UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROGRESSÕES ARITMÉTCAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM EXPANSIVA

BRUNO XAVIER DE SOUZA FLORES

Instituto de Matemática

PROFMAT

Rio de Janeiro – RJ

Agosto de 2017

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM EXPANSIVA

BRUNO XAVIER DE SOUZA FLORES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática.

Orientadora: Maria Aguieiras Alvarez de Freitas

RIO DE JANEIRO

AGOSTO DE 2017

F639p Flores, Bruno Xavier de Souza
Progressões aritméticas na Educação Básica: uma abordagem expansiva / Bruno Xavier de Souza Flores. -- Rio de Janeiro, 2017.
78 f.

Orientadora: Maria Aguieiras Alvarez de Freitas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2017.

1. Matemática. 2. Progressão aritmética. 3. Didática. I. Freitas, Maria Aguieiras Alvarez de, orient. II. Título.

CIP - Catalogação na Publicação

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM EXPANSIVA

Bruno Xavier de Souza Flores

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 25 de agosto de 2017

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

Instituto de Matemática - UFRJ

Renata Raposo Del-Vecchio, D.Sc.

Instituto de Matemática – UFF

Marisa Beatriz Bezerra Leal, D.Sc.

Instituto de Matemática – UFRJ

Aos professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro que ministraram ótimas aulas e aos colegas de turma do PROFMAT.

Agradecimentos

À CAPES, pela bolsa concedida durante a realização desta pesquisa.

À minha família, pelo apoio, especialmente minha mãe que, desde a graduação, foi a maior incentivadora e guerreira na ajuda emocional e financeira.

Aos meus colegas de classe, que muito ajudaram em várias horas de estudo e troca de informações.

À Jéssica Custódio, pela parceria fundamental para que eu concluísse esta etapa de minha jornada acadêmica.

Aos professores Luiz Gustavo, Marcus Vinícius, Roberto Nunes e Alessandra Coelho mestres que colaboraram com sugestões e orientações ao longo da pesquisa até o final.

À minha orientadora, que fez mudar meu olhar sobre uma dissertação e ampliar minha visão.

RESUMO

Alguns tópicos da Matemática são abordados no Ensino Fundamental e, depois, retomados no Ensino Médio com o objetivo de aprofundar o referido assunto. Não é sempre que essa linha de raciocínio consegue um resultado satisfatório na prática. Propomos neste trabalho inserir a progressão aritmética de primeira ordem de forma introdutória no 9º ano do Ensino do Fundamental, já que se trata de um assunto trabalhado profundamente no Ensino Médio. Assim, nos anos seguintes, poderia ser revisto e ampliado com as progressões aritméticas de segunda ordem e, finalmente, uma apresentação das progressões aritméticas de ordem p. Vale ressaltar que as progressões aritméticas de ordem $p > 1$ não são abordadas no Ensino Médio na maioria das escolas e que pouquíssimos materiais didáticos tratam desse assunto. Consequentemente, poucos professores se deparam com esse conteúdo ao longo de sua formação até a graduação. Por esse motivo, acreditamos que esse trabalho sobre tal tópico interessante e não tão conhecido é de grande valia para os leitores desta dissertação.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática, Progressão aritmética, Didática.

ABSTRACT

Some Mathematics topics are mentioned during upper primary school and are taught once more during high school in order to deepen this very topic. At times this way of thinking does not achieve a satisfactory successful result in practice. This research aims to insert arithmetic progression in first order in a smooth and objective way in year 9 of the Upper Primary and then revisit it in high school, extending to second order arithmetic progression and, finally, introduce order p arithmetic progression. It is relevant to mention that arithmetic progressions of order $p > 1$ are not mentioned in most of the schools during high school and very few books approach this topic. Therefore few teachers are introduced to this thematic during their graduation period. For this reason, we believe this relevant and not widely known topic is really important for the readers of this dissertation.

KEYWORDS: Mathematics, Arithmetic progression, Didactics

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Devido a uma vasta quantidade de fatores, determinados tópicos da Matemática não são abordados ou explorados de uma forma mais satisfatória, dentro do que o conteúdo realmente oferece. Podemos citar, por exemplo, as sequências numéricas, em especial, as progressões aritméticas de primeira ordem e de ordens superiores, que serão o foco deste trabalho.

O autor teve conhecimento e aprofundamento nessa temática apenas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, quando tal conteúdo foi abordado na disciplina Matemática Discreta. Progressões aritméticas de segunda ordem não são transmitidas aos alunos que cursam o Ensino Médio; ademais, poucos livros didáticos abordam esse assunto, limitando até mesmo os alunos com o espírito mais investigativo e curioso, na obtenção do conhecimento extraclasse. Diante dessa situação, considerando também a presença de questões nos concursos públicos militares e civis, em nível de Ensino Médio, destinados ao ingresso no nível superior, sobre progressões aritméticas de segunda ordem, a motivação por essa lacuna aberta no final da educação básica foi potencializada.

Há, então, uma notória contradição entre como é trabalhado o assunto e o que estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em seu artigo 22: "A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores" (BRASIL, 1996).

A presente dissertação contempla os seguintes objetivos: no âmbito geral, discutir a possibilidade de apresentação do tópico progressão aritmética de primeira ordem em turmas de nono ano, como introdução ao conteúdo do Ensino Médio; mais especificamente, sugerir de uma forma gradativa, como o assunto pode ser apresentado e aplicado, contribuindo com professores que considerem que sua turma pode trabalhar o tema; e, por fim, que a dissertação cumpra sua finalidade social ao possibilitar, como fonte de pesquisa, que professores encontrem definições e demonstrações de resultados envolvendo progressões aritméticas de ordem $p \geq 2$.

Esta pesquisa está seccionada em três capítulos. No primeiro capítulo, são apresentados os conceitos e provados de forma rigorosa os principais resultados sobre progressões aritméticas de primeira ordem, denotadas por P.A. No segundo capítulo é relatada uma pesquisa de campo com o intuito de introduzir as progressões aritméticas de 1ª ordem aos alunos do 9º ano. No terceiro capítulo é feita uma abordagem com maior requinte de questões interdisciplinares e contextualizadas com foco no aprofundamento das progressões de primeira ordem. São apresentadas as progressões aritméticas de segunda ordem com definições e demonstrações de teoremas sobre o conteúdo. Ilustramos algumas questões sobre o tema presentes em concursos diversos. E para finalizar o estudo, apresentamos definições e demonstrações de resultados envolvendo progressões aritméticas de ordem $p \geq 2$.

Todo o percurso do trabalho se faz necessário para justificar, com base nos resultados alcançados na pesquisa de campo, a importância de se abordar a progressão aritmética de primeira ordem no Ensino Fundamental II como suporte para trabalhar as progressões aritméticas de segunda ordem e de ordem $p > 2$ no Ensino Médio.

CAPÍTULO 1 – PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE PRIMEIRA ORDEM

Na sociedade, podemos observar padrões que regem determinadas sucessões ou sequências, das mais simples às mais complexas. Um caso particular dentre as muitas sequências numéricas e que é foco deste capítulo é a Progressão Aritmética de ordem 1 ou simplesmente Progressão Aritmética (P.A.), que pode ser conceituada da seguinte forma: **uma sequência numérica representada por (a_n), em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante *r*. O valor *r* é chamado de razão ou diferença comum da progressão aritmética.**

Considerando os aspectos didáticos, e trazendo a aplicação da Matemática para o cotidiano dos estudantes, podemos citar eventos esportivos tais como Jogos Olímpicos e Copa do Mundo de Futebol. No primeiro caso, formamos a sequência dos anos em que acontecem Jogos Olímpicos $(1896, 1900, 1904, 1908, \dots, 2016, \dots)$, ou seja, uma P.A. de razão igual a $(1900 - 1896 = 4)$; no segundo, referente aos anos da Copa do Mundo, temos o caso de uma P.A. finita inicialmente, já que a sequência foi interrompida em decorrência da II Guerra Mundial, representada por $(1930, 1934, 1938)$ e retomada a partir de 1950, formando uma nova P.A. infinita $(1950, 1954, 1958, \dots, 2014, \dots)$ de mesma razão, cujo valor é igual a 4.

Outro exemplo é a alocação das cadeiras na maioria dos teatros e cinemas, que além de obedecer a uma ordem alfabética (Fila A, B, C, D, etc) também se organizam numa ordem numérica, considerando os lados ímpares $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1)$ e lados pares $(2, 4, 6, 8, \dots, 2n)$, sendo *n* um número natural, que são progressões aritméticas de razão igual a 2.

Além disso, como último exemplo ilustrativo da P.A. em nosso cotidiano, é interessante apresentar o chamado “Desafio das 52 semanas”, cujo objetivo é o de acumular uma renda extra, satisfatória no final do ano para usufruto do montante formado. O desafio segue o seguinte passo a passo:

1. A cada semana do ano, você deposita numa conta a quantia correspondente à semana. Ou seja: na primeira semana, você deposita R$1,00; na segunda, R$2,00; e assim por diante, até a última semana, quando você depositará R$52,00.
2. Se você seguir à risca o desafio, terá, ao final do ano, R$1.378,00.

Desafio - 52 Semanas Para Poupar Dinheiro					
Semana	Valor Depositado	Saldo da Conta	Semana	Valor Depositado	Saldo da Conta
1	R$1,00	R$1,00	27	R$27,00	R$378,00
2	R$2,00	R$3,00	28	R$28,00	R$406,00
3	R$3,00	R$6,00	29	R$29,00	R$435,00
4	R$4,00	R$10,00	30	R$30,00	R$465,00
5	R$5,00	R$15,00	31	R$31,00	R$496,00
6	R$6,00	R$21,00	32	R$32,00	R$528,00
7	R$7,00	R$28,00	33	R$33,00	R$561,00
8	R$8,00	R$36,00	34	R$34,00	R$595,00
9	R$9,00	R$45,00	35	R$35,00	R$630,00
10	R$10,00	R$55,00	36	R$36,00	R$666,00
11	R$11,00	R$66,00	37	R$37,00	R$703,00
12	R$12,00	R$78,00	38	R$38,00	R$741,00
13	R$13,00	R$91,00	39	R$39,00	R$780,00
14	R$14,00	R$105,00	40	R$40,00	R$820,00
15	R$15,00	R$120,00	41	R$41,00	R$861,00
16	R$16,00	R$136,00	42	R$42,00	R$903,00
17	R$17,00	R$153,00	43	R$43,00	R$946,00
18	R$18,00	R$171,00	44	R$44,00	R$990,00
19	R$19,00	R$190,00	45	R$45,00	R$1.035,00
20	R$20,00	R$210,00	46	R$46,00	R$1.081,00
21	R$21,00	R$231,00	47	R$47,00	R$1.128,00
22	R$22,00	R$253,00	48	R$48,00	R$1.176,00
23	R$23,00	R$276,00	49	R$49,00	R$1.225,00
24	R$24,00	R$300,00	50	R$50,00	R$1.275,00
25	R$25,00	R$325,00	51	R$51,00	R$1.326,00
26	R$26,00	R$351,00	52	R$52,00	R$1.378,00

Tal desafio pode ser interpretado como uma P.A. de razão igual a 1 e com 52 termos. Seu valor total, ao final de um ano, pode ser encontrado por meio da fórmula da soma dos primeiros n termos que será apresentada e demonstrada na Seção 1.1.

1.1 - Validação de fórmulas sobre progressões aritméticas de ordem 1

Utilizaremos o Princípio de Indução Finita para provar fórmulas e/ou propriedades que serão apresentadas de forma mais suave e com menos rigor no Capítulo 2.

Para demonstrar que uma propriedade P, relativa aos números naturais maiores ou iguais a $u \in \mathbb{N}$, é verdadeira para todo natural $n \geq u$, existe um método baseado no que chamamos Princípio de Indução Finita, que pode ser enunciado como segue abaixo:

Uma propriedade P é verdadeira para todo natural $n \geq u$ *se satisfaz às duas condições seguintes:*

1ª) P é verdadeira para $n = u$

2ª) P é verdadeira para $n = k,\ k \in \mathbb{N}, k\ \geq u,$ *implica que P é verdadeira para* $n = k + 1$.

Aplicaremos tal recurso nas proposições a seguir:

Proposição 1.1:

O termo geral da progressão aritmética $(\boldsymbol{a_n}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots)$ ***de razão r é dado por***

$$\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}).\boldsymbol{r},\ \forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Para $n = 1$ temos que a fórmula é verdadeira, pois $a_1 + (1 - 1).r = a_1$.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para certo natural k, ou seja, que

$a_k = a_1 + (k - 1).r$.

Como $a_{k+1} - a_k = r$ temos que $a_{k+1} = a_k + r$ e, pela hipótese de indução, segue que $a_{k+1} = (a_1 + (k - 1)r) + r$. Portanto, $a_{k+1} = a_1 + kr = a_1 + \big((k + 1) - 1\big)r$.

Logo, $a_n = a_1 + (n - 1)r,\ \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}$.

□

Observemos que a recíproca da proposição anterior é verdadeira:

Se o termo geral de uma sequência $(\boldsymbol{a_n}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots)$ ***é dado por*** $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\boldsymbol{r},\ \forall\ \boldsymbol{n}\ \in\ \mathbb{N}$***, para algum número real r, então*** $(\boldsymbol{a_n})$ ***é uma P.A. de razão r.***

De fato, neste caso $a_{n+1} - a_n = (a_1 + nr) - (a_1 + (n - 1)r) =\ r,\ \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}$.

<u>Proposição 1.2</u>:

Numa progressão aritmética $(\boldsymbol{a_n}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots)$ ***de razão r, a soma*** $\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ ***de seus n primeiros termos é dada por*** $\boldsymbol{S_n = \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right).n}$ ***.***

<u>Demonstração:</u>

Para $n = 1$, temos que a fórmula é verdadeira, pois $S_1 = a_1 = \frac{2a_1}{2} = \left(\frac{a_1+a_1}{2}\right).1$.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para um certo natural k, ou seja, que $S_k = \left(\frac{a_1+a_k}{2}\right).k$. Como $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ e fazendo a substituição de S_k pela expressão dada acima, obtemos $S_{k+1} = \left(\frac{a_1+a_k}{2}\right).k + a_{k+1}$.

Fazendo manipulações algébricas, temos que:

$$S_{k+1} = \frac{(a_1+a_k)k+2a_{k+1}}{2} = \frac{(a_1+a_k)k+a_1+kr+a_k+r}{2} = \frac{a_1+a_k+(k+1)r+(a_1+a_k)k}{2} =$$

$$= \frac{(a_1+a_k)(k+1)+r(k+1)}{2} = \frac{(a_1+a_k+r)(k+1)}{2} = \frac{(a_1+a_{k+1})(k+1)}{2}.$$

Logo, para todo natural *n*, temos que $S_n = \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right).n$.

