UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Resolução de problemas via Teoria de Grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica.

SÃO JOÃO DEL-REI
2017

DANILA DE FÁTIMA CHAGAS ASSIS

Resolução de problemas via Teoria de Grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Ávila.

SÃO JOÃO DEL-REI

2017

ASSIS, Danila de Fátima Chagas

Resolução de problemas via Teoria de Grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica / Danila de Fátima Chagas Assis. - 2017

150 páginas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Ávila.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei, Departamento de Matemática e Estatística, Mestrado Profissional em Matemática, 2017.

1. Matemática. 2. Teoria dos Grafos. 3. Inserção Curricular. 4. Resolução de Problemas. 5. Ensino Médio.

DANILA DE FÁTIMA CHAGAS ASSIS

Resolução de problemas via Teoria de Grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica.

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de São João del-Rei.

São João del-Rei, 20 de outubro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Ávila
Universidade Federal de São João del-Rei

____

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Universidade Federal de São João del-Rei

____

Prof. Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio
Universidade Federal de Uberlândia

Dedico este trabalho às minhas filhas Maria Luísa, Ana Letícia e Isabel Lara e desejo que a minha atitude possa servir de incentivo e exemplo, a fim de que possam ir bem mais longe que a sua mãe foi capaz.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que possibilitou que eu chegasse até aqui, iluminando cada passo desse árduo caminho, também a Nossa Senhora Aparecida por sempre interceder por mim junto ao Pai, colocando pessoas abençoadas em meu caminho.

Ao meu esposo, Crézio Nogueira de Assis, pelo amor, compreensão e apoio incondicional neste período de conquista e abnegação, sem ele não teria sido possível realizar este projeto.

Às minhas lindas e amadas filhas, valiosos presentes de Deus em minha vida, por serem minha motivação para lutar sempre, por me compreenderem e por entenderem os momentos pelos quais as privei de minha atenção, não dedicando a presença que elas mereciam.

Aos meus familiares, pelo apoio, compreensão e paciência. Peço também perdão pelas muitas ausências.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, que sempre foram muito unidos e solidários, procurando sempre ajudar uns aos outros em todos os aspectos e por todos os períodos que dividimos juntos, nos quais tivemos o prazer de experimentar derrotas e vitórias.

Agradeço aos colegas Expedito Pires Junior e Eliane dos Santos Ferreira, que me acompanharam na tarefa árdua e prazerosa de estudar e obter sucesso no exame de qualificação.

Ao colega Robson Resende de Miranda, não só por ter me acolhido em sua casa, mas também pelo grande apoio que me deu durante todo o curso.

À amiga e colega Andréa Cristina Rocha Cantarutti, pela companhia nos dois anos de viagens semanais e pelo exemplo de dedicação e responsabilidade.

À professora mestre Mariana Resende Oliveira, pela inspiração, diálogo, incentivo, carinho e respeito dispensados durante todo o percurso do mestrado. A sua amizade certamente é um dos legados mais importantes de todo esse período de aprendizagem.

Ao querido professor Doutor Francinildo Nobre Ferreira, pela dedicação, paciência, incentivo e sabedoria, os quais foram fundamentais e servem de exemplo de como ser um excelente professor.

Aos membros da banca, em especial ao meu orientador professor doutor Jorge Andrés Julca Ávila, por ter acolhido o tema que propus e pela confiança depositada em minha capacidade.

Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito. Não somos o que deveríamos ser, não somos o que iremos ser, mas graças a Deus, não somos o que éramos.

Marthin Luther King

RESUMO

A sociedade contemporânea passa, cada vez mais rapidamente, por mudanças, muitas vezes recorrentes dos avanços tecnológicos, que causam grande impacto na vida das pessoas. A escola, como parte integrante desta sociedade, também deve adaptar o currículo e as metodologias de ensino às exigências desta nova realidade. Atualmente, o estudo de grafos não consta, nos documentos oficiais publicados pelo Ministério da Educação, como um conteúdo obrigatório no currículo de Matemática da Educação Básica. Foram apontadas algumas reformas, ocorridas nos últimos anos, em aspectos legais e curriculares da Educação Brasileira que possibilitam, ainda que seja de caráter introdutório, a inserção da Teoria de Grafos na Educação Básica, pois tais reformas direcionam para contextualização, modelagem, resolução de problemas, entre outros aspectos naturais à teoria. Uma vez que trazer problemas reais para dentro da sala de aula é um desafio ao professor, e resolvê-los com técnicas simples na sala de aula é um desafio ainda maior, o presente trabalho tem como objetivo realizar uma pequena experiência em que essa dupla tarefa é conduzida com algumas técnicas simples de grafos aplicadas a problemas do cotidiano dos alunos. Os conceitos introdutórios da Teoria de Grafos são de fácil compreensão, mesmo para alunos em uma fase inicial da sua formação, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, embora os professores de Matemática, em geral não estejam familiarizados com a Teoria de Gafos. Adotamos a investigação bibliográfica e a pesquisa exploratória para tratar o tema em questão, procurando definir e esclarecer a teoria. A pesquisa realizada, foi um estudo de caso realizado com alunos de uma escola da rede pública, localizada no município de Alfredo Vasconcelos, no estado de Minas Gerais.

Palavras-chave: grafos, Teoria de Grafos, grafos no Ensino Médio, grafos no Brasil.

ABSTRACT

Contemporary society is changing more and more rapidly, often recurring changes in technology, which have a great impact on people's lives. The school, as an integral part of this society, must also adapt the curriculum and teaching methodologies to the requirements of this new reality. Currently, the study of graphs does not appear in official documents published by the Ministry of Education as a mandatory content in the Mathematics curriculum of Basic Education. It was pointed out some reforms, in recent years, in legal and curricular aspects of Brazilian Education that allow, although it is of an introductory character, the insertion of Graph Theory in Basic Education, since such reforms direct to contextualization, modeling, problem solving, among other natural aspects to the theory. Since bringing real problems into the classroom is a challenge to the teacher, and solving them with simple techniques in the classroom is an even greater challenge, the present work aims to accomplish a small experience in which this dual task is conducted with some simple techniques of graphs applied to students' daily problems. The introductory concepts of Graph Theory are easy to understand, even for students in the early stages of their formation, both in Elementary and High School, although mathematics teachers are generally not familiar with the Theory of Glasses. We adopted bibliographic research and exploratory research to address the issue in question, seeking to define and clarify the theory. The research carried out was a case study carried out with students from a public school, located in the municipality of Alfredo Vasconcelos, in the state of Minas Gerais.

Key words: graphs, Theory of Graphs, graphs in High School, graphs in Brazil.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	–	Base Nacional Comum Curricular
CBC	–	Currículo Básico Comum
CNE	–	Conselho Nacional de Educação
DCN	–	Diretrizes Curriculares Nacionais
DEMAT	–	Departamento de Matemática e Estatística
EJA	–	Educação para Jovens e Adultos
ENEM	–	Exame Nacional do Ensino Médio
IBGE	–	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IMPA	–	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
LDBEN	–	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	–	Ministério da Educação
OBMEP	–	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCEM	–	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCNEM	–	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCNs	–	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCV	–	Problema do Caixeiro Viajante
PNLD	–	Programa Nacional do Livro Didático
PROFMAT	–	Mestrado Profissional em Matemática
SBM	–	Sociedade Brasileira de Matemática
TICs	–	Tecnologias da Informação e Comunicação
UFSJ	–	Universidade Federal de São João del-Rei

LISTA DE SÍMBOLOS

$V(G)$	–	Conjunto dos vértices do grafo G
$E(G)$	–	Conjunto das arestas do grafo G
$G = (V, E)$	–	Grafo G com V vértices e E arestas
$\|V\|$	–	Número de vértices do conjunto V
$\|E\|$	–	Número de arestas do conjunto E
$e = v_iv_j$	–	Aresta que liga os vértices v_i e v_j
(v_i, v_j)	–	Aresta orientada
$N_G(v_i)$	–	Vizinhança aberta do vértice v_i do grafo G
$N_G[v_i]$	–	Vizinhança fechada do vértice v_i do grafo G
$d_G(v_i)$	–	Grau do vértice v_i
$d_G^+(v_i)$	–	Semigrau exterior do vértive v_i
$d_G^-(v_i)$	–	Semigrau interior do vértice v_i
$d(G)$	–	Grau do grafo G
$\Delta(G)$	–	Grau máximo do grafo G
$\delta(G)$	–	Grau mínimo do grafo G
K_n	–	Grafo completo com n vértices
N_k	–	Grafo nulo com k vértices
$\overline{G}$	–	Grafo complementar do grafo G
$K_{p,q}$	–	Grafo bipartido completo, sendo p e q a cardinalidade dos subconjuntos independentes
C_n	–	Grafo cíclico com n vértices
T_G	–	Árvore geradora do grafo G
v	–	Número de vértices do grafo
e	–	Número de arestas do grafo
f	–	Número de faces do grafo
$\chi(G)$	–	Número cromático do grafo G
$\chi'(G)$	–	Índice cromático do grafo G

SUMÁRIO

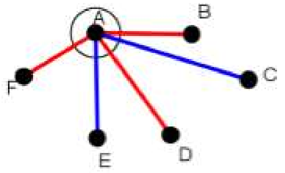
1. INTRODUÇÃO

Um dos anseios de muitos professores de Matemática é que os alunos entendam e gostem ou, pelo menos, interessem-se por sua disciplina. Na busca por realizar esse anseio, o professor põe-se constantemente a pesquisar novos recursos que tornem sua aula mais interessante e dinâmica. Ao pesquisar sobre grafos, percebi que resolver alguns problemas com o auxílio da Teoria de Gafos poderia deixar meus alunos mais motivados. O interesse pelo estudo da Teoria de Grafos surgiu com o problema de relacionamento entre pessoas, na disciplina obrigatória, Resolução de Problemas, do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). O problema era assim enunciado:

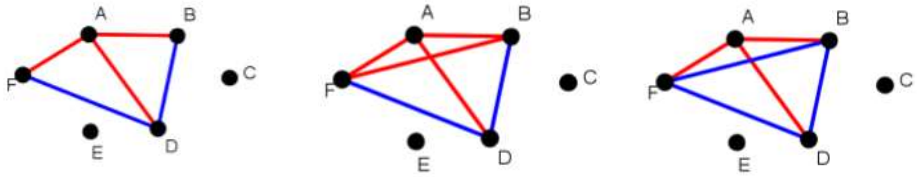
Problema (relacionamento entre pessoas). *Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (admitimos que, se a conhece b, então b conhece a).*

Solução: Temos 6 pessoas em uma reunião, vamos demonstrar que existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente. Um grafo pode ser simplesmente descrito como um conjunto de objetos que se conecta em pares. Os elementos existentes nesse conjunto são chamados de vértices do grafo. As ligações entre os elementos são chamadas de arestas do grafo. Modelando o problema na linguagem de grafos, onde as pessoas são os vértices, e cada par de vértice é unido por arestas. Para demonstrar isso, podemos pintar as arestas de 2 cores, uma cor se as pessoas representadas pelo vértice se conhecem, e outra cor caso contrário. Pelo *Princípio da Casa dos Pombos*, pelo menos 3 arestas têm a mesma cor. Fixemo-nos em um vértice de tal grafo, no vértice A por exemplo, nesse vértice estão ligadas 5 arestas, onde devemos ter pelo menos 3 dessas arestas da mesma cor. Digamos que 3 destas arestas sejam vermelhas e que elas vão para os vértices F, D e B, FIGURA 1(a). Se uma das arestas no triângulo FDB, FIGURA 1(b), for vermelha, por exemplo a aresta ligando F a B, então temos um triângulo AFB, FIGURA 1(c), caso contrário temos um independente formado pelos vértices F, B e D, FIGURA 1(d). Assim, existe um triângulo com as 3 linhas vermelhas ou azuis, então existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

FIGURA 1 – Problema de relacionamento entre pessoas



(a)



(b) (c) (d)

FONTE: Adaptada de MARTINS, p. 38-39 (2015)

A resolução de problemas tem um papel fundamental no ensino de Matemática desde as séries iniciais. O estudante deve compreender que a interpretação de um problema pode ser transcrita através de uma modelagem antes de encontrar sua solução. A utilização de um desenho para modelar problemas enriquece o conhecimento do aluno e oferece ferramentas adequadas para a tomada de decisões na busca de uma solução, a qual pode ser obtida manualmente ou com o auxílio de um computador.

