UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Márcio Rocha Lima

(RE) DESCOBRINDO A UNIDADE RADIANO POR MEIO DO GEOGEBRA

Santa Maria, RS
2017

Márcio Rocha Lima

(RE) DESCOBRINDO A UNIDADE RADIANO POR MEIO DO GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 25 de agosto de 2017:

Carmen Vieira Mathias, Dr. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Charles Quevedo Carpes, Dr. (Unipampa)

Ricardo Andreas Sawervein, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rocha Lima, Márcio
(Re) Descobrindo a Unidade Radiano por meio do Geogebra / Márcio Rocha Lima.- 2017.
128 p.; 30 cm

Orientadora: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2017

1. Trigonometria 2. Funções Trigonométricas 3. Tecnologias I. Vieira Mathias, Carmen II. Título.

Márcio Rocha Lima

(RE) DESCOBRINDO A UNIDADE RADIANO POR MEIO DO GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional**.

Aprovado em 25 de agosto de 2017:

Carmen Vieira Mathias, Dr. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Charles Quevedo Carpes, Dr. (Unipampa)

Ricardo Andreas Sawervein, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho - fruto de um esforço traduzido pela ausência sempre sentida - a todos em minha casa – Nanda, Tchê , Mary Jane e Pucca - eu simplesmente amo vocês. . . acredito que isso traduz tudo!

AGRADECIMENTOS

Acredito que todo e qualquer agradecimento deva iniciar por Deus – a força maior que sempre nos impulsiona a querer fazer mais e melhor.

À minha esposa Fernanda e meus filhos Gabriel e Mariana. Acredito que a matemática estará presente em minha rotina diária enquanto me for permitido, mas vocês serão os eternos motivos para eu demonstrar minha felicidade pela vida que me é permitida com vocês a cada nascer do sol.

A meus pais Eufrásio e Ana. Se hoje completo mais esta etapa da vida, muito devo aos senhores que me ensinaram a aceitar os desafios e acreditar na vitória.

Defendendo este trabalho num dia tão significativo, 25 de agosto, Dia do Soldado, não poderia deixar de expressar minha gratidão ao Exército Brasileiro, na pessoa de todos os Comandantes que tive, por consolidarem, em meu caráter, valores que são imprescindíveis para a vida profissional de qualquer pessoa. Ao Colégio Militar de Santa Maria (CMSM) pela alegria de me proporcionar a primeira oportunidade de trabalhar na condição de docente - uma felicidade que desfruto diariamente há quase 7 anos. Esta é a Organização Militar que trabalho há mais tempo... mas a que menos vi o tempo passar.

Aos professores e amigos do CMSM, pelo exemplo de profissionalismo e dedicação diariamente observados. Uma homenagem especial em favor da Professora Daiana Sonego Temp e da 1° *Ten Stefanie Camile Schwarz, pela ajuda na elaboração do presente trabalho.*

Aos professores do Profmat da UFSM - em especial minha orientadora Carmen Vieira Mathias - pela demonstração que vale a pena trabalhar em prol de uma educação de qualidade em nosso país.

Aos discentes do CMSM que participaram da presente pesquisa, pela disponibilidade, responsabilidade e amor por tão nobre disciplina.

E a todos aqueles que de forma direta ou indireta me ajudaram nesta caminhada. Todos deixam marcas em um relacionamento. Não seria diferente com vocês. Mesmo que eventualmente não tenham sido citados aqui.

RESUMO

(RE) DESCOBRINDO A UNIDADE RADIANO POR MEIO DO GEOGEBRA

AUTOR: Márcio Rocha Lima
ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias

A pesquisa com relação à concepção de alunos sobre conceitos relacionados à Trigonometria, em especial o estudo de radiano, é tema de importância, pois envolve a discussão sobre formas de ensino e aprendizagem que por vezes são dissonantes. Assim, este trabalho tem como o objetivo identificar as concepções dos alunos sobre o tópico radiano e propor uma sequência de atividades com o uso do software Geogebra. A pesquisa foi classificada quanto à abordagem do problema como qualitativa-quantitativa. Utilizou como instrumentos para a coleta de dados questionários (pré-teste e pós-teste) formulados com questões que englobam conteúdos de razões trigonométricas fundamentais. Outro instrumento utilizado foi um roteiro desenvolvido com auxílio do software Geogebra. Participaram da pesquisa oito alunos matriculados no segundo ano do Ensino Médio em uma escola pública federal localizada na cidade de Santa Maria, RS. A análise do pré-teste demonstrou que os alunos não reconhecem o conceito de ângulo e possuem dificuldade em reconhecer triângulos semelhantes, base para o entendimento de conceitos que se relacionam intimamente com as razões trigonométricas fundamentais e que nos levam, de forma sequencial, ao entendimento sobre a constante π e o conceito de radiano. Além disso, não reconhecem as aplicabilidades de tais conceitos no cotidiano. Após a verificação das principais dificuldades, desenvolveu-se um conjunto de treze atividades valendo-se do software Geogebra, com as quais se buscou trabalhar os conceitos errôneos apurados no pré-teste e apresentar uma proposta de ensino que se acredita motivadora, dinâmica e eficiente. Após o término das atividades aplicou-se um pós-teste para verificar se a metodologia utilizada foi eficaz como forma de promover a aprendizagem real em relação aos conceitos trabalhados. Os resultados do pós-teste mostraram que ocorreu significativa melhora do conhecimento em relação ao conceito de ângulo, semelhança de triângulos, origem e uso do número π e da unidade radiano.

Palavras-chave: Geogebra, radianos, trigonometria, conceitos.

ABSTRACT

REDISCOVERING THE RADIAN UNITY THROUGH GEOGEBRA

AUTHOR: Márcio Rocha Lima
ADVISOR: Carmen Vieira Mathias

The research regarding the conception of students about concepts related to Trigonometry, especially the study of radian, is a topic of importance, since it involves the discussion about forms of teaching and learning that are sometimes dissonant. Thus, this work has as the main objective to identify students' conceptions about the radian topic and propose a sequence of activities with the use of Geogebra software. The research was classified as a qualitative-quantitative approach. It was used as instruments for the collection of data (pre-test and post-test) formulated with questions that encompass contents of fundamental trigonometric ratios. Another instrument used was developed with the help of Geogebra software. Eight students participated in the study enrolled in the second year of high school in a federal public school located in city of Santa Maria, RS. The analysis of the pretest showed that students do not recognize the concept of angle and have difficulty recognizing similar triangles, the basis for the understanding of concepts that are closely related to the fundamental trigonometric ratios and which lead sequentially to the understanding on the constant π and the concept of radian. Moreover, they do not recognize the applicability of such concepts in everyday life. After checking the main difficulties, developed a set of thirteen activities using the software Geogebra, with which the erroneous concepts found in the pre-test and teaching that is believed to be motivating, dynamic and efficient. After the end of the activities, a post-test to verify if the methodology used was effective as a way of promoting the learning in relation to the concepts worked. The results of the post-test that there was a significant improvement of knowledge regarding the concept of angle, similarity of triangles, origin and use of the π number and the radian unit.

Keywords: Keywords: Geogebra, radians, trigonometry, concepts.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA Caso ângulo/ângulo de Semelhança de Triângulos

EB Educação Básica

EF Ensino Fundamental

EM Educação Mádio

LAL Caso lado/ângulo/lado de Semelhança de Triângulos

LLL Caso lado/lado/lado de Semelhança de Triângulos

LDB Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

PCN Parâmetros Curriculares Nacionais

$PROFMAT$ Mestrado Profissionalizante em Matemática

TIC Tecnologias em Informações e Comunicações

$UNESCO$ Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem, nas escolas brasileiras, vem sendo discutido e repensado sempre buscando o desenvolvimento de metodologias que facilitem e tornem significativo o aprendizado para os alunos. Encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2001), que as metodologias ideais são aquelas que priorizam a ação do aluno (protagonista), atuante na construção do conhecimento por meio do uso de atividades de experimentação. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96) (BRASIL, 1996), enfatiza a importância de um currículo em que os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação permitam ao educando, no final da educação básica, demonstrar o domínio dos princípios científicos e tecnológicos.

Dados da Organização das Nações Unidas para a Educação (UNESCO, 2014), salientam que os governos reconhecem que a função da educação é maior do que memorizar conteúdos. Educar é criar um ambiente no qual os estudantes possam desenvolver suas potencialidades cognitivas, afetivas e psicomotoras. As mudanças tecnológicas, que acontecem no mundo, relacionadas à busca pelo conhecimento tornam necessária a atualização e a utilização de meios que modifiquem o ensino e a aprendizagem. Dentro do contexto de formação de educandos ativos, conhecedores e usuários das novas tecnologias, o uso do software Geogebra é uma alternativa que acredita-se viável.

A escolha do tema, que aponta para a importância da unidade radiano na Matemática, se deu por dois motivos: o primeiro pela própria experiência do autor que, na sua formação escolar, não dispôs de docentes preocupados em mostrar a origem e importância do radiano no estudo de Trigonometria; a segunda por meio de uma constatação de que pouco ou nenhum livro didático, atualmente em uso, faz referência ao mesmo fato.

Observa-se que o estudo das Funções Trigonométricas, no colégio escolhido para a realização desta pesquisa, se dá, com ênfase, a partir do 1º ano do Ensino Médio (EM). Nesse contexto, utiliza-se como unidade fundamental o radiano. No entanto, no ensino da trigonometria, que ocorre ainda no Ensino Fundamental (EF), a unidade principal utilizada é o grau. Assim, ao estudar as Funções Trigonométricas os alunos se deparam com uma mudança que, na maioria das vezes, não é explicada nas bibliografias utilizadas ou pelos próprios professores, levando-os a não compreender o motivo desta alteração.

Desta forma, este trabalho se justifica pela necessidade de explicar aos alunos essa mudança que, em alguns casos, pode gerar grandes dificuldades.

Cabe ressaltar que o PROFMAT foi fator importante para identificação desta lacuna presente no ensino, ao proporcionar um ensino baseado nos fundamentos teóricos que norteiam a origem e os conceitos matemáticos. Desta forma, esta pesquisa buscou responder o seguinte problema: o uso do software Geogebra é uma ferramenta eficaz para que ocorra a transposição didática do conteúdo “Funções Trigonométricas”, enfatizando a necessidade e a importância do uso da unidade radiano, facilitando, assim, o processo de ensino?

Com o intuito de responder a pergunta norteadora da pesquisa, esta dissertação tem como objetivo geral verificar as possibilidades de contribuições do software Geogebra no ensino e aprendizagem do conceito de radiano.

Como forma de contemplar o objetivo geral surgem objetivos específicos que são:

- Investigar o nível de entendimento que um grupo de alunos do 2º Ano do EM possui acerca do conceito de radiano e suas aplicações;
- Oportunizar ao aluno dar significado a conceitos, por intermédio de outros meios daqueles usualmente utilizados no ambiente de sala de aula regular e tradicional;
- Promover a inserção das Tecnologias de Informação no ambiente escolar valendo-se do software Geogebra;
- Desenvolver atividades que permitam a realização da Transposição Didática e auxiliem no processo de ensino e aprendizagem.
- Verificar se o roteiro de atividades propostas, foram uma ferramenta eficiente para a promoção da aprendizagem do conceito de radiano.

A presente dissertação está dividida em seções. Na segunda seção são apresentados os referenciais teóricos que nortearam a pesquisa realizada. Realizou-se um apanhado em relação às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e sobre o software Geogebra, tópicos que nortearam o desenvolvimento das atividades desenvolvidas.

Na sequência da mesma seção são apresentados trabalhos de pesquisa cujo enfoque principal é o uso do software Geogebra e a unidade radiano. Estes trabalhos auxiliaram para o desenvolvimento e execução das atividades idealizadas.

Também é colocado o aporte matemático utilizado na dissertação, desenvolvido por meio da descrição de quatro livros que apresentam os principais conceitos trabalhados, auxiliando no desenvolvimento das atividades e na avaliação das respostas fornecidas pelos alunos.

Por fim, é apresentada uma descrição de livros didáticos utilizados no 9º Ano do Ensino Fundamental e no 2º Ano do Ensino Médio que serviram como subsídio para a verificação da forma como as Razões Trigonométricas são trabalhadas. A partir desta síntese observou-se os “momentos” em que os conceitos de π e radiano são trabalhados por meio dos livros didáticos.

Na terceira seção é apresentada a metodologia utilizada descrevendo o tipo de pesquisa, o público-alvo o cronograma das atividades, os instrumentos e os assuntos abordados.

A quarta seção faz uma abordagem sobre a aplicação das atividades e os resultados obtidos. Neste momento realiza-se uma descrição da percepção do pesquisador quanto à eficiência do software Geogebra como um objeto de ensino na Matemática.

Finaliza-se a dissertação na quinta seção, na qual se delineia uma visão geral sobre o processo realizado buscando apresentar as considerações finais nas quais observa-se o desenvolvimento da pesquisa em relação aos seus objetivos.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

2.1 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E ENSINO

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) são definidas como um conjunto de procedimentos e recursos tecnológicos que buscam aperfeiçoar, facilitar e motivar o processo de ensino e aprendizagem nas escolas. Diferentes recursos são utilizados, como o uso de computadores, dispositivos móveis, softwares, aplicativos e internet de acordo com a realidade da escola e com o objetivo do trabalho a ser realizado. A veloz e constante mudança no cenário tecnológico cria a necessidade de atualização constante o que leva à modificação de hábitos e atitudes das pessoas que compõem a sociedade.

Nos últimos anos diferentes discussões de cunho politico e educacional têm sido apreciadas em decorrência da necessidade de implantação de metodologias com base tecnológica nas escolas. Almeida (2015, p.33) cita exemplos dos programas governamentais que formam implementados usando as tecnologias. As mudanças sinalizadas levam em consideração o potencial atrativo e educacional que as TIC apresentam em razão de explorarem aspectos visuais e de interação não encontrados na sala de aula tradicional.

O professor ao se valer das TIC pode criar um ambiente diferenciado no qual o aluno se depara com situações novas nas quais deve, preferencialmente, protagonizar o trabalho a ser construído. As novas tecnologias estão revolucionando a forma de ensinar (SOFFA; TORRES, 2009) pois são baseadas em metodologias adequadas ao nível escolar do aluno, ao conteúdo a ser trabalhado e aos objetivos a serem alcançados por meio de metodologias diferenciadas.

Conforme Barros (2007) e Soffa e Torres (2009) o modelo regular de ensino alicerçado no discurso unilateral do professor e a restrição ao uso do livro didático gera desinteresse, por parte dos alunos, dificultando a aprendizagem e gerando um conflito escolar: alunos - nativos digitais - expostos ao ensino ultrapassado. Esta nova realidade ligada às tecnologias exige adaptações escolares voltadas a um novo modelo de ensino. (GOMEZ, 2001; CATANEO, 2011)

Kenski (2007), corrobora este pensamento quando coloca que

> Este é também o duplo desafio para a educação: adaptar-se aos avanços tecnológicos e orientar o caminho de todos para o domínio e a apropriação crítica desses novos meios. [...] A escola representa na sociedade moderna o espaço de formação não apenas das gerações jovens, mas de todas as pessoas. Em um momento caracterizado por mudanças velozes, as pessoas procuram na educação escolar a garantia de formação que lhes possibilite o domínio de conhecimentos e melhor qualidade de vida. (KENSKI, 2007, p.18-19)

Ainda nesse sentido, Mercado (2002, p.131) expõe que aulas diferentes, motivadoras que se valem das TIC podem auxiliar os professores a transmitir o conhecimento de maneira dinâmica, criativa, dialógica servindo como importante apoio no processo de ensino e aprendizagem.

Diferentes documentos que norteiam o sistema educacional brasileiro enfatizam a necessidade do uso destas tecnologias em sala de aula. Encontra-se na LDB (BRASIL, 1996), artigo 32 sobre a necessidade da compreensão da tecnologia por parte dos docentes e educandos. Nos PCN salienta-se que é

> “indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras"(BRASIL, 1996, p.96)

Segundo Masetto (2000) e Reis, Santos e Tavares (2012) o uso de softwares e computadores pode explorar habilidades de leitura, escrita, interpretação, interação em grupo, cálculo, busca por resultados e protagonismo do aluno. É importante salientar, conforme Oliveira (2014) e Suguimoto (2013), que o professor tem papel fundamental como mediador nesta interação em que os alunos têm espaço para discussão e apresentação de ideias, adquirindo características essenciais à formação de um cidadão.

Em relação ao ensino de Matemática JARDINETTI (1996) aponta que é de grande valia o desenvolvimento e uso de metodologias que aproximam o aluno ao conteúdo estudado facilitando a aquisição do conhecimento. Acredita-se que o uso das TIC, por meio de softwares específicos pode promover a transposição de conceitos teóricos e, na maioria das vezes abstratos, para modelos reais e presentes no cotidiano. Gravina e Santarosa (1999) afirmam que a representação dos objetos matemáticos na tela do computador possibilita ao aluno a visualização e a manipulação desses objetos, favorecendo o processo de aprendizagem.

Para Miranda e Laudares (2007)

> A sociedade e a tecnologia estão integradas e a tecnologia tornou-se o aspecto dominante da civilização. A Matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação, e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação. De fato, todas as aplicações de um computador podem ser vistas como uma aplicação de um modelo matemático simples ou complexo. Portanto, de um ponto de vista lógico, a tecnologia da informação não representa uma nova forma de manipulação formal; mas é uma enorme extensão dessas manipulações."(MIRANDA; LAUDARES, 2007, p.73)

Costa e Fiorentini (2007) consideram que o professor de Matemática precisa estar ciente das novas exigências educacionais sendo capaz de refletir e mudar suas ações em busca de um ensino mais eficiente. Os PCN (BRASIL, 2006) colocam que o ensino da Matemática deve ser

> “(...) um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução,

> estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva." (BRASIL, 2006, p.70)

De acordo com Gravina e Santarosa (1999) e Kenski (2007), o ambiente informatizado será eficiente quando acelerar o processo de apropriação do conhecimento por meio da visualização, experimentação, interpretação, demonstração, resultando em ações que desafiem e motivem o aluno na busca pelo conhecimento.

Diferentes conteúdos que norteiam o currículo escolar da disciplina de Matemática apresentam potencial para serem trabalhados com auxílio das TIC. O aluno, ao se deparar com grande número de fórmulas e conceitos pode não visualizar a importância do tema em questão.

Quando este aluno aprende, por exemplo, Funções Trigonométricas, visualizando os conceitos estudados, poderá conseguir relacionar teoria e prática, ou seja, o fator visual e de manipulação são elementos que poderão ser diferenciais para o processo de aprendizagem.

Nos PCN para o Ensino Médio, está claro que o "impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar. (BRASIL, 2001, p.24)

Acredita-se que os professores de Matemática precisam receber formação adequada e buscar conhecer softwares específicos que orientem e auxiliem no desenvolvimento das aulas. Desta forma, será possível promover a melhoria na aprendizagem formando educandos com habilidades matemáticas mais desenvolvidas, espírito criativo e participativo.

Espera-se, que no momento em que o ensino tornar-se interessante, os alunos, cada vez mais, busquem compreender os conteúdos ensinados, relacionando-os com o cotidiano, pois a Matemática está presente nas mais variadas situações, desde aquelas relacionadas ao corpo humano, construção civil, finanças, medicamentos, entre outros. Cabe ao professor explorar estas ideias e desenvolver, no aluno, o prazer em estudar.

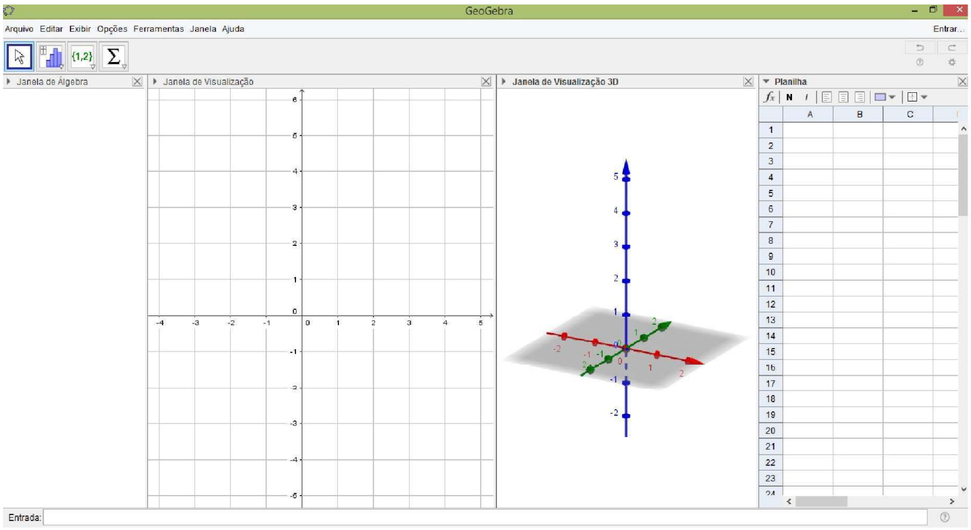
2.2 SOBRE O SOFTWARE GEOGEBRA

O Geogebra é um software de matemática dinâmica, gratuito, que reúne geometria bidimensional e tridimensional, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo. Apresenta o diferencial de trabalhar de forma dinâmica levando em consideração a atuação do aluno. Em particular, o programa permite a integração entre números, ângulos e figuras modificando as relações presentes nos objetos construídos.[1]

[1] Disponível em www.geogebra.org

Segundo Amaral e Frango (2014) , ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, em 2001, como parte de sua tese de doutoramento na Universidade Austríaca de Salzburg, para ser utilizado nos diferentes níveis de ensino de Matemática e Física, com o objetivo de tornar as aulas mais dinâmicas e atrativas aos alunos. As construções dos objetos são realizadas em Janelas a partir do uso de Ferramentas ou Comandos, como ilustra a figura 2.1.

Figura 2.1 – Área de trabalho da versão 5.0 do software Geogebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O Geogebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto: a representação geométrica e a representação algébrica. Ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, existe a possibilidade de visualizar outra janela que apresenta a correspondente expressão algébrica. Ao realizar as alterações no gráfico, essas imediatamente são visíveis na janela algébrica. Observa-se que o dinamismo de situações poderá permitir ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses.

Reis, Santos e Tavares (2012), afirmam que o uso de softwares educacionais, em especial o Geogebra, para o ensino da Matemática é um poderoso recurso, pois cria um espaço de pesquisa amplo, por meio da possibilidade de simular situações, testar conhecimentos, desmembrar conteúdos e descobrir novos conceitos.

Para Suguimoto (2013)

> “O estudo das funções é um dos conceitos mais importantes da matemática, tendo grande aplicabilidade principalmente nas ciências exatas e nas áreas da engenharia. Dar início ao estudo desse conteúdo de maneira diferenciada, aproveitando a disponibilidade desses laboratórios, com uso de um software de maneira adequada, pode proporcionar ao educando um grande aprendizado que vai além do conteúdo específico função.” Suguimoto (2013, p.12)

Corroborando com Suguimoto (2013), uma pesquisa realizada por Borba e Penteado (2001) com alunos de graduação observou que o uso de mídias tecnológicas com softwares específicos propicia espaços com resultados bastante satisfatórios, principalmente no estudo de funções.

Acredita-se que aulas teóricas aliadas ao uso do software propiciam momentos de reflexão, descobrimento, contextualização e aprendizagem dos conteúdos que estão sendo expostos. Assim, o professor pode se apropriar deste momento didático diferenciado para explorar pré-requisitos e verificar possíveis erros conceituais presentes entre os alunos.

Masetto (2000) afirmam que

> "(...) na busca de melhorar a qualidade das aulas, encontra-se no software Geogebra ferramentas que facilitaram a compreensão e interpretação do significado de conceitos e propriedades da Matemática, tornando as aulas mais interativas e dinâmicas" (MASETTO, 2000, p.1)

Segundo Hohenwarter, Hohenwarter e Lavicza (2009), o Geogebra é um software interativo de Geometria Dinâmica, que pode ser considerado um recurso usado tanto para oficinas quanto para autoaprendizagem.

De acordo com essa afirmação Cataneo (2011) coloca que

> "A tecnologia não consiste apenas em um recurso a mais para os professores motivarem suas aulas, mas sim em um recurso metodológico, que deve ser utilizado de maneira planejada, isto é, o modo e o momento de utilização do recurso da informática devem estar relacionados ao conceito estudado, bem como ao objetivo que se deseja alcançar." (CATANEO, 2011)

Desta forma, acredita-se que um mesmo recurso metodológico pode ser eficaz em cinco diferentes momentos do processo de ensino: problematização inicial; organização, aplicação e avaliação do conhecimento e; por fim, a apresentação dos resultados.

2.3 TRABALHOS RELACIONADOS

Para a seleção dos trabalhos utilizou-se uma busca nas plataformas "Scielo" e "Portal de Periódicos da Capes" por serem repositórios que armazenam trabalhos de diversas Pós-graduações.

Diferentes trabalhos oriundos de programas de pós-graduação utilizam o software Geogebra como apoio para o desenvolvimento de atividades. No sentido de saber mais a respeito do software escolhido e suas relações com a sala de aula, optou-se por descrever alguns trabalhos acadêmicos que tratavam desse enfoque.

Em relação ao conteúdo abordado (radiano), observou-se um pequeno número de trabalhos, porém os descritos, nesta dissertação, se aproximam da pesquisa realizada.

2.3.1 Trabalhos utilizando o software geogebra: breve revisão

Diferentes dissertações na área da Matemática foram realizadas buscando identificar a importância do software Geogebra como forma de auxiliar a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nessa seção serão apresentados 9 (nove) pesquisas cujo enfoque principal é o uso do software Geogebra.

(FIALHO, 2010) realizou uma pesquisa onde utilizou 11 roteiros de aulas na sala de informática com alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Os alunos trabalhavam as atividades e salvavam os trabalhos realizados. Após as aulas o pesquisador analisou os resultados e concluiu que o trabalho com o software Geogebra precisa da participação efetiva e aceitação pelos alunos e que o mesmo é um programa eficaz no auxílio da abstração de conteúdos, pois alunos com dificuldades em compreender conceitos, baseados na teoria, apresentaram resultados satisfatórios após a manipulação do programa.

Encontra-se em Oliveira e Fernandes (2010), uma pesquisa que trata do uso do software para o ensino de trigonometria, onde trabalhou com alunos do EM de uma escola pública em São Paulo. No trabalho foi verificada eficiência para a construção significativa do conhecimento para os conceitos de Trigonometria, em destaque seno e cosseno. A pesquisa foi baseada na comparação de aulas tradicionais e aulas utilizando tecnologias digitais, como o software Geogebra para a construção do ciclo trigonométrico. Os resultados mostraram que as aulas baseadas nas TIC favoreceram a aprendizagem do conteúdo trabalhado.

O uso do software Geogebra para o ensino de Geometria Plana foi o ponto de pesquisa de Procópio (2012). O autor buscou apresentar aos professores do 1º ano do EM de escolas públicas de São Paulo a viabilidade de inserção de atividades utilizando o Geogebra. Ao final do estudo o autor concluiu que é possível e viável a introdução de aulas utilizando o Geogebra, pois o mesmo facilita o entendimento dos conteúdos trabalhados.

Uma proposta para o ensino da trigonometria com o uso do software Geogebra foi tema de Pedroso (2012). Nessa dissertação foi trabalhada uma sequência de ensino com 45 alunos e, posteriormente, com 7 alunos. Os resultados da pesquisa mostraram que a aprendizagem de temas como conceito de ângulo, razões trigonométricas, círculo trigonométrico e funções trigonométricas foi favorecida pelo uso do software.

Encontra-se em Junior (2013), uma pesquisa com o uso do software Geogebra para o ensino de funções. Essa dissertação apresenta uma proposta educacional com o objetivo de facilitar o processo de ensino e aprendizagem das funções quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. O autor concluiu que a manipulação dos dados e dos gráficos construídos, por meio do software, foi um agente facilitador para a aprendizagem.

Carvalho (2013) aborda um estudo sobre o ensino da matemática através da robótica no qual utilizou o software Geogebra trabalhando conteúdos como distância, coordenada, posição de pontos, erros e aproximações do valor numérico, ângulos e coordenadas cartesianas. Neste estudo o autor observou que o uso do Geogebra se tornou um elemento facilitador e motivador no processo de ensino e aprendizagem, pois estimulou a ação dos alunos em um ambiente diferenciado.

Melo (2013) trabalhou com a formação do conceito de polígonos. Na pesquisa a autora atuou sobre alunos do 1º ano do EM de uma escola técnica ao investigar o uso do software Geogebra como elemento mediador na formação do conceito de polígonos semelhantes. Como resultado concluiu que os alunos apresentaram pouca dificuldade em trabalhar com o Geogebra; socializaram para a elaboração e discussão das tarefas propostas e iniciaram a formação de conceitos relacionados a polígonos semelhantes. Para a autora, o Geogebra é uma importante ferramenta auxiliar que promove interação, diálogo, aulas dinâmicas, visualização e simulação de atividades na área da Matemática.