□

Substituindo a_n por $a_1 + (n-1).r$ na proposição acima, obtemos uma fórmula equivalente para a soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. em função do primeiro termo e de sua razão:

Numa progressão aritmética de razão r e primeiro termo representado por $\boldsymbol{a_1}$***, a soma*** $(\boldsymbol{S_n})$ ***dos n primeiros termos é dada por*** $\boldsymbol{S_n = n.a_1 + \frac{n.(n-1).r}{2}}$***, para todo*** $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$**.**

<u>Proposição 1.3:</u>

Numa progressão aritmética $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots)$ ***de razão r, cada termo, a partir do segundo, é igual à média aritmética entre o termo anterior e o termo posterior na sequência, ou seja,*** $\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}}$***,*** $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ ***e*** $\boldsymbol{n \geq 2}$**.**

<u>Demonstração:</u>

Para $n = 2$, a fórmula é verdadeira, pois $a_2 = a_1 + r = \frac{2a_1+2r}{2} = \frac{a_1+a_1+2r}{2} = \frac{a_1+a_3}{2}$. Suponhamos que afirmação é verdadeira para um certo natural $k \geq 2$, ou seja, que

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Como $a_{k+1} = a_k + r$, temos pela hipótese de indução que $a_{k+1} = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + r$. Portanto, $a_{k+1} = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}+2r}{2} = \frac{a_{k-1}+r+a_{k+1}+r}{2} = \frac{a_k+a_{k+2}}{2}$

Logo, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, para $n \in N, n \geq 2$.

□

<u>Proposição 1.4 :</u>

Para quaisquer quatro termos a_m, a_n, a_p e a_q de uma P.A. de razão r, se a soma dos índices $m + n$ é igual à soma $p + q$, então a soma $a_m + a_n$ é igual à soma $a_p + a_q$.

<u>Demonstração:</u>

Utilizando a fórmula do termo geral temos:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= a_1 + (m-1).r \\ a_n &= a_1 + (n-1).r \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_m + a_n = 2.a_1 + (m+n-2).r \qquad \text{(I)}$$

De maneira análoga, temos:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= a_1 + (p-1).r \\ a_q &= a_1 + (q-1).r \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_p + a_q = 2.a_1 + (p+q-2).r \qquad \text{(II)}$$

Como $m + n = p + q$ por hipótese, de (I) e (II) concluímos que $2.a_1 + (m+n-2).r = 2.a_1 + (p+q-2).r$. Portanto, $a_m + a_n = a_p + a_q$.

□

1.2 - RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E FUNÇÕES AFINS

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma função afim quando existem números reais a e b tais que $f(x) = a.x + b, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Funções afins e progressões aritméticas estão intimamente relacionadas, como podemos constatar a seguir.

Proposição 1.5:

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim se e somente se existe um número real a tal que, para toda progressão aritmética $(\,x_n\,) = (x_1, x_2, x_3, x_4 \dots, x_n, \dots)$, tem-se que a sequência $(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n), \dots)$ é uma progressão aritmética de razão ar, onde r é a razão da P.A. inicial. Neste caso, $f(x) = ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R}$, onde $b = f(0)$.

Demonstração:

Se $f(x) = ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R}$, e $(x_1, x_2, x_3 x_4, \dots x_n, \dots)$ uma progressão aritmética de razão *r* então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_1 + (n-1).r$, e, portanto,

$$f(x_n) = ax_n + b = a.(x_1 + (n-1).r) + b = ax_1 + b + (n-1).ar.$$

Tomando $ax_1 + b = A_1$ e $ar = R$, podemos escrever $f(x_n) = A_1 + (n-1)R$. Logo, a sequência $(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n), \dots)$ é uma progressão aritmética de razão $R = ar$.

Reciprocamente, suponhamos que existe um número real *a* tal que para qualquer P.A. $(x_1, x_2, x_3 x_4, \dots x_n, \dots)$ temos que $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n), \dots)$ é uma progressão aritmética de razão *ar*, sendo *r* a razão de $(\,x_n\,)$.

Consideremos a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Então $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ e $g(x_{n+1}) - g(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n) = ar, \forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, a função g também transforma progressões aritméticas de razão *r* em progressões aritméticas de razão ar.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, a sequência $(0, x, 2x, 3x, \dots)$ é uma P.A. $r = x$. Logo, a sequência $(g(0), g(x), g(2x), g(3x), \dots)$ é uma P.A. de razão $R = ax$. Portanto, $g(x) - g(0) = ax \Rightarrow g(x) = ax \Rightarrow f(x) - f(0) = ax \Rightarrow f(x) = ax + f(0)$.

Assim, $f(x) = ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R}$, onde $b = f(0)$. $\square$

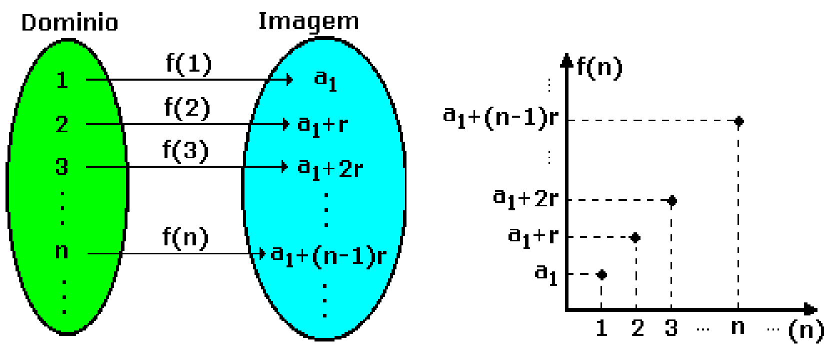
Exemplo 1.1:

Consideremos a progressão aritmética $(12, 6, 0, -6, -12, -18, \dots)$ de razão -6

Se tomamos as funções afins $f(x) = 3x + 4$ e $h(x) = \frac{2}{3}x - 1$, então:

- A sequência $(f(12), f(6), f(0), f(-6), f(-12), f(18), \dots)$, dada por $(40, 22, 4, -14, -22, -40, \dots)$, é uma progressão de razão $-18 = 3.(-6)$;
- A sequência $(h(12), h(6), h(0), h(-6), h(-12), h(18), \dots)$, dada por $(7, 3, -1, -5, -9, -13, \dots)$, é uma progressão aritmética de razão $-4 = \frac{2}{3}(-6)$.

Uma progressão aritmética cujo termo geral é $a_n = a_1 + (n-1).r$, é a restrição de uma função afim f ao conjunto $\mathbb{N}$, a saber, $f(x) = (a_1 - r) + rx$ Assim, a representação gráfica dos termos da progressão aritmética é formada pelos pares ordenados(n, a_n).



CAPÍTULO 2 – PROPOSTA PARA INSERÇÃO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE PRIMEIRA ORDEM NO ÚLTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC), em sua segunda versão revista, de abril de 2016, divide a Matemática em cinco eixos: Números e Operações, Geometria, Grandezas e Medidas, Álgebras e Funções, Estatística. Neste sentido, o texto da BNCC esclarece que:

> O conhecimento matemático tem, em suas origens, a busca, pelo ser humano, de respostas a problemas oriundos de suas práticas sociais, como a agricultura, comércio e construção civil, dentre outras.[...] Em permanente avanço, a Matemática se estabelece como ciência, desenvolvendo especificidades próprias, como uma linguagem sintética, direta e objetiva, com menor grau de ambiguidades, métodos rigorosos de validação interna e desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínios.
> (2016, p. 131).

Com isso, o que se propõe é que o ensino da Matemática, no geral, proporcione aos estudantes oportunidades para o desenvolvimento da autoconfiança, mediante sua participação ativa em experiências desafiadoras e atraentes. Especificamente, nos anos finais do Ensino Fundamental, busca-se a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos para a compreensão do mundo à volta, bem como a comunicação numérica e a observação sistemática dos aspectos quantitativos e qualitativos das práticas sociais.

Para o que interessa nesta Dissertação, ou seja, estabelecer uma proposta sutil e objetiva de abordar a progressão aritmética de primeira ordem no Ensino Fundamental II como suporte para trabalhar progressão aritmética de segunda ordem, e até ordens superiores, no Ensino Médio, vale ressaltar que na BNCC, em relação à Álgebra e Funções nos anos finais do Ensino Fundamental, em nenhum momento se estuda o conceito de progressão aritmética. No caso do nono ano, por exemplo, a proposta é:

> Associar uma equação linear de 1º grau com duas variáveis a uma reta no plano cartesiano e relacionar a solução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas variáveis à sua representação geométrica.
>
> Reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis que pode ser representada nas formas algébrica e gráfica, utilizando essa noção para analisar e compreender situações que envolvem relações funcionais entre duas variáveis.
>
> Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
>
> Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, a partir de suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar

> problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau.
> (2016, p. 435)

Sendo assim, temos como proposta introduzir as progressões aritméticas no 9º do Ensino Fundamental com o intuito de apresentar o conteúdo com aplicabilidade prática, bem como para a construção das fórmulas e a possibilidade de revisão para o aprofundamento no Ensino Médio, visto que esse tópico, até então, não obteve oportunidade de ser bem lapidado. É o que passaremos a discutir.

2.1 –Progressão aritmética no 9º ano do Ensino Fundamental com uma abordagem mais sutil

Definições e propriedades serão apresentadas por meio de situações-problema, de um modo mais didático e acessível, no desenvolvimento cognitivo do aluno. Sendo assim, nesta seção trabalharemos com sete exemplos.

Exemplo 2.1:

Quando completou 18 anos, Vitor decidiu comprar um novo aparelho celular, mas viu que só tinha R$40,00. Então, ele guardou esses R$40,00 e decidiu que, a partir do mês seguinte, reservaria R$15,00 de seu salário mensal para adquirir o celular. Os valores formados por Vitor, a partir do mês do seu aniversário, formam uma sequência: $(40; 55; 70; 85; 100; \ldots)$

Observe que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com 15 ou que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer, a partir do segundo, é igual a 15.

Nesse momento introduzimos o conceito de progressão aritmética (P.A.):

Uma sequência numérica representada por (a_n)***, em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante r. O valor r é chamado de razão ou diferença comum da progressão aritmética.***

Exemplo 2.2:

Em um cinema, a quantidade de assentos na primeira fila é 25; na segunda, são 28; e na terceira, 31, e assim sucessivamente. Ou seja, para saber a quantidade de lugares em uma fileira qualquer "n", basta acrescentar ao primeiro termo da progressão, 25, o número da fileira "(n-1)", multiplicada pela constante fixa chamada de razão.

$Fila\ 1\ \rightarrow 25$

$Fila\ 2\ \rightarrow 28\ = 25 + 1.3$

$Fila\ 3\ \rightarrow 31 = 25 + 2.3$

.
.
.

$\boldsymbol{Fila\ n}\ \rightarrow \boldsymbol{25} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1}).\boldsymbol{3}$

Com essa formalização, é possível obter a quantidade de assentos de qualquer fila.

O exemplo acima serve como motivação e introdução para uma generalização para uma quantidade *n*, sendo *n* um número natural. Vamos, agora, encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.A., conhecendo o 1º termo e a razão "*r*".

Seja uma P.A. $(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots)$ de razão *r*. Utilizando a definição de P.A. utilizada acima, temos:

$a_2 - a_1 = r \rightarrow \quad a_2 = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{r}$

$a_3 - a_2 = r \rightarrow a_3 = a_2 + r \rightarrow \quad a_3 = a_1 + r + r = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{2r}$

$a_4 - a_3 = r \rightarrow a_4 = a_3 + r \rightarrow \quad a_4 = a_1 + 2r + r = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{3r}$

$\vdots$

$a_n - a_{n-1} = r \rightarrow a_n = a_{n-1} + r \rightarrow a_n = a_1 + (n-2).r + r = \boldsymbol{a_1} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1}).\boldsymbol{r}$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1}).\boldsymbol{r}$$

Exemplo 2.3:

Os aprovados em um concurso público foram convocados, ao longo de um ano, para ocupar os respectivos cargos, segundo os termos de uma P.A.: em janeiro, foram chamadas 18 pessoas; em fevereiro, 30; em março, 42, e assim por diante. Quantas pessoas foram convocadas no mês de agosto?

Podemos preencher a tabela

Janeiro	*Fevereiro*	*Março*	*Abril*	*Maio*	*Junho*	*Julho*	*Agosto*
18	*30*	*42*	*54*	*66*	*78*	*90*	*102*

Ou podemos observar que se trata de uma P.A., com $a_1 = 18$ *e razão r = 12, utilizar a fórmula para determinar diretamente o valor específico:*

Janeiro: mês 1, Fevereiro: mês 2 , ... , Agosto: mês 8.

$$a_8 = a_1 + (8-1).r$$

$$a_8 = 18 + 7.12$$

$$a_8 = 18 + 84$$

$$a_8 = 102$$

Foram convocados 102 candidatos no mês de agosto.

A seguir, apresentamos a propriedade referente à média aritmética na P.A de primeira ordem. Será feita, inicialmente, uma abordagem com observação entre os números e, consequentemente, uma ampliação para uma posição *n* qualquer.

Exemplo 2.4:

Considere a P.A. $(5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; \dots)$. *Observe que:*

$9 - 5 = 4 = r \quad (I)$

$13 - 9 = 4 = r \quad (II)$

Das igualdades I e II, temos:

$9 - 5 = 13 - 9$

$9 + 9 = 13 + 5$

$2.9 = 13 + 5$

$9 = \dfrac{13+5}{2}$

Da mesma forma, temos:

$$13 = \frac{9+17}{2}\ , \qquad 17 = \frac{13+21}{2}$$

E assim por diante.

Podemos interpretar a situação acima da seguinte forma:

Propriedade:

A partir do segundo termo, cada termo da P.A, é igual à média aritmética entre o termo posterior e o termo anterior.

Vamos comprovar tal propriedade para uma posição "*n*" qualquer, sendo *n* um número natural maior que 1.

Considere três termos consecutivos $a_{n-1}\,,\ a_n\,,a_{n+1}$ da P.A., representada por $(a_1;\ a_2;\ a_3; \ldots;\ a_{n-1}\ ;\ a_n\ ;\ a_{n+1}\ ; \ldots)$. Temos por definição que:

$$a_n - a_{n-1} = r \quad (III)$$

$$a_{n+1} - a_n = r \quad (IV)$$

Das igualdades (III) e (IV), concluímos que:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$2.a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Exemplo 2.5:

Descubra os valores das constantes x e y presentes na progressão aritmética $(3\ ;\ x\ ;\ 4{,}2\ ;\ y\ ;\ 5{,}4\ ; \ldots)$.

Aplicando a propriedade acima, encontramos, de modo mais breve, os valores pedidos.

$$x = \frac{3 + 4{,}2}{2} = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6$$

$$y = \frac{4{,}2 + 5{,}4}{2} = \frac{9{,}6}{2} = 4{,}8$$

Soma dos "n" primeiros termos de uma progressão aritmética

Muitas foram as contribuições do alemão, Carl F. Gauss (1777-1855) à ciência e, em particular, à Matemática, cuja vocação se manifestou desde cedo, perto dos dez anos de idade. Conta-se que Gauss surpreendeu seu professor ao responder o valor da soma $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100)$ em pouquíssimo tempo. Provavelmente, ele notou a propriedade 2 mostrada anteriormente na P.A. $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100)$.

$a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101$

$a_2 + a_{99} = 2 + 99 = 101$

$a_3 + a_{98} = 3 + 98 = 101$

.
.
.

$a_{50} + a_{51} = 50 + 51 = 101$

Assim, Gauss teria agrupado os 100 termos da soma em 50 pares de números cuja soma é 101, obtendo como resultado $50.51 = 5050$.

Um raciocínio equivalente ao usado por ele consiste em escrevera soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$ de "trás para frente":

$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \quad (I)$

$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \quad (II)$

Fazendo (I) + (II) , temos:

$2.S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$

A parcela 101 aparecerá 100 vezes.

Assim, $2.S = 100 . 101$

$$S = \frac{100.101}{2} = 5050$$

Exemplo 2.6:

Através de um modo prático obtenha a soma dos 20 termos da P.A. de 1ª ordem $(3; 6; 9; 12; \dots; 51; 54; 75; 60)$.