Apesar de não possuir nenhum conhecimento de Teoria de Grafos no início deste trabalho, aceitei o desafio de aprender algo novo e acabei me encantando com essa teoria, vislumbrando as várias possibilidades de aplicações. A Teoria de Grafos é parte dos conteúdos de um ramo da Matemática conhecido como Matemática Discreta[1], sendo uma área que vem ganhando mais espaço, desde o início do século XX, em função do uso intenso de computadores, os quais trabalham com estruturas discretas.

Com o atual avanço da tecnologia, os alunos estão cada vez mais imersos neste mundo tecnológico. Diante disso, cabe à escola oferecer subsídios para atender às demandas da sociedade. Hoje, as tecnologias, principalmente da informação, desempenham um papel fundamental na sociedade em que o trabalho mecânico tem ficado à margem e dado espaço a atividades que exijam o senso crítico, a criatividade e o raciocínio lógico. Assim, a formação escolar do indivíduo deve ser pautada na construção do pensamento, na formalização de ideias, na criação e intervenção de inúmeras situações, no desenvolvimento humano, cultural, social, pessoal, lúdico, profissional, dentre outros, visando atender a essa nova demanda.

[1] Matemática Discreta é o estudo das estruturas algébricas que são fundamentalmente discretas, em vez de contínuas.

Em virtude dessa metamorfose no cenário geral da sociedade e, consequentemente, da educação, torna-se cada vez mais necessário incluir nas aulas, particularmente de Matemática, atividades que sejam interessantes, desafiadoras e que estejam conectadas ou tenham aplicações na área da tecnologia. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) indicam que estas atividades desenvolvem no aluno o espírito argumentativo, o senso crítico, a interpretação, dentre outras habilidades.

O surgimento de uma sociedade virtual nos faz refletir sobre os rumos da educação, especialmente, da Educação Básica. A escola, que é o principal elemento transformador de uma sociedade, precisa incluir em seus currículos temas que envolvam tratamento e interpretação da informação. As exigências do mundo do trabalho estão cada vez mais relacionadas com decidir, escolher o melhor e menor caminho, minimizar gastos, enfim, otimizar em tudo. Essas atividades estão diretamente relacionadas ao uso do computador e ao desenvolvimento de *softwares*.

Para atender a essa demanda do século XXI, a Matemática deve também oferecer sua contribuição, a fim de desenvolver nos alunos essas novas competências e habilidades. Assim, na construção dos currículos atuais da Educação Básica, especialmente de Matemática, deve haver reflexões no sentido de oferecer conceitos que forneçam à sociedade resultados práticos para soluções de problemas diários, bem como bases sólidas que forneçam ao aluno subsídios para ingressar no campo do desenvolvimento científico e tecnológico.

Dessa forma, visando atender algumas das necessidades atuais do ensino da Matemática na Educação Básica, sugerimos introduzir nesse nível de ensino, atividades de Matemática Discreta ligadas à Teoria de Grafos. Essa é uma ferramenta didático – pedagógica poderosíssima que está em ascendência e diretamente ligada à resolução de diversos problemas atuais na informática, na engenharia, na química, na psicologia, na indústria e em outras áreas do conhecimento. Apesar disso, pouco tem sido estudada nos cursos de licenciatura em Matemática e na Educação Básica das escolas brasileiras.

No Ensino Médio brasileiro, percebe-se que a Matemática Discreta tem se reduzido ao estudo de Análise Combinatória e Probabilidade. A inclusão de grafos no Ensino Médio em sala de aula, vem de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, pois elas defendem que estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa [...] enfrentar problemas de diferentes naturezas.

Nesse sentido, estudar elementos da Matemática Discreta pode significar diversificação da Matemática para além dos elementos algébricos, tão marcantes em estudantes da Educação Básica. É importante destacar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) sugerem discussão do uso de problemas da Teoria de Grafos no Ensino Médio:

> No Ensino Médio, o termo combinatória está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola, são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler.

A Teoria de Grafos é uma área extremamente jovem quando se tomam como referências as origens do pensamento matemático. Surgiu em 1736 como um desafio, hoje conhecido como "As Pontes de Königsberg". Problemas do cotidiano como, por exemplo, gerenciar tarefas conflitantes, otimizar o sistema de coleta de lixo e de distribuição de cartas e encomendas, determinar como deve ser desenhado o circuito de uma placa e muitas outras situações podem ser modeladas através de grafos. Apesar do potencial motivador que possui, o tópico Teoria de Grafos não está presente formalmente no currículo da Educação Básica brasileira, mesmo abrangendo inúmeras situações que poderiam aproximar a Matemática trabalhada nas salas de aula a problemas encontrados no cotidiano.

Apesar de a maior parte dos conceitos desenvolvidos nessas áreas de estudo serem inacessíveis a alunos do Ensino Médio, uma ideia geral do que tratam, ou mesmo problemas mais simples resolvidos através desses conceitos podem ser apresentados aos alunos, como uma forma de terem contato com essa "Matemática contemporânea" e compreenderem que a Matemática é uma ciência viva e dinâmica que busca, entre outras coisas, oferecer subsídios para o desenvolvimento humano e respostas para os anseios da sociedade.

O estudo de grafos seria uma boa alternativa para atender aos alunos nesse quesito, por se tratar de uma Matemática simples, porém de grande utilidade em pequenos problemas de modelagem. Assim, pela sua simplicidade, é nossa convicção que esse tópico não pode ser deixado de fora das salas de aula da Educação Básica de Matemática, em particular do Ensino Médio.

Muitos alunos apresentam dificuldades em compreender os conteúdos da forma como são abordados e vários são os motivos que levam a entender essas dificuldades: falta de hábito de estudos, desinteresse por não conseguir aprender, ausência de atividades contextualizadas e que desenvolvam o raciocínio, dentre outros fatores. Através da experiência em sala de aula, constatou-se a dificuldade de aprendizagem e a baixa motivação dos alunos pela falta de oportunidade em discutir a associação e a aplicação de conteúdos da Matemática com os acontecimentos familiares do cotidiano.

Este trabalho traz uma parte da história do desenvolvimento da Teoria de Grafos, alguns dos importantes teoremas que compõem tal tópico e apresenta sugestões de aplicações do conteúdo voltado aos alunos da Educação Básica, preferencialmente do Ensino Médio, com o intuito de criar uma aproximação entre a Matemática vista nas salas de aula e as situações cotidianas em que o conhecimento pode ser aplicado. A partir dessa aproximação com o cotidiano, espera-se que haja maior aceitação da Matemática como uma importante ferramenta que pode ser utilizada nas mais diversas situações do dia a dia, mesmo àqueles que não têm o intuito de desenvolver seus estudos na área das Ciências Exatas.

Um enorme desafio enfrentado pelo professor de Matemática, diariamente, é não apenas o ensino da matéria em si, mas também a frequente falta de motivação para aprender por parte dos alunos. Por essa e outras razões, é de extrema importância que os alunos entendam o que eles estão estudando, para que serve e como eles podem usar suas vidas.

Muitos conceitos básicos da Teoria de Grafos estão presentes na vida de cada um de nós, pois todos nós usamos serviços de transporte ou percorremos certos caminhos para cumprir nossos afazeres diários ou semanais. A aplicabilidade foi uma das razões pelas quais escolhemos o conceito da Teoria de Grafos como ferramenta de ensino em uma turma do Ensino Médio.

Levando em consideração que o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) procura, entre outras coisas, avaliar como o aluno resolve problemas reais, esta dissertação propõe o uso da Teoria de Grafos para resolver problemas reais do cotidiano. Uma habilidade que certamente todos devem desenvolver para que tenham êxito em suas profissões é a capacidade de raciocínio, análise, modelagem, etc. Partindo desse ponto, procuramos por um conteúdo matemático que tenha boa aplicabilidade na vida dos alunos, de modo que despertasse seu interesse, e também que os fizesse raciocinar, e não apenas estudar para decorar fórmulas ou cálculos e “passar de ano”, aprendendo a matéria de maneira mecânica e sem resultados posteriores.

Primeiramente, apontamos que a Teoria de Grafos ganhou destaque na Matemática já no século XX. Sendo uma teoria nova e pouco conhecida, mas que tem ganhado um amplo espaço em virtude de suas aplicações nos diversos campos da Matemática e nas outras ciências, a exemplo das engenharias e Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs). Um grafo pode ser simplesmente descrito como um conjunto de objetos que se conecta em pares. Os elementos existentes nesse conjunto são chamados de vértices do grafo. As ligações entre os elementos são chamadas de arestas do grafo. Percebendo que os componentes dos grafos podem estar ligados uns com os outros, torna-se evidente sua significância e utilidade nas áreas de telecomunicações, química, genética, logística, informática, engenharia elétrica, redes de computadores, conexão de voos aéreos, entre outros. Contudo, evidenciamos que essas ligações podem ser palpáveis ou não, como no caso das redes sem fio.

