Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí

Unidade Acadêmica Especial de
Ciências Exatas e Tecnológicas

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Trigonometria: da origem à aplicações no esporte

Amarildo de Lima Oliveira Júnior

Jataí

2017

sibi sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Amarildo de Lima Oliveira Júnior

Título do trabalho: Trigonometria: da origem à aplicações no esporte

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Amarildo de Lima O. Júnior
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Adriana Araujo Cintra
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 24 / 11 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Amarildo de Lima Oliveira Júnior

Trigonometria: da origem à aplicações no esporte

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.
Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática.
Orientadora: Prof. Dra. Adriana Araujo Cintra

Jataí

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

de Lima Oliveira Júnior, Amarildo
Trigonometria: da origem à aplicações no esporte [manuscrito] / Amarildo de Lima Oliveira Júnior. - 2017.
LXVI, 66 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Adriana Araujo Cintra.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, , Jataí, 2017.

Inclui fotografias, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Trigonometria. 2. Esporte. 3. Aprendizagem. I. Araujo Cintra, Adriana, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 **www.jatai.ufg.br/matematica**

PROFMAT

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Amarildo de Lima Oliveira Júnior – Aos vinte e seis dias do mês de outubro do ano de dois mil e dezessete (26/10/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Profa. Dra. Adriana Araújo Cintra - Orientadora, Prof. Dr. Rodrigo Alves Moreira e Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Trigonometria: da origem à aplicações no esporte",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pela Presidente da Banca, Profa. Dra. Adriana Araújo Cintra, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, Secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da UFG - Regional Jataí, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Adriana Araujo Cintra

Profa. Dra. Adriana Araújo Cintra - CPF 705.549.431-15
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente da Banca

Rodrigo Alves Moreira

Prof. Dr. Rodrigo Alves Moreira - CPF 833.490.571-87
IF Goiano – Campus Iporá
Membro externo

Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira - CPF 991.219.991-04
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro interno

Amarildo de Lima Oliveira Júnior graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás - Unidade de Iporá; Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, durante o programa foi bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Dedico este trabalho à toda minha família, em especial aos meus pais Amarildo e Madalena, aos meus queridos irmãos Andrielle, Alberto, Andressa e Amanda e a minha namorada Loana. A minha madrinha Marilda e minha orientadora Adriana.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado guiando meus passos, abençoando nas minhas escolhas. Aos meus pais Amarildo de Lima Oliveira e Madalena Souza Silva de Oliveira, por ter me dado educação e que, no decorrer da minha vida, proporcionaram-me, além de extremo carinho e amor, os conhecimentos da integridade, da perseverança e de procurar sempre em Deus à força maior para o meu desenvolvimento como ser humano, por estarem me apoiando todos os dias de minha vida nos momentos de felicidades e nos momentos difíceis. Aos meus queridos irmãos Andrielle, Alberto, Andressa e Amanda que estão comigo todos os dias na alegria e na tristeza e ao meu amor Loana Francielle Alves de Sousa que além de me fazer feliz, me deu forças e incentivo no decorrer do meu trabalho. A minha madrinha Marilda de Lima Oliveira Ferreira, que de forma direta, contribuiu com seus conhecimentos me ajudando bastante na conclusão deste mesmo.

Aos meus eternos amigos que ao longo destes anos, contribuíram de forma significativa na minha carreira acadêmica. Foram bastantes momentos juntos, que sempre serão guardados na memória. Carlos, Lucas, Marco Aurélio, Jânio, Kepler, Adão, Flávio, Wecsley, Lucinda e Wellington, esses estiveram comigo durante todo o tempo de Mestrado, a todos vocês meus amigos um muito obrigado.

Meus professores, que desde as séries iniciais até os dias atuais, me auxiliam nos meus estudos e na minha vida pessoal. A minha orientadora Adriana Araujo Cintra, que sempre acreditou em mim, depositou toda confiança no meu trabalho ao aceitar o convite para me orientar, por acreditar no meu potencial, pela sua enorme paciência e compreensão comigo, serei eternamente grato. Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí-Go, que foram importantes na minha vida acadêmica e contribuíram para que me tornasse um discente melhor. A todos meus sinceros agradecimentos e muito obrigado por fazerem parte da minha vida.

Tenho a impressão de ter sido uma criança a
beira-mar, divertindo-me em descobrir uma
pedrinha mais lisa ou concha mais bonita que
as outras, enquanto o imenso oceano de
verdade continua misterioso diante de meus olhos."
Isaac Newton

Resumo

Este trabalho analisa situações e possibilidades no ensino aprendizagem de matemática para alunos do Ensino básico mediadas pelo professor com o uso de aplicações trigonométricas no esporte por meio da interação capaz de conduzir os aprendizes à aprendizagens significativas por meio de utilização de situações do nosso cotidiano. A problemática que motivou esta pesquisa foram as seguintes questões: Porquê é necessário saber a história dos ramos da Matemática, em especial da Trigonometria? Qual a importância do professor no ensino aprendizagem da Trigonometria? É possível aplicarmos a Trigonometria no Esporte? Diante destas perguntas o trabalho tem objetivo de discutir a relevância desse ramo matemático na vida do educando, à aplicação do mesmo em situações problemas do esporte, como futebol e lançamento de dardo, além de colocar em debate a inclusão do uso da História da Matemática como recurso didático no processo de ensino aprendizagem, buscando analisar suas potencialidades como instrumentos propícios à contextualização e às aprendizagens significativas deste conteúdo matemático em sala de aula. A relevância do trabalho está no fato de procurar chamar a atenção das pessoas envolvidas no processo educacional, na utilização da Trigonometria em várias áreas, em especial, no esporte e buscar um novo olhar para o ensino da matemática e incentivar a busca de iniciativas para melhorar e solucionar os problemas que foram apresentados em relação ao ensino aprendizagem da Trigonometria.

Palavras-chave Trigonometria. Esporte. Aprendizagem.

Abstract

This work analyzes situations and possibilities in the teaching of mathematics for students of the Basic Education mediated by the teacher with the use of trigonometric applications in the Sport through the interaction capable of leading learners to meaningful learning through the use of every Day situations. The problems that motivated this research were the following questions: Why is it necessary to know the history of the branches of Mathematics, especially Trigonometry? How important is the teacher teaching Trigonometry? Is it possible to apply Trigonometry in Sport? In view of these questions the objective of this work is to discuss the relevance of this mathematical branch in the life of the student, to the application of the same in situations of sports problems, such as soccer and dart throwing, and to debate the inclusion of the History of Mathematics as a didactic resource in the process of teaching learning, see king to analyze their potential as tools conducive to contextualization and to the meaningful learning of this mathematical content in the classroom. The relevance of the work lies in the fact of see king to draw the attention of the people involved in the educational process, in the use of Trigonometry in several areas, especially in sports and to seek a new look at teaching mathematics and encourage the search for initiatives to improve and solve the problems that were presented in relation to teaching learning of trigonometry.

Keywords Trigonometry. Sport. Learning.

Lista de Figuras

1.1 Seqt Egípcio 21
1.2 Gnômon - Relógio de Sol 23
1.3 Método utilizado por Eratóstenes de Cirene para medir o comprimento da Terra. 24
1.4 Almagesto de Ptolomeu 25
1.5 O “jiva”hindu 26
1.6 Regiomontanus 27
1.7 Ângulo formado por mãos que apontam para mesma estrela 28
1.8 groma egípcia 29
1.9 Heron de Alexandria 29
1.10 Dioptra 30

2.1 Semelhança de triângulos 33
2.2 Triângulos retângulos semelhantes 34
2.3 Triângulo retângulo em A 34
2.4 Triângulo Retângulo ABC 35
2.5 Rampa 37
2.6 Triângulo retângulo em A 39
2.7 Movimento balístico da trajetória de uma bola 41
2.8 Movimento balístico 42

3.1 cobrança de pênalti 46
3.2 cobrança de pênalti - 2 47
3.3 finalização de longa distância 50
3.4 trajetória da bola 52
3.5 O gol que Pelé não fez. 53
3.6 Local de competição do Lançamento de Dardo 55

3.7 Representação do Lançamento de Dardo 55
3.8 Componentes de Velocidade 56

Lista de Tabelas

3.1 Tábua Trigonométrica 51
3.2 Coordenadas cartesianas do lançamento de um dardo 61

Sumário

Introdução **16**

1 Trigonometria e seu surgimento **20**

1.1 Grécia - o desenvolvimento da trigonometria 23

1.2 Ângulo 28

2 Trigonometria - Definições e relações **31**

2.1 Ensino da Trigonometria 32

2.2 Relações Fundamentais 38

2.3 Trigonometria aplicada na Física - Movimento Balístico 41

3 O esporte através da visão trigonométrica **44**

3.1 A arte do futebol com a ciência da trigonometria 45

3.2 Lançamento de Dardo 54

4 Considerações Finais **62**

Introdução

É notável que a Matemática existe em todos os campos do conhecimento, sendo assim uma base que proporcionou o desenvolvimento das outras ciências. Este trabalho tem como interesse analisar o início e o crescimento da trigonometria, o surgimento das relações trigonométricas no triângulo retângulo, aplicações da trigonometria no esporte, bem como mostrar aplicações no ensino de Trigonometria dirigido ao Ensino Médio.

A Trigonometria é um conteúdo matemático importantíssimo para que o aluno possa aprofundar conceitos de geometria, entre outros. Ainda podemos encontrar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) a ênfase do estudo de trigonometria, em que é salientado seu potencial no que tange ao desenvolvimento de habilidades e competências, conforme segue:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico da identidades e equações.[...] ([2], p. 257)

De acordo com [10], a palavra Matemática é de origem grega, derivada dos verbos "conhecer, aprender "e a palavra **mathema** significa "o que é ensinado ", ou seja, todas as maneiras de conhecimento.

Assim, a motivação deste trabalho está na convicção da relevância que o referido estudo apresenta para o ensino da matemática. Além disso, é imprescindível o interesse do estudo histórico no surgimento de um conceito, pois evidencia os desafios epistemológicos do processo de construção do saber matemático.

Desta forma, a observação dos obstáculos vivenciados pelos grandes matemáticos no passado nos auxilia a entender o porquê de os alunos dos dias atuais apresentam dificuldades. Quando estudamos a história da trigonometria, podemos observar o surgimento e o desenvolvimento da Análise e da Álgebra, áreas da Matemática nela englobadas de maneira introdutória. Na antiguidade, áreas como Astronomia, Agrimensura e Navegação, foram primordiais para o desenvolvimento da trigonometria, pois as necessidades práticas dessas áreas estavam ligadas a esse ramo da matemática.

Nesse contexto, a história desta ciência inicia-se como uma ferramenta importantíssima para a explicação de vários porques matemáticos. Assim [14], afirma em seu estudo

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam para a necessidade de relacionar etapas da História da Matemática com a evolução da humanidade, e do estudo da Trigonometria estar ligado às suas aplicações, como evidenciar o cálculo de distâncias inacessíveis e a construção de modelos de fenômenos periódicos, amenizando os cálculos algébricos. (p. 8)

É de suma relevância que o professor estude a história dos conceitos matemáticos, pois assim poderá ensinar ao aluno a sua importância e a aplicabilidade no nosso cotidiano. Portanto, a história da trigonometria é muito rica, desde seu princípio até os dias atuais e o desenvolvimento da humanidade passa pelo desenvolvimento deste ramo matemático.

No que tange ao ensino da Trigonometria nas escolas, podemos apurar (ou constatar) que há, entre os estudantes e até mesmo professores, uma indagação de como estudar, entender e ensinar esse conteúdo. Assim por diversas vezes, fica notório um certo desinteresse ou uma desmotivação para a aprendizagem da Trigonometria, por parte do aluno.

Quando o aluno entra em contato com a história da Trigonometria, ele observa o surgimento e a evolução deste ramo da matemática devido às necessidades de povos da antiguidade, podendo entender que houve um caminho longo até chegar ao que temos conhecimento nos dias atuais. Generalizando, devemos, contextualizar a Trigonometria a partir do ponto de vista histórico, pois além de impulsionar o aprendizado do aluno permite o aprimoramento e enriquecimento do educador.

Com o decorrer dos anos a educação matemática foi se construindo e aperfeiçoando como campo de pesquisa, investigando situações e estabelecendo relações com o cotidiano, sendo organizada por teorias utilizadas atualmente. Por conseguinte é possível perceber a importância do conhecimento matemático em situações simples do nosso dia a dia, como por exemplo, em aplicações na área do esporte como futebol, basquete, atletismo entre outros. Os conceitos matemáticos têm sua relevância em todos os fatores relatados e são constantemente utilizados, tornando-se, assim, essenciais para a vida de diversas pessoas.

Segundo [15], “o indivíduo necessita de uma formação adequada também à sua atuação no mundo atual. Forma se o aluno para suas necessidades atuais que irão, de certa forma, refletir na situação futura, onde suas ações talvez sejam mais relevantes e significativas”. Ademais, o domínio de certos conceitos matemáticos tem um alcance de transformar o aluno de forma que ele consiga tomar atitudes para gerar uma confiança significativa, tornando-o capacitado e encorajado para enfrentar desafios que talvez não fosse capaz de superar sem tais conhecimentos. Cria também uma visão diferenciada da realidade, permitindo a compreensão de códigos e regras que modelam a linguagem matemática.

Nesse contexto construtivista, o cotidiano da sala de aula passa por um novo paradigma, a iniciar pelo professor, que deixa de ser o foco do saber, assim tendo principal tarefa de nortear as discussões dos alunos diante de situações problemas elaboradas e aplicadas em sala de aula.