$a_1 + a_{20} = 3 + 60 = 63$

$a_2 + a_{19} = 6 + 57 = 63$

.
.
.

$a_3 + a_{18} = 9 + 54 = 63$

Temos 10 pares de números cuja soma é 63, obtendo como resultado $63.10 = 630$.

$$S = \frac{(3 + 60).20}{2} = 63.10 = 630$$

De modo geral, para uma P.A $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_{n-2}, a_{n-1\ ,} a_n\ , \ldots)$ temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$

Nos parênteses, comparecem somas de dois termos cujos índices somam sempre $(1 + n)$. Logo, essas n somas são todas iguais a $a_1 + a_n$ e concluímos que: $2.S_n = (a_1 + a_n).n$. Assim,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Exemplo 2.7:

Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.A. (38 ; 42 ; 46 ; ...).

Primeiro devemos encontrar o valor do décimo termo.

$a_{10} = a_1 + 9.r$

$a_{10} = 38 + 9.4 = 38 + 36 = 74$

Assim, a soma dos dez primeiros termos da P.A. é:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(38 + 74).10}{2} = \frac{112.10}{2} = \frac{1120}{2} = 560$$

2.2–PESQUISA DE CAMPO NA INSERÇÃO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA NO ÚLTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Um pouco de experiência em sala de aula, seja estagiando ou lecionando, deixa clara a dificuldade dos alunos com a Álgebra e a Aritmética, que estão intimamente relacionadas ao tema desta dissertação. Por isso, um bom embasamento teórico referente aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) no Ensino Fundamental se faz necessário para um suporte e elucidação no tocante a forma de trabalhar as progressões aritméticas.

Saber as técnicas e as regras que fazem parte destes campos da Matemática é importante. Mas, a compreensão dos conceitos algébricos e a capacidade de aplicá-los devem ser mais valorizadas, visando a uma aprendizagem significativa.

Os PCNs foram criados para guiar o trabalho docente, respeitando a concepção pedagógica de cada educador e a pluralidade cultural brasileira. Eles desafiam o professor a repensar a sua prática pedagógica, mas estão longe de ser um modelo curricular homogêneo e impositivo.

Sua meta principal é garantir a crescente igualdade entre os cidadãos, fazendo com que todos tenham direito ao conjunto dos conhecimentos considerados relevantes para se viver em sociedade. As finalidades do ensino de Matemática visando à construção da cidadania baseado nos PCNs indicam como objetivos do Ensino Fundamental levar o aluno a:

> identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
>
> fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
>
> selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
>
> resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
>
> comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
>
> estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
>
> sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
>
> interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
>
> (BRASIL, 1997, p. 37)

Dessa forma, o estudante deve se mostrar capacitado em realizar demonstrações, modelizar e representar problemas por meio de equações identificando parâmetros, variáveis, relações e manter contato com fórmulas.

O processo metodológico desta pesquisa foi inspirado e adaptado a partir da proposta de avaliar estudantes por meio do chamado Teste em duas fases, proposto por Abrantes (1995), cujo método de avaliação consiste em:

> Uma proposta de atividade que tem por objetivo de proporcionar alguma prática e discussão sobre o processo de apreciar as primeiras respostas dos alunos a um problema e dar-lhes sugestões apropriadas para melhorarem ou desenvolverem essas respostas numa segunda fase.
> (ABRANTES,1995, p.23)

Esse modo de avaliação está de acordo com o que é apresentado nos PCNs. Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios. Assim, perceber e analisar o erro, pode ser uma pista interessante e eficaz. Na aprendizagem escolar, o erro é um passo para a aprendizagem. Em outras palavras, é, também, um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, acaba fazendo tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução.

Neste trabalho, portanto, faremos em consonância com as diretrizes de nossa referência teórica para avaliação. Aproveitar os erros para buscar os acertos e, assim, consolidar uma discussão em que as dúvidas possam ser sanadas.

2.2.1 – PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa de campo foi realizada na Escola Municipal Ginásio Carioca Aleksander Henryk Laks, da rede Municipal de Ensino, localizada no Município do Rio de Janeiro, precisamente no bairro de Gardênia Azul. É uma escola de turno único, cujo objetivo é o de formar alunos autônomos e ampliar sua capacidade crítica, por meio de disciplinas como Estudo Dirigido e Projeto de Vida. Seu funcionamento é das 7h30min às 14h30min, oferecendo três refeições diárias ao aluno, e espaço físico privilegiado. A escola atende alunos do 7º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental, em sua maioria, de classe média baixa. A atividade dividida em duas fases foi proposta para duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental.

Os encontros para a execução da pesquisa foram marcados diretamente com os alunos, com uma semana de antecedência, em que o professor aplicador das atividades não possuía carga horária com as duas turmas analisadas.

Nos dias estipulados para as turmas, que normalmente se apresentam interessadas e detentoras de rendimento regular para bom, os alunos mostraram uma postura acolhedora e animadora com uma significativa colaboração e participação.

Para analisar o grau de absorção e envolvimento dos alunos do 9º ano com as sequências numéricas e, em especial, progressões aritméticas, selecionamos três listas com exercícios sobre o tema. Dividimos as atividades em dois encontros.

1º encontro: distribuição de duas listas de questões, leitura e instruções para a realização das atividades e constante troca de informações, verbalmente e com exposição no quadro branco, proporcionando ao aluno correção de alguns erros em suas folhas. Neste momento, os alunos observaram padrões e concluíram generalizações (fórmulas) para representar as situações-problema.

2º encontro: dividido em dois momentos: (1) entrega das folhas do 1º encontro para possíveis correções das atividades com apoio do professor, explanando novamente o conteúdo e procedendo com a leitura das atividades. Em seguida foi trabalhada a última lista com questões similares às do 1º encontro, novamente com a leitura e instruções do professor para aplicar fórmulas e propriedades, estabelecendo um *feedback* de como questões parecidas foram resolvidas anteriormente sem fórmulas e, agora, diante desse recurso foram resolvidas mais brevemente nos dois primeiros tempos de aula e (2) entrega das folhas da 2ª atividade para possíveis correções das tarefas com apoio do professor, explanando novamente o conteúdo e procedendo a leitura detalhada das atividades no último tempo de aula no mesmo dia que foi executada pelos alunos a última lista de atividades.

As questões foram baseadas em três referências bibliográficas do Ensino Médio: *Matemática: temas e* metas, de Antonio dos Santos Machado (1986); *Matemática: novo olhar*, de Joamir Souza (2010); *Matemática: ciência e aplicações*, de Gelson Iezzi *et al.*(2010). Tais autores e obras foram escolhidos seguindo, pelo menos, um dos dois critérios fundamentais: (1) a didática e a clareza da linguagem dos autores e (2) consonância com os PCNs.

No primeiro dia de atividades, os alunos fizeram sete questões desmembradas em duas listas distintas, em que uma continha apenas duas e a outra cinco questões; no segundo dia de realização, responderam cinco questões similares às que foram abordadas anteriormente, revisando a fórmula do termo geral, propriedades de progressão aritmética e soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética.

O uso de calculadora não foi permitido, porém as informações necessárias para a realização das atividades foram explanadas na lousa branca.

No primeiro dia o encontro teve uma duração de dois tempos de 50 minutos com mais uma prorrogação de 10 minutos para alguns alunos que sentiram a necessidade de fazer alguns retoques.

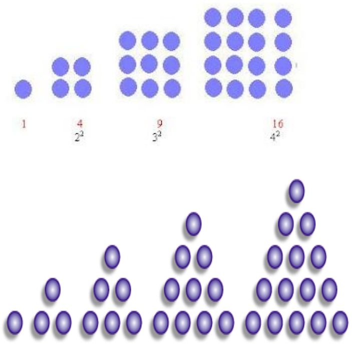
No segundo dia os alunos realizaram a segunda lista e mais os ajustes do trabalho nos dois tempos iniciais do dia com 50 minutos cada um e no último tempo os retoques necessários ao trabalho para o desfecho final do processo metodológico utilizado.

2.2.2 - ATIVIDADES PROPOSTAS

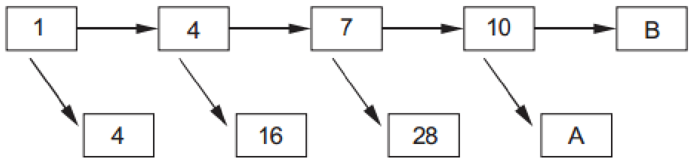
a) Primeiro momento do 1º Encontro (Folha 1):

Aluno(a):_______________________________ Turma:_____ Data: ___/___/____

1 – Observe as figuras abaixo e desenhe a próxima figura da sequência. Depois, escreva a sequência numérica formada pelas figuras.



2 – Observe o diagrama e seu padrão de organização.



A diferença numérica entre A e B, quando se completa o diagrama de acordo com o padrão, é igual a

a) 17

b) 27

c) 37

d) 47

b) Segundo momento do 1º Encontro (Folha 2):

Aluno(a):________________________________ Turma:_____ Data: ___/___/____

1 – Observe as sequências numéricas abaixo e preencha os valores desconhecidos nos espaços através de um padrão existente:

$(7\,;11\,;15\,;\langle\quad\rangle\,;\langle\quad\rangle\,;\ldots)$

$(90\,;\langle\quad\rangle\,;60\,;45\,;\langle\quad\rangle;\ldots)$

$(8\,;17\,;26\,;\langle\quad\rangle\,;44\,;\langle\quad\rangle\,;\ldots)$

2 – Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que no dia anterior. Se no 5º dia o estudante correu 17 minutos, determine a duração do treino:

a. No 4º dia;
b. No 10º dia.

3 – O aluno Gabriel decidiu treinar para uma corrida que haverá no colégio. Para seu treinamento ele resolveu correr 5 voltas na quadra no primeiro dia, 7 voltas no segundo dia e assim sucessivamente ao longo de uma semana.

a. Quantas voltas ele deu no quarto dia?
b. Quantas voltas ele deu no total?

Dias da semana	**Número de voltas**
Domingo	
Segunda	
Terça	
Quarta	
Quinta	
Sexta	
Sábado	
Total	

4 – O número mensal de passagens vendidas por uma determinada empresa aérea

aumentou no ano de 2011 nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se manteve para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em novembro de 2011?

Meses do ano de 2011	**Número de passagens vendidas**
Janeiro	
Fevereiro	
Março	
Abril	
Maio	
Junho	
Julho	
Agosto	
Setembro	
Outubro	
Novembro	

5 – Uma **progressão aritmética** (abreviadamente, P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante **r**.

Observe a sequência (2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 ; ...). É uma P.A.?

Representando o 1º termo por a_1, o 2º termo por a_2 e assim sucessivamente, responda os itens abaixo:

i. Qual o valor de a_5?

ii. Qual o valor de a_{10}?

iii.Qual o valor de $a_2 + a_7$?

iv. Qual o valor de a_{20}?

v. Qual o valor de a_{100}?

b) 2º Encontro:

Aluno(a):_________________________________ Turma:_____ Data: ___/___/____

1 – Em um cinema, número de assentos na primeira fila é 25; na segunda, 28; na terceira, 31, e assim sucessivamente. Responda:

a) Existe um padrão na sequência que representa os números de assentos em cada fila? Qual?

b) Qual o número de assentos na quinta fila? E na oitava fila?

a_1	25
a_2	25 + 3.__
a_3	25 + 3.__
a_4	25 + 3.__
a_5	25 + 3.__
a_6	25 + 3.__
a_7	25 + 3.__
a_8	25 + 3.__

c) É possível determinar uma expressão ou lei de formação para encontrar o valor de assentos em uma fila de posição "*n*"?

2 – Voltemos à progressão aritmética $(2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 ; ...)$.

a) Qual o valor de a_{100}?

b) É possível determinar uma expressão ou lei de formação para encontrar o valor de a_n?

3 – Conta-se que um professor de Matemática mandou aos alunos de sua turma que somassem de 1 a 100 como forma de mantê-los ocupados:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = ??$$

O professor ficou surpreso quando percebeu que um dos alunos havia feito a soma corretamente e em pouco tempo, usando a seguinte estratégia:

$$a_1 + a_{100} =$$

$$a_2 + a_{99} =$$

$$a_3 + a_{98} =$$

$$a_4 + a_{97} = \qquad\qquad S_{100} = \frac{\quad}{2}.101$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad S_{100} = \_\_\_.101$$

$$a_{50} + a_{51} = \qquad\qquad S_{100} = \_\_\_\_\_\_\_$$

4 – Numa cerimônia militar, os soldados de um quartel foram organizados em 20 fileiras. Na primeira havia 18 soldados, na segunda 20 soldados, na terceira 22 soldados e assim sucessivamente mantendo a regularidade.

i. Qual o número a_{20} de soldados na vigésima fileira?
ii. Qual o número total S_{20} de soldados do quartel?
iii. É possível obter uma expressão para encontrar o valor de S_{20}?

5 – Marcos recebia do seu pai uma mesada de R$ 300,00. Muito esperto, o garoto propôs que a mesada passasse a ser paga aos poucos: R$ 1,00 no 1º dia, R$ 2,00 no 2º dia, R$ 3,00 no 3º dia, e assim por diante, mantendo o padrão até o 30º dia.

Qual passaria a ser o novo valor da mesada?

2.2.3. RELATO DAS EXPERIÊNCIAS

Relataremos observações, sugestões e a fala de alguns alunos no primeiro dia de verificação.

Os alunos iniciaram com a primeira folha composta apenas de dois exercícios de caráter introdutório ao assunto por meio de figuras envolvendo sequências numéricas. A atividade teve por finalidade fazer com que os alunos observassem os padrões de determinadas sequências numéricas para uma motivação e envolvimento em relação às atividades posteriores, especificamente nas progressões aritméticas.

A maioria dos alunos utilizou bem a tabela como suporte na resolução das questões que envolviam a descoberta de um valor na posição n estipulada e auxílio na interpretação correta para determinar o somatório pedido.

As turmas, de um modo geral, gostaram muito do assunto, pediram mais aulas com perfil assim e tarefas extras sobre a temática exposta.

A duração do tempo estipulado na resolução das duas folhas do 1º dia da pesquisa foi o suficiente para realizá-las com calma e eficiência.

Alguns alunos conseguiram observar uma estratégia bem fundamentada e sem a formalização para encontrar o valor do a_{100} pedido na questão 5 da Atividade 1 do primeiro encontro; outros, no entanto, sentiram dificuldades na questão da simbologia.

No segundo encontro, os alunos interagiram muito bem na elaboração das fórmulas dos exercícios e concordaram com a maior praticidade para resolver problemas. No entanto, o empenho e a motivação dos estudantes não foram tão marcantes quanto no primeiro encontro, já que estiveram em duas semanas consecutivas de avaliação interna (prova bimestral) e externa (via Secretaria Municipal de Educação), antes da realização das atividades do segundo encontro. Consequentemente, esse desgaste e cansaço fizeram com que o foco e a frequência nas atividades diminuíssem um pouco. Vale ressaltar, no entanto, que a participação, interesse e resultados obtidos por essas duas turmas foi consideravelmente satisfatório e relevante para validação da proposta desta Dissertação.

Ficou claro pelas resoluções que eles se acostumaram com as simbologias $a_1, a_n\ e\ S_n$ realizando as contas sem muito formalismo.

2.3 – RESULTADOS DAS ATIVIDADES

A seguir, estão expostas as questões que fizeram parte do teste aplicado ao público da pesquisa, considerações a respeito delas, os resultados obtidos e algumas respostas dos avaliados, que servirão de exemplo para comentarmos os principais erros cometidos por eles.