Buscando atingir os objetivos descritos acima, organizamos nosso trabalho da seguinte forma: no segundo capítulo, apresentamos aspectos históricos da Teoria de Grafos, destacando o problema que deu impulso ao desenvolvimento da teoria; no terceiro capítulo fizemos um breve passeio cronológico mostrando o desenvolvimento da Teoria de Grafos; no quarto capítulo formalizamos conceitos básicos de grafos e suas principais características através de algumas definições, teoremas e corolários; no quinto capítulo destacamos os problemas que deram impulso ao desenvolvimento da teoria e alguns conceitos básicos; no sexto capítulo tentamos justificar a possibilidade de inclusão do conteúdo de grafos no Currículo da Educação Básica; no sétimo capítulo continuamos com a apresentação de alguns materiais didáticos utilizados para o Ensino Fundamental Anos Finais[2] e Ensino Médio; no oitavo capítulo descrevemos a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa, desde a escolha do público-alvo até os relatos de como ocorreram as aulas realizadas; e apresentamos no último capítulos os resultados, as considerações e a análise observada em relação aos pré-teste de conteúdo, pós-teste de conteúdo, e a comparação através de tabelas e gráficos dos resultados obtidos. Assim, esperamos que o trabalho estimule professores da Educação Básica a utilizar a Teoria de Grafos na resolução de problemas.

[2] Ensino Fundamental implementado pela Lei n.º 11.274/2006, organizado em 9 anos e ofertado para a faixa etária de 6 a 14 anos. É dividido em anos iniciais, com duração de 5 anos, para a faixa etária de 6 a 10 anos, correspondendo ao período que vai do 1º ao 5º ano; e anos finais, com duração de 4 anos, para a faixa etária de 11 a 14 anos, correspondendo ao período que vai do 6º ao 9º ano.

2. HISTÓRIA DA TEORIA DE GRAFOS

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico da Teoria de Grafos. Todas as fontes consultadas para este trabalho, BOAVENTURA, BOAVENTURA NETTO, JURKIEWICZ e LUCCHESI, são unânimes ao eleger a resolução do problema das pontes de Königsberg como o marco inicial na história da Teoria de Grafos.

A Teoria de Grafos é a mais recente teoria na história da Matemática. Acontece no século XVIII, o problema de grafos mais conhecido, o problema das sete pontes de Königsberg resolvido por Leonhard Euler.

Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) nasceu em Basileia e faleceu em São Petersburgo, vítima de um acidente vascular cerebral, um retrato dele é mostrado na FIGURA 2. Euler foi um grande matemático suíço e com auxílio de seu professor Jean Bernoulli[3], entrou para a Academia de São Petersburgo, se tornando o principal matemático já aos vinte e seis anos.

FIGURA 2 – Euler

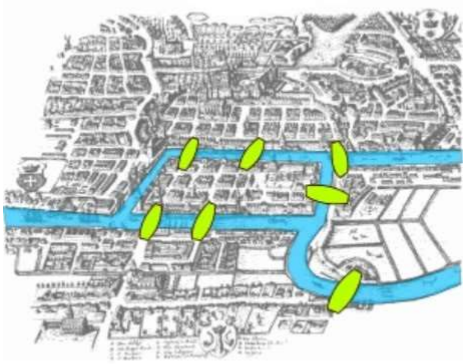
FONTE: Wikipedia (Acesso em: 06 jun. 2017)

Euler se dedicou a vários ramos da Matemática Pura e Aplicada[4], fazendo importantes descobertas em campos variados nos cálculos e grafos. A Teoria de Grafos foi se desenvolvendo desde então, e atualmente, é uma das áreas mais importantes e estudadas na Matemática Aplicada. Essa importância se deve ao fato de ser uma poderosa ferramenta para modelagem de diversas situações reais em física, biologia, engenharia, pesquisa operacional, química, entre outras.

[3] Jean Bernoulli (1667 — 1748) foi um matemático suíço.
[4] A Matemática Pura é a Matemática que não têm ou não necessita se preocupar com sua possível aplicação em uma determinada área do conhecimento e a Matemática Aplicada é um ramo da Matemática no qual se trata da aplicação do conhecimento matemático a outros domínios.

Um grafo é uma estrutura matemática simples, muito útil na modelagem e resolução de diversos problemas. A Teoria de Grafos nasceu de um problema prático na cidade de Kaliningrado, antiga Königsberg, na Rússia, sendo um nascimento diferente de muitos dos ramos da Matemática que nasceram abstratos e somente muitos anos depois vieram a ter aplicações práticas. De acordo com a história da Matemática, na cidade de Königsberg, o Rio Pregel atravessa o centro da cidade e se ramifica formando uma ilha que está ligada à parte restante da cidade por sete pontes conforme mostra a FIGURA 3. Dizia-se que os habitantes da cidade tentavam efetuar um percurso que, partindo da margem, passasse uma única vez por cada uma das sete pontes, retornando à margem de partida.

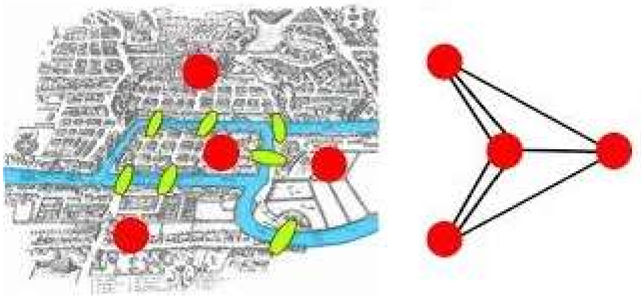
FIGURA 3 – As sete pontes de Königsberg



FONTE: Universo Racionalista (Acesso em: 6 jun. 2017)

Euler demonstrou que o problema não tinha solução. Generalizou o resultado e enunciou o seu teorema em três regras: se há mais de duas áreas com um número ímpar de pontes, então essa entrada e saída é impossível. Se o número de pontes for ímpar para duas áreas, então é possível se começar em qualquer uma das duas áreas. Se não existem áreas com um número ímpar de pontes, então pode ser realizada a entrada e a saída, iniciando a partir de qualquer área. Veja representação da cidade de Königsberg na FIGURA 4.

FIGURA 4 – Grafo do problema das sete pontes de Königsberg



FONTE: Universo Racionalista (Acesso em: 6 jun. 2017)

Em resumo analisaremos a FIGURA 4, onde as arestas ligam os pontos, de acordo com a disposição das pontes dada no enunciado do problema. A FIGURA 4 é o primeiro esboço de um grafo como modelo matemático para resolver um problema. De modo geral um grafo é um conjunto finito de pontos, chamado de vértices do grafo, e um conjunto finito de segmentos, chamado de arestas do grafo.

Oficialmente a Teoria de Grafos teve seu início com Euler, mas também contou com o importante auxílio do irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1865), um retrato dele é mostrado na FIGURA 5, que inventou um jogo simples que consistia na busca de um percurso envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez. Na segunda metade do século XX, a Teoria de Grafos ganhou um forte impulso com aplicações em problemas de otimização organizacional.

FIGURA 5 – Hamilton

FONTE: The Famous People (Acesso em: 6 jun. 2017)

Atualmente, são publicadas centenas de artigos, dissertações e teses sobre grafos, muitos deles motivados pela solução de problemas reais, o que mostra a importância desse campo de estudo da Matemática Aplicada e que também justifica sua abordagem na Educação Básica e Superior.

A atividade de resolver problemas é constante na vida das pessoas. Para Pólya[5], as principais etapas na resolução de um problema são, compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação. Nos problemas envolvendo grafos, é extremamente importante desenvolver a capacidade de resolver situações desafiadoras, verificar regularidades, usar os próprios erros para buscar novas alternativas e validar soluções.

Há muitas aplicações da Matemática em outras áreas das ciências como Física, Biologia, Química. Áreas como bioinformática, processamentos de dados, engenharia genética, ciências da computação, algoritmos e otimização estão repletas de problemas cuja solução envolve modelagem com Matemática Discreta.

Por conta das constantes mudanças sofridas pela sociedade, principalmente tecnológicas, já existem discussões no sentido de modificar o currículo escolar de Matemática. Para os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), o currículo deve proporcionar contextualização, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. Com isso, a modelagem e resolução de problemas de tópicos de Matemática Discreta, principalmente grafos, irão contribuir para um ensino de Matemática sintonizado com o atual desenvolvimento tecnológico.

[5] George Pólya (1887 — 1985) foi um matemático húngaro.

3. DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DE GRAFOS

Depois dos resultados de Euler, passou-se mais de um século para que outros resultados fossem publicados. Estudar a cronologia das pesquisas sobre grafos ajudará a entender um pouco seu desenvolvimento, permitindo assim, prever os novos rumos para teoria. Segundo as fontes pesquisadas, BOAVENTURA, BOAVENTURA NETTO, JURKIEWICZ e LUCCHESI, buscamos, no QUADRO 1, retratar cronologicamente como os matemáticos foram contribuindo para aprimorar a teoria.

QUADRO 1 – A evolução do conceito da Teoria de Grafos e os matemáticos

1736	**1847**	**1852**	**1857**
O suíço Euler resolve o problema das pontes de Königsberg, o primeiro resultado em Teoria de Grafos.	O alemão Kirchhoff criou a Teoria das Árvores, ao utilizar modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos.	O sul-africano Guthrie cria o problema das quatro cores: todo mapa pode ser colorido usando apenas 4 cores.	O britânico Cayley aplica o conceito de árvores à química orgânica, enumerando os isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados.
			
Leonhard Paul Euler (1707 – 1783)	Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887)	Francis Guthrie (1831 – 1899)	Arthur Cayley (1821 – 1895)

1859 O irlandês Hamilton inventou um jogo sem aplicação prática, mas que encontraria aplicação no campo da pesquisa operacional.	**1869** O alemão Jordan estuda o conceito árvores de um ponto de vista estritamente matemático.	**1878** O britânico Sylvester utiliza pela primeira vez o termo grafo.	**1879** O britânico Kempe dá a primeira demonstração errada, mas famosa do problema das 4 cores.
 William Rowan Hamilton (1805 – 1865)	 Wilhelm Jordan (1842 – 1899)	 James Joseph Sylvester (1814 – 1897)	 Alfred Bray Kempe (1849 – 1922)
1880 O escocês Tait divulgou uma segunda demonstração para o problema das 4 cores, mas também falha.	**1890** O britânico Heawood prova o teorema das 5 cores.	**1912** O americano Birkhoff define polinômios cromáticos.	**1927** O austríaco Menger demonstrou o teorema da desconexão de itinerários em grafos.
 Peter Guthrie Tait (1831 – 1901)	 Percy John Heawood (1861 – 1955)	 George David Birkhoff (1884 – 1944)	 Karl Menger (1902 – 1985)

1928	**1930**	**1931**	**1936**
O britânico Ramsey buscou responder se era possível extrair de um conjunto desordenado alguma ordem, dando assim início à Teoria de Ramsey.	O polonês Kuratowski encontrou uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo.	O americano Whitney desenvolve e cria a noção de grafo dual.	O húngaro König escreve o primeiro livro dedicado à Teoria de Grafos: *a Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.*
			
Frank Plumpton Ramsey (1903 – 1930)	Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980)	Hassler Whitney (1907 – 1989)	Dénes Kőnig (1884 – 1944)
1941	**1941**	**1948**	**1962**
O britânico Brooks enunciou um teorema fornecendo um limite para o número cromático de um grafo.	O húngaro Turán cria um ramo conhecido como Teoria Extremal de Grafos.	O britânico Tutte resolveu o problema da existência de uma cobertura minimal em um grafo.	O iraniano Hakimi descobre a caracterização recursiva e construtiva de sequências estritamente gráficas.
			