O uso do Geogebra como ferramenta auxiliar na compreensão de resultados de geometria pouco explorados no ensino básico foi tema de Ferreira (2015). No trabalho o autor apresenta o software Geogebra para alunos da Educação Básica (EB) com o objetivo de demonstrar, visualmente, enunciados relacionados aos teoremas de Morley, Hiparco, Stewart, Menelau e o Teorema do Círculo dos 9 pontos. Os resultados mostraram que os alunos se motivaram nas aulas e que o Geogebra é uma importante ferramenta para o ensino de conceitos matemáticos.

Souza (2016) realizou uma pesquisa que buscou verificar como ocorre a reconstrução de conceitos entre professores e mestrandos na área da Matemática. O trabalho ocorreu por meio de aulas que utilizaram o software Geogebra como elemento facilitador. O autor verificou que os participantes apresentaram formação de novos conceitos em relação à representação gráfica da função polinomial de 1º grau e da função seno.

2.3.2 Trabalhos sobre o conceito de radiano: uma breve revisão

O ensino dos conteúdos de Matemática permeia um diverso e vasto universo de estudo e pesquisa que, em algumas ocasiões, culminaram em trabalhos oriundos de programas de pós-graduação. Dentre os temas pesquisados encontram-se, na Trigonometria, pesquisas voltadas à busca por metodologias eficientes para a consolidação do aprendizado. Nessa seção apresentam-se 2 pesquisas relacionadas ao conceito de Radiano.

Quintaneiro (2010) utilizou o tema “Representações e definições formais em trigonometria no Ensino Médio”, em que verificou a abordagem da trigonometria em um livro didático e as concepções de 16 professores em relação ao assunto. Inicialmente verificou-se que o ensino utilizando representações gerais na escola promovem conflitos em relação à compreensão do conceito de seno. Também, percebeu-se que os professores não compreendiam escritas envolvendo o número π e a unidade radiano, pois os mesmos eram “omitidos”, ou seja, não eram explicados, antes de ocorrer a compreensão do assunto.

Assim, na busca por formas que diminuam esta lacuna de aprendizagem, aquele autor elaborou um roteiro de atividades evidenciando a unidade radiano como medida angular e relacionando trigonometria no círculo com trigonometria no triângulo retângulo. Em última análise, verificou que a abordagem utilizando as atividades foi uma ferramenta eficaz, pois resultou, para os professores, na capacidade de compreender e realizar as conversões necessárias.

Silva e Bayer (2014) realizaram uma pesquisa com 12 professores de Matemática e 260 alunos em escolas da cidade de Boa Vista. Os autores buscaram responder à pergunta: como os professores desenvolvem o conteúdo de trigonometria? Em um primeiro momento os autores identificaram que os professores não contextualizavam o conteúdo. Assim, desenvolveram 8 atividades envolvendo elementos da natureza presentes no conteúdo de trigonometria, como largura de um rio, altura de uma montanha, oscilações das ondas, entre outros. A partir das atividades propostas, diferentes conceitos de trigonometria foram explicitados, como o número π e radiano, tanto em relação à origem e utilização como às diferenças entre eles.

O diferencial do presente trabalho reside no fato de verificar, não em professores, mas em alunos que já passaram pelo processo de formação tanto do conteúdo Trigonometria como Funções Trigonométricas, de que forma estes últimos se consolidaram nos discentes. De forma especial, se entenderam a transposição do uso da unidade grau, trabalhada na Trigonometria prevista para o 9º ano do Ensino Fundamental, para a unidade radiano, esta última vista no conteúdo Funções Trigonométricas prevista para o 1º ano do Ensino Médio. Trata-se de uma pesquisa que valoriza a promoção de uma educação sob a ótica do encadeamento de assuntos que, mesmo abordados em momentos distintos, por vezes em intervalos grandes, precisam fazer sentido para os seus usuários, principalmente os discentes. A sequência de atividades propostas visa mostrar um caminho para se atingir este objetivo, o que acredita-se ser possível de diferentes formas.

2.4 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Dentro da abordagem idealizada por este autor como uma metodologia a ser apresentada como alternativa ao ensino tradicional em sala de aula, acredita-se importante apresentar, neste momento, a fundamentação matemática que sustenta o presente trabalho. O autor reconhece esta como uma das mais valiosas contribuições visualizadas pela Coordenação do Profmat que é proporcionar o domínio aprofundado do conteúdo matemático relevante para a prática da docência. (PROFMAT, 2017)

Para a elaboração das atividades presentes nesta dissertação utilizou-se diferentes e importantes conceitos matemáticos. Estes conceitos serão apresentados a partir de uma descrição de como os conteúdos Razões Trigonométricas e Funções Trigonométricas são abordados nos livros usados como referência para a fundamentação da Matemática.

Para o cumprimento de tal objetivo foram buscadas informações em livros como Euclides, (2009), Lima et al. (2006), Neto (2013) e Carmo et al (2005).

Observa-se que as informações são apresentadas na ordem em que aparecem nos livros analisados.

O livro de Euclides (2009) é uma obra que, apesar de escrita em 300 a.C, até hoje influencia a matemática com a qual se trabalha diariamente. Em treze capítulos (ou livros), Euclides de Alexandria, um dos matemáticos mais importantes da antiguidade, discorre sobre conceitos ligados à Geometria, Álgebra e Aritmética por meio de postulados e proposições (estes últimos com suas respectivas provas).

Artmann (1999) apud Euclides (2009, p.15) explicitou esta visão ao dizer que "conhecer os Elementos de Euclides pode ser da mesma importância para o matemático hoje que o conhecimento da arquitetura grega para um arquiteto".

Apesar não ter apresentado conceitos ligados especificamente à Trigonometria, algumas ideias oriundas desta obra fundamentam tal ramo da Matemática, que é objeto de estudo neste trabalho. Da obra foram aproveitados importantes definições ligadas aos círculos e aos triângulos.

Para Euclides (2009, p.97) a definição de círculo (definição 15) é "(...) uma figura plana contida por uma linha [que é chamada de circunferência] em relação à qual todas as retas que a encontram[...], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si". Em complemento, a definição 16 chama este ponto especial de **centro do círculo** (grifo do autor).

Já o postulado 3 pode ser aproveitado neste estudo ao afirmar que todo centro e distância descreve um círculo Euclides (2009, p.98).

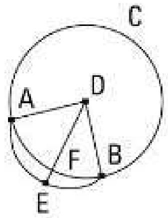
Fechando as contribuições identificadas no Livro I é importante destacar a proposição 47, uma versão euclidiana de um importante teorema ligado à Trigonometria, o Teorema de Pitágoras. Foi postulado que "nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto" de acordo com Euclides (2009, p.132).

Partindo para a análise do Livro III, encontra-se situações interessantes ligadas ao estudo dos círculos.

Na proposição 2 postulou-se que "caso sobre a circunferência de um círculo sejam tomados dois pontos encontrados ao acaso, a reta que liga os pontos cairá no interior do círculo" conforme Euclides (2009, p.153). Tal abordagem dá um entendimento intuitivo para o que hoje se conhece como Arcos e Cordas no círculo, tão importantes para a Trigonometria. A figura 2.2 ilustra este conceito.

Figura 2.2 – Proposição 2 do Livro III referente à ideia de corda numa circunferência.

Caso sobre a circunferência de um círculo sejam tomados dois pontos, encontrados ao acaso, a reta que liga os pontos cairá no interior do círculo.



Seja o círculo ABC, e fiquem tomados, sobre a circunferência dele, dois pontos A, B, encontrados ao acaso; digo que a reta que liga a partir do A até o B cairá no interior do círculo.

Fonte: Euclides (2009, p.153)

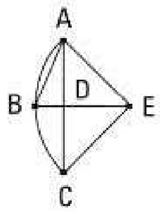
Já a atividade 25, proposta por Euclides (2009, p.172), é um importante meio de relacionar Arcos e Cordas da Circunferência com os Triângulos Retângulos ao solicitar que “tendo sido dado um segmento de um círculo, descrever completamente o círculo do qual é um segmento”. A figura 2.3 ilustra o conceito descrito.

Figura 2.3 – Proposição 25 do Livro III referente a arcos e cordas em uma circunferência.

Tendo sido dado um segmento de um círculo, descrever completamente o círculo do qual é um segmento.

Seja o segmento dado ABC de um círculo; é preciso, então, descrever completamente o círculo do segmento ABC do qual é um segmento.

Fique, pois, cortada a AC em duas no D, e fique traçada, a partir do ponto D, a DB em ângulos retos com a AC, e fique ligada a AB; portanto, o ângulo sob ABD ou é maior do que o sob BAD ou igual ou menor.

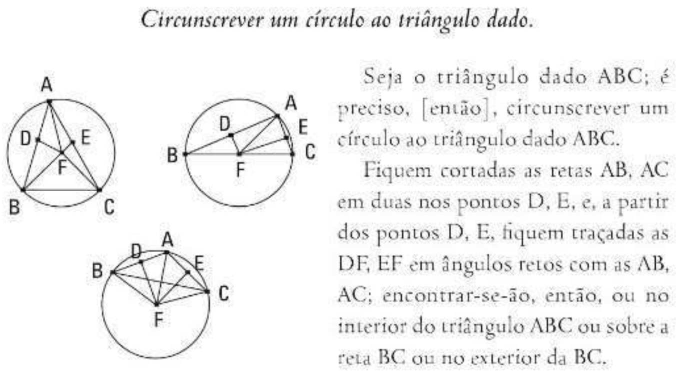


Fonte: Euclides (2009, p.172)

Valendo-se agora dos ensinamentos do Livro IV, são abordados conhecimentos ligados à inscrição e circunscrição de figuras planas.

A proposição 5 solicita circunscrever um círculo a um triângulo dado como demonstrado em Euclides (2009, p.191). Esta proposição de Euclides foi destacada neste trabalho pois serviu de base para uma atividade desafiadora utilizada com os discentes no decorrer da sequência a ser apresentada como recurso didático. A figura 2.4 ilustra o conceito de um círculo circunscrito a triângulo.

Figura 2.4 – Proposição 5 do Livro IV referente a círculo circunscrito a triângulo.



Circunscrever um círculo ao triângulo dado.

Seja o triângulo dado ABC; é preciso, [então], circunscrever um círculo ao triângulo dado ABC.

Fiquem cortadas as retas AB, AC em duas nos pontos D, E, e, a partir dos pontos D, E, fiquem traçadas as DF, EF em ângulos retos com as AB, AC; encontrar-se-ão, então, ou no interior do triângulo ABC ou sobre a reta BC ou no exterior da BC.

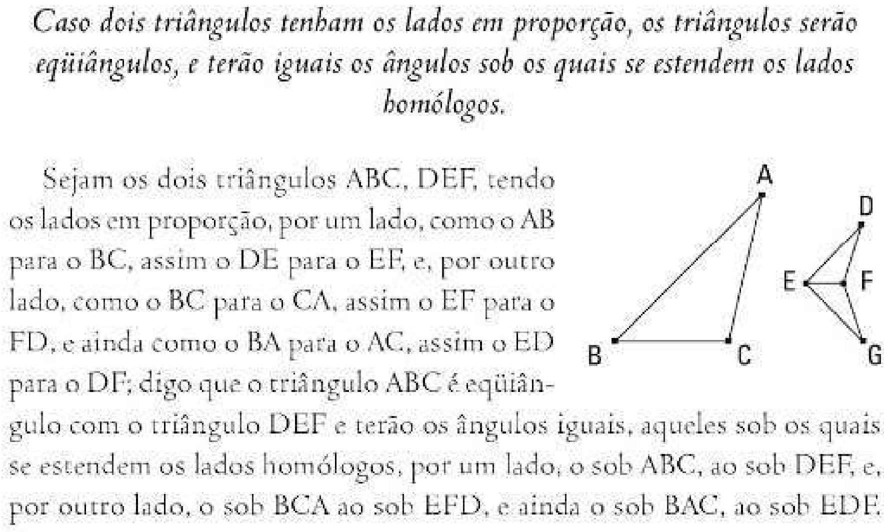
Fonte: Euclides (2009, p.191)

No livro VI Euclides aborda importantes conceitos ligados à semelhança de triângulos, e que hoje são exaustivamente utilizados na Trigonometria.

A definição 1 diz que “figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tanto os ângulos iguais, um a um, quanto os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção” Euclides (2009, p.231). Agora, no que tange especificamente à semelhança de triângulos, cabe destaque às proposições 5, 6 e 7 desta parte do livro.

A proposição 5, ao dizer que “caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos serão equiângulos, e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos” conforme Euclides (2009, p.236), aponta para a definição clássica do caso Lado-Lado-Lado (LLL) de semelhança de triângulos. O conceito é ilustrado na figura 2.5 abaixo.

Figura 2.5 – Proposição 5 do Livro VI referente a semelhança de triângulos (caso LLL).



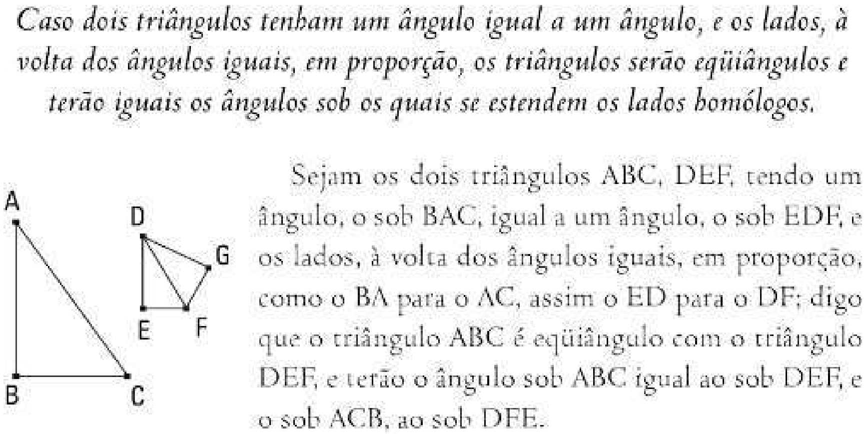
Caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos serão eqüiângulos, e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos.

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os lados em proporção, por um lado, como o AB para o BC, assim o DE para o EF, e, por outro lado, como o BC para o CA, assim o EF para o FD, e ainda como o BA para o AC, assim o ED para o DF; digo que o triângulo ABC é eqüiângulo com o triângulo DEF e terão os ângulos iguais, aqueles sob os quais se estendem os lados homólogos, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF, e, por outro lado, o sob BCA ao sob EFD, e ainda o sob BAC, ao sob EDF.

Fonte: Euclides (2009, p.236)

Na proposição 6 Euclides (2009, p.237) afirma que “caso tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos”. Esta é apresentada hoje como o caso Lado-Ângulo-Lado (LAL) de semelhança de triângulos conforme ilustra a figura 2.6.

Figura 2.6 – Proposição 6 do Livro VI referente a semelhança de triângulos (caso LAL).



Caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, os triângulos serão eqüiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos.

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo um ângulo, o sob BAC, igual a um ângulo, o sob EDF, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, como o BA para o AC, assim o ED para o DF; digo que o triângulo ABC é eqüiângulo com o triângulo DEF, e terão o ângulo sob ABC igual ao sob DEF, e o sob ACB, ao sob DFE.

Fonte: Euclides (2009, p.237)

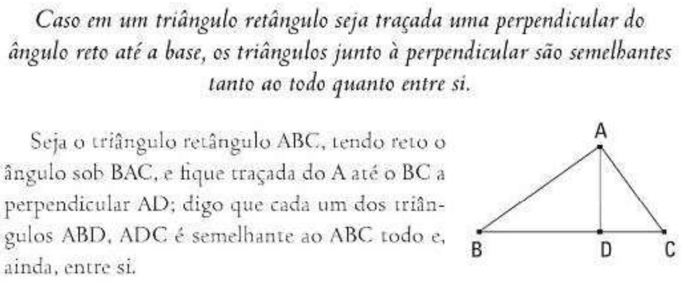
Já a proposição 7 coloca que

> (...) caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados, à volta dos outros ângulos em proporção, e cada um dos restantes, simultaneamente, ou menor ou não menor do que um reto, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos, à volta dos quais estão os lados em proporção. (EUCLIDES, 2009, p.237)

Não foi possível estabelecer uma relação direta do aqui exposto com o último dos casos de semelhança de triângulos: Ângulo-Ângulo (AA). Porém, o mesmo foi citado por fazer parte deste importante assunto que embasa a Trigonometria. Cabe destacar que o caso AA também não foi encontrado como uma proposição em Euclides (2009).

Por fim, a proposição 8, quando Euclides (2009, p.240) diz que “caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo como entre si” também deve ser objeto de citação. Aqui está explicitado um conhecimento importante, ilustrado pela figura 2.7, que embasa o que hoje é conhecido como as “Relações Métricas nos Triângulo Retângulo”.

Figura 2.7 – Proposição 8 do Livro VI referente a semelhanças no triângulo retângulo.


Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si.

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo reto o ângulo sob BAC, e fique traçada do A até o BC a perpendicular AD; digo que cada um dos triângulos ABD, ADC é semelhante ao ABC todo e, ainda, entre si.

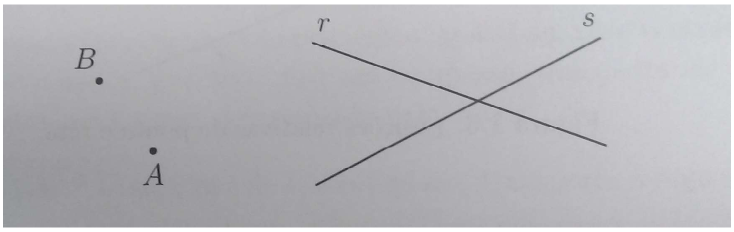
Fonte: Euclides (2009, p.240)

Do que foi visto até o presente momento, pode-se ratificar a ideia de que a obra de Euclides é vista como "(...) o primeiro livro em que considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico-dedutivo bem definido" como expõe Neto (2013, p.1). Seus ensinamentos fundamentam parte da Matemática, em especial a Trigonometria, como será visto ao longo deste trabalho.

No que segue, realiza-se a descrição do livro de (NETO, 2013). Trata-se do volume que aborda a Geometria Euclidiana desde os seus conceitos mais primitivos, o que facilita não só o que foi utilizado nas atividades propostas, como também o que se deseja investigar neste trabalho.

Partir-se-á de um dos conceitos mais primitivo de todos - o de reta. Euclides (2009), em sua obra, a chamou de "linha", definindo-a como "o comprimento sem largura". Apesar de bastante intuitivo, julga-se importante acrescentar algumas ideias mais abrangentes neste contexto. Segundo Neto (2013, p.3) "toda reta é um conjunto de (pelo menos dois) pontos" conforme ilustra a figura 2.8.

Figura 2.8 – Exemplo de reta.



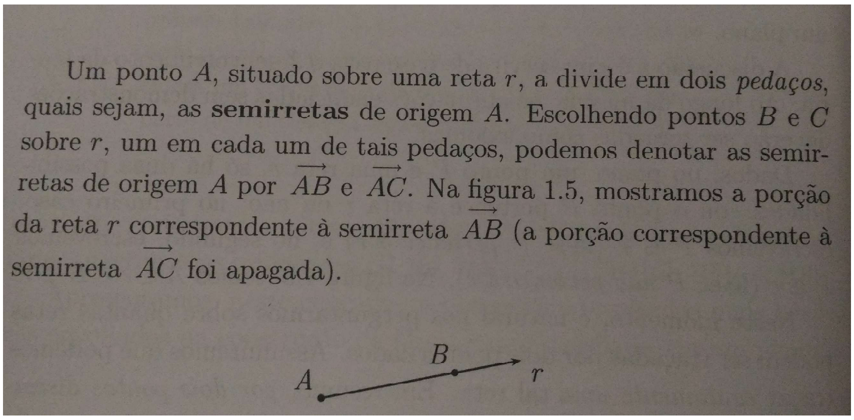
Fonte: Neto (2013, p.3)

Para a melhor fundamentação do mesmo conceito, há necessidade de se assumir implicitamente, conforme aquele autor orienta, que "(...) o plano contém todos os pontos e que há pelo menos três pontos não situados em uma mesma reta" Neto (2013, p.3).

Da definição anterior surgem duas outras importantes para a continuidade dos trabalhos: o de semirreta e segmento de reta. Neto (2013, p.4) diz que "um ponto A, situado sobre uma reta r, a divide em dois pedaços, quais sejam, as semirretas de origem A"

conforme exemplifica a figura 2.9.

Figura 2.9 – Exemplo de semirreta.



Um ponto A, situado sobre uma reta r, a divide em dois *pedaços*, quais sejam, as **semirretas** de origem A. Escolhendo pontos B e C sobre r, um em cada um de tais pedaços, podemos denotar as semirretas de origem A por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Na figura 1.5, mostramos a porção da reta r correspondente à semirreta $\overrightarrow{AB}$ (a porção correspondente à semirreta $\overrightarrow{AC}$ foi apagada).

Fonte: Neto (2013, p.4)

Observa-se que uma semirreta tem origem, mas não tem fim – diferentemente da reta que, por ter pelo menos 2 pontos, pode ter tantos deles quanto se queira, isto é, não dispondo nem de início e nem de fim. Já o segmento de reta é a porção de uma reta qualquer situada entre dois pontos distintos escolhidos sobre esta mesma reta.

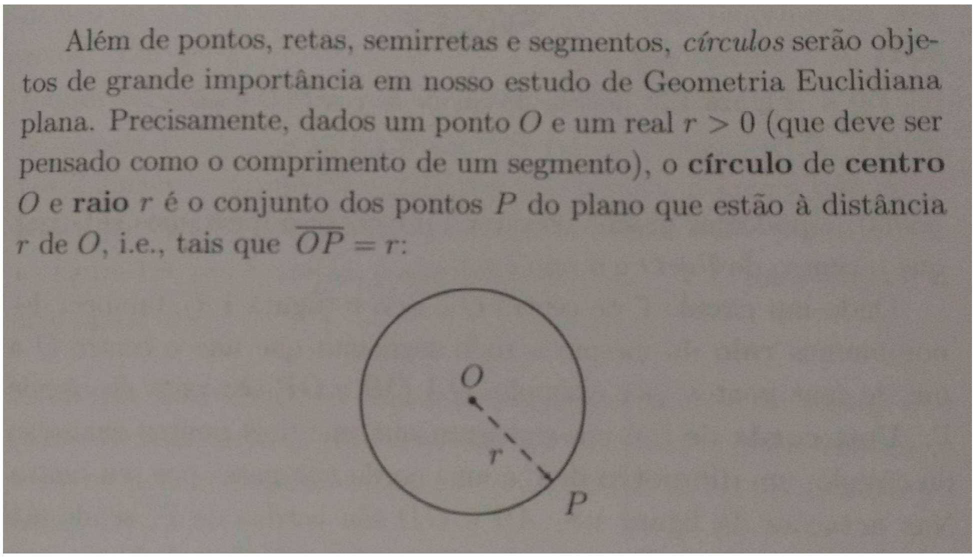
Logo se conclui que um segmento de reta, diferente dos anteriores, tem origem e tem fim. O fato de tanto a semirreta como o segmento de reta apresentarem pontos que fazem parte de suas definições será importante para entender conceitos exigidos em outros assuntos ao longo deste trabalho – em especial o de ângulo.

Importante também é fazer uma abordagem do conceito de círculo, o que parece que foi admitido temporariamente pelo autor como sinônimo para circunferência. Segundo Neto (2013, p.7), círculo é um conjunto de pontos P do plano situados a uma mesma distância r $(r > 0)$ de outro ponto O denominado de centro da figura. A distância r é chamada de raio, sendo esse "todo segmento que une o centro O do círculo a um de seus pontos" ilustrado pela figura 2.10.

Acredita-se necessário abordar os conceitos de corda e arco de um círculo. Corda "(...) é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo" de acordo com Neto (2013, p.8). Já arco é "(...) uma porção do círculo delimitada por dois de seus pontos" conforme Neto (2013, p.9). Tais ideias são importantes por também serem utilizadas como fundamento para a metodologia proposta.

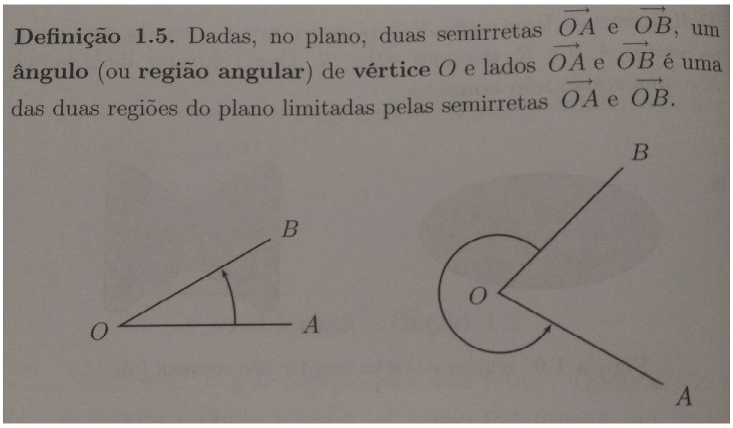
Também existe a necessidade de abordar o conceito de ângulo. Neto (2013, p.12) o define como sendo uma das regiões do plano limitadas por 2 (duas) semirretas de mesma origem. Da análise deste conceito, podemos dizer que um ângulo também poderá ser determinado por 2 (dois) segmentos de reta que tenham uma origem (ou um de seus pontos) em comum, como ilustra a figura 2.11.

Figura 2.10 – Definição de círculo.


Além de pontos, retas, semirretas e segmentos, *círculos* serão objetos de grande importância em nosso estudo de Geometria Euclidiana plana. Precisamente, dados um ponto O e um real $r > 0$ (que deve ser pensado como o comprimento de um segmento), o **círculo de centro** O e **raio** r é o conjunto dos pontos P do plano que estão à distância r de O, i.e., tais que $\overline{OP} = r$:

Fonte: Neto (2013, p.7)

Figura 2.11 – Definição de ângulo.


Definição 1.5. Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um **ângulo** (ou **região angular**) de **vértice** O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Fonte: Neto (2013, p.12)

A associação de um ângulo a uma unidade de medida é essencial para fundamentar a Trigonometria e as Funções Trigonométricas. A unidade mais comum de medida de ângulos é o grau. Grau é o resultado de tomar 1 (uma) unidade após dividirmos um círculo em 360 (trezentos e sessenta) partes iguais, sendo denotado por 1° (um grau).

Intuitivamente, podemos concluir que 1° (um grau) tomado tanto num círculo de raio r como num círculo de raio n (com $n > r$ e admitindo que os círculos tenham o mesmo centro), não faz diferença uma vez que apenas estenderíamos as semirretas que tem como origem o centro do círculo até que as mesmas "tocassem" os dois círculos em pontos distintos. Neto (2013, p.13), neste momento, admite axiomaticamente que as frações que representam cada arco que surge, em relação ao seu círculo original, são absolutamente as mesmas.

Seguindo as definições, para Neto (2013, p.158), é válido que

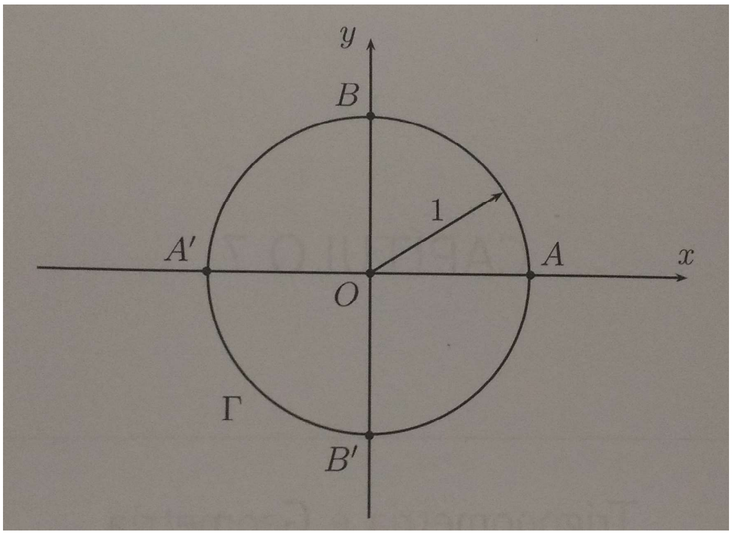
> Dizemos que dois triângulos serão semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos dos vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Tal relação é conhecida como a razão de semelhança entre os triângulos. Existem 3 (três) situações específicas, conhecidas como casos de semelhança de triângulos, que muito bem contextualizam o que a definição anterior representa. O caso LLL: se a razão entre os lados homólogos de dois triângulos for a mesma, então tais triângulos serão semelhantes. O caso LAL: se duas razões entre lados homólogos de dois triângulos forem iguais e o ângulo entre estes mesmos lados das figuras for o mesmo, então os dois triângulos serão semelhantes. O caso AA: se, conhecidos dois ângulos de um triângulo, observarmos, em outro triângulo, estes mesmos ângulos, então tais triângulos serão, por consequência, semelhantes. Dos casos de semelhança anteriormente citados surge outra importante proposição, que estabelece as Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Para isso, a proposição 8 do Livro VI de Euclides (2009) é uma importante aliada. Das proporções que são obtidas, a partir das semelhanças garantidas, surgem as definições das Razões Trigonométricas conhecidas na Trigonometria no Triângulo Retângulo – o seno, o cosseno e a tangente – que serão melhor detalhadas a partir do referencial teórico retirado de Wagner, Morgado e Carmo (2005).