No primeiro dia de sondagem tivemos um total de 64 alunos juntando as duas turmas de 9º ano.

ATIVIDADE 1 - FOLHA 1	1º DIA	PORCENTAGEM
Alunos que acertaram as duas questões	48	75%
Alunos que erraram apenas uma questão	14	22%
Alunos que erraram as duas questões	2	3%
Total de alunos	64	100%

Na questão 1 da folha 1 do 1º dia, o índice de erros foi bem maior do que na segunda, visto que, a primeira fazia relação com sequências numéricas e formação de figuras.

As questões foram similares propositalmente para incluir a prática e aplicação das fórmulas presentes nas progressões aritméticas. Tais auxílios para resolução foram explanados e construídos com a participação dos alunos e deixados no quadro branco como fonte de consulta.

ÍNDICE DE ACERTOS ATIVIDADE 1 – FOLHA 2	1º DIA	PORCENTAGEM
Questão 1	57	89 %
Questão 2	57	89%
Questão 3	49	77%
Questão 4	55	86%
Questão 5	46	72%
Total de alunos	64	

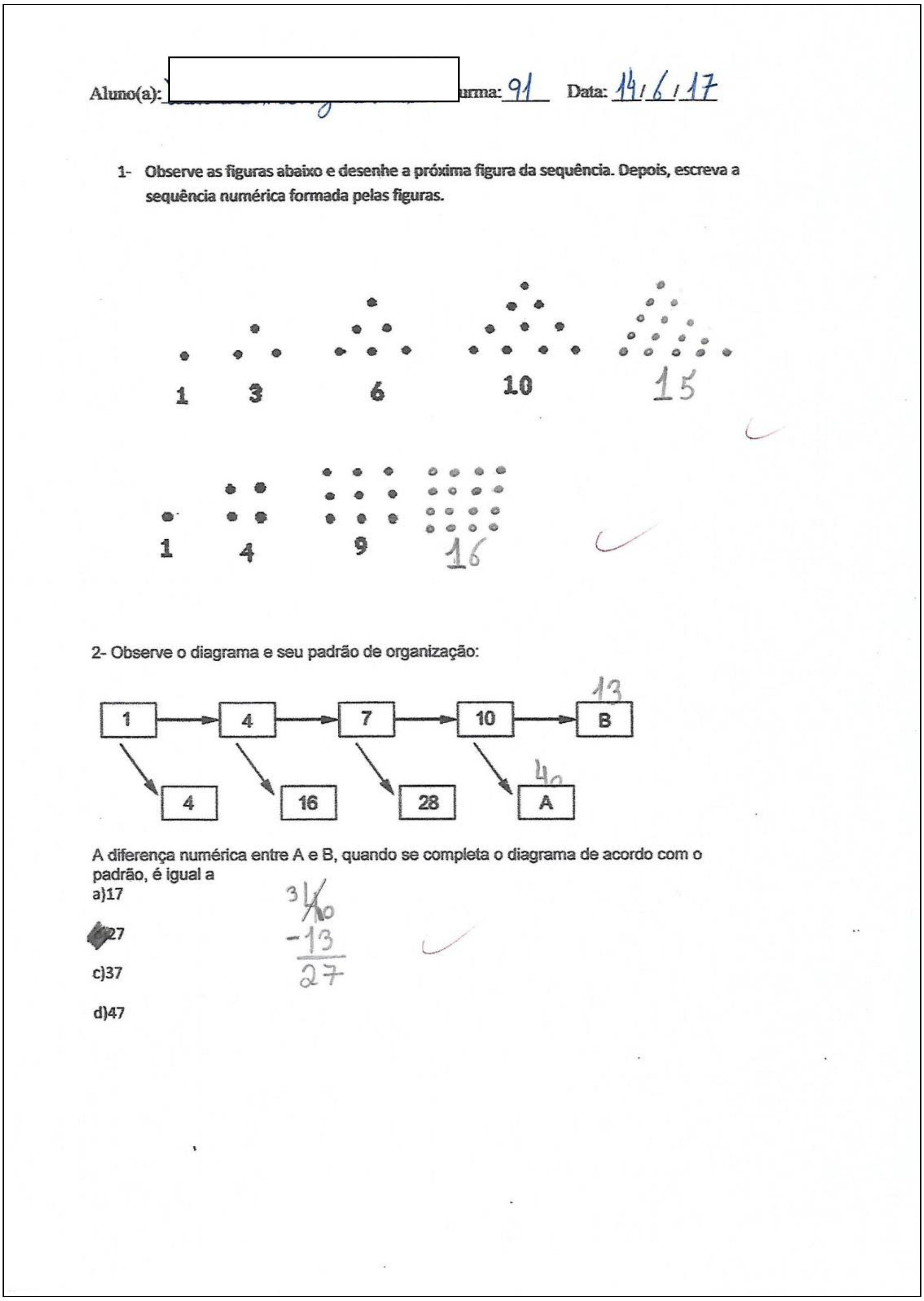
No segundo dia de verificação, 60 alunos realizaram as atividades com uma interferência menor do professor na aplicação. Foi feita uma leitura pelo aplicador envolvendo todas as questões. Dentre as questões a de número quatro por ser mais extensa e possuir um espaço menor para as resoluções na própria folha apresentou um índice maior de erros.

Houve alunos pedindo questões com mais dificuldade para continuarem envolvidos na aula, pois terminaram rápido a sua avaliação.

ÍNDICE DE ACERTOS ATIVIDADE 2	2º DIA	PORCENTAGEM
Questão 1	53	88%
Questão 2	53	88%
Questão 3	57	95%
Questão 4	42	70%
Questão 5	48	80%
Total de alunos	60	

Primeiro encontro:

Folha 1: primeiro exemplo



Aluno(a): urma: 91 Data: 14/6/17

1- Observe as figuras abaixo e desenhe a próxima figura da sequência. Depois, escreva a sequência numérica formada pelas figuras.

1 3 6 10 15

1 4 9 16

2- Observe o diagrama e seu padrão de organização:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 10 & \rightarrow & \overset{13}{B} \\ \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\ & 4 & & 16 & & 28 & & \overset{40}{A} & \end{array}$$

A diferença numérica entre A e B, quando se completa o diagrama de acordo com o padrão, é igual a

a)17

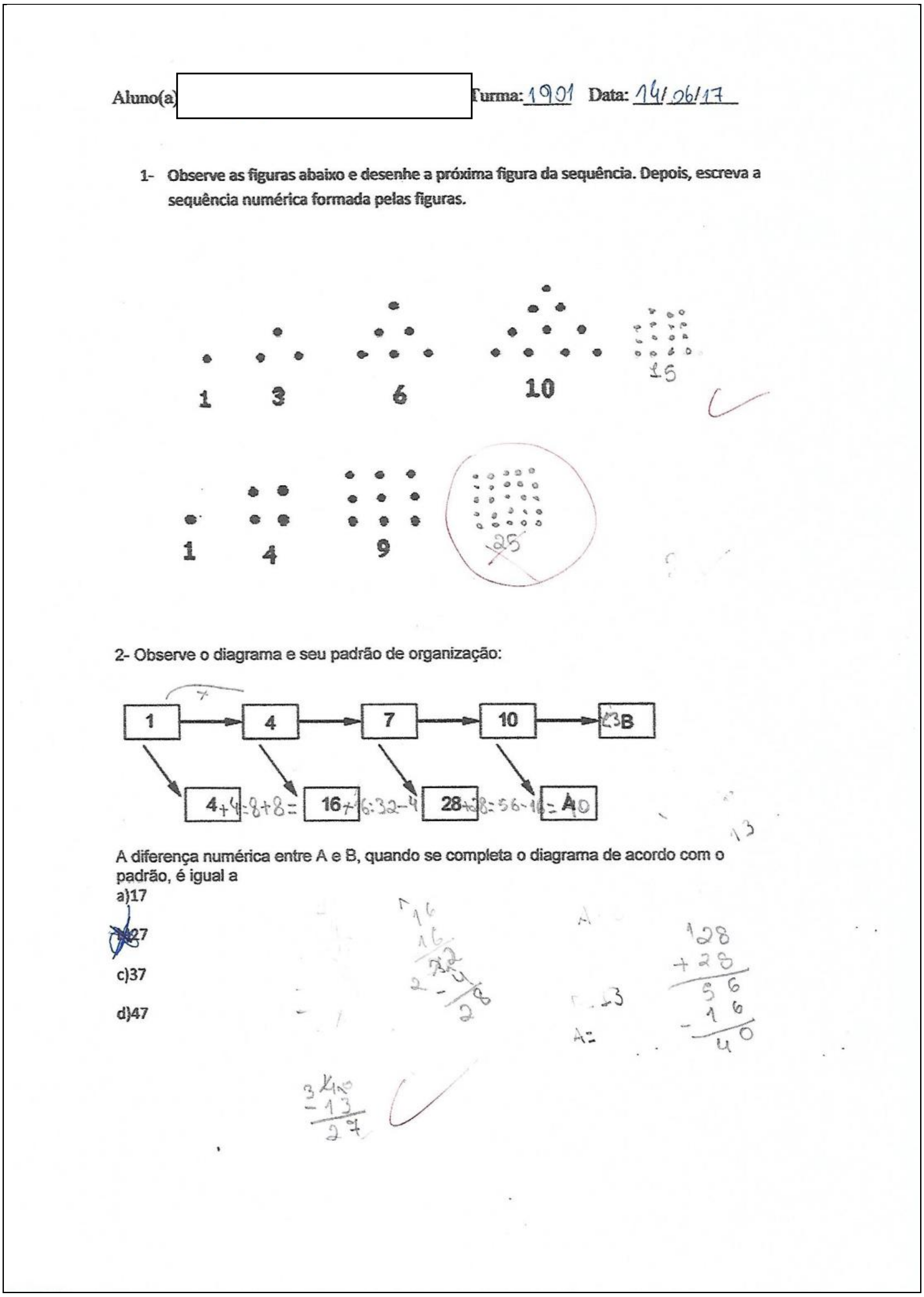
b)27

c)37

d)47

$$\begin{array}{r} 40 \\ -13 \\ \hline 27 \end{array}$$

Folha 1: segundo exemplo


Aluno(a) Turma: 1901 Data: 14/06/17

1- Observe as figuras abaixo e desenhe a próxima figura da sequência. Depois, escreva a sequência numérica formada pelas figuras.

2- Observe o diagrama e seu padrão de organização:

A diferença numérica entre A e B, quando se completa o diagrama de acordo com o padrão, é igual a

a)17

b)27

c)37

d)47

Podemos observar que no primeiro exemplo a aluna compreendeu e identificou os padrões existentes nas duas questões e realizou de forma precisa suas contas. A segunda aluna foi precisa na questão 2, mas na primeira questão no segundo item ela manteve o padrão de números quadrados perfeitos e encontrou o valor para $n = 5$ e não para $n = 4$ e chegar no valor correto igual a 16.

Folha 2: primeiro exemplo

ATIVIDADE 1

Aluno(a): [redacted] Turma: 1902 Data: 14/06/2017

1- Observe as sequências numéricas abaixo e preencha os valores desconhecidos nos espaços através de um padrão existente:

a) (7 ; 11 ; 15 ; ⟨19⟩ ; ⟨23⟩ ; ...)

b) (90 ; ⟨75⟩ ; 60 ; 45 ; ⟨30⟩; ...)

c) (8 ; 17 ; 26 ; ⟨35⟩ ; 44 ; ⟨53⟩ ; ...)

2- Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que no dia anterior. Se no 5º dia o estudante correu 17 minutos, determine a duração do treino:

a) No 4º dia; 14 minutos

b) No 10º dia. 29 minutos

3- O aluno Gabriel decidiu treinar para uma corrida que haverá no colégio. Para seu treinamento ele resolveu correr 5 voltas na quadra no primeiro dia, 7 voltas no segundo dia e assim sucessivamente ao longo de uma semana.

a) Quantas voltas ele deu no quarto dia?

11 voltas

b) Quantas voltas ele deu no total?

77 voltas

Dias da semana	**Número de voltas**
Domingo	5
Segunda	7
Terça	9
Quarta	11
Quinta	13
Sexta	15
Sábado	17
Total	77

4- O número mensal de passagens vendidas por uma determinada empresa aérea aumentou no ano de 2011 nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se manteve para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em novembro de 2011? foram vendidas 48.000 passagens

Meses do ano de 2011	Número de passagens vendidas
Janeiro	33.000
Fevereiro	34.500
Março	36.000
Abril	37.500
Maio	39.000
Junho	40.500
Julho	42.000
Agosto	43.500
Setembro	45.000
Outubro	46.500
Novembro	48.000

+1.500

5- Uma **progressão aritmética** (abreviadamente, P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante **r**.

a) Observe a sequência (2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 ; ...). É uma P.A.? Sim

b) Representando o 1º termo por a_1 , o 2º termo por a_2 e assim sucessivamente, responda os itens abaixo:

a_{10} 29 +30 a_{20} 59 +30 a_{30} 89 +30 .... a_{100} 299

i. Qual o valor de a_5? 14

ii. Qual o valor de a_{10}? 29

iii. Qual o valor de $a_2 + a_7$? 25

iv. Qual o valor de a_{20}? 59

v. Qual o valor de a_{100}? 299

Vale ressaltar na avaliação dessa aluna, a estratégia utilizada para encontrar o valor de a_{100} na quinta questão. Esse item foi colocado como motivação para utilização da fórmula do termo geral da progressão aritmética no próximo encontro, mas de forma brilhante a aluna conseguiu reescrever outra progressão aritmética, de razão igual a 30.

Folha 2: segundo exemplo

ATIVIDADE 1

Aluno(a): Turma: 1907 Data: 14/06/17

1- Observe as sequências numéricas abaixo e preencha os valores desconhecidos nos espaços através de um padrão existente:

a) (7 ; 11 ; 15 ; ⟨19⟩ ; ⟨23⟩ ; ...)

b) (90 ; ⟨75⟩ ; 60 ; 45 ; ⟨30⟩ ; ...)

c) (8 ; 17 ; 26 ; ⟨35⟩ ; 44 ; ⟨53⟩ ; ...)

2- Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que no dia anterior. Se no 5° dia o estudante correu 17 minutos, determine a duração do treino:

a) No 4° dia; 14 minutos

b) No 10° dia. 32 minutos

3- O aluno Gabriel decidiu treinar para uma corrida que haverá no colégio. Para seu treinamento ele resolveu correr 5 voltas na quadra no primeiro dia, 7 voltas no segundo dia e assim sucessivamente ao longo de uma semana.

a) Quantas voltas ele deu no quarto dia?

11

b) Quantas voltas ele deu no total?

266 Voltas

Dias da semana	Número de voltas
Domingo	5
Segunda	7
Terça	9
Quarta	11
Quinta	13
Sexta	15
Sábado	17
Total	966

5
7
9
11
13
15
17
266

4- O número mensal de passagens vendidas por uma determinada empresa aérea aumentou no ano de 2011 nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se manteve para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em novembro de 2011?