Rowland Leonard Brooks (1916 – 1993)	Paul Turán (1910 – 1976)	William Thomas Tutte (1917 – 2002)	Seifollah Louis Hakimi (1932 – 2005)

1962 Ford e Fulkerson desenvolveram a teoria dos fluxos em redes.	**1968** No I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, foram publicados os primeiros trabalhos sobre grafos no Brasil.	**1973** Os americanos Edmonds e Johnson resolvem o problema do carteiro chinês.	**1977** O americano Appel e o alemão Haken resolvem o problema das 4 cores por meios computacionais.
 Lester Randolph Ford (1886 – 1967)  Delbert Ray Fulkerson (1924 – 1976)	SOBRAPO Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (1968)	 Jack R. Edmonds (1934)  Ellis Lane Johnson (1938)	 Kenneth Ira Appel (1932 – 2013)  Wolfgang Haken (1928)

FONTE: Elaborado pela autora

4. CONCEITOS DA TEORIA DE GRAFOS

Será feita agora uma breve introdução aos conceitos básicos de grafos. A Teoria de Grafos estuda as relações entre os elementos de um determinado conjunto. Vale a pena lembrar também que alguns autores divergem na hora de nomear e denotar alguns conceitos em grafos. Sempre que isso aconteceu, foi utilizado o nome mais frequente entre as fontes pesquisadas, BOAVENTURA, BOAVENTURA NETTO, JURKIEWICZ e LUCCHESI.

Definição 1 (Grafo). Um grafo G é uma estrutura composta por dois conjuntos finitos, o conjunto não-vazio de vértices $V(G)$, onde $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, e um conjunto, que pode ser vazio, de arestas $E(G)$[6], onde uma aresta $e \in E(G)$ representada por $e=v_iv_j$ sempre que associa esses dois vértices v_i e $v_j \in V(G)$. Podemos representar o grafo G por $G=(V,E)$, onde $V=V(G)$ e $E=E(G)$.

Definição 1.1 (Ordem do grafo). O número de vértices de um grafo $G=(V,E)$ será representado por $|V|$, sendo a cardinalidade[7] de $V(G)$ a ordem do grafo G.

Definição 1.2 (Dimensão do grafo). O número de arestas de um grafo $G=(V,E)$ será representado por $|E|$, sendo a cardinalidade de $E(G)$ a dimensão do grafo G.

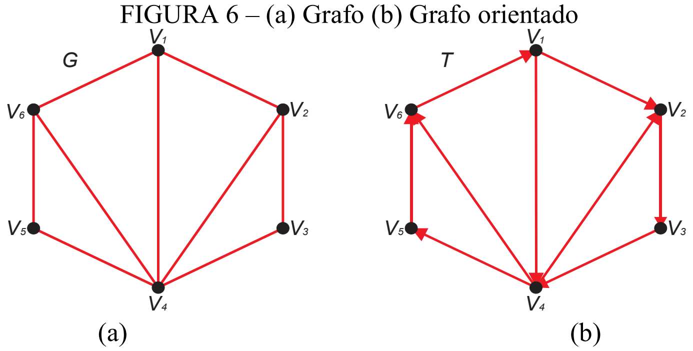
Grafos são geralmente representados por diagramas, onde os vértices correspondem a pontos no plano e as arestas correspondem a segmentos ligando os vértices correspondentes.

Definição 2 (Grafo orientado). As arestas podem ter uma orientação associada a um par ordenado de vértices, (v_i,v_j), onde v_i é o início e v_j é o final desta aresta. Se as arestas têm uma orientação, são chamadas de arcos e representa-se por setas. A esse grafo, dá-se o nome de grafo orientado.

---

[6] O uso da letra E para denotar a família das arestas de G deriva da palavra inglesa para aresta, *edge*.
[7] Na matemática, a cardinalidade de um conjunto é uma medida do "número de elementos do conjunto".

FIGURA 6 – (a) Grafo (b) Grafo orientado



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 6, temos dois diagramas, onde os pontos são os vértices e os segmentos ou setas são as arestas de dois grafos, o grafo $G=(V,E)$ e o grafo orientado $T=(V,E)$, onde $V(G)=V(T)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $E(G)=\{v_1v_2,v_1v_4,v_2v_3,v_3v_4,v_4v_2,v_4v_5,v_4v_6,v_5v_6,v_6v_1\}$ e $E(T)=\{(v_1,v_2),(v_1,v_4),(v_6,v_1),(v_2,v_3),(v_4,v_2),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_4,v_6),(v_5,v_6)\}$. A ordem e a dimensão de ambos os grafos são respectivamente $|V|=6$ e $|E|=9$.

Definição 3 (Incidência). Sejam v_i e v_j dois vértices e $e=v_iv_j$ uma aresta que os associa. Dizemos que a aresta e incide em v_i e em v_j. Analogamente, é dito que um vértice é incidente nas arestas às quais está associado.

Definição 4 (Vértices adjacentes). Para o par v_iv_j associado por uma aresta e dizemos que os vértices v_i e v_j são adjacentes.

Em uma ligação orientada, apenas a adjacência entre vértices não é suficiente para entender a relação entre eles. Assim, torna-se necessário indicar o sentido da ligação. Isso é feito nomeando os vértices pertencentes a essa ligação de sucessor e antecessor.

Definição 4.1 (Vértice sucessor). Um vértice é dito sucessor de outro quando existe pelo menos uma ligação entre eles e essa ligação é orientada e aponta para esse vértice em questão.

Definição 4.2 (Vértice antecessor). Um vértice é dito antecessor de outro quando existe pelo menos uma ligação entre eles e essa ligação é orientada e a indicação de direção inicia neste vértice.

Definição 4.3 (Vizinhança). A vizinhança de um vértice v_i é o conjunto dos vértices adjacentes a v_i e denotada por $N_G(v_i)$[8]. Também é possível definir uma vizinhança onde v_i está incluído, chamada de vizinhança fechada e denotada por $N_G[v_i]$.

Definição 5 (Arestas adjacentes). Duas arestas incidentes num mesmo vértice são chamadas arestas adjacentes.

Por exemplo na FIGURA 6(a), temos no grafo G as arestas $v_4v_1, v_4v_2, v_4v_3, v_4v_5$ e v_4v_6 são incidentes ao vértice v_4, assim, o vértice v_4 é adjacente aos vértices v_1, v_2, v_3, v_5 e v_6, então a vizinhança do vértice v_4 é $N_G(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$. Logo as arestas $v_4v_1, v_4v_2, v_4v_3, v_4v_5$ e v_4v_6 são adjacentes entre si, pois incidem no mesmo vértice.

Definição 6 (Arestas múltiplas). Quando duas ou mais arestas forem incidentes a um mesmo par de vértices se dá o nome de arestas múltiplas.

Definição 6.1 (Multigrafo). Caso o grafo apresente arestas múltiplas será chamado de multigrafo.

Definição 7 (Laço). Quando um vértice se relaciona com ele mesmo, $e = v_iv_j$ no qual $i = j$, chamamos a aresta de laço.

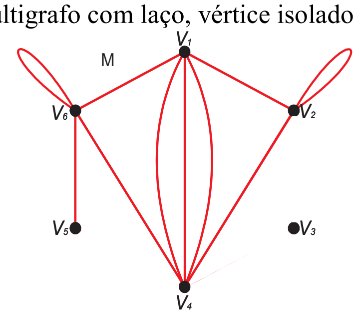
Definição 8 (Vértice isolado). Quando o vértice não se relaciona com nenhum outro vértice, chamamos de vértice isolado.

Definição 9 (Vértice pendente). Quando um vértice se relaciona com um único vértice, chamados de vértice pendente.

---

[8] O uso da letra *N* para denotar a vizinhança do vértice *v* deriva da palavra inglesa para vizinhança, *neighborhood*.

FIGURA 7 – Multigrafo com laço, vértice isolado e vértice pendente



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 7, temos um multigrafo, pois o grafo *M* apresenta arestas múltiplas, $e = v_1v_4$, que se repete no grafo por três vezes. Além das arestas múltiplas, o grafo *M* também apresenta arestas de laço, $e = v_2v_2$ e $e = v_6v_6$. O vértice v_5 é um vértice pendente do grafo *M* e o vértice v_3 é um vértice isolado do grafo *M*.

Definição 10 (Grau do vértice). O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v_i, é chamado grau do vértice v_i, simbolizado por $d_G(v_i)$[9].

Definição 10.1 (Semigraus). Em um grafo orientado podemos distinguir o grau do vértice entre dois semigraus, o semigrau exterior $d_G^+(v_i)$ que é o número de arcos que partem de v_i e o semigrau interior $d_G^-(v_i)$, que é o número de arcos que chegam a v_i, temos que

$$d_G^+(v_i) + d_G^-(v_i) = d_G(v_i) \quad (1)$$

Definição 10.2 (Grau do grafo). Seja n a ordem do grafo G. A soma dos graus dos vértices do grafo é chamada grau do grafo, dado por

$$d(G) = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \quad (1.1)$$

Teorema 1: O grau de um grafo é um número par dado por

$$d(G) = 2|E| \quad (1.2)$$

[9] O uso da letra *d* para denotar o grau do vértice *v* deriva da palavra inglesa para grau, *degree*.

Demonstração: Ao somarmos os graus dos vértices, cada aresta é contada duas vezes, logo a soma será duas vezes o número de arestas, observando que, em um laço, a aresta deve ser contada duas vezes.

■

Teorema 2: Todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração: Pelo Teorema 1, temos

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1|par}^{n} d(v_i) + \sum_{i=1|ímpar}^{n} d(v_i) \tag{1.3}$$

sabemos que a soma dos graus dos vértices é par, se omitirmos os vértices de grau par dessa soma, ainda obteremos um número par, portanto, a soma dos vértices de grau ímpar é par, e isso implica que o número de vértices de grau ímpar é par.

■

Definição 10.3 (Grau máximo). Grau máximo de um grafo *G* é o grau do vértice de maior grau em *V(G)*, denotado por *Δ(G)*.

Definição 10.4 (Grau mínimo). Grau mínimo de um grafo *G* é o grau do vértice de menor grau em *V(G)*, denotado por *δ(G)*.