Mesmo com todo este contexto favorecendo o ensino de trigonometria em sala de aula, ainda surgem algumas dificuldades. Para tantos alguns questionamentos norteiam este trabalho, como por exemplo:

- **Porque é necessário saber a história dos ramos da Matemática, em especial da Trigonometria?**
- **Qual a importância do professor no ensino aprendizagem da Trigonometria?**
- **É possível aplicarmos a Trigonometria no Esporte?**

Em busca de respostas para estas perguntas, este trabalho tem como objetivo analisar a realidade da matemática na escola e verificar a importância da Trigonometria no cotidiano.

Em vista disso, o referido trabalho está dividido em três capítulos, sendo que no primeiro é abordada a história e surgimento da Trigonometria, apresentando a grande necessidade de ter esse ramo da matemática como base do conhecimento geral. Busca, ainda, mostrar seu desenvolvimento e a importância dos ângulos no seu desenvolvimento.

No capítulo 2 é apresentado o ensino da Trigonometria, as necessidades do professor no processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo matemático, além de relatar algumas razões e relações trigonométricas no nosso dia a dia.

A aplicação da Trigonometria no esporte é apresentada no terceiro capítulo. Esta etapa possibilitou a compreensão deste conteúdo no desenvolvimento do esporte. Podemos relatar, ainda, várias situações em que, cuja resolução, a trigonometria é fundamental, além de relatar o início da história do futebol e seu desenvolvimento.

Assim, esta pesquisa se justifica pela necessidade de colocar em debate, não só as dificuldades de aprendizagem em relação à trigonometria, muito comuns entre os alunos, como também pela busca de fazer uma análise do uso da trigonometria no esporte, possibilitando tornar as aprendizagens trigonométricas mais significativas, podendo, dessa forma, servir como material de consulta para atuais e futuros professores que poderão dar continuidade a ela ou usar as discussões aqui realizadas para aprofundar a reflexão sobre o ensino-aprendizagem da trigonometria.

Capítulo 1

Trigonometria e seu surgimento

A Trigonometria é um dos conteúdos mais importantes da ciência matemática, para explorar o desenvolvimento deste tema, devemos debater sobre o significado da palavra **trigonometria**, que é o estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos. Euclides de Alexandria, um dos matemáticos mais importantes de toda a história, escreveu Os Elementos, uma obra conhecida mundialmente, nesta ele apresentou alguns conceitos trigonométricos, mas através de formas geométricas. Não se sabe ao certo se foram os gregos que criaram o conceito de ângulo, porém os mesmos fizeram um estudo aprofundado das relações entre ângulos - arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas. Arquimedes de Siracusa desenvolveu um trabalho no qual permitia calcular o perímetro de um círculo, dado o respectivo raio, isto no século III a.C..

Quando estudamos a história da trigonometria observamos o surgimento e o desenvolvimento da Álgebra e da Análise.

A trigonometria não tem uma data específica sobre sua origem, mas assim como outras áreas da matemática, esta surgiu a partir de diversos estudos: astronomia, navegação e agrimensura que foram importantíssimos para o desenvolvimento dessa área. Alguns documentos, de aproximadamente três mil anos dão indícios de problemas envolvendo trigonometria. No Papiro Rhind, foram encontrados problemas relacionados com a cotangente. Na tábua cuneiforme Plimpton 322, foram localizados problemas envolvendo secante, essa tábua foi escrita pelos babilônios entre 1900 e 1600 a. C. .

No Egito, o Papiro Ahmes, mais conhecido como Papiro Rhind, contém 84 problemas, dentre esses, quatro, citam o seqt de um ângulo. Ahmes não foi muito claro ao explicar o significado desta palavra, porém pensa-se que o seqt de uma pirâmide seja equivalente à cotangente do ângulo OMV, conforme figura 1.1. [3]

Vamos analisar o exemplo a seguir que nos permite observar o seqt de uma pirâmide.

Na figura a seguir temos que o segmento $\overline{OV}$ e $\overline{OM}$ são perpendiculares, ou seja, formam ângulos retos na intersecção. Supondo que $\overline{OV}$ seja igual 40 e $\overline{OM} = 80$, temos que:

$$seqt = \frac{80}{40},$$

logo,

$$seqt = 2.$$

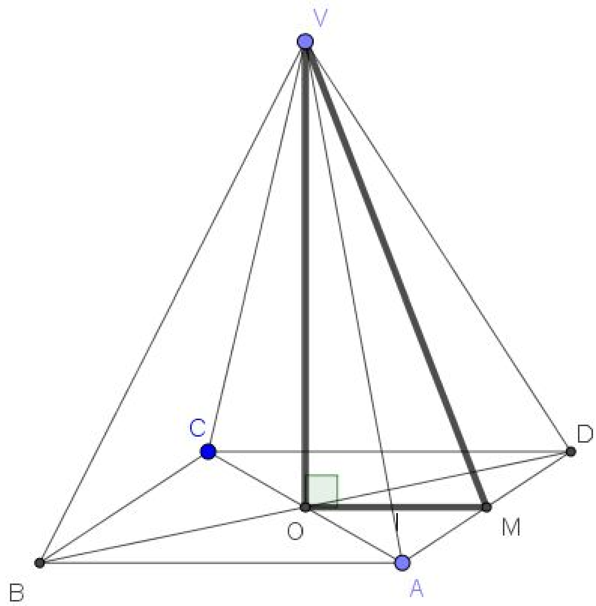

Figura 1.1: Seqt Egípcio
Fonte: Próprio Autor

Isso é destacado por [13]

> No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que dos 84 problemas, quatro fazem menção ao seqt de um ângulo. Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra, mas pelo contexto, pensa-se que o seqt de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo formado entre uma face e a base dessa pirâmide.

Era de suma importância manter uma inclinação constante das faces na construção de pirâmides, levando os egípcios a incorporarem o conceito de seqt, o qual representa a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical.

Outra ideia que surgiu no Egito foi a de associar sombras projetadas por uma vara vertical à sequências numéricas, utilizando a relação de seus comprimentos com horas do dia (relógios do Sol).

Os primeiros vestígios da trigonometria surgiram na Babilônia e no Egito, pois os povos babilônios tinham um interesse enorme pela astronomia, por questões que envolviam a religião, conexões com o calendário e também pelas épocas do plantio. Uma vez que para estudar os pontos cardeais, as fases da Lua e as estações do ano é imprescindível o uso de triângulos, um sistema de medidas e uma escala.

Este interesse dos babilônios pela astronomia fez deles excelentes astrônomos e com seus conhecimentos adquiridos influenciaram futuras gerações. Assim, com esse fascínio por esta área da matemática, os babilônios fizeram um calendário astrológico e posteriormente os permitiram criar uma tábua de eclipses lunares. Até hoje temos este calendário e tábua. [19]

No desenvolvimento da trigonometria, o conceito de ângulo e de como calcular sua medida é fundamental em diversas situações, principalmente nas razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Há algumas evidências de tentativas de medidas de ângulos em datas muito remotas, pois chegaram, até os dias atuais, fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com intuito de medições. [19]

No Oriente, mais especificamente na China, no reinado de Chóu-pei Suan-King, foi encontrada uma trigonometria primitiva. Também a aproximadamente 1110 a.C., nas medições de distâncias, comprimentos e profundidade uma figura plana era utilizada para realizar essas medições, o triângulo retângulo. Há, também, evidências tanto no conceito de ângulo quanto das relações trigonométricas, porém não temos registro de como eram feitas as medições e quais unidades usadas. Na escrita chinesa encontramos uma passagem que podemos traduzir como: "*O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon*", o que traz indícios de que a trigonometria plana primitiva já era utilizada na China no segundo milênio a. C.. [3]

Já no lado Ocidental do planeta, o conhecimento dos egípcios foi, posteriormente, usado pelos gregos. Na Grécia, a Matemática teve um desenvolvimento significativo, o que deixou a civilização grega conhecida como mentora para todas outras nações, como destaca [17]

> Muitas culturas antigas desenvolveram vários tipos de matemática, mas os matemáticos gregos foram os únicos a inserirem o raciocínio lógico e a demonstração no âmago do tema. Ao fazê-lo, eles mudaram para todo o sempre o que significa fazer matemática.

Na seção a seguir destacaremos alguns pontos evidentes sobre o desenvolvimento da trigonometria, que se deu pelos povos gregos.

1.1 Grécia - o desenvolvimento da trigonometria

Os babilônios, segundo Heródoto (490 - 420 a. C.), levaram até os gregos o relógio de sol, cujo nome era gnômon.

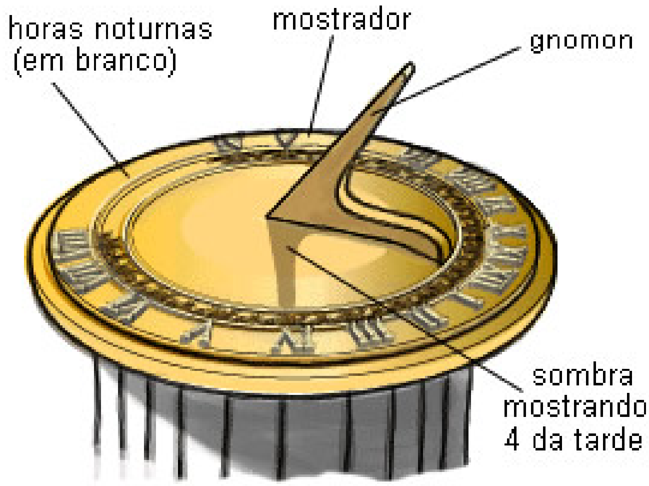

Figura 1.2: Gnômon - Relógio de Sol

O gnômon foi um dos instrumentos mais antigos construídos pelo homem, o qual consistia numa vara fincada no chão, verticalmente, em um determinado momento do dia era observado o comprimento da sombra, que era gerada pelos raios solares, ao qual possibilitava concretizar, ao longo do tempo, a posição do Sol. Através de várias observações, os antigos astrônomos puderam definir os pontos cardeais e também nomearam um certo instante do dia em que a sombra era mais curta de Meio-dia.[3]

É de nosso conhecimento que vários conteúdos matemáticos não se desenvolveram no mesmo período de forma gradativa. Porém, a trigonometria e a geometria estão interligadas. Exemplo disso é que a Grécia deu ao mundo grandes gênios como Pitágoras (570 - 495 a.C.) que foi um dos discípulos de Thales (625 - 546 a.C.) os quais, com seus estudos sobre semelhança, deram vários embasamento à trigonometria. Pitágoras foi o primeiro a demonstrar o teorema: "Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos", por ter conseguido fazer essa demonstração, este teorema leva seu nome e, também, a relação fundamental da trigonometria provem deste teorema. [3]

Por volta de 180 a.C. apareceu a primeira apresentação grega documentada que contribuiu para o estudo da trigonometria, Hipsícles, inspirado pelos babilônios, dividiu o zodíaco em 360 partes. Hiparco, posteriormente, usou essa ideia e generalizou para qualquer círculo. [16]

Em meados do ano 200 a.C. **Eratóstenes** de Cirene (276 - 196 a.C.) desenvolveu, utilizando a semelhança de triângulos e razões trigonométricas, a mais brilhante medida da antiguidade para a circunferência da Terra. Para tanto, foi imprescindível **Eratóstenes** saber o conceito de ângulo. Entre Hipócrates e Eratóstenes, podemos afirmar que foram dois séculos e meio sem um grande desenvolvimento na trigonometria, o que podemos comprovar com a afirmação de [11], "de Hipócrates a Eratóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia mas disso não resultou uma trigonometria sistemática "(pág. 118).

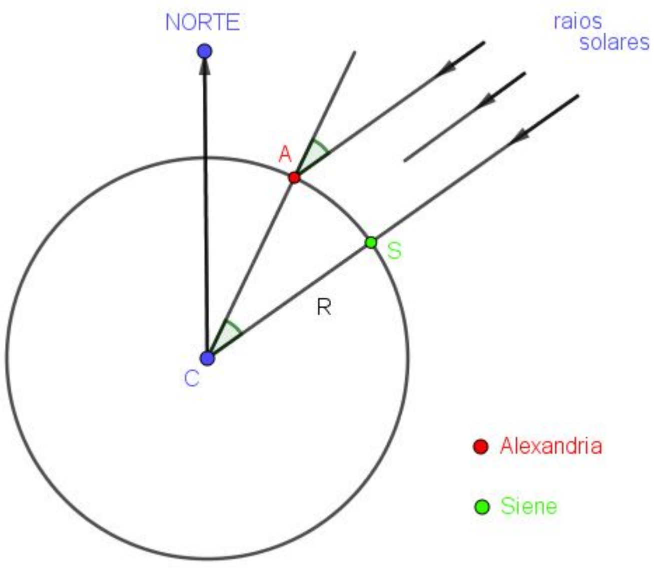

Figura 1.3: Método utilizado por Eratóstenes de Cirene para medir o comprimento da Terra.