Meses do ano de 2011	**Número de passagens vendidas**
Janeiro	33.000
Fevereiro	34.500
Março	36.000
Abril	37.500
Maio	39.000
Junho	40.500
Julho	42.000
Agosto	43.500
Setembro	45.000
Outubro	46.500
Novembro	48.000

5- Uma **progressão aritmética** (abreviadamente, P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante **r**.

a) Observe a sequência (2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 ; ...). É uma P.A.?
Sim

b) Representando o 1º termo por a_1, o 2º termo por a_2 e assim sucessivamente, responda os itens abaixo:

i. Qual o valor de a_5? 14

ii. Qual o valor de a_{10}? 29

iii. Qual o valor de $a_2 + a_7$? 26

iv. Qual o valor de a_{20}? 59

v. Qual o valor de a_{100}? 299

$$19 \times 3 = 57, \quad 57 + 2 = 59$$

$$99 \times 3 = 297, \quad 297 + 2 = 299$$

O discente compreendeu a simbologia e o conceito primordial da temática abordada, além de ter criado ótimas estratégias para solucionar problemas. Em duas questões, no entanto, cometeu erros primários na operação básica de adição, já que não soube posicionar os algarismos em unidades e dezenas na forma correta.

Folha 2: terceiro exemplo

ATIVIDADE 1

Aluno(a): Turma: 1901 Data: 14/06/2014

1- Observe as sequências numéricas abaixo e preencha os valores desconhecidos nos espaços através de um padrão existente:

a) (7 ; 11 ; 15 ; (19) ; (23) ; ...)

b) (90 ; (75) ; 60 ; 45 ; (30) ; ...)

c) (8 ; 17 ; 26 ; (35) ; 44 ; (53) ; ...)

2- Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que no dia anterior. Se no 5º dia o estudante correu 17 minutos, determine a duração do treino:

a) No 4º dia; – 14 mim

$$\begin{array}{r} 17 \\ +15 \\ \hline 32 \end{array}$$

b) No 10º dia. – 32 mim.

3- O aluno Gabriel decidiu treinar para uma corrida que haverá no colégio. Para seu treinamento ele resolveu correr 5 voltas na quadra no primeiro dia, 7 voltas no segundo dia e assim sucessivamente ao longo de uma semana.

a) Quantas voltas ele deu no quarto dia?
11 voltas

b) Quantas voltas ele deu no total?
77 voltas

Dias da semana	**Número de voltas**
Domingo	5
Segunda	7
Terça	9
Quarta	11
Quinta	13
Sexta	15
Sábado	17
Total	77

4- O número mensal de passagens vendidas por uma determinada empresa aérea aumentou no ano de 2011 nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se manteve para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em novembro de 2011? 48.000

Meses do ano de 2011	Número de passagens vendidas
Janeiro	33.000
Fevereiro	34.500
Março	36.000
Abril	37.500
Maio	39.000
Junho	41.500
Julho	42.000
Agosto	43.500
Setembro	45.000
Outubro	46.500
Novembro	48.000

5- Uma **progressão aritmética** (abreviadamente, P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante **r**.

a) Observe a sequência (2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 ; ...). É uma P.A.? Sim.

b) Representando o 1º termo por a_1 , o 2º termo por a_2 e assim sucessivamente, responda os itens abaixo:

i. Qual o valor de a_5? 14

ii. Qual o valor de a_{10}? 29

iii. Qual o valor de $a_2 + a_7$? 26

iv. Qual o valor de a_{20}? 59

v. Qual o valor de a_{100}? 299

a10 - 29
a20 - 59
a30 - 89
a40 - 119
a50 - 149
a60 - 179
a70 - 209
a80 - 239
a90 - 269
a100 - 299

A aluna teve uma percepção diferenciada da maioria dos colegas. Na questão 2, para encontrar o valor no décimo dia, não fez a contagem direta aumentando de 3 em 3, mas um “pulo” ao multiplicar 5x3 e somando ao resultado o valor fornecido no quinto dia.. Além desse raciocínio, a aluna foi perspicaz em criar uma nova sequência na questão 5 para determinar o valor do centésimo termo, de modo mais prático.

Segundo encontro: Exemplos da atividade 2 no 2º dia

ATIVIDADE 2

Aluno(a): Brunno miranda Turma: 1902 Data: 26/06/2023

1- Em um cinema, número de assentos na primeira fila é 25; na segunda, 28; na terceira, 31, e assim sucessivamente. Responda:

a) Existe um padrão na sequência que representa os números de assentos em cada fila? Qual? sim, 3 em 3

b) Qual o número de assentos na quinta fila? E na oitava fila?

a_1	25
a_2	25 + 3. 28
a_3	25 + 3. 31
a_4	25 + 3. 34
a_5	25 + 3. 37
a_6	25 + 3. 40
a_7	25 + 3. 43
a_8	25 + 3. 46

c) É possível determinar uma expressão ou lei de formação para encontrar o valor de assentos em uma fila de posição "n"?

$\pi = 3$

$a_n = a_1 + 3.(n-1)$

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).\pi}$

2- Voltemos à progressão aritmética $(2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 ; ...)$.

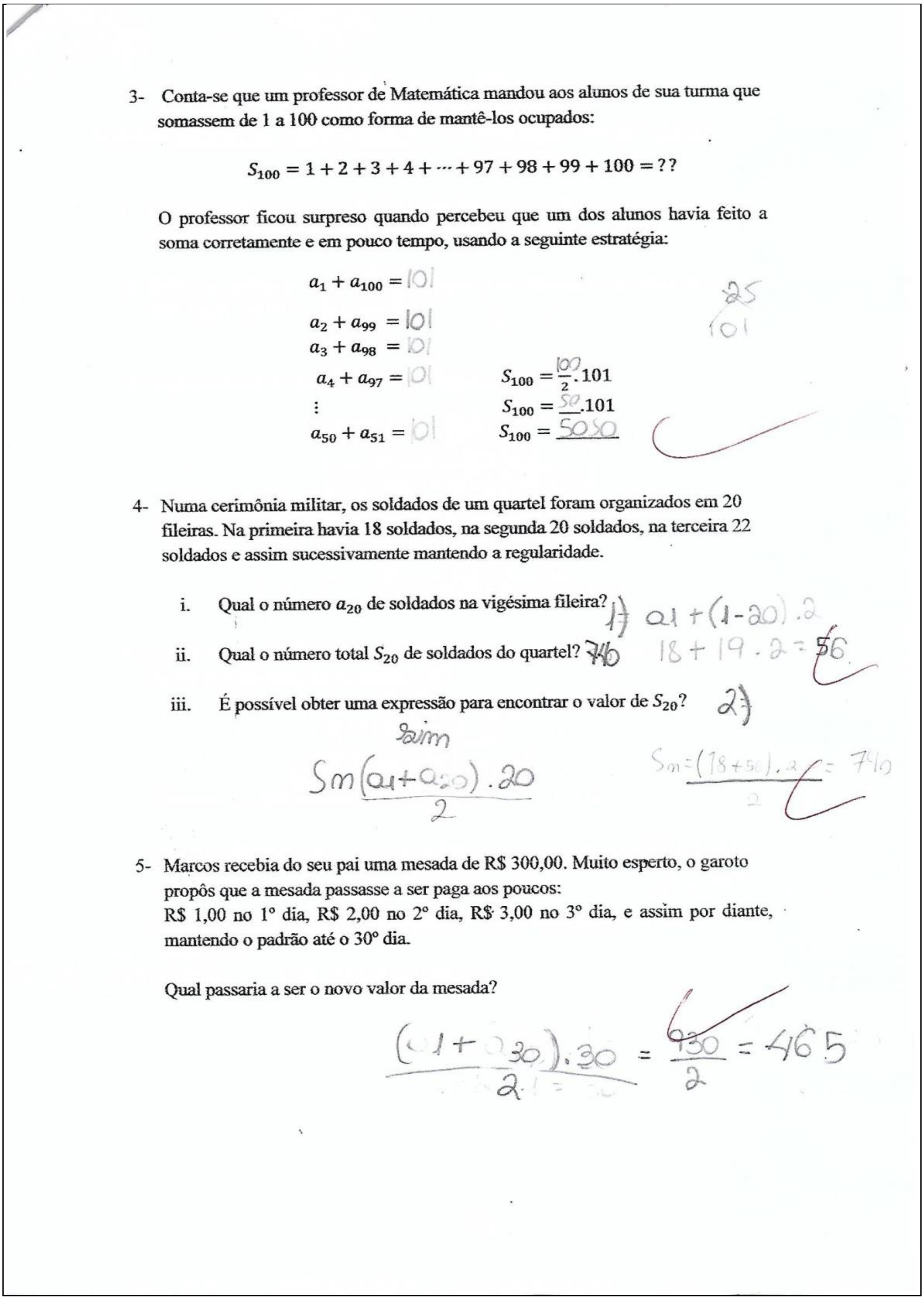
a) Qual o valor de a_{100}? 299

$a_{100} = a_1 + (100-1).3 =$
$= 2 + 99.3 = 299$

b) É possível determinar uma expressão ou lei de formação para encontrar o valor de a_n?

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).\pi}$

$a_n = a_1 + (n-1).3$



3- Conta-se que um professor de Matemática mandou aos alunos de sua turma que somassem de 1 a 100 como forma de mantê-los ocupados:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = ??$$

O professor ficou surpreso quando percebeu que um dos alunos havia feito a soma corretamente e em pouco tempo, usando a seguinte estratégia:

$a_1 + a_{100} = 101$

$a_2 + a_{99} = 101$

$a_3 + a_{98} = 101$

$a_4 + a_{97} = 101$ $\qquad S_{100} = \frac{100}{2} . 101$

$\vdots$ $\qquad S_{100} = 50 . 101$

$a_{50} + a_{51} = 101$ $\qquad S_{100} = 5050$

$\frac{25}{101}$

4- Numa cerimônia militar, os soldados de um quartel foram organizados em 20 fileiras. Na primeira havia 18 soldados, na segunda 20 soldados, na terceira 22 soldados e assim sucessivamente mantendo a regularidade.

i. Qual o número a_{20} de soldados na vigésima fileira? 1) $a_1 + (1-20) . 2$

ii. Qual o número total S_{20} de soldados do quartel? 740 $\qquad 18 + 19 . 2 = 56$

iii. É possível obter uma expressão para encontrar o valor de S_{20}? 2)

sim

$$S_m \frac{(a_1 + a_{20}) . 20}{2}$$

$$S_m = \frac{(18 + 56) . 20}{2} = 740$$

5- Marcos recebia do seu pai uma mesada de R$ 300,00. Muito esperto, o garoto propôs que a mesada passasse a ser paga aos poucos:
R$ 1,00 no 1º dia, R$ 2,00 no 2º dia, R$ 3,00 no 3º dia, e assim por diante, mantendo o padrão até o 30º dia.

Qual passaria a ser o novo valor da mesada?

$$\frac{(a_1 + a_{30}) . 30}{2} = \frac{930}{2} = 465$$

O aluno foi brilhante nas interpretações, utilização da simbologia matemática e execução perfeita nas contas. Compreendeu tudo que foi trabalhado nos dois encontros e está apto para rever e aprofundar o tema proposto na dissertação.

ATIVIDADE 2

Aluno(a): [redacted] Turma: 1909 Data: 26/06/2017

1- Em um cinema, número de assentos na primeira fila é 25; na segunda, 28; na terceira, 31, e assim sucessivamente. Responda:

a) Existe um padrão na sequência que representa os números de assentos em cada fila? Qual? Sim. Aumenta de 3 em 3

b) Qual o número de assentos na quinta fila? E na oitava fila? 25 + 12 = 37, 25 + 21 = 46

a_1	25
a_2	25 + 3.1
a_3	25 + 3.2
a_4	25 + 3.3
a_5	25 + 3.4 = 25 + 12 = 37
a_6	25 + 3.5
a_7	25 + 3.6
a_8	25 + 3.7 = 25 + 21 = 46

c) É possível determinar uma expressão ou lei de formação para encontrar o valor de assentos em uma fila de posição "n"?

$A_n = A_1 + (n-1) \cdot 3$

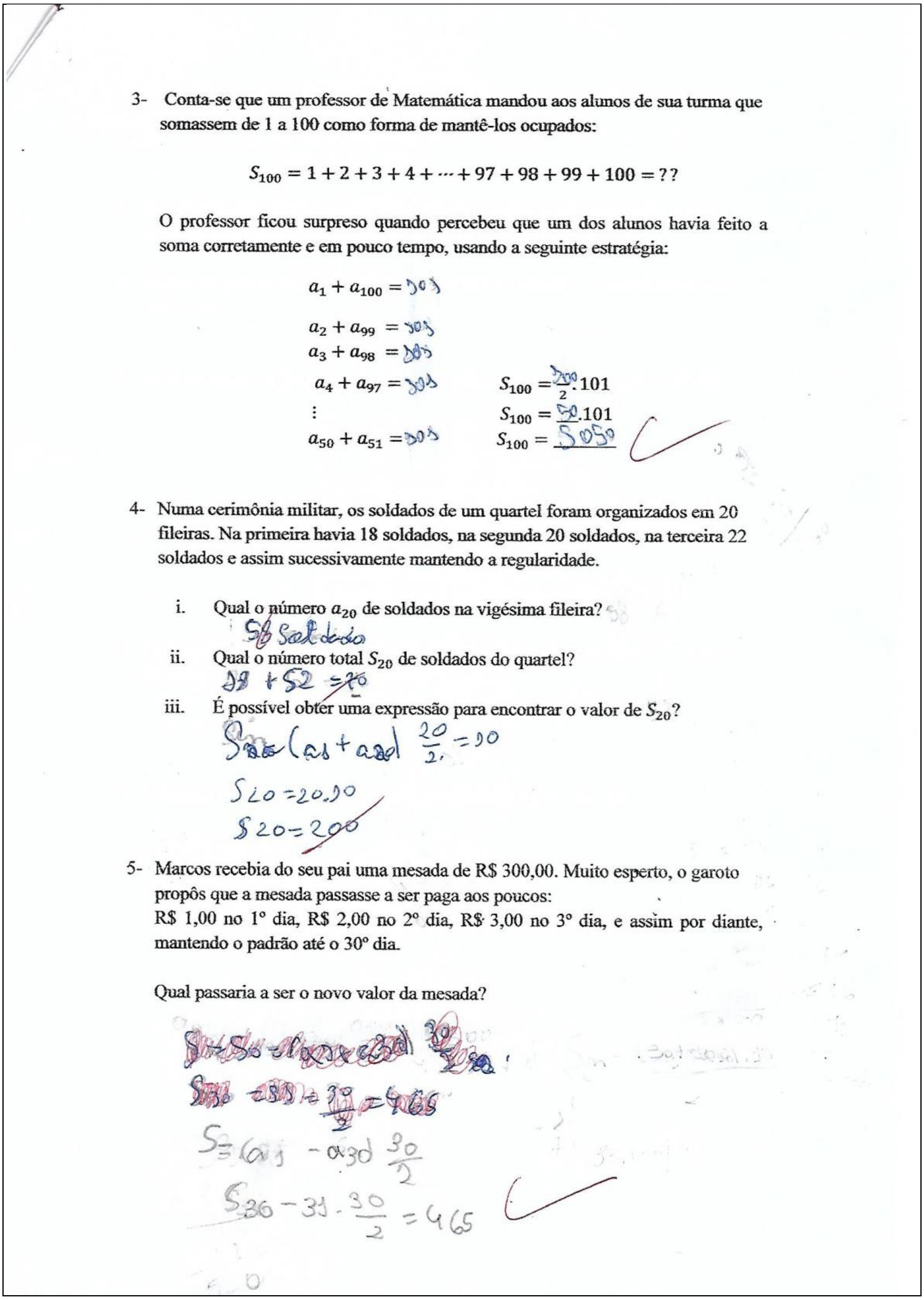
2- Voltemos à progressão aritmética $(2;5;8;11;14;17;20;23;\ldots)$.

a) Qual o valor de a_{100}?