Neto (2013, p.295) ainda define o ciclo trigonométrico como sendo o “círculo centrado na origem do Plano Cartesiano (0,0) ” – admitindo-se aqui que o mesmo já foi definido – com raio 1 e comprimento 2 π, conforme ilustra a figura 2.12.

Figura 2.12 – Representação do ciclo trigonométrico.



Fonte: Neto (2013, p.296)

Partindo dessa definição, chega-se ao conceito fundamental para este trabalho – o de radiano.

De Neto (2013, p.296) pode-se inferir que, se tomarmos um número real c e medirmos, sobre um círculo qualquer (em especial o ciclo trigonométrico) um arco de tamanho $|c|$ (módulo de c) a partir de um ponto em especial do círculo, dizemos que tal arco mede c radianos - se for utilizado o ciclo trigonométrico - e $\frac{c}{r}$ radianos para outra circunferência qualquer - sendo r igual ao raio de tal circunferência. A partir deste momento não existe somente a medida de um arco em graus, conforme apresentado até o momento. Resta entender o porquê da necessidade de se utilizar radiano como unidade de medida, o que é um dos objetivos propostos nesta dissertação.

Há ainda que se falar em sentidos trigonométricos. Está convencionado em Neto (2013, p.296) que, se marcarmos, sobre um círculo qualquer, um arco de c radianos, a partir do mesmo ponto especial, percorrendo o sentido anti-horário, este é conhecido como sentido positivo. Já o inverso, um percurso tomado a partir do mesmo ponto no sentido horário, por lógica, é conhecido como de sentido negativo.

Aborda-se agora a definição, segundo Neto (2013, p.299) de seno, cosseno e tangente de arcos trigonométricos, estes últimos dados em radianos.

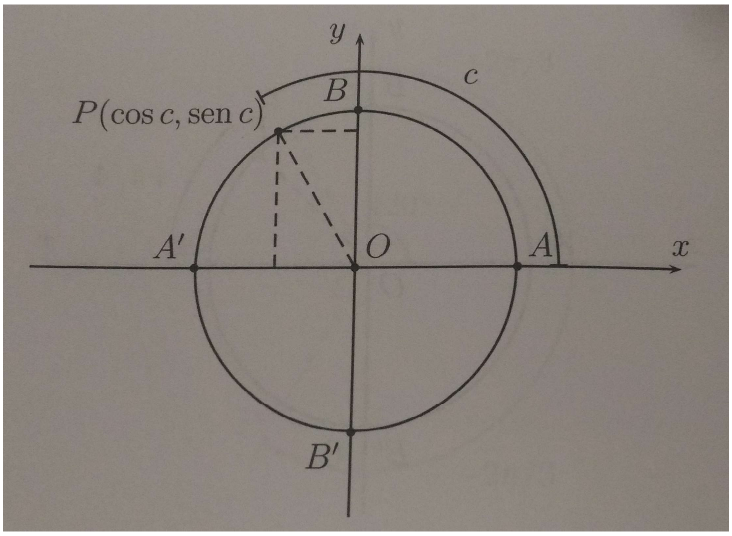
Se percorrermos, a partir do ponto A (1,0) do ciclo trigonométrico um arco de $|c|$ radianos ($c \in \mathbb{R}$) determinando um ponto P de parada com $AP = |c|$ (não esquecendo de levar consideração o conceito de sentido trigonométrico), a abcissa do ponto P será tomada como $\cos(c)$ e a ordenada de P será tomada como $sen(c)$. Além disso, define-se $\tan(c) = \frac{sen(c)}{\cos(c)}$.

Neste momento vale a pena ressaltar que tais elementos podem ser definidos diretamente como a abcissa e ordenada do ponto P por se tratar de ciclo trigonométrico (cujo raio vale 1) conforme ilustra a figura 2.13. Não obstante a isso, uso da unidade radiano, em sua concepção mais profunda, mostrará que, para a definição de seno, cosseno e tangente, pode-se tomar círculos de quaisquer raios.

Com uma linguagem mais formal e mais atual, os ensinamentos de Neto (2013) nos direcionam mais um pouco para os fundamentos que são necessários para apresentar as atividades que aqui serão propostas. Seguindo em frente, já em Wagner, Morgado e Carmo (2005), os autores procuram abordar este ramo da Geometria de uma forma específica e com detalhes importantes.

Wagner, Morgado e Carmo (2005, p.8) apresentam o conceito das funções trigonométricas básicas do ângulo agudo, isto é, fruto de manipulações das proporções que surgem da semelhança de triângulos – em especial os triângulos retângulos.

Figura 2.13 – Representação do seno e do cosseno no ciclo trigonométrico.



Fonte: Neto (2013, p.300)

Denominando os lados que definem o ângulo reto de um triângulo retângulo de catetos e o lado oposto ao mesmo ângulo de hipotenusa, tais relações (dos ângulos agudos do mesmo triângulo, os quais são aqui chamados de α e β), assim serão definidas:

$sen(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$

$sen(\beta) = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}}$

$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}}$

$\tan(\beta) = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta}$

Porém, tais relações estão definidas especificamente para ângulos agudos (menores que 90°) e isto traz um inconveniente, dado a grande utilidade desta ideia. O exemplo dado por Wagner, Morgado e Carmo (2005, p.9) de que uma simples tabela de senos nos dá condições de calcular, com relativa precisão, o raio do planeta Terra, contextualiza muito bem o que está sendo dito.

Na sequência, Wagner, Morgado e Carmo (2005, p.23) definem sumariamente o que pode ser entendido como o comprimento de uma curva. Para os autores o comprimento de um círculo, em particular “...é o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos convexos nele inscritos”. Em particular "o número π é o comprimento de um semicírculo de raio 1".

Em Wagner, Morgado e Carmo (2005, p.23) admite-se como válida a proposição que diz que dois círculos quaisquer serão sempre semelhantes, além de, intuitivamente, verificar que o comprimento de um círculo de raio 1 é igual a 2 π. Chega-se, então, a importante conclusão que o comprimento C de qualquer círculo de raio r pode ser dado pela fórmula $C = 2\pi r$.

Wagner, Morgado e Carmo (2005, p.24) ainda apresentam uma importante noção de radiano. Segundo os autores existe uma semelhança de arcos de círculos que subentendem o mesmo ângulo central e que, a razão de semelhança é a razão entre os raios. Existe, então, uma constante na razão entre o comprimento dos arcos e seus respectivos raios. É dessa constatação que advém o conceito de radiano:

> "A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo". (WAGNER; MORGADO; CARMO, 2005, p.24)

Todas as demais conclusões, principalmente a que relaciona o comprimento de um arco em radiano linear, ou sua natural correspondência para radiano angular, com um ângulo tomado em graus, já são conhecidas e amplamente divulgadas em livros didáticos. O que pesa neste contexto é a referência negativa presentes nos livros didáticos de Matemática. Na maioria, estes livros não explicam com propriedade, de onde vem a necessidade e o ganho que se obtém ao se trabalhar com radiano.

Existe, portanto, uma estreita ligação entre o que se toma em radiano (linearmente ou angularmente) e o correspondente ângulo em graus - independente do raio da circunferência em que é tomado. Tal situação é de fundamental importância para fazer do radiano uma unidade imprescindível enquanto se fala de funções trigonométricas.

Além disso, das definições de Funções Trigonométricas dadas por Wagner, Morgado e Carmo (2005, p.26), é possível chegar à importante conclusão: o radiano é uma unidade que permite estender o conceito de funções trigonométricas para o conjunto dos números reais (com algumas exceções), além de manter as relações trigonométricas básicas já conhecidas:

$sen^2\ (\alpha)\ +\ \cos^2(\alpha)\ =\ 1$ e $\tan(\alpha)\ =\ \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ em especial para α em radianos.

Do que foi visto até o presente momento, pode-se perceber que, gradativamente, as definições necessárias para a demonstração da importância do uso da unidade radiano vão aparecendo.

Em relação ao estudo das funções, Lima et al. (2006, p.43) afirmam que uma função $f : X \to Y$ é uma regra que diz como se deve associar cada elemento do conjunto X a um elemento do conjunto Y. O conjunto X é chamado de domínio da função enquanto o conjunto Y é chamado de contra-domínio da função evidenciando, assim, os 3 elementos básicos de uma função: um (conjunto) domínio, um (conjunto) contra-domínio e uma lei de correspondência – sem os quais não existe a mesma. Cabe ressaltar que, via de regra, por ser o mais abrangente, o conjunto que embasa o domínio e o contra-domínio das funções é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Uma constatação, apresentada pelos autores ao longo das explanações que constam do livro serve de parâmetro para uma possível justificativa para o que está sendo aqui pesquisado: o problema do uso de uma comunicação inexata e rápida na relação professor-aluno, durante o ato de ensinar. Tal fato acaba redundando numa matemática empobrecida que deixa de abordar importantes aspectos que a fundamentam, no caso em questão sobre a origem e importância da unidade radiano.

Continuando, os autores dizem que as Funções Trigonométricas têm papel importante na matemática por modelarem, com a precisão necessária, "fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória" (LIMA et al., 2006, p.241). Os mesmos estão presentes em nosso dia a dia, como nos estudos dos movimentos de planetas, do som, dos batimentos cardíacos e da corrente elétrica, merecendo total atenção por parte de estudiosos do assunto.

A Trigonometria no Triângulo Retângulo foi apresentada durante a descrição dos livros anteriores. Agora serão apresentados os fundamentos que possibilitam estendê-la aos demais quadrantes – baseando-se no conhecimento da Função de Euler.

Tomando o ciclo trigonométrico como ponto de partida, Lima et al. (2006, p.246) diz que trata-se a Função de Euler daquela que "...faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária..." de tal modo modo que $E(0) = (1, 0)$ e, se $t > 0$, percorremos o sentido anti-horário na circunferência um arco de tamanho t. Caso $t < 0$ o sentido a ser percorrido na circunferência é o inverso e o arco será tomado em $|t|$. Neste caso, o $\cos(t) = x$, $sen(t) = y$ e $\tan(t) = \frac{sen(t)}{\cos(t)}$. Tal definição reveste-se de grande importância uma vez que amplia as aplicações da trigonometria para os demais quadrantes do ciclo trigonométrico, além de possibilitar a utilização de arcos tomados em valores negativos.

Além disso, chega-se a um ponto crucial de estudo, uma vez que o número t, por pertencer ao conjunto dos números reais, pode ser utilizado como elemento de domínio de função, ampliando o espectro de atuação da trigonometria. De modo inverso, todo número real do intervalo $[-1, 1]$ é seno ou cosseno de algum arco, o que faz do conjunto dos números reais, também, o contradomínio de tais funções e suas variações. Tem-se então, definidos, neste momento, todos os ingredientes necessários para a existência das funções trigonométricas.

Os últimos pontos agora explicitados complementam todos os anteriores no sentido de embasar a proposta de trabalho que aqui será feita. Trata-se de um material que, pela grande utilidade que tem, não pode deixar de ser visto, estudado, sabido e acima de tudo, comentado com os discentes sob a responsabilidade dos professores de matemática, dando mais valor e profundidade ao estudo daquela disciplina.

2.5 UM OLHAR SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS

Visando o correto entendimento da proposta que se quer apresentar, acredita-se necessário fazer uma descrição de livros didáticos atualmente disponíveis no contexto da educação nacional. Em última análise é a forma como o conhecimento matemático chega até os discentes, em que pese sempre a experiência e a capacidade de inovação dos docentes que deles fazem uso.

Nesta dissertação optou-se por descrever como as Razões Trigonométricas são apresentadas aos discentes em três livros do 9º ano do EF e como o conceito de radiano é abordado em três livros didáticos do 2º ano do EM, aqui designados pelas letras A, B, C, D, E e F, conforme ilustra o Quadro 2.1. A escolha por estes seis livros se deu pelo fato dos mesmos serem utilizados pelos professores no colégio onde a pesquisa foi realizada, seja como livro oficial, seja como fonte de consulta.

Quadro 2.1 – Livros didáticos descritos em relação aos conteúdos abordados.

Livro	Título	Autor	Editora	Ano	Ano Escolar
A	Jornadas.mat	Sampaio, F.A.	Saraiva	2012	9º EF
B	Matemática compreensão e prática	Silveira, E e Marques, C.	Moderna	2013	
C	Descobrindo e aplicando matemática	Mazziero, A. dos S. e Machado, P. A. F.	Dimensão	2015	
D	Matemática Paiva	Paiva, M.	Moderna	2013	2º EM
E	Matemática, Contexto e Aplicação	Dante, L. R.	Ática	2013	
F	Matemática, Ciência e Aplicação	Iezzi, G et al	Saraiva	2013	

Cumpre destacar que as observações que aqui serão lançadas não necessariamente incidam sobre ou devam ser vistas como erros por parte dos autores. O que se percebe e se quer mostrar é uma forma diferente de abordar a Matemática, sem abusar de rigores e pedantismos desnecessários, porém com fundamento teórico que a possibilite, em melhores condições, fazer sentido para quem dela faz uso, principalmente os discentes.

Neste momento passa-se a registrar o que foi observado nos livros do 9º ano do

Ensino Fundamental.

O livro A aborda o conteúdo semelhança de triângulos em um capítulo exclusivo, com relativa amplitude. Porém, quando chega às Razões Trigonométricas, não há claramente uma ligação do conceito destas relações como sendo fruto de uma manipulação da semelhança de triângulos e das Relações Métricas nos Triângulos Retângulos. Esta interação de ideias poderia enriquecer o conteúdo.

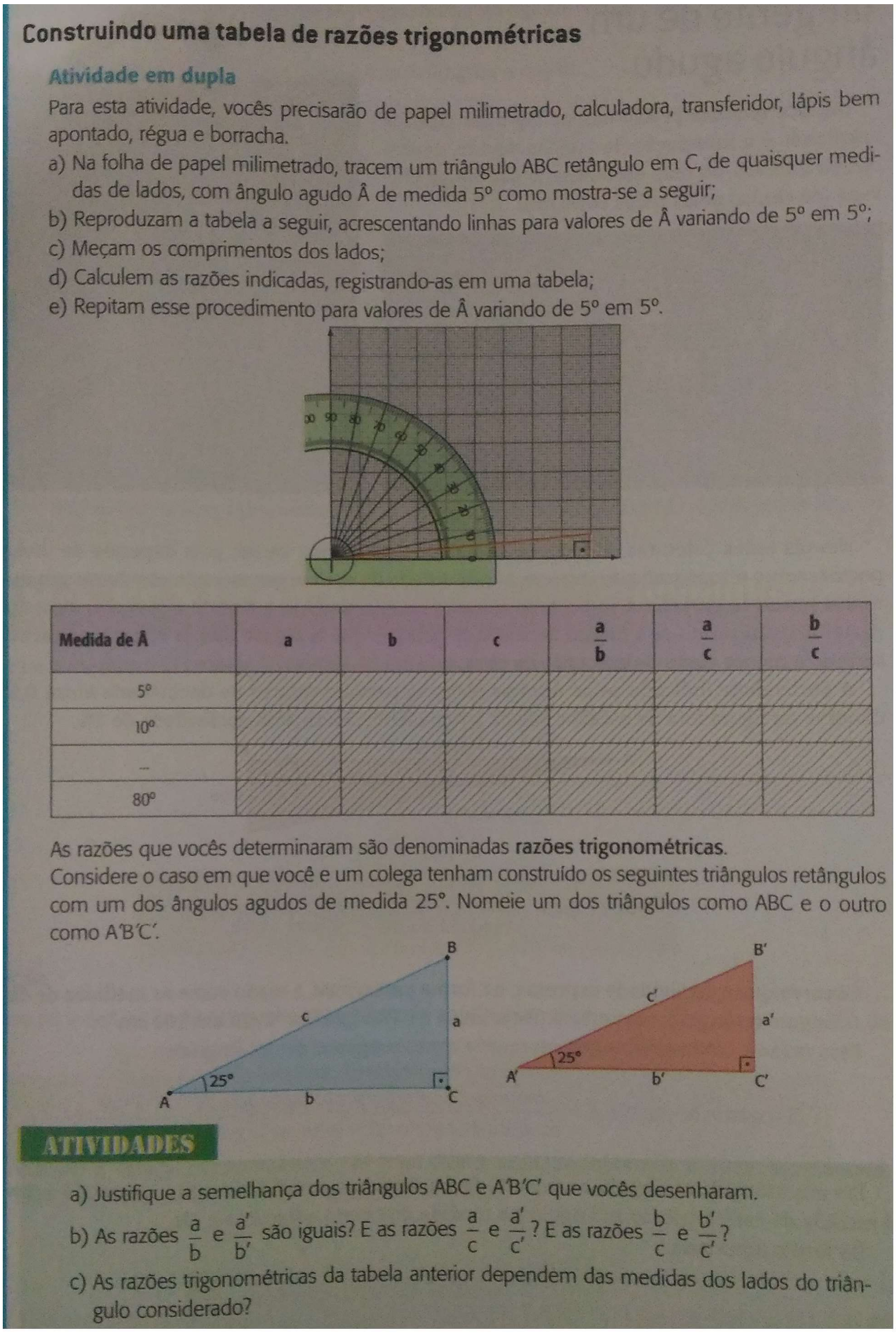
Vale a pena ressaltar que foi encontrada na pag. 133 do livro uma atividade, denominada “Experimente fazer”, por meio da qual, se houvesse uma continuidade de exploração dos resultados possíveis de serem obtidos pelos alunos, haveria um incremento no entendimento por parte dos mesmos, principalmente no que tange ao relacionamento que existe entre os conteúdos Semelhança de Triângulos e Razões Trigonométricas Fundamentais. A figura 2.14 ilustra esta atividade.

O livro segue apresentando os conceitos de tangente, cosseno e seno, nesta ordem, o que pode ocasionar num retorno ao conceito de tangente quando for necessário falar sobre definição deste valor em função do seno e cosseno de um mesmo ângulo. Um ponto positivo a se ressaltar no livro é a intensa contextualização dos assuntos, bem como a abordagem que tais razões trigonométricas se relacionam, inicialmente, com ângulos agudos, o que pode ser explorado, posteriormente, visando o entendimento da unidade radiano.

Da mesma forma que o livro A, o livro B trabalha o conteúdo de semelhança de figuras planas, em especial a dos triângulos, em um capítulo específico. Porém, quando aborda e conceitua as Razões Trigonométricas, em um capítulo diferente, o faz de uma maneira direta sem aproveitar as ideias ligadas à semelhança de triângulos e às Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Um ponto a se ressaltar no livro é a riqueza de figuras que podem ajudar no entendimento do conteúdo.

Finalizando o que foi visto nos livros voltados para o 9º ano do Ensino Fundamental, o livro C faz, apenas, uma recordação do conteúdo semelhança de figuras, em especial às das figuras triangulares. Realiza uma abordagem mais específica sobre a Semelhança e os Triângulos Retângulos e, de uma maneira mais clara, mostra a estreita relação que a Semelhança de Triângulos guarda com as Razões Trigonométricas mas faz um uso “amarrado” de valores numéricos nas definições, o que pode vir a dificultar o desenvolvimento da capacidade de generalização de conceitos por parte dos discentes. O livro utiliza uma didática de explicação voltada para o uso de perguntas e respostas, sem demonstrar a riqueza da origem do que se quer ensinar, além de não fazer uso regular de ilustrações.

Figura 2.14 – Atividade presente no livro A sobre razões trigonométricas.



Construindo uma tabela de razões trigonométricas

Atividade em dupla

Para esta atividade, vocês precisarão de papel milimetrado, calculadora, transferidor, lápis bem apontado, régua e borracha.

a) Na folha de papel milimetrado, tracem um triângulo ABC retângulo em C, de quaisquer medidas de lados, com ângulo agudo Â de medida 5° como mostra-se a seguir;

b) Reproduzam a tabela a seguir, acrescentando linhas para valores de Â variando de 5° em 5°;

c) Meçam os comprimentos dos lados;

d) Calculem as razões indicadas, registrando-as em uma tabela;

e) Repitam esse procedimento para valores de Â variando de 5° em 5°.

Medida de Â	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
5°						
10°						
...						
80°						

As razões que vocês determinaram são denominadas **razões trigonométricas**.

Considere o caso em que você e um colega tenham construído os seguintes triângulos retângulos com um dos ângulos agudos de medida 25°. Nomeie um dos triângulos como ABC e o outro como A'B'C'.

ATIVIDADES

a) Justifique a semelhança dos triângulos ABC e A'B'C' que vocês desenharam.

b) As razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ são iguais? E as razões $\frac{a}{c}$ e $\frac{a'}{c'}$? E as razões $\frac{b}{c}$ e $\frac{b'}{c'}$?

c) As razões trigonométricas da tabela anterior dependem das medidas dos lados do triângulo considerado?

Fonte: Sampaio (2012, p.133)

Na sequência apresentam-se as observações relativas a livros voltados para o 2º ano do Ensino Médio.

O livro D aborda o conceito de radiano com propriedade, porém não o faz mostrando o ganho que foi obtido com a sua inserção no universo matemático nem o porquê da necessária mudança do uso de grau para radiano. Acredita-se que a própria sequência didática dos capítulos propostos dificulte tal abordagem. Além disso, quando aborda os conceitos de seno, cosseno e tangente, usa o conceito de circunferência trigonométrica, não havendo uma extensão do conceito para circunferências de raios diferentes de 1 unidade, o que também significaria um ganho por dar representatividade a esta unidade de emprego de medida de arcos de circunferência.

Quando é abordado o assunto Funções Trigonométricas, permanece a ideia do emprego, somente, em circunferências trigonométricas de raio 1, o que pode “engessar” o raciocínio dos discentes para esta abordagem, principalmente numa possível associação a movimentos.

Já o livro E inicia dando exemplos diversificados para o conceito de radiano, mas novamente o faz de uma maneira direta, não fazendo menção a uma necessária padronização de medidas de arcos em circunferências quaisquer, ocasionando uma perda de oportunidade de discussão dos fundamentos deste conhecimento. Logo após, passa direto do conceito de circunferência trigonométrica para o conceito de seno, cosseno e tangente de números reais, fazendo uso dos eixos orientados, porém sem dizer que tais propriedades permanecem em circunferências cujos raios sejam diferentes de 1, desde que se faça uma coerente explanação sobre o conceito de radiano.

Finalizando, os autores do livro F realizam uma explanação sobre o conceito de radiano, dando uma referência linear e outra angular, além de falar de uma maneira genérica com relação ao raio da circunferência. Realizam uma comparação de medidas de arcos em circunferências de diferentes raios. Porém, mais uma vez, deixam em aberta a oportunidade de apresentarem o ganho que foi obtido a partir da utilização deste ente matemático, a fim de não deixar uma ideia de que o mesmo é um mero preciosismo. Além disso, é apresentado o conceito de circunferência trigonométrica, que é retomado quando se introduz a ideia de Funções Trigonométricas. Seu conceito, assim como visto em todos os livros anteriores, apesar de fundamentado, não precisa estar restrito a esta abordagem, deixando possivelmente o discente moldado a enxergar a existência de uma Função Trigonométrica somente numa Circunferência Trigonométrica, o que não é o caso, pois, seus valores, dependem tão somente dos arcos, que são tomados em radianos, sendo interessante que isto seja mostrado.

Da análise que foi feita é possível inferir que há certa tendência em diminuir a apresentação de conceitos que fundamentam os conhecimentos matemáticos nos livros didáticos, seja por premência de tempo, seja por desconhecimento ou como forma de evitar discussões mais aprofundadas sobre o assunto, mesmo que isto não redunde em erros. Porém, se perde uma oportunidade única de dar sentido ao que se estuda na disciplina a partir do conhecimento, mesmo que de forma simples, de suas origens, o que pode vir a aumentar o interesse pela disciplina.

Tal fato dependeria sobremaneira de uma postura ativa do docente ao valer-se de atividades complementares como forma de dinamizar a apresentação dos conteúdos. Este também é um dos objetivos da presente pesquisa.

3 METODOLOGIA

A presente pesquisa pode ser classificada em diferentes categorias de acordo com a abordagem a ser determinada.

Em relação à natureza é do tipo aplicada, pois de acordo com Gerhadt (2013, p.17) busca-se "gerar conhecimentos para a aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos".

Quanto a abordagem do problema caracteriza-se como quantitativa-qualitativa, no momento em que envolve a relação de significados e a quantificação. Gerhadt (2013) corrobora esta classificação citando que a pesquisa quantitativa-qualitativa é aquela que

> (...) envolve um grade número de relações, significados, processos, valores e atitudes, que requerem uma contextualização, e são complexos para serem definidos em variáveis numéricas, porém há momentos em que que poderá ser necessário recorrer a variáveis quantificáveis (quantitativo) para exprimir a ocorrência de um determinado fenômeno, ou para conferir aos fatos uma dimensão mais precisa (GERHADT, 2013, p.18).

Levando-se em consideração os objetivos, a pesquisa é do tipo descritiva, pois para Gil (2010) ocorre a descrição das características de uma determinada população por meio do uso de questionários e observações.

Quanto aos procedimentos técnicos é classificada como pesquisa-ação que, de acordo com (FONSECA, 2002)

> A pesquisa-ação pressupõe uma participação planejada do pesquisador na situação problemática a ser investigada. O processo de pesquisa recorre a uma metodologia sistemática, no sentido de transformar as realidades observadas, a partir da sua compreensão, conhecimento e compromisso para a ação dos elementos envolvidos na pesquisa. O objeto da pesquisa-ação é uma situação social situada em conjunto e não um conjunto de variáveis isoladas que se poderiam analisar independentemente do resto. Os dados recolhidos no decurso do trabalho não têm valor significativo em si, interessando enquanto elementos de um processo de mudança social. O investigador abandona o papel de observador em proveito de uma atitude participativa e de uma relação sujeito a sujeito com os outros parceiros. O pesquisador quando participa na ação traz consigo uma série de conhecimentos que serão o substrato para a realização da sua análise reflexiva sobre a realidade e os elementos que a integram. A reflexão sobre a prática implica em modificações no conhecimento do pesquisador (FONSECA, 2002, p.34-35).

Participaram da pesquisa 8 alunos matriculados no 2º ano do Ensino Médio no ano de 2017, em uma escola pública federal localizada na cidade de Santa Maria, RS. A escolha destes alunos deveu-se ao fato dos mesmos já terem estudado os conteúdos de Trigonometria e Funções Trigonométricas, abordados nesta pesquisa, no 9º ano do EF e no 1º ano do EM nos anos de 2015 e de 2016.

Para a seleção dos alunos, primeiramente realizou-se um sorteio no qual 20 nomes foram selecionados. A decisão por 20 alunos ocorreu por ser o número de computadores presentes na sala de informática do colégio.

Realizou-se, então, uma reunião com os 20 alunos e, destes, 8 aceitaram participar da pesquisa após concordarem com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido conforme Apêndice A. Importante salientar que os 8 alunos participantes conheciam o software Geogebra. Os alunos estão identificados pela letra A seguidos dos números de 1 a 8 (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 e A8).

O colégio sede da pesquisa possui um laboratório de informática, conforme ilustra a figura 3.1, composto por 20 computadores conectados à internet e com softwares de ensino instalados, dentre eles, o Geogebra.

Figura 3.1 – Sala de Informática na qual foram realizadas as aulas utilizando o Geogebra.

Fonte: Elaborado pelo autor

A ação com os alunos realizou-se em 5 fases divididas e trabalhadas entre os meses de maio e julho de 2017. No total foram realizados 8 encontros, uma vez por semana, de duas horas (120 min.) no turno da tarde. O cronograma das atividades é apresentado no Quadro 3.1.

Em um primeiro momento - denominado “Problematização inicial” - os alunos responderam ao pré-teste, conforme Apêndice B, que buscou investigar o conhecimento dos alunos em relação à Trigonometria e às Funções Trigonométricas.

Já na fase “Organização do Conhecimento” procurou-se esclarecer aos alunos como a pesquisa seria desenvolvida e quais os objetivos da atividade, além de uma revisão geral sobre o uso do software Geogebra – um elemento central na pesquisa. Por fim, os alunos, estimulados por meio de questionamentos, discutiram sobre o conhecimento que apresentavam em relação aos conteúdos de Trigonometria e Funções Trigonométricas (ênfase em radianos) relacionando com situações do cotidiano.

Quadro 3.1 – Cronograma das atividades realizadas com os alunos

<table>
<tr><th>Data</th><th>Momento</th><th>Atividade</th></tr>
<tr><td rowspan="2">15 de maio</td><td>Problematização Inicial</td><td>1. Aplicação do Pré-teste</td></tr>
<tr><td>Organização do conhecimento</td><td>1. Levantamento das Pré-concepções.
2. Apresentação do software GeoGebra.
3. Apresentação dos vídeos 2, 10 e 12 relacionados ao uso do software.</td></tr>
<tr><td>22 de maio
29 de maio
5 de junho
12 de junho
19 de junho</td><td>Aplicação do conhecimento</td><td>1. Explicação do conteúdo: aulas nas quais o aluno produzia conhecimento.
2. Avaliação das atividades ao final de cada aplicação.</td></tr>
<tr><td>26 de junho</td><td>Avaliação do conhecimento</td><td>1. Aplicação do Pós-teste</td></tr>
<tr><td>24 de julho</td><td>Apresentação dos resultados</td><td>1. Retorno dos resultados aos alunos.</td></tr>
</table>

Cabe ressaltar que os vídeos supracitados estão disponíveis na página eletrônica http://ogeogebra.com.br.

