UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

Cristiano de Souza dos Santos

Problemas de Otimização para o Ensino Básico via Desigualdades de Médias e de Cauchy-Schwarz

Rio de Janeiro
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Cristiano de Souza dos Santos

Problemas de Otimização para o Ensino Básico via Desigualdades de Médias e Cauchy-Schwarz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro
2017

Cristiano de Souza dos Santos

Problemas de Otimização para o Ensino Básico via Desigualdades de Médias e Cauchy-Schwarz

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 12/09/17

Nei Carlos dos Rocha

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientador/ Presidente da Banca Examinadora

Profª. Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática – UFRJ

Profª. Dra. Marisa Beatriz Bezerra Leal
Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Dr. Helvecio Rubens Crippa
Instituto de Matemática – UERJ

Rio de Janeiro
2017

CIP - Catalogação na Publicação

S237p

Santos, Cristiano
Problemas de Otimização para o Ensino Básico via Desigualdades de Médias e Cauchy-Schwarz / Cristiano Santos. -- Rio de Janeiro, 2017.
58 f.

Orientadora: Nei Rocha .
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2017.

1. Otimização. . 2. Médias Matemáticas. 3. Desigualdades das Médias . 4. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. 5. Multiplicadores de Lagrange. I. Rocha , Nei, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Aos meus filhos Thalles Daniel, Thiago Camilo e Thomás, minha mãe Sueli e aos professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro que ministraram ótimas aulas e aos colegas de turma do PROFMAT/UFRJ.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e força e disposição para superar as dificuldades e realizar este trabalho.

A esta universidade, ao seu corpo docente, à direção e à administração, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e na ética aqui presente.

À minha família, pelo apoio. Especialmente, minha mãe Sueli de Souza dos Santos e meu pai Cidenil dos Santos (*in memoriam*) pelo amor, incentivo, apoio incondicional e torcida pelas minhas vitórias em vários momentos diferentes da minha vida.

Aos meus colegas de classe, que muito ajudaram em várias horas de estudo e troca de informações.

À Valéria Oliveira, pela parceria e paciência fundamental para que eu concluísse esta etapa de minha jornada acadêmica.

Ao meu orientador, Professor Dr Nei Rocha dos Santos, pelo empenho e dedicação, pela paciência com as minhas dificuldades, pela firmeza na condução e construção desse trabalho.

Agradeço a todos os professores por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de *formação profissional*, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas me feito aprender. A palavra *mestre* nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais, sem nominar, terão os meus eternos agradecimentos.

Meus agradecimentos para todos os amigos, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que certamente continuarão presentes em minha vida.

Enfim, a todos que participaram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Meu muito obrigado!

RESUMO

Muito se tem debatido, atualmente, a respeito de um ensino de Matemática mais atraente e envolvente, que desperte no aluno o gosto pela real aprendizagem da Matemática. Dentro deste contexto, os problemas matemáticos que envolvem otimização têm um grande interesse prático e são extremamente aplicáveis ao cotidiano. Contudo, a principal ferramenta usada nas soluções advém do Cálculo Diferencial, tornando tais questões inacessíveis aos alunos da Educação Básica. O objetivo principal deste trabalho é apresentar, de modo sucinto, que as desigualdades das Médias e de Cauchy-Schwarz podem ser, na Educação Básica, ferramentas poderosas e práticas para iniciar modelagens de situações que envolvem Otimização, tornando, assim, acessíveis aos alunos e professores deste segmento. Foi utilizado um rigor formal moderado, compatível com o escalão etário dos alunos, de forma que conceitos e resultados sejam transmitidos de forma precisa, ainda que não necessariamente em linguagem formal.

Palavras-chave: Médias Matemáticas, Teorema de Dirichlet, Desigualdades das Médias; Desigualdade de Cauchy-Schwarz, Otimização.

ABSTRACT

Much has been debated on a more attractive and engaging way of teaching Mathematics, which, in turn , would arise interest for the real learning of this subject. Within this context, questions concerning Optimization have great importance and are extremely applicable. However, the main tool used to find solutions comes from Differential Calculus, making such questions inaccessible or too difficult to be understood by the average basic learners. The main objective of this study is to show, in a succinct way, that Cauchy- Schwartz and the Means Inequalities can be powerful and practical tools to start modeling situations that involve Optimization, making this subject accessible to students and teachers from Basic Education.

Keywords: Averages, Dirichlet's Theorem, Means Inequalities, Cauchy-Schwarz's Inequalities, Optimization

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No final do primeiro semestre do curso do Mestrado, um amigo e professor de Matemática que conhecia meu trabalho com Desigualdades de Médias e Otimização, sugeriu-me que usasse esses temas para compor minha Dissertação do Mestrado. Por outro lado, após exposição aos conteúdos de Matemática Discreta ministrada pelo professor Nei Rocha, resolvi procurá-lo para saber se ele estaria disposto a me orientar na realização desta tarefa. A recomendação da Coordenação Nacional do ProfMat é que o trabalho de conclusão seja um material que possa servir para a melhoria do Ensino Básico da Matemática. Então, comecei a escrever um trabalho que, em princípio, nasce da minha experiência em sala de aula, onde passei alguns anos resolvendo e pesquisando questões de concursos para melhor preparar meus alunos.

Inicialmente, façamos uma reflexão sobre o que diz os PCNs com relação ao sentido do aprendizado na área:

> A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competência se dos valores desenvolvidos.
> (BRASIL, 1996, p.6).

Neste cenário, interpretamos que um aluno inserido no Ensino Médio deve ser capaz de compreender e interagir com a aprendizagem de um novo conteúdo. Ou seja, é a aprendizagem por excelência: a capacidade de explicar, de apreender, compreender, de enfrentar criticamente novas situações. Contudo, como podemos estimular ou avaliar habilidades cognitivas fora do contexto cultural?

O aprendizado deve ser *estimulado* com fatos e situações do mundo atual. Neste eixo de pensamento, buscamos a Otimização como um assunto real, prático e dinâmico para que o professor de Matemática consiga desenvolver no seu aluno a curiosidade e em seguida o gosto pela matéria. Contudo, as soluções gerais dos problemas de Otimização envolvem frequentemente o Cálculo Diferencial e Integral e, no Ensino Básico, os problemas de Otimização ficam limitados na parte dedicada às Funções Quadráticas. O presente estudo defende a tese de que os temas Médias e Desigualdades, assuntos de pouca abrangência e nada contextualizados, podem ser uma boa ferramenta para se tratar Otimização no Ensino Básico.

Para tanto, o trabalho foi dividido em três capítulos. O Capítulo I foi destinado à definição de como são construídas de forma geral as principais médias na Matemática com algumas situações de aplicações importantes, tais como o Princípio das Gavetas de Dirichlet. O Capítulo II é destinado ao estudo das Desigualdades das Médias e suas demonstrações por meio de uma linguagem mais acessível, e estabelecimento de relações entre as desigualdades. Ainda no Capítulo II coube a parte da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, sua demonstração e um Lema importante, cuja demonstração advém da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. O Capítulo III, ponto central de nosso trabalho, é onde desenvolvemos a Otimização via Desigualdades de Médias e Cauchy-Schwarz, por meio da resolução de diversas questões pesquisadas e selecionadas de diversos concursos militares e civis, concursos estes, em sua maioria, aplicados a alunos da Educação Básica, mostrando que as mesmas oferecem uma oportunidade ao professor de lidar com algumas classes de problemas que recaiam em restrições do tipo tratadas neste capítulo. Faremos neste capítulo, também, uma breve discussão sobre os Multiplicadores de Lagrange, o método usualmente empregado para resolução de problemas gerais (usualmente tratados no Ensino Superior) de Otimização de Funções Contínuas sujeitas a restrições. Somos da opinião de que as aplicações aqui inseridas, restritas a condições de estruturas de médias, podem ser tratadas sem dificuldades a partir do nono ano do Ensino Fundamental, prática esta que já realizo com turmas voltadas para concurso ao longo de 16 anos trabalhando em colégios tradicionais do Rio de Janeiro.

Encerrando esta parte, gostaria de citar Ubiratan D`Ambrósio, em *Educação Matemática da Teoria à Prática*, livro que li na graduação por indicação de um mestre que tive e que norteou minha prática educacional, na sua interpretação para Matemática e Educação:

> Vejo a disciplina Matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.
> (D'AMBRÓSIO, 2007, p.7)

> Vejo educação como uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo gerada por esse mesmos grupos culturais, com a finalidade de se manterem com tal e de avançarem na satisfação de necessidades de sobrevivências e de transcendência.
> (D'AMBRÓSIO, 2007, p.7)

Ainda de acordo com o autor:

> Cada indivíduo tem sua prática: Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém , que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiência é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo, aqueles indivíduos que

> são considerados ‘o professor nato’. Mas sem dúvida o racional, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à pratica docente. E à medida que vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, novamente solicita e alimenta teorizações, que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre teoria e prática é o que chamamos de pesquisa.
> (D'AMBRÓSIO, 2007, p.7)

Elon Lages Lima, em suas primeiras páginas no Curso de Análise vol. 1, diz que:

> A matemática não se aprende passivamente. Os exercícios ensinam a usar conceitos e proposições, desfazem certos mal-entendidos, ajudam a fixar na mente ideias novas, dão oportunidades para explorar as fronteiras da validez das teorias expostas no texto e reconhecer a necessidade das hipóteses, apresentam aplicações dos teoremas demonstrados e informam o leitor sobre resultados adicionais, alguns dos quais não figuram no texto apenas por uma questão de gosto.
> (LIMA, 2004, p. 5)

É acreditando fielmente na ideia de que os exercícios fornecem ao discente o ensejo de caminhar mais autonomamente e, assim, ir ganhando independência, para o desenvolvimento da capacidade de explicar, de apreender, compreender, de enfrentar as novas situações, que resolvemos no nosso trabalho uma bateria de exercícios, obviamente não exaustiva, que acreditamos ser de grande valia para quem desejar usar este material para a abordagem do tema.

CAPÍTULO 1 – ESTUDO DAS MÉDIAS E SUAS DESIGUALDADES

1.1 Um pouco de Desigualdades e Médias na História da Matemática

A necessidade de o homem em fazer ordenação, medições e até mesmo aproximações fez com que surgisse um conceito importantíssimo na Matemática: o conceito de desigualdade. Com isso, as mesmas passaram a ter um papel de grande importância na evolução da Ciência Matemática. Grandes nomes como Euclides, Arquimedes, Tartaglia, Newton e Cauchy, entre outros, resolveram muitos problemas usando desigualdades.

Em especial, Arquitas de Torento, matemático, astrônomo, músico e político, nascido no ano de 428 a.C, em Tarento, sul da Itália e morto no ano de 365 a.C. Representante legítimo da escola pitagórica e perpetuador das ideias de Platão, Arquitas de Torento foi responsável direto por mudanças fundamentais ocorridas na Matemática no quinto ano antes de Cristo.

Ele acreditava ser o número era o que havia de mais importante na vida e na Matemática, mas previu que, no futuro, a Geometria teria um papel de destaque. Escreveu sobre a utilização das médias aritmética e geométrica, sobre métodos interativos para determinação de raízes quadradas e, também, sobre geometria analítica, além de introduzir a média harmônica na música. Defendia o ensino da música, dentro de um núcleo educacional denominado *Quadrivium*, formado pela Aritmética, Geometria, Música e Astronomia. Suas ideias contribuíram para tornar a Matemática uma matéria básica na educação atual.