Porém, foi Hiparco de Nicéia (180 a.C. - 125a.C.), astrônomo, quem recebeu o titulo de Pai da Trigonometria, pois tratou com autoridade a trigonometria em 12 volumes, demonstrando profundamente seu conhecimento sobre o assunto. Os astrônomos anotavam os cálculos e medições em tábuas. De acordo com [3]:

> Surgiu então, na segunda metade do século dois a.C., um marco na história da trigonometria: Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.). Influenciado pela matemática da Babilônia, acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1 em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Hiparco baseava-se numa única função, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda. Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de ângulos de 0 a 180. Assim, Hiparco representou um grande avanço na Astronomia e por isso recebeu o título de "Pai da Trigonometria". (p. 6)

Hiparco, a princípio, construiu a primeira tabela trigonométrica com valores de ângulos que variam de 0 a 180. Apesar de Hiparco ter recebido o título de "Pai da trigonometria", alguns anos depois surge, então, outro grande nome na matemática Cláudio Ptolomeu, simplesmente o autor da obra mais importante da trigonometria na antiguidade, a Síntese matemática, coleção composta por treze volumes. Esta coleção ficou conhecida como Almagesto, que significa "A maior ", em árabe.

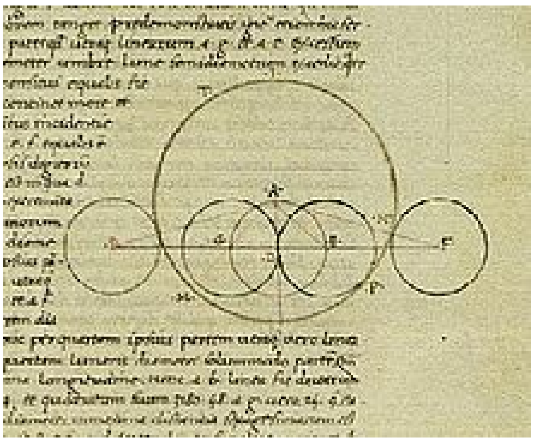

Figura 1.4: Almagesto de Ptolomeu

No Almagesto aparecem inúmeras referências a Hiparco e assim, usando como base, o Almagesto tem mais tabelas completas que Hiparco, com ângulos meio em meio grau, de 0 a 180, a circunferência dividida em 360 graus entre outros. Um teorema bastante conhecido, Teorema de Ptolomeu, consiste na seguinte situação: Se um quadrilátero convexo ABCD está inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais. Partindo desse princípio, Ptolomeu obteve uma equivalência das fórmulas do seno da soma e da diferença de dois arcos, operando com as cordas dos arcos, ou seja, $sen(a+b)$ e $sen(a-b)$. Essas equivalências foram tão importantes que a fórmula para a corda da diferença foi fundamental na elaboração da tabela trigonométrica. [3]

A possibilidade de descrever fenômenos naturais foi uma das mais importantes contribuições do Almagesto, para a Matemática, assim explica bem [18]:

> "não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria.(pág. 128). Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a ideia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável"(pág. 129).

Os Hindus também contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, um conjunto de textos matemáticos nomeado por "Surya Siddhanta", cujo significado é "Sistema de Astronomia ", isso por volta de 400 a.C.. Eles usavam a relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central, essa era a trigonometria utilizada pelos Hindus, a qual foi denominada por jiva. Assim, vários matemáticos utilizaram essas ideias, Almagesto e Siddhanta, por muitos anos. [3]

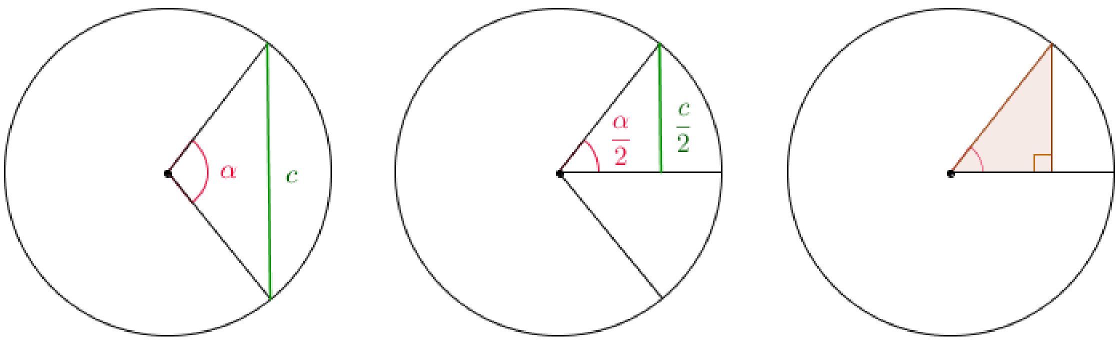

Figura 1.5: O "jiva"hindu

Ao observarmos o primeiro e o segundo círculo na figura 1.5, notamos que a jiva que representa metade da corda é a função trigonométrica seno, isso é explicado por uma tradução feita do árabe para o latim no Século XII.

Observe que:

$$jiva\ \frac{\alpha}{2} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{C}{2}}{r} = \frac{c}{2r}$$

Já no século XV, a trigonometria se torna independente da astronomia, Regiomontanus (1436 -1476) em seu trabalho cujo título é "De triagulis omnimodis libri quinque ", fez uma introdução completa à trigonometria resolvendo situações problema envolvendo geometria plana e esférica. Como a relação entre as duas áreas era muito intrínseca, essa separação foi considerada somente na idade média.

Os séculos XII a XV foram, para a Matemática europeia, um período de aproximação da herança dos matemáticos da Grécia Antiga e do Oriente Hindo-arábico. Este período iniciou com a tradução para o latim, no século XII, de inúmeras obras clássicas (Euclides, Arquimedes, al-Kwarismi e Tabit Ibn Qurra).

Ainda nesse período, começaram a se estabelecer as primeiras universidades. A primeira delas foi a de Salerno, na Itália, no século XI; a de Bolonha, na Itália, surgiu no início do século XII. As universidades de Paris e Oxford foram criadas no início do século XII; a de Cambridge, no decorrer do século XIV; as de Praga, Cracóvia, Viena e Heidelberg, no início do século XV, entre outras. Vale recordar que o ensino nessas primeiras universidades se dava por meio do Quadrivium, composto por Aritmética, Geometria, Astronomia e Música.

Figura 1.6: Regiomontanus

As disciplinas do Quadrivium eram ministradas por professores de Faculdade de Artes, de acordo com a necessidade, sendo que nenhuma universidade da Europa preparava professores especificamente em Matemática. No início do século XV, algumas classes de problemas matemáticos começaram a adquirir uma importância cada vez maior, os quais eram a sistematização e a generalização dos métodos de medição de grandezas geométricas por meio da Trigonometria Plana e Esférica, o aperfeiçoamento dos métodos e instrumentos de cálculo, a elaboração de tabelas matemáticas no sistema decimal, assim como a transformação da Álgebra retórica para a simbólica, no qual Regiomontanus teve uma grande participação. [12]

Para que a Trigonometria se desenvolvesse, foi primordial também o estudo sobre o conceito de ângulos, pois a mesma utiliza bastante essa definição. Na seção seguinte, veremos mais um pouco sobre o conceito de ângulos e sua relação com a Trigonometria.

1.2 Ângulo

Para que o ensino da trigonometria seja satisfatório, é necessário que os estudantes entendam o conceito de ângulo, pois a trigonometria é o ramo da matemática que dá mais ênfase a este conceito. [22] afirmam que os gregos antigos concebiam a noção do ângulo imaginando, por exemplo, duas pessoas apontando para uma mesma estrela, a partir de pontos diferentes da terra, cujas direções tinham um ponto comum, a estrela.

Figura 1.7: Ângulo formado por mãos que apontam para mesma estrela

A definição de ângulo foi importante para o desenvolvimento da Trigonometria, levando em conta que é fundamental este conceito em várias situações, por exemplo na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Existem diversos vestígios de tentativas de medi-los, em datas remotas, pois chegaram até os dias atuais fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósitos de medições. [19]

No Oriente também foi encontrada uma trigonometria primitiva. Existem relatos tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-los.

Figura 1.8: groma egípcia

[20] afirma que a raça humana descobriu como medir os ângulos primeiramente e depois de algum tempo aprendeu a medir comprimentos. Um dos primeiros instrumentos utilizados para a medição do ângulo, segundo [21], foi a groma egípcia, instrumento manual no formato de X, que é suspensa por uma corrente e que tem pendentes nas pontas do X, uma corda com um leve peso. Além de medir ângulos a groma pode ser utilizada para alinhar direções em áreas planas até objetos distantes e, posteriormente, transferir as linhas para o solo marcando linhas retas.

Uma versão mais precisa que a groma é a dioptra. [21] afirma que Heron de Alexandria descreveu a dioptra, cujo significado quer dizer "através de".

Figura 1.9: Heron de Alexandria

A dioptra é semelhante ao teodolito, e foi utilizada por astrônomos gregos para medir as posições das estrelas. Em relação à groma, a dioptra é mais precisa e sofisticada o suficiente para construir um túnel.

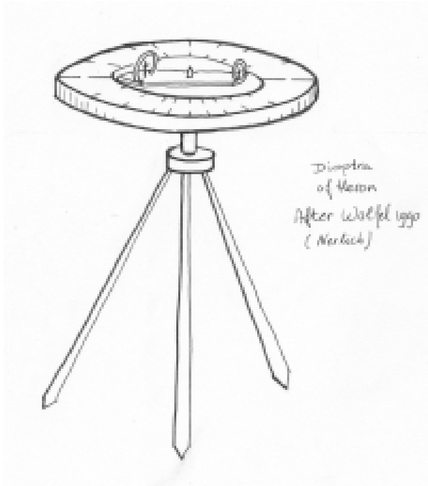

Figura 1.10: Dioptra

Tendo em vista a importância do conceito de ângulos no desenvolvimento da Trigonometria, no capítulo seguinte trataremos sobre as relações e razões trigonométricas.

Capítulo 2

Trigonometria - Definições e relações

Neste Capítulo, falaremos sobre algumas definições e relações trigonométricas. A trigonometria, como já vimos no capítulo anterior, tem uma grande importância para a humanidade, pensando nessa perspectiva daremos ênfase ao seu ensino para os alunos e em algumas importantes relações trigonométricas bastante utilizadas no nosso cotidiano. Em diversas aplicações matemáticas podemos utilizar a trigonometria como ferramenta de solução, assim os professores podem aproximar a matemática das situações vividas pelos alunos no dia a dia, tornando as aulas mais atrativas e lúdicas aos educandos. Mas para que o educador ensine trigonometria de maneira que o estudante aprenda sem grandes dificuldades, é necessário que aquele tenha conhecimento aprofundado daquilo que está ensinando, ou seja, a constante formação e a prática docente são importantíssima para um melhor desempenho do professor nas aulas de matemática, em específico, as aulas de trigonometria. Assim, [9] relata:

> Para que possa levar os estudantes a aprender Matemática, para que se esteja em condições de lhes proporcionar experiências enriquecedoras e significativas com ela. é evidente que o professor precisa de conhecimentos que lhe permitam executar com êxito sua tarefa, dentre os quais não pode deixar de ser mencionado um conhecimento abrangente e profundo dos conteúdos que serão abordados em sala de aula.

Partindo desta convicção, vamos tomar como base a ideia de [7], o qual afirma que, com base em diversos estudos o professor de matemática aparenta ser fortemente influenciado pelas suas experiências enquanto estudante. Assim, reafirma a ideia de que a mudança na forma de ensinar ao aluno, os conceitos de matemática não se dão do dia para a noite e sim a longo prazo. Pensando na importância desse conteúdo para a vida do aluno e no papel do professor no ensino do mesmo, na seção seguinte iremos relatar sobre o ensino da trigonometria e dizer que a formação de um professor de matemática dura toda vida, não somente em determinados momentos.

2.1 Ensino da Trigonometria

A trigonometria como podemos perceber é um conteúdo muito importante, que se desenvolveu com o intuito de calcular distâncias usando a medida de ângulos como base. Este conteúdo é inicialmente introduzido para o aluno no Ensino Fundamental II, com as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, além do Teorema de de Pitágoras. E posteriormente no Ensino Médio com a lei dos senos, lei dos cossenos, área de um triângulo qualquer, circunferência trigonométrica, entre outros, aprofundando ainda mais o conceito de Trigonometria e sua aplicabilidade.

Ensinar trigonometria é um grande desafio, pois os professores devem aproximar o conteúdo ministrado da vivência do educando. O papel do professor é mostrar aos alunos as grandes e importantes descobertas atribuídas à trigonometria, ressaltando a influência dessa área da matemática no desenvolvimento de áreas como Engenharia, Agrimensura, Marítima e Navegação Aérea. Assim o aluno vê a necessidade deste conteúdo no nosso cotidiano.

[6], propõe o ensino deste conteúdo baseando em atividades estruturadas, ligadas ao contexto da história da matemática como recurso metodológico em sala de aula. Pensando nesse sentido, essas atividades vão permitir que o aluno tenha contato com tópicos ainda desconhecidos por eles. Assim, durante um processo de busca, conduzido pelo educador, o aluno começa a descobrir aos poucos. "[...] uma ação metodológica centrada no ensino-aprendizagem pela experiência direta, com situações naturais e provenientes do conteúdo histórico". ([6]).

Um bom exemplo para o professor explicar aos alunos é a trigonometria no triângulo retângulo, que é a relação entre medidas de ângulos e lados nos triângulos retângulos. Vamos observar as figuras a seguir, os triângulos são semelhantes, pois possuem os ângulos ordenadamente congruentes.