Após o contato inicial, os dados do pré-teste serviram como base para a elaboração e lapidação das atividades propostas para a fase denominada “Aplicação do Conhecimento”. Os temas abordados no pré-teste são apresentados no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 – Tema das questões formadoras do pré-teste utilizado com os alunos.

Questão	Tema
1	Conceito de ângulo
2	Semelhanças de triângulos
3 e 4	Relações métricas no triângulo retângulo
5	Aplicação das Razões Trigonométricas Fundamentais
6	Razões trigonométricas e arcos e cordas na circunferência
7	Razões Trigonométricas Fundamentais e Círculo Trigonométrico
8	Diferença entre π e radiano
9	Conceito, valor e aplicação de π
10	Conceito, valor e aplicação de radiano
11	Aplicação de Razão Trigonométrica
12	Elementos de função
13	Aplicação prática das Funções Trigonométricas

Chega-se, então, na 3ª fase, quando ocorreram as aulas utilizando como ferramenta principal o software Geogebra. Este programa foi escolhido por ser conhecido pelos alunos e apresentar o diferencial de favorecer o protagonismo, pois exige que os discentes manipulem as ferramentas e executem as tarefas propostas de forma autônoma.

As conduções das atividades estiveram diretamente ligadas à análise das respostas apresentadas pelos alunos no pré-teste. Foram identificadas as principais dificuldades apresentadas pelos mesmos em relação aos conteúdos contemplados nas questões, para o qual foi procurado reorientar a fundamentação matemática porventura deficiente no conhecimento externado.

As aulas foram divididas e preparadas de acordo com a semelhança dos temas, conforme Quadro 3.3, buscando desenvolver atividades que auxiliassem na aprendizagem dos conteúdos que apresentaram maior número de erros. Tais atividades encontram-se no Apêndice C.

Quadro 3.3 – Data e tema das atividades realizadas com os alunos na fase de Aplicação do Conhecimento".

Datas	Atividades	Tema	Questões
22 maio	1 e 2	Conceito de ângulo	1
29 maio	3, 4 e 5	Semelhança de triângulos e Razões Trigonométricas	2, 3, 4 e 5
05 junho	6, 7 e 8	Arcos e Cordas na circunferência; Circulo Trigonométrico e Conceito da constante π e da unidade radiano	6, 7 e 8
12 junho	9 e 10	Conceito e aplicabilidade da constante π e da unidade radiano	9 e 10
19 junho	11, 12 e 13	Funções Trigonométricas	11, 12, 13 e 14

Para a 4ª fase, denominada "Avaliação do Conhecimento", utilizou-se um pós-teste, disponível no Apêndice D, composto por diferentes questões baseadas nas principais dificuldades apresentadas no pré-teste. O objetivo foi verificar se o software Geogebra e as explicações teóricas foram eficazes em promover o aperfeiçoamento do conhecimento dos alunos baseado nos temas trabalhados durante as aulas.

Para a análise dos resultados do pré-teste e do pós-teste delimitou-se categorias: certa, errada, próxima, não respondeu. As respostas foram quantitativamente e qualitativamente categorizadas.

Após cada aula os alunos respondiam perguntas que buscaram identificar se a metodologia utilizada auxiliou no entendimento dos conceitos trabalhados. O tema das questões é apresentado no Quadro 3.4.

Quadro 3.4 – Temas das questões respondidas pelos alunos para avaliação de cada atividade.

Questão	Tema
1	O uso do software como auxiliar no processo de aprendizagem
2	Comparação entre o uso do software Geogebra e o livro didático

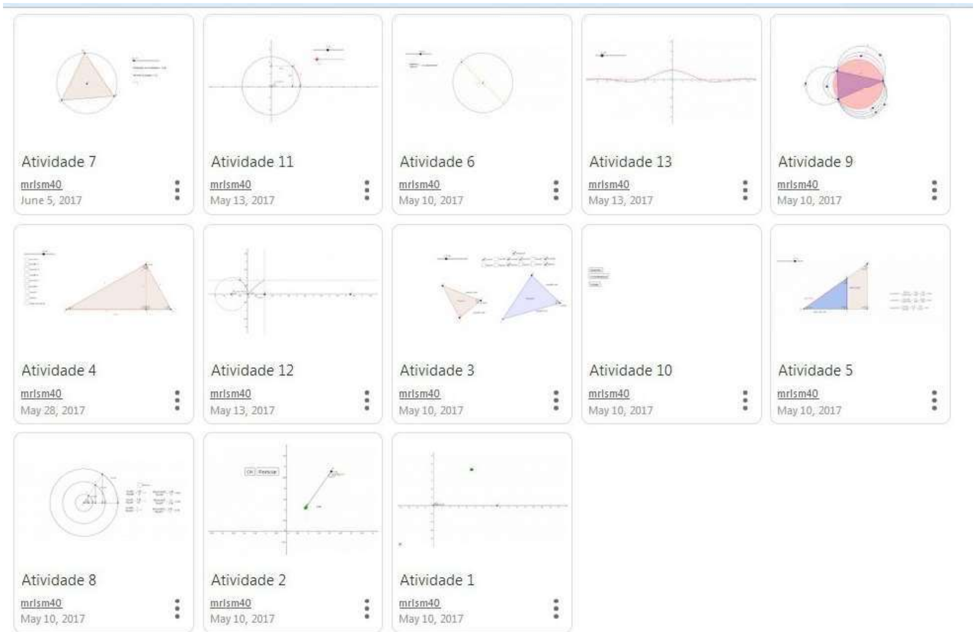
Por fim, ao final do trabalho, a fase da “Apresentação dos resultados” foi um momento de dar um “feedback” aos discentes sobre o que foi possível concluir do trabalho realizado. Tratou-se de um momento também importante por oportunizar aos discentes a chance de enxergar suas contribuições ao processo didático não só idealizado como também analisado ao final de sua aplicação.

4 PROPOSTA DE ABORDAGEM E RELATO DE APLICAÇÃO

O entendimento dos diferentes conteúdos ligados à Matemática requer uma ação conjunta de vários elementos, dentre eles, os professores, os alunos e atividades adequadas. Especial atenção deve ser dada a este fato durante o ensino da Trigonometria e das Funções Trigonométricas por envolver diversos conceitos, ideias e relações que estão presentes simultaneamente em campos tão distintos como a Álgebra e a Geometria.

Com o objetivo de desenvolver as atividades que auxiliassem no ensino dos conteúdos de Trigonometria e das Funções Trigonométricas, com ênfase na definição e utilização da unidade radiano, utilizou-se um pré-teste com o objetivo de identificar a concepções prévias dos alunos. Desta forma, a análise das respostas serviu como guia para o desenvolvimento das atividades conforme ilustra a Figura 4.1.

Figura 4.1 – Visão geral das 13 atividades utilizadas com os alunos.



Fonte: Elaborado pelo autor

Cumpre destacar que este conjunto de atividades pode ser consultado na página eletrônica www.geogebra.org/search/perform/search/mrlsm40.

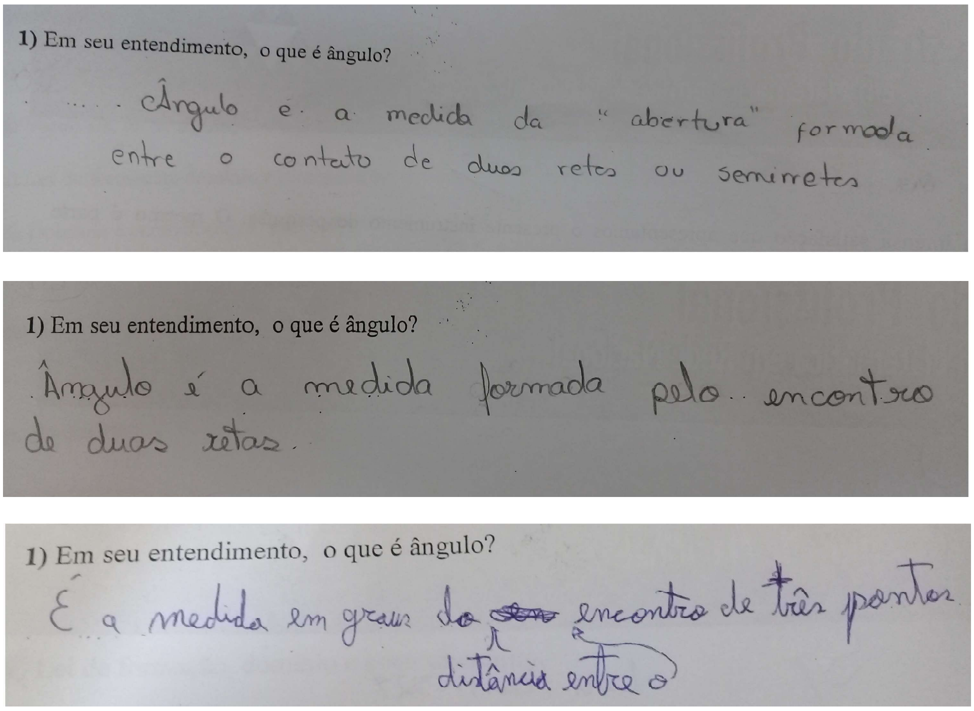
4.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS DO PRÉ-TESTE

Na questão 1 trabalhou-se basicamente com o conceito de ângulo. Observa-se que os alunos não compreendem perfeitamente o conceito de ângulo ou apresentam somente uma ideia aproximada do mesmo, sugerindo a presença de erros. Dos 8 alunos, nenhum acertou o conceito - 4 erraram e 4 apresentaram um conhecimento aproximado.

O conceito formal de ângulo foi considerado para análise como sendo “uma das regiões do plano limitadas por 2 (duas) semirretas de mesma origem” Neto (2013, p.12).

Observou-se, também, a deficiência em diferenciar conceitos distintos como o de reta, o de semirreta e o de segmento de reta. A figura 4.2 ilustra as respostas dadas pelos alunos A8, A7 e A3, respectivamente.

Figura 4.2 – Exemplos de 3 (três) respostas de alunos para a questão 1, presente no pré-teste, referente ao conceito de ângulo.



Fonte: Extrato das respostas dos alunos participantes da pesquisa.

A questão 2, dividida em itens, contemplou o conteúdo de semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Os resultados são heterogêneos de acordo com o conhecimento explorado, conforme ilustra a tabela 4.1.

Na questão 2a sobre semelhança de triângulos (caso de semelhança AA) verifica-se um maior número de acertos. Porém, quando a semelhança é determinada pelo caso LLL têm-se maior número de erros. Da mesma forma, diferentes alunos relacionaram semelhança com forma, uma ideia errônea que pode levar ao entendimento incorreto da definição de semelhança entre figuras planas, em especial a dos triângulos.

Em sua maioria, os alunos levam em consideração apenas um dos fatores que caracterizam a semelhança de triângulos: a igualdade dos ângulos ou a proporcionalidade dos lados.

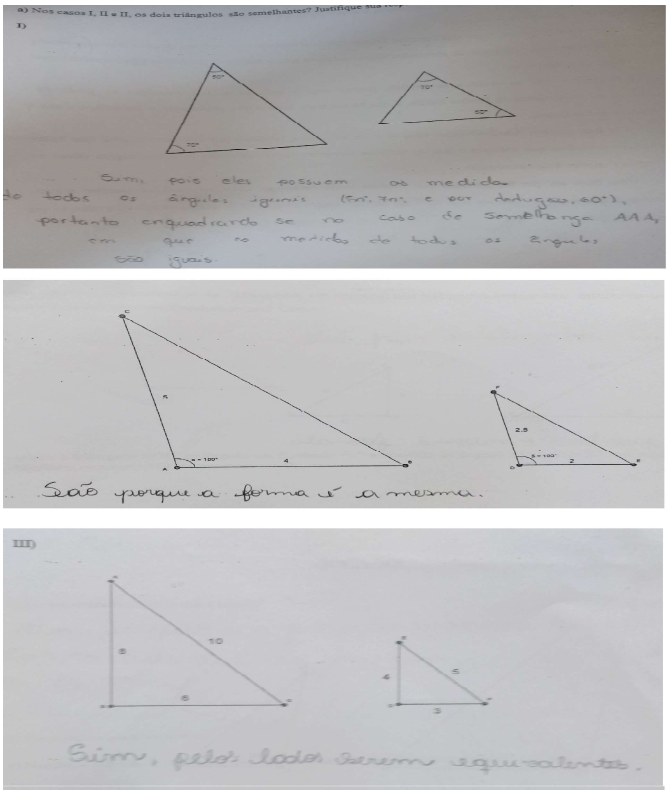
Tabela 4.1 – Resultados do pré-teste para as questões 2, 3, 4 e 5.

Questão	Tema		Certo	Errado	Aproximado	Não respondeu
2	Semelhança de Triângulo	Caso AA	05	02	00	01
		Caso LAL	01	01	04	02
		Caso LLL	02	05	01	00
3	Relações Trigonométricas Fundamentais (RTF)		01	03	01	03
4	Semelhança de Triângulos Retângulos		04	00	04	00
	Conceito RTF		01	02	00	05
5	Aplicabilidade RTF		03	01	00	04

Fonte: Dados da pesquisa

Porém, o conceito que norteia o conhecimento matemático formalmente aceito pela comunidade acadêmica, diz que “figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tanto os ângulos iguais, um a um, quanto os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção” Euclides (2009, p.231). A figura 4.3 ilustra as respostas para a questão 2a dos alunos A8 (caso AA), A4 (caso LAL) e A1 (caso LLL).

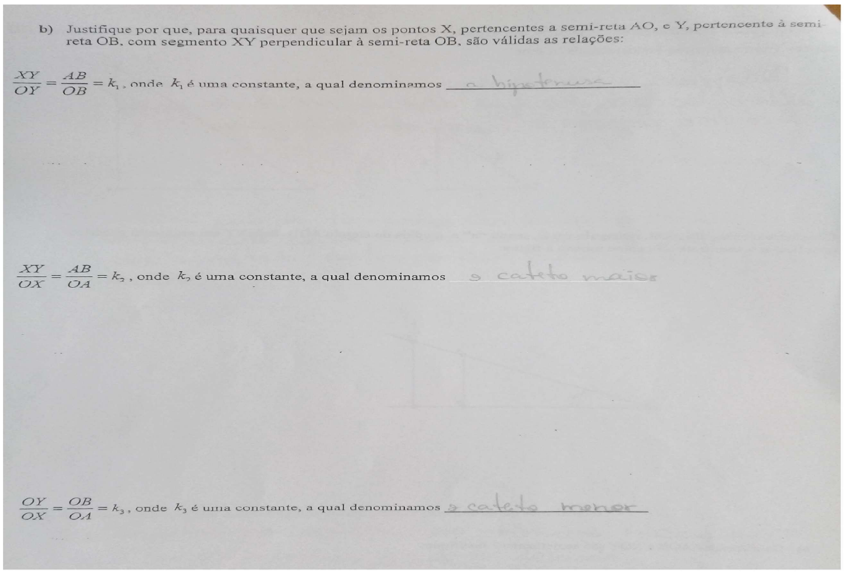
Figura 4.3 – Exemplos de respostas de alunos para a questão 2a, presente no pré-teste, referente à semelhança de triângulos.



Fonte: Extrato das respostas dos alunos participantes da pesquisa.

Em relação ao estudo de Razões Trigonométricas verificou-se uma grande ausência de respostas para os questionamentos. Tal fato permite inferir a existência de uma possível falha no processo da aprendizagem a que os discentes estiveram submetidos. A figura 4.4 ilustra resposta dos alunos A6 e A1 em relação às Razões Trigonométricas.

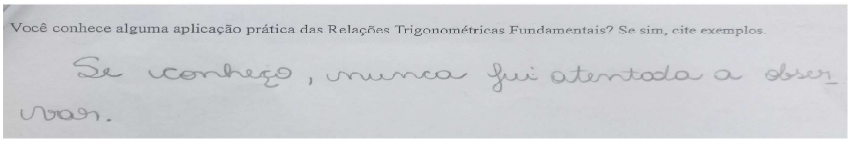
Figura 4.4 – Exemplos de respostas de alunos para as questões 4b e 5, presente no pré-teste, referente a razões trigonométricas.


b) Justifique por que, para quaisquer que sejam os pontos X, pertencentes a semi-reta AO, e Y, pertencente à semi-reta OB, com segmento XY perpendicular à semi-reta OB, são válidas as relações:

$\frac{XY}{OY} = \frac{AB}{OB} = k_1$, onde k_1 é uma constante, a qual denominamos a hipotenusa

$\frac{XY}{OX} = \frac{AB}{OA} = k_2$, onde k_2 é uma constante, a qual denominamos o cateto maior

$\frac{OY}{OX} = \frac{OB}{OA} = k_3$, onde k_3 é uma constante, a qual denominamos o cateto menor


Você conhece alguma aplicação prática das Relações Trigonométricas Fundamentais? Se sim, cite exemplos.

Se conheço, nunca fui atentada a obser-
var.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos participantes da pesquisa.

As questões 6, 7 e 8 trabalharam os conceitos de arcos e cordas, círculo trigonométrico e a diferença do conceito de π e π radianos. Os resultados estão apresentados na tabela 4.2.

Em relação aos resultados, oriundos do pré-teste, verificou-se um grande número de erros e ausência de respostas relacionadas aos temas trabalhados. Os alunos, na maioria, não compreendem estes conceitos, pois seis alunos não responderam a questão relativa a Arcos e Cordas na Circunferência e sete alunos deixaram de responder sobre Círculo Trigonométrico.

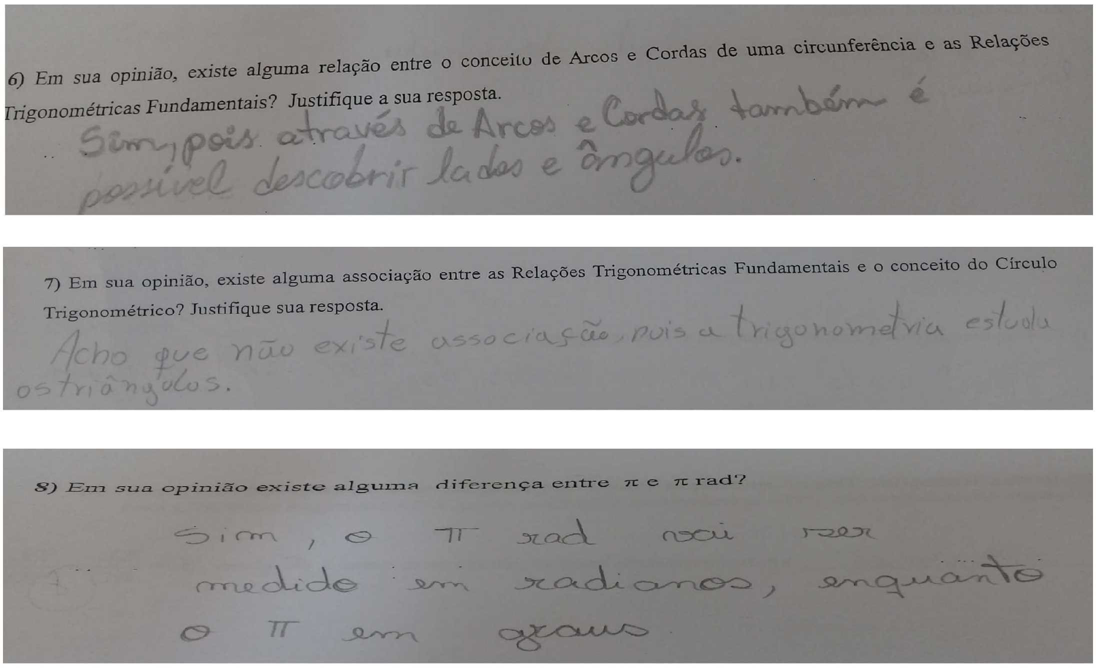
Além disso, quatro alunos erraram a questão relativa a diferença entre π e π rad. Em relação este assunto, percebe-se que os alunos não compreendem estes conceitos e a importância dos mesmos para a resolução de cálculos matemáticos utilizados em diferentes áreas, mesmo tendo como base que o primeiro é um número e o segundo é uma unidade de medida que se vale essencialmente daquele. A figura 4.5 ilustra três respostas apresentadas pelos alunos A6, A5 e A7.

Tabela 4.2 – Resultados do pré-teste para as questões 6,7 e 8.

Questão	Tema	Certo	Errado	Aproximado	Não respondeu
6	Arcos e Cordas na Circunferência	02	00	00	06
7	RTF e o Círculo Trigonométrico	01	00	00	07
8	Diferença entre π e π radianos	01	03	00	04

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 4.5 – Exemplos de respostas de alunos para as questões 6, 7 e 8, presente no pré-teste, referente a arcos e cordas, círculo trigonométrico e diferença entre π e π radianos.



6) Em sua opinião, existe alguma relação entre o conceito de Arcos e Cordas de uma circunferência e as Relações Trigonométricas Fundamentais? Justifique a sua resposta.

Sim, pois através de Arcos e Cordas também é possível descobrir lados e ângulos.

7) Em sua opinião, existe alguma associação entre as Relações Trigonométricas Fundamentais e o conceito do Círculo Trigonométrico? Justifique sua resposta.

Acho que não existe associação, pois a trigonometria estuda os triângulos.

8) Em sua opinião existe alguma diferença entre π e π rad?

Sim, o π rad vai ser medido em radianos, enquanto o π em graus

Fonte: Extrato das respostas dos alunos participantes da pesquisa.

As questões 9 e 10 constantes do pré-teste tiveram relação direta com a aplicabilidade da unidade radiano. Os resultados são apresentados na tabela 4.3.

Os resultados do pré-teste mostraram que os alunos, na maioria, sabem o valor da constante π, mas não apresentam o conhecimento correto em relação ao seu significado.

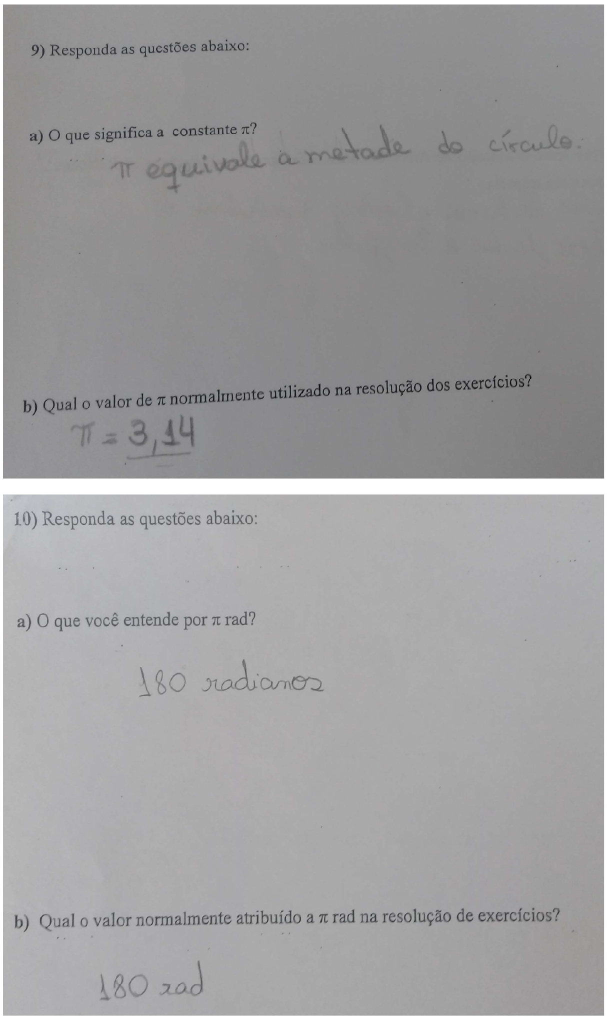
Em relação à unidade radiano, 5 alunos não responderam à questão sobre o que entendia por π rad, 4 alunos não souberam responder o valor correspondente a π rad e 6 não apontaram uma aplicabilidade para a mesma unidade. Da mesma forma é possível inferir que os alunos não relacionam a unidade radiano com o valor do raio da circunferência. A figura 4.6 exemplifica as respostas dos alunos A6 e A7.

Tabela 4.3 – Resultados do pré-teste para as questões 9 e 10.

Questão	Tema		Certo	Errado	Aproximado	Não respondeu
9	Constante π	Conceito	00	03	05	00
		Valor	07	01	00	00
		Aplicabilidade	02	03	01	02
10	Unidade Radiano	Conceito	01	00	02	05
		Valor	02	00	02	04
		Aplicabilidade	01	00	01	06

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 4.6 – Exemplos de respostas de alunos para as questões 9 e 10, presente no pré-teste, referente a aplicabilidade da unidade radiano.


9) Responda as questões abaixo:

a) O que significa a constante π?

π equivale à metade do círculo.

b) Qual o valor de π normalmente utilizado na resolução dos exercícios?

$\pi = 3,14$

10) Responda as questões abaixo:

a) O que você entende por π rad?

180 radianos

b) Qual o valor normalmente atribuído a π rad na resolução de exercícios?

180 rad

Fonte: Extrato das respostas dos alunos participantes da pesquisa.

As questões 11, 12, 13 e 14 do pré-teste exploraram conceitos ligados às funções. Os resultados são apresentados na tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Resultados do pré-teste para as questões 11, 12, 13 e 14.

Questão	Tema	Certo	Errado	Aproximado	Não respondeu
11	Valores de uma RTF	00	01	00	07
12	Elementos de uma função	02	05	00	01
13	Aplicação das Funções Trigonométricas	00	01	00	07
14	Valores de uma função	00	06	00	02

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos, na maioria, não responderam as questões ou disponibilizaram respostas incorretas. Importante salientar que não há um correto entendimento, por parte dos alunos, a respeito dos elementos que constituem a definição de função, quais sejam: domínio, contra-domínio/imagem e lei de formação.

4.2 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Com o objetivo de trabalhar as dificuldades apresentadas desenvolveu-se 13 atividades valendo-se do software Geogebra. As atividades estão relacionadas com as questões formadoras do pré-teste, conforme ilustrado no quadro 3.3, com ênfase nas principais dificuldades apresentadas pelos alunos. As atividades foram caracterizadas como de construção, para aquelas nas quais os discentes teriam que resolver uma situação-problema a partir das informações disponíveis, ou de manipulação, para aquelas nas quais iriam receber uma atividade já construída e, a partir da mesma, iriam manipular seus elementos de forma a chegar a conclusões a respeito do assunto principal em pauta.

Vale ressaltar que, para a eficiente aplicação das atividades, aconselha-se o uso da versão 5.0.146.0-3D do software.

Atividade 1

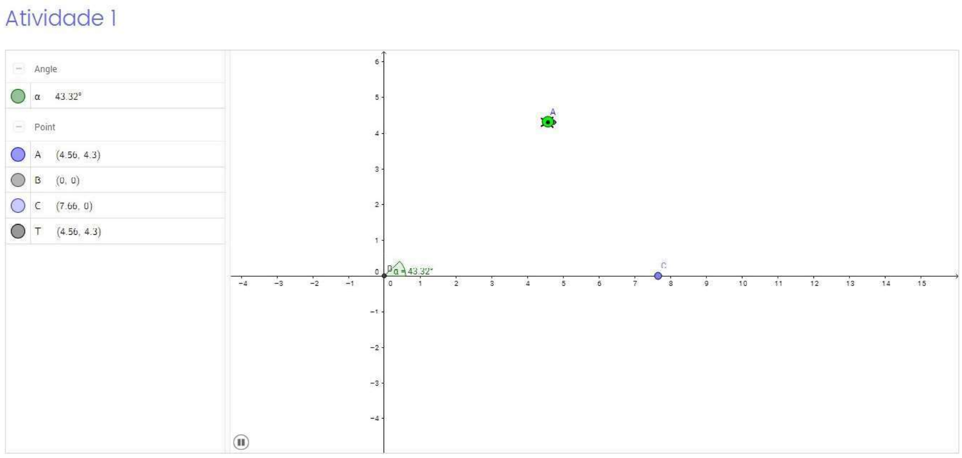
Objetivo: Fazer com que o aluno visualize o deslocamento que a ferramenta "tartaruga"faz da origem do Plano Cartesiano até um ponto qualquer construído, utilizando a ideia de ângulo e distância (atividade de construção).

A partir das respostas elaboradas pelos discentes será problematizada uma situação na qual será levantada a hipótese do deslocamento da tartaruga ser feito sobre a circunferência cujo centro é a origem do Plano Cartesiano, que tem como raio a mesma distância supracitada e que deve parar sobre o mesmo ponto construído inicialmente.