Por outro lado, os símbolos > (maior que) e < (menor que) foram introduzidos bem depois por Thomaz Harriot (1560-1621), renomado matemático algebrista e astrônomo inglês nascido em Oxford, fundador da escola inglesa de álgebra e introdutor de vários símbolos e notações empregados em álgebra ainda hoje. Seus trabalhos contribuíram para o desenvolvimento da análise algébrica.

1.2 Média

Quem nunca se preocupou em seus estudos, seja na Educação Básica ou no Nível Superior, com suas médias de notas, seja para sua satisfação, satisfação de seus pais ou até mesmo sua aprovação? Quem nunca ouviu falar do Índice de Preços ao Consumidor (IPC), calculado como uma média ponderada dos preços de alguns produtos que se encontram em uma lista de itens básicos de consumo (que pode variar entre os países) e representa o custo de vida num período e numa região definida? Ou se você assiste ao noticiário, deve sempre ouvir sobre o Índice Dow Jones, da Bolsa de Nova York, que é a soma das trinta grandes ações industriais, cujos negócios passam pela Bolsa de Nova York, e divididas por um divisor: o divisor Dow. O divisor inicialmente usado foi o número de empresas, de forma que o índice DJIA era a simples média aritmética dos preços das ações. Hoje, após muitos ajustes, o divisor tem um valor menor que um, ou seja, o valor do índice é maior que a soma dos preços das ações das empresas componentes. Como vemos, o assunto *Média* não está vinculado unicamente ao estudioso da matemática, mas, sim, a todos os indivíduos, pois é um assunto que está a todo tempo nos noticiários e na vida dos seres humanos, em suas relações sociais, como também na organização da sociedade.

Tal assunto é visto de maneira metódica, pouco abrangente e nada contextualizada no Ensino Básico. Nossa proposta é descrever de que forma o conceito das médias nasce como uma forma de preservar determinadas operações com os dados observados, ao mesmo tempo em que o faz representar esse mesmo conjunto de dados como medida síntese. Com isso esperamos levar os professores deste segmento a uma reflexão sobre o significado real das médias na Matemática, e sua real aplicação nas diversas situações do cotidiano. Vale ressaltar que a palavra média vem do latim, *medium*, que significa posição intermediária entre dois extremos. A definição a seguir estabelece como são construídas de forma geral todas as médias na Matemática.

DEFINIÇÃO DE MÉDIA: Considere uma sequência finita de números reais $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e seja $\phi(a_1, a_2, ..., a_n)$ uma função de domínio R^n (ou R_+^n, quando necessário) e contradomínio R (ou R_+), ou seja, ϕ representa uma operação sobre os membros da sequência. Uma média dos elementos da sequência com respeito à operação $\phi(a_1, a_2, ..., a_n)$ é um número real $\bar{a}$ tal que

$$\phi(a_1, a_2, ..., a_n) = \phi(\bar{a}, \bar{a}, ..., \bar{a})$$

e $min\{a_i\} \leq \bar{a} \leq max\{a_i\}$.

Se os números são iguais, então a média é igual a estes números.

1.3 Média Aritmética (A)

Se a operação for a soma dos elementos da sequência, dar-se-á o nome de Média Aritmética. Ou seja, dados $n > 1$ e uma sequência de números reais $(a_1, a_2, ..., a_n)$, sua Média Aritmética, denotada por $\bar{x} = A$, é tal que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \bar{x} + \bar{x} + \ldots + \bar{x} = n\bar{x}$$

$$\bar{x} = A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

A propriedade das médias aritméticas a seguir nos possibilita resolver vários problemas de existência de propriedades pelo chamado Princípio de Dirichlet.

Proposição 1: Se a média aritmética dos números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é igual a $\bar{x}$, pelo menos um os números é maior ou igual a $\bar{x}$.

Demonstração:

Suponha por contradição que

$$\begin{cases} a_1 < \bar{x} \\ a_2 < \bar{x} \\ a_3 < \bar{x} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n < \bar{x} \end{cases}$$

Logo,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \bar{x} + \bar{x} + \ldots + \bar{x} = n.\bar{x}$$

Dividindo os membros da equação acima por *n*, temos:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots. + a_n}{n} < \frac{n.\bar{x}}{n}$$

ou seja, $\bar{x} < \bar{x}$, o que é um absurdo.

Uma aplicação direta desta propriedade, como dissemos, é o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido por Teorema de Dirichlet, pois se supõe que o primeiro relato deste princípio foi feito por Dirichlet em 1834, com o nome de *Schubfachprinzip* ("Princípio das gavetas"). Ei-lo:

Proposição 2: Se $n + 1$ ou mais objetos forem colocados em, no máximo, n gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Demonstração: O número médio de objetos por gaveta é $(n+1) / n$ que é maior que um. Logo, de acordo com a Proposição 1, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior ou igual a dois.

Uma maneira um pouco mais formal de dizer o mesmo é: se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.

Muitos problemas atraentes de Matemática Elementar exploram relações entre conjuntos finitos, expressas em linguagem coloquial. Parte de sua atração vem justamente do fato de que podem ser formulados e, muitas vezes, resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. Embora se trate de uma evidência extremamente elementar, o princípio é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos e quem faz o papel das gavetas.

Exemplo 1: Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há duas que fazem aniversário no mesmo mês?

Proposta de Resolução: Se houvesse apenas 12 pessoas, seria possível que cada uma delas fizesse aniversário em um mês diferente. Com 13 pessoas, há, obrigatoriamente, pelo menos um mês com mais de um aniversariante (se houvesse, no máximo, um aniversariante por mês, o número de pessoas presentes seria, no máximo, 12).

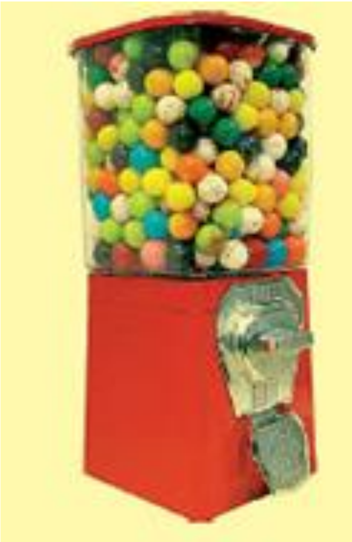
Exemplo 2: Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Proposta de Resolução: Neste caso, os “objetos” são os alunos e as “gavetas” são as possíveis sequências de respostas. Como cada questão pode ser respondida de 5 modos, a prova pode ser preenchida de $5 \times 5 \times 5 \times \ldots 5 = 5^{10} = 9.765.625$ modos. Logo, só se pode ter a certeza de que dois candidatos fornecem exatamente as mesmas respostas, se houver pelo menos 9.765.626 candidatos.

Exemplo 3: UERJ -Segundo Exame de Qualificação de 2011

Uma máquina contém bolas de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor . Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso.

Observe a ilustração:



Para garantir a retirada de quatro bolas de uma mesma cor, o menor número de moedas as serem inseridas na máquina corresponde a:

(A) 5

(B) 13

(C) 31

(D) 40

Proposta de Resolução: Neste caso, os "objetos" são as bolas e as "gavetas" são as 10 cores diferentes. Com 30 bolas, o número médio de bolas por cor é 30:10 =3, logo o menor número para se garantir 4 bolas de uma mesma cor é 31, letra C.

1.4 Média Geométrica (G)

Se a operação a ser preservada for o produto dos elementos positivos de uma lista, dar-se-á o nome de Média Geométrica (G).

Dados n > 1 e uma sequência de números reais positivos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sua Média Geométrica G é tal que

$$a_1.a_2.....a_n = G.G.G.....G = G^n\ ,$$

ou seja,

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ .$$

É importante observar que a Média Geométrica aparece naturalmente em situações do cotidiano. Ou seja, mesmo que possa parecer estranho ao aluno em um primeiro momento, às vezes há a necessidade de calcular uma média de dois ou mais números que não consiste em somar e dividir, como na média aritmética.

1.5 Média Harmônica (H)

Se a operação característica a ser preservada for a soma dos inversos, obteremos a Média Harmônica.

Assim, dados n > 1 e uma sequência de números reais positivos, sua Média Harmônica H é tal que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{H}+\frac{1}{H}+\ldots.+\frac{1}{H}=\frac{n}{H},$$

ou seja,

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots.+\frac{1}{a_n}}.$$

1.6 Média Quadrática (Q)

Se a operação característica a ser preservada for a soma dos quadrados dos elementos da lista, dar-se-á o nome de Média Quadrática (Q).

Dados n > 1 e a sequência de números os reais positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sua Média Quadrática Q é tal que

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=Q^2+Q^2+\ldots+Q^2=n.Q^2,$$

ou seja,

$$Q=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

Vale ressaltar que a escolha da média a ser usada nem sempre é de caráter arbitrário, mas, muitas vezes, dependente da estrutura do problema posto. Uma lacuna comum no estudo das médias na Educação Básica é a discussão pelos professores ou pelos livros didáticos de situações impositivas para a utilização de um tipo ou outro das médias. Isto faz com que o aluno não veja ou não entenda a real diferença entre elas em situações científicas as mais diversas, como no cálculo das velocidades médias, ou em situações do cotidiano, como no cálculo de índices financeiros médios em um dado período de tempo.

Com o objetivo de elencar atividades que clareiam a especificidade das médias em diversos contextos, discutiremos alguns problemas possíveis de serem trabalhados em sala de aula.

Exemplo 4: No segundo bimestre, João alcançou as seguintes médias:

DISCIPLINA	MÉDIA
Matemática:	8,5
Português:	7,3
História:	7,0
Geografia:	7,5
Inglês:	9,2
Espanhol:	8,4
Física:	9,0
Química:	7,2
Biologia:	8,0
Educação Física:	9,5

Determine a média bimestral das notas alcançadas por João.

Proposta de Resolução: Queremos uma nota média tal que, se todas as notas fossem iguais a M a quantidade total de pontos no bimestre fosse a mesma de 8,5; 7,3; 7,0; 7,5; 9,2; 8,4; 9,0; 7,7; 8,0 e 9,5.

$$10.\mathrm{M} = 8{,}5 + 7{,}3 + 7{,}0 + 7{,}5 + 9{,}2 + 8{,}4 + 9{,}0 + 7{,}7 + 8{,}0 + 9{,}5$$

$\mathrm{M} = \frac{81{,}6}{10} = 8{,}16$, logo a média desejada é a Média Aritmética, cuja resposta é 8,16.

Exemplo 5: De fevereiro para março de 2014, a loja A aumentou seus preços em 70%. De março para abril, houve um novo aumento dos preços, dessa vez de 20%. Assim, um produto que custava R$100,00 em fevereiro passou a custar 100 x 1,7 = 170,00 em março, e 170 x 1,2 = 204,00 em abril. Imagine que o dono da loja resolva substituir os dois aumentos de 70% e 20% por dois aumentos iguais de x % de modo que o resultado final seja o mesmo, isto é , de modo que após os dois aumentos de x % , o produto que custava R$100,00 passe a custar R$204,00.

Qual deve ser o valor de x nesse caso, ou seja, em outras palavras, qual foi o aumento percentual médio dos preços nesse bimestre?

Proposta de Resolução: Em primeiro lugar, é preciso entender que a solução desse problema não é a Média Aritmética entre os aumentos, ou seja, a resposta não é (70%+20%)/2 = 45%.