$a_{100} = 2 + (100-1) \cdot 3 = 299$

b) É possível determinar uma expressão ou lei de formação para encontrar o valor de a_n? Sim

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$



3- Conta-se que um professor de Matemática mandou aos alunos de sua turma que somassem de 1 a 100 como forma de mantê-los ocupados:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = ??$$

O professor ficou surpreso quando percebeu que um dos alunos havia feito a soma corretamente e em pouco tempo, usando a seguinte estratégia:

$a_1 + a_{100} = 101$

$a_2 + a_{99} = 101$

$a_3 + a_{98} = 101$

$a_4 + a_{97} = 101$ $\quad S_{100} = \frac{200}{2} . 101$

$\vdots$ $\quad S_{100} = 50 . 101$

$a_{50} + a_{51} = 101$ $\quad S_{100} = 5050$

4- Numa cerimônia militar, os soldados de um quartel foram organizados em 20 fileiras. Na primeira havia 18 soldados, na segunda 20 soldados, na terceira 22 soldados e assim sucessivamente mantendo a regularidade.

i. Qual o número a_{20} de soldados na vigésima fileira?

58 Soldados

ii. Qual o número total S_{20} de soldados do quartel?

18 + 52 = 70

iii. É possível obter uma expressão para encontrar o valor de S_{20}?

$S_{20} = (a_1 + a_{20}) \frac{20}{2} = 10$

$S_{20} = 20 . 10$

$S_{20} = 200$

5- Marcos recebia do seu pai uma mesada de R$ 300,00. Muito esperto, o garoto propôs que a mesada passasse a ser paga aos poucos:
R$ 1,00 no 1º dia, R$ 2,00 no 2º dia, R$ 3,00 no 3º dia, e assim por diante, mantendo o padrão até o 30º dia.

Qual passaria a ser o novo valor da mesada?

$S = (a_1 - a_{30}) \frac{30}{2}$

$S_{30} - 31 . \frac{30}{2} = 465$

A aluna apagou as contas feitas na avaliação, mas as marcas ficaram. Foi possível constatar que na questão 4 ela foi somando de 2 em 2 até chegar o valor de a_{20}, mas teve um pequeno erro no final e chegou ao valor 58 ao invés de 56. No terceiro item desse exercício armou bem a estratégia, escrevendo a fórmula corretamente, mas não substitui os respectivos a_1 e a_{20} com seus correspondentes valores.

Na questão de número 5, ela escreveu a fórmula alterando o sinal de mais para menos, porém, executou a soma e chegou ao resultado correto. Acredito que deve ter sido uma pequena distração que não a prejudicou na conquista do resultado.

Considerações

Por meio da diagnose realizada nesse trabalho, é possível perceber um resultado muito satisfatório pelos alunos em contato pela primeira vez com a temática abordada. Embora tenham dificuldade constantemente com tópicos da Matemática da sua série atual, os discentes mostraram uma boa aceitação, participação e compreensão do tema que será apresentado apenas no Ensino Médio. Em boa parte a problemática recorrente foi à execução das operações básicas essenciais para uma boa sequência ao longo de sua vida acadêmica.

Uma das justificativas para o desempenho satisfatório se deve ao fato de o teste poder ser ajustado por meio de uma segunda chance para os alunos corrigirem falhas anteriores.

Apesar de poucos tempos de aula para trabalhar essa temática pertencente apenas ao currículo do Ensino Médio, os alunos do nono ano do Ensino Fundamental tiveram notório interesse e motivação por meio de uma aula mais propícia ao diálogo, à troca de informações e à construção de conceitos e definições. Assim, pôde-se obter um bom desempenho e uma real relevância em abordar esse assunto no Ensino Fundamental para torná-lo mais apto a aprofundar o assunto no Ensino Médio, corrigindo distorções em definições, melhorando a interpretação e aplicando a interdisciplinaridade em questões contextualizadas e mais complexas, conforme preconizam os autores que embasam esta Dissertação.

CAPÍTULO 3 – PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDENS SUPERIORES NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, abordaremos o tema progressão aritmética de segunda ordem de forma clara e gradativa. Por meio desse aprofundamento, o leitor obterá mais recursos para resolução de exercícios presentes em concursos amplamente disputados entre civis e militares. Estenderemos para progressões de ordem p com definições e teoremas, generalizando o assunto.

Tal oportunidade de revisar e aprofundar o tema se dá pelo fato do mesmo ter sido incluído na série final do Ensino Fundamental com o propósito de que o aluno tenha um breve, porém, efetivo e satisfatório contato pela primeira vez com fórmulas e simbologias das progressões aritméticas.

Na primeira seção é apresentada uma seleção de exercícios sobre P.A. destinados a revisar os conceitos e propriedades. Na segunda seção introduzimos de forma intuitiva e progressiva o conceito de progressões aritméticas de ordem 2 e ordem 3 através de alguns modelos de atividades aplicados para os alunos, sem tomar posse da definição ainda. Após essa apresentação amena, definições e resultados aparecem no seu padrão mais formal e são expandidos para progressões aritméticas de ordem p.

3.1 – CONTEXTUALIZAÇÃO E INTERDISCIPLINARIDADE NO ESTUDO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA NO ENSINO MÉDIO

Nesta etapa da pesquisa, apresentamos questões de concursos que necessitam de uma melhor interpretação e do saber em aplicar os resultados apresentados no capítulo anterior em exercícios com grau de complexidade maior.

Tal preparação possui proveito na motivação e no suporte de uma expansão no processo ensino-aprendizagem dos alunos para progressões aritméticas de ordens superiores, em especial as de ordem 2, cujo tema não é abordado na maioria das unidades escolares do Ensino Médio.

As progressões aritméticas de primeira ordem nos dão uma oportunidade no Ensino Médio de mesclar conteúdos pertencentes à disciplina de Matemática através da seleção de exercícios bem elaborados e designados para explorar vários assuntos, como foi feito na sucessão a seguir composta por sete exemplos.

<u>QUESTÃO 1 – Universidade Federal do Rio de Janeiro 2003</u>

Os números reais a, b, c e d formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{pmatrix}$. *Justifique.*

Solução:

Como a, b, c e d formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r, temos: $b = a + r, c = a + 2r$ e $d = a + 3.r$

Substituindo na expressão do determinante, obtemos:

$$detA = e^a.e^d - e^b.e^c = e^a.e^{a+3r} - e^{a+r}.e^{a+2r} = e^{2a+3r} - e^{2a+3r} = 0$$

Comentários:

Para solucionar a questão, foi necessário mesclar conhecimento de determinantes e a fórmula do termo geral escrevendo cada expoente em função de a e r. Desse modo, encontramos valores opostos resultando assim em zero o determinante.

<u>QUESTÃO 2 – Universidade Federal Fluminense 1996</u>

Numa progressão aritmética com 51 termos, o vigésimo sexto termo é igual a 2. A soma dos termos dessa progressão é igual a:

a) 13

b) 52

c) 102

d) 104

e) 112

Solução:

Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{51})$ é uma P.A. de razão *r* e $a_{26} = 2$, temos:

$$a_1 + a_{51} = a_1 + a_1 + 50.r = 2a_1 + 50.r \text{ e } a_{26} = a_1 + 25.r .$$

Fazendo $a_{26} + a_{26}$ obtemos como resultado $2a_1 + 50.r$, ou seja, concluímos que $a_1 + a_{51} = a_{26} + a_{26} = 2.2 = 4$. Utilizando a fórmula da soma e a conclusão acima, temos:

$$S_{51} = \frac{(a_1 + a_{51}).51}{2} = \frac{(a_{26} + a_{26}).51}{2} = \frac{4.51}{2} = \frac{204}{2} = 102$$

Comentários:

Através da fórmula geral para o termo a_{51} e a_{26} foi identificada uma igualdade que serviu de suporte para substituição na fórmula da soma fazendo assim de modo rápido e prático diminuindo a possibilidade de erro com cálculos maiores e complexos.

QUESTÃO 3 – Universidade Federal do Rio de Janeiro 2000

Mister MM, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma plateia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior. Mister MM solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da décima sexta e da trigésima primeira ficha, obtendo como resposta 103 e 58 respectivamente. Para delírio da plateia, Mister MM adivinhou então o valor da última ficha. Determine você também este valor.

Solução 1:

Fica subentendido pela média aritmética dos termos a partir do segundo e excluindo o último que a sequência é uma progressão aritmética (propriedade1).

$a_{31} = a_1 + 30.r \Rightarrow 58 = a_1 + 30.r \Rightarrow a_1 = 58 - 30.r$ (I)

$a_{16} = a_1 + 15.r \Rightarrow 103 = a_1 + 15.r \Rightarrow a_1 = 103 - 15.r$ (II)

De (I) e (II), temos:

$58 - 30.r = 103 - 15.r \Rightarrow -45 = 15.r \Rightarrow r = -3$

Substituindo o valor de *r* em (I), obtemos:

$a_1 = 58 - 30.(-3) = 58 + 90 = 148$

Concluindo:

$a_{50} = a_1 + 49.r \ = 148 + 49.(-3) = 148 - 147 = 1$

Solução 2:

$a_{31} = \ a_{16} + \ 15.r \ \Rightarrow \ \ 58 = 103 + 15.r \ \Rightarrow \ -45 = 15.r \ \ \Rightarrow \ r = -3$

Substituindo o valor de r na equação $a_{50} = a_{31} + 19.r$, obtemos:

$a_{50} = 58 + 19.(-3) = 58 - 57 = 1$

Comentários:

A segunda solução foi mais rápida e clara, além de proporcionar ao aluno uma outra forma de encontrar o valor de qualquer termo da P.A, sem a dependência do primeiro termo sempre.

<u>QUESTÃO 4 – Universidade Estadual do Rio de Janeiro 2003</u>

Dois corredores vão se preparar para participar de uma maratona. Um deles começará correndo 8 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 2 km; o outro correrá 17 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em1 km. A preparação será encerrada no dia em que eles percorrerem, em quilômetros, a mesma distância. Calcule a soma, em quilômetros, das distâncias que serão percorridas pelos dois corredores durante todos os dias do período de preparação.

Solução:

1º corredor: $a_n = 8 + (n - 1).2$

2º corredor: $b_n = 17 + (n - 1).1$

Então,

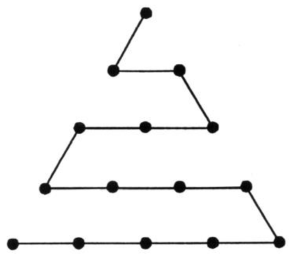
$8 + (n - 1).2 = 17 + (n - 1).1 \ \Rightarrow n - 1 = 9 \ \Rightarrow n = 10$ e

$a_{10} = 8 + (10 - 1).2 = 8 + 9.2 = a_{10} = 26$

Logo, $S_{1º} + S_{2º} = \frac{(8+26).10}{2} + \frac{(17+26).10}{2} = 34.5 + 43.5 = 170 + 215 = 385\ km$

<u>QUESTÃO 5 – Universidade Federal do Rio de Janeiro 2002</u>

Cem fileiras de pontos são formadas de modo que a primeira linha tenha apenas um ponto e cada linha subsequente contenha um ponto a mais do que a anterior. Todos os pontos são unidos por segmentos de comprimento 1, de acordo coma lei de formação indicada, para as cinco primeiras fileiras, na figura.



Determine o número total de segmentos unitários obtidos com essa construção.

Solução:

Nessa questão, pode-se perceber um padrão: se você desconsiderar o primeiro ponto, que está na primeira linha, a quantidade de pontos cresce na mesma proporção; ou melhor, na mesma quantidade que os segmentos de reta. Por exemplo, no primeiro ponto da segunda linha que a partir de agora será o nosso referencial, há também um segmento de reta. No segundo ponto, apareceram dois segmentos de reta; com o terceiro ponto (primeiro da terceira linha) há três segmentos de reta e assim sucessivamente.

Então, para achar o número de segmentos, basta calcular o número total de pontos e retirar um (o da primeira linha, que foi desconsiderado no início):

Representando o total de pontos na linha *n* por a_n, temos $a_n = a_1 + (n-1).r$, onde $r = 1$. Como $a_1 = 1$ $(um\ ponto\ na\ primeira\ fila)$, a quantidade de pontos na última fileira é $a_{100} = 1 + 99.1 = 100$.

Logo, o total de pontos até a última fileira é

$S = \frac{(1+100).100}{2} = \frac{101.100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$ e, portanto, há na figura $5050 - 1 = 5049$ segmentos de reta.

Comentários:

A questão exige uma boa interpretação e a aplicação das duas fórmulas mais executadas em progressão aritmética.

<u>QUESTÃO 6 – Instituto Tecnológico da Aeronáutica 2003</u>

O valor de $y^2 - x.z$ *para o qual os números* $sen\frac{\pi}{12}, x, y, z$ *e* $sen75°$*, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:*

a) 3^{-4}

b) 2^{-3}

c) 6^{-2}

d) 2^{-5}

e) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Solução:

Sendo $(sen15°, x, y, z, sen75°)$ uma P.A de razão *r*, temos:

$$sen75° = sen15° + 4.r \Rightarrow 4r = sen75° - sen15°$$

Utilizando como recurso para a continuidade da resolução da questão a fórmula de subtração de arcos da trigonometria, temos:

$$4r = 2.sen\left(\frac{75°-15°}{2}\right).\cos\left(\frac{75°+15°}{2}\right) = 2.sen30°.cos45° = 2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Sendo $y = x + r$ e $z = x + 2r$, substituindo na expressão pedida na questão, obtemos:

$$y^2 - x.z = (x+r)^2 - x.(x+2.r) = x^2 + 2.x.r + r^2 - x^2 - 2.x.r = r^2$$

Assim:

$$y^2 - x.z = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{1}{32} = 2^{-5}$$

Comentários:

O objetivo de expor esta questão é salientar a relação entre alguns conteúdos da Matemática, fazendo assim uma revisão de outros conteúdos abordados e necessários para obtenção de êxito em questões deste nível, muito presentes em seleções externas ao ITA.

<u>QUESTÃO 7 – Instituto Tecnológico da Aeronáutica 2005</u>

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera, formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi . r^3}{45}$*. Se o volume da menor cunha for igual a* $\frac{\pi . r^3}{18}$*, então n é igual a:*

a) 4

b) 3

c) 6

d) 5

e) 7

Solução:

Como a P.A. de razão $\frac{\pi . r^3}{45}$ é crescente, seu primeiro termo é $\frac{\pi . r^3}{18}$. Assim, do enunciado, temos

$$\frac{(a_1 + a_n).n}{2} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow \frac{\left[\frac{\pi.r^3}{18} + \left(\frac{\pi.r^3}{18} + (n-1).\frac{\pi.r^3}{45}\right)\right].n}{2} = \frac{2}{3}.\pi r^3$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1\pi r^3}{9} + \frac{n.\pi.r^3}{45} - \frac{\pi r^3}{45}\right].n = \frac{2.\pi.r^3}{3} \Rightarrow \left[\frac{4.\pi.r^3 + \pi.r^3.n}{45}\right].\frac{n}{2} = \frac{2.\pi.r^3}{3}$$

Cancelando o termo πr^3 comum a ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\frac{(4+n).n}{90} = \frac{2}{3} \Rightarrow n^2 + 4n - 60 = 0 \Rightarrow n = 6 \; ou \; n = -10(não \; convém)$$

Logo, $n = 6$.

Comentários:

Esta atividade foi mais um exemplo de relação entre progressão aritmética e outro referencial da Matemática. Dessa forma, o aluno fica mais adaptado e preparado para desafios em testes mais densos.