Definição 10.5 (Grau médio). Grau médio de um grafo *G* é representado pelo número

$$\overline{d}(G) = \frac{1}{|V|} d(G) \tag{1.4}$$

Das definições 10.3, 10.4, 10.5 e Teorema 1, temos que

$$\delta \leq \overline{d}(G) \leq \Delta \text{ e } \overline{d}(G) = \frac{2|E|}{|V|} \tag{1.5}$$

Definição 10.6 (Número de arestas). O número de arestas em um grafo é dado por

$$|E| = \frac{d_G(v_1) + d_G(v_2) + ... + d_G(v_n)}{2} \tag{1.6}$$

Por exemplo na FIGURA 6(b), temos o grafo orientado $T = (V, E)$, onde o grau mínimo do grafo *T* é $\delta(T) = 2$, referente ao grau dos vértices *v3* e *v5*, $d_T(v_3) = d_T^+(v_3) + d_T^-(v_3) = 1 + 1 = 2$ e $d_T(v_5) = d_T^+(v_5) + d_T^-(v_5) = 1 + 1 = 2$, que são os vértices de menor grau do grafo *T*. Já o grau máximo do grafo *T* é $\Delta(T) = 5$, referente ao grau do vértice *v4*, $d_T(v_4) = d_T^+(v_4) + d_T^-(v_4) = 2 + 3 = 5$, que é o vértice de maior grau do grafo *T*. O grau do grafo *T* é $d(T) = 18$, pois o grafo *T* é de dimensão $|E| = 9$. Por consequência, o grau médio do grafo *T*, deve estar entre o grau mínimo e o grau máximo do grafo *T*, $2 \le \bar{d}(T) \le 5$, como $\bar{d}(T) = \frac{2|E|}{|V|} = \frac{18}{6} = 3$.

Um diagrama não tem nenhum significado geométrico, seu propósito é somente o de representar esquematicamente as relações de adjacência entre os vértices do grafo. Um grafo pode ser representado por diversos diagramas distintos, mas o que realmente importa é quais vértices estão ligados e não como são feitas essas ligações.

Definição 11 (Grafos isomorfos). Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$, serão ditos isomorfos se existir uma bijeção $f : V(G) \to V(G')$ que preserva incidência, tal que, para vértices distintos quaisquer v_i e $v_j \in V(G)$, tem-se

$$v_i v_j \in V(G) \Rightarrow f(v_i) f(v_j) \in V(G') \tag{2}$$

Deste modo, denota-se que $G \simeq G'$.

Teorema 3: Dois grafos isomorfos têm quantidades iguais de vértices de um mesmo grau. Em particular, têm quantidades iguais de vértices e quantidades iguais de arestas, então

$$G \simeq G' \Rightarrow |V| = |V'| \text{ e } |E| = |E'| \tag{2.1}$$

Demonstração: Sejam $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ grafos isomorfos e $f : V(G) \to V(G')$ uma bijeção que preserva incidência. Se $v_i \in V(G)$ com grau $k \geq 0$, é imediato que $f(v_i) \in V(G')$ com grau *k*, e reciprocamente. Portanto, os grafos *G* e *G'* têm quantidades iguais de vértices de grau *k*, digamos a_k, de maneira que

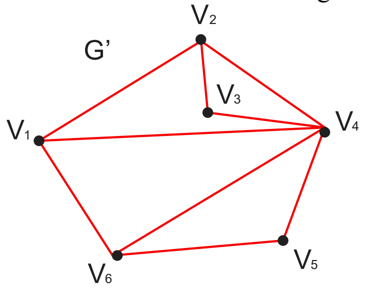
$$|V| = \sum_{k \geq 0} a_k = |V'| \tag{2.2}$$

Aplicando o Teorema 1 duas vezes, juntamente com a primeira parte acima, obtemos

$$2|E| = \sum_{v_i \in V} d_G(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_{G'}(f(v_i)) = \sum_{f(v_i) \in V'} d_{G'}(f(v_i)) = 2|E'| \tag{2.3}$$

■

FIGURA 8 – Grafo isomorfo ao grafo G



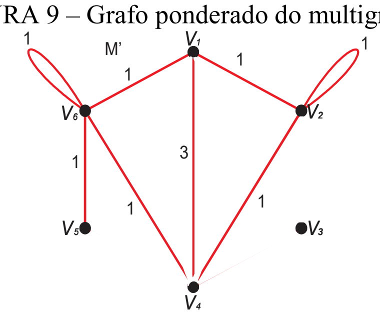
FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 8, temos um grafo *G'* que é isomorfo ao grafo *G* da FIGURA 6(a), pois apesar do grafo *G'* ser representado por um diagrama diferente do diagrama do grafo *G*, o grafo *G'* conserva as mesmas ligações entre os vértices do grafo *G*.

Definição 12 (Grafo ponderado). Um grafo pode ter vértices e/ou arestas com um peso associado. Nesse caso, são chamados de grafos ponderados.

Se pudermos usar diagramas os mais simples possíveis, o peso das arestas, se torna importante no estudo de multigrafos, em que cada aresta será marcada com a quantidade de arestas que conecta o par de vértices do grafo original.

FIGURA 9 – Grafo ponderado do multigrafo M



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 9, temos o grafo ponderado *M'*, que é um grafo mais simples do multigrafo *M* da FIGURA 7. A aresta v_1v_4 recebe peso 3, no grafo *M'*, pois é a quantidade de arestas múltiplas que aparece no grafo *M*.

Definição 13 (Grafo simples). Grafos simples são grafos que não tem laços, só tem uma aresta ligando quaisquer dois vértices e não têm orientação.

Definição 14 (Grafo completo). Um grafo completo K_n[10] é aquele que quando todos os pares de vértices distintos são adjacentes, então

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} \tag{3}$$

Em um grafo completo todos os vértices possuem o mesmo grau, *n-1*.

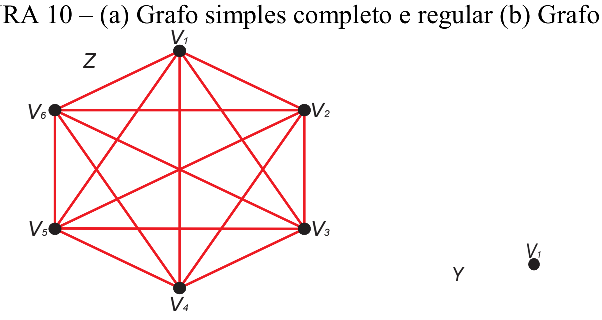
Definição 15 (Grafo regular). Um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau *k* é chamado de grafo *k-regular*.

Definição 16 (Grafo nulo). Um grafo é definido como nulo quando o conjunto de arestas é vazio, $E(G) = \varnothing$, representamos o grafo nulo por N_k, sendo *k* o número de vértices.

[10] O uso da letra *K* para denotar um grafo completo é uma homenagem a Kuratowski.

Definição 17 (Grafo trivial). Um grafo com um único vértice e sem arestas é conhecido como o grafo trivial.

FIGURA 10 – (a) Grafo simples completo e regular (b) Grafo nulo e trivial



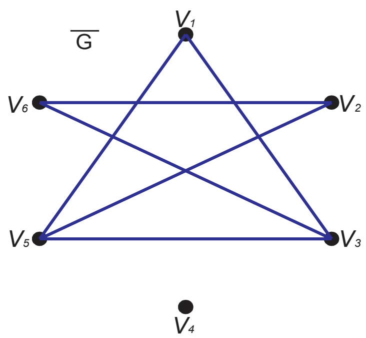
FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 10, o grafo *Z* é completo K_6, *5-regular* e simples, pois não possui arestas de laços, múltiplas e não tem orientação. O grafo *Y* é nulo N_1 e trivial, pois possui um único vértice e $E(Y)=\varnothing$.

Definição 18 (Grafo complementar). Um grafo $\overline{G}$ é complementar de *G* sempre que $V(G)=V(\overline{G})$ e $E(\overline{G})=\{v_iv_j \ / \ v_i \text{ e } v_j \in V(G),\ i\neq j,\ v_iv_j \notin E(G)\}$, então temos

$$E(G)\cap E(\overline{G})=\varnothing \tag{4}$$

FIGURA 11 – Grafo complementar ao grafo G



FONTE: Autora (2017)

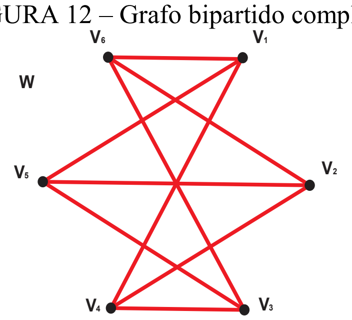
Por exemplo na FIGURA 11, temos o grafo $\overline{G}$ complementar do grafo *G* da FIGURA 6(a), onde $V(\overline{G})=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ e $E(\overline{G})=\{v_1v_3,v_1v_5,v_2v_5,v_2v_6,v_3v_5,v_3v_6\}$, sendo $E(G)\cap E(\overline{G})=\varnothing$.

Definição 19 (Grafo bipartido). Dado um grafo $G=(V,E)$, em que *V(G)* pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2, isto é, V_1 e$V_2 \subset V(G)$, dizemos que *G* é bipartido, então

$$V_1 \cup V_2 = V(G) \text{ e } V_1 \cap V_2 = \varnothing \tag{5}$$

Definição 19.1 (Grafo bipartido completo). Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido em que $E(G)=V_1 \times V_2 = \{v_i v_j \ / \ v_i \in V_1 \text{ e } v_j \in V_2\}$, assim todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2. Se $|V_1|=r$ e $|V_2|=s$, tal grafo bipartido completo é denotado por $K_{r,s}$.

FIGURA 12 – Grafo bipartido completo



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 12, temos o grafo $W=(V,E)$ bipartido completo $K_{3,3}$, onde $V(W)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ e $E(W)=\{v_1v_4,v_1v_5,v_1v_6,v_2v_4,v_2v_5,v_2v_6,v_3v_4,v_3v_5,v_3v_6\}$. O conjunto de vértices *V(W)* é particionado em dois conjuntos disjuntos $V_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ e $V_2=\{v_4,v_5,v_6\}$, onde $V(W)=V_1 \times V_2$.

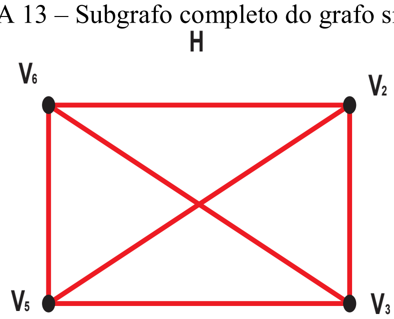
Definição 20 (Subgrafo). Um grafo $H=(V',E')$ será dito subgrafo de um grafo $G=(V,E)$ se $V'(H) \subseteq V(G)$ e $E'(H) \subseteq E(G)$.

Definição 20.1 (Subgrafo gerador). Subgrafo gerador de um grafo $G=(V,E)$ é um subgrafo $G'=(V',E')$ tal que $V(G')=V(G)$.

Definição 20.2 (Clique em um grafo). Um clique em um grafo simples *G* é um subgrafo completo *H* de *G*.

Definição 20.3 (Supergrafo). Um grafo *G* é um supergrafo de um grafo *H*, se o grafo *H* for subgrafo do grafo *G*.