De fato, se um produto custa R$100,00 e sofre dois aumentos consecutivos de 45%, seu preço reajustado será R$100 x 1,45 x 1,45 = R$210,25, e não R$204,00, como deveria ser.

O que se deseja é trocar os fatores de correção 1,2 e 1,7 por dois fatores iguais. Sabe-se que aumentar os preços de um percentual x % equivale a multiplicar por um determinado fator de correção f. Assim, temos dois processos equivalentes de aumentos de preços:

$$100 \text{ x f x f} = 100 \text{ x } 1{,}7 \text{ x } 1{,}2$$

$$\text{f}^2 = 1{,}7 \text{ x } 1{,}2$$

$$\text{f} = \sqrt{1{,}7 \text{ x } 1{,}2}$$

$$\text{f} \cong 1{,}43$$

Portanto, pode-se concluir que o aumento percentual médio x é de aproximadamente 43%.

É possível notar, pelos cálculos acima, que f é a média geométrica dos fatores de correção 1,7 e 1,2 , o que mostra que a média geométrica , como foi dito anteriormente, de fato aparece naturalmente em situações cotidianas.

Exemplo 6: Supondo que em certo trimestre a inflação foi de 6%; 8% e 10% ao mês, respectivamente, qual o valor mais próximo da inflação média nesse trimestre?

Proposta de Resolução: Desejamos uma taxa *i* tal que, se nesses três meses fosse incidida a taxa *i*, o aumento ao longo do trimestre seria o mesmo de $1{,}06 \times 1{,}08 \times 1{,}1 = 1{,}25928$, ou seja,

$$(1+i)(1+i)(1+i) = (1+i)^3 = 1{,}25928$$
$$i = \sqrt[3]{1{,}25928} - 1 \cong 0{,}0798$$

$$i = 7{,}98\%$$

Portanto, a média adequada ao contexto é a também a média geométrica.

Exemplo 7: Um carro percorre metade de certa distância *d* com velocidade 80m/s e percorre a outra metade com velocidade de 60m/s. Qual a sua velocidade média?

Proposta de Resolução: Os tempos de percurso são $t_1 = \frac{\frac{d}{2}}{80}$ e $t_2 = \frac{\frac{d}{2}}{60}$, logo a velocidade média do percurso d e tempo $t_1 + t_2$ é

$$vm = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{d}{\frac{\frac{d}{2}}{80} + \frac{\frac{d}{2}}{60}} = \frac{d}{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{60}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{60}} = 68{,}6\ m/s\ .$$

Logo a média imposta pelo contexto dado é a média harmônica das velocidades, cujo valor é aproximadamente 68,6m/s.

Exemplo 8: (EPCAR- Concurso de 2001) Uma escola tem 18 professores. Um deles se aposenta e é substituído por um professor de 22 anos. Com isso, a média das idades dos professores diminui em 2 anos. A idade, em anos, do professor que se aposentou é:

a) 52

b) 54

c) 56

d) 58

Proposta de Resolução: Sejam M a média das idades dos professores da escola mencionada, I a soma das idades e I\` a soma das idades após a aposentadoria/substituição. Logo

$$\begin{cases} M = \dfrac{I}{18} \\ M - 2 = \dfrac{I`}{18} \end{cases} \Rightarrow \frac{I - 36}{18} = \frac{I`}{18} \Rightarrow I - 36 = I`$$

Se a variação da soma das idades é de 36 anos, isto significa dizer que o professor aposentado é 36 anos mais velho que o professor substituto de 22 anos.

Logo, o professor que se aposentou tem 22 + 36 = 58 anos.

Exemplo 9: (CN- Concurso de 2005) Uma máquina enche um depósito de cereais na razão de seis toneladas por hora. Num determinado dia, essa máquina com a tarefa de encher três depósitos de mesma capacidade encheu o primeiro normalmente, mas apresentou um defeito e encheu os outros dois na razão de três toneladas por hora. Em média, nesse dia quantas toneladas por hora trabalhou essa máquina?

(A) 1,2

(B) 3,5

(C) 3,6

(D) 4,0

(E) 4,5

Proposta de Resolução: Supondo que cada depósito tenha uma capacidade de y toneladas, então os tempos que a máquina leva para encher cada depósito são, respectivamente, $t_1 = \frac{y\ toneladas}{6}$, $t_2 = \frac{y\ toneladas}{3}$ e $t_3 = \frac{y\ toneladas}{3}$.

Logo a tonelada média no tempo $t_1 + t_2 + t_3$ é

$$vm = \frac{3y}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3y}{\frac{y}{6} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3}} = \frac{3y}{y.\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 3{,}6\ ton/hora\ .$$

Logo, em média, a máquina encheu 3,6 toneladas por hora, caracterizada pela Média Harmônica no contexto dado.

1.7 Média Aritmética Ponderada (MA_p)

Uma variação importante da Média Aritmética no Ensino Básico é a Média Aritmética Ponderada. Tal variação adquiriu grande importância por constar sucessivamente ao longo dos anos em concursos de acesso ao Ensino Médio militar e civil, bem como no vestibular do Enem.

Considere uma sequência finita de números reais $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e com pesos respectivos $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$. Definimos a Média Aritmética Ponderada como o valor que preservará a soma ponderada pelos pesos, isto é,

$$x_1.p_1 + x_2.p_2 + \dots + x_n.p_n = p_1.MA_p + p_2.MA_p + \dots + p_n.MA_p\ ,$$

ou seja,

$$MA_p = \frac{x_1.p_1 + x_2.p_2 + \dots + x_n.p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\ .$$

Vejamos alguns exemplos de problemas em que a Média Aritmética Ponderada deve ser utilizada.

Exemplo 10: (CEFET-2010) Passados setenta anos da morte do compositor Noel Rosa, 120 músicas de sua discografia acabam de cair em domínio público.

Depois de um colossal trabalho de pesquisa e restauração sonora, um professor paulistano de Biologia reuniu toda a obra do Poeta da Vila em uma caixa com 14 CDs, assim distribuídos: 4 CDs com 14 músicas, 2 CDs com 15 músicas, 3 CDs com 16 músicas, 3 CDs com 17 músicas, 1 CD com 20 músicas e 1 CD com 25 músicas. Considere que não há músicas que estejam em mais de um CD.

Qual é, aproximadamente, a média de músicas por CD?

a)16,4
b)17,8
c)18,6
d)19,2

Proposta de Resolução: O contexto pede o uso da Média Ponderada, uma vez que vários CDs possuem o mesmo número de músicas. Assim temos:

$$MA_p = \frac{4\times 14 + 2\times 15 + 3\times 16 + 3\times 17 + 1\times 20 + 1\times 25}{4+2+3+3+1+1} = \frac{230}{14} = 16,4\,.$$

Exemplo 11: (CN –Concurso de 2007) Com a finalidade de se pesquisar a renda média em reais M da sua população, uma determinada região S foi dividida em quatro setores: X, Y, Z e W com respectivamente, 2550, 3500, 3750 e 4200 pessoas. Observou-se, então, que a renda média em reais de X é de 800,00, a de Y é 650,00 a de Z é de 500,00 e a de W é de 450,00. Logo

a) 605,00 < M < 615,00

b) 595,00 < M < 605,00

c) 585,00 < M < 595,00

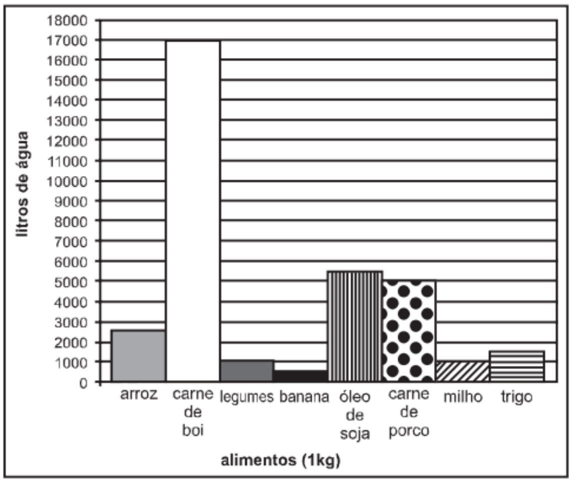
d) 575,00 < M < 585,00

e) 565,00 < M < 575,00

Proposta de Resolução: Aqui também a Média Ponderada se impõe, tendo as populações das cidades como peso. Assim temos

$$MA_p = \frac{2550 \times 800 + 3500 \times 650 + 3750 \times 500 + 4200 \times 450}{2550 + 3500 + 3750 + 4200} = 577{,}14 \ reais.$$

Exemplo 12 (ENEM-2009) Nos últimos anos, o aumento da população, aliado ao crescente consumo de água, tem gerado inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na produção de alimentos. O gráfico mostra a quantidade de litros de água necessária para a produção de 1kg de alguns alimentos. Com base no gráfico, para a produção de 100kg de milho, 100kg de trigo, 100kg de arroz, 100kg de carne de porco e 600kg de carne de boi, a quantidade média necessária de água por quilograma de alimento produzido é aproximadamente igual a:



a) 415 litros por quilograma.

b) 11200 litros por quilograma.

c) 27000 litros por quilograma.

d) 2240000 litros por quilograma.

e) 2700000 litros por quilograma.

Proposta de Resolução: Aqui temos de novo um contexto em que a média apropriada é a Ponderada, tendo como pesos os pesos totais de cada produção. Cabe também pontuar que o letramento gráfico se impõe aqui, dialogando com o tratamento de informação para a aferição da quantidade de água necessária para a produção por quilo de cada tipo de alimento. Assim, temos:

$$MA_p = \frac{100 \times 1000 + 100 \times 1500 + 100 \times 2500 + 100 \times 5000 + 600 \times 17000}{100 + 100 + 100 + 100 + 600} = 11200 \ \ l / kg \ .$$

Exemplo 13: O professor Nei, no curso de Matemática Discreta, costuma fazer duas avaliações por semestre e calcular a nota final fazendo a Média Aritmética entre as notas dessas duas avaliações. Porém, devido a um problema de falta de energia elétrica, a segunda prova foi interrompida antes do tempo previsto e vários alunos não conseguiram terminá-la. Como não havia possibilidade de refazer essa avaliação, o professor decidiu alterar os pesos das provas para não prejudicar os alunos. Assim que Thalles e Thiago souberam da notícia, correram até o mural para ver suas notas e encontraram os seguintes valores:

Nome	1ª Prova	2ª Prova	Nota final da disciplina
Thalles	82	52	72,1
Thiago	90	40	73,5

Qual foi o peso atribuído à segunda prova?

a) 0,25

b) 0,30

c) 0,33

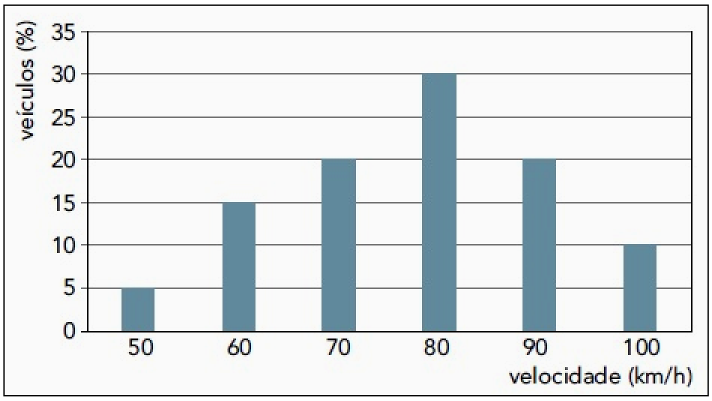
d) 0,35

e) 0,40

Proposta de Resolução: Se P é o peso da segunda prova, então o peso da primeira será 1 - P. Observando a notas de Thiago, temos

$$MA_p = \frac{90(1-P) + 40.P}{(1-P) + P} = 73{,}5 \Rightarrow 90 - 90P + 40P = 73{,}5$$
$$50P = 16{,}5$$
$$P = 0{,}33$$

Exemplo 14: Técnicos do órgão de trânsito recomendaram velocidade máxima de 80 km/h no trecho de uma rodovia onde ocorrem muitos acidentes. Para saber se os motoristas estavam cumprindo as recomendações, foi instalado um radar móvel no local. O aparelho registrou os seguintes resultados percentuais relativos às velocidades dos veículos ao longo de trinta dias, conforme o gráfico abaixo:



Determine a média de velocidade, em km/h, dos veículos que trafegaram no local nesse período.