Os procedimentos para realizar a atividade são os que seguem:

- Construir 1 (um) ponto qualquer (diferente da origem do plano cartesiano) na janela de visualização do software “Geogebra”, conforme ilustra a figura 4.7.

Figura 4.7 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

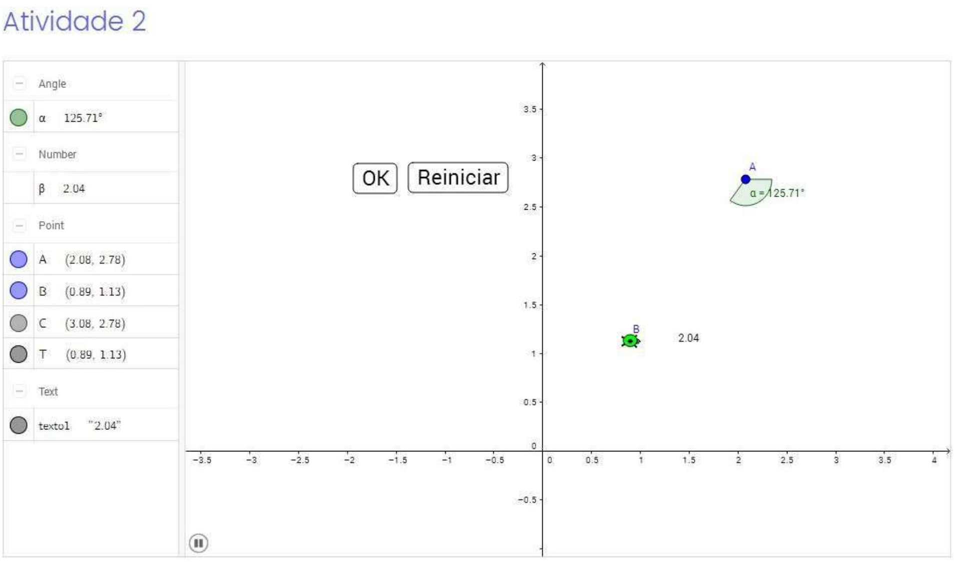
- Fazer com que a ferramenta “Tartaruga” se desloque da origem do Plano Cartesiano da citada janela até o ponto escolhido valendo-se de um segmento único.

Atividade 2

Objetivo: fazer com que o aluno descubra, por meio do software, como unir dois pontos quaisquer do Plano Cartesiano, além de medir o segmento de reta a ser traçado. Tal atividade se mostra importante por viabilizar o emprego da ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro"que será imprescindível para o prosseguimento das atividades (atividade de construção). Os procedimentos para a realização desta atividade são os que seguem:

- Construir 2 (dois) pontos quaisquer na janela de visualização do software “Geogebra”, como ilustra a figura 4.8.

Figura 4.8 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Realizar o deslocamento da “Tartaruga” entre os dois pontos escolhidos determinando o único segmento que une tais pontos.

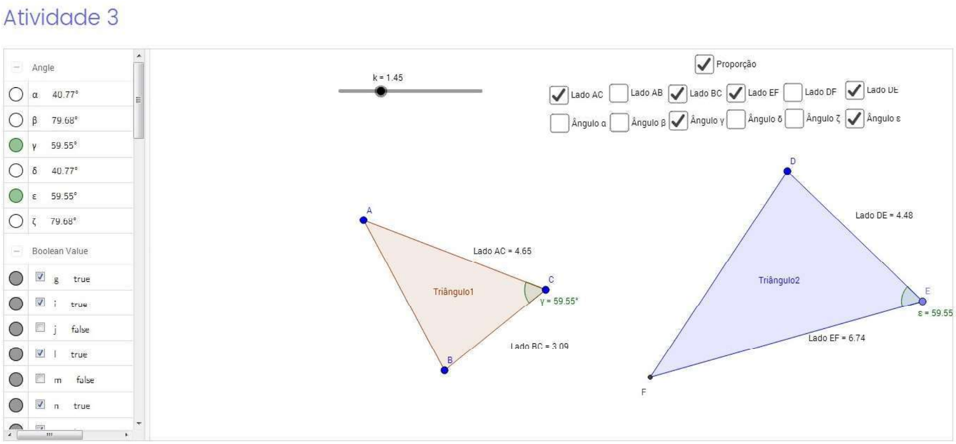
- Medir o segmento obtido com o deslocamento feito pela “tartaruga” valendo-se das ferramentas do próprio software.

Atividade 3

Objetivo: trazer o início dos conceitos que embasam as Relações Trigonométricas Fundamentais, diretamente ligadas à semelhança de triângulos. Os procedimentos para a realização das atividades são os que seguem (atividade de manipulação):

- Abrir o arquivo denominado Atividade 3, conforme ilustra a figura 4.9.

Figura 4.9 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.Disponível em www.geogebra.org/m/G5DN4D6Z.

- Movimentar o controle deslizante e marcar a caixa dos ângulos e dos lados dos triângulos conforme orientado.

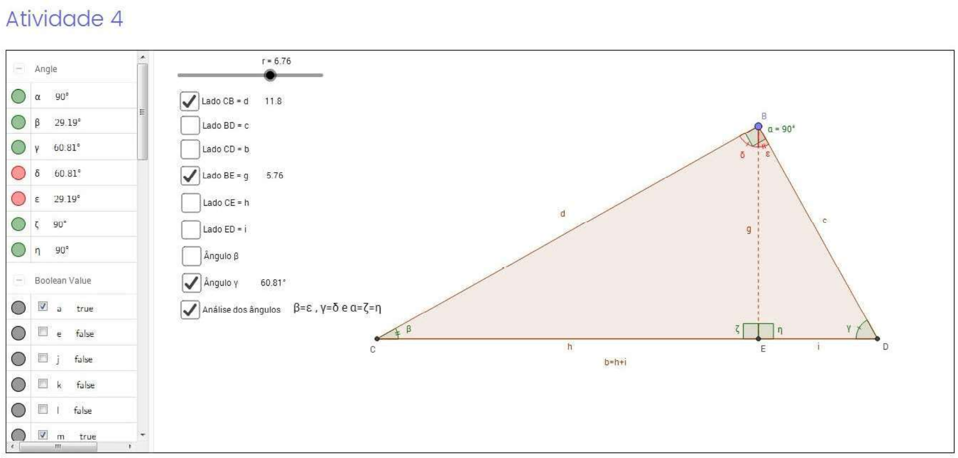
- Determinar, por meio de observações apropriadas, as relações que se estabelecem entre os lados dos triângulos obtidos tendo como base a semelhança de tais figuras.

Atividade 4

Objetivo: estudar as Relações Métricas no Triângulo Retângulo (Atividade de manipulação). Os procedimentos para a execução das atividades são apresentados a seguir:

- Abrir o arquivo denominado Atividade 4, ilustrado pela figura 4.10.

Figura 4.10 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.Disponível em www.geogebra.org/m/vqG6uQ4E

- Estabeleçer as Relações Métricas no Triângulo Retângulo por meio da análise da semelhança dos triângulos construídos.

- Analisar e concluir sobre a validade das mesmas em função das medidas dos lados dos triângulos constantes na atividade. Além disso, verificar se o valor atribuído ao controle deslizante interfere nas relações obtidas.

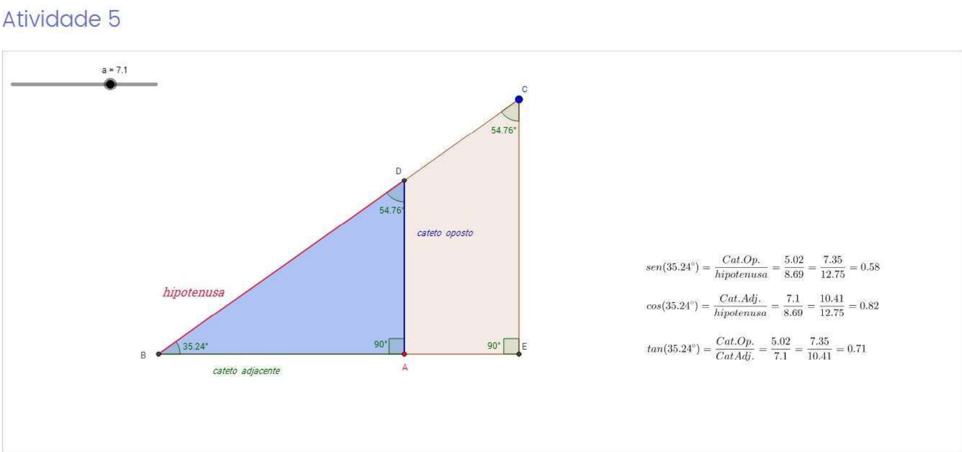
Atividade 5 – (Adaptada de Oliveira, 2014)

Objetivo: Manipular os elementos que formam um triângulo retângulo a fim de deixar claro para o aluno que as Relações Trigonométricas encontradas dependem tão somente dos ângulos estabelecidos e não das dimensões dos lados que as determinam (atividade de manipulação).

Os procedimentos para a execução das atividades são apresentados a seguir:

- Abrir o arquivo denominado Atividade 5, ilustrado pela figura 4.11.

Figura 4.11 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 5.



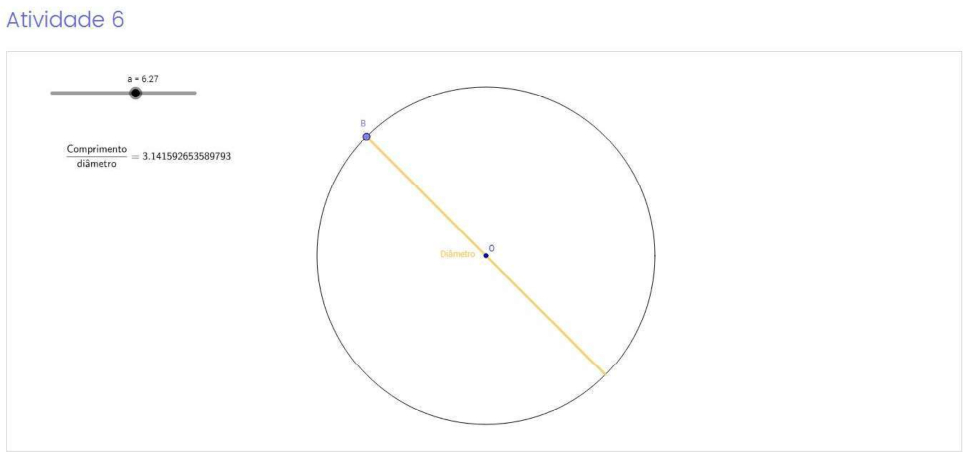
Fonte: Elaborado pelo autor.Disponível em www.geogebra.org/m/Sf5jntDw

- Manipular os elementos que compõe a atividade (controle deslizante a e vértice C do triângulo) verificando os valores correspondentes que são obtidos para as Razões Trigonométricas Fundamentais.

Atividade 6

Objetivo: trabalhar o fato da constante π ser um número irracional (atividade de construção) e verificar que isto traz um inconveniente para os cálculos realizados pelo computador levando a necessárias aproximações, como ilustra a figura 4.12.

Figura 4.12 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 6.



Fonte: Elaborado pelo autor

- Fazendo uso livremente das ferramentas do software, construir uma atividade que possibilite determinar (ou estimar) o valor de π.

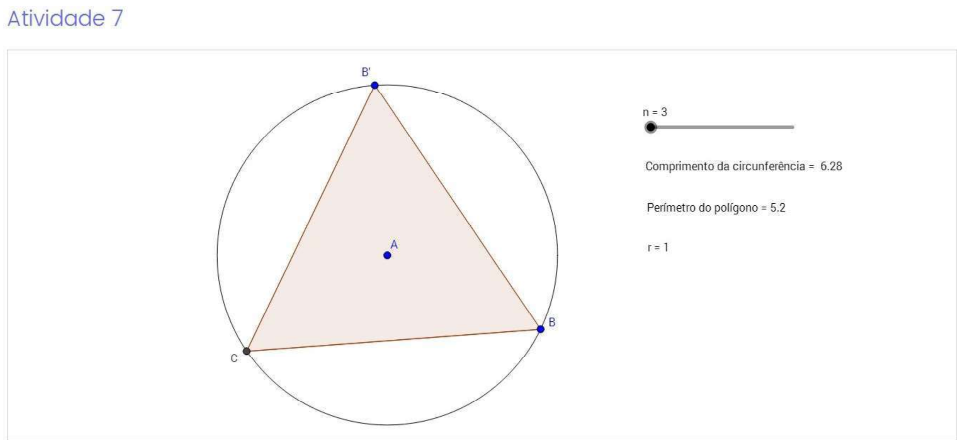
Atividade 7

Objetivo: possibilitar ao discente ter um entendimento básico do conceito de limites por meio de uma atividade que usa uma circunferência e polígonos regulares (atividade de manipulação). O protocolo para a execução das atividades é apresentado a seguir:

- Fazendo uso da ferramenta “Controle deslizante”, construir Polígonos Regulares de lados variando de 3 a 100 inscritos na circunferência.

- Considerando a sequência dos polígonos regulares de n lados que podem ser inscritos nessa circunferência, concluir sobre a relação que pode ser estabelecida entre o perímetro dos sucessivos polígonos regulares inscritos comparados ao comprimento da circunferência, conforme ilustra a figura 4.13.

Figura 4.13 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 7.



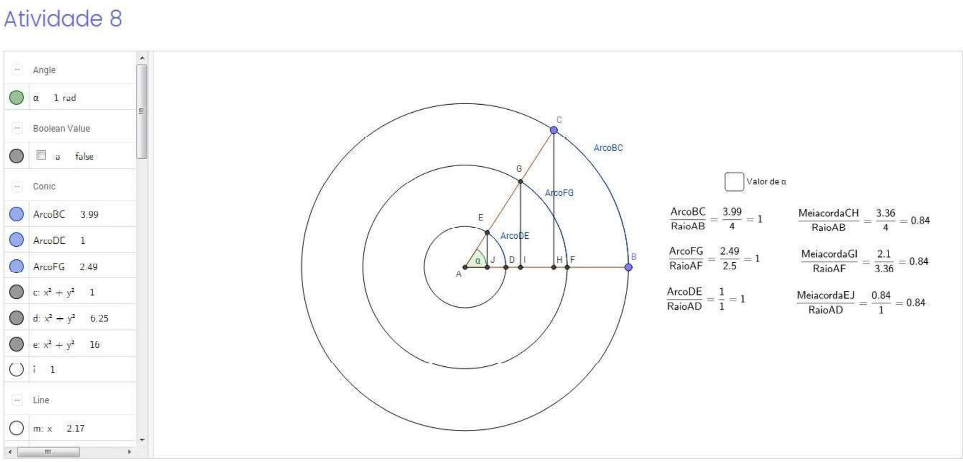
Fonte: Elaborado pelo autor. Disponível em www.geogebra.org/m/yuxhPYQ3

Atividade 8

Objetivo: verificar a base do conceito de radiano dentro de seus aspectos linear e angular (atividade de manipulação). O protocolo para a execução das atividades é descrito a seguir:

- Construir setores circulares, nas circunferências concêntricas disponíveis, de forma que todas estejam submetidas a um mesmo ângulo, ilustrado pela figura 4.14.

Figura 4.14 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 8.



Fonte: Elaborado pelo autor. Disponível em www.geogebra.org/m/yGpcS2ue

- Verificar o comprimento do arco circular determinado em cada setor. De posse do raio da circunferência, estabelecer a relação entre estes 2 valores, nesta ordem.

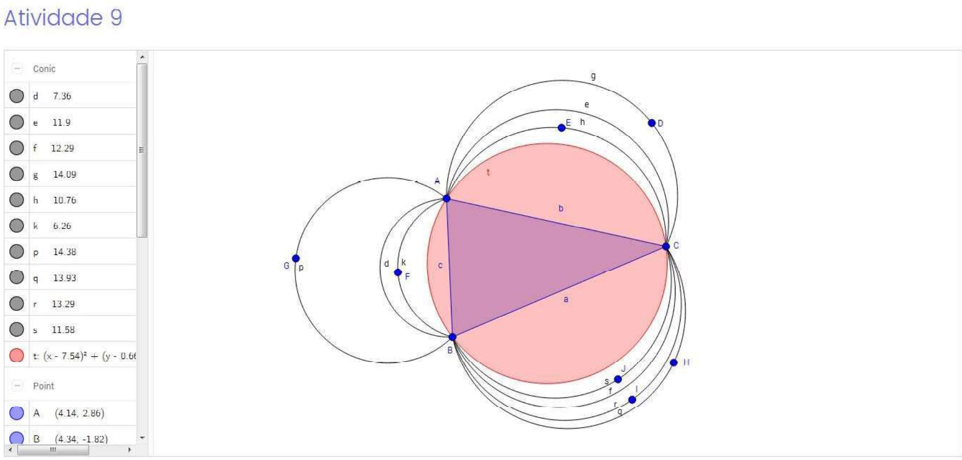
- Determinar o valor do ângulo do setor circular em radianos.

- Comparar os valores encontrados levantando hipóteses para o fenômeno observado.

Atividade 9

Objetivo: fazer com que o aluno visualize a existência de diferentes semicircunferências para cada lado do triângulo sugerido (atividade de construção), bem como atestar a existência e a unicidade de 3 arcos que são consecutivos e que formam uma circunferência que circunscreve o triângulo, conforme ilustra a figura 4.15.

Figura 4.15 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 9.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os procedimentos para a execução das atividades são apresentados a seguir:

- Usando, livremente, as ferramentas do software, construir um triângulo qualquer na janela de visualização e estabeleça sucessivas semicircunferências que apresentem como pontos extremos os lados do triângulo (utilizar obrigatoriamente os 3 lados do triângulo e fazer mais de 1 arco em cada lado).

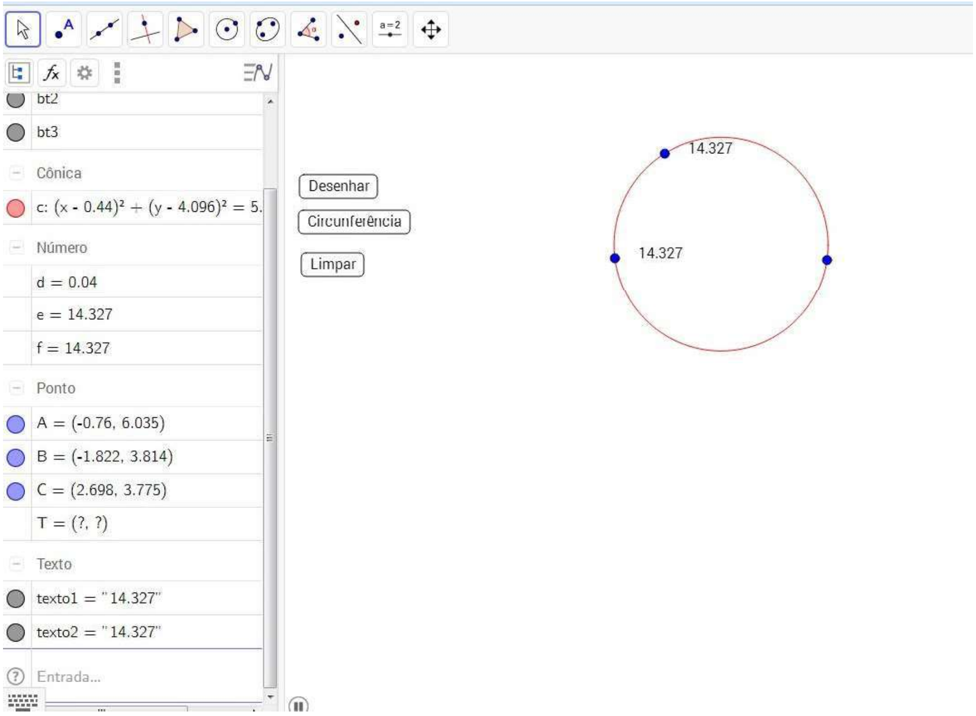
- Analisar a “imagem” construída e identificar a existência (ou não) de uma ou mais circunferência(s) que circunscreve(m) o triângulo determinado.

Atividade 10

Objetivo: contextualizar, por meio de um exemplo prático, a aplicabilidade do uso da unidade radiano no cumprimento da tarefa proposta (atividade de construção). Para a definição de radiano será utilizada a ideia do deslocamento linear, sobre a circunferência, do valor de 1 raio da mesma, complementada pela ideia do deslocamento angular. Para realizar esta tarefa:

- Escolher 3 pontos quaisquer na janela de visualização do software "Geogebra", conforme ilustra a figura 4.16.

Figura 4.16 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 10.



Fonte: Elaborado pelo autor

- Fazer com que a ferramenta "Tartaruga" una tais pontos por meio da única circunferência que os contêm.

- Medir o comprimento da circunferência obtida por meio do deslocamento da tartaruga".

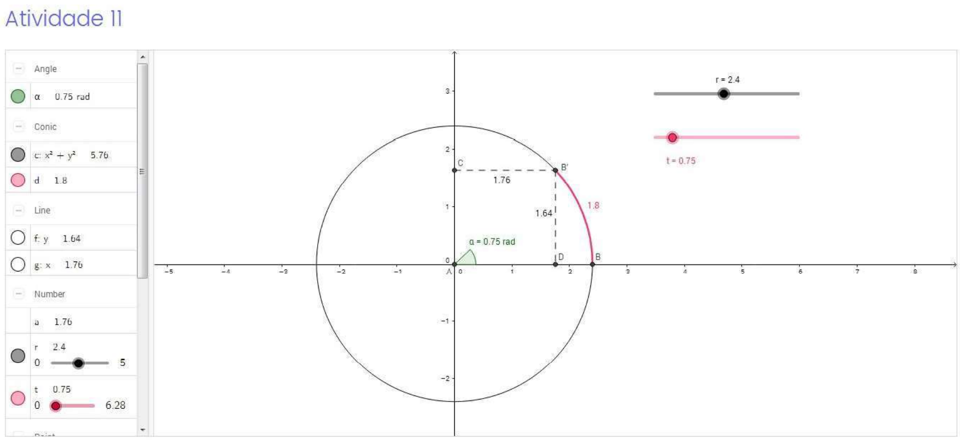
Atividade 11

Objetivo: A partir da definição de radiano realizada anteriormente, compreender a definição da Função de Euler, passando, neste momento, pela definição de função, em especial as funções trigonométricas (atividade de manipulação).

As orientações para a execução das atividades são apresentadas a seguir:

- Manipular livremente os controles deslizantes r e t verificando as consequências deste movimento no que tange ao tamanho do arco e ao ângulo correspondente obtido, bem como identificar os elementos que embasam as definições da “Função de Euler”, conforme ilustra a figura 4.17.

Figura 4.17 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 11.



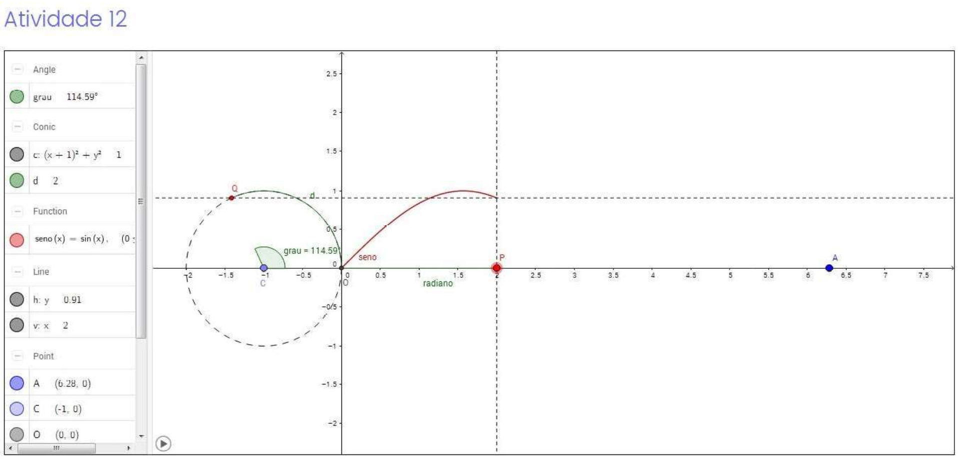
Fonte: Elaborado pelo autor. Disponível em www.geogebra.org/m/nttKVR8V

Atividade 12

Objetivo: Relacionar graus com radianos além de “desenrolar” o arco de uma circunferência ao longo do eixo horizontal do Plano Cartesiano para traçar o gráfico da função seno (atividade de manipulação). Para realizar a atividade:

- Manipular o ponto P ao longo do segmento OA analisando e relacionando os valores encontrados para o ângulo, o radiano e o seno (da Função Seno) e concluir sobre a importância e a validade do uso do radiano no estudo das funções trigonométricas, conforme ilustra a figura 4.18.

Figura 4.18 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 12.



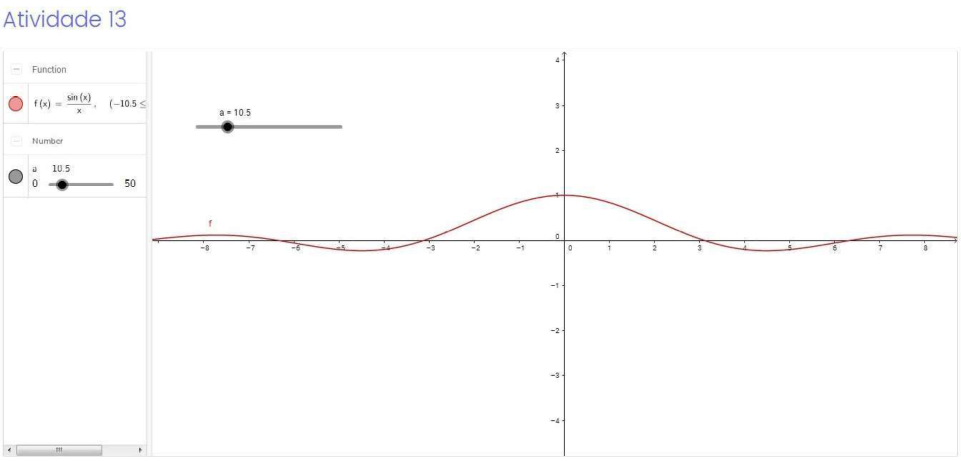
Fonte: Elaborado pelo autor. Disponível em www.geogebra.org/m/CcThdmP9

Atividade 13

Objetivo: Realizar um fechamento dos estudos realizados, analisando o gráfico da função f(x)= $\frac{sen(x)}{\text{x}}$ valendo-se de conhecimentos básicos de Fundamentos de Cálculo (atividade de manipulação). Para tanto:

- Analisar o comportamento da função à medida que os valores de x se aproximam arbitrariamente de 0 (zero). Verifique o que se pode concluir sobre a validade desta constatação para arcos tomados numa unidade diferente de radiano, conforme ilustra a figura 4.19.

Figura 4.19 – Janela de visualização do software Geogebra para a atividade 13.



Fonte: Elaborado pelo autor. www.geogebra.org/m/jBUt7wcw

4.3 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Neste momento serão apresentadas formas de solucionar as atividades, aqui apresentadas como propostas, sob duas óticas: como uma solução para a forma de se usar o software Geogebra e como solução na forma como pode ser feita a abordagem didática por parte do docente. Trata-se exatamente do que foi realizado pelo autor, o que vem a dar sustentação à presente pesquisa.

A atividade 1 marca o início da trajetória com vistas a mostrar a importância da unidade radiano dentro do universo da Trigonometria e das Funções Trigonométricas. Esta é uma atividade caracterizada como de construção, isto é, o discente vai receber a atividade e deverá chegar a uma resposta valendo-se de quaisquer comandos ou ferramenta disponível no software.

Neste início, nada mais simples do que proporcionar aos alunos uma oportunidade de realizar um deslocamento da ferramenta “tartaruga” do software Geogebra a partir da origem do plano cartesiano, local onde ela é posicionada por default no programa, até um ponto qualquer construído na janela de visualização valendo-se, para isso, da ideia de ângulo e distância.

Cabe destacar que as soluções que serão aqui apresentadas são, apenas, uma das formas de resolver a questão. Existem outras maneiras de se chegar a outras soluções que também são corretas.

Para solucionar esta atividade pode-se optar por posicionar dois pontos chave para a determinação do valor angular que existe entre a posição inicial da ferramenta tartaruga, a origem do plano cartesiano, e o ponto qualquer a ser escolhido: um na própria origem do plano cartesiano, chamado de ponto B, e outro em um ponto qualquer da parte positiva do eixo x, o ponto C. Escolhido o ponto qualquer na janela de visualização do software, chamado de ponto A, começa a execução no campo “Entrada” do software dos seguintes comandos, nesta ordem, e cujas explicações, não só desses, como de todos os demais, encontram-se no Apêndice E:

- T=Tartaruga[ ]
- α=Ângulo[C, B, A]
- TartarugaIrParaEsquerda[T, α]
- d=Distância[T, A]
- TartarugaIrParaFrente[T, d]

Ao final de tal sequência de comandos a ferramenta ”tartaruga” estará perfeitamente posicionada sobre o ponto escolhido pelo usuário, conforme estava previsto na atividade apresentada.