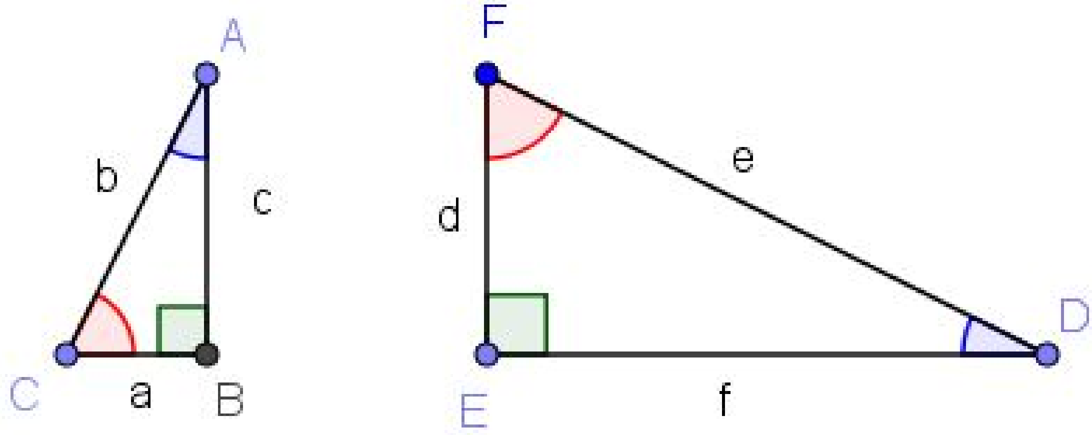

Figura 2.1: Semelhança de triângulos

Além disso, dessa semelhança temos que:

$$\frac{b}{e} = \frac{a}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{e}{d} \tag{2.1}$$

$$\frac{b}{e} = \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{e}{f} \tag{2.2}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{f} \tag{2.3}$$

Pelas igualdades acima, podemos dizer que a razão entre dois lados quaisquer de um triângulo retângulo é igual a razão entre os dois lados homólogos de qualquer outro triângulo retângulo semelhante a ele. Assim, podemos dizer que em qualquer triângulo retângulo a razão entre dois lados não depende da medidas deles e sim da medida de seus ângulos.

Podemos ainda concluir que, das semelhanças acima temos:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \cdots = constante \tag{2.4}$$

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} = \cdots = constante \tag{2.5}$$

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} = \cdots = constante \tag{2.6}$$

Essas razões, constantes para cada valor atribuído a α, são chamadas de razões trigonométricas.

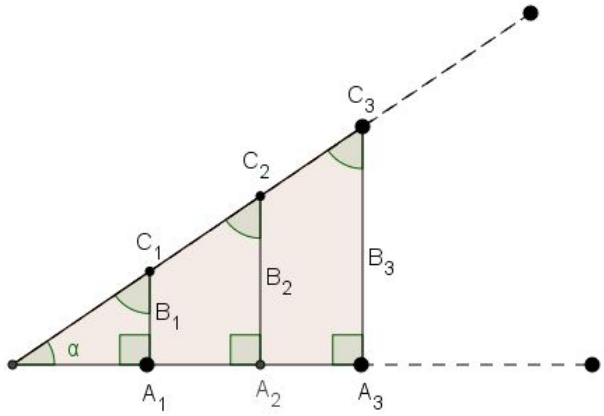

Figura 2.2: Triângulos retângulos semelhantes

Pela figura acima podemos determinar algumas relações como a do:

- Seno de α é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.
- Cosseno de α é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.
- Tangente de α é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele.

Consideremos um triângulo retângulo ABC da figura 2.3, reto em A. Os outros dois ângulos B e C são agudos e complementares, isto é, $B+C=90°$. Para ângulos agudos, temos por definição:

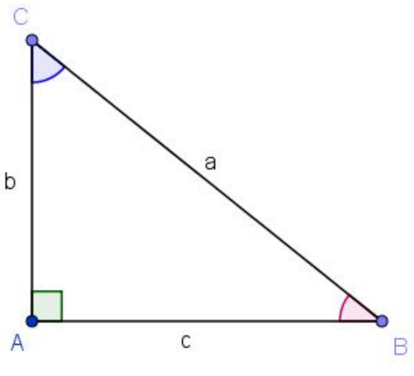

Figura 2.3: Triângulo retângulo em A

$$sen\ B = \frac{cateto\ oposto\ a\ B}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad cos\ C = \frac{cateto\ adjacente\ a\ C}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$sen\ C = \frac{cateto\ oposto\ a\ C}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \qquad cos\ B = \frac{cateto\ adjacente\ a\ B}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tg\ B = \frac{cateto\ oposto\ a\ B}{cateto\ adjacente\ a\ B} = \frac{b}{c} \qquad tg\ C = \frac{cateto\ oposto\ a\ C}{cateto\ adjacente\ a\ C} = \frac{c}{b}$$

Podemos notar que o *seno* de um ângulo e o *cosseno* do seu complemento são iguais e que os *senos* e *cossenos* de ângulos agudos estão compreendidos entre 0 e 1, pois em um triângulo retângulo temos que as medidas dos catetos é sempre menor que a medida da hipotenusa.

Exemplo: Vamos calcular o *seno*, o *cosseno* e a *tangente* do ângulo α no triângulo retângulo ABC a seguir:

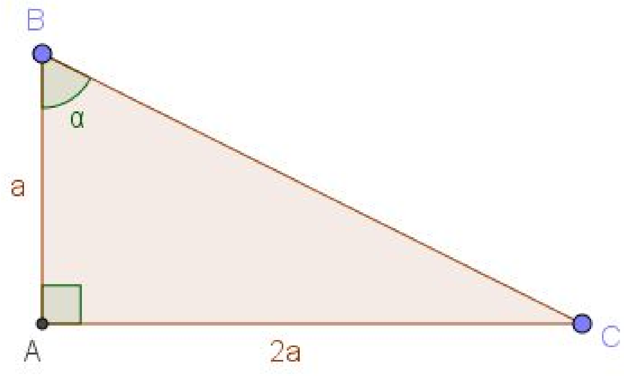

Figura 2.4: Triângulo Retângulo ABC

Solução:

Para determinarmos o *seno* do ângulo α devemos calcular a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa deste triângulo em relação ao ângulo. Porém, só temos as medidas dos catetos, devemos então calcular a medida da hipotenusa deste triângulo, para determinarmos esta medida devemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Chamando a hipotenusa $\overline{BC}$ de x temos que,

$$x^2 = a^2 + (2a)^2,$$

logo

$$x^2 = a^2 + 4a^2,$$

assim

$$x^2 = 5a^2,$$

então

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{5a^2},$$

portanto

$$x = a\sqrt{5}.$$

Agora temos todos os valores referentes às medidas dos três lados deste triângulo retângulo, podemos então obter o *seno*, *o cosseno e a tangente* do ângulo α.

Primeiro vamos identificar o cateto oposto, o cateto adjacente em relação a α e a hipotenusa.

Cateto oposto: $2a$

Cateto adjacente: a

Hipotenusa: $x = a\sqrt{5}$

Portanto

$$sen\ \alpha = \frac{2a}{a\sqrt{5}},$$

logo

$$sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Agora determinando o *cosseno* temos:

$$cos\ \alpha = \frac{a}{a\sqrt{5}},$$

assim

$$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

E, por fim, calculando a *tangente* teremos:

$$tan\ \alpha = \frac{2a}{a},$$

logo

$$tan\ \alpha = 2.$$

O professor, ao explicar este conteúdo aos seus alunos, pode usar situações problemas do nosso cotidiano para usar a ludicidade em suas aulas, fazendo assim uma aula mais dinâmica e atraente para o aluno. É preciso trabalhar os conteúdos contextualizando a realidade do cotidiano, de forma que despertem interesse e a curiosidade do aluno e o leve a refletir sobre a realidade e sua capacidade individual de intervir positivamente no meio em que vive. Para D'Ambrosio (1994, apud [1], p.23):

> a verdadeira educação é uma ação enriquecedora para todos os que com ela se envolvem, e sugere que em vez de despejarmos conteúdos desvinculados da realidade nas cabeças dos alunos, devemos aprender com eles, reconhecer seus saberes, e juntos buscarmos novos conhecimentos. E mais, entender as etnomatemáticas dos alunos, aliando-as às nossas, temperadas com as acadêmicas. Assim poderemos gerar momentos felizes e criativos em sala de aula.

Agora veremos uma aplicação das razões trigonométricas em situações no esporte.

Exemplo. Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 5° a uma velocidade constante de 4 m/s. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é de 45 m.

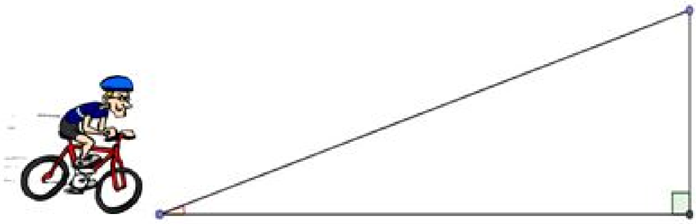

Figura 2.5: Rampa

Use a aproximação *seno* $5^\circ = 0,08$ e responda, qual o tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa?

Solução:

I) Vamos chamar de c o comprimento da rampa, assim utilizando a razão trigonométrica *seno*, temos:

$$sen\ 5^\circ = \frac{45}{c} \Longleftrightarrow c = \frac{45}{0,08} \Longleftrightarrow c = 562,5\ m.$$

II) Observando que 4 m/s correspondem a 240 m por minuto, basta multiplicar por 60, pois 1 minuto é igual a 60 segundos, e sendo t o tempo, em minutos, gasto pelo ciclista para percorrer completamente a rampa, temos:

$$t = \frac{562,5}{240} = 2,35\ minutos.$$

Esta situação problema relatada acima faz com que o aluno se interesse por trigonometria, pois utiliza os conceitos deste ramo matemático em um situação do nosso cotidiano. Na seção seguinte veremos as relações fundamentais da Trigonometria.

2.2 Relações Fundamentais

Nesta seção veremos um pouco sobre algumas relações trigonométricas fundamentais para a realização de alguns cálculos. Podemos iniciar pela relação fundamental da trigonometria, pois assim como as relações decorrentes, são extremamente importantes na resolução de equações e identidades trigonométricas.

A partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo, definem-se as funções trigonométricas do seno, cosseno e tangente. Assim, em decorrência destas, surge então, a primeira relação fundamental da Trigonometria:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} \tag{2.7}$$

Essa relação acima, é conhecida como a função trigonométrica da tangente, na qual representa a razão entre o *seno* e *cosseno* de um ângulo . Já a segunda e talvez a mais importante das relações fundamentais da trigonometria é:

$$sen^2\ x + cos^2\ x = 1 \tag{2.8}$$

Relação esta bastante útil para simplificar situações problemas envolvendo funções trigonométricas. A prova dessas relações pode ser feita a partir de análises de aplicações do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.

Vamos analisar este triângulo retângulo em A, na figura 2.6.

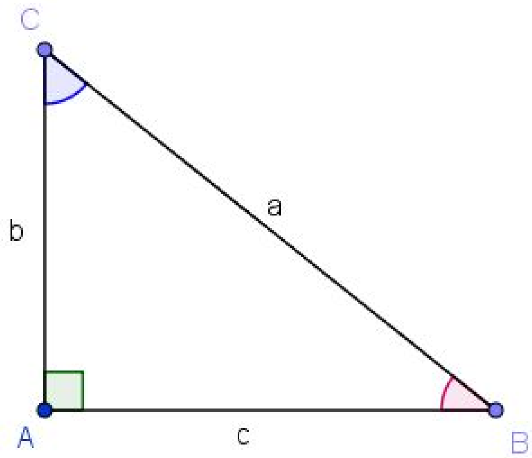

Figura 2.6: Triângulo retângulo em A

Teremos:

$$sen\ B = \frac{b}{a}\ ;\ cosB = \frac{c}{a}$$

então:

$$a \cdot sen\ B = b\ ;\ a \cdot cos\ B = c$$

De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2.9}$$

, então:

$$a^2 = (a \cdot sen\ B)^2 + (a \cdot cos\ B)^2,$$

desenvolvendo os quadrados temos

$$a^2 = a^2 \cdot sen^2 B + a^2 \cdot cos^2 B$$

como o termo a^2 é positivo, pois se trata de uma medida geométrica, podemos dividir essa equação por a^2, assim temos:

$$sen^2 B + cos^2 B = 1 \tag{2.10}$$

Decorrente dessas relações entre as funções trigonométricas, podemos calcular as outras relações fundamentais, sendo dada apenas uma delas. Temos as funções inversas do seno, do cosseno e da tangente. Cada uma delas recebe um nome especial, que são:

i) Secante → inverso do cosseno;

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x} \tag{2.11}$$

ii) Cossecante → inverso do seno;

$$csc\ x = \frac{1}{sen\ x} \tag{2.12}$$

iii) Cotangente → inverso da tangente.

$$cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} \tag{2.13}$$

As relações trigonométricas, na maioria das vezes, são utilizadas para simplificar expressões que envolvem as funções trigonométricas e é bastante importante para o professor demonstrar alguns exemplos de simplificações aos seus alunos, pois estes se tornarão capazes de resolver situações em que é necessário a aplicação dessas funções trigonométricas.

A seguir demonstraremos um exemplo de simplificação de expressão envolvendo algumas funções trigonométricas.

Exemplo: Vamos simplificar a expressão: (onde x é um ângulo agudo).

$$y = cos\ x \cdot tg\ x \cdot cscx.$$

Solução: Como vimos anteriormente temos que a função tangente x é igual a $\dfrac{sen\ x}{cos\ x}$ e que a função cossecante de x é igual a $\dfrac{1}{sen\ x}$, assim substituindo na expressão dada teremos:

$$y = cos\ x \cdot \frac{sen\ x}{cos\ x} \cdot \frac{1}{sen\ x},$$

portanto

$$y = 1.$$

Na seção seguinte veremos um pouco da trigonometria na Física, mais especificamente no movimento balístico, em que iremos mostrar no capítulo 3 algumas aplicações no esporte, principalmente no futebol.