Proposta de resolução: A média de velocidade dos veículos corresponde à razão entre a soma de todas as velocidades e a quantidade total de veículos, que é dada em porcentagem. Por este motivo, temos novamente uma situação em que a média apropriada é a Ponderada, tendo como pesos os percentuais relativos às velocidades dos veículos, dados no gráfico, mais uma vez o tratamento de informação se fazendo presente em questões de vestibulares.

$$\bar{x} = \frac{5\times 50+15\times 60+20\times 70+30\times 80+20\times 90+10\times 100}{5+10+15+20+30+20+10} = \frac{250+900+1400+2400+1800+1000}{100}$$

$$\bar{x} = \frac{7750}{100} = 77{,}5\ km/h$$

Como dissemos, a Média Aritmética Ponderada tem um valor extremamente importante no Tratamento da Informação, em especial na Estatística e na Probabilidade com o conceito de Esperança Matemática de variáveis aleatórias discretas e, portanto, enseja uma ampla discussão de problemas reais em que o aleatório esteja envolvido.

1.8 Esperança Matemática (ou Valor Esperado) - $E(X)$

Definimos a Esperança Matemática ou Valor Esperado de uma variável aleatória discreta como a Média Ponderada dos possíveis valores da variável aleatória, usando-se como pesos para ponderação as probabilidades correspondentes a cada valor, ou seja, para uma variável discreta X com possíveis valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ com as suas probabilidades representadas pela função $P(X = x_i) = p(x_i)$. Logo, o Valor Esperado (ou Esperança Matemática) é calculado pela soma

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

com $0 < P(X = x_i) < 1$, representando os pesos, tais que $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Exemplo 15: (Baseado em BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P.A., 2002) Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa R$ 0,50 e que ele vende a R$ 1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. O número de flores que os fregueses compram diariamente é aleatório e tem as seguintes probabilidades: 0,1 de vender 0 flor; 0,4 de vender 1 flor, 0,3 de vender 2 flores e 0,2 de vender 3 flores. Determine o lucro diário esperado deste florista.

Proposta de Resolução: De acordo com o texto acima, podemos construir a tabela abaixo:

X	0	1	2	3
P(X = x)	0,1	0,4	0,3	0,2

Como vimos, a esperança matemática de uma variável discreta é dada por pela média ponderada de seus possíveis valores em que seus pesos são as respectivas probabilidades.

$$E(X) = x_1P_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = 0 \text{ x } 0{,}1 + 1 \text{ x } 0{,}4 + 2 \text{ x } 0{,}3 + 3 \text{ x } 0{,}2 = 1{,}6$$

Assim, o lucro diário esperado deste florista é de R$1,60.

Exemplo 16: Em um jogo muito popular no Brasil, escolhe-se uma dentre 25 possibilidades para apostar. Caso a escolha seja contemplada, o apostador recebe 18 vezes a quantia apostada. Qual é o ganho esperado de quem aposta R$ 20,00?

Proposta de Resolução: O ganho é a diferença entre o valor recebido e o apostado. As possibilidades são ganhar 360 – 20 = 340 reais ou perder 20 reais apostados, que corresponde ao ganho de 0 – 20 = – 20 reais. As probabilidades desses dois resultados são, respectivamente, $\frac{1}{25}$ e $\frac{24}{25}$. Logo, o valor esperado de ganho é dado por

$$E(X) = 340 \text{ x } \frac{1}{25} + (-20) \text{ x } \frac{24}{25} = -5{,}60$$

Isto é, quem faz seguidamente esta aposta, em média perde R$5,60 por vez em que a aposta é realizada.

CAPÍTULO 2 – DESIGUALDADES DAS MÉDIAS

Neste capítulo, nos debruçaremos sobre as desigualdades das médias tratadas no capítulo anterior e exploraremos as várias situações possíveis de nos valermos dessas desigualdades para a resolução de alguns problemas interessantes de otimização. Embora o problema geral de otimização de funções contínuas sujeitas a restrições seja da ordem do Cálculo Diferencial por meio dos Multiplicadores de Lagrange, as desigualdades das médias oferecem uma oportunidade ao professor de Ensino Básico para lidar com algumas classes de problemas que recaiam em restrições do tipo aqui tratadas.

2.1 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

A proposição a seguir nos informa que a média aritmética é minorada pela média geométrica e que a média geométrica é majorada pela média aritmética.

Proposição 1: Dados $n > 1$ e $a_1, a_2, ..., a_n$, reais positivos, sua média aritmética é sempre maior ou igual à média geométrica, ocorrendo a igualdade, se e somente se $a_1, a_2, ..., a_n$ forem todos iguais, ou seja,

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \quad \text{e}$$

$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, se e somente se $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Para demonstração deste conhecido e importante resultado será necessário demonstrar inicialmente um resultado auxiliar.

Lema 1: Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_1 \times a_2 \times ... \times a_n = 1$. Então $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$ (valendo a igualdade, se e somente se $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$).

Demonstração: Faremos uma demonstração por indução sobre n .

Para $n = 1$, temos que $a_1 = 1$ e portanto $a_1 \geq 1$, o que verifica o resultado.

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja,

$$a_1 \times a_2 \times .. \times a_k = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_k \geq k$$

Iremos verificar que o resultado é válido para $n = k+1$. De fato, sejam $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ números reais positivos tais que $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1} = 1$.

Assim, dois casos podem se apresentar:

i. Todos os números $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ são iguais, ou seja, $a_1 = a_2 = ... = a_k = a_{k+1}$. Como estamos supondo que $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1} = 1$, segue-se, portanto, que, neste caso, eles têm de ser iguais a 1 e, assim, $a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = k+1$, oque valida o resultado para $n = k+1$.

ii. Nem todos os números são iguais, ou seja, há números menores que 1 e pelo menos um maior que 1, visto que o produto de todos deve ser igual a 1. Sem perda de generalidade podemos supor que $a_1 < 1$ e que $a_{k+1} > 1$.

Fazendo $a_1.a_{k+1} = b_1$, segue que

$$a_1.a_2...a_k.a_{k+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1.a_2....a_k = 1.$$

Pela hipótese de indução segue que $b_1 + a_2 + ... + a_k \geq k$. Assim ,

$$a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = b_1 + a_2 + ... + a_k + a_1 - b_1 + a_{k+1} \geq k + a_1 - b_1 + a_{k+1}.$$

Para finalizar devemos verificar que $a_1 - b_1 + a_{k+1} \geq 1$.

De fato, lembrando que $a_1.a_{k+1} = b_1$, segue que $a_1 - b_1 + a_{k+1} = a_1 - a_1.a_{k+1} + a_{k+1}$.

Assim,

$$a_1 - b_1 + a_{k+1} = a_1(1 - a_{k+1}) + a_{k+1} - 1 + 1 = (1 - a_{k+1})(a_1 - 1) + 1$$

Lembrando que $a_1 < 1$ e que $a_{k+1} > 1$ temos que $a_1 - 1 < 0$ e $1 - a_{k+1} < 0$.

Segue que $(1 - a_{k+1})(a_1 - 1) > 0$ e, portanto, $a_1 - b_1 + a_{k+1} = (1 - a_{k+1})(a_1 - 1) + 1 \geq 1$

Assim,

$a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} \geq k + a_1 - b_1 + a_{k+1} \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} \geq k+1$, o que valida o lema, com a igualdade ocorrendo para $a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$, por (i).

Demonstração da Proposição 1: Pelo Lema 1, fica imediato demonstrar a famosa desigualdade entre as médias aritmética e geométrica de números reais positivos.

Seja $G = \sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n}$ a média geométrica. Então

$$1 = \frac{G}{G} = \frac{\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}{G} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{G}.\frac{a_2}{G}....\frac{a_n}{G}} \Rightarrow \frac{a_1}{G}.\frac{a_2}{G}....\frac{a_n}{G} = 1.$$

Como $\frac{a_1}{G}.\frac{a_2}{G}....\frac{a_n}{G} = 1$, segue-se pelo Lema 1 que $\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + ... + \frac{a_n}{G} \geq n$. Assim,

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n.G \text{, ou seja,}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq G,$$

o que prova o resultado: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$; com a igualdade ocorrendo para $a_1 = a_2 = ... = a_k$, pois se

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = k > 0, \text{ temos}$$

$$A = \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots a_n}{n} = \frac{n.k}{n} = k \text{ e}$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \sqrt[n]{k.k.k.\ldots.k} = k,$$

ou seja , $A = G$.

2.2 Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica

A proposição a seguir nos informa que a Média Geométrica é minorada pela Média Harmônica e que a Média Harmônica é majorada pela Média Geométrica.

Proposição 2: Dados $n > 1$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, reais positivos, sua Média Geométrica é sempre maior ou igual que sua Média Harmônica, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1, a_2, ..., a_n$ forem todos iguais. Ou seja,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \text{, e}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$, se e somente se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstração: Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos, então $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ também o são. Assim, aplicando a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica para números positivos, segue-se que

$$\frac{1}{G} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{H}$$

Assim, temos $\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H}$ e, portanto, $H \leq G$; com a igualdade ocorrendo para $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (como visto na demonstração da desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica).

2.3 Desigualdades entre as Médias Aritmética e Quadrática

A proposição a seguir nos informa que a Média Quadrática é minorada pela Média Aritmética e que a Média Aritmética é majorada pela Média Quadrática.

Proposição 3: Dados $n > 1$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, reais positivos, temos que

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$ e

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$, se e somente se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstração: Sabemos que: $(a_k - A)^2 \geq 0$, onde A é a Média Aritmética. Logo, temos

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i - A)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2A.\sum_{i=1}^{n} a_i + n.A^2 = nQ^2 - 2An.A + nA^2$$

$$= nQ^2 - nA^2 = n(Q^2 - A^2)$$

Assim, temos $n(Q^2 - A^2) \geq 0$, o que nos leva a $Q^2 - A^2 \geq 0$ e $Q^2 \geq A^2$. Finalmente, temos $Q \geq A$.

Além disso, só se tem a igualdade quando cada termo da soma inicial é nulo, ou seja, quando $a_k = A$, para todo k, o que significa dizer que todos os números a_k são iguais.

Finalmente concluímos que, dada uma lista de números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$, é sempre verdade que $H \leq G \leq A \leq Q$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz, também conhecida como a Desigualdade de Schwarz, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz ou simplesmente Cauchy, é uma desigualdade muito útil que aparece em vários contextos diferentes, tais como em análise, aplicando-se a séries infinitas e integração de produtos, e, na teoria de probabilidades, aplicando-se as variâncias e covariâncias.