FIGURA 13 – Subgrafo completo do grafo simples Z



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 13, temos o grafo $H=(V',E')$, onde $V'(H)=\{v_2,v_3,v_5,v_6\}$ e $E(H)=\{v_2v_3,v_2v_5,v_2v_6,v_3v_5,v_3v_6,v_5v_6\}$, o grafo *H* é um subgrafo completo do grafo simples *Z* da FIGURA 10, pois $V'(H) \subseteq V(G)$ e $E'(H) \subseteq E(G)$, então *H* é um clique no grafo *Z*. Sendo o grafo *Z* um supergrafo do grafo *H*.

Em determinadas situações, faz-se necessário estabelecer em um grafo, um passeio através dos vértices e arestas, com algumas especificidades. Essas recebem nomes específicos.

Definição 21 (Passeio em um grafo). Um passeio em um grafo *G* é um subgrafo simples *H* em *G* cujos vértices e arestas podem ser arranjados numa sequência finita $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$ de forma tal que $E(H)=\{(v_i,v_{i+1}),\ 1 \le i \le n-1\}$. Cada vértice da sequência é incidente na aresta que o precede e que o sucede. Essa sequência deve iniciar e acabar em algum vértice.

Se as arestas não se repetem, o passeio é chamado de trilha. Se os vértices não se repetem, o passeio é chamado de caminho. Se, além disso, *H* é tal que $v_nv_1 \in E(H)$, *H* é denominado um passeio fechado. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o último é chamado de vértice final. Uma trilha fechada e um caminho fechado têm definição análoga. Existem o passeio orientado, trilha orientada e caminho orientado em grafos orientado. São similares aos usados em grafos com a diferença de que a orientação dos arcos é levada em consideração.

Definição 21.1 (Comprimento de um passeio). O comprimento de um passeio num grafo não ponderado é igual ao número de arestas que compõem o passeio. Em um grafo ponderado o comprimento de um passeio é a soma dos pesos de cada aresta do passeio e as repetições de arestas são consideradas na contagem.

Definição 21.2 (Cintura). Cintura é o comprimento do menor caminho fechado que se pode ter em um grafo.

Definição 21.3 (Circunferência). Circunferência é o comprimento do maior caminho fechado que se pode ter em um grafo.

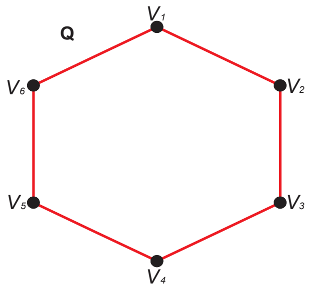
Por exemplo na FIGURA 6, temos um caminho orientado, $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6$, com comprimento de 4 unidades, no grafo *T*.

Na FIGURA 9, temos um caminho ponderado, v_1v_4, v_4v_6, v_6v_5, com comprimento de 5 unidades, no grafo *M'*, onde a aresta v_1v_4 apresenta peso 3.

Na FIGURA 10, temos um caminho fechado, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, com comprimento de 3 unidades, que é o menor caminho fechado que se pode ter no grafo *Z*, considerado uma cintura do grafo *Z*. Também temos um caminho fechado, $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1$, com comprimento de 6 unidades, que é o maior caminho fechado que se pode ter no grafo *Z*, considerado uma circunferência do grafo *Z*.

Definição 22 (Grafo cíclico). Um grafo simples com caminho fechado de comprimento no mínimo de 3 unidades é denominado um grafo cíclico, e denotado por C_n.

FIGURA 14 – Grafo cíclico



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 14, o grafo *Q* é cíclico C_6, pois é um grafo simples com caminho fechado.

Definição 23 (Grafo conexo). Um grafo é conexo se, para cada dois quaisquer de seus vértices, v_i e v_j, existe, no grafo, um caminho, tendo v_i como vértice inicial e v_j como vértice final.

Definição 23.1 (Distância entre vértices). Distância entre vértices de um grafo conexo é o comprimento do menor caminho que conecta esses vértices.

Definição 24 (Árvores). Um grafo conexo que não contém caminhos fechados é chamado de árvore.

Definição 24.1 (Raiz de uma árvore). É comum usar em árvores um vértice determinado, chamado raiz da árvore, pode ser qualquer vértice de grau 1.

Definição 24.2 (Folhas de uma árvore). Os outros vértices de grau 1, que não são determinados como raiz da árvore, serão chamados de folha da árvore.

Definição 24.3 (Árvore enraizada). Uma árvore com uma raiz determinada é chamada de árvore enraizada. Qualquer árvore pode ser transformada em uma árvore enraizada pela simples seleção de um vértice como raiz.

O teorema seguinte dá uma condição necessária para um grafo conexo ser uma árvore.

Teorema 4: Em uma árvore, temos

$$|E| = |V| - 1 \tag{6}$$

Demonstração: Demonstra-se pelo *Princípio de Indução Matemática* sobre o número de vértices e de arestas. A própria definição de árvore já indica que uma árvore tem o mínimo de arestas necessárias para que o grafo não seja desconexo. Assim, pensemos na construção de uma árvore vértice a vértice. Começando com um vértice único, a árvore é o próprio vértice, uma vez que não se pode traçar uma aresta. Nesse caso trivial, verifica-se a proposição, pois $|V| = 1$ e $|E| = 0$. Adicionando um vértice, ligamo-lo ao primeiro por uma aresta. Nesse caso, também vale a proposição, pois $|V| = 2$ e $|E| = 1$. Seja, então, uma árvore com $|V|$ vértices e $|E| = |V| - 1$ arestas. Ao acrescentar um vértice, a definição de árvore exige que ele se conecte a um vértice já presente, para que não haja desconexão. Assim, acrescentamos uma nova aresta, o que faz com que tenhamos, para a nova árvore, $|E|+1=(|V|+1)-1$, o que é verdadeiro, pela hipótese de indução. Por outro lado, acrescentar uma aresta exige que se acrescente um novo vértice, pois, caso não haja um novo vértice, essa nova aresta será uma aresta que, retirada da "nova árvore", resultará num grafo conexo, contrariando a definição dada de árvore. Logo, para que se acrescente uma nova aresta, é necessário um novo vértice e, portanto, $|E|+1=(|V|+1)-1$, também verdadeiro, pela hipótese de indução. Fica assim provada a proposição.

■

Teorema 5: Toda árvore não trivial tem pelo menos dois vértices com grau 1.

Demonstração: Sabemos que uma árvore tem que ter exatamente $|V|-1$ arestas, sendo $|V|$ o número de vértices da árvore. Portanto, a soma dos graus dos vértices da árvore tem que ser igual ao dobro do número de arestas, ou seja, $2n-2$. Além disso, o grau de todo vértice é pelo menos 1, porque uma árvore é um grafo conexo. Se a árvore tiver no máximo um vértice com grau 1, então a soma dos graus dos vértices será pelo menos $2(n-1)+1>2n-2$, o que não é possível. Assim, toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.

■

Definição 24.4 (Vértice de corte). Vértice de corte é o vértice cuja remoção juntamente com as arestas a ele conectadas torna o grafo desconexo.

Definição 24.5 (Aresta de corte). Se uma aresta é indispensável para manter um grafo conexo, ela é chamada de aresta de corte.

Definição 24.6 (Árvore geradora). Ao retirarmos arestas de uma árvore que não representam arestas de corte obtemos um subgrafo chamado árvore geradora, representado por T_G[11]. Qualquer grafo conexo G pode ser construído, a partir de uma árvore geradora T_G, adicionando arestas a ela uma a uma até que o grafo G seja obtido.

[11] O uso da letra T para denotar a árvore geradora do grafo G deriva da palavra inglesa para árvore, *tree*.

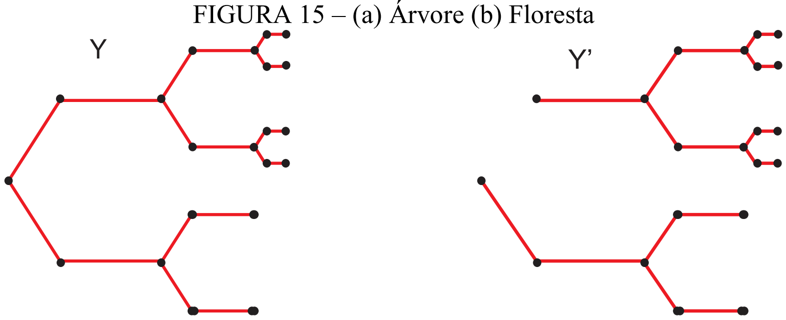
Definição 24.7 (Árvore geradora mínima). Árvore geradora mínima de um grafo ponderado *G* é uma árvore, subgrafo de *G*, cujos vértices sejam todos os elementos de *V(G)* e cujas arestas tenham a menor soma de pesos possível dentre todas as árvores geradoras de *G*.

Definição 24.8 (Componente conexa). Considere um grafo $G=(V,E)$, uma componente conexa de G é um subgrafo $G=(V,E)$, tal que $V'(G')\subset V(G)$, $E'(G')\subset E(G)$, onde, *G'* é conexo e para todo $v_i \in V(G)$ e para todo $v'_i \in V'(G')$, a aresta $vv' \notin E$.

Definição 24.9 (Floresta). Após a retirada de uma aresta da árvore, se suas componentes conexas forem árvores, esse grafo será chamado de floresta.

Definição 25 (Arborescência). Se em uma árvore as arestas possuírem alguma orientação, essa é chamada de arborescência. Existe um vértice sem antecessores, sendo ele a raiz e todos os vértices possuem exatamente um único antecessor.

FIGURA 15 – (a) Árvore (b) Floresta



(a) (b)

FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 15, temos uma floresta *Y'*, formada por duas árvores, geradas retirando-se uma aresta de corte da árvore *Y*.

Definição 26 (Cruzamento de arestas). Um cruzamento de arestas é a intersecção de duas arestas no diagrama de um grafo, sem que haja um vértice na intersecção. Um cruzamento, contudo, às vezes, pode ser eliminado desenhando-se outro diagrama para o grafo.

Definição 27 (Grafo planar). O grafo representado graficamente no plano de modo que as arestas não se cruzem, é denominado grafo planar.

Definição 27.1 (Grafo maximal planar). Um grafo planar em que não se pode acrescentar nenhuma aresta sem comprometer a planaridade é chamado de grafo maximal planar.

Definição 28 (Faces). Quando um grafo é planar ele divide o plano em regiões que são delimitadas por suas arestas. A essas regiões damos o nome de faces. A região exterior ao grafo, que não é limitada por suas arestas, também é contada como uma face do grafo.

Definição 28.1 (Grau da face). O grau da face de um grafo é o número de arestas que limitam a região desta face.

Teorema 6: Seja um grafo simples, planar e conexo com e arestas, v vértices e f o número de faces em uma representação planar do grafo. Então

$$f - e + v = 2 \tag{7}$$

chamada relação de Euler para poliedros convexos.