2.3 Trigonometria aplicada na Física - Movimento Balístico

A Trigonometria sempre esteve muito ligada à Física, pois é muito utilizada em vários fenômenos dessa área. Sendo assim, nesta seção demonstraremos a aplicação deste ramo matemático no estudo do movimento balístico.

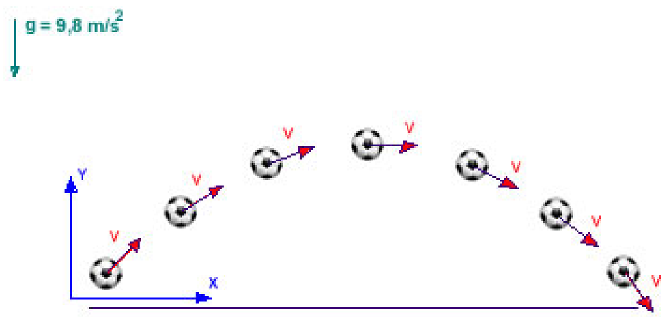

Figura 2.7: Movimento balístico da trajetória de uma bola

Como o futebol é um esporte que está em constante evolução, vários jogadores e técnicos sempre buscam uma melhor performance, sendo assim, uma importante ferramenta para essa evolução é o movimento balístico da bola, pois controlando esse movimento os jogadores podem ter uma maior vantagem contra seu oponente ([5]).

Segundo [5], durante o movimento bidimensional, a aceleração a do projétil é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo, ou seja, o projétil não possui aceleração horizontal. Sendo assim, trocamos a aceleração a por $-g$, sendo g a aceleração em queda livre.

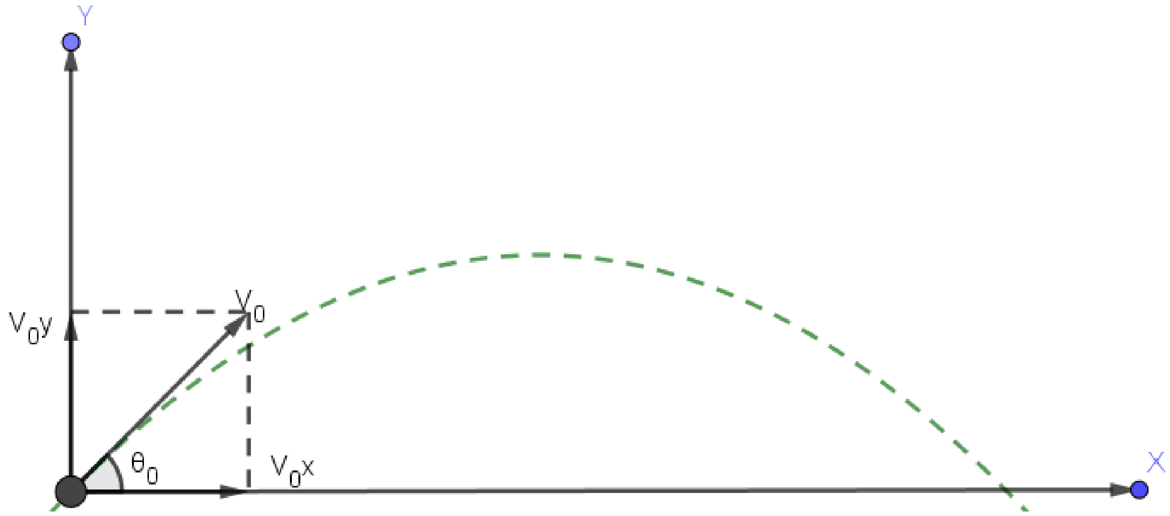

Figura 2.8: Movimento balístico

Pela figura acima temos que

$$cos\ \theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0},$$

logo,

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta_0. \tag{2.14}$$

Como a aceleração é inexistente no sentido horizontal, seja qual for o instante t, o deslocamento horizontal do projétil m relação à posição inicial, $x - x_0$ é dado por

$$x - x_0 = v_0 \cdot cos\theta_0 \cdot t. \tag{2.15}$$

Podemos também explorar a altura máxima. Considerando agora a aceleração, temos que:

$$y = y_0 + V_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \tag{2.16}$$

sendo $y - y_0 = H$(altura máxima), pela figura 2.8 temos que:

$$V_{0y} = V_0 \cdot sen\ \theta_0,$$

assim temos:

$$H = V_0 \cdot sen\ \theta_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{2.17}$$

Com mais este conceito, o professor pode introduzir, nas suas aulas de trigonometria, aplicações no ramo da Física em situações que relatam a realidade. O aluno então verá, na matemática, que ela pode ser aplicada em outras áreas, isso fará com que o mesmo se dedique mais e se interesse mais pela matemática.

No capítulo seguinte trataremos de aplicações trigonométricas no esporte, uma oportunidade de o professor tornar as aulas de matemática mais realistas e buscar a participação dos alunos, fazendo da sala de aula um lugar agradável e atraente para os educandos, assim potencializando o desenvolvimento dos mesmos perante uma disciplina, que para muitos é a mais importante.

Capítulo 3

O esporte através da visão trigonométrica

Os jogos olímpicos são considerados um dos eventos que mais atraem atenção das pessoas no mundo. Essa popularidade se dá tanto pela grande conexão que as olimpíadas possuem com os espectadores presentes nos estádios quanto pela televisão. Os jogos olímpicos, no entanto, têm sua história um pouco complexa. As olimpíadas surgiram por volta do século VIII a. C., no conjunto das cidades-estados, Helade, Grécia Clássica. Já os jogos aconteciam na cidade de Olímpia, assim surgiu nome o olimpíada.

O herói Hércules foi o criador dos jogos de Olímpia, isso nos relata a mitologia grega. A deusa Hera obrigou Hércules a realizar alguns trabalhos, doze, considerados por eles impossíveis. Assim, Hércules foi realizando esses trabalhos, ao conseguir terminar o quinto trabalho, decidiu então inaugurar um festival esportivo para comemorar tal feito, isso em Olímpia.

Através desse breve contexto sobre o surgimento dos jogos olímpicos na Grécia, percebemos que este país contribuiu muito para as outras civilizações. Como já dito no capítulo anterior, foi na Grécia que a trigonometria se desenvolveu. Sendo assim, este capítulo será dedicado à junção de trigonometria e esporte, pois apesar de não vermos a olho nu, esporte e trigonometria andam lado a lado.

O esporte por si só já é um espetáculo, porém, com uma visão matemática se torna magnífico, poder perceber que através de jogadas, lançamentos, arremessos, entre outros, existe aplicação da matemática é algo extremamente empolgante e isso é muito importante no ensino-aprendizagem dos alunos, pois tornam as aulas de matemática mais lúdicas, significativas, envolventes e ricas na construção do conhecimento matemático. E a Trigonometria é um conteúdo que permite ao educador fazer isso em sala de aula.

Assim a aplicação da trigonometria em esportes veio para explicar que podemos utilizar matemática para obter melhores resultados. Nas seções seguintes veremos a necessidade deste conteúdo matemático no esporte, mais especificamente no futebol, lançamento de dardo, atletismo, basquete, entre outros.

3.1 A arte do futebol com a ciência da trigonometria

Um dos esportes mais praticados no mundo é o futebol. Em toda rua, quadra de esportes, ginásios, campinhos de terras e em outros lugares podemos encontrar pessoas jogando bola. Vários garotos sonham um dia ser jogador de futebol, mas muitos nem imaginam que no futebol podemos aplicar a matemática, mais especificamente a trigonometria.

Mas o futebol, como é jogado atualmente, nem sempre foi assim. Este espetáculo já foi ritual de guerra, cerimonial e até mesmo brutal e violento. O livro a História dos Esportes, [4] relata diversas práticas esportivas que antecederam o futebol. Por volta do ano 3000 a.C. militares chineses faziam um treinamento militar, que consistia em chutar a cabeça dos soldados inimigos. Tempos depois, as cabeças dos inimigos foram aos poucos sendo substituídas por bolas de couros. Equipes eram formadas e o objetivo do jogo era passar a bola de pé em pé sem deixá-la cair.

Existem também relatos de que um esporte semelhante ao futebol, Kemari, era praticado no Japão em um campo de aproximadamente 200 metros quadrados. Os gregos também criaram um jogo, Episkiros, os jogos eram em terrenos retangulares e a bola era feita de bexiga de boi, cheia de areia ou terra. Segundo [4], as regras e detalhes deste jogo se perderam ao longo do tempo, sabe-se apenas que os romanos adotaram essa prática e que o episkiros passaram a se chamar harpastum.

No livro de [4] é relatado também um jogo, na Idade Média, na Inglaterra, com características selvagens, sem regras e que não havia um limite de jogadores. Depois de muitos anos o futebol chega à Inglaterra, pesquisadores chegaram a conclusão de que o gioco de calcio, nome dado a um jogo praticado na Itália, porém com regras diferentes e um modelo mais organizado e sistematizado. As dimensões do gramado deveriam ser 120 por 180 metros e os gols seriam dois arcos retangulares localizados nas duas pontas, modelo semelhante ao atual, mas as regras e as dimensões foram modificadas e o futebol foi se tornando cada vez mais popular.

O futebol se tornou, além de um grande espetáculo, um comércio que envolve muito dinheiro, com isso jogadores foram obrigados a se dedicarem mais aos treinamentos, comissões técnicas, com mais qualidades e os clubes foram obrigados a se modernizarem. Assim, tecnologias foram sendo introduzidas neste esporte e, como consequência, estudos matemáticos foram e são de suma importância na busca de melhores resultados.

Diante do exposto, constata-se que o futebol é um esporte milenar, porém poucas pessoas imaginam a matemática sendo aplicadas em lances de futebol, só imaginam a matemática sendo utilizada para calcular a probabilidade de o time ser campeão ou ser rebaixado, entre outras coisa.

Como podemos perceber ao longo deste trabalho, a trigonometria e o esporte estão sempre lado a lado em busca de melhores resultados. Assim, o esporte tem evoluído bastante, não só com treinamentos em campo, mas com toda ajuda de uma equipe bem preparada fora de campo. Estudos avançados e tecnologias ajudam o jogador de futebol a acertar mais em jogadas importantes como a cobrança de penalidade, faltas e em alguns lances com a bola rolando.

Com essas modernidades, o esporte, perdeu um pouco do seu brilho com jogadas geniais, dribles fantásticos e se tornou mais técnico e tático

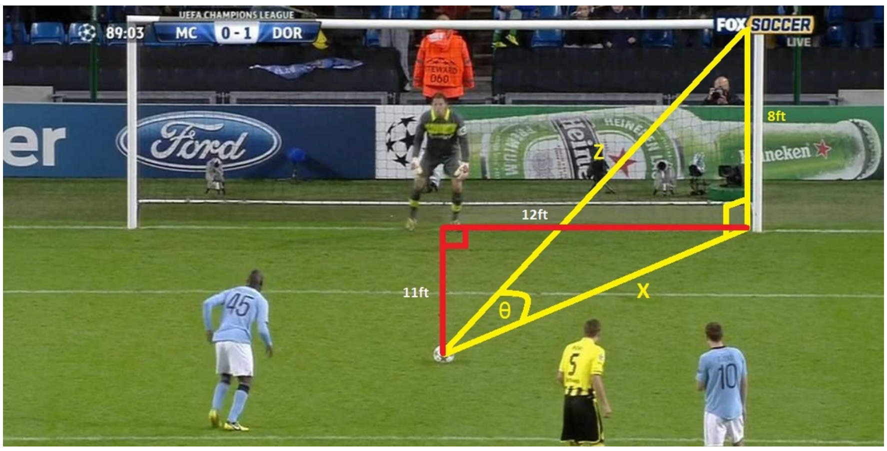

Figura 3.1: cobrança de pênalti

Quem diria que em um pênalti podemos realizar cálculos matemáticos. Isso mesmo, podemos usar as relações trigonométricas.

Um dos lances do futebol que gera mais aflição nos torcedores é na hora da penalidade máxima, momento que pode consagrar ou manchar a carreira de um jogador de futebol. Apesar de, os pênaltis parecerem fáceis quando são cobrados por atletas profissionais de alto nível, por trás de uma cobrança de pênalti há uma quantidade enorme de planejamento e treino. Para tanto a comissão técnica e jogadores analisam a melhor posição do tiro da bola, com intuito de dificultar a vida do goleiro e, assim, ter uma maior probabilidade de gol.

Logo para o atacante obter êxito numa cobrança de pênalti, além de treinar exaustivamente no dia a dia, ele pode utilizar a matemática a seu favor, a trigonometria como ferramenta de treinamento para obter o melhor ângulo possível para dificultar a vida do goleiro adversário.

Muitas pessoas devem estar se perguntando o que as cobranças de pênaltis tem a ver com trigonometria? Os jogadores de futebol estudam bastante a cobrança de pênalti, juntamente com toda comissão técnica, para ter um maior percentual de acerto, pois numa cobrança de pênalti pode ser decidido um campeonato, uma copa do mundo entre outros torneios e a trigonometria auxilia numa melhor posição do corpo, fazendo com que se consiga acertar o alvo desejado.

