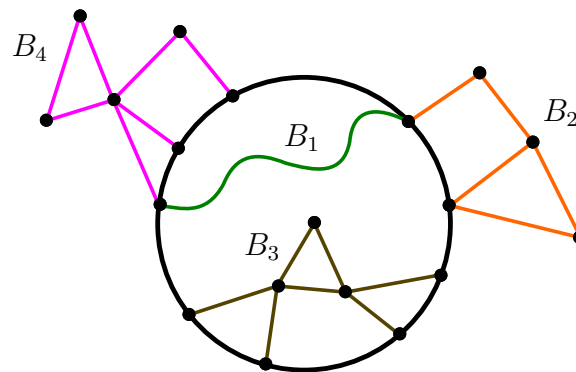


Figura 47 – Pontes internas e externas de um grafo plano

Teorema 3.11 *Em um grafo planar, pontes internas (externas) se evitam.*

Demonstração: Provaremos por contradição. Sejam B e B' duas pontes internas que se sobrepõem. Então, pelo Teorema 3.9, temos que elas devem ser pontes distorcidas ou 3-equivalentes. Analisemos separadamente cada um dos casos.

1º caso: B e B' são pontes distorcidas.

Por definição, existem vértices distintos $u, v \in B$ e $u', v' \in B'$, aparecendo na ordem cíclica u, u', v e v' em C . Seja P um (u, v) -caminho em B e P' um (u', v') -caminho em

B' , ambos internamente disjuntos de C . Os dois caminhos, P e P' , não podem ter um vértice interno em comum porque pertencem a diferentes pontes. Ao mesmo tempo, tanto P quanto P' devem estar contidos no $\text{Int } C$ porque B e B' são pontes internas. Pelo Teorema 3.1 (curva Jordan), G não pode ser um grafo planar, contrariando a hipótese. (ver Figura 48).

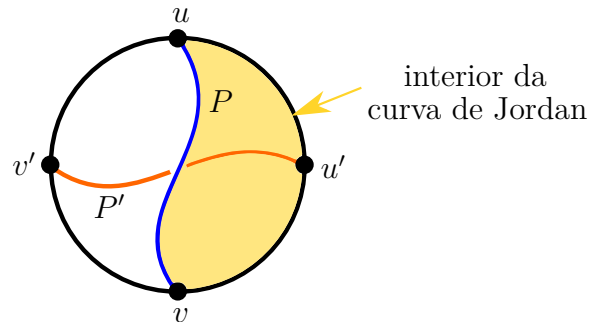


Figura 48 – Ilustração do 1º caso da demonstração do Teorema 3.11

2º caso: B e B' são 3-equivalentes.

Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ o conjunto de vértices de conexão em comum. Pelo Teorema 3.10, existe em B um vértice v_0 e três caminhos P_1 , P_2 e P_3 unindo v_0 a v_1 , v_2 e v_3 , respectivamente, tal que, para $i \neq j$, P_i e P_j tem apenas o vértice v_0 em comum. Analogamente, B' tem um vértice v'_0 e três caminhos P'_1 , P'_2 e P'_3 unindo v'_0 a v_1 , v_2 e v_3 , respectivamente, tal que, para $i \neq j$, P'_i e P'_j tem apenas o vértice v'_0 em comum (ver Figura 49). Note que os caminhos P_1 , P_2 e P_3 dividem $\text{Int } C$ em três regiões e

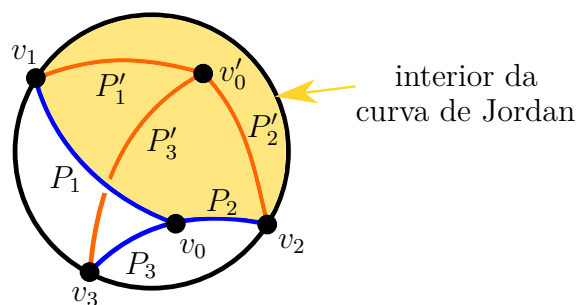


Figura 49 – Ilustração do 2º caso da demonstração do Teorema 3.11

v'_0 deve estar no interior de uma dessas regiões. Como apenas dois dos vértices v_1 , v_2 e v_3 podem estar na fronteira da região contendo v'_0 , podemos assumir, sem perda de generalidade, que v_3 não está na fronteira desta região. Pelo Teorema 3.1 (curva de Jordan), o caminho P'_3 deve intersectar P_1 , P_2 ou P_3 . Mas, como B e B' são pontes internas distintas, temos uma contradição.

Concluimos que as pontes internas evitam umas às outras. Da mesma forma, as pontes externas também se evitam entre si. ■

Definição 3.9 Seja G um grafo planar. Uma ponte interna B de um ciclo C em G é transferível se existe um mergulho planar \tilde{G} de G idêntico ao próprio G , exceto que B é uma ponte externa de C em \tilde{G} . O mergulho planar \tilde{G} é dito ser obtido a partir de G , transferindo B . A Figura 50 ilustra a transferência de uma ponte.