Demonstração: Demonstra-se por indução sobre o número de arestas. Toma-se um grafo conexo qualquer. Se for uma árvore, o número e de arestas é igual ao número de vértices menos um, então temos que

$$f - e + n = 1 - (n - 1) + n = 2$$

Se houver um caminho fechado, retira-se uma aresta dele, logo o grafo fica com uma face a menos; pela hipótese de indução, a relação vale para um novo grafo. Temos então que

$$(f - 1) - (e - 1) + v = 2 \Rightarrow f - e + v = 2$$

■

A partir deste momento, para um grafo G, utilizaremos f para o número de faces, v para o número de vértices e e para o número arestas. Apesar de definir planaridade através do desenho, não bastaria a observação do mesmo para caracterizar um grafo como planar ou não. A relação de Euler pode ser usada para estabelecer algumas desigualdades que devem ser satisfeitas pelos grafos planares. Duas de tais desigualdades, condições necessárias, mas não suficientes, são dadas nos corolários que veremos a seguir.

Corolário 1: Em todo grafo planar conexo, tem se

$$2e \geq 3f \tag{8}$$

Se G é um grafo simples planar conexo com e arestas e v vértices, em que $v \geq 3$, então

$$e \leq 3v - 6 \tag{9}$$

a igualdade vale se todas as faces são triangulares.

Demonstração: Se contarmos as arestas de cada face, contamos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face é limitada, por pelo, menos três arestas, então

$$\frac{3f}{2} \leq e \Rightarrow 2e \geq 3f$$

Substituindo na fórmula de Euler multiplicada por 3, temos

$$\begin{aligned} f - e + v = 2 &\Rightarrow 3f - 3e + 3v = 6 \\ &\Rightarrow 2e - 3e + 3v \geq 6 \\ &\Rightarrow e \leq 3v - 6 \end{aligned}$$

■

Corolário 2: Seja G um grafo conexo planar com e arestas e v vértices, em que $v \geq 3$, sem triângulos, então

$$e \leq 2v - 4 \tag{10}$$

Demonstração: Observamos que um grafo bipartido só tem caminhos fechados pares e que cada face tem, no mínimo, 4 arestas, então temos

$$4f \leq 2e$$

substituindo na relação de Euler multiplicada por 4, temos

$$4v + 4f - 4e = 8 \Rightarrow 4v - 2e \geq 8$$
$$\Rightarrow e \leq 2v - 4$$

∎

Infelizmente os corolários 1 e 2 afirmam apenas que se um grafo é planar então essas desigualdades têm de ser satisfeitas, mas não permite garantir que quando a desigualdade é satisfeita, o grafo é necessariamente planar.

Há outras formas de caracterização da planaridade que não são somente geométricas, que fazem uso de teoremas importantes como teorema de Kuratowski. Com o uso deste teorema podemos fornecer condições necessárias e suficientes para que um grafo seja planar. Para se enunciar o teorema de Kuratowski precisa-se de mais algumas definições.

Definição 29 (Subdivisão do grafo). A adição de um vértice de grau dois a uma aresta de um grafo é chamada de subdivisão do grafo.

Definição 29.1 (Grafos homeomorfos). Um grafo *G'* é dito homeomorfo a um grafo *G* se *G'* puder ser obtido de *G* pela inserção de vértices em suas arestas. Ou seja, se *G'* for uma subdivisão de *G*.

Teorema 7: Um grafo é planar se, e somente se, suas subdivisões são planares.

Demonstração: (⇒) Esta parte da demonstração é direta. Se um grafo é planar, pelo corolário 1, suas quantidades de arestas e de vértices obedecem à condição $e \leq 3v - 6$. Uma subdivisão aumenta a quantidade de arestas em 1 unidade e também a quantidade de vértices em 1 unidade. Assim, se o novo grafo tiver *e'* arestas e *v'* vértices, teremos

$$e' = e + 1 \text{ e } v' = v + 1 \Rightarrow 3v' - 6 = 3(v + 1) - 6 = 3v - 3$$

Como, pelo corolário 1, temos

$$e+1 \leq 3v-5 < 3v-3 \Rightarrow e' \leq 3v'-6$$

Concluímos que a subdivisão é planar. Caso o grafo se encaixe no corolário 2, se verifica de maneira análoga. (⇐) Aqui, usaremos a relação de Euler. Se um grafo G é planar, vale para ele a relação de Euler. Por outro lado, se ele for subdivisão de outro grafo G^*, podemos retornar ao grafo G^* eliminando um vértice de grau 2 e ligando seus vértices adjacentes por uma nova aresta. Desse modo, o grafo G^* terá $e^* = e-1$ arestas e $v^* = v-1$ vértices, e a relação de Euler continua valendo. Assim, o grafo G^*, de que G é subdivisão, é planar, e o teorema está verificado.

■

Teorema 8: Um grafo é planar se, e somente se, não contém como subgrafos subdivisões do grafo K_5 ou do grafo $K_{3,3}$, chamado teorema de Kuratowski.

Demonstração: (⇐) O grafo completo K_5 possui 5 vértices e 10 arestas. Aplicando o corolário 1 obtém-se

$$e \leq 3v-6 \Rightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6$$
$$\Rightarrow 10 \leq 9$$

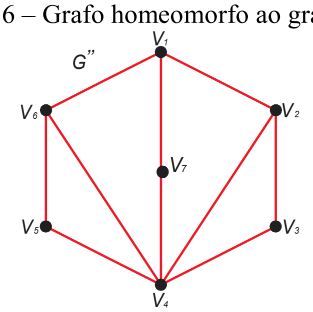
que é uma afirmação falsa, portanto K_5 não é planar. O grafo bipartido $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas. Como o grafo $K_{3,3}$ não possui faces triangulares, caso fosse planar, deveria satisfazer o segundo corolário, mas

$$e \leq 2v-4 \Rightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4$$
$$\Rightarrow 9 \leq 8$$

que é uma afirmação falsa, portanto $K_{3,3}$ não é planar. As aplicações dos corolários e o Teorema 8 em conjunção levam diretamente a essa conclusão. (⇒) Esta parte da demonstração, a mais importante do teorema de Kuratowski, é um tanto complexa para o objetivo deste trabalho.

■

FIGURA 16 – Grafo homeomorfo ao grafo planar G



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 16, temos a subdivisão do grafo planar *G* da FIGURA 6, com a adição do vértice v_7 de grau dois na aresta v_1v_4, assim o grafo *G''* é homeomorfo ao grafo *G*, então o grafo *G''* também é planar. O grafo planar *G''* se divide em 5 faces, em que se verifica a relação de Euler, $f - e + v = 5 - 10 + 7 = 2$.

Definição 30 (Grafos platônicos). Os grafos obtidos pela projeção dos sólidos de Platão[12] no plano são chamados grafos platônicos.

Os grafos platônicos são grafos regulares, portanto, concluímos que o grafo nulo e os grafos cíclicos são grafos platônicos. Logo, a relação de Euler também se aplica a cada um deles.

Teorema 9: Existem 5, e somente 5, grafos platônicos distintos do grafo nulo e dos grafos cíclicos.

Demonstração: Seja *G* um grafo regular de grau *k*, onde cada face tem grau *n*. Considere *e* como o número total de arestas de *G*, *N* como a soma dos graus de todas as faces de *G*, *f* como o número total de faces de *G*, e *v* como o total de vértices de *G*, temos então que

$$N = 2e = \mathrm{k}v \Rightarrow e = \frac{kv}{2} \quad \text{e} \quad f = \frac{N}{n} = \frac{2e}{n}$$

[12] Os sólidos de Platão também são denominados de poliedros, pois são formados por faces, arestas e vértices. Os poliedros de Platão possuem características próprias e se enquadram nas seguintes condições: o número de arestas é igual em todas as faces, os ângulos poliédricos possuem o mesmo número de arestas e nos sólidos considerados poliedros de Platão vale a relação de Euler.

Aplicando as afirmações acima na relação de Euler, temos

$$f-e+v=2 \Rightarrow \frac{2e}{n}-\frac{kv}{2}+v=2$$
$$\Rightarrow \frac{kv}{n}-\frac{kv}{2}+v=2$$
$$\Rightarrow v\left(\frac{k}{n}-\frac{k}{2}+1\right)=2$$
$$\Rightarrow v\left(2k-nk+2k\right)=4n$$
$$\Rightarrow 2k-nk+2n>0$$
$$\Rightarrow -2k+nk-2n+4<4$$
$$\Rightarrow (n-2)(k-2)<4$$
$$\Rightarrow k<\frac{4}{n-2}+2$$

Como $k>2$, temos então que

$$n-2<4 \Rightarrow n<6$$

Como o grafo G não é nulo, temos que

$$k>0 \text{ e } E>1$$

E como G também não é cíclico, temos que

$$k>2 \text{ e } n>2$$

A partir dessas informações e do resultado obtido acima, temos que

$$2<n<6$$

Portanto, os possíveis valores para n são 3, 4 e 5.

Analisaremos cada caso, fazendo uso da desigualdade que foi obtida acima.

Para $n = 3$, temos

$$k < \frac{4}{3-2} + 2 \Rightarrow k < 4 + 2$$
$$\Rightarrow k < 6$$

Mas, como sabemos também que $k > 2$, concluímos que, para $n = 3$, temos $k = 3$, ou $k = 4$, ou $k = 5$.

Para $n = 4$, temos

$$k < \frac{4}{4-2} + 2 \Rightarrow k < 2 + 2$$
$$\Rightarrow k < 4$$

Mas, como sabemos também que $\mathrm{k} > 2$, concluímos que, para $n = 4$, temos $k = 3$.

Para $n = 5$, temos

$$k < \frac{4}{5-2} + 2 \Rightarrow k < \frac{10}{2} \cong 3{,}3$$
$$\Rightarrow k < 3{,}3$$

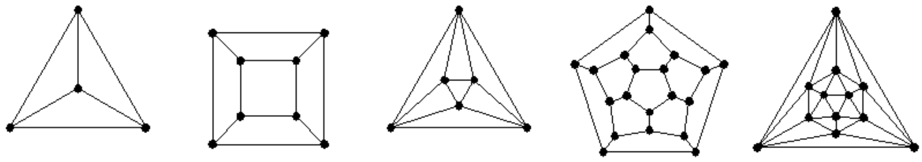
Mas, como sabemos também que $k > 2$, concluímos que, para $n = 5$, temos $k = 3$.

Portanto, além do grafo nulo e dos grafos cíclicos, existem apenas 5 grafos platônicos, que são aqueles caracterizados pelos valores obtidos acima para *k* e *n*.

■

Para entender melhor como se passa de um sólido a um grafo planar, vamos imaginar que o sólido é um tanto flexível e que você o segura de modo a esticar uma de suas faces, com suas arestas sobre um plano. Assim todas as outras faces e arestas do sólido formarão um desenho no interior dessa primeira face.

FIGURA 17 – Grafos platônicos



FONTE: Adaptada de Figuras Tridimensionales (Acesso em: 22 jun. 2017)

Por exemplo na FIGURA 17, temos 5 grafos planares associados aos 5 poliedros regulares, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, respectivamente.

A coloração em grafos é a atribuição de cor, a certos elementos de um grafo, tendo de cumprir certas restrições.

Definição 31 (Coloração de vértices). Na coloração de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor.