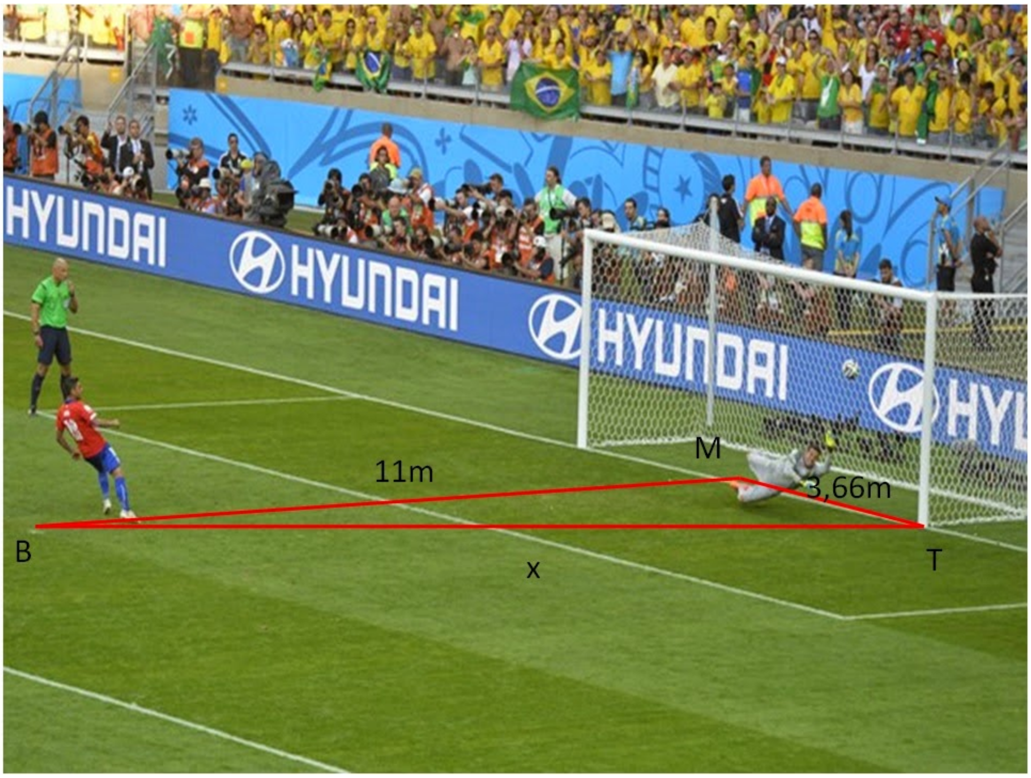

Figura 3.2: cobrança de pênalti - 2

Muitos sabem que o melhor lugar do gol para cobrar a penalidade é no canto superior, popularmente chamado de ângulo, devemos então saber qual é o ângulo de elevação para maximizar as chances de acerto, reduzindo assim a chance de o goleiro defender a cobrança de pênalti. Será 30 graus, 45 graus, 60 graus, 77,2 graus? Vamos descobrir.

O primeiro passo é calcularmos a distância da marca do pênalti até o centro da linha do gol, que atualmente é de 11 metros, posteriormente calcular a distância do pé da trave ao centro do gol, 3,66 metros, logo após as medições, devemos calcular o valor da distância da penalidade ao pé da trave, isso pode ser feito utilizando o Teorema de Pitágoras. Assim, para encontrarmos esse valor, faremos da seguinte forma:

Pela situação da figura 3.2, temos um triângulo retângulo. Para calcular a medida de um lado desta figura geométrica plana, dada outras duas medidas, podemos utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras, conforme vimos na equação 2.9, que é a seguinte

onde,

a representa a medida da hipotenusa;

b e c são as medidas dos catetos:

Assim, temos que os catetos do triângulo retângulo são formados pela marca da penalidade ao centro do gol e centro da linha do gol e o pé da trave, são 11 m e $3,66$ m, respectivamente, logo teremos, aplicando o Teorema de Pitágoras a seguinte situação:

logo

$$x^2 = 11^2 + 3.66^2,$$

assim

$$x^2 = 121 + 13,3956,$$

então

$$x^2 = 134,3956.$$

Aplicando a propriedade da radiação temos

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{134,3956}.$$

portanto

$$x = 11,59291162736955.$$

Agora com o valor encontrado, podemos calcular, utilizando a tangente, o valor do ângulo para maximizar as chances de acertar o ângulo na cobrança de pênalti. Com esta cobrança no ângulo do gol dificulta bastante a possibilidade do goleiro defender a penalidade.

Assim, ao utilizarmos a regra da tangente temos a seguinte relação:

$$Tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \tag{3.1}$$

Vamos então descobrir qual é o ângulo de inclinação da batida de um pênalti para maximizar a possibilidade de acertar o ponto mais alto do gol. Pela figura 3.2 temos que o cateto oposto ao ângulo formado pela distância da marca do pênalti ao ponto máximo da trave com a distância da marca do pênalti ao pé da trave é a altura da trave, que pelas medidas oficiais é de $2,44\ m$, e o cateto adjacente é a própria distância da marca da penalidade ao pé da trave que é de aproximadamente $11,593\ m$

Aplicando a relação da tangente temos:

$$tan\ \theta = \frac{2,44}{11,593},$$

logo

$$tan\ \theta = 0,210471.$$

Descobrimos então que a tangente do ângulo θ é $0,210471$, pela tabela 3.1, descobrimos que o ângulo θ é de aproximadamente 12 graus.

Outro exemplo sobre a aplicabilidade da trigonometria no futebol é no chute de longa distância. Os jogadores treinam horas e horas, finalizações de longa distância, para aperfeiçoar esse fundamento do futebol, pois em um lance capital do jogo este recurso poderá dar a vitória ao seu time. Na figura 21 temos uma ilustração sobre uma situação de um jogo de futebol.

Um jogador que está a $25\ m$ da linha do gol está querendo acertar o travessão deste gol que tem altura de $2.4\ m$. Para isso, este jogador deve saber qual é o ângulo de elevação formado entre a distância da linha do gol até a bola e a distância da bola até o travessão.

Para calcularmos este ângulo de elevação basta utilizar a relação trigonométrica,

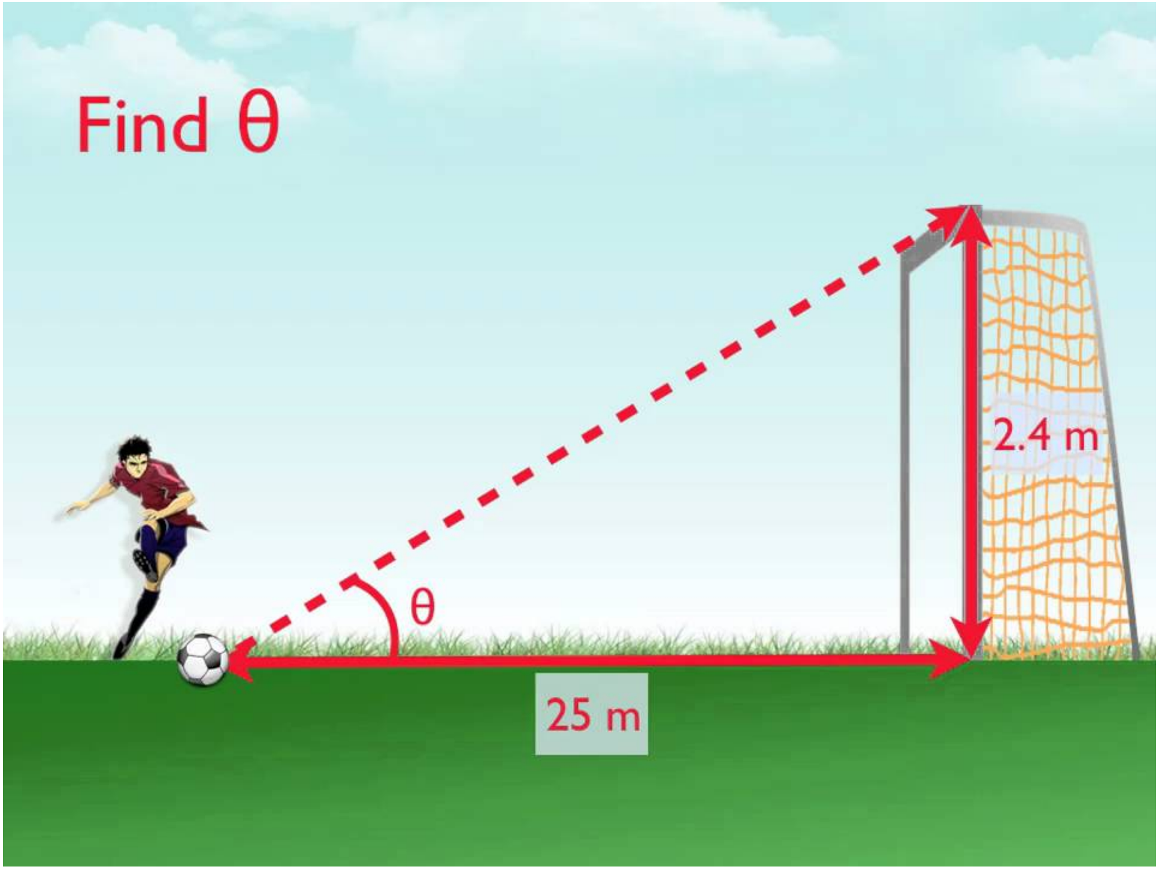

Figura 3.3: finalização de longa distância

tangente. Analisando a figura 3.3 temos que o cateto oposto é $2,4m$ e o cateto adjacente é $25m$, assim temos;

$$tan\ \theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente},$$

logo

$$tan\ \theta = \frac{2,4\ m}{25\ m},$$

assim

$$tan\ \theta = 0,096.$$

Analisando a tabela 3.1, temos que $0,096$ representa o ângulo de $5,5$ *graus*

Assim com a evolução do futebol, vários recursos tecnológicos e matemáticos foram utilizados e muitos destes usam como base a trigonometria, para obter melhores resultados.

	sen	cos	tg		sen	cos	tg		sen	cos	tg
1	0,017	1	0,017	31	0,515	0,857	0,601	60	0,866	0,5	1,732
2	0,035	0,999	0,035	32	0,53	0,848	0,625	61	0,875	0,485	1,804
3	0,052	0,999	0,052	33	0,545	0,839	0,649	62	0,883	0,469	1,881
4	0,07	0,998	0,07	34	0,559	0,829	0,675	63	0,891	0,454	1,963
5	0,087	0,996	0,087	35	0,574	0,819	0,7	64	0,899	0,438	2,05
6	0,105	0,995	0,105	36	0,588	0,809	0,727	65	0,906	0,423	2,145
7	0,122	0,993	0,123	37	0,602	0,799	0,754	66	0,914	0,407	2,246
8	0,139	0,99	0,141	38	0,616	0,788	0,781	67	0,921	0,391	2,356
9	0,156	0,988	0,158	39	0,629	0,777	0,81	68	0,927	0,375	2,475
10	0,174	0,985	0,176	40	0,643	0,766	0,839	69	0,934	0,358	2,605
11	0,191	0,982	0,194	41	0,656	0,755	0,869	70	0,94	0,342	2,747
12	0,208	0,978	0,213	42	0,669	0,743	0,9	71	0,946	0,326	2,904
13	0,225	0,974	0,231	43	0,682	0,731	0,933	72	0,951	0,309	3,078
14	0,242	0,97	0,249	44	0,695	0,719	0,966	73	0,956	0,292	3,271
15	0,259	0,966	0,268	45	0,707	0,707	1	74	0,961	0,276	3,487
16	0,276	0,961	0,287	46	0,719	0,695	1,036	75	0,966	0,259	3,732
17	0,292	0,956	0,306	47	0,731	0,682	1,072	76	0,97	0,242	4,011
18	0,309	0,951	0,325	48	0,743	0,669	1,111	77	0,974	0,225	4,331
19	0,326	0,946	0,344	49	0,755	0,656	1,15	78	0,978	0,208	4,705
20	0,342	0,94	0,364	50	0,766	0,643	1,192	79	0,982	0,191	5,145
21	0,358	0,934	0,384	51	0,777	0,629	1,235	80	0,985	0,174	5,671
22	0,375	0,927	0,404	52	0,788	0,616	1,28	81	0,988	0,156	6,314
23	0,391	0,921	0,424	53	0,799	0,602	1,327	82	0,99	0,139	7,115
24	0,407	0,914	0,445	54	0,809	0,588	1,376	83	0,993	0,122	8,144
25	0,423	0,906	0,466	55	0,819	0,574	1,428	84	0,995	0,105	9,514
26	0,438	0,899	0,488	56	0,829	0,559	1,483	85	0,996	0,087	11,43
27	0,454	0,891	0,51	57	0,839	0,545	1,54	86	0,998	0,07	14,301
28	0,469	0,883	0,532	58	0,848	0,53	1,6	87	0,999	0,052	19,081
29	0,485	0,875	0,554	59	0,857	0,515	1,664	88	0,999	0,035	28,636
30	0,5	0,866	0,577					89	1	0,017	57,29

Tabela 3.1: Tábua Trigonométrica

Outro exemplo de aplicação da trigonometria é na trajetória de uma bola de futebol, observe o caso abaixo:

A figura seguinte mostra a trajetória de uma bola de futebol que, chutada do ponto A, sobe a rampa e atinge o solo no ponto B. Qual é a distância entre A e B, aproximadamente, sabendo que a rampa faz um ângulo de 27° com o solo, o ponto de partida da bola (A) até o topo da rampa (D) é de $6m$ e a distância do pé (C) da rampa até o local onde a bola atinge o solo (B) é de $1,68m$?