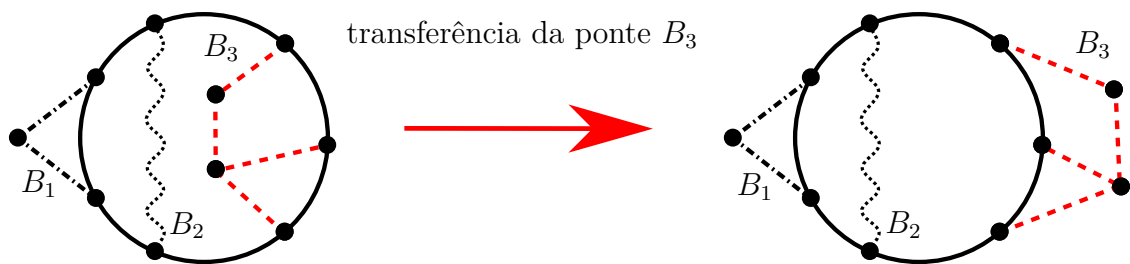


Figura 50 – Ilustração da transferência de uma ponte em um mergulho planar

Teorema 3.12 Em um grafo planar, uma ponte interna que evita toda ponte externa é transferível.

Demonstração: Seja B uma ponte interna que evita todas as pontes externas. Então, os vértices de conexão de B em C estão todos na fronteira de alguma face de G contida em $Ext C$. Então, B pode ser desenhado nesta face (ver Figura 51). ■

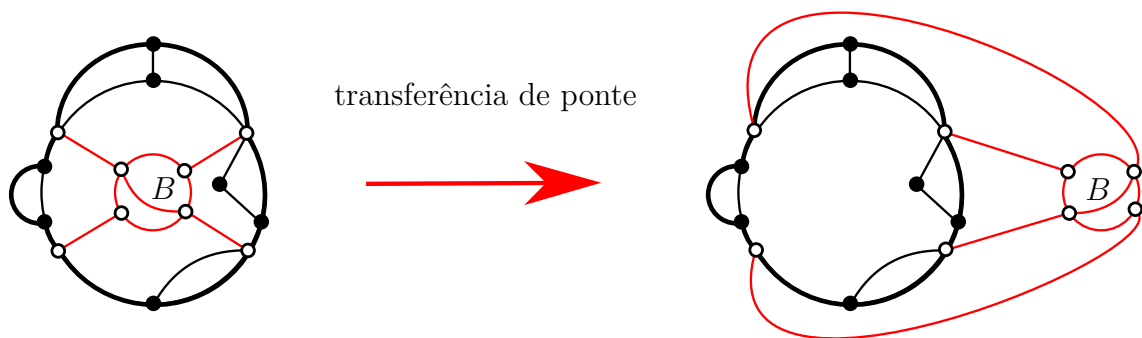


Figura 51 – Ilustração da transferência de uma ponte em um mergulho planar

No Teorema 3.2 e no Teorema 3.3 vimos que $K_{3,3}$ e K_5 são grafos não planares. No entanto, seus subgrafos próprios são planares como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.1 Todo subgrafo próprio de $K_{3,3}$ e de K_5 é planar.

Para caracterizar grafos planares pelo teorema de Kuratowski, necessitaremos ainda de mais alguns lemas que serão enunciados a seguir.

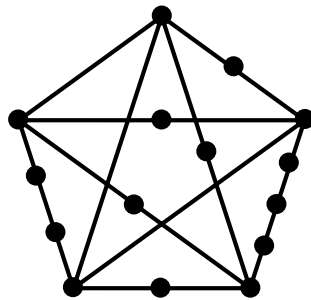
Lema 3.3 *Se G é planar, então todo subgrafo de G é planar.*

Demonstração: Basta considerarmos um mergulho planar \tilde{G} de G e um subgrafo H de G qualquer, e retirarmos todo $v \in V(\tilde{G}) \setminus V(H)$ e todo $e \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H})$. ■

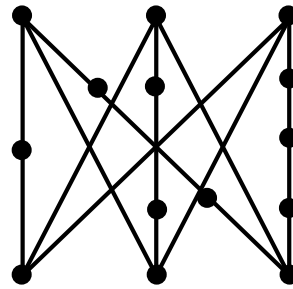
Lema 3.4 *Se G é não planar, então toda subdivisão de G é não planar.*

Demonstração: Seja G um grafo não planar. Suponhamos por contradição que exista uma subdivisão de G que seja planar. Então, consideremos um mergulho planar de tal subdivisão. Dessa forma, teríamos um mergulho planar de G , trocando os caminhos que tem extremidades em $V(G)$ e que não possui vértices internos em $V(G)$ por arestas com as mesmas extremidades, o que contraria a hipótese de G ser não planar. ■

Segue dos lemas acima que se G for planar então, G não pode conter nenhum subgrafo, nem tão pouco, uma subdivisão de K_5 nem de $K_{3,3}$ (ver Figura 52), já que são grafos não planares. O teorema de Kuratowski mostra que está condição necessária é também suficiente. Antes de provarmos o teorema de Kuratowski, precisamos de mais dois lemas.