Essa desigualdade foi publicada por Augustin Cauchy (1821), matemático francês responsável pela introdução do rigor na análise matemática e um dos fundadores da teoria de grupos finitos. Em análise infinitesimal, criou a noção moderna descontinuidade para as funções de variável real ou complexa.

Proposição 1: Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais dados, não todos nulos (n > 1). Então
$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2^2 + \ldots. + b_n^2)$

Demonstração: Considere o seguinte trinômio do segundo grau

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$$

Desenvolvendo os parênteses, chegamos a

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Por ser uma soma de quadrados, temos $f(x) \geq 0$ para todo real x, e daí deve ser $\Delta \leq 0$. Logo,

$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

Cancelando o fator 4 de ambos os membros, chegamos na desigualdade de Cauchy. Examinemos agora a igualdade. Se houver igualdade, quer dizer, se for $\Delta = 0$, então o trinômio tem uma raiz real $x = \lambda$, ou seja,

$$(a_1\lambda - b_1)^2 + (a_2\lambda - b_2)^2 + ... + (a_n\lambda - b_n)^2 = 0.$$

Devemos, portanto, ter $a_i\lambda - b_i = 0$ para todo *i*, isto é, $b_i = \lambda a_i$ para todo *i*. Então, havendo igualdade, os a_i e b_i devem ser proporcionais. Além disso, é evidente que se eles forem proporcionais a igualdade ocorre.

Para finalizar, vamos usar a desigualdade de Cauchy–Schwarz para provar um lema importante. Tal lema se mostra como uma ferramenta muito eficiente para resolver problemas de otimização, frequentemente abordados em Olimpíadas de Matemática e concursos em geral. Este resultado está presente nos consagrados livros do professor Titu Andreescu, professor de matemática associado da Universidade do Texas em Dallas e considerado por muitos uma referência no assunto das Olimpíadas de Matemática.

Lema 1: Se *a*, *b*, *x* e *y* são números reais e *x* > 0 e *y* > 0, então $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Demonstração: Considere a expressão $(a+b)^2$.Vamos reescrevê-la de modo a aplicar Cauchy–Schwarz.

$$(a+b)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} + \frac{b^2}{\left(\sqrt{y}\right)^2}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right)$$

Daí, segue que

$$(a+b)^2 \leq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)(x+y),$$

e, portanto, $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

As desigualdades obtidas aqui neste capítulo serão trabalhadas no próximo capítulo pela contemplação de diversas situações-problema em que a otimização de funções sujeitas a restrições esteja envolvida.

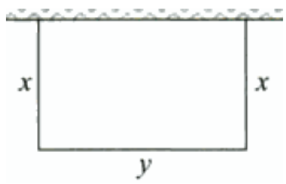
CAPÍTULO 3 - PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Problemas de Otimização são aplicáveis em várias situações: quando buscamos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da Terra, ou, ainda, quando se quer calcular uma certa quantidade de mercadorias que devem ser produzidas e vendidas para a obtenção do maior lucro possível são alguns exemplos. Em todos esses casos, estamos fazendo ou pensando em otimização.

Acredita-se que o primeiro registro histórico em que identificamos Problemas de Otimização foi na obra *Elementos* de Euclides, datada do século IV a.C., ou seja, significativamente anterior ao cálculo diferencial. Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos. Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu".

Apresentamos a seguir um dos problemas de otimização que encontramos na obra de Euclides. Tal questão se destaca pela sua simplicidade e riqueza. Apresentaremos, juntamente, uma proposta de sua resolução para a Educação Básica.

"De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima?"



Seja o perímetro 2*p* do retângulo, tal que $2p = 2x + 2y$. Então temos $x + y = p$.

Sua área *A* é tal que

$$A = xy.$$

A partir da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

E assim $\frac{p}{2} \geq \sqrt{A}$, o que nos leva a concluir que $\frac{p^2}{4} \geq A$. Logo, a área máxima é $A = \frac{p^2}{4}$, que ocorre quando $x = y$.

Portanto, de todos os retângulos de mesmo perímetro o de área máxima é o quadrado.

As soluções gerais dos problemas de otimização envolvem frequentemente o cálculo diferencial e integral e na Educação Básica os problemas de otimização ficam limitados na parte dedicada às funções quadráticas. Buscaremos agora mostrar que as desigualdades tratadas nos capítulos anteriores podem ser um eficiente recurso para abordar problemas de otimização e instigar no aluno o gosto pela matemática, já que tais questões são bem atrativas, reais e desafiadoras.

3.1 Breve discussão sobre os Multiplicadores de Lagrange

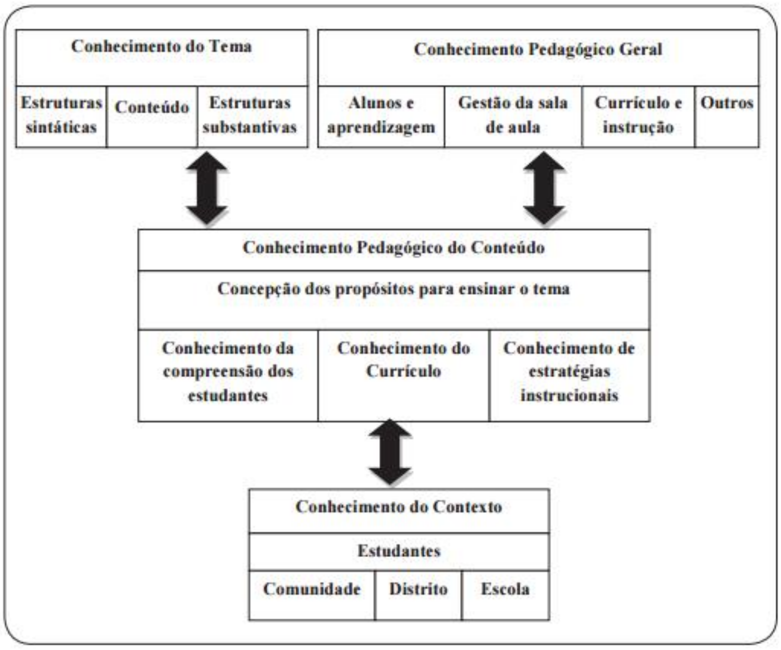
Nesta seção, faremos uma breve discussão sobre os Multiplicadores de Lagrange, método comentado no início do capítulo 2 e bastante utilizado no Ensino Superior em cursos Matemática, Matemática Aplicada, Engenharia, Economia e outros, nos cursos de Cálculo Diferencial. Desenvolvido por Joseph Louis Lagrange em 1755, o método é usualmente empregado para resolução de problemas de otimização de funções contínuas sujeitas a restrições .

Embora não seja assunto central deste trabalho, pois nos restringiremos à Educação Básica, a motivação da discussão breve sobre ele vem das ideias do grande estudioso e pensador da Educação Matemática, Shulman (1986), que entende que o professor deve ter domínio do conteúdo específico em três níveis: conhecimento do conteúdo em si, conhecimento curricular do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo.

Em artigo de 1987, Shulman propõe que a base de conhecimentos para o ensino de um professor engloba sete conhecimentos, incluindo os três conhecimentos relacionados ao conteúdo específico apresentados anteriormente, a saber: Conhecimento do Conteúdo; Conhecimento do Currículo; Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK); Conhecimento Pedagógico Geral; Conhecimento dos Alunos e de suas características; Conhecimento dos Contextos; Conhecimento dos Objetivos, finalidades e valores educacionais, e de seus fundamentos filosóficos e históricos. E acrescenta que, dentre esses conhecimentos da base, o PCK se destaca como sendo o conhecimento exclusivo de professores. Assim, a compreensão do professor requer ir além dos fatos e conceitos intrínsecos da disciplina e pressupõe o conhecimento das formas pelas quais os princípios fundamentais de uma área do conhecimento estão organizados, a compreensão dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica.

> [...] aquele conhecimento que vai além do conhecimento da matéria em si e chega na dimensão do conhecimento da matéria para o ensino. Eu [Shulman] ainda falo de conteúdo aqui, mas de uma forma particular de conhecimento de conteúdo que engloba os aspectos do conteúdo mais próximos de seu processo de ensino. [...] dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo eu incluo, para os tópicos mais regularmente ensinados numa determinada área do conhecimento, as formas mais úteis de representação dessas ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos e demonstrações – numa palavra, os modos de representar e formular o tópico que o faz compreensível aos demais. Uma vez que não há simples formas poderosas de representação, o professor precisa ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam da pesquisa enquanto outras têm sua origem no saber da prática.
> (SHULMAN, 1986, p. 9)

Modelo de conhecimento de professores.



Fonte: GROSSMAN, 1990, p. 5. Tradução nossa.

É dentro desta ótica que o saber de conteúdo deve transcender o saber pedagógico de conteúdo, que este trabalho irá inserir os Multiplicadores de Lagrange nesta seção, pois o professor deve estar consciente de ferramentas para a solução geral de problemas de otimização com restrição via Multiplicadores de Lagrange, para não ficar limitado apenas às condicionais das desigualdades das Médias ou da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Além disso, essa discussão sobre os Multiplicadores de Lagrange nos permitirá uma posterior comparação e análise sobre os ganhos que a otimização feita via desigualdades pode trazer não apenas na Educação Básica, mas também em todas as esferas da Educação Matemática.

Por este motivo não detalharemos aqui a demonstração do método. Apenas citaremos sua aplicação de forma sintética. Sugerimos para a demonstração e para mais informações adicionais o livro Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis de Diomara Pinto Maria Candida Ferreira Morgado.

Em geral, os problemas de otimização com restrição podem ser representados da seguinte forma :

Máx (ou Min) $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ restrito à $g(x_1, x_2, ..., x_n) = C$,

Mm casos de diferenciabilidade de F e G, método consiste em montar a função Lagrangeana (L), tal que:

$L = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda . [C - g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)]$ com o número λ chamado de Multiplicador de Lagrange.

Para em seguida, como condição de primeira ordem, encontrar os pontos críticos através da formação e resolução um sistema criado igualando todas as derivadas parciais de L com respeito a $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e λ a zero.

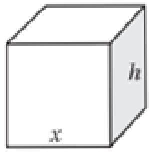
3.2 Problemas de Otimização na Educação Básica

Nesta seção, iremos tratar e resolver inicialmente de maneira dual (via Multiplicadores de Lagrange e Via Desigualdades de Médias ou Cauchy–Schwarz) três problemas de otimização com possível abordagem na Educação Básica. Utilizaremos os multiplicadores de Lagrange para referenciar o saber de conteúdo, descrito por Shulman, e também valorar a importância dos problemas de Otimização via Desigualdades de Médias e Cauchy Schwarz, cujo conceito de infinitesimal não será necessário. Ou seja, faremos otimização de funções contínuas, passando ao largo dos conceitos de derivadas e derivadas parciais, pois basta a aritmética para mostrar tais desigualdades. Todavia, estaremos restritos às estruturas associadas às médias, não tendo o professor a liberdade de fazer aplicação das desigualdades em qualquer situação de otimização sujeita a restrições. Por isso sublinhamos mais uma vez a importância do saber de conteúdo dos Multiplicadores de Lagrange. Após esses exemplos, estudaremos outros problemas, porém utilizando apenas as desigualdades, nosso principal objeto de estudo.

Problema 1: Se 1.200 cm^2 de um material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa , encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.