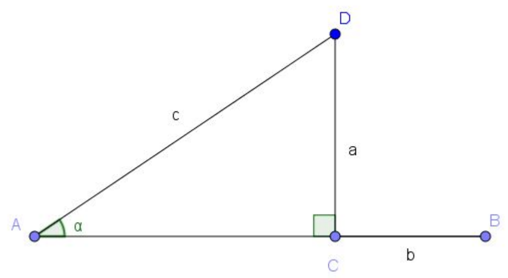

Figura 3.4: trajetória da bola

Para solucionarmos este caso, devemos analisar da seguinte forma: temos que a estrutura da rampa é um triângulo retângulo, reto em C, e a distância $\overline{AB}$ é a soma dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. A medida de $\overline{CB}$ é dada, $1,68\ m$. Para encontrarmos a medida de $\overline{AC}$ vamos utilizar a razão trigonométrica *cosseno*, pois $\overline{AC}$ é o cateto adjacente do ângulo dado no enunciado. Assim temos:

$$cos\ 27° = \frac{\overline{AC}}{6}$$

Pela tábua trigonométrica temos que o *cosseno de* 27° é aproximadamente $0,89$. Logo

$$0,89 = \frac{\overline{AC}}{6},$$

então

$$\overline{AC} = 0,89 \times 6,$$

portanto

$$\overline{AC} = 5,34\ m.$$

Agora, como conhecemos as distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, podemos determinar a distância de $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB},$$

assim

$$\overline{AB} = 5,34\ m + 1,68\ m,$$

portanto

$$\overline{AB} = 7,02\ m.$$

Um dos lances mais emblemáticos do futebol é o gol que Pelé, o melhor jogador de todos os tempos, não fez e que a maioria dos jogadores conseguiu, fazer um gol do meio de campo. Vamos usar esse lance para aplicar a trigonometria no intuito de calcular a distância percorrida pela bola, do início do chute até ela tocar o solo novamente.

Exemplo: O gol que Pelé não fez na copa de 1970, na partida entre Brasil e Tchecoslováquia, o rei do futebol pega a bola um pouco antes do meio de campo, vê o goleiro tcheco adiantado, e arrisca um chute que entrou para a história do futebol brasileiro. No início do lance, a bola parte do solo com velocidade de 108 km/h (30 m/s), e três segundos depois toca novamente o solo atrás da linha de fundo, depois de descrever uma parábola no ar e passar rente à trave, para alívio do assustado goleiro. Na figura vemos uma simulação do chute de Pelé.

Considerando que o vetor velocidade inicial da bola após o chute de Pelé fazia um ângulo de $30°$ com a horizontal ($sen\ 30° = 0,50\ e\ cos\ 30° = 0,85$) e desconsiderando a resistência do ar e a rotação da bola, pode-se afirmar que a distância horizontal entre o ponto de onde a bola partiu do solo depois do chute e o ponto onde ela tocou o solo atrás da linha de fundo era, em metros, um valor mais próximo de?

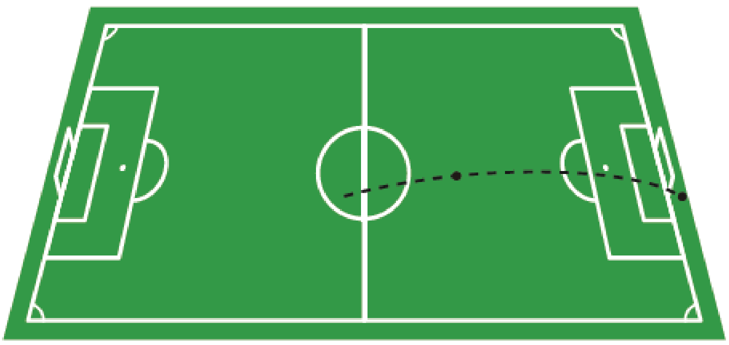

Figura 3.5: O gol que Pelé não fez.

Solução: Vamos analisar essa situação e retirar os dados necessários para calcular o que se pede.

Dados: $V_0 = 30\ m/s$; $\theta = 30°$; $sen\ 30° = 0,50$; $cos\ 30° = 0,85$ e $t = 3\ s$.

O componente horizontal da velocidade (V_{0x}) mantém-se constante. O alcance horizontal (A) é dado por:

$$A = V_{0x} \times t.$$

Como queremos o alcance horizontal, usaremos o cosseno, pois é o cateto adjacente em relação ao ângulo dado. Assim temos:

$$A = V_0 \times cos\ 30° \times t,$$

Substituindo os valores já conhecido, temos:

$$A = 30 \times 0,85 \times 3,$$

portanto

$$A = 76,5\ m.$$

Desta forma, acabamos de ver uma situação problema, em que, a trajetória da bola faz um movimento oblíquo. Esse movimento representa uma parábola, que também pode ser observada em outros esportes, como por exemplo, o lançamento de dardo, que será o nosso próximo objeto de estudo na seção seguinte.

3.2 Lançamento de Dardo

Outro esporte no qual podemos aplicar a trigonometria é no lançamento de dardo. Esta modalidade esportiva também pode ser chamada de arremesso de dardo, faz parte do atletismo e pode ser praticado por homens e mulheres. É um dos esportes que mais lembra o modo de vida das antigas civilizações, em que o dardo (lança) era usado tanto para guerrear como para caçar.

Por fazer parte do atletismo, a prova do lançamento de dardo acontece na pista de atletismo, porém há um local específico, um espaço de 4 metros de largura e de aproximadamente 37 metros de comprimento, chamado pista de balanço. A figura a seguir é uma representação do local de prova desta modalidade esportiva.

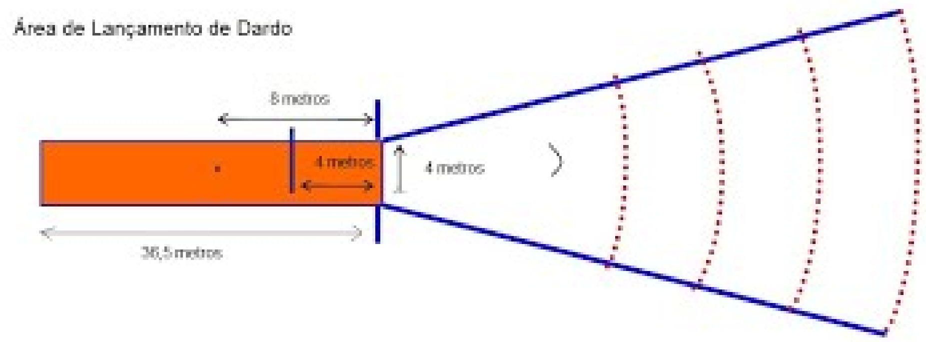

Figura 3.6: Local de competição do Lançamento de Dardo

Vamos agora saber um pouquinho como funciona este esporte. Para fazer o lançamento, o atleta precisa de impulsão, que é adquirida na corrida na pista de balanço. Ao lançar o dardo, é necessário que o atleta faça um giro com o corpo e o para arremessar o dardo, com angulação entre 30 e 45 graus em relação ao solo. O competidor geralmente lança o dardo a uma velocidade de 100 km/h.

Quando lançado, o dardo aterrissa geralmente na central do estádio de atletismo. Oficiais capacitados medem a distância, desde a marca do lançamento até o primeiro ponto que o dardo tocou o chão. Porém se o dardo tocar o solo sem ser pela ponta, o atleta é desclassificado.

Para que um atleta tenha excelentes resultados é primordial treinar constantemente e, além disso, realizar um movimento de lançamento perfeito. Para fazer esse lançamento podemos utilizar a matemática para uma melhor performance. Calcular a angulação do dardo em relação ao solo é de suma importância para o competidor, pois assim ele poderá atingir uma distância maior.

A seguir temos uma representação de um lançamento de dardo.

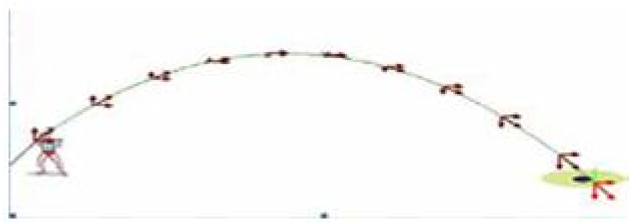

Figura 3.7: Representação do Lançamento de Dardo

No início do lançamento vamos considerar como a origem do plano cartesiano ortogonal, ignorando a resistência do ar. Assim, podemos observar que no instante do lançamento, o dardo tem um velocidade inicial V_0, formando um ângulo α com o sentido positivo do eixo das abscissas. Com essa imaginação, podemos introduzir a matemática nesse esporte.

Podemos então analisar o lançamento do dardo com a decomposição da velocidade inicial V_0, em dois componentes. Um dos componentes é a velocidade sobre o eixo das abscissas (V_{0x}) e o outro é a velocidade sobre o eixo das ordenadas (V_{0y}).

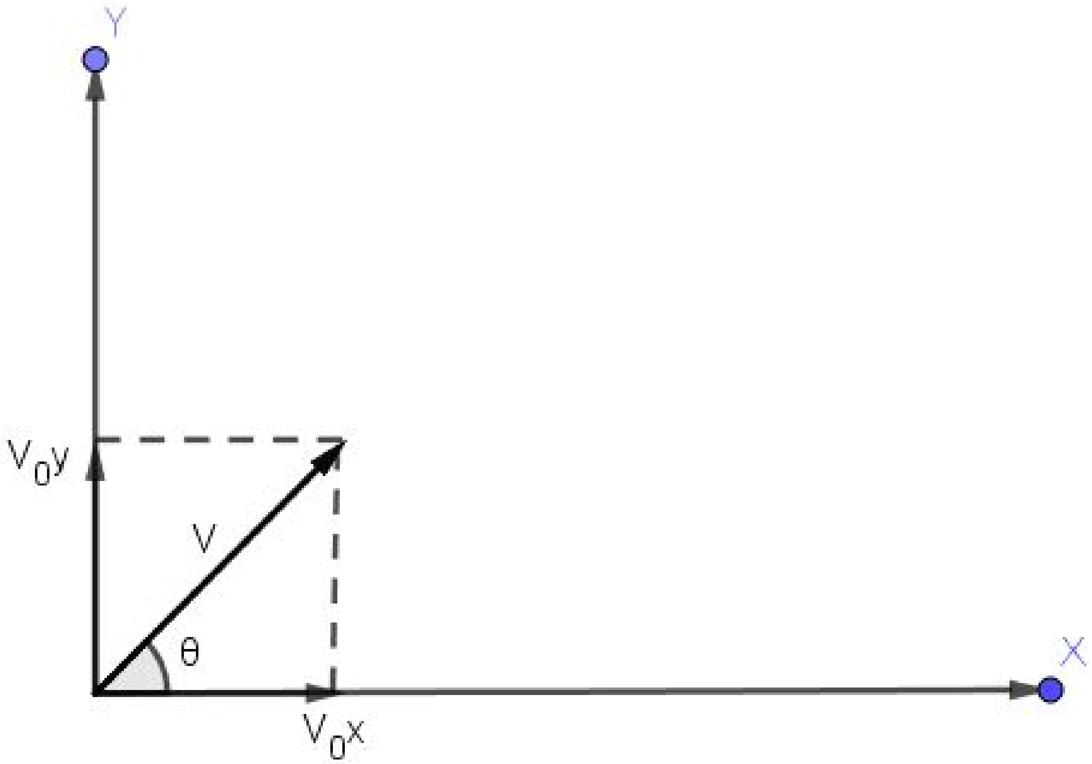

Figura 3.8: Componentes de Velocidade

Pela imagem acima temos que:

$$cos\ \theta = \frac{V_{0x}}{V_0},$$

assim

$$V_{0x} = V_0 \cdot cos\ \theta.$$

Analogamente temos que:

$$sen\ \theta = \frac{V_{0y}}{V_0},$$

logo

$$V_{0y} = V_0 \cdot sen\ \theta.$$

Lembrando que neste caso, estamos considerando apenas a força gravitacional em relação ao dardo, assim estamos desconsiderando outros fenômenos e a resistência do ar. Desta forma o movimento exercido pelo dardo é oblíquo e há dois movimentos: horizontal (em relação ao eixo x) e vertical (em relação ao eixo y).

Para cada movimento teremos uma relação. Para o movimento horizontal temos que:

- Horizontal

$$x = x_0 + V_{0x} \cdot t, \tag{3.2}$$

sendo t o tempo total do lançamento.

- Vertical

$$y = y_0 + V_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{3.3}$$

Substituindo as componentes x e y para a velocidade de lançamento temos:

$$x = x_0 + V_0 \cdot cos\theta \cdot t \tag{3.4}$$

$$y = y_0 + V_0 \cdot sen\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{3.5}$$

$$V_y = V_0 \cdot sen\theta - gt \tag{3.6}$$

Quando o dardo atinge a altura máxima $V_y = 0$, sendo que o tempo para isto é metade do tempo de lançamento. Logo podemos escrever:

$$0 = V_0 \cdot sen\theta - \frac{gt}{2} \Rightarrow t = \frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\theta}{g} \tag{3.7}$$

Substituindo 3.7 em 3.4 e considerando $x - x_0$ como sendo o deslocamento horizontal D_x, temos:

$$D_x = V_0 \cdot cos\theta \cdot \frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\theta}{g}, \tag{3.8}$$

usando a propriedade

$$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta \tag{3.9}$$

encontramos:

$$D_x = \frac{V_0^2 \cdot sen2\theta}{g} \tag{3.10}$$

Para obter a altura máxima façamos $y - y_0 = H$, onde H corresponde a altura. Considerando o tempo de subida como sendo metade do lançamento total temos:

$$H = V_0 \cdot sen\theta \frac{t}{2} - \frac{gt^2}{8}. \tag{3.11}$$

Substituindo 3.7 em 3.11, teremos:

$$H = V_0 \cdot sen\theta \frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\theta}{2g} - g\frac{(4 \cdot V_0^2 \cdot sen^2\theta)}{8g^2},$$

logo,

$$H = \frac{V_0^2 \cdot sen^2 \cdot \theta}{g} - \frac{V_0^2 \cdot sen^2 \cdot \theta}{2g},$$

portanto

$$H = \frac{V_0^2 \cdot sen^2\theta}{2g}. \tag{3.12}$$

Podemos concluir que as equações 3.10 e 3.12 são independentes do tempo.