Considerando as questões apresentadas, bem como as respectivas soluções e comentários, esta seção cumpre, assim, o objetivo de permitir ao aluno a possibilidade de se deparar novamente com o tema para corrigir as possíveis impressões erradas que ficaram em estudos anteriores. Cabe, então, aprofundar com questões contextualizadas que contenham manipulações algébricas maiores e relações entre vários tópicos da Matemática vista até o presente momento.

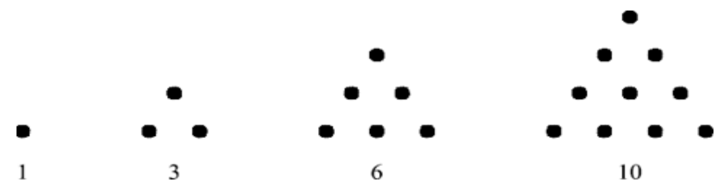
3.2 – PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE SEGUNDA ORDEM

Iniciamos esta seção com exemplos de progressões aritméticas de ordem superior a 1, com o objetivo de introduzir o conceito de forma mais acessível para a seguir tratá-lo com rigor necessário para captação do conteúdo proposto.

No primeiro exemplo, apresentamos uma atividade proposta a alunos de 6º ano no livro *Matemática Bianchini - 6º ano*. Tal atividade é apropriada para o público de Ensino Médio e servirá de base para a construção do conceito e, consequentemente, da definição de P.A. de segunda ordem.

Exemplo 3.1:

Observe as figuras:



Números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos, como os mostrados acima, são chamados números triangulares.

a) *Seguindo o padrão, desenhe a próxima figura da sequência acima.*

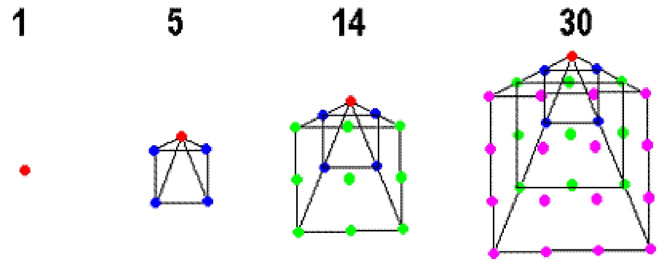
b) *Que número triangular representa a figura que você desenhou?*

c) *Escreva a sequência dos seis primeiros números triangulares.*

Observemos que os números formam uma sequência $(b_n) = (1,3,6,10,15, \dots)$ que não é uma P.A pois, $b_2 - b_1 = 2$, mas $b_3 - b_2 = 3$. Mas se tomarmos as diferenças de termos consecutivos, formaremos uma nova sequência $(a_n) = (b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_3 - b_4, \dots) = (3 - 1, 6 - 3, 10 - 6, 15 - 10, \dots) = (2,3,4,5, \dots)$ que é uma P.A de razão $r = 1$, ou seja, apenas fazendo uma vez a diferença entre os termos consecutivos da sequência original fornecida, determinamos outra sequência reconhecida como progressão aritmética de ordem 1, ou P.A., cujo termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1).r = 2 + (n - 1).1 = 1 + n$.

Exemplo 3.2:

A figura abaixo mostra os quatro primeiros termos da sequência dos números piramidais de base quadrada. Determine o quinto, o sexto e o sétimo termos da sequência.



Observemos que os números formam uma sequência $(c_n) = (1,5,14,30, \dots)$ que não é uma P.A, pois, $c_2 - c_1 = 4$ mas $c_3 - c_2 = 9$, ou seja, $(b_n) = (c_{n+1} - c_n) = (4,9,16, \dots)$. Essa nova sucessão pode ser reescrita como $(2^2, 3^2, 4^2, \dots)$ e a partir dessa representação criar uma estratégia para encontrar os termos pedidos. Para encontrar o quinto devemos somar 5^2, para determinar o sexto somar 6^2 ao resultado obtido e ao sétimo somar 7^2 ao resultado obtido no sexto, portanto, temos como resposta os valores 55, 91 e 140, respectivamente.

Realizando a diferença entre os termos consecutivos de (c_n) obtemos uma nova sequência $(b_n) = (4,9,16,25, \ldots)$. Dando continuidade ao raciocínio e aplicando novamente a diferença entre os termos consecutivos pela segunda vez determinamos $(a_n) = (9-4, 16-9, 25-16, \ldots) = (5,7,9, \ldots)$ que é uma P.A de razão $r = 2$, ou seja, fazendo a diferença entre os termos consecutivos na sequência original e depois na nova sucessão, determinamos uma outra sequência reconhecida como progressão aritmética de ordem 1, ou P.A..

Através do auxílio dessa apresentação gradativa expandiremos para definições e generalizações de progressões aritméticas de ordem *p*.

Nos exemplos acima fizemos recorrentemente a diferença entre termos consecutivos das sucessões, que é chamado de *operador diferença*, representado por Δ, e definido $\Delta(a_n) = a_{n+1} - a_n$.

A seguir apresentamos a definição de progressão aritmética de segunda ordem.

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência $(\boldsymbol{b_n})$ na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo, formam uma progressão aritmética de primeira ordem não constante. Equivalentemente podemos definir a progressão aritmética de segunda ordem como uma sequência $(\boldsymbol{b_n})$ na qual aplicando o operador diferença Δ sucessivamente duas vezes obtemos uma sequência final constante.

Exemplo 3.3:

A sequência (b_n) *representada por* $(1, 3, 7, 13, 21, 31, \ldots)$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois, aplicando o operador diferença obtemos* $(a_n) = (\Delta b_n) = (b_{n+1} - b_n) = (3-1, 7-3, 13-7, 21-13, 31-21, \ldots) = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$, *uma P.A. de razão r = 2. Se aplicamos uma vez mais o operador Δ encontramos a sequência constante* $(2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$.

Teorema 3.1:

Uma sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem se e somente se seu termo geral é dado por um polinômio do segundo grau em n.

Demonstração**:**

Considere o polinômio do segundo grau da forma $an^2 + bn + c$ para representar o termo geral de uma sequência (x_n). Então,

$$x_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + 2an + a + bn + b + c = an^2 + (2a+b)n + a + b + c, \text{ e}$$

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n = an^2 + (2a+b)n + a + b + c - (an^2 + bn + c)$$

$$= 2.a.n + (a+b), \text{ que é um polinômio do primeiro grau em } n.$$

Escrevendo $y_n = \Delta x_n = b + 2a(n-1)$, vemos que a sequência (Δx_n) é uma progressão aritmética não constante de razão $r = 2a$ e concluímos que a sequência (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Reciprocamente, suponhamos que a sequência $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Então a sequência $(y_n) = (x_{n+1} - x_n)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem não constante. Portanto, se r é a razão de (y_n) seu termo geral é $y_n = y_1 + (n-1)r$, um polinômio de primeiro grau em n.

Portanto, a soma dos seus $n-1$ primeiros termos é dada por

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = \frac{(y_1 + y_{n-1})}{2}(n-1) = \frac{[y_1 + y_1 + (n-2)r]}{2}(n-1)$$

$$= y_1(n-1) + \frac{(n-2)(n-1).r}{2}.$$

Por outro lado,

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - x_1.$$

Assim, o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem é dado por

$$x_n = x_1 + (n-1)y_1 + \frac{(n-2)(n-1).r}{2},$$

um polinômio de grau 2 em n. □

Exemplo 3.4:

A sequência $(b_n) = (4,10,18,28,40, \dots)$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois:*

$a_1 = b_2 - b_1 = 10 - 4 = 6$

$a_2 = b_3 - b_2 = 18 - 10 = 8$

$a_3 = b_3 - b_2 = 28 - 18 = 10$

$\vdots$

$a_n = 6 + (n-1).2 = 2.n + 4.$

Pela fórmula do termo geral da progressão aritmética de segunda ordem obtida acima, temos:

$$b_n = b_1 + (n-1)a_1 + \frac{(n-2)(n-1)r}{2} = 4 + 6(n-1) + \frac{4(n-2)(n-1)}{2}$$

Portanto:

$$b_n = n^2 + 3.n$$

Esse polinômio dá origem à progressão aritmética de segunda ordem (b_n).

Por outro lado, uma vez que já sabemos que o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem é dado por um polinômio de segundo grau em n, podemos encontrá-lo de outro modo:

Se $b_n = an^2 + bn + c$, *substituindo n por 1,2 e 3 nessa expressão obtemos o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} a + b + c = b_1 = 4 \\ 4a + 2b + c = b_2 = 10 \\ 9a + 3b + c = b_3 = 18 \end{cases}$$

Resolvendo-o obtemos:

$$a = 1,\ b = 3\ e\ c = 0.$$

Logo, $b_n = 1n^2 + 3n + 0 = n^2 + 3n.$

Vimos na demonstração do teorema anterior que o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem (x_n) é dado por

$$\boldsymbol{x_n = x_1 + (n-1)y_1 + \frac{(n-2)(n-1).r}{2}},$$

onde $(y_n) = (x_{n+1} - x_n)$ é uma P.A. de razão $r \neq 0$.

Lembrando que $y_1 = x_2 - x_1$ e $r = y_2 - y_1 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) = x_3 - 2x_2 + x_1$, obtemos:

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1)(n-1) + \frac{x_3 - 2x_2 + x_1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$= \left(1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)x_1 + \big((n-1) - (n-1)(n-2)\big)x_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}x_3$$

Portanto, podemos expressar o termo geral da progressão de segunda ordem (x_n) em função de seus três primeiros termos:

$$\boldsymbol{x_n = \frac{(n-2)(n-3)}{2}x_1 - (n-1)(n-2)x_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}x_3}$$

Vamos agora calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.A de segunda ordem $(b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$. Para tal precisamos dos seguintes resultados:

Lema 3.1:

Para todo natural n, vale:

a) $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} j = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$;

b) $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}}$.

Demonstração:

Para o item a), basta observar que $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n$ corresponde a soma dos *n* primeiros termos da P.A. $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$.

Vamos provar o item b) por indução sobre n. Se $n = 1$, temos que $1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{2}$.

Suponhamos que a fórmula é válida para um certo natural k, ou seja, que

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = 1^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2}.$$

Então,

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = 1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+k+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(\, 2(k+1)+1)}{6}.$$

Logo, $\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(\, n+1)(2n+1)}{2}$, para todo natural n.

□

Se $(b_n) = (b_1, b_{2,} \dots, b_n, \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, então, para cada natural j, $b_j = b_1 + (j-1)a_1 + \frac{(j-1)(j-2)r}{2}$. Então, a soma de seus n primeiros $\mathbb{S}_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ satisfaz

$$\mathbb{S}_n = \sum_{j=1}^{n} b_1 + \sum_{j=1}^{n} (j-1)a_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)(j-2)}{2} r$$

$$= b_1 \sum_{j=1}^{n} 1 + a_1 \sum_{j=1}^{n} (j-1) + r \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2 - 3j + 2}{2}$$

$$= b_1 n + a_1 \frac{(n-1)n}{2} + r(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1)$$

$$= b_1 n + a_1 \frac{(n-1)n}{2} + r(\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2} + n)$$

$$= b_1 n + a_1 \frac{(n-1)n}{2} + \frac{r.n}{12} (2n^2 + 3n + 1 - 9n - 9 + 12)$$

$$= b_1 n + a_1 \frac{(n-1)n}{2} + \frac{r.n}{12} (2n^2 - 6n + 4)$$

$$= b_1 n + a_1 \frac{(n-1)n}{2} + \frac{r.n}{6} (n^2 - 3n + 2)$$

Assim,

$$\mathbb{S}_n = b_1 n + a_1 \frac{(n-1)n}{2} + \frac{rn(n-1)(n-2)}{6} = b_1\binom{n}{1} + a_1\binom{n}{2} + r\binom{n}{3},$$ onde

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Provamos, então, o seguinte

<u>Teorema 3.2</u>:

Seja $(\boldsymbol{b_n}) = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_{2,}} \dots, \boldsymbol{b_n}, \dots)$ uma progressão aritmética de segunda ordem. Se a razão da progressão aritmética $(\boldsymbol{a_n}) = (\Delta \boldsymbol{b_n}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_{2,}} \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots)$ é igual a r, então a soma de seus n primeiros $\mathbb{S}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} + \cdots + \boldsymbol{b_n}$ satisfaz

$$\mathbb{S}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b_1 n} + \boldsymbol{a_1} \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{rn}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})}{\boldsymbol{6}} = \boldsymbol{b_1}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{a_1}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{r}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}.$$

Lembrando que $a_1 = b_2 - b_1$ e $r = b_3 - 2b_2 + b_1$, temos que:

$$\mathbb{S}_n = b_1\binom{n}{1} + (b_2 - b_1)\binom{n}{2} + (b_3 - 2b_2 + b_1)\binom{n}{3}.$$

Podemos, então, expressar a soma dos *n* primeiros termos da progressão de segunda ordem (b_n) em função de seus três primeiros termos:

$$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{b_1}\left[\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}} - \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}\right] + \boldsymbol{b_2}\left[\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{2}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}\right] + \boldsymbol{b_3}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}$$

3.3 – QUESTÕES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE SEGUNDA ORDEM EM CONCURSOS DIVERSOS

Aplicação de progressão aritmética de segunda ordem em concursos:

(ENEM 2010) *Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.*

1
1 2 1
1 2 3 2 1
1 2 3 4 3 2 1
...

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas. A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9
b) 45
c) 64
d) 81
e) 285

Solução:

As somas dos números escritos em cada linha formam uma sequência

$$(b_n) = (1, 4, 9, 16, \dots)$$

As diferenças

$a_1 = b_2 - b_1 = 3, a_2 = b_3 - b_2 = 5, a_3 = b_4 - b_3 = 7, \dots, a_n = b_{n+1} - b_n = 2n - 1$, formam uma progressão aritmética de razão 2.

Portanto, a expressão para representar o termo geral da sequência (b_n) é da forma quadrática $cn^2 + dn + e$.

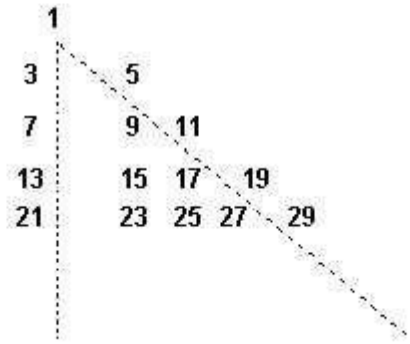
Substituindo *n* por 1,2 e 3, obtemos o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} c + d + f = 1 \\ 4c + 2d + f = 4 \\ 9c + 3d + f = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 1 - c - d \\ 4c + 2d + (1 - c - d) = 4 \\ 9c + 3d + (1 - c - d) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c + d = 3 \\ 8c + 2d = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow 8c + 2.(3 - 3c) = 8 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f = 0.$

Logo, $b_n = n^2$ e, portanto, a soma na 9ª pilha será correspondente a $9^2 = 81$.

(IME- 96/97) *Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a enésima linha compreende n números. Encontre em função de n, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.*



Solução:

A sequência dos primeiros números de cada linha $(1,3,7,13,21,31,\dots)$ será chamada de (a_n) e a dos últimos números de cada linha $(1,5,11,19,29,\dots)$ será chamada de (b_n).

As diferenças $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 4, a_4 - a_3 = 6, \dots, a_{n+1} - a_n = 2n$, formam uma progressão aritmética de razão 2.

As diferenças $b_2 - b_1 = 4, b_3 - b_2 = 6, b_4 - b_3 = 8, \dots, b_{n+1} - b_n = 2n + 2$ também formam uma progressão aritmética de razão 2.