Proposta de Resolução (1): (Via Multiplicadores de Lagrange)

Sejam A a área da superfície, V o volume da caixa e h a altura da caixa. Temos assim



$$A = x^2 + 4xh \quad \text{e} \quad V = x^2 h.$$

Portanto, devemos maximizar a função $F = f(x,h) = x^2 h$ restrita a $g(x,h) = x^2 + 4xh = 1200$, para encontrarmos o maior valor de $x^2 h$.

Definidas a função $F = f(x,h)$ e a restrição $g(x,h)$ o primeiro passo é montar a função Lagrangeana (L), a partir das funções $f(x,h)$ e $g(x,h)$, ou seja,

$$L = f(x,h) + \lambda.[C - g(x,h)].$$

Logo, $L = x^2 h + \lambda.[1200 - x^2 - 4xh]$.

O passo seguinte é igualar as derivadas parciais a zero. Assim,

$$\frac{dL}{dx} = 2xh - 2x\lambda - 4h\lambda = 0$$

$$\frac{dL}{dh} = x^2 - 4x\lambda = 0$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = 1200 - x^2 - 4xh = 0$$

Resolvendo o sistema montado a partir destas equações, temos

$$\begin{cases} 2xh - 2x\lambda - 4h\lambda = 0 \\ x^2 - 4x\lambda = 0 \\ 1200 - x^2 - 4xh = 0 \end{cases}$$

Tomando a segunda equação deste sistema temos:

$x(x - 4\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4\lambda$. Porém, como $x \neq 0$, temos $x = 4\lambda$, com $\lambda \neq 0$.

Substituindo o valor de x na primeira equação, temos

$$2(4\lambda)h - 2(4\lambda)\lambda - 4h\lambda = 0.$$

Logo: $h = 0$ ou $h = 2\lambda$. Porém h$\neq 0$, e assim $h = 2\lambda$.

Substituindo esse valor na terceira equação, $x^2 + 4xh = 1200$, temos

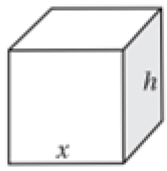
$(4\lambda)^2 + 4(4\lambda)(2\lambda) = 1200$

E assim, $\lambda = 5$.

Assim temos $x = 4\lambda = 4 \text{ x } 5 = 20m$ e $h = 2\lambda = 2 \text{ x } 5 = 10m$, que maximizam o volume da caixa que será $V = x^2h = 20^2 \text{ x } 10 = 4.000m^3$.

Proposta de Resolução (2): (Via desigualdades de Médias)

Sejam A a área da superfície, V o volume da caixa e h a altura da caixa. Temos assim



$A = x^2 + 4xh$ e $V = x^2h$. Aplicando as desigualdades entre as médias aritmética e geométrica em A, temos

$$\frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} = \frac{1.200}{3} \geq \sqrt[3]{x^2.2xh.2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} = \sqrt[3]{4V^2}.$$

Assim, $4V^2 \leq 400^3$ e $V \leq 4.000$.

Esse resultado nos diz que o volume é igual ou menor a 4.000 cm^3, e o resultado será máximo, se e somente se $x^2 = 2xh$. Resolvendo o sistema

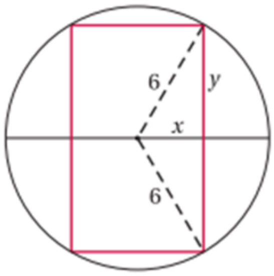
$$\begin{cases} x^2 = 2xh \\ x^2 + 4xh = 1200 \end{cases}$$

temos x = 20cm e h =10cm, constatando-se de fato que o volume é 4.000cm^3.

Problema 2: Encontre as dimensões de um cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio 6m.

Proposta de Resolução (1): (Multiplicadores de Lagrange)

A figura abaixo mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Se S é a área lateral do cilindro, x o raio da base e 2y a altura do cilindro, temos $S = 2\pi rh = 4\pi xy$ com $x^2 + y^2 = 36$.



Portanto, devemos maximizar a função $F = f(x, y) = 4\pi xy$ restrita a $g(x, y) = x^2 + y^2 = 36$.

Definadas a função $F = f(x, y)$ e a restrição $g(x, y)$ o primeiro passo é montar a função Lagrangeana (L) , a partir das funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$, ou seja,

$L = f(x, y) + \lambda.[C - g(x, y)]$.

$L = 4\pi xy + \lambda.[x^2 + y^2 - 36]$.

O passo seguinte é igualar as derivadas parciais a zero , logo:

$$\frac{dL}{dx} = 4\pi y + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{dL}{dy} = 4\pi x + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = x^2 + y^2 - 36 = 0$$

Resolvendo o sistema montado a partir destas equações, temos:

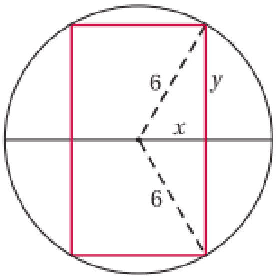
$$\begin{cases} 4\pi y + 2\lambda x = 0 \\ 4\pi x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

Isolando λ na primeira e segunda equação e igualando tais resultados, temos $\frac{2\pi y}{x} = \frac{2\pi x}{y}$, e assim obtemos que $x^2 = y^2$.

Como sabemos que $x^2 + y^2 = 36$, temos $2x^2 = 36$ e $x = y = 3\sqrt{2}$.

Proposta de Resolução (2): (Via Desigualdades de Médias)

A figura abaixo mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Se S é a área lateral do cilindro, x o raio da base e $2y$ a altura do cilindro, temos $S = 2\pi rh = 4\pi xy$ com $x^2 + y^2 = 36$.



Aplicando a desigualdade das médias em $x^2 + y^2 = 36$, podemos escrever:

$$\frac{36}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy = \frac{S}{4\pi}.$$

Assim, temos $18 \geq \frac{S}{4\pi}$. Ou seja, $S \leq 72\pi$.

Área lateral do cilindro é então menor ou igual a $72\pi\ m^2$ e será máxima quando $x^2 = y^2$. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $x = y = 3\sqrt{2}\,m$.

Assim como na primeira questão, para uma real compreensão do problema, o aluno deverá possuir o domínio de conceitos como áreas e volumes de sólidos geométricos, previstos pelo BNCC para todo aluno no final do Ensino Fundamental.

Problema 3: Se x e y são tais que $3x - y = 20$, qual o menor valor de $\sqrt{x^2 + y^2}$?

Proposta de Resolução (1): (Multiplicadores de Lagrange)

Desejamos minimizar a função $F = \sqrt{x^2 + y^2}$, o que é equivalente a minimizar $f(x,y) = x^2 + y^2$ restrito a $g(x,y) = 3x - y = 20$.

O primeiro passo é montar a função Lagrangeana (L), a partir das funções $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = 20 - 3x + y$, ou seja, $L = f(x,y) + \lambda.[C - g(x,y)]$. Assim, temos

$$L = x^2 + y^2 + \lambda.[20 - 3x + y].$$

O passo seguinte é igualar as derivadas parciais a zero. Assim

$$\frac{dL}{dx} = 2x - 3\lambda = 0$$

$$\frac{dL}{dy} = 2y + \lambda = 0$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = -3x + y + 20$$

O sistema montado a partir destas equações e da restrição é dado por

$$\begin{cases} 2x - 3\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3 e somando com a primeira encontramos

$2x + 6y = 0$, ou seja, $x = -3y$.

Substituindo na terceira equação o resultado obtido, temos $3.(-3y) - y = 20$. Assim, $y = -2$ e $x = -3(-2) = 6$.

Logo, o mínimo de $f(x,y)$ ocorre para $x = 6$ e $y = -2$, ou seja, o mínimo é $f(6,-2) = 6^2 + (-2)^2 = 40$. Com isso o menor valor de $\sqrt{x^2 + y^2}$ é $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, mesmo resultado obtido usando o caminho das desigualdades.

Proposta de Resolução (2): (Via desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Aplicando a Desigualdade Cauchy-Schwarz: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$ para $a_1 = 3, a_2 = -1, b_1 = x, b_2 = y$, temos:

$$(3^2 + (-1)^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + (-1).y)^2$$

$$10(x^2 + y^2) \geq (3x - y)^2$$

$$10(x^2 + y^2) \geq 20^2$$
$$x^2 + y^2 \geq 40$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados da desigualdade acima, obtemos:

$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{10}$. Portando o menor valor $\sqrt{x^2 + y^2}$ é $2\sqrt{10}$.

Problema 4: Se uma lata de zinco de volume $16\pi\ cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.

Proposta de Resolução: Sejam *r* o raio da base, *h* a altura e *S* a área da superfície total do cilindro. Então, temos

$$\begin{cases} r^2 h = 16 \\ S = 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{cases}$$

Aplicando a desigualdade das médias em *S*, obtemos

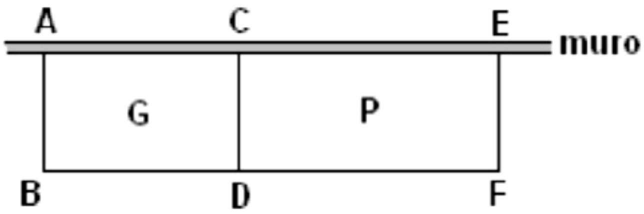
$$\frac{S}{3} = \frac{\pi r h + \pi r h + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\pi r h \times \pi r h \times 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (r^2 h)^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 16^2} = \sqrt[3]{2^9 \pi^3} = 8\pi$$

Assim, $S \geq 24\pi$ e *S* será mínima quando a igualdade ocorrer, isto é, quando $r\pi h = 2\pi r^2$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r\pi h = 2\pi r^2 \\ r^2 h = 16 \end{cases}$$

obtemos $r = 2\ cm$ e $h = 4\ cm$ e constatamos que, de fato, o mínimo $24\pi\ cm^2$ para *S* ocorre para esses valores.

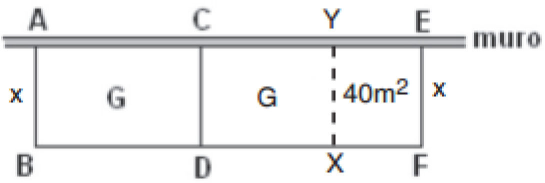
Problema 5: (ESPM SP/2010) Um sitiante quer construir, ao lado de um muro retilíneo, dois viveiros retangulares para criação de galinhas e patos, sendo que a área destinada aos patos (P) tem que ter 40 m^2 a mais que a destinada às galinhas (G). Para isso ele dispõe de 60 metros lineares de uma tela apropriada, que deverá ser usada para as cercas AB, CD, EF e BF, conforme a figura abaixo:



Para conseguir a maior área possível para os viveiros, a medida DF deverá ser de:

a) 15 metros
b) 16 metros
c) 17 metros
d) 18 metros
e) 19 metros

Proposta de Resolução:



$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{XY} = \overline{EF} = x, \;\; \overline{BD} = y \; e \; 3x + y = 60$$

Aplicando a desigualdade das médias em $3x + y = 60$, obtemos

$$\frac{3x+y}{2} \geq \sqrt{3xy}\,.$$

Assim,

$$\frac{60}{2} \geq \sqrt{3A}$$

o que nos leva a

$$3A \leq 900,$$

ou seja,

$$A \leq 300.$$

A maior área possível é $300 \ m^2$ e esta será máxima quando $3x = y$. A solução é dada pelo sistema

$$\begin{cases} 3x = y \\ 3x + y = 60 \end{cases}$$

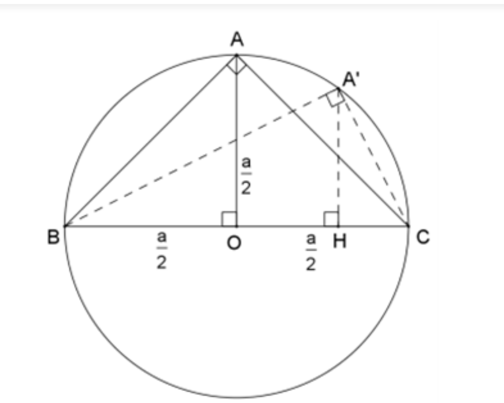
cuja solução é dada por $x = 10m$ e $y = 30m$.