subdivisão do K_5



subdivisão do $K_{3,3}$

Figura 52 – Exemplo de subdivisão dos grafos K_5 e $K_{3,3}$

Seja G um grafo com um subconjunto de articulação minimal $\{u, v\}$. Então, existem subgrafos com arestas disjuntas, G_1 e G_2 , tais que $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ e $G_1 \cup G_2 = G$. Considere tal separação de G em subgrafos. Em ambos, G_1 e G_2 , façamos a conexão de u e v por uma nova aresta e para obter grafos H_1 e H_2 , como na Figura 53. Então, $G = (H_1 \cup H_2) - e$. Dessa forma, temos $\varepsilon(H_i) < \varepsilon(G)$ para $i = 1, 2$.

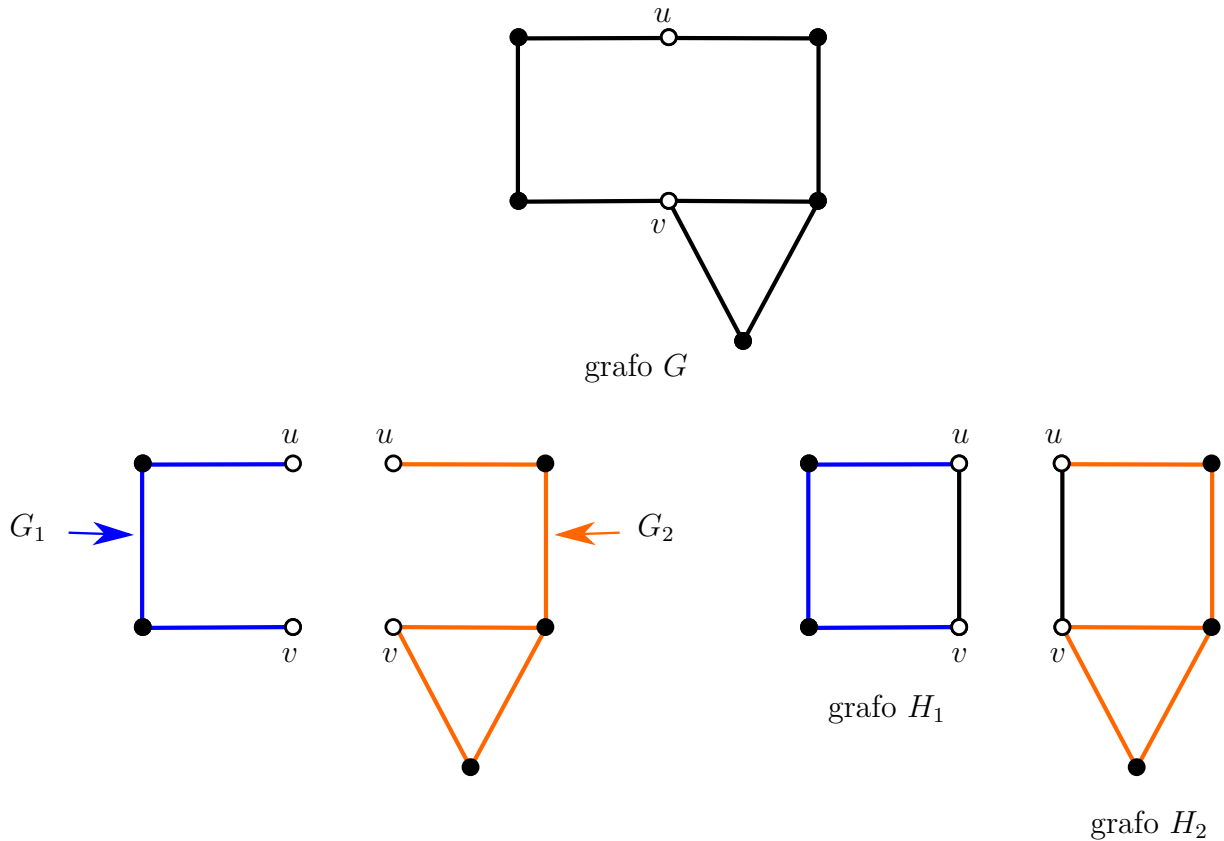


Figura 53 – Exemplo

Lema 3.5 *Se G é um grafo não planar, então ou H_1 ou H_2 também é não planar.*

Demonstração: Provaremos por contradição. Suponhamos que ambos os grafos, H_1 e H_2 sejam planares. Seja \tilde{H}_1 o mergulho planar de H_1 e seja f uma face de \tilde{H}_1 incidente a e . Se \tilde{H}_2 é um mergulho planar de H_2 em f , tal que \tilde{H}_1 e \tilde{H}_2 tem apenas os vértices u e v e a arestas e em comum, sendo $e = uv$, então $(\tilde{H}_1 \cup \tilde{H}_2) - e$ é um mergulho planar de G . O que contraria a hipótese de G ser não planar. ■