Já na atividade 2, também de construção, é apresentado um desafio a mais para os alunos: devem ser escolhidos dois pontos aleatórios (aqui identificados como A e B) na janela de visualização do software e a ferramenta “tartaruga” deverá uni-los, além de medir tal segmento de reta que, por definição, é único.

Nesta atividade o docente pode optar por usar a ferramenta “Botão” como forma de incrementar o uso do programa pelos alunos.

Inicialmente são criados dois botões na janela de visualização de programa: o primeiro intitulado “Ok” e o segundo intitulado “Reiniciar”.

Para a programação do primeiro botão (Ok) uma sequência de comandos viável é a seguinte:

- C=(x(A)+1, y(A))
- DefinirVisibilidade[C,1, false]
- α=Ângulo[B,A,C]
- T=Tartaruga[]
- DefinirCoordenadas[T,x(A), y(A)]
- TartarugaIrParaDireita[T, α]
- β=Distância[A,B]
- TartarugaIrParaFrente[T, β]
- Texto[β, (x(B)+0.5,y(B))]
- IniciarAnimação[]

Já para a programação do segundo botão (Reiniciar) a seguinte sequência de comandos é válida:

- Apagar[T]
- Apagar[A]
- Apagar[B]
- Apagar[C]

Caberá ao usuário do programa escolher os dois pontos quaisquer na janela de visualização do software e apertar o botão “Ok” para que uma solução possível seja apresentada. Ao apertar o botão “Reiniciar” a janela de visualização e os dados calculados para a última solução apresentada são “zerados” e a atvidade pode ser novamente realizada a partir da escolha de dois pontos quaisquer.

Ao final destas atividades o docente poderá desafiar os alunos a tentar visualizar uma forma da ferramenta “tartaruga” fazer um deslocamento curvilíneo perfeito na janela de visualização do software fazendo uso dos comandos e das ferramentas colocadas à disposição. É possível resolver tal situação valendo-se de ângulos e distâncias? Como? Como enunciar tais comandos?

A atividade 3 marca o início das que são consideradas de manipulação, isto é, aquelas nas quais o discente recebeu o material pronto e tirou conclusões a partir do manuseio dos elementos que constam na mesma. Nesta atividade foram trabalhadas as ideias relativas à semelhança de triângulos.

Atuando primordialmente na condição de mediador, o docente fez com que os alunos explorassem os conceitos de semelhança de triângulos passando por todos os casos existentes – LLL, LAL e AA – fazendo uso das caixas "Exibir/Esconder Objeto" já disponibilizadas na atividade montada. Após isso, os triângulos disponíveis foram analisados em seus elementos principais, ângulos e lados, a fim de que se pudesse concluir sobre a semelhança, ou não, dos mesmos. Outra possibilidade que a atividade disponibilizou foi a deformação dos triângulos originais reposicionando-se os vértices A, B e C do triângulo 1, além da manipulação dos valores de k que, neste caso, serve como constante de semelhança entre as figuras.

Na atividade 4, também caracterizada como sendo de manipulação, o docente mediou a construção do conhecimento para que o aluno entendesse os conceitos presentes na semelhança de figuras planas. Conceitos importantes que surgiram a partir do traçado da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer, conhecidos como as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, foram explorados. Para isso, os elementos que puderam ser exibidos ou ocultados na atividade, quais sejam os lados, os ângulos e uma análise dos ângulos, além da constante de semelhança r foram trabalhados de forma que a semelhança dos triângulos pudesse ser mostrada e as conclusões relativas às relações métricas fossem entendidas pelos discentes, dando-se uma origem às mesmas.

Já com a atividade 5 o docente chegou a um momento importante da trajetória em andamento com a possibilidade de apresentar as definições relativas às Razões Trigonométricas Fundamentais a partir das ideias de semelhança de triângulos retângulos. Por meio desta atividade, de manipulação, o professor pôde estimular os discentes, não só a deformar o triângulo original a partir do vértice C, como também a reposicionar o vértice A a partir do controle deslizante a de forma que fosse possível concluir que, no final, os valores das Razões Trigonométricas Fundamentais, quais sejam o seno, o cosseno e a tangente, dependem tão somente dos ângulos a que se referem e não dos valores dos lados dos triângulos retângulos possíveis de serem estabelecidos.

Na atividade 6 chegou-se ao momento de falar do valor da constante π. Cabe destacar que esta atividade volta a ser considerada como de construção. Uma solução possível para a mesma é a seguinte:

- Construir um controle deslizante a.
- Construir um círculo dado o centro – que pode ser qualquer – e raio – que deve ser dado pelo valor de a.
- Determinar o valor do comprimento e do diâmetro da circunferência.

- Inserir um texto na janela de visualização do software dividindo o valor do comprimento da circunferência pelo valor do diâmetro da mesma. O resultado esperado é o valor de π (aproximadamente 3,14). O interessante, nesta forma de solucionar a questão, é a possibilidade de verificação de flutuações dos valores de π em função dos valores utilizados para sua determinação.

Já na atividade 7 o docente teve a oportunidade de trabalhar com o discente sob o conceito de Círculo Trigonométrico, além de ter tido uma noção, superficial, de Limites. Foi deixado claro para o aluno que, numa circunferência de raio r igual a 1, a da atividade em questão, o comprimento C da mesma é dado por $C = 2\pi r$ e que o limite do perímetro das figuras planas regulares inscritas nesta circunferência é o próprio valor deste comprimento. Esta conclusão foi possível a partir da execução da atividade proposta por meio do controle deslizante n.

A chegada na atividade 8 marcou um momento importante no contexto do trabalho, pois conceituou-se a unidade radiano por meio de uma atividade caracterizada como de manipulação. O docente estimulou e conduziu o raciocínio dos alunos para que os mesmos observassem os elementos colocados à sua disposição na janela de visualização do software no que tange às medidas lineares tomadas nos arcos das circunferências, às medidas angulares que correspondem aos arcos de circunferência tomados e aos resultados das divisões apresentadas por meio de elementos de triângulos retângulos surgidos, de forma simultânea, para as três circunferências presentes na atividade. Ao final, foi possível concluir que o conceito de radiano se aplica a uma circunferência de qualquer raio maior que 0. Além disso, o mesmo significa dizer "quantos raios" são tomados a partir de um deslocamento no arco de tal circunferência. Em sequência foi explorada a importância do surgimento de tal unidade no contexto da matemática no que tange à possibilidade de pensar na trigonometria não só para ângulos maiores que agudos, como também para ângulos negativos, além da garantia de relacionar a trigonometria na circunferência com a a trigonometria no triângulo retângulo.

Na atividade 9 o docente teve em mente que cada aluno precisava visualizar e entender que existe uma única circunferência que circunscreve um triângulo qualquer, fazendo uso desta atividade de construção. Para isso, pôde ser aproveitada a atividade em questão mostrando a existência de 3 arcos consecutivos que passavam pelos vértices do triângulo e cuja distância de qualquer ponto dos arcos relativas a um ponto central, aqui chamado de centro da circunferência, era exatamente a mesma.

A atividade 10 contextualizou a aplicabilidade da unidade radiano, sendo ela essencialmente de construção. Para sua solução, deve-se relembrar o desafio apresentado ao final das atividades 1 e 2 no que diz respeito a um deslocamento curvilíneo da ferramenta "tartaruga" pois, naquele momento, foi realizado o deslocamento da ferramenta valendo-se da ideia de ângulo e distância. É possível fazer um deslocamento curvilíneo valendo-se do conceito de ângulo? Na atividade 9 foi possível concluir que, dado 3 pontos, existe uma única circunferência que os circunscreve. É possível, então, dados 3 pontos quaisquer na janela de visualização do programa, fazer com que a ferramenta “tartaruga”, realizando um deslocamento em curva, una tais pontos traçando a circunferência única que os circunscreve? Este é o desafio da atividade 10.

Para sua solução optou-se pela utilização de três botões intitulados “Desenhar”, “Circunferência” e “Limpar”. O usuário da atividade pode, inicialmente, escolher três pontos aleatórios (A, B e C) para depois clicar nos botões disponibilizados.

A programação do botão “Desenhar” é a seguinte:

- Apagar[T]
- T=Tartaruga[ ]
- DefinirCoordenadas[T, x(A),y(A)]
- TartarugaIrParaDireita[T, Ângulo[CentroDoTriângulo[A, B, C, 3], A, (x(A),y(A)+1)]]
- Repetir[360, TartarugaIrParaFrente[T, Distância[A, CentroDoTriângulo[A, B, C, 3]] pi/180], TartarugaIrParaEsquerda[T, pi/180]]
- d=Distância[A, CentroDoTriângulo[A, B, C, 3]] pi/180
- e=360*d
- Texto[e,(x(A)+0.5,y(A))]
- IniciarAnimação[ ]

Pode-se observar na quinta linha de comando que, sem a utilização da ideia de radiano, não seria possível responder ao pedido da questão.

A programação do botão “Circunferência” é a seguinte:

- c=Círculo[A,B,C]
- DefinirCor[c, "vermelho"]
- f=Perímetro[c]
- Texto[f,(x(B)+0.5,y(B))]

Optou-se por construir esta circunferência por meio do software, sem a animação da ferramenta “tartaruga”, como forma de comparar as respostas dadas em termos de traçado. Para tanto foram disponibilizados, também, os comprimentos das duas circunferências que puderam ser construídas.

Ao final, o botão “Limpar” tem a seguinte programação:

- Apagar[A]
- Apagar[B]
- Apagar[C]

- Apagar[T]

Pressionando tal botão, tudo o que constava na janela de visualização do software é apagado e o processo pode ser reiniciado a partir da escolha de 3 pontos aleatórios.

A atividade 11 voltou a ser de manipulação e relacionava a trigonometria no triângulo retângulo com o círculo trigonométrico. Por meio dela, o docente estimulou os discentes a observarem todos os elementos presentes em seu contexto e relacioná-los coerentemente, quais sejam: raio da circunferência, ângulo (em radiano), arco (em radiano) e abcissas e ordenadas dos pontos tomados na circunferência. Por meio de associações coerentes foi possível, inclusive, passar pelos conceitos da Função de Euler e de Funções Trigonométricas baseadas em arcos tomados na unidade radiano, pois estes últimos poderiam ser associados diretamente a valores do conjunto dos números reais.

A atividade 12, também de manipulação, é denominada “Desenrolando o seno”. Tratou-se de uma forma de associar a construção do gráfico da função seno a partir de arcos que, apesar de serem tomados em radiano na circunferência, neste caso de raio 1, poderiam ser associados diretamente a valores angulares, fazendo da unidade radiano um elemento primordial para a modelagem de fenômenos de natureza oscilatória, vibratória ou periódica, conforme já dito anteriormente.

Por último, a atividade 13 serviu de fechamento para a sequência proposta por proporcionar ao docente a oportunidade de relacionar os Fundamentos de Cálculo às Funções Trigonométricas ao abordar a temática do Limite Trigonométrico Fundamental, mesmo que de forma superficial. Foi uma oportunidade de mostrar que se não fosse pela existência da unidade radiano, tal relação tão importante para aquele ramo da matemática não seria possível.

4.4 RELATO DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES NA VISÃO DO AUTOR

Ao analisar a participação dos alunos na execução das atividades é necessário demarcar dois períodos bem distintos: do pré-teste até a execução da atividade 5 e da execução da atividade 6 até o final.

Durante a execução do pré-teste os alunos se mostravam nervosos por não estarem dominando os conhecimentos objeto da cobrança. Em virtude disso, naquele momento, o contexto da pesquisa era desfavorável, apesar de promissor, uma vez que a expectativa de que a abordagem daquele conteúdo tinha deixado lacunas durante o processo de formação dos alunos era real. O pré-teste foi realizado de forma individual e sem o uso de material para consulta para que o diagnóstico estivesse o mais próximo da realidade no que tange à aprendizagem dos conteúdos.

Naquele mesmo encontro ainda foi feita uma reaproximação dos alunos para com a plataforma Geogebra por meio da execução de uma sequência didática voltada para este assunto. Tratou-se de uma atividade inicialmente tranquila, uma vez que a maioria deles já conheciam o programa, mas que foi substituída pela curiosidade a partir da apresentação de comandos e ferramentas que deveriam ser utilizados ao longo da proposta de trabalho, mas que até então eram desconhecidas pela maioria.

Durante as 5 primeiras atividades os discentes se mostravam receosos, apesar de demonstrarem um maior entendimento dos conceitos rudimentares da trigonometria, desde reta, ângulos, semelhança de triângulos e as razões trigonométricas propriamente ditas. Tudo isso somado ao fato de estarem se (re) adaptando à utilização da plataforma utilizada. Pode-se inferir que os mesmos se mostraram bastante receptivos à técnica utilizada pelo autor de, inicialmente, haver uma discussão sobre os principais pontos objeto de erro nas cobranças do pré-teste, para, posteriormente, apresentar-se uma atividade no Geogebra que era voltada para corrigir os rumos até então seguidos por eles. Vale a pena registrar que, a partir da primeira vez, tal técnica passou a ser constante em todos os encontros subsequentes.

Nas duas primeiras atividades, voltadas para a construção de soluções, não houve muitas dificuldades na apresentação das mesmas. Apenas cada aluno mostrou-se entender do assunto em seu tempo. Foi interessante a forma com a qual o erro identificado no pré-teste relativo aos conceitos de reta, semirreta e segmento de reta e suas relações com o conceito de ângulo foram trabalhados com propriedade nas duas primeiras atividades uma vez que, para solucioná-las, o discente se via obrigado a usar, no Geogebra, as ideias de semirreta ou segmento de reta, sendo que estes últimos estão presentes no conceito formal de ângulo já apresentado nesta pesquisa.

As atividades 3, 4 e 5 aconteceram na 3ª aula programada. Houve uma boa participação por parte dos alunos, pois foi o início do uso de atividades caracterizadas como de manipulação, o que lhes proporcionou mais liberdade. O encadeamento de assuntos, iniciando por semelhança de triângulos, passando pelas Relações Métricas no Triângulo Retângulo e terminando nas Razões Trigonométricas Fundamentais teve uma repercussão extremamente positiva no seio dos alunos que mostraram entender, a partir daquele momento, a origem destas últimas.

A 4ª aula já foi marcada por uma diferença, pois foi nela se apresentou o conceito formal e prático da constante π , de radiano, além da apresentação de uma noção básica de limites. Ainda foi observada uma dificuldade de utilização da plataforma para a solução da atividade, primordialmente a atividade 6. Como era pedida uma série de informações, inclusive para serem mostradas na janela de visualização do software, houve necessidade de maiores quantidades de intervenções por parte do docente, mas nada que tenha comprometido a execução da atividade. O software ainda se mostrou um grande aliado nesta atividade por proporcionar a contextualização do conceito da constante π em circunferências de diferentes raios.

Ainda neste encontro foi definida a unidade radiano. É importante citar que a utilização de circunferências concêntricas para mostrar o conceito da unidade do conceito em circunferências de diferentes raios mostrou-se, também, de grande aproveitamento didático tanto da parte docente como da parte discente.

O 5º encontro foi muito importante por nele estar a atividade considerada chave pelo autor: a atividade 10. Este era o desafio maior para os alunos: eles deveriam visualizar e compreender que, se não fosse pela unidade radiano, a solução para a mesma seria extremamente difícil, se não impossível. Inicialmente, a atividade 9 se mostrou imprescindível por proporcionar aos alunos a visualização da existência de uma circunferência a partir de 3 pontos quaisquer. Então foi possível concluir que, se fossem escolhidos três pontos na janela de visualização do software, então ali existia, também, uma circunferência, apesar de não estar traçada. Restava saber como programar a ferramenta tartaruga para cumprir esta missão.

Neste momento houve a necessária intervenção do docente a fim de mostrar a possibilidade de cumprir a atividade proposta. Mas a dificuldade de visualizar uma solução também pôde ser utilizada como instrumento didático porque, ao apresentar uma saída viável, inclusive com a execução da atividade, foram observadas demonstrações de surpresa, alegria e satisfação. Apesar de nenhum aluno ter conseguido resolver a atividade, foi um momento importante por proporcionar aos mesmos a oportunidade de compreender a necessidade e a aplicabilidade para a unidade radiano em uma atividade que parecia impossível de ser resolvida.

O 6º encontro foi essencialmente voltado para a aplicação de atividades de manipulação envolvendo o conteúdo Funções Trigonométricas. Ficou claro que, na elaboração de atividades desta natureza, o tempo é fator decisivo, pois deve-se pesar a seguinte questão: para um mesmo período de tempo deve-se considerar mais atividades de manipulação ou de construção?

Tudo isto porque foi ratificado que a disponibilização de atividades de construção, quando feitas, exigem mais tempo do aluno para viabilizar uma resposta bem como do professor para interagir com os mesmos, em que pese a necessidade de maior mobilização de recursos pedagógicos do aluno na busca de uma solução. De forma inversa, as atividades de manipulação exigem menos tempo de execução, apesar de também exigir maior capacidade de mediação por parte do docente para que não haja dispersão na atividade.

O pós-teste e a reunião visando o feedback foram extremamente positivas por trazerem ao pesquisador os subsídios para concluir que sim; havia algo necessário a ser trabalhado na complementação da formação dos discentes no que tange ao assunto da pesquisa. Da mesma forma, percebeu-se que o conjunto de atividades desenvolvidas proporcionou um incremento na aprendizagem, apesar de serem necessários alguns aperfeiçoamentos que serão citados mais à frente na avaliação do pós-teste

De uma forma geral, o planejamento inicial realizado visando o desenvolvimento das atividades foi fielmente seguido. As oportunidades de melhoria detectadas servirão de subsídios para o aprimoramento de futuras pesquisas que o autor levará a termo, principalmente na questão do planejamento do tempo destinado para a execução das atividades. A utilização da plataforma Geogebra mostrou-se um instrumento de extremo valor no que tange à contextualização dos conteúdos que hoje continuam a ser objeto de trabalho essencialmente em livros didáticos. Além disso, foi interessante trabalhar os conteúdos de forma sistematizada, mostrando o encadeamento dos mesmos desde os seus fundamentos mais básicos.

Durante as atividades, os alunos se mostraram interessados e participativos, sempre questionando e realizando inter-relações entre os conteúdos já trabalhados. Em diversos momentos, visualizou-se o “ato da descoberta” em que a prática utilizando o software Geogebra, por meio da manipulação e da visualização, se mostrou fator motivador para a aprendizagem.

Desta forma, é importante ressaltar a real e perene necessidade de todo professor atuar como pesquisador na busca constante de aperfeiçoar seu método de trabalho com o objetivo de apresentar uma matemática consistente, coerente e que faça sentido para seus alunos.

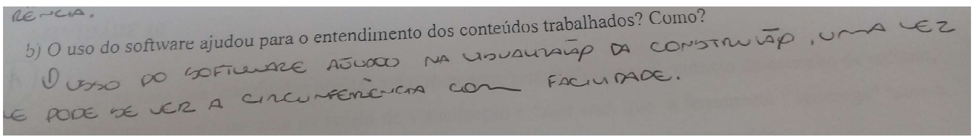
4.5 AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES NA VISÃO DOS ALUNOS

O conjunto de atividades teve como o objetivo trabalhar diferentes conteúdos de Trigonometria e Funções Trigonométricas, em especial o uso da unidade radiano, utilizando o software Geogebra. Ao término das mesmas os alunos responderam questões, constantes do Apêndice D, que buscaram visualizar se a atividade proposta auxiliou na aprendizagem.

Para aqueles itens que questionaram se o software Geogebra poderia ser considerado um facilitador da aprendizagem, foi salientado pelos alunos, conforme ilustra as figuras 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23, que o Geogebra auxilia na aprendizagem por ser um programa que permite a manipulação e visualização dos conceitos, além de interligar conteúdos tornando o conhecimento palpável:

a) Promove a visualização dos conceitos:

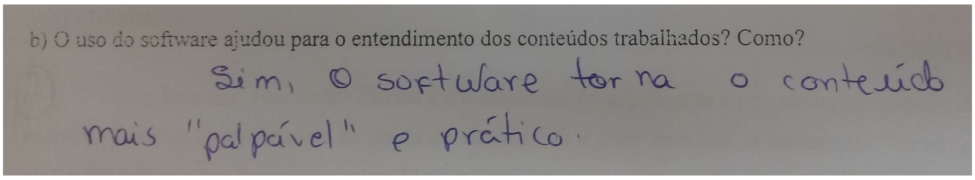
Figura 4.20 – Resposta do Aluno A2.


RÊNCIA.
b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?
O USO DO SOFTWARE AJUDOU NA VISUALIZAÇÃO DA CONSTRUÇÃO, UMA VEZ
QUE PODE SE VER A CIRCUNFERÊNCIA COM FACILIDADE.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

b) Comprova a teoria tornando o conteúdo palpável:

Figura 4.21 – Resposta do Aluno A8.

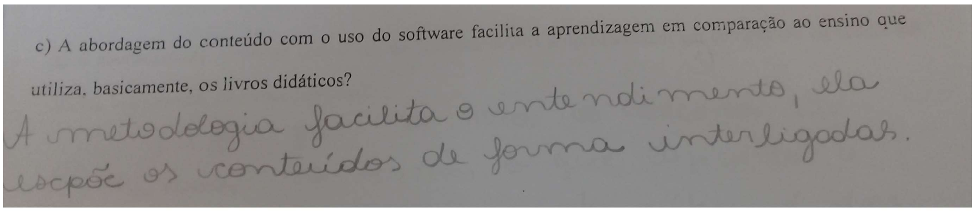

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?

Sim, o software torna o conteúdo mais "palpável" e prático.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

c) Interliga conteúdos:

Figura 4.22 – Resposta do Aluno A1.

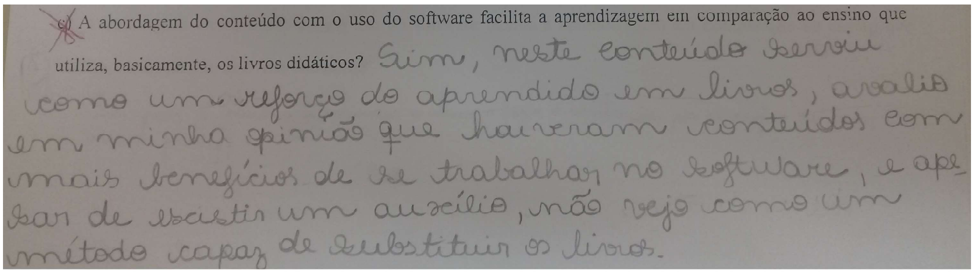

c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos?

A metodologia facilita o entendimento, ela escpõe os conteúdos de forma interligadas.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

d) Complementa a aprendizagem:

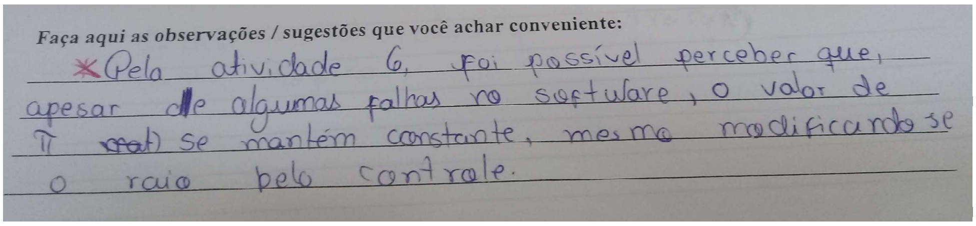
Figura 4.23 – Resposta do Aluno A1.


c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos? Sim, neste conteúdo serviu como um reforço do aprendido em livros, avalio em minha opinião que haveram conteúdos com mais benefícios de se trabalhar no software, e apesar de escistir um auxílio, não vejo como um método capaz de substituir os livros.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

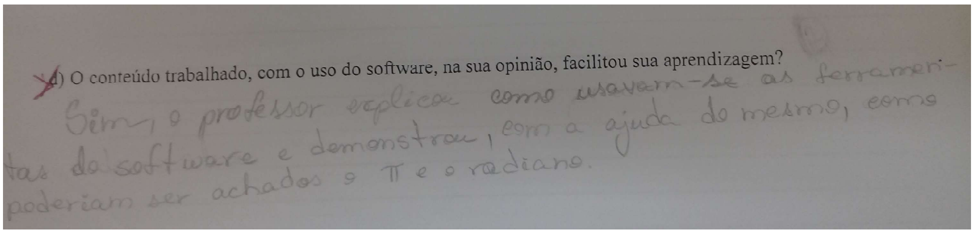
Os alunos A6, A7 e A8 salientaram que durante as atividades houve o entendimento de conceitos relacionados à constante π e a unidade radiano, conforme ilustram as figuras 4.24, 4.25 e 4.26.

Figura 4.24 – Resposta do Aluno A8.


Faça aqui as observações / sugestões que você achar conveniente:
*Pela atividade 6, foi possível perceber que, apesar de algumas falhas no software, o valor de π ~~real~~) se mantém constante, mesmo modificando se o raio pelo controle.

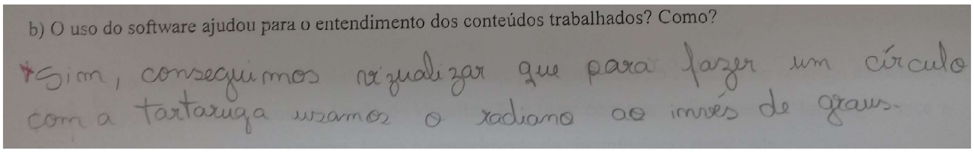
Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Figura 4.25 – Resposta do Aluno A6.


d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?
Sim, o professor explicou como usavam-se as ferramentas do software e demonstrou, com a ajuda do mesmo, como poderiam ser achados o π e o radiano.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Figura 4.26 – Resposta do Aluno A7.

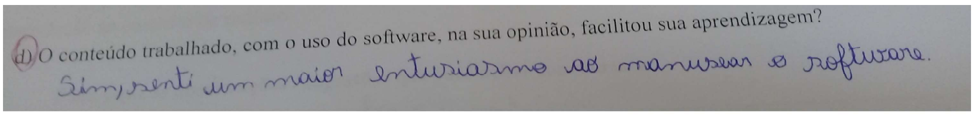

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?
Sim, conseguimos vizualizar que para fazer um círculo com a tartaruga usamos o radiano ao invés de graus.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Todos os alunos salientaram que o software permite a visualização e manipulação dos conteúdos trabalhados auxiliando para a consolidação do aprendizado, além de facilitar a aprendizagem e ser um diferencial em relação ao livro didático. Tais respostas estão ilustradas pelas figuras 4.27, 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31 abaixo:

a) O visual é mais atrativo:

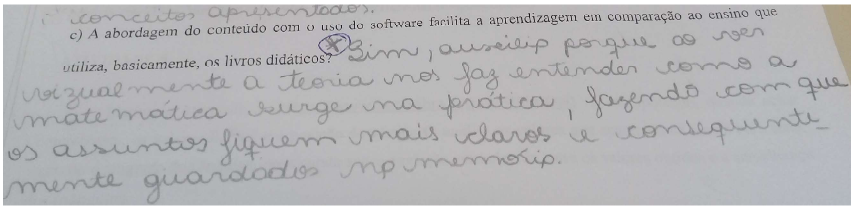
Figura 4.27 – Resposta do Aluno A4.


d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?
Sim, senti um maior entusiasmo ao manusear o software.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

b) Mostra a teoria na prática:

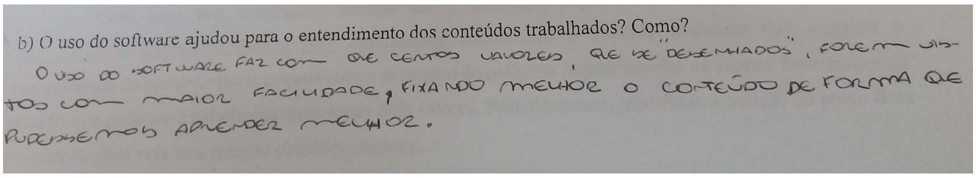
Figura 4.28 – Resposta do Aluno A1.


conceitos apresentados.
c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos? Sim, auxilia porque ao ver vizualmente a teoria nos faz entender como a matemática surge na prática, fazendo com que os assuntos fiquem mais claros e consequentemente guardados na memória.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

c) A manipulação do objeto comprova os conceitos:

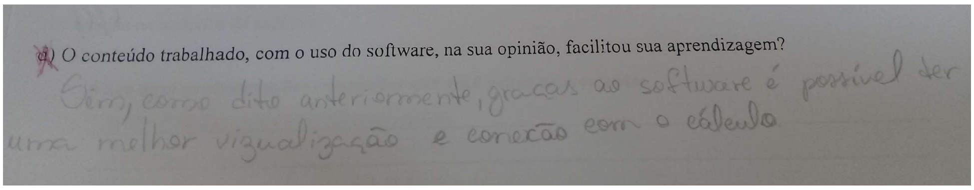
Figura 4.29 – Resposta do Aluno A2.


b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?
O uso do software faz com que certos valores, que se "desenhados", forem vistos com maior facilidade, fixando melhor o conteúdo de forma que pudessemos aprender melhor.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

d) Facilita a visualização e os cálculos:

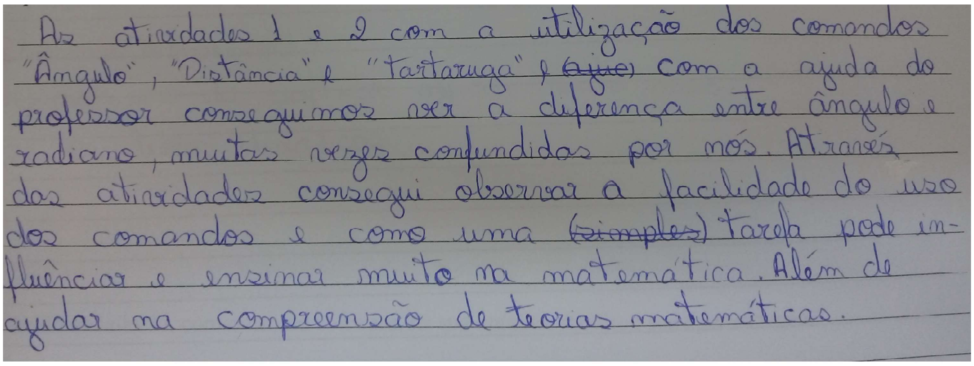
Figura 4.30 – Resposta do Aluno A5.


d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?
Sim, como dito anteriormente, graças ao software é possível ter uma melhor vizualização e conexão com o cálculo

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

e) Eficiente com o auxílio do professor:

Figura 4.31 – Resposta do Aluno A7.