Se $x = 10\,m$, então $\overline{BD} + \overline{DX} + 4 = 30 \ e \ \overline{BD} = \overline{DX}$.

Logo $\overline{BD} = \overline{DX} = 13m$ e $\overline{DF} = \overline{DX} + \overline{XF} = 13 + 4 = 17\,m$.

Problema 6: (Prova Colégio Naval – Acesso 2014) Sabendo que *ABC* é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{BC} = a$,qual é o valor máximo da área de *ABC*?

Proposta de Resolução: Sejam h a altura relativa à hipotenusa e m e n as projeções dos catetos sobre a mesma. Pode-se afirmar que: $S = \frac{a.h}{2}$, $a = m + n$ e $h = \sqrt{m.n}$, com S a área do triângulo ABC.



Aplicando as desigualdades das médias aritmética e geométrica, temos $\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$.

Assim, $\frac{a}{2} \geq h$ e a altura máxima será $h_{máx.} = \frac{a}{2}$, com $m = n$.

Sabendo-se que a medida da hipotenusa é constante, então o triângulo de área máxima será aquele que tiver a altura máxima relativa à hipotenusa. Logo,

$$S_{\max} = \frac{ah_{\max}}{2} = \frac{a \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Problema 7: (Prova Colégio Naval – Acesso 2010) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo gerado por pq?

a) 8040

b) 4020

c) 2010

d) 1005

e) 1050

Proposta de Resolução:

$$\frac{p+q}{pq} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$$

$$p + q = \frac{p.q}{\sqrt{2010}}$$

Aplicando as desigualdades das médias aritméticas e geométricas em p e q positivos, temos $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$.

Substituindo $p + q = \frac{pq}{\sqrt{2010}}$ na desigualdade $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$, temos

$\frac{\frac{pq}{\sqrt{2010}}}{2} \geq \sqrt{pq}$. Logo $\left(\frac{pq}{\sqrt{pq}}\right)^2 \geq \left(2\sqrt{2010}\right)^2$ e assim $pq \geq 8040$. Logo, o valor mínimo gerado por pq é 8040 para $p = q = \sqrt{8040}$.

Problema 8: (Prova Colégio Naval – Acesso 2017) Sejam x e y números reais tais que $xy = 2\sqrt{3}$. Sendo assim, o valor mínimo de $x^8 + y^8$ é:

a) múltiplo de 18

b) um número primo

c) divisível por 5.

d) divisível por 13.

e) par maior que 300.

Proposta de Resolução: Aplicando as desigualdades das médias aritmética e geométrica em x^8 e y^8 (positivos), temos $\frac{x^8+y^8}{2} \geq \sqrt{x^8y^8}$. Assim $x^8+y^8 \geq 2\sqrt{(xy)^8}$ e, como $xy = 2\sqrt{3}$, temos $x^8+y^8 \geq 2\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^8}$. Portanto, $x^8+y^8 \geq 288$ e o valor mínimo gerado por x^8+y^8 é 288, quando $x = y = \sqrt[8]{144}$ .Logo, a opção correta é letra A, múltiplo de 18.

Problema 9: Qual o valor mínimo da expressão $f(x) = 6x + \frac{24}{x^2}$, quando $x > 0$?

Proposta de Resolução: Reescrevendo convenientemente a expressão dada, temos

$$f(x) = 6x + \frac{24}{x^2} = 3x + 3x + \frac{24}{x^2}.$$

Aplicando as desigualdades das médias aritmética e geométrica em $3x$, $3x$ e $\frac{24}{x^2}$ positivos, temos $\frac{3x+3x+\frac{24}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{(3x)(3x)\frac{24}{x^2}}$. Assim, temos $6x + \frac{24}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{216} = 18$ e finalmente $f(x) \geq 18$.

Logo, o valor mínimo de $f(x)$ é 18, valor esse atingido quando $3x = \frac{24}{x^2}$, ou seja, $x = 2$.

Problema 10: Qual o valor mínimo de $f(x,y) = \frac{12}{x} + \frac{18}{y} + xy$, para x e y positivos?

Proposta de Resolução: Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica em $\frac{12}{x}, \frac{18}{y}$ e xy positivos, temos

$$\frac{\frac{12}{x} + \frac{18}{y} + xy}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{12}{x}.\frac{18}{y}xy}.$$

Assim, temos $\frac{12}{x}+\frac{18}{y}+x.y \geq 3\sqrt[3]{216}=18$, ou seja $f(x) \geq 18$.

Portanto, o valor mínimo de $f(x)$ é 18, atingido quando $\frac{12}{x}=\frac{18}{y}=xy$ e $\frac{12}{x}+\frac{18}{y}+xy=18$, ou seja, $x = 2$ e $y = 3$.

Problema 11: Se x e y são positivos e $x > y$. Qual o menor valor de $f(x,y)=x+\frac{8}{y(x-y)}$?

Proposta de Resolução: Como $x > y$, existe $z > 0$ tal que $x = z + y$. Substituindo x por $z + y$, temos $f(z+y,y)=z+y+\frac{8}{y(z+y-y)}$. Assim $f(z+y,y)=z+y+\frac{8}{yz}$

Aplicando a desigualdade das médias aritméticas e geométricas em y, z e $\frac{8}{yz}$, temos

$\frac{y+z+\frac{8}{yz}}{3} \geq \sqrt[3]{yz\frac{8}{yz}}=\sqrt[3]{8}=2$, ou seja, $y+z+\frac{8}{yz} \geq 6$. Como $f(x,y)=f(z+y,y) \geq 6$, temos que o menor valor assumido por $f(x,y)$ é 6, valor esse alcançado quando $y=z=\frac{8}{yz}$, $y+z+\frac{8}{yz}=6$ e $x=y+z$, o que nos dá $y=z=2$ e $x=4$.

Problema 12: Encontre o menor valor da função definida pela lei $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{4z}{x}+12$, onde x, y e z são números reais positivos.

Proposta de Resolução: Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica em $\frac{x}{y}$, $\frac{2y}{z}$ e $\frac{4z}{x}$, temos $\frac{\frac{x}{y}+\frac{2z}{y}+\frac{4z}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{2y}{z}.\frac{4z}{x}}=\sqrt[3]{8}=2$, ou seja, $\frac{x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{4z}{x} \geq 6$.

Adicionando 12 aos dois membros da desigualdade anterior, temos $\frac{x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{4z}{x}+12 \geq 18$. Assim $f(x,y,z) \geq 18$ e o valor mínimo de $f(x,y,z)$ é 18, atingido quando $\frac{x}{y} = \frac{2y}{z} = \frac{4z}{x}$ e $\frac{x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{4z}{y} = 6$, isto é, $x = 2y$, $z = y$ e $x = 2z$, o que nos fornece $x = 2$ e $y = z = 1$.

Problema 13: Encontre o valor máximo da função definida pela lei $f(x,y) = \frac{12(xy - 4x - 3y)}{x^2 y^3}$, onde *x* e *y* são reais e positivos.

Proposta de Resolução: Reescrevendo convenientemente a expressão dada, temos

$$f(x,y) = \frac{12(xy - 4x - 3y)}{x^2 y^3} = \frac{2.2.3(xy - 4x - 3y)}{x.x.y.y.y} = \frac{2}{y}.\frac{2}{y}.\frac{3}{x}\left(\frac{xy}{xy} - \frac{4x}{xy} - \frac{3y}{xy}\right),$$

ou seja, $f(x,y) = \frac{2}{y}.\frac{2}{y}.\frac{3}{x}\left(1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x}\right)$.

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica em $\frac{2}{y}, \frac{2}{y}, \frac{3}{x}$ e $\left(1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x}\right)$, temos

$$\frac{\frac{2}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{x} + \left(1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x}\right)}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{2}{y}.\frac{2}{y}.\frac{3}{x}\left(1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x}\right)}$$

Como $f(x,y) = \frac{2}{y}.\frac{2}{y}.\frac{3}{x}\left(1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x}\right)$, temos $\frac{\frac{2}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{x} + 1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{f(x,y)}$, ou seja, $\frac{1}{4} \geq \sqrt[4]{f(x,y)}$.

Elevando a quarta potência os dois membros desta igualdade, obtemos $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \geq (\sqrt[4]{f(x,y)})^4$, ou seja, $\frac{1}{256} \geq f(x,y)$. Portanto, o valor máximo de $f(x,y)$ é $\frac{1}{256}$, atingido quando $\frac{2}{y} = \frac{3}{x} = 1 - \frac{4}{y} - \frac{3}{x} = \frac{1}{4}$ ou seja $x = 12$ e $y = 8$.

Problema 14: Se *x*, *y* e *z* são números reais positivos, qual o valor mínimo de $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$?

Proposta de Resolução (1): Aplicando a desigualdade das médias aritmética e harmônica, temos $\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Assim, $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$. Portanto, o valor mínimo de $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ é 9, atingido quando $x=y=z$.

Proposta de Resolução (2): Reescrevendo e aplicando Cauchy-Schwarz, temos

$$(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \left(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+\sqrt{z}^2\right).\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right)$$

$$\left(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+\sqrt{z}^2\right).\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \geq \left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\,\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \left(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+\sqrt{z}^2\right).\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \geq 9$$

Portanto, o valor Mínimo de $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ é 9.

Problema 15: Se *x, y* e *z* são números reais positivos e $x+y+z=1$, determine o valor mínimo de $f(x,y,z) = \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$?

Proposta de Resolução: Aplicando a desigualdade Cauchy-Schwarz

$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right).\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ para

$a_1=\sqrt{x},\ a_2=\sqrt{y},\ a_3=\sqrt{z}, b_1=\frac{1}{\sqrt{x}}, b_2=\frac{2}{\sqrt{y}},\ b_3=\frac{3}{\sqrt{z}}$, temos

$$\left(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+\sqrt{z}^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \geq \left(\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\,\frac{2}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\,\frac{3}{\sqrt{z}}\right)^2$$

$$(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right) \geq (1+2+3)^2 = 36$$

Como $x+y+z=1$, temos então $\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)\geq 36$, ou seja, $f(x,y,z)\geq 36$. Portanto, o menor $f(x,y,z)$ valor é 36.

Problema16: EXAME DE QUALIFICACÃO PROFMAT- Setembro de 2012. Qual o menor valor da expressão $\sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}}$ quando *x* e y são números reais positivos quaisquer?

Proposta de Resolução: Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica em $\sqrt{\frac{16x}{y}}$ e $\sqrt{\frac{y}{81x}}$, ambos positivos, temos

$$\frac{\sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}}}{2}\geq\sqrt{\sqrt{\frac{16x}{y}}\sqrt{\frac{y}{81y}}}=\frac{2}{3}.$$

Assim, $\sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}}\geq\frac{4}{3}$, com a igualdade ocorrendo para $\sqrt{\frac{16x}{y}}=\sqrt{\frac{y}{81x}}$, ou seja, $y=36x$.