Lema 3.6 *Seja G um grafo conexo não planar que não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ e tem o menor número de arestas possível. Então G é 3-conexo.*

Demonstração: Provaremos por contradição. Suponhamos que G satisfaça as hipóteses do lema. Então G é um grafo minimal não planar, e portanto deve ser um bloco. Se G não é 3-conexo, então existe um subconjunto de articulação $\{u, v\}$ que desconexa o grafo G . Sejam H_1 e H_2 os grafos obtidos a partir desta desconexão do grafo G . Pelo Lema 3.5, ao menos um dos H_i , sem perda de generalidade, digamos H_1 , é não planar. Como $\varepsilon(H_1) < \varepsilon(G)$, H_1 deve conter um subgrafo K que é uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Além

disso, $K \not\subseteq G$, e a aresta e está em K . Seja P um (u, v) -caminho em $H_2 - e$. Então G contém o subgrafo $(K \cup P) - e$, que é uma subdivisão de K e, portanto, uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Isso contradiz o lema estabelecido. ■

Convenientemente, adotaremos a seguinte notação para provarmos o teorema de Kuratowski. Suponha que C seja um ciclo em um grafo planar. Então, podemos considerar duas orientações possíveis em C que são: sentido horário e sentido anti-horário. Para quaisquer dois vértices, u e v de C , podemos denotar por $C[u, v]$ o (u, v) -caminho que segue a orientação no sentido horário em C ; Analogamente, usamos os símbolos $C(u, v]$, $C[u, v)$ e $C(u, v)$ para denotarmos os caminhos $C[u, v] - u$, $C[u, v] - v$ e $C[u, v] - \{u, v\}$, respectivamente. Após todos os lemas e definições já explanados, partiremos para a demonstração do teorema de Kuratowski, que provou este belo teorema em 1930, fechando um problema aberto. Em 1954, Dirac e Schuster encontraram uma demonstração que era um pouco menor do que a prova original. É esta demonstração que descreveremos a seguir.

Teorema 3.13 (Kuratowski) *Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.*

Demonstração: (\implies) A partir dos Lemas 3.3 e 3.4 temos a condição necessária.

(\impliedby) Provaremos a suficiência por contradição. Se possível, escolha um grafo não planar G que não contenha subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ e que tenha o menor número de arestas possível. Do Lema 3.6, segue que G é 3-conexo. Então, G deve ser um grafo não planar minimal.

Sejam uv uma aresta de G e H um mergulho planar do grafo planar $G - \{uv\}$. Como G é 3-conexo, então H é 2-conexo e, pelo Corolário 2.4, u e v estão contidos em um mesmo ciclo de H . Escolha um ciclo C de H que contenha u e v tal que o número de arestas em $\text{int } C$ seja o maior possível.

Como H é 2-conexo, cada ponte de C em H deve ter ao menos dois vértices de conexão. Então, toda ponte externa de C deve ser 2-ponte que sobrepõe uv pois, se tivéssemos alguma ponte externa sendo k -ponte com $k \geq 3$ ou uma 2-ponte que evita uv , então existiria um ciclo C' contendo u e v com mais arestas em seu interior que C , contradizendo a escolha de C (Estes casos estão ilustrados na Figura 54 pelas linhas coloridas).