As atividades 1 e 2 com a utilização dos comandos "Ângulo", "Distância" e "Tartaruga" e ~~(ajue)~~ com a ajuda do professor conseguimos ver a diferença entre ângulo e radiano, muitas vezes confundidas por nós. Através das atividades consegui observar a facilidade do uso dos comandos e como uma ~~(simples)~~ tarefa pode influênciar e ensinar muito na matemática. Além de ajudar na compreensão de teorias matemáticas.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Observa-se que as respostas para as 2 questões são semelhantes. Os alunos identificam o software Geogebra como um importante elemento que promove a passagem da teoria para a prática. A visualização e manipulação dos objetos foram os conceitos-chave encontrados nas respostas de todos os alunos.

4.6 ANÁLISE DO PÓS-TESTE

Após a execução das 13 atividades propostas utilizando o software Geogebra, foi realizada uma avaliação (pós-teste) com os discentes. Tal verificação visou colher subsídios que permitissem atestar ou não, a validade das mesmas, seja em termos de uso das TIC, seja em termos da abordagem realizada em relação aos avanços na aprendizagem dos conteúdos de Trigonometria e Funções Trigonométricas, em especial sobre a utilização da unidade radiano.

O pós-teste foi desenvolvido utilizando como referência os resultados do pré-teste realizado no primeiro encontro com os discentes, no qual mapeou-se os principais pontos objetos de erro, por parte dos mesmos. Ainda, com o pós-teste, buscou-se verificar a visão dos mesmos quanto ao uso do software Geogebra.

O pós-teste foi dividido em 3 seções a saber:
- Seção I: procurou investigar as opiniões dos discentes quanto à experiência de manusear o software.
- Seção II: aborda especificamente o conteúdo matemático que foi objeto de maiores erros no pré-teste e que foram trabalhados nas atividades propostas.
- Seção III: concatenam-se as duas ideias abordadas nas seções I e II ao buscar, dos discentes, suas opiniões sobre a validade do uso do software Geogebra na exploração dos conteúdos matemáticos abordados na presente pesquisa.

A apresentação dos resultados será dividida em Seção I, Seção II e Seção III, conforme explicitado anteriormente. Cada seção apresenta respostas fornecidas pelos alunos como forma de referendar os resultados.

Seção I: uso do Geogebra

- Questão I a: Você já conhecia e já havia utilizado o mesmo?

Nesta questão buscou-se identificar se os discentes já conheciam e/ou tinham utilizado o software Geogebra. Todos alunos responderam que já tinham feito uso do programa em anos escolares anteriores. Tal conhecimento prévio foi de grande valia para a realização das atividades, pois não houve necessidade de explorar/ensinar os comandos básicos exigidos para a utilização do software, proporcionando mais tempo para a realização das atividades propostas. A figura 4.32 ilustra uma resposta.

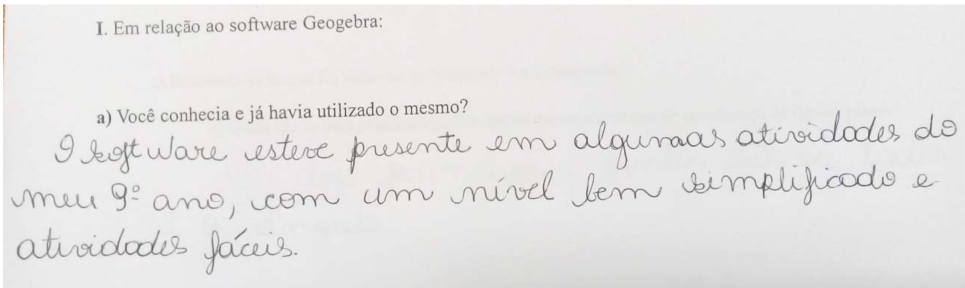
- Questão I b: Você recomenda o uso do software como ferramenta que auxilia no processo de ensino?

Nesta questão buscou-se a opinião dos discentes sobre a recomendação do uso do software Geogebra como ferramenta no apoio ao processo de ensino, pois acredita-se o uso de atividades diferenciadas pode ser fator de relevância positiva para o ensino de Trigonometria. Os alunos, na totalidade, sinalizaram para a recomendação do uso do programa em sala de aula. Inclusive, houve a manifestação de opiniões que mostraram entusiasmo como consequência do uso do mesmo. A figura 4.33 ilustra uma das respostas obtidas.

- Questão I c: O uso de uma atividade diferenciada foi motivadora? Por quê?

Fechando o bloco de questões da Seção I os discentes foram questionados se sentiram-se motivados ao trabalharem com as atividades diferenciadas, além de ter sido pedido uma justificativa para tal opinião. A unanimidade quanto à visão positiva do uso do Geogebra mais uma vez se fez presente – contextualizada pelo uso de expressões como “novo olhar”, “motiva e instiga”, “maior liberdade”, “desperta curiosidade” e “outra visão para o que foi aprendido”, conforme ilustra a figura 4.34.

Figura 4.32 – Resposta do Aluno A1.

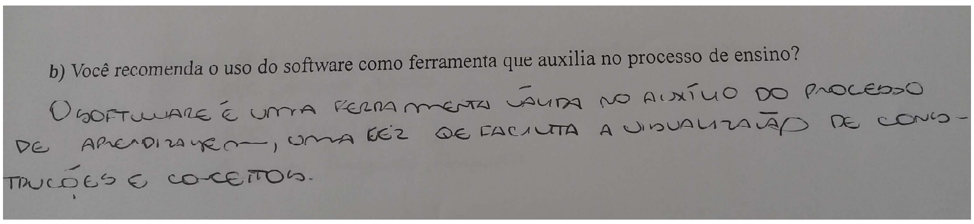

I. Em relação ao software Geogebra:

a) Você conhecia e já havia utilizado o mesmo?

O software esteve presente em algumas atividades do meu 9º ano, com um nível bem simplificado e atividades fáceis.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

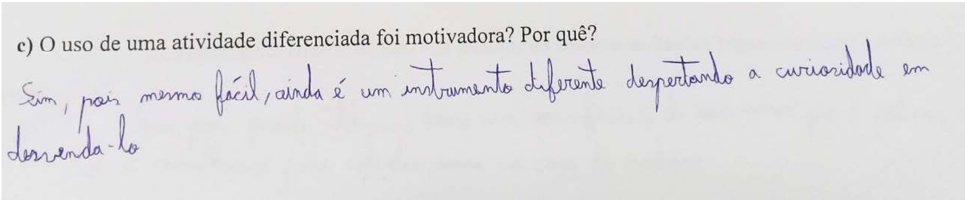
Figura 4.33 – Resposta do Aluno A2.


b) Você recomenda o uso do software como ferramenta que auxilia no processo de ensino?

O SOFTWARE É UMA FERRAMENTA VÁLIDA NO AUXÍLIO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM, UMA VEZ QUE FACILITA A VISUALIZAÇÃO DE CONSTRUÇÕES E CONCEITOS.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Figura 4.34 – Resposta do Aluno A3.


c) O uso de uma atividade diferenciada foi motivadora? Por quê?

Sim, pois mesmo fácil, ainda é um instrumento diferente despertando a curiosidade em desvendá-lo

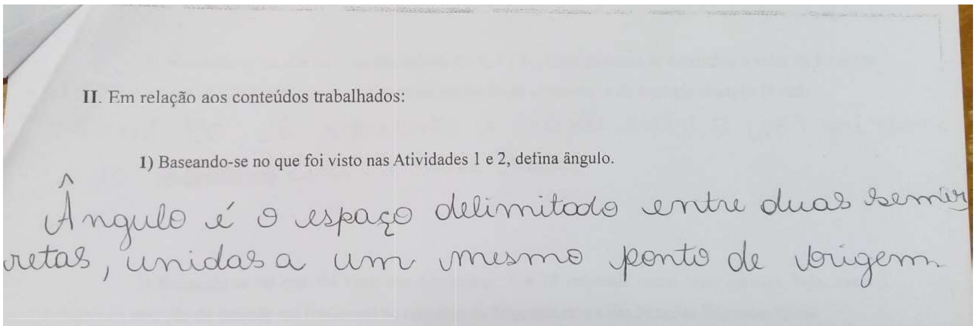
Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Seção II: verificação dos resultados relacionados à Matemática.

- Questão II 1: definição de ângulo.

Ao serem solicitados para que, novamente definissem ângulo, observa-se que houve mudança conceitual quando se compara as respostas obtidas no pré-teste. Todas as respostas apresentadas mostram-se corretas ou mais coerentes por, no mínimo, fazerem uso dos elementos que constam do conceito formal aplicado à definição de ângulo, como exemplifica a figura 4.35.

Figura 4.35 – Resposta do Aluno A1.


II. Em relação aos conteúdos trabalhados:

1) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 1 e 2, defina ângulo.

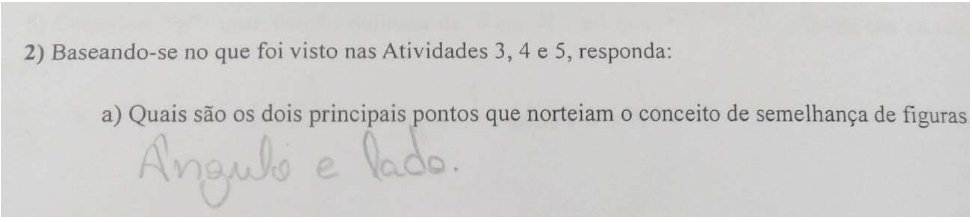
Ângulo é o espaço delimitado entre duas semir retas, unidas a um mesmo ponto de origem.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

- Questão II 2a: semelhança de triângulo.

Por ter sido identificado, no pré-teste, que havia entre os discentes uma ideia errônea ou incompleta acerca dos pontos que norteiam a semelhança de figuras planas, tal questionamento foi apresentado no pós-teste. Nestes termos houve incremento na aprendizagem, uma vez que a resposta de todos os alunos continha, no mínimo, os dois componentes da resposta considerada correta: lado e ângulo. Vale ressaltar que diferentes alunos apresentaram respostas completas, fato que não havia sido observado no pré-teste. A figura 4.36 ilustra a resposta dada pelo aluno A6.

Figura 4.36 – Resposta do Aluno A6.



2) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 3, 4 e 5, responda:

a) Quais são os dois principais pontos que norteiam o conceito de semelhança de figuras

Angulo e lado.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

- Questão II 2 b: casos clássicos de semelhança de triângulos.

Em complemento à questão anterior foi solicitado aos alunos que respondessem quais são os casos clássicos que estabelecem a semelhança de triângulos.

Em relação a este tema os resultados são variáveis: uma resposta totalmente incorreta, além de uma certa quantidade de alunos cujas respostas estavam parcialmente corretas por nela constarem, simultaneamente, casos que são considerados respostas certas e casos que não tem relação com a semelhança de triângulos. Pode-se inferir, nestes casos, que pode ter ocorrido “confusão” na hora dos discentes apresentarem suas respostas, pois observou-se no decorrer das atividades que os alunos compreendiam, aplicavam e identificavam os casos de semelhanças de triângulos. Talvez, ocorra dificuldade em dissertar sobre os conteúdos trabalhados.

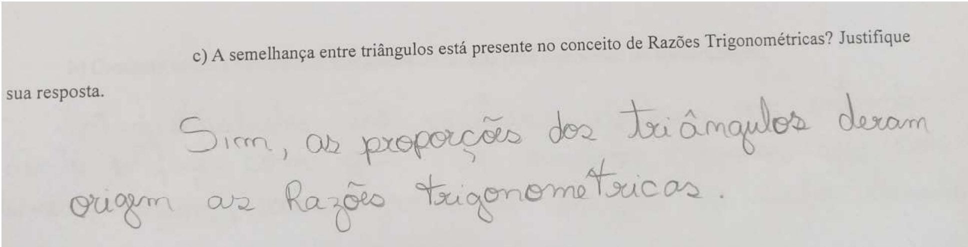
Entretanto, é possível dizer que houve melhor entendimento do conteúdo uma vez que todas as respostas apresentadas, com exceção de uma, estiveram, no mínimo, alinhadas com os conceitos que levam à resposta correta.

- Questão II 2 c: semelhança de triângulos e razões trigonométricas fundamentais.

Nesta questão os resultados alcançados apontam para a necessidade de aperfeiçoamento dos processos de ensino. Considera-se esta abordagem importante por fazer questionar se existe interligação entre a Semelhança de Triângulos e as Razões Trigonométricas Fundamentais, bem como solicitar uma justificativa para a resposta dada. Considerando que parte dos alunos deixou de responder pergunta semelhante constante do pré-teste, é motivador perceber que, todos os alunos responderam a esta pergunta no pós-teste, sendo que a maioria das respostas apresentadas foi sim, em que pese a existência de 2 discentes que apresentaram justificativas inconsistentes para a resposta dada e outro que errou completamente a resposta. Porém, 3 respostas corretas estão perfeitamente alinhadas com o que a fundamentação matemática prevê, um resultado diferente do pré-teste.

Assim, é possível concluir que houve evolução no entendimento do conteúdo. Porém, as respostas incorretas, de grande valia para a pesquisa, apontam para a necessidade de um aperfeiçoamento das atividades uma vez que a relação entre Semelhança de Triângulos e Relações Trigonométricas é de extrema importância para a compreensão dos conteúdos abordados. A figura 4.37 ilustra uma das respostas apresentadas pelos discentes.

Figura 4.37 – Resposta do Aluno A7.


c) A semelhança entre triângulos está presente no conceito de Razões Trigonométricas? Justifique sua resposta.

Sim, as proporções dos triângulos deram origem as Razões trigonometricas.

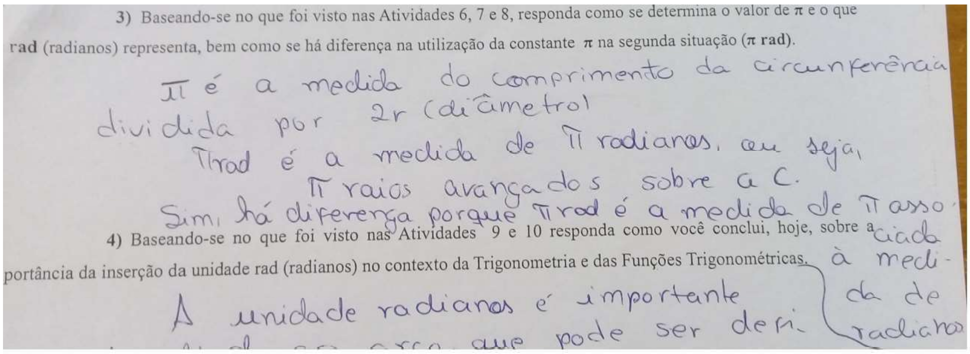
Fonte: Extrato das respostas dos alunos

- Questão 3: número π e π radianos.

No que tange a esta questão, também houve um incremento no entendimento dos conceitos abordados. No pré-teste não houve respostas consideradas corretas para o conceito de π, além de que alguns alunos não responderam à questão. De forma semelhante, alguns alunos também não responderam o que entendiam por π rad.

Porém, no pós-teste foi constatada uma mudança neste entendimento uma vez que, apesar de todas as respostas estarem parcialmente completas, o conhecimento apresentado é correto, conforme ilustra a figura 4.38. Caberia aqui, também, um incremento das atividades propostas visando aperfeiçoar o entendimento desta parte do conteúdo para os discentes.

Figura 4.38 – Resposta do Aluno A8.


3) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 6, 7 e 8, responda como se determina o valor de π e o que rad (radianos) representa, bem como se há diferença na utilização da constante π na segunda situação (π rad).

π é a medida do comprimento da circunferência dividida por 2r (diâmetro)
πrad é a medida de π radianos, ou seja, π raios avançados sobre a C.
Sim, há diferença porque πrad é a medida de π associada à medida de radianos

4) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 9 e 10 responda como você conclui, hoje, sobre a importância da inserção da unidade rad (radianos) no contexto da Trigonometria e das Funções Trigonométricas.

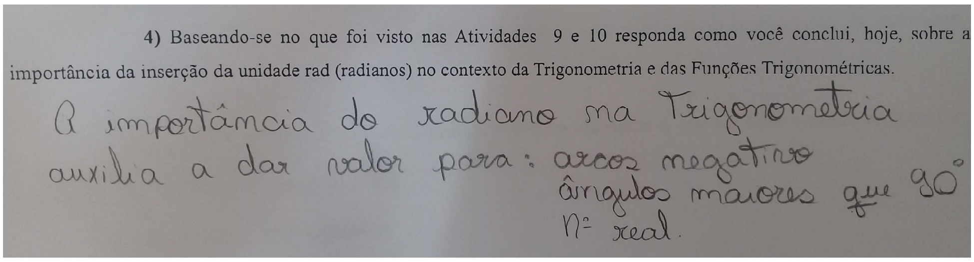
A unidade radianos é importante ... pode ser defi-

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

- Questão 4: importância da unidade radiano.

Em relação a este tema, os alunos conseguiram compreender a importância da existência da unidade radiano no contexto das funções trigonométricas. Porém, é preciso continuar trabalhando esta temática para que o conhecimento apresentado se torne mais claro e fundamentado, conforme ilustrado pela figura 4.39.

Figura 4.39 – Resposta do Aluno A7.


4) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 9 e 10 responda como você conclui, hoje, sobre a importância da inserção da unidade rad (radianos) no contexto da Trigonometria e das Funções Trigonométricas.

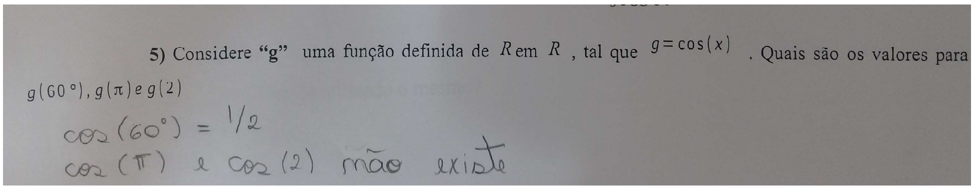
A importância do radiano na Trigonometria auxilia a dar valor para: arcos negativo
ângulos maiores que 90°
nº real.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

- Questão 5: Valores de uma Função Trigonométrica.

Em relação a esta questão precisa-se um olhar mais atento. Mesmo que os alunos façam referências corretas na questão anterior quanto ao uso de radianos nas funções trigonométricas como forma de relacionar tal unidade aos números reais, todos os alunos determinaram o valor do $\cos(60°)$ para a função citada na questão, o que é um erro de conceito cuja correção é necessária. Durante as atividades, em diversos momentos, foi trabalhada a questão de radiano apresentar correspondência no conjunto dos números reais, porém somente estar associado a um valor angular. A figura 4.40 ilustra uma das respostas dadas.

Figura 4.40 – Resposta do Aluno A7.


5) Considere "g" uma função definida de R em R, tal que $g=\cos(x)$. Quais são os valores para $g(60°), g(\pi)$ e $g(2)$

$\cos(60°) = 1/2$
$\cos(\pi)$ e $\cos(2)$ não existe

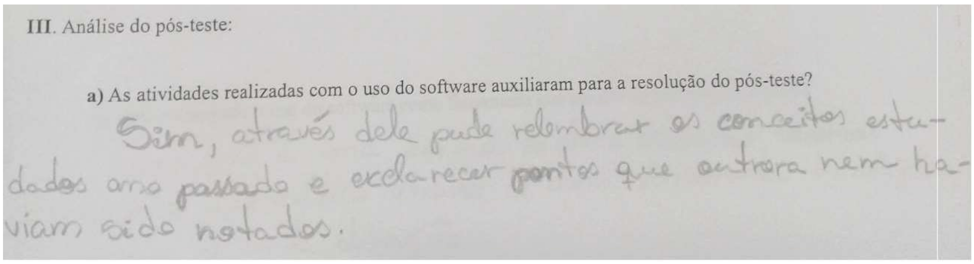
Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Seção III: concatenação das Seções I e II.

- Questões III a e III b: validade das atividades sob a ótica matemática utilizando o software Geogebra.

Em função dos resultados, restou caracterizado que houve incremento no entendimento por parte dos discentes das principais questões objeto da presente pesquisa. Apesar de alguns pontos identificados ainda carecerem de aperfeiçoamento, em função do retorno dado pelos discentes, não resta dúvidas que havia uma lacuna no entendimento dos discentes para o assunto Radianos, fruto de uma abordagem, por vezes, restrita à sequência dada por livros didáticos, e que foi parcialmente preenchida pelas atividades aqui apresentadas como propostas. As figuras 4.41, 4.42, 4.43 e 4.44 ilustram tais respostas:

Figura 4.41 – Resposta do Aluno A6.

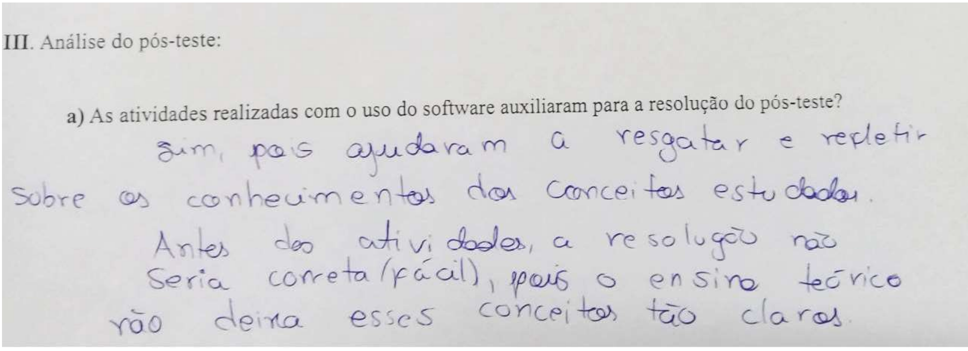

III. Análise do pós-teste:

a) As atividades realizadas com o uso do software auxiliaram para a resolução do pós-teste?

Sim, através dele pude relembrar os conceitos estudados ano passado e esclarecer pontos que outrora nem haviam sido notados.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Figura 4.42 – Resposta do Aluno A8.

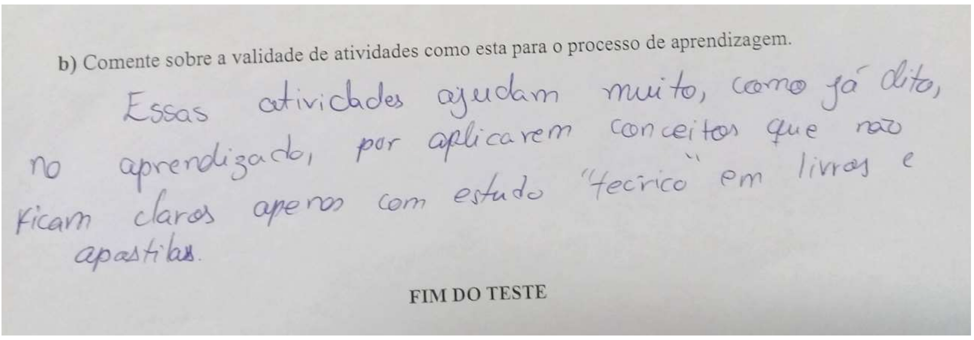

III. Análise do pós-teste:

a) As atividades realizadas com o uso do software auxiliaram para a resolução do pós-teste?

Sim, pois ajudaram a resgatar e refletir sobre os conhecimentos dos conceitos estudados. Antes das atividades, a resolução não seria correta (fácil), pois o ensino teórico não deixa esses conceitos tão claros.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Figura 4.43 – Resposta do Aluno A8.

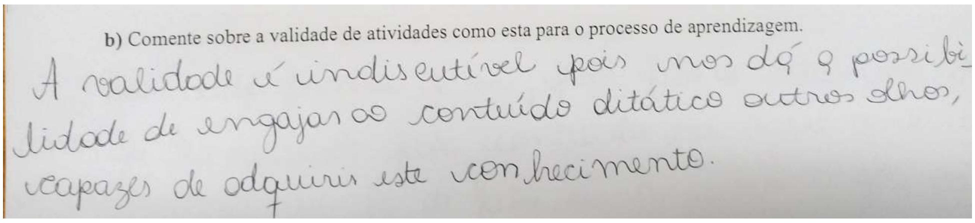

b) Comente sobre a validade de atividades como esta para o processo de aprendizagem.

Essas atividades ajudam muito, como já dito, no aprendizado, por aplicarem conceitos que não ficam claros apenas com estudo "teórico" em livros e apostilas.

FIM DO TESTE

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Figura 4.44 – Resposta do Aluno A1.


b) Comente sobre a validade de atividades como esta para o processo de aprendizagem.

A validade é indiscutível pois nos dá a possibilidade de engajar o conteúdo ditático outros olhos, capazes de adquirir este conhecimento.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Houve, ao final, unanimidade entre os discentes com relação às suas opiniões sobre o auxílio que atividades realizadas deram visando a resolução do pós-teste, bem como a validade das mesmas para o processo de aprendizagem. Tal fato contextualiza a qualidade do que aqui está sendo proposto como metodologia de ensino para a sala de aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A oportunidade de fazer uma pesquisa que contempla a sua própria prática, fruto de suas experiências pessoais, é uma ocasião ímpar na vida de um docente. Trata-se de momento no qual este profissional tem a oportunidade de propor mudanças na forma como é conduzido tal processo, fruto de constatações que apontam para tais necessidades, tudo com o objetivo de proporcionar ao discente uma educação de qualidade.

Ao longo do presente trabalho procurou-se pesquisar sobre o entendimento que um grupo de alunos tem acerca da unidade radiano. Motivado pela forma como este assunto foi ensinado, quando ainda frequentava os bancos escolares, e de como o mesmo é abordado pelos livros didáticos da atualidade, este autor esteve preocupado em saber a realidade de como o aprendizado tem-se dado em sala de aula.

Percebeu-se, pela análise de livros didáticos, que a apresentação e uso da unidade radiano continua sendo introduzida aleatoriamente no cotidiano dos discentes sem que haja uma explicação condizente sobre sua origem e suas vantagens de utilização, fato esse atestado na descrição dos livros didáticos. Os mesmos não fazem uma interligação e um encadeamento dos assuntos da forma que considera-se satisfatória e coerente para a assimilação e aprendizagem por parte dos alunos conforme demonstrado no pré-teste aplicado.

Em relação às atividades desenvolvidas, é com satisfação que se percebe a evolução no conhecimento apresentado pelos alunos. Observa-se, claramente, o avanço em relação aos conceitos apresentados no que tange à escrita, em diversos momentos, de respostas mais coerentes que utilizam os conceitos matemáticos adequados ao conteúdo explorado. Cabe ressaltar que a realização da pesquisa com tal quantidade de alunos facilitou muito a sua condução, uma vez que viabilizou uma proximidade maior entre os lados envolvidos bem como uma verificação em perspectiva sobre a importância de um planejamento adequado do tempo em atividades didáticas desta natureza.

Cabe destacar, neste momento, que mesmo com a utilização de instrumentos como os propostos neste trabalho, a pessoa do professor e a utilização do livro didático permanecem, na visão do autor, inabaláveis. Cabe sim, ao docente, idealizar caminhos diferentes como forma de chegar à uma educação eficaz, o que não se pode imaginar, somente, com os elementos anteriormente citados.

Metodologias que extrapolam o ambiente da sala de aula podem ser fatores de entusiasmo, levando o aluno a buscar o conhecimento. Assim, o ensino escolar auxilia na formação de pessoas autônomas, que buscam o conhecimento por meio de materiais diversificados. E as TIC mostram-se, mais uma vez, instrumentos de grande valia neste sentido.

Porém, é interessante salientar que as atividades propostas não foram 100% eficazes. As mesmas revelaram lacunas, em relação a partes do conceito que fundamenta o uso da unidade radiano, que precisa ser trabalhado com mais incidência para que o conhecimento se complete. Mas o avanço idealizado como objetivo geral pode-se qualificar como inegável.