Logo, o menor valor da expressão $\sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}}$ é $\frac{4}{3}$, para $y=36x$, isto é, *x* = 1 e *y* = 36. Em outras palavras, com *x* = 1 e *y* = 36, a expressão dada atinge seu valor mínimo, que é igual a $\frac{4}{3}$. Há, entretanto, infinitos pontos para os quais este valor mínimo é atingido, todos pertencentes à reta $y=36x$.

A questão, embora tenha sido aplicada em um EXAME DE QUALIFICACÃO PROFMAT, pode ser aplicada a alunos de nono ano, pois seus pré-requisitos são conhecimentos algébricos básicos, como conceitos das operações de Potenciação e Radiciação, bem como suas propriedades.

Problema 17: (Baseado em BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P.A., 2002) Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa R$ 0,50 e que ele vende a R$ 1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. O número de flores que os fregueses compram diariamente é aleatório e tem as seguintes probabilidade: 0,1 de vender 0 flor; 0,4 de vender 1 flor, 0,3 de vender 2 flores e 0,2 de vender 3 flores. Quantas flores deveria o florista ter em estoque a fim de maximizar o seu lucro médio diário?

Proposta de Resolução: Seja X a demanda diária pela flor. Então a distribuição da variável aleatória X é dada por

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Defina também L a variável aleatória representando o lucro diário pela venda das flores em estoque.

De acordo com os dados da questão, podemos dividir a resolução em quatro cenários de estudo, a saber:

Cenário I: Não compra flores para seu estoque.

$L = 0$ com $P(L = 0) = 1$

O lucro médio diário é dado por $E(L) = 0 \text{ x } 1 = 0$.

Cenario II: Passa a comprar uma flor diariamente.

$L = -0{,}50$ com $P(L = -0{,}50) = P(X = 0) = 0{,}1$

$L = 1{,}0$ com $P(L = 1{,}00) = P(X > 0) = 0{,}9$

O lucro médio diário é dado por $E(L) = -0{,}5 \text{ x } 0{,}1 + 1 \text{ x } 0{,}9 = 0{,}85$.

Cenário III: Passa a comprar duas flores diariamente.

$L = -1{,}0$ com $P(L = -1{,}00) = P(X = 0) = 0{,}1$

$L = 0{,}50$ com $P(L = 0{,}50) = P(X = 1) = 0{,}4$

$L = 2{,}0$ com $P(L = 2{,}00) = P(X > 1) = 0{,}5$

O lucro médio diário é dado por $E(L) = -1 \text{ x } 0{,}1 + 0{,}5 \text{ x } 0{,}4 + 2 \text{ x } 0{,}5 = 1{,}10$.

Cenário IV: Passa a comprar três flores diariamente.

$L = -1{,}50$ com P($L = -1{,}50$) = P($X = 0$) = 0,1

$L = 0{,}00$ com P($L = 0$) = P($X = 1$) = 0,4

$L = 1{,}50$ com P($L = 1{,}50$) = P($X = 2$) = 0,3

$L = 3{,}00$ com P($L = 3{,}00$) = P($X = 3$) = 0,2

O lucro médio diário é dado por $E(L) = -1{,}5 \text{ x } 0{,}1 + 0 \text{ x } 0{,}4 + 1{,}5 \text{ x } 0{,}3 + 3 \text{ x } 0{,}2 = 0{,}90$.

Logo, concluímos que no Cenário III, no qual ele tem em estoque duas flores, é o ideal para que seu lucro médio diário seja maximizado, ou seja, ele deveria comprar diariamente 2 flores para ter lucro diário máximo.

3.3 Descrição de conteúdos, objetivos e comentários das questões utilizadas

As questões 1, 2 e 4, apesar de serem de nível mediano, são contextualizadas e agradáveis. Sugerimos sua aplicação em turmas de segundo e terceiro anos do Ensino Médio, pois versam sobre problemas de Geometria Espacial, envolvendo otimização, para cujo real entendimento os alunos deverão ter domínio de conceitos como áreas e volumes de sólidos geométricos, previstos pela nova BNCC aos alunos no final do Ensino Fundamental. Porém, é no segundo ano do Ensino Médio que o aluno ganhará uma maior maturidade de tais conteúdos.

As questões 3, 7, 8, 14 e 16, embora tenham sido aplicadas em um exame de qualificação do PROFMAT, poderão ser trabalhadas como atividades para alunos de nono ano. Algumas, inclusive, retiradas de concursos específicos para este segmento, pois seus pré-requisitos são conhecimentos aritméticos e algébricos básicos, como conceitos das operações de potenciação, radiciação e manipulação algébricas, e de suas propriedades. Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário são umas das habilidades presentes no novo BNCC , em relação ao Ensino Fundamental.

As questões 5 e 6 envolvem, inicialmente, conhecimentos básicos de Geometria Plana para, em seguida, pensarmos na otimização. Lembrando que resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos são habilidades mencionadas no BNCC para o oitavo ano do Ensino Fundamental. Por este motivo, recomendamos a aplicação das mesmas com alunos a partir do nono ano do Ensino Fundamental.

As questões 9, 10, 11, 12, 13 e 15 abordam conceitos de relações e funções, que são importantes para o desenvolvimento da Matemática e na preparação para o Ensino Superior. É estabelecida pelo novo BNCC que o aluno no último ano do Ensino Fundamental deverá possuir a habilidade de compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, trabalho que terá sua continuidade no primeiro ano do Ensino Médio. Por esse motivo, acreditamos que tais questões podem ser trabalhadas no primeiro ano do Ensino Médio, logo após o estudo de máximos e mínimos da Funções Quadráticas, até como uma estratégia diferenciada de se apresentar para os alunos outras formas de se fazer otimização de funções no Ensino Médio.

Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrências é um dos objetos de conhecimento do BNCC em relação ao Ensino Fundamental. Nessa perspectiva, terminamos a série com a questão 17, na qual fazemos otimização usando conceitos de probabilidades e médias ponderadas, conceitos esses de prévio conhecimento do aluno no final do Ensino Médio. É também uma excelente oportunidade para o professor fazer uma leve explanação sobre o conceito de Esperança Matemática para seus alunos e sua importância na tomada de decisão em ambientes de incerteza.

Vale a pena lembrar que a resolução de problemas é uma das vertentes presentes no PCN e no BNCC. No entanto, estamos conscientes de que é preciso tempo em sala de aula para o tratamento adequado desses assuntos, de maneira a vencer os obstáculos epistemológicos inerentes a eles.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vista dos argumentos apresentados após elaboração e contemplação das ideias propostas nos capítulos anteriores, esta Dissertação apresentou as Desigualdades de Médias e Cauchy-Schwarz como ferramentas para o tratamento e resolução de problemas de Otimização, que são atraentes e envolventes, e por esse motivo ajudam a despertar no aluno o gosto pela real aprendizagem da Matemática, além do interesse prático. Sendo extremamente aplicáveis ao cotidiano, tornam a resolução desses problemas acessível principalmente para os alunos da Educação Básica, que ainda não conhecem o Cálculo Diferencial.

Além disso, apresentamos resoluções de diferentes situações-problema que vão desde questões contextualizadas até questões de Concursos, ambas significativas para os alunos interessados em Matemática. Sabemos que a resolução de problemas é fundamental no ensino de Matemática, fazendo com que o aluno enfrente novos desafios e desenvolva sua capacidade de raciocínio, tornando se mais crítico, investigativo e autônomo.

Interessante também é a percepção, por meio da pesquisa das questões de concursos comentadas acima, principalmente de acesso ao primeiro ano do Ensino Médio, de que os professores destas bancas já idealizam as desigualdades de médias como artificio de Otimização em algumas situações, uma vez que os alunos deste segmento desconhecem o Cálculo Integral e Diferencial, e possuem apenas os recursos relativos às desigualdades e às funções quadráticas para realizarem alguns modelos de otimização.

Lembrando que BNCC cita que:

> Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL. 2016, p. 13)

Assim, os objetivos de aprendizagem dos componentes curriculares estabelecidos pela BNCC para toda a Educação Básica visam à aprendizagem e ao desenvolvimento global do aluno. A superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, o protagonismo do aluno em sua aprendizagem e a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende são alguns dos princípios subjacentes à BNCC. Neste mérito, acreditamos que na Matemática assuntos como a Otimização preenchem adequadamente as habilidades e competências mencionadas acima pelo novo BNCC.

Logo, esperamos que esse material tenha cumprido o objetivo principal de mostrar, de modo sucinto, bem como despertar nos professores da educação Básica, a importância das desigualdades das Médias e de Cauchy-Schwarz como ferramentas poderosas e práticas para iniciar modelagens de situações que envolvem otimização, de forma acessível tanto aos alunos quanto aos professores deste segmento.

Evidentemente, este trabalho não se pretende exaustivo e, caso haja um interesse maior pelos leitores, o estudo aqui iniciado pode ser complementado pelas referências bibliográficas, onde se pode achar uma série de textos e questões sobre o assunto, em especial em Lima et al., (2009), que se presta a uma primeira leitura complementar com várias demonstrações da desigualdade A-G no caso de duas variáveis. Por último, como dito na introdução, já desenvolvo há alguns anos, como professor, este trabalho em turmas de nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio preparatórias para concurso junto aos meus alunos com ótimo retorno.

REFERÊNCIAS

BIEMBEGUNT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

BORNHEIM, Gerd A. (org). **Os Filósofos Pré-Socráticos**. São Paulo: Cultrix, 1999-2000.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular. Proposta preliminar**. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016 Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>.Acesso em: 23 mar. 2017.

_______ . **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

_______ . **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).** Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2002

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique première partie, Analyse algébrique**. Éditions Jacques Gabay: Paris, 1989.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. E**ducação Matemática da teoria à pratica**. 8. ed. Campinas: Papirus, 2001.

DANTE, Roberto Luiz. **Didática da resolução de problemas de matemática: 1ª a 5ª série**. São Paulo: Editora Ática, 1989.

GOMES, Carlos A. e Gomes, José Maria. **Tópicos de Matemática IME-ITA** – Olimpíadas Vol1. Ceará: Vestseller, 2010

GROSSMAN, P.; WILSON, S.; SHULMAN, L. *Teacher of substance: subject matter knowledge for teaching*. In: REYNOLDS, M. (Org.). **Knowledge base for the beginning teacher**. New York: Pergamon Press, 1989. p. 23-36.

KIRK,G.S; RAVEN, J.E. **Os Filósofos Pré-Socráticos**. 2. ed. Calouste Gulbenkian 1982.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 1**. 9. ed. Coleção do Professor da Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira da Matemática, 2006.

LIMA, E. **Curso de Análise**. vol.1. 11.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

_______ . **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MIZUKAMI, M. G. **Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman**. Revista Educação, Santa Maria, v. 29, n. 2, p. 1-11, 2004. Disponível em: http://coralx.ufsm.br/revce/revce/2004/02/a3.htm. Acesso em: 17/06/2017.

PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. Rio de Janeiro: Série UFRJ-Projeto Proeditar, 1997.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

SIMMONS, G. **Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SHULMAN, Lee S. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher**. v.15, n.2. fev. 1986, pp.4-14.

________. **Paradigmas y programas de investigación en el estúdio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea**. In: WITTROCK, M. (Ed.) La investigación de la enseñanza I. Barcelona, Buenos Aires – México. Paidós, 1989.