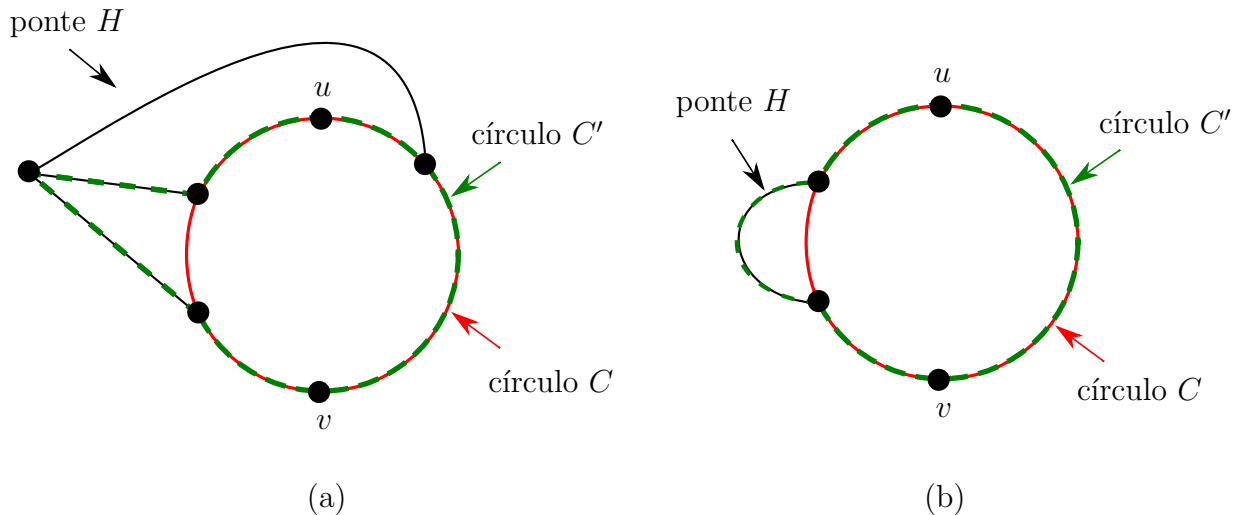


Figura 54 – (a) ponte H é uma 3-ponte; (b) ponte H é uma 2-ponte que evita uv

Logo, toda ponte externa de C em H deve ser uma aresta simples pois se existe uma 2-ponte com vértices de conexão x e y tendo um terceiro vértice, o conjunto $\{x, y\}$ seria um subconjunto de articulação de G com dois vértices, o que contraria a hipótese de G ser 3-conexo.

Pelo Teorema 3.11, não existem pontes internas que se sobrepõem. Além disso, deve existir uma ponte interna que sobrepõe uv pois, se não existisse tal ponte poderíamos acrescentar uv neste mergulho planar de forma que G seria um grafo planar, o que contraria a hipótese. Assim, cada ponte interna que sobrepõe uv é distorcida a alguma ponte externa. Caso contrário, pelo Teorema 3.12, tais pontes poderiam ser transferidas ao $ext C$ (uma por uma), e então a aresta uv poderia ser desenhada no $Int C$, obtendo um mergulho planar de G , o que contraria a hipótese de G ser não planar. Portanto, existe uma ponte interna B que tanto é distorcida a uv como é distorcida a alguma ponte externa xy .

Surgem então dois casos a serem considerados. Dependendo se B possui um vértice de conexão diferente de u , v , x e w ou não.

Caso 1: B tem um vértice de conexão diferente de u , v , x e y .

Podemos escolher a notação que B tem um vértice de conexão v_1 em $C(x, u)$ (ver Figura 55). Consideremos dois subcasos dependendo se B tem um vértice de conexão em $C(y, v)$ ou não.

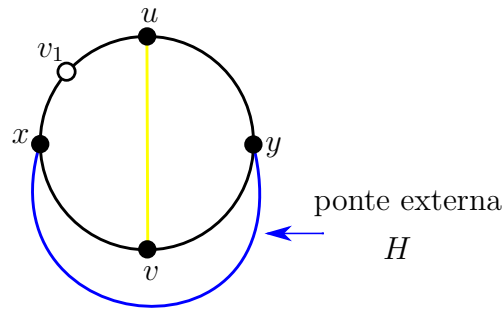


Figura 55 – Ilustração do Caso 1 da demonstração do Teorema 3.13

Caso 1a: B tem um vértice de conexão v_2 em $C(y, v)$. Neste caso, existe um (v_1, v_2) -caminho P em B que é internamente disjunto a C . Então, $(C \cup P) + \{uv, xy\}$ é uma subdivisão de $K_{3,3}$ (ver Figura 56), em G , o que é uma contradição .

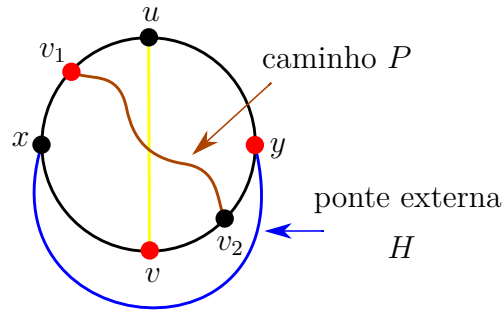


Figura 56 – Ilustração do Caso 1a da demonstração do Teorema 3.13

Caso 1b: B não tem vértice de conexão em $C(y, v)$. Como B é distorcida a uv e a xy deve ter vértice de conexão v_2 em $C(u, y]$ e v_3 em $C[v, x)$. Então, B tem três vértices de conexão v_1, v_2 e v_3 . Pelo Teorema 3.10, existe um vértice v_0 em $V(B) \setminus V(C)$ e três caminhos P_1, P_2 e P_3 em B unindo v_0 a v_1, v_2 e v_3 respectivamente, tal que, $i \neq j, P_i$ e P_j têm apenas o vértice v_0 em comum (ver Figura 57). Então, $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3) + \{uv, xy\}$ contém uma subdivisão de $K_{3,3}$, o que é uma contradição.