Considerando $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, podemos também escrever uma equação de y em função de x substituindo 3.4 em 3.5.

$$y = V_0 \cdot sen\theta \frac{x}{V_0 \cdot cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cdot cos^2\theta},$$

Como vimos anteriormente pelas igualdades 2.7 e 2.11, temos:

$$y = tg\theta \cdot x - \frac{g \cdot sec^2\theta \cdot x^2}{2 \cdot V_0^2} \tag{3.13}$$

Por ser uma função do 2° grau, a representação do gráfico descrito pelo dardo é uma parábola em função do tempo (t), o qual corresponde a cada instante do lançamento. Assim, vamos considerar o instante $t = 0$ como tempo inicial, temos que:

$$x = V_{0x} \cdot 0 \Rightarrow x = 0 \ e \ y = V_{0y} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 0^2 \Rightarrow y = 0$$

Logo a coordenada inicial do lançamento será: $(0, 0)$.

Assim, vamos aplicar essas fórmulas em situações deste esporte, e mostrar que com elas os atletas podem aperfeiçoar cada dia mais, a fim de obter melhores resultados e, consequentemente, conquistar campeonatos. Observe a situação a seguir:

Exemplo: Um atleta faz um lançamento de um dardo a uma velocidade de 100 km/h, fazendo uma inclinação com o solo de 30 $graus$. Vamos determinar uma equação matemática que expresse essa situação. (Vamos considerar $g = 10\ m/s^2$)

Solução: Primeiramente devemos retirar os dados fornecidos pelo enunciado. Temos: $V_0 = 100\ km/h$ e $\theta = 30°$.

Com esses dados podemos calcular a velocidade inicial. Para isso vamos considerar o instante $t = 0$, logo:

$$V_{0x} = V_0 \cdot cos\,\theta \Rightarrow V_{0x} = 100 \cdot cos\,30 \Rightarrow V_{0x} = 100 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_{0x} = 50\,km/h \Rightarrow V_{0x} = 13,9\,m/s$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot sen\,\theta \Rightarrow V_{0y} = 100 \cdot sen\,30 \Rightarrow V_{0y} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{0y} = 50 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V_{0y} \cong 86,6\,km/h$$

$$\Rightarrow V_{0y} = 24\ m/s$$

Sendo conhecido $V_{0x} = 13,9\ m/s$ e $V_{0y} = 24,9\ m/s$, podemos determinar, em cada instante, a localização do dardo, determinando assim os pares ordenados. Assim, vamos calcular:

- $t = 1\ s$

$x = V_{0x} \cdot t \Rightarrow x = 13,9 \cdot 1 \Rightarrow x = 13,9$
$y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = 24 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \Rightarrow y = 24 - 5 \Rightarrow y = 19$

- $t = 2\ s$

$x = V_{0x} \cdot t \Rightarrow x = 13,9 \cdot 2 \Rightarrow x = 27,8$
$y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = 24 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \Rightarrow y = 48 - 20 \Rightarrow y = 28$

- $t = 3\ s$

$x = V_{0x} \cdot t \Rightarrow x = 13,9 \cdot 3 \Rightarrow x = 41,7$
$y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = 24 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 \Rightarrow y = 72 - 45 \Rightarrow y = 27$

- $t = 4\ s$

$x = V_{0x} \cdot t \Rightarrow x = 13,9 \cdot 4 \Rightarrow x = 55,6$
$y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = 24 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 \Rightarrow y = 96 - 80 \Rightarrow y = 16$

- $t = 5\ s$

$x = V_{0x} \cdot t \Rightarrow x = 13,9 \cdot 5 \Rightarrow x = 69,5$
$y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = 24 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 \Rightarrow y = 120 - 125 \Rightarrow y = -5$

Podemos organizar estes pares ordenados em uma tabela, para uma melhor visualização do aluno e análise dos dados. Assim, o aluno pode tomar conclusões mais concretas e verídicas.

Tempo	Eixo das abscissas	Eixo das ordenadas
1 s	13,9	19
2 s	27,8	28
3 s	31,7	27
4 s	55,6	16
5 s	69,5	-5

Tabela 3.2: Coordenadas cartesianas do lançamento de um dardo

O professor, ao expôr essa situação problema ao aluno, auxiliando na solução e depois organizando os dados obtidos em tabelas, pode fazer uma análise minuciosa, destacando a velocidade horizontal, que só aumenta, e a vertical aumenta e posteriormente diminui. Assim, o aluno percebe que o dardo, atinge o ponto máximo e depois decai, aponta para o chão. Ainda analisando a tabela, pode mostrar para o aluno que o dardo atinge o solo antes do instante $t = 5\ s$.

Podemos utilizar outros exemplos aplicando a fórmula dada para o lançamento de um dardo em outros esportes, tais como, futebol, arco e flecha, basebol, entre outros.

Capítulo 4

Considerações Finais

São muitos os desafios a serem enfrentados na profissão docente. Para vencê-los, é preciso convicção de que é possível mudar a realidade na escola por meio do trabalho na sala de aula. Seguindo esse norte, várias pesquisas na Educação Matemática procuram diferentes maneiras de ministrar o conhecimento matemático numa sala de aula. Estas pesquisas visam relatar e melhorar o ensino de Matemática através da contextualização dos exercícios, da modelagem, dos diversos e vastos recursos tecnológicos, da ludicidade e o mais importante, para mim, a História da Matemática.

Essa dissertação foi realizada com o propósito de problematizar a constituição de conceitos ligados à Trigonometria. A vivência da pesquisa demonstrou que trabalhar aplicações da Trigonometria vinculadas à questão da história da Matemática, a situações do esporte e cotidianas tornou o processo de ensino e aprendizagem mais construtivo e interativo.

Apesar de utilizar materiais primários, civilizações antigas obtiveram grandes êxitos para um dos ramos matemáticos mais importantes, a Trigonometria, como observação, prática e demonstrações para, séculos depois, tornar-se uma ciência.

Como a Astronomia era uma das áreas importantes, as suas problemáticas cotidianas para a época foram essenciais para construção de uma Trigonometria importantíssima e fundamental nos dias atuais.

No decorrer da pesquisa, as questões problemas sobre como a trigonometria pode contribuir para impulsionar o desenvolvimento no ensino aprendizagem do aluno foram todas respondidas, pois, tornaram as aulas mais dinâmicas e atraentes para o educando. Assim a matemática se torna mais significativa. No desenrolar da pesquisa, as perguntas que nortearam esse trabalho foram sendo desveladas pela convivência escolar, pela importância deste conteúdo na vida do aluno e ainda pelo confrontamento das vivências com as teorias estudadas.

A trigonometria ministrada de forma contextualizada torna-se bastante atraente e possibilita uma aprendizagem mais significativa. E, para tornar este processo mais dinâmico, é necessário que o professor tenha prazer em dar aula, demonstre essa motivação aos seus alunos e saiba profundamente o conteúdo que está sendo ministrado. Porém, temos que observar que vários professores estão com carga horária máxima, salas lotadas de alunos, escolas com poucos recursos tecnológicos e outros fatores que atrapalham a condição essencial de trabalho. Por isso, alguns professores preferem continuar ministrando aulas com o ensino tradicional.

Por meio desta pesquisa procurou-se analisar a contextualização e aplicação, principalmente no esporte, da trigonometria como modelo alternativo para o ensino desse conteúdo matemático. É relevante ressaltar que a História da Trigonometria é essencial para o aluno na compreensão e construção dos saberes em relação a esse assunto. [8] reiteram que:

Citação 1. [...]*trabalhar a história constitui um fator que contribuiu para a motivação do aluno, despertando o interesse pelo conteúdo que está sendo ensinado, evidenciando a ligação entre os diferentes ramos do conhecimento e a razão da existência de determinados conteúdos. Não se trabalha somente resultado, mas como se chega a ele, aí estamos fazendo história, ensinando Matemática, consequentemente fazendo educação.*

Portanto, quando o professor utiliza a história nas situações problemas, o aluno desenvolve habilidades matemáticas significativas e estimula o mesmo na criatividade e construções de pensamento críticos.

Assim, constatamos que o hábito de introduzir a História da Matemática, em específico a Trigonometria, os alunos irão ver uma importância maior neste conteúdo e perceberão a utilidade do mesmo no nosso cotidiano. Além disso, esta pesquisa identificou a perspectiva de novas produções em torno da inclusão da História da Matemática e da Etnomatemática em estudos relacionando Trigonometria.

Compreendemos que não é fácil ensinar, porém com dedicação e conhecimento teórico e científico, o percentual de sucesso em sala de aula é muito maior. É preciso, para isso, ser dinâmico, atualizado e conhecedor do conteúdo.

A procura pela informação do uso da Trigonometria no esporte, durante a pesquisa propiciou o surgimento de uma nova perspectiva no ensino deste ramo tão importante da matemática. Assim, cogito que os objetivos iniciais foram alcançados e outras metas atribuídas durante a pesquisa, também foram atingidos. Tais objetivos atingidos permitem promover algumas possibilidades de modificar as práticas no ensino aprendizagem da Matemática.

Diante do exposto, percebe-se que a Matemática pode ser bastante utilizada no cotidiano das pessoas, porém exige de nós um comprometimento maior em aprendê-la de forma significativa. A Trigonometria, sendo trabalhada de maneira correta em sala de aula, ou seja, dando significado a utilização do mesmo nas nossas vidas, pode ser bastante proveitosa e produtiva, pois, possibilitará uma maior compreensão do conteúdo.

Enfim, podemos afirmar que é de grande relevância a Trigonometria no nosso cotidiano e, esta deve ser ensinada em sala de aula de maneira contextualizada e atrativa ao aluno, podendo melhorar a visão deste conteúdo e da Matemática por parte de quem a estuda.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, E. M. S.: *Ludicidade e o ensino de matemática*, Papirus Editora, 2006.

[2] Brasil, M. da Educação e C.: *Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio*, Ministério da Educação e Cultura, 1999.

[3] Costa, N. M. L.: *A História da Trigonometria*, Artigo Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2003.

[4] Duarte, O.: *Histórias dos Esportes*, Editora Senac, São Paulo, 2003.

[5] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fundamentos da Física*, Editora: LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[6] Mendes, I. A.: *O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências*, EDUEPA, 2001.

[7] Polettini, A. FF.: *Análise das experiências vividas determinando o desenvolvimento profissional do professor de matemática*, BICUDO, MAV Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

[8] Britto, S. L. M., BAYER, A.: *O uso da História no ensino da Matemática e a opinião dos professores de Matemática do Ensino Médio da 2ª CRE quanto ao uso desse recurso*, Revista Acta Scientiae, Canoas, 2007.

[9] Pavanello, R. M.: *A pesquisa na formação de professores de matemática para a escola básica*, Educação Matemática em Revista, 2003.

[10] Aranão, I. V. D.: *A matemática através de brincadeiras e jogos*, Editora: Papirus, Campinas, 2007.

[11] BOYER, C. B.: *História da Matemática*, Edgard Blücher Ltda,Trad. de Elza Gomide, São Paulo, 1996.

[12] BELII, I.: *Johann Muller (Regiomontanus) 1436-1476*, Moscou, Naúka, 1985.

[13] CHACE, AB.: *he Rhind Mathematical Papyrus volume 8-Colection Classics in Mathematics Education of The National Council of Teachers of Mathematics, NC Classics TM 2 Edição*, USA, 1986.

[14] PARLAMIDO, S.: *Trigonometria: Da História para a sala de aula*, Trabalho de Conclusão de Curso - UFSCar/ São Carlos: Departamento de Matemática, 2008.

[15] GRANDO, R. C.: *O conhecimento matematico e o uso de jogos na sala de aula*, Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas - SP, 2000.

[16] HOWARD, E.: *Introdução à história da matemática*, Tradução Hygino H. Domingues,Editora da UNICAMP, 1995.

[17] BERLINGHOFF, W. P., GOUVÊA, F. Q.: *A matemática através dos tempos*, Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[18] AABOE, A.: *Episódios da história antiga da Matemática*, Rio de Janeiro-SBM, 1984.

[19] SMITH, D. E.: *History of Mathematics*, Courier Corporation, New York, 1958.

[20] SAMPAIO, A. F.: *Matemágia: História, aplicação e jogos matemáticos*, Papirus, Campinas - SP, 2005.

[21] WALLIS, D. A.: *History of Angle Measurement*, From Pharaohs to Geoinformatics. Cairo, Egito, 2005.

[22] MIGUEL, A., BRITO, A. J., CARVALHO, D. L., MENDES, I. A.: *História da Matemática em Atividades Didáticas*, São Paulo: Livraria da Física, 2009.