Como forma de aperfeiçoamento, sugere-se a aplicação de atividades de forma interdisciplinar com a Física. Tal disciplina faz uso de elementos angulares para modelar determinados fenômenos - o que poderia proporcionar a contextualização do que está sendo ensinado.

Além disso, questão do tipo "Quanto vale π graus em radianos?"pode ser um importante instrumento de verificação da correta apropriação do conhecimento que esteve em pauta.

Além disso, o autor visualiza, em função dos resultados obtidos, que as atividades elaboradas no software Geogebra que contemplam o conteúdo Razões Trigonométricas podem ser aplicadas isoladamente no 9º ano do EF. O conjunto da obra, sim, pode ser aplicado em todo o ano escolar do EM quando chegar o momento adequado.

Como resultado do que foi aprendido pelo autor ao longo dos dois anos em que frequentou as disciplinas do programa do PROFMAT, acredita-se que foi de extrema valia contextualizar a realidade de outras salas de aula e propor alterações na forma de conduzir as atividades de ensino. Como mestrando do programa, presenciei a responsabilidade de pautar minha conduta em sala de aula, não só procurando passar os conteúdos de forma mais aprofundada, como também entendendo ser necessário socializar tal visão e experiência.

Esta foi uma forma de contribuir para reflexão sobre a prática docente dos profissionais de ensino, além de gerar mudanças nas salas de aula – seja por meio do uso de ferramentas tecnológicas, seja por meio do questionamento do material utilizado em sala de aula, em especial os livros didáticos.

Hoje, é visível, na percepção do autor, a necessidade de pesquisas em que sejam levadas às escolas propostas metodológicas que auxiliem e facilitem, para professores e alunos, o processo de ensino e aprendizagem. A pesquisa educacional não pode estar vinculada, apenas, ao uso das instituições de ensino como locais de investigação.

Assim, identifica-se a possibilidade de uma continuidade desta pesquisa, em um programa de pós-graduação, nível Doutorado, no qual utilizaremos um “robô” que irá cumprir as atividades numa arena, utilizando um novo objeto de ensino, a Robótica Educacional, uma área de interesse e ação do autor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, J. X. **As concepções de professores ao ensinar quadriláteros nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e as possibilidades de contribuições das TIC.** 2015. 114 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física. Universidade Federal de Santa Maria, Santa maria, 2015.

AMARAL, M. P.; FRANGO, I. Um levantamento sobre pesquisas com o uso do software geogebra no ensino de funções matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 90–107, 2014.

BARROS, D. M. V. Formação continuada para docentes do ensino superior: o virtual como espaço educativo. **Revista Diálogo Educacional**, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, v. 7, n. 20, 2007.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. **Brasília: Secretaria da Educação Média e Tecnológica**, 2001.

____. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (pcn+): Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Brasília: Ministério da Educação**, 2006.

BRASIL, G. F. Lei de diretrizes e bases da educação nacional, nº 9394/96. **Brasília, MEC/SEMTEC. Disponível em: http://portal. mec. gov. br/arquivos/pdf/ldb. pdf. Acesso em**, v. 14, n. 02, p. 2011, 1996.

CARVALHO, R. N. D. **ESINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA ROBÔTICA: Movimento do Braço mecânico.** 2013. 53 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — PROFMAT - Universidade Federal de Rondônia, Rondônia, 2013.

CATANEO, V. **O uso do software Geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais**. 2011. 88 f. Monografia (Monografia de Especialização) — CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Orleans, 2011.

COSTA, G. L. M.; FIORENTINI, D. Mudança da cultura docente em um contexto de trabalho colaborativo de introdução das tecnologias de informação e comunicação na prática escolar. **Boletim de Educação Matemática**, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 20, n. 27, 2007.

EUCLIDES. **Os elementos. Trad. Irineu Bicudo.** São Paulo: UNESP, 2009.

FERREIRA, C. **O uso do Geogebra como ferramenta auxiliar na compreensão de resultados de geometria pouco explorados no ensino básico.** 2015. 76 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — PROFMAT - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

FIALHO, E. d. S. C. **Uma proposta de utilização do software Geogebra para o ensino de geometria analítica**. 2010. 121 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2010.

FONSECA, J. J. S. Metodologia da pesquisa científica. **Fortaleza: UEC,**, 2002.

GERHADT, M. **Descobrindo a pesquisa no ensino médio**. Santa Maria: UFSM, 2013.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. In: **Como elaborar projetos de pesquisa.** [S.l.]: Atlas, 2010.

GOMEZ, P. A. **A cultura escolar na sociedade neoliberal**. [S.l.]: Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na educação: teoria e prática. Porto Alegre. Vol. 1, n. 2 (abr. 1999), p. 73-88**, 1999.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of geogebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, Association for the Advancement of Computing in Education (AACE), v. 28, n. 2, p. 135–146, 2009.

JARDINETTI, J. R. B. Abstrato e concreto no ensino da matemática: algumas reflexões. **Bolema**, v. 11, p. 45–57, 1996.

JUNIOR, G. L. **Geometria Dinâmica com o Geogebra no Ensino de Algumas Funções.** 2013. 77 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — PROFMAT - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. [S.l.]: Papirus editora, 2007.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio, v.1**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MASETTO, M. T. Mediação pedagógica e o uso da tecnologia. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**, v. 13, p. 133–179, 2000.

MELO, T. O. **O software Geogebra como elemento mediador na formação do conceito de polígonos semelhantes: um estudo na perspectiva do ensino desenvolvimental**. 2013. 158 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática.Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Goiás, 2013.

MERCADO, L. P. L. **Novas tecnologias na educação: reflexões sobre a prática**. Alagoas: UFAL, 2002.

MIRANDA, D. F. d.; LAUDARES, J. B. Informatização no ensino da matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. **Zetetike**, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educacao, Circulo de Estudo, Memoria e Pesquisa em E, v. 15, n. 27, p. 71–88, 2007.

NETO, A. **Tópicos de Matemática Elementar.v.2.: Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, C. A. C. d. **Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente**. 2014. 77 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — PROFMAT, Universidade Federal de Campina Grande, 2014.

OLIVEIRA, G. P. de; FERNANDES, R. U. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, Pontificia Universidade Catolica de Sao Paulo PUC-SP, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 12, n. 3, 2010.

PEDROSO, L. W. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do sofware GeoGebra**. 2012. 271 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

PROCÓPIO, W. **O currículo de matemática do estado de São Paulo: sugestões de atividades com o uso do Geogebra**. 2012. 82 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2012.

PROFMAT. Site do mestrado profissional em matemática em rede nacional. In: **.** [s.n.], 2017. Acesso em 07 de julho de 2017. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/docs/Normas_de_Avaliacao_do_PROFMAT_23_05_2017.pdf>.

QUINTANEIRO, W. **Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio**. 2010. 154 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

REIS, S. R.; SANTOS, F. A. S.; TAVARES, J. A. V. O uso das tics em sala de aula: Uma reflexão sobre o seu uso no colégio vinícius de moraes/são cristóvão**. Simpósio Educação e Comunicação, 3º**, p. 17–19, 2012.

SAMPAIO, A. **Jornadas.mat. 9º ano.** [S.l.]: São Paulo: Saraiva, 2012.

SILVA, F. d.; BAYER, A. Os elementos da natureza no ensino de trigonometria. In: **Anais do VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Ulbra. Canoas**. [S.l.: s.n.], 2014.

SOFFA, M. M.; TORRES, P. L. O processo ensino-aprendizagem mediado pelas tecnologias da informação e comunicação na formação de professores on-line. In: **Anais do IX Congresso Nacional De Educação, EDUCERE**. [S.l.: s.n.], 2009.

SOUZA, M. **Professores e o uso do Geogebra: (re)construindo conhecimentos sobre funções**. 2016. 102 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Programa de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2016.

SUGUIMOTO, A. S. **Utilização do Geogebra como auxílio no ensino de funções**. 2013. 54 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — PROFMAT, UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, 2013.

UNESCO. Ciência e tecnologia com criatividade: análises e resultados. **CNPQ.Brasília, DF**, 2014.

WAGNER, E.; MORGADO, A. C. d. O.; CARMO, M. P. d. Trigonometria e números complexos. **Coleção do Professor de Matemática, SBM**, 2005.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE CONCEPÇÕES ACERCA DO CONCEITO DA UNIDADE RADIANO

Pesquisador (a): Márcio Rocha Lima - e-mail: ronagama@ig.com.br

Orientador(a): Professora Dra. Carmen Vieira Mathias (UFSM)

Caro responsável pelo Aluno(a)(NOME DO ALUNO), Venho por meio deste termo convidar o aluno (a) a participar, como voluntário, em uma pesquisa de Mestrado Profissional em Rede Nacional(PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Maria.

1. Natureza da pesquisa: a pesquisa tem como objetivo verificar se o uso do software Geogebra é um agente facilitador para a aprendizagem do conteúdo de funções trigonométricas.

2. Envolvimento na pesquisa: O aluno tem liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo para o mesmo. Sempre que quiser poderá pedir mais informações sobre a pesquisa por meio do e-mail do pesquisador do projeto.

3. Confidencialidade: todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e a orientadora terão conhecimento dos dados.

4. Benefícios: ao participar desta pesquisa o aluno não terá nenhum benefício financeiro direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga informações importantes sobre o processo de ensino e aprendizagem com a utilização de um objeto de aprendizagem, de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa ser utilizado em sala de aula por docentes e discentes.

5. Local e Horário: a pesquisa será realizada no Laboratório de Informática do CMSM, durante o contraturno, não havendo prejuízo para as atividades regulares. O planejamento inicial prevê a realização de 10 (dez) encontros).

6. Pagamento: o aluno não terá nenhum tipo de despesa para participar desta pesquisa, bem como nada será pago por sua participação.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa. Eu, (NOME DO RESPONSÁVEL PELO ALUNO) responsável pelo Aluno (NOME DO ALUNO) concordei que o mesmo participe, de forma voluntária do projeto de pesquisa.

Assinatura responsável:

APÊNDICE B – PRÉ-TESTE

Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Prezado aluno,

É com imensa satisfação que apresentamos o presente instrumento de pesquisa. O mesmo é parte integrante do projeto "**Uma investigação sobre as concepções que um grupo de alunos possui acerca do conceito da utilização da unidade radiano no estudo das Funções Trigonométricas"** que visa demonstrar, com auxílio do software *Geogebra*, a importância e a necessidade do uso da unidade ***radiano*** no estudo das Funções Trigonométricas.

O uso da Trigonometria e das Funções Trigonométricas remontam há milhares de anos. Sua importância repousa na necessária utilização de elementos trigonométricos para o cálculo de distâncias e para a modelagem de fenômenos periódicos.

Porém, o que se verifica na prática, mesmo com a inclusão de tais conteúdos na grade da disciplina de Matemática do Ensino Médio, é que há um hiato entre o que, geralmente, é ensinado e o que é aprendido pelos alunos.

Por este motivo desenvolvemos uma série de atividades, iniciando por este questionário, que busca identificar subsídios que validem o uso do software Geogebra como um objeto de aprendizagem eficaz no ensino de Funções Trigonométricas.

Com base no que foi estudado por você ao longo do ano de 2016, responda as questões abaixo.

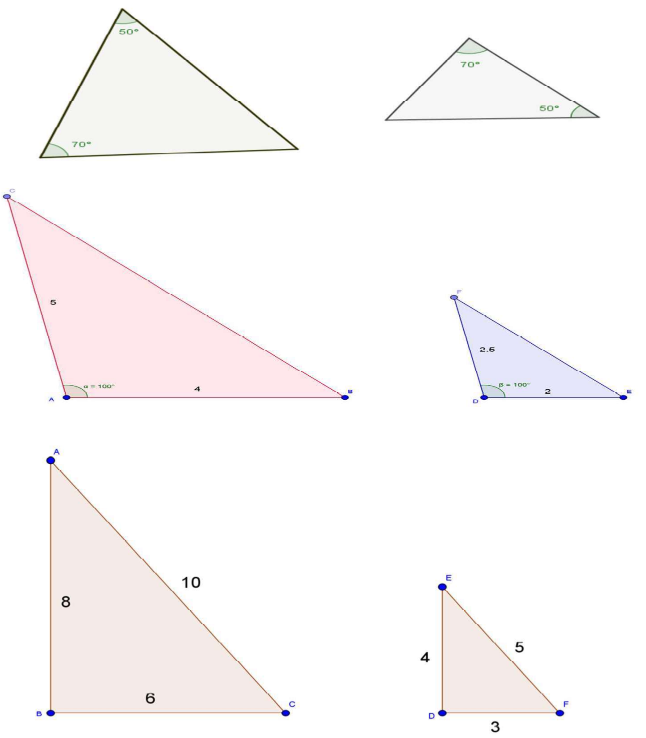
Lembramos que o que for lançado pelo aluno(a) não será objeto de nota ou de quaisquer tipo de avaliação por parte do CMSM.

QUESTÕES

1) Em seu entendimento, o que é ângulo?

2) Responda as questões abaixo:

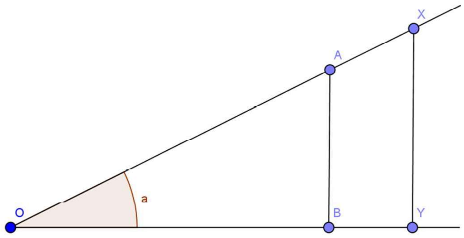
a) Nos casos abaixo os dois triângulos são semelhantes? Justifique sua resposta:



b) Quais as características que dois triângulos devem possuir para que sejam semelhantes?

3) Em sua opinião, a semelhança de triângulos, em especial nos triângulos retângulos, influencia os conceitos relativos às Relações Trigonométricas Fundamentais? Como?

4) Considere o triângulo AOB, retângulo em B, sendo **"a"** a medida do ângulo AOB. Seja XY um segmento genérico perpendicular a semirreta OB, como mostra a figura:



Os triângulos AOB e XOY são semelhantes? Justifique:

Justifique por que, para quaisquer que sejam os pontos X, pertencentes a semi-reta AO, e Y, pertencente à semi-reta OB, com segmento XY perpendicular à semi-reta OB, são válidas as relações:

$\frac{XY}{OY} = \frac{AB}{OB} = k_1$, onde k_1 é uma constante, a qual denominamos_____________

$\frac{XY}{OX} = \frac{AB}{OA} = k_2$, onde k_2 é uma constante, a qual denominamos_____________

$\frac{OY}{OX} = \frac{OB}{OA} = k_3$, onde k_3 é uma constante, a qual denominamos_____________

5) Você conhece alguma aplicação prática das Relações Trigonométricas Fundamentais? Se sim, cite exemplos.

6) Em sua opinião, existe alguma relação entre o conceito de Arcos e Cordas de uma circunferência e as Relações Trigonométricas Fundamentais? Justifique a sua resposta.

7) Em sua opinião, existe alguma associação entre as Relações Trigonométricas Fundamentais e o conceito do Círculo Trigonométrico? Justifique sua resposta.

8) Em sua opinião existe alguma diferença entre π e π rad?

9) Responda as questões abaixo:

a) O que significa a constante π?

b) Qual o valor de π normalmente utilizado na resolução dos exercícios?

c) Você conhece alguma aplicação prática para π? Cite exemplos.

10) Responda as questões abaixo:

a) O que você entende por π rad?

b) Qual o valor normalmente atribuído a π rad na resolução de exercícios?

c) Você conhece alguma aplicação prática para π rad ? Cite exemplos.

11) Determine:

a) sen(30º)

b) sen($\frac{\pi}{2}$)

c) sen(2)

12) Para que possa ser considerada completa, a definição de uma função **"f"** deve conter, obrigatoriamente, os seguintes elementos:

a) Domínio, contradomínio e variáveis.

b) Variáveis, lei de formação e domínio.

c) Lei de formação, domínio e contradomínio.

d) Domínio e contradomínio, somente.

13) Você conhece alguma aplicação prática das Funções Trigonométricas? Se sim, cite exemplos.

14) Considere **"g"** uma função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $g(x) = \text{sen}(x)$. Quais são os valores de $g(30^o)$, $g(\frac{\pi}{2})$ e $g(2)$?

APÊNDICE C – ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Prezado aluno (a) ____ (nome)

Data ___/___/______

Apresentamos as atividades 1 e 2 – atividades de construção - para você solucionar utilizando os comandos do software “Geogebra”.

ATIVIDADE 1

- Usando a ferramenta “Tartaruga” realize um deslocamento a partir da origem do Plano Cartesiano (0,0) até um ponto do plano, aleatoriamente, escolhido por você, utilizando um único segmento.

Sugestão: use também a ferramenta “Ângulo” e “Distância”.

ATIVIDADE 2

- Faça com que a ferramenta “Tartaruga” realize um deslocamento entre dois pontos aleatoriamente escolhidos no Plano Cartesiano - a partir de um único segmento - e meça este último.

Faça aqui as observações / sugestões que você achar conveniente:

Prezado aluno:

Ao término da primeira e segunda atividades no software **"Geogebra"** gostaria de obter algumas informações que servirão de subsídios para a avaliação da pesquisa em andamento.

Em relação às atividades 1 e 2 concluídas:

a) Quais ideias foram trabalhadas a partir da atividade conduzida?

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?

c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos?

d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?

Prezado aluno (a) ____ (nome)

Apresentamos a você as atividades 3, 4 e 5 – atividades de manipulação - que serão solucionadas com auxílio do software "Geogebra".

ATIVIDADE 3

- Estudando os casos de semelhança de triângulos constantes no material disponibilizado e, valendo-se das "Caixas para Exibir/Esconder objeto", simule tais situações na atividade 3 disponibilizada em https://www.geogebra.org/m/G5DN4d6z . Verifique as demais medidas de lados e ângulos dos triângulos estudados. Após, conclua sobre as relações que podem ser estabelecidas.

ATIVIDADE 4

- A partir das conclusões obtidas na atividade 3, explore a atividade 4, disponível em https://www.geogebra.org/m/vqG6UQ4E, e estabeleça relações nos triângulos retângulos semelhantes. Analise e conclua sobre a validade das mesmas em função das medidas dos lados dos triângulos constantes na própria atividade. Verificar se o valor de **"r"** interfere nas relações obtidas.

ATIVIDADE 5

- Explore a atividade 5 (https://www.geogebra.org/m/Sf5jntDw) e, manipulando, quando achar conveniente, os valores de **"a"** e a posição do vértice **C**, analise os valores que aparecem na janela para seno, cosseno e tangente dos ângulos, concluindo sobre a relação estabelecida entre os valores obtidos e a semelhança dos triângulos.

Faça aqui as observações / sugestões que você achar conveniente:

Prezado aluno:

Ao término da terceira, quarta e quinta atividades no software **"Geogebra"** gostaria de obter algumas informações que servirão de subsídios para a avaliação da pesquisa em andamento.

Em relação às atividades 3, 4 e 5 concluídas:

a) Quais ideias foram trabalhadas a partir da atividade conduzida?

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?

c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos?

d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?

Prezado aluno (a) ____

(nome)

Apresentamos a você as atividades 6, 7 e 8 – atividades de construção e manipulação - para que as solucione com auxílio do software “Geogebra”.

ATIVIDADE 6

- Esta é uma atividade de construção.

- Manipulando, livremente, as ferramentas do software, construa uma atividade que possibilite determinar (ou estimar) o valor de π.

ATIVIDADE 7

- Esta é uma atividade de manipulação.

- Com base nas conclusões obtidas até o momento, explore a atividade 7, disponível em https://www.geogebra.org/m/yuxhPYQ3. Manuseando inicialmente o controle deslizante **“n”**, compare o comprimento da circunferência traçada com o perímetro do polígono regular inscrito na mesma. Determine uma relação que pode ser estabelecida entre esses dois valores. Posteriormente, modifique a posição do ponto **B** da circunferência e veja se a relação obtida permanece.

ATIVIDADE 8

- Esta é uma atividade de manipulação.

- Abrir o link correspondente a atividade 8: https://www.geogebra.org/m/yGpcS2ue . Observe que estão disponíveis 3 circunferências de raios 1; 2,5 e 4 unidades de comprimento, respectivamente. Manipule a posição do ponto **C**, de forma a estabelecer sucessivos valores para os arcos de circunferência traçados em azul, verificando as relações que surgem na janela de visualização. Analise, por fim, os valores obtidos para as 3 circunferências, simultaneamente. Clique na Caixa “Valor de α” para concluir sobre o que foi mostrado/obtido em relação ao conceito de radiano.

Faça aqui as observações / sugestões que você achar conveniente:

Prezado aluno:

Ao término da sexta, sétima e oitava atividades no software **"Geogebra"** gostaria de obter algumas informações que servirão de subsídios para a avaliação da pesquisa em andamento.

Em relação às atividades 6, 7 e 8 concluídas:

a) Quais ideias foram trabalhadas a partir da atividade conduzida?

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?

c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos?

d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?

Prezado aluno (a) ____

(nome)

Data ___/___/______

Apresentamos a você as atividades 9 e 10 - atividades de construção - que serão solucionadas com o uso do software “Geogebra”.

ATIVIDADE 9

- Usando, livremente, as ferramentas do software, construa um triângulo qualquer na janela de visualização do software e estabeleça sucessivas semicircunferências que apresentem como pontos extremos os lados do triângulo (utilizar obrigatoriamente os 3 lados do triângulo e fazer mais de 1 arco em cada lado).
- Analise a “imagem” construída e identifique a existência (ou não) de uma ou mais circunferência(s) que circunscreve(m) o triângulo determinado.

ATIVIDADE 10

- Com base nas conclusões obtidas até o momento, principalmente no contexto do conceito de radiano, escolher 3 pontos aleatoriamente na janela de visualização e fazer com que a ferramenta “Tartaruga” trace a circunferência que passa por tais pontos. Meça o comprimento da circunferência construída.
- Comente sobre a viabilidade (ou não) de realizar a atividade em relação ao que foi estudado até o momento.

Faça aqui as observações / sugestões que você achar conveniente:

Prezado aluno:

Ao término da nona e décima atividades no software **"Geogebra"** gostaria de obter algumas informações que servirão de subsídios para a avaliação da pesquisa em andamento.

Em relação às atividades 9 e 10 concluídas:

a) Quais ideias foram trabalhadas a partir da atividade conduzida?

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?

c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos?

d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?

Prezado aluno (a) ____ (nome)
Data ___/___/______

Apresentamos a você as atividades 11, 12 e 13 - atividades de manipulação e conduzida - para você solucionar utilizando o software “Geogebra”.

ATIVIDADE 11

- Explore a Atividade 11 em https://www.geogebra.org/m/nttKVR8V e, manipule livremente os controles deslizantes **“r”** e **“t”.** Auxiliado pelo professor, verifique as consequências deste movimento no que tange ao tamanho do arco e ao ângulo correspondente obtido, bem como identifique os elementos que embasam as definições da “Função de Euler”.

ATIVIDADE 12

- Manipulando o ponto **“P”** da Atividade 12, disponível em https://www.geogebra.org/m/CcThdmP9, identifique as consequências para o valor da função seno à medida que o arco de circunferência correspondente é “desenrolado”.

ATIVIDADE 13

- Abra o link correspondente a Atividade 13 (em https://www.geogebra.org/m/jBUt7wcw) e analise a função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$à medida que os valores de “x” se aproximam arbitrariamente de 0 (zero). Verifique o que sepode concluir sobre a validade desta constatação para arcos tomados numa unidade diferente de radiano.

Prezado aluno:

Ao término da décima primeira, décima segunda e décima terceira atividades no software **“Geogebra”** gostaria de obter algumas informações que servirão de subsídios para a avaliação da pesquisa em andamento.

Em relação às atividades 11, 12, 13 concluídas:

a) Quais ideias foram trabalhadas a partir da atividade conduzida?

b) O uso do software ajudou para o entendimento dos conteúdos trabalhados? Como?

c) A abordagem do conteúdo com o uso do software facilita a aprendizagem em comparação ao ensino que utiliza, basicamente, os livros didáticos?

d) O conteúdo trabalhado, com o uso do software, na sua opinião, facilitou sua aprendizagem?

APÊNDICE D – PÓS-TESTE

Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Prezado aluno:

Após a apresentação e execução das tarefas, gostaríamos que você, aluno participante, se posicione criticamente em relação às atividades realizadas.

Suas respostas serão importantes como forma de avaliar e mensurar o que foi feito visando melhorar o processo de ensino dos conteúdos abordados.

I. Em relação ao software Geogebra:

a) Você conhecia e já havia utilizado o mesmo?

b) Você recomenda o uso do software como ferramenta que auxilia no processo de ensino?

c) O uso de uma atividade diferenciada foi motivadora? Por quê?

II. Em relação aos conteúdos trabalhados:

1) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 1 e 2, defina ângulo.

2) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 3, 4 e 5, responda:

a) Quais são os dois principais pontos que norteiam o conceito de semelhança de figuras planas?

b) Quais são os três casos clássicos que estabelecem a semelhança entre triângulos?

c) A semelhança entre triângulos está presente no conceito de Razões Trigonométricas? Justifique sua resposta.

3) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 6, 7 e 8, responda como se determina o valor de **π** e o que **π rad** (radianos) representa, bem como se há diferença na utilização da constante **π** na segunda situação (**π rad)**.

4) Baseando-se no que foi visto nas Atividades 9 e 10 responda como você conclui, hoje, sobre a importância da inserção da unidade rad (radianos) no contexto da Trigonometria e das Funções Trigonométricas.

5) Considere **"g"** uma função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $g(x) = \cos(x)$. Quais são os valores de $g(60^o)$, $g(\pi)$ e $g(2)$?

III. Análise do pós-teste:

a) As atividades realizadas com o uso do software auxiliaram para a resolução do pós-teste?

b) Comente sobre a validade de atividades como esta para o processo de aprendizagem.

APÊNDICE E – COMANDOS DO GEOGEBRA

Atividade	Linha de Comando	Ação esperada
1	T=Tartaruga[ ]	Cria a variável tartaruga
	α=Ângulo[C, B, A]	Determina o ângulo entre os três pontos elencados
	TartarugaIrParaEsquerda[T, α]	Variável tartaruga criada faz um giro de α graus para a esquerda.
	d=Distância[T, A]	Determina a distância entre a variável tartaruga e o ponto elencado
	TartarugaIrParaFrente[T, d]	A variável tartaruga se desloca de seu ponto original por *default* até o ponto elencado.
2	C=(x(A)+1, y(A))	Cria o ponto C a partir das coordenadas do ponto A
	DefinirVisibilidade[C,1,false]	Define a visibilidade do ponto C
	α=Ângulo[B,A,C]	Determina o ângulo entre os três pontos elencados
	T=Tartaruga[]	Cria a variável tartaruga
	DefinirCoordenadas[T,x(A), y(A)]	Define as coordenadas para posicionamento da variável tartaruga
	TartarugaIrParaDireita[T, α]	Variável tartaruga criada faz um giro de α graus para a direita.
	β=Distância[A,B]	Determina a distância entre a os pontos elencados
	TartarugaIrParaFrente[T, β]	A variável tartarugo se desloca de seu ponto original por *default* até o ponto elencado.
	Texto[β, (x(B)+0.5,y(B))]	Mostra o valor da variável β na posição determinada
	IniciarAnimação[]	Inicia a animação a partir do uso da ferramenta botão
	Apagar[T], [A], [B] e [C]	Apaga os elementos elencados

Atividade	Linha de Comando	Ação esperada
10	Apagar[T]	Apaga a variável elencada
	T=Tartaruga[ ]	Cria a variável tartaruga
	DefinirCoordenadas[T, x(A),y(A)]	Define as coordenadas para posicionamento da variável tartaruga
	TartarugaIrParaDireita[T,Ângulo [CentroDoTriângulo[A, B, C, 3], A, (x(A),y(A)+1)]]	Variável tartaruga faz um giro específico levando em consideração o circuncentro do triângulo formando a partir dos 3 pontos escolhidos no início da atividade
	Repetir[360,TartarugaIrParaFrente [T,Distância[A,CentroDoTriângulo [A, B, C, 3]] pi/180], TartarugaIrParaEsquerda[T, pi/180]]	A variável tartaruga anda uma distância em radiano correspondente ao valor de 1 grau e faz um giro em radianos correspondente também ao valor de 1 grau. Tudo isso sendo repetido 360 vezes, o que completa a volta da circunferência
	d=Distância[A, CentroDoTriângulo[A, B, C, 3]] pi/180	Determina a distância do deslocamento correspondente ao ângulo de 1 grau
	e=360*d	Determina o valor do comprimento da circunferência percorrida pela variável tartaruga
	Texto[e,(x(A)+0.5,y(A))]	Mostra o valor da variável calculada imediatamente acima na coordenada determinada
	IniciarAnimação[ ]	Inicia a animação a partir do uso da ferramenta botão
	c=Círculo[A,B,C]	Define o círculo baseado em três pontos
	DefinirCor[c, "vermelho"]	Define a cor do círculo
	f=Perímetro[c]	Determina o comprimento da variável
	Texto[f,(x(B)+0.5,y(B))]	Exibe a variável imediatamente anterior na coordenada determinada
	Apagar[A], [B], [C] e [T]	Apaga as variáveis elencadas