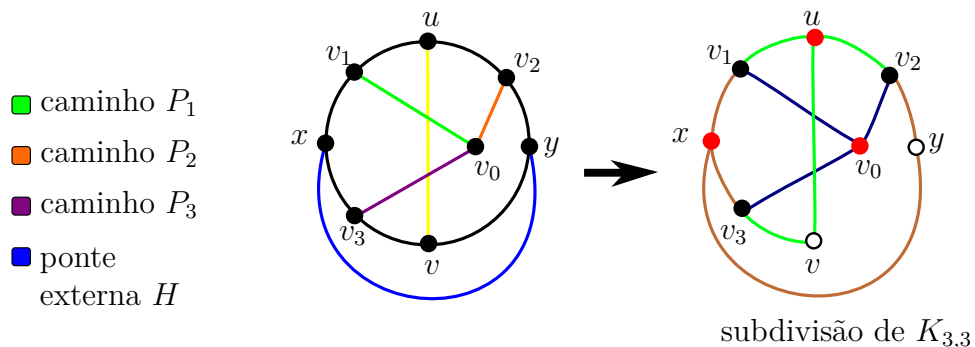


Figura 57 – Ilustração do Caso 1b da demonstração do Teorema 3.13

Caso 2: B não contém vértice de conexão diferente de u, v, x e y . Como B é distorcida a ambas arestas, uv e xy , segue que u, v, x e y devem ser todos vértices de conexão de B . Portanto, existe um (u, v) -caminho P e (x, y) -caminho Q em B tal que:

- (i) P e Q são internamente disjuntos de C ; e
- (ii) $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$.

Consideremos dois subcasos, dependendo se P e Q tem um ou mais vértices em comum.

Caso 2a: $|V(P) \cap V(Q)| = 1$. Neste caso, $(C \cup P \cup Q) + \{xy, uv\}$ é uma subdivisão de K_5 em G (ver Figura 58), o que é uma contradição.

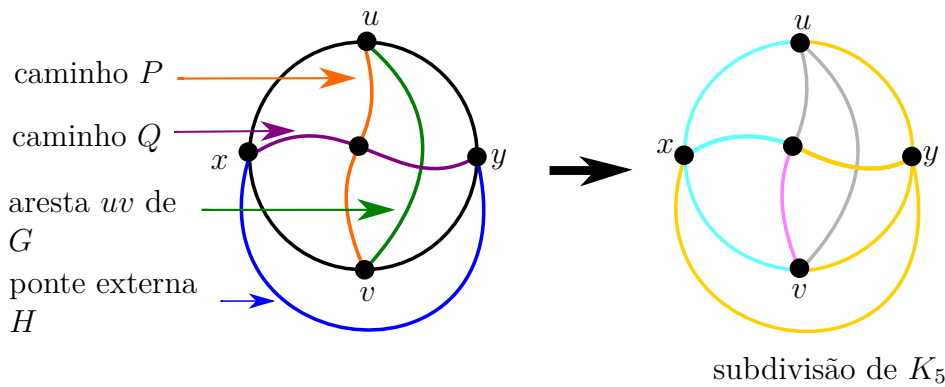


Figura 58 – Ilustração do Caso 2a da demonstração do Teorema 3.13

Caso 2b: $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$. Sejam u' e v' o primeiro e o último vértice de P em G e, sejam P_1 e P_2 denotados por (u, u') - e (v, v') -seção de P . Então, $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup Q) + \{uv, xy\}$ contém uma subdivisão de $K_{3,3}$ em G (ver Figura 59), o que é uma contradição.

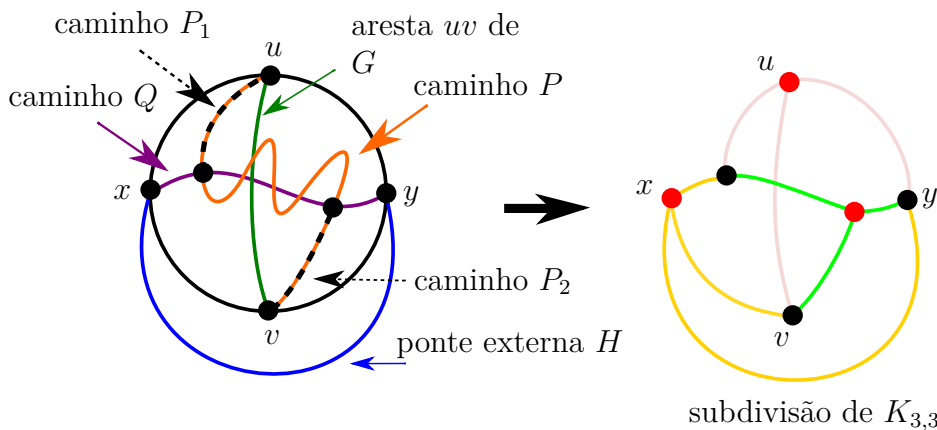


Figura 59 – Ilustração do Caso 2b da demonstração do Teorema 3.13

Assim, todos os casos possíveis levam a uma contradição, o que prova o teorema. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria dos grafos, nos últimos tempos, vem sendo largamente estudada e escrita por diversos alunos em seus trabalhos de conclusão de curso de graduação, mestrado e até mesmo doutorado. Devido a sua ramificação em outras áreas de conhecimento, como engenharia elétrica ou ciência da computação, temos vários trabalhos desenvolvidos relacionados à esta teoria. Podemos citar como exemplo a ideia de conectividade de um grafo, bem como, o problema de coloração de mapas, que são temas que possuem uma aplicabilidade muito ampla porém, já bastante explorados em outros trabalhos.