Portanto, as expressões para o primeiro e o último serão da forma quadrática $c.n^2 + d.n + e$.

Substituindo *n* por 1,2 e 3, obteremos os sistemas lineares abaixo:

1) Para a sequência (a_n) :

$$\begin{cases} c.1^2 + d.1 + f = 1 = a_1 \\ c.2^2 + d.2 + f = 3 = a_2 \\ a.3^2 + d.3 + f = 7 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + d + f = 1 \\ 4c + 2d + f = 3 \\ 9c + 3d + f = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 1 - c - d \\ 4c + 2d + (1 - c - d) = 3 \\ 9c + 3d + (1 - c - d) = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3c + d = 2 \\ 8c + 2d = 6 \end{cases} \Rightarrow 8c + 2.(2 - 3c) = 6 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow f = 1$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 - n + 1$$

1) Para a sequência (b_n) :

$$\begin{cases} c.1^2 + d.1 + f = 1 = b_1 \\ c.2^2 + d.2 + f = 5 = b_2 \\ a.3^2 + d.3 + f = 11 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + d + f = 1 \\ 4c + 2d + f = 5 \\ 9c + 3d + f = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 1 - c - d \\ 4c + 2d + (1 - c - d) = 5 \\ 9c + 3d + (1 - c - d) = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3c + d = 4 \\ 8c + 2d = 10 \end{cases} \Rightarrow 8c + 2.(4 - 3c) = 6 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow f = -1$$

$$\Rightarrow b_n = n^2 + n - 1$$

Em cada linha *n*, temos uma P.A. de razão 2, onde o primeiro e o último termos são $a_n = n^2 - n + 1$ e $b_n = n^2 + n - 1$, respectivamente. Aplicando a fórmula da soma dos *n* termos desta P.A., concluímos que a soma de todos os números escritos na enésima linha é:

$$S_n = \frac{(a_n + b_n)n}{2} = \frac{(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1)n}{2} = n^3$$

(UFRJ- 2003) *Uma reta divide o plano em 2 regiões; duas retas dividem-no em, no máximo, 4 regiões; três retas dividem-no em, no máximo, 7 regiões; e assim sucessivamente. Em quantas regiões, no máximo, 37 retas dividem o plano?*

Número de cortes	*Número máximo de regiões* (p_n)
1	*2*
2	*4*
3	*7*

Solução:

No enésimo corte, no máximo "*n*" regiões serão acrescentadas. Portanto, $\Delta(p_n) = (p_{n+1} - p_n) = (4 - 2, 7 - 4, 11 - 7, \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão *r* = 1 e, portanto, (p_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

A expressão para determinar p_n é da forma $cn^2 + dn + e$. Então,

$$\begin{cases} p_1 = c + d + f = 2 \\ p_2 = 4c + 2d + f = 4 \\ p_3 = 9c + 3d + f = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 2 - c - d \\ 4c + 2d + (2 - c - d) = 4 \\ 9c + 3d + (2 - c - d) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c + d = 2 \\ 8c + 2d = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8c + 2.(2 - 3c) = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \Rightarrow f = 1$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Logo, $p_{37} = \frac{37^2+37+2}{2} = \frac{1408}{2} = 704$, ou seja, 37 retas dividem o plano em no máximo 704 regiões.

(EsPCEx -2013) *Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro*

1ª linha:	1					
2ª linha:	3	5				
3ª linha:	7	9	11			
4ª linha:	13	15	17	19		
5ª linha:	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:

a) 807
b) 1007
c) 1307
d) 1507
e) 1807

Solução:

A sequência da primeira coluna $(1,3,7,13,21,31,\ldots)$ será chamada de (a_n).

As diferenças $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 4, a_4 - a_3 = 6, \ldots, a_{n+1} - a_n = 2n$, formam uma progressão aritmética de razão 2.

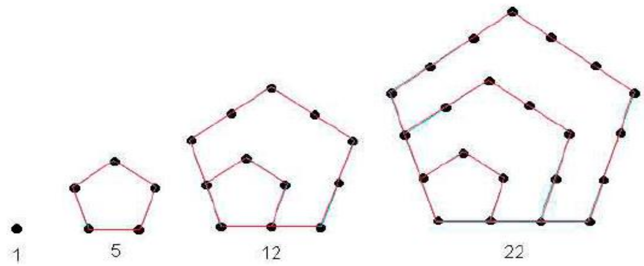
Portanto, a expressão para a_n.da forma quadrática $c.n^2 + d.n + e$.

Substituindo *n* por 1,2 e 3, obteremos o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} c.1^2 + d.1 + f = 1 = a_1 \\ c.2^2 + d.2 + f = 3 = a_2 \\ a.3^2 + d.3 + f = 7 = a_3 \end{cases} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow f = 1 \Rightarrow a_n = n^2 - n + 1$$

Logo, $a_{43} = 43^2 - 43 + 1 = 1849 - 43 + 1 = 1807$.

(SEMEC-2015) *Os números pentagonais são uma sequência de números que se podem representar sob a forma de pentágonos. Fazem parte dos chamados números poligonais, criados pelos discípulos de Pitágoras no século VI a. C. Estes números estão dispostos conforme a figura abaixo:*



O 9º número pentagonal é:

a) 92

b) 117

c) 145

d) 176

e) 210

Solução:

Vamos representar o enésimo número pentagonal por b_n. Então:

$$b_1 = 1, b_2 = 5, b_3 = 12, b_4 = 22, ...$$

e as diferenças $a_1 = b_2 - b_1 = 4, a_2 = b_3 - b_2 = 7, a_3 = b_4 - b_3 = 10, ...$, formam uma P.A. de razão r = 3. Logo, (b_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem e seu termo geral é dado por

$$b_n = b_1 + (n-1)a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r = 1 + (n-1)4 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}3$$
$$= \frac{2 - 8n - 8 + 3n^2 - 9n + 6}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Portanto, $b_9 = \frac{3.9^2-9}{2} = \frac{3.81-9}{2} = \frac{243-9}{2} = \frac{234}{2} = 117$ e a alternativa correta é (B).

3.4 – PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM $p \geq 2$

O caso geral de progressão aritmética pode ser definido da seguinte maneira:

Uma sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ é uma progressão aritmética de ordem $p \geq 2$ quando a sequência $(\Delta\left(\Delta(\Delta(\dots(\Delta a_n)\dots))\right))$, obtida de (a_n) aplicando-se p vezes o operador diferença Δ, é constante.

De modo mais geral, uma progressão aritmética de ordem p $(p > 2)$ é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $p - 1$.

Exemplo 3.5:

A sequência $(a_n) = (n^3) = (1, 8, 27, 64, \dots)$ é uma progressão aritmética de 3ª ordem. De fato, para cada natural n, temos:

$\Delta a_n = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

$\Delta(\Delta a_n) = 3n^2 - 3n + 1 - [3.(n-1)^2 - 3(n-1) + 1] = 6n - 6$

$\Delta\left(\Delta(\Delta a_n)\right) = 6n - 6 - [6(n-1) - 6] = 6$

Vimos anteriormente que uma sequência é uma P.A. se e só se seu termo geral um polinômio de primeiro grau em *n*. Já para progressões aritméticas de segunda ordem, a condição necessária e suficiente é que seu termo geral seja expresso por um polinômio de grau 2. Estas caracterizações se estendem às progressões aritméticas de ordem $p > 2,$ como provaremos no próximo teorema. Para tal precisamos do seguinte resultado:

Proposição 3.1:

Se p é um natural, então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p} \text{ ***é um polinômio de grau $p+1$ em n.*** }$$

Demonstração:

Vamos provar por indução sobre *p*. Para $p = 1$, segue do Lema 1 que

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(1+n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, ou seja, um polinômio de grau 2 em *n*.

Suponhamos agora que a afirmação é válida para todo $p \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$, ou seja, que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p + 1$ em *n*, para todo $p \in \{1,2,3, \dots, s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$.

Observemos que

$(k+1)^{s+2} = k^{s+2}. 1^{\circ} + \binom{s+2}{1}. k^{s+1}. 1^1 + \binom{s+2}{2} k^s. 1^2 + \binom{s+2}{3} k^{s-1}. 1^3 + \cdots + 1$

$= k^{s+2} + (s+2). k^{s+1} + \frac{(s^2+3s+2)}{2} k^s + \binom{s+2}{3} k^{s-1} + \cdots + 1$

$= \ k^{s+2} + (s+2). k^{s+1} + F(k),$

onde $F(k) = \frac{(s^2+3s+2)}{2} k^s + \binom{s+2}{3} k^{s-1} + \cdots + 1$ é um polinômio de grau *s* em *k.*

Considere $G(n) = \binom{r+2}{2} k^r. 1^2 + \binom{r+2}{3} k^{r-1}. 1^3 + \cdots + 1$ um polinômio de grau r + 1 em n, pela hipótese de indução.

Temos então,

$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2) \sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + \sum_{k=1}^{n} F(k),$

Observemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{s+2} - \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} =$$

$= 2^{s+2} + 3^{s+2} + \cdots + n^{s+2} + (n+1)^{s+2} - 1^{s+2} - 2^{s+2} - \cdots - n^{s+2}$

$= \ (n+1)^{s+2} - 1$, e, portanto,

$(n+1)^{s+2} = 1 + (s+2) \sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + \sum_{k=1}^{n} F(k)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - \sum_{k=1}^{n} F(k)}{s+2}$$

Sendo $F(k)$ um polinômio de grau *s* em *k*, existem constantes $c_s, c_{s-1}, \dots, c_1, c_0$ tais que

$$F(k) = c_s k^s + c_{s-1} k^{s-1} + \cdots + \ c_1 k + \ c_0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} F(k) = \ c_s \sum_{k=1}^{n} k^s + c_{s-1} \sum_{k=1}^{n} k^{s-1} + \cdots + \ c_1 \sum_{k=1}^{n} k + \ c_0 \sum_{k=1}^{n} 1$$

Pela hipótese de indução, para cada $p \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$, $\sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$ em *n*. Logo, $\sum_{k=1}^{n} F(k) = G(n)$, um polinômio de grau $s + 1$ em n e, portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - G(n)}{s+2}$$

é um polinômio de grau s + 2 em *n*.

□

Observação:

A sequência cujo enésimo termo é a soma $\mathbb{S}_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *dos n primeiros termos de uma progressão aritmética* (a_n) *de ordem p é uma progressão aritmética de ordem* $p + 1$. *Basta observar que o operador diferença, aplicado a* $(\mathbb{S}_n)$, *fornece* $\Delta\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{n+1} - \mathbb{S}_n = a_{n+1}$ *e define, portanto, uma progressão aritmética de ordem p.*

<u>**Teorema 3.3:**</u>

A sequência $(\boldsymbol{b_n})$ ***é uma progressão aritmética de ordem p*** $(\boldsymbol{p \geq 2})$***, se e somente se*** $\boldsymbol{b_n}$ ***é um polinômio de grau p em n.***

<u>Demonstração:</u>

Vamos fazer indução sobre $p \geq 2$. Para $p = 2$ o resultado é válido e foi provado no Teorema 1. Suponhamos agora que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in \{2,3, \dots, s\}$. Vamos mostrar que a afirmação é verdadeira para $p = s + 1$.

Se (b_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$ então $(a_n) = (\Delta b_n) = (b_{n+1} - b_n)$ é uma progressão aritmética de ordem *s* e, pela hipótese de indução, a_n é um polinômio de grau s em *n*.

Então, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é um polinômio de grau $s + 1$ em *n*. Sendo

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$, concluímos que b_{n+1} é um polinômio de grau $s + 1$ em *n*. Logo, b_n é um polinômio de grau $s + 1$ em *n*.

Reciprocamente, suponhamos que o termo geral de uma sequência (b_n) é um polinômio de grau $s + 1$ em *n*. Então, $b_n = c_{s+1}n^{s+1} + c_s n^s + + \cdots + c_1 n + c_0$ e

$a_n = \Delta b_n \;=\; b_{n+1} - b_n = c_{s+1}(n+1)^{s+1} + c_s(n+1)^s + \cdots + c_1(n+1) + c_0$ - $c_{s+1}n^{s+1} - c_s n^s - \cdots - c_1 n - c_0$ é um polinômio de grau s em n. Pela hipótese de indução, (Δb_n) é uma progressão aritmética de ordem s, o que implica que (b_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$.

□

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As progressões aritméticas foram apresentadas e abordadas de formas distintas em dois momentos da Educação Básica: primeiro, ao se propor uma forma sutil de abordagem e com aplicabilidade no Ensino Fundamental; o segundo se caracteriza por um aprofundamento e uma expansão no assunto para determinados casos que, na maioria das unidades escolares, não são trabalhados de forma satisfatória e mais completa. Desse modo, portanto, a ideia basilar desta pesquisa foi justamente propor a inserção da P.A. de primeira ordem de forma introdutória no 9º ano do Ensino do Fundamental, para sua ampliação no Ensino Médio, o que garantiria que, posteriormente, o tema seria revisto e ampliado com P.A. de segunda ordem e, até mesmo, com P.A. de ordem $p > 2$.

A pesquisa de campo em uma escola da rede municipal do Rio de Janeiro ratifica e incentiva a proposta de antecipar o estudo das progressões aritméticas no Ensino Fundamental, visto que os alunos se envolveram com a prática da resolução das questões, demonstraram uma concentração maior do que em outras aulas e um alto índice de acertos.

Atualmente com tanta discussão sobre o currículo, avaliação e metodologia para a melhoria do processo ensino-aprendizagem nas unidades de ensino, ficam o desejo e a motivação para que ocorra uma efetiva relevância na implementação da proposta sugerida nesta dissertação. Afinal, há que se ressaltar que as progressões aritméticas de ordem $p \geq 2$ não são abordadas no Ensino Médio na maioria das escolas. Ademais, poucos são os referenciais teóricos a respeito do tema. A isso, soma-se o fato de que poucos professores se deparam com essa temática ao longo de sua formação até a graduação.

Após a exposição das ideias propostas nesta dissertação, vemos que o tema é de total relevância para docentes e discentes na formação acadêmica ao longo da Educação Básica, pois estão de acordo com o que propõe os referenciais teóricos atuais adotados na pesquisa. Assim, espera-se que outras pesquisas de semelhante teor possam ampliar, futuramente, os olhares e discussões que aqui foram propostos, problematizando e/ou elucidando cada vez mais o ensino de certos aspectos matemáticos na Educação Básica.

BIBLIOGRAFIA

ABRANTES, Paulo. **Avaliação e Educação Matemática.** Rio de Janeiro: MEM/USU/GEPEM, 1995.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini: 6º ano**. 8.ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

________ . Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade: qual o sentido**? São Paulo: Paulus, 2003.

GADOTTI, M. **Histórias das Ideias Pedagógicas, conclusão**: desafios da Educação pós-moderna. Editora Ática, 1993.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Publicação da Coleção de Iniciação Científica da OBMEP, Rio de Janeiro, 2006.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 2.ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio, volume 2.** Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática: Trigonometria e progressões.** São Paulo: Atual, 1986.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SANTANA, Tiago. **Sequências reais.** Disponível em: <https://www.google.com.br/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjWya6Z_6fTAhWGIpAKHRtYBnMQjRwIBw&url=http%3A%2F%2Fpessoal.sercomtel.com.br%2Fmatematica%2Fmedio%2Fsequenc%2Fsequenc.htm&psig=AFQjCNHPK0psTYQqDAzZhSATJGb_9GtA3g&ust=1492398312496990>. Acesso em: 16/04/2017.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar- Matemática.** 1.ed. São Paulo: FTD, 2010.