Dessa forma, o objetivo com este trabalho foi trazer uma temática da teoria dos grafos que ainda não tivesse sido amplamente valorizada e que, ao mesmo tempo, envolvesse uma matemática fina e elegante em seus lemas e teoremas. Com isso, trazemos como foco temático para este trabalho, o estudo sobre planaridade de grafos enfatizando matematicamente a demonstração do teorema de Kuratowski, que nos fornece uma classificação para um grafo ser planar. Durante a explanação deste trabalho, ou seja, desde de conceitos básicos até o teorema de Kuratowski, procuramos abusar no uso da representação gráfica de grafos no intuito de facilitar na compreensão dos conceitos e definições, como também das demonstrações dos lemas e teoremas mostrados aqui.

A aplicabilidade do conceito de planaridade é vista em problemas de diversas áreas de conhecimento. Durante nossa pesquisa sobre o assunto, encontramos uma tese de doutorado na área da engenharia elétrica que tratava do uso de planaridade de grafos em placas de circuitos elétricos. Pensamos então, em trazer uma proposta de atividade envolvendo planaridade de grafos e que pudesse ser abordada com os alunos do ensino médio da educação básica. Infelizmente, não foi possível entregarmos essa proposta na base do trabalho porém, no apêndice A, sugerimos uma aplicação da planaridade de grafos nos sólidos de Platão.

Concluimos, tendo a clareza que o referencial teórico abordado nesse trabalho nos propiciará desenvolvermos junto aos alunos da educação básica vários trabalhos e pesquisas ligadas a teoria dos grafos. Esperamos também, que este trabalho motive e seja objeto de estudo para outros profissionais da educação que queiram também fazer uso desta teoria, que possui uma vasta aplicabilidade e que nos permite, mostrar uma matemática vista por uma ótica bastante motivadora.

Apêndice A – GRAFOS PLATÔNICOS

A proposta deste apêndice é sugerir uma aplicação de planaridade da teoria dos grafos na educação básica. Sabemos que o estudo dos poliedros convexos regulares, conhecidos como sólidos de Platão (sólidos platônicos), é um conteúdo abordado no ensino médio. Em (NETO, 2013, p.385-387), através do lema ¹ (que relaciona as arestas e faces de um poliedro) e da Fórmula de Euler (Teorema 3.4) é feita a demonstração de que todo poliedro convexo regular é um tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro ou icosaedro. Como primeira atividade, sugerimos que o professor construa essa teoria com seus alunos desenvolvendo neles inicialmente a compreensão da demonstração e, posteriormente, desafiando-os para que os mesmos tentem construí-la. A seguir, temos a definição formal se sólidos platônicos.

Definição A.1 *Os Sólidos Platônicos (em homenagem ao filósofo Platão) são figuras tridimensionais nas quais todas as faces são polígonos regulares congruentes, tal que cada vértice possui o mesmo número de arestas incidentes.*

Observação A.1 *Os antigos gregos associavam a cada um dos sólidos de Platão um elemento natural. O tetraedro representava o fogo, o hexaedro a terra, o octaedro o ar, o dodecaedro o cosmos e o icosaedro a água.*

Faz-se necessário, antes da definição de grafos platônicos definirmos um grafo. Assim, sugerimos como segunda atividade que se apresente de forma empírica a definição de grafos aos alunos e, em seguida, relacione com as representações das definições a seguir.

Definição A.2 *Um grafo é dito ser cíclico, quando possui um único caminho circular que contém todas as suas arestas.*

Definição A.3 *Um grafo é dito ser platônico se é constituído por um único vértice ou, tendo mais que uma aresta, é conexo, planar, regular e todas as faces têm o mesmo grau.*

Observação A.2 *São grafos platônicos, o grafo constituído por um vértice isolado (K_1), os grafos cíclicos (que correspondem aos polígonos regulares) e os grafos formados pelas arestas dos cinco sólidos de Platão.*

¹ Se um poliedro tem A arestas e F_k faces de k lados, então $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$ (NETO, 2013, p.375)

Nesse momento, já com a ideia empírica de grafo, pode-se fazer um novo olhar para a demonstração da existência de apenas cinco sólidos platônicos. Em (NETO, 2013), temos esse “olhar” através do teorema enunciado a seguir.

Teorema A.1 *Existem somente cinco grafos platônicos distintos de K_1 e dos grafos cíclicos.*

Demonstração: Seja G um grafo simples, conexo, planar e k -regular, onde cada face tem grau f . Uma vez que $G \neq K_1$, podemos concluir que $k > 0$ e, dado que $\varepsilon(G) > 1$, $k > 1$. Adicionalmente, uma vez que G não é um grafo cíclico, conclui-se que $k > 2$, ou seja, $k \geq 3$ e $f \geq 3$. Logo,

$$f|F_0(G)| = 2\varepsilon(G) = dv(G) \Rightarrow \varepsilon(G) = \frac{dv(G)}{2},$$

e $|F_0(G)| = \frac{2\varepsilon(G)}{f}$. Como consequência, uma vez que G é plano, por aplicação da Fórmula de Euler, obtém-se

$$\frac{2\varepsilon(G)}{f} = \frac{dv(G)}{2} - v(G) + 2 \Leftrightarrow \frac{dv(G)}{f} = \frac{dv(G)}{2} - v(G) + 2 \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow v(G) \left(\frac{k}{f} + 1 - \frac{k}{2} \right) = 2 \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow v(G) (2k + 2f - fk) = 4f \quad (13)$$

Da igualdade (13) decorre a inequação

$$2k + 2f - fk > 0 \Leftrightarrow -2k - 2f + fk + 4 < 4 \Leftrightarrow (f - 2)(k - 2) < 4,$$

que, para $f \geq 3$ e $k \geq 3$, apresenta como soluções apenas os pares de valores (k, f) : $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ e $(5, 3)$, aos quais correspondem, respectivamente, o tetraedro, hexaedro, dodecaedro, octaedro e icosaedro. ■

Como atividade final, propõe-se solicitar aos alunos que apresentem um mergulho planar de cada sólido platônico iniciando pelo tetraedro. Na Figura 60, temos o mergulho planar de cada sólido platônico.

Observação A.3 *Os sólidos de Platão são considerados os cinco grafos platônicos não triviais.*

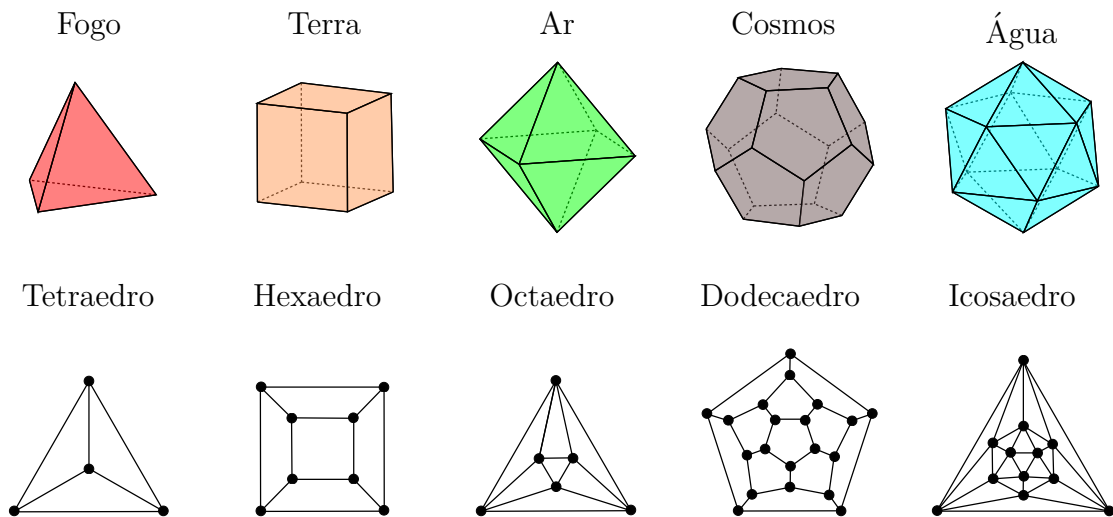


Figura 60 – Grafos platônicos não triviais

REFERÊNCIAS²

- APPEL K.L., H. W. very planar map is four-colorable. In: _____. *Introdução à Análise Combinatória*. [S.l.]: Bull. Am. Math. Soc. 82, 1976. p. 711–712. Citado na página 55.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. [S.l.]: New York: Elsevier North Holland Inc., 1979. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graduate Texts in Mathematics*. [S.l.]: New York: Springer, 2008. Citado na página 14.
- CARDOSO DOMINGOS MOREIRA; SZYMANSKI, J. e. R. M. *Matemática Discreta: Combinatória, Teoria dos Grafos, Algoritmos*. [S.l.]: Copyright © by Escolar Editora, 2009. Citado na página 14.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. 1ª. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 13, 81 e 82.
- NETTO, P. O. B. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 4ª. ed. [S.l.]: São Paulo: Edgard Blucher, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 17 e 18.
- NETTO PAULO OSWALDO; JURKIEWICZ, S. B. *Grafos: Introdução e prática*. [S.l.]: São Paulo: Blucher, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- SAMPAIO, J. C. V. *Quatro Cores e Matemática*. [S.l.]: Bahia: Universidade Federal da Bahia, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.
- SANTOS JOSÉ PLÍNIO O.; MELLO, M. P. e. M. I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. 4ª. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 54.
- SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta: uma introdução*. 2ª. ed. [S.l.]: São Paulo: Cengage Learning, 2015. Citado na página 15.
- SNEDDON, K. K. H. F. *Yearbook of the Royal Society of Edinburgh*. [S.l.]: Royal Society of Edinburgh, 1982. Citado na página 14.

² DE ACORDO COM A ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6023.