Definição 31.1 (Número cromático). O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

Definição 32 (Coloração de arestas). Na coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor.

Definição 32.1 (Índice cromático). O menor número usado para colorir as arestas de um grafo de modo que arestas incidentes a um mesmo vértice recebam cores diferentes é chamado índice cromático do grafo, o qual denotaremos por $\chi'(G)$.

A ação de colorir mapas tem uma ligação bastante forte com coloração em grafos.

Definição 33 (Grafo dual). Cada mapa no plano pode ser representado por um grafo, sendo as regiões do mapa representadas pelos vértices e as fronteiras pelas arestas. O grafo assim obtido é chamado grafo dual.

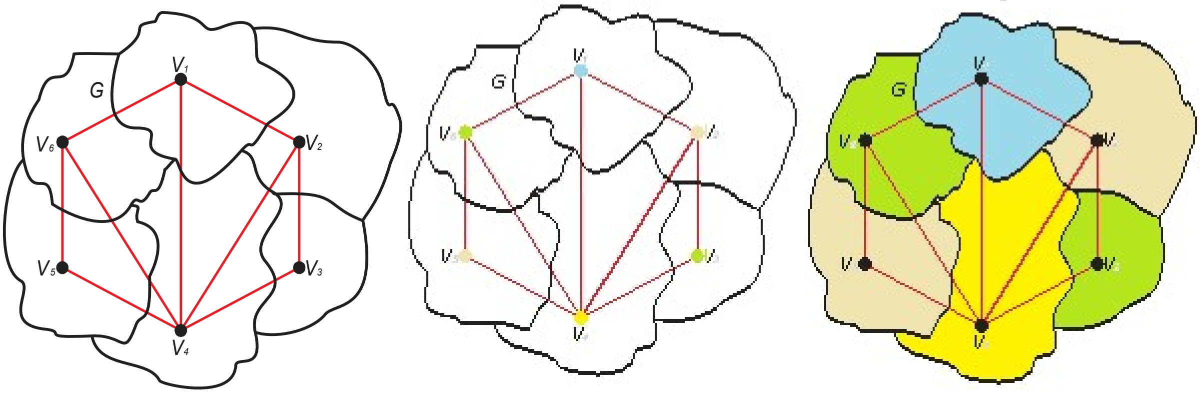
Teorema 10: Um mapa pode ser colorido com 4 cores. Usando a dualidade podemos reformular o teorema em forma de coloração de vértices. Em um grafo planar *G* tem-se que $\chi(G) \leq 4$, conhecido como teorema das 4 cores.

Demonstração: O teorema das 4 cores é muito conhecido em Teoria de Grafos pelas muitas tentativas falhas de sua demonstração. Depois de longas tentativas e muitos estudos que ajudaram no desenvolvimento da Teoria de Grafos, o problema das quatro cores foi enfim resolvido concisamente por Appel e Haken. Na época, contaram com o auxílio de 1200 horas de trabalho do computador mais rápido.

■

O problema da coloração é estabelecido quando objetiva-se colorir o tal grafo, utilizando o menor número possível de cores. Desse modo, para se colorir um mapa pretendendo utilizar o mínimo de cores, é equivalente a colorir os vértices do grafo dual.

FIGURA 18 – (a) Grafo dual G (b) Coloração de vértice (c) Coloração de mapa



(a) (b) (c)

FONTE: Autora (2017)

Por exemplo, na FIGURA 18(a), temos um mapa cujo grafo *G*, da FIGURA 6, é seu grafo dual. Na FUGURA 18(b), temos a coloração de vértices do grafo dual *G*. E na FIGURA 18(c) temos o mapa colorido com 4 cores, onde em seu grafo dual *G*.

Definição 34 (Trilha euleriana). Uma trilha euleriana é uma trilha que contém todas as arestas de um grafo *G*.

Definição 34.1 (Trilha fechada euleriana). Uma trilha fechada euleriana é uma trilha fechada que contém todas as arestas de um grafo *G*.

Definição 34.2 (Grafo euleriano). Define-se um grafo *G* com *v* vértices e *e* arestas como sendo euleriano se possuir uma trilha fechada euleriana de comprimento *e* em *G*.

No que segue, vamos estabelecer uma condição necessária e suficiente para um grafo ser euleriano. Iniciamos com o seguinte lema.

Lema 1: Se todo vértice de um grafo *G* tem grau maior ou igual a dois, então esse grafo *G* contém uma trilha fechada.
Demonstração: Se o grafo *G* tem laços ou arestas múltiplas, já contém uma trilha fechada. Se o grafo *G* for simples, partindo de um vértice inicial qualquer, inicia-se uma trilha. Quando chegamos a outro vértice, estamos visitando-o pela primeira vez; continuando o percurso, ao chegar a um vértice já visitado, produzimos uma trilha fechada. Como o número de vértices é finito, o grafo *G* contém uma trilha fechada.

■

Teorema 11: Um grafo *G* conexo é euleriano se, e somente se, cada vértice de *G* tem grau par, conhecido como teorema de Euler.
Demonstração: (⇒) Supondo que o grafo *G* tenha uma trilha fechada *e*, cada vez que a trilha passa por um vértice, utiliza duas novas arestas. Logo, o grau de cada vértice é obrigatoriamente par. (⇐) Seja o grafo *G* com todos os vértices de grau par. Usaremos indução sobre o número de arestas *e* do grafo *G*. Para $e = 0$ é verdadeiro. Supondo que seja válido para todos os grafos com menos do que *e* arestas, sendo o grafo *G* conexo, todos os vértices têm grau igual ou maior do que 2. Pelo lema anterior, o grafo *G* contém uma trilha fechada. Dentre todas as trilhas fechadas do grafo *G* escolheremos uma trilha *T* com o comprimento máximo. Se *T* tem comprimento *e*, o teorema está provado. Caso contrário, consideremos o grafo *H* resultante da retirada das arestas de *T*. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de *T*, e todos os vértices pela hipótese têm grau par, pelo menos uma das componentes de *H* tem um vértice em comum com *T* e tem todos os vértices de grau par. Pela hipótese de indução, *H* tem

uma trilha que passa por todos os vértices de *H* e podemos formar uma trilha fechada maior, conectando *T* com a trilha *H*. Mas isso contraria a maximalidade na escolha de *T*.

■

Definição 34.3 (Grafo semieuleriano). Define-se um grafo *G* com *v* vértices e *e* arestas como sendo semieuleriano se possuir uma trilha de comprimento *e* em *G*.

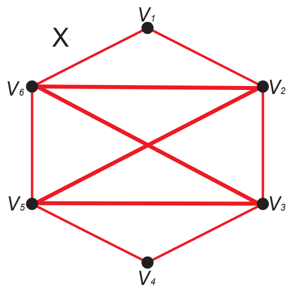
Teorema 12: Um grafo conexo *G* é semieuleriano se, e somente se, dois vértices têm grau ímpar.

Demonstração: (⇒) Supondo que o grafo *G* tenha uma trilha *E* começando em um vértice v_i e terminando em um vértice v_j. Como $i \neq j$, v_i e v_j têm ambos grau ímpar. Pois cada vez que um dos demais vértices aparecem em *E* tem duas arestas incidentes. Como cada aresta ocorre uma vez em *E*, o grau desses vértices é par. (⇐) Suponha que o grafo *G* seja conexo e possua dois vértices v_i, como vértice inicial e v_j, como vértice final, ambos de grau ímpar. Consideremos o grafo *H* que se obtém do grafo *G* por junção de uma nova aresta ligando v_i a v_j. Esse processo chama-se eulerizar um grafo. Ao grafo *H*, podemos aplicar o teorema 12 e concluir que admite uma trilha fechada. Excluindo-se dessa trilha fechada a aresta previamente adicionada ao grafo *G,* obtemos uma trilha ligando v_i a v_j, como desejado.

■

Pela própria definição um grafo euleriano será sempre conexo, a menos que tenha vértices isolados. Colocadas as definições de grafos eulerianos e semieulerianos, para definir se um grafo é euleriano ou semieuleriano, pode-se verificar se um grafo possui ou não trilhas eulerianas apenas analisando o grau de cada vértice. O nome euleriano decorre, obviamente, do famoso problema das pontes de Königsberg que foi solucionado por Euler.

FIGURA 19 – Grafo euleriano



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 19, temos o grafo *X*, que é um grafo euleriano, por possuir uma trilha fechada euleriana, $v_6v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_6$, de comprimento 10. Excluindo do grafo *X* o vértice v_1, juntamente com as arestas ligadas a ele, v_1v_2 e v_1v_6, obtemos um grafo semieuleriano, por possuir uma trilha euleriana ligando v_2 a v_6, de comprimento 8.

Definição 35 (Caminho hamiltoniano). Um caminho que contém todos os vértices de um grafo *G* é dito caminho hamiltoniano.

Definição 35.1 (Caminho fechado hamiltoniano). Um caminho fechado que contém todos os vértices de um grafo *G* é dito caminho fechado hamiltoniano.

Definição 35.2 (Grafo hamiltoniano). Se um grafo *G* contém um caminho fechado hamiltoniano, dizemos que o grafo *G* é um grafo hamiltoniano.

Definição 35.3 (Grafo maximal não hamiltoniano). Um grafo *G* simples chama-se grafo maximal não hamiltoniano se não é um grafo hamiltoniano, mas a adição de qualquer aresta que ligue dois vértices não adjacente forma um grafo hamiltoniano.

Teorema 13: Se *G* é um grafo de ordem $n \geq 3$ tal que o $d_G(v_i) \geq \frac{n}{2}$ para cada vértice *v* do grafo *G*, então o grafo *G* é hamiltoniano, conhecido como teorema de Dirac.

Demonstração: Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe um grafo simples não hamiltoniano maximal *G* de ordem $n \geq 3$ que satisfaz a condição do teorema. Ou seja, o grafo *G* é não hamiltoniano, mas para qualquer par de vértices não adjacentes $v_i \text{ e } v_j \in V(G)$, temos que o grafo $G + v_iv_j$ é hamiltoniano. Claramente o grafo *G* não é completo. Portanto, existem vértices $v_i \text{ e } v_j \in V(G)$. Considere o grafo $H = G + v_iv_j$. Pela maximalidade do grafo *G*, segue que o grafo *H* é hamiltoniano. Logo, todo caminho fechado hamiltoniano no grafo *H* deve conter a aresta v_iv_j. Então o grafo *G* tem um caminho hamiltoniano, digamos, $v_iv_1,\ v_1v_2,\ \ldots,\ v_nv_j$. Note que, se v_k é adjacente a v_i, então v_{k-1} não é adjacente a v_j, pois senão, $v_1v_k,\ v_kv_{k+1},\ \ldots,\ v_{n-1}v_n, v_nv_{i-1},\ v_{i-1}v_{i-2},\ \ldots,\ v_2v_1$, seria um caminho fechado hamiltoniano no grafo *G*, contrariando a escolha de *G*. Portanto, para todo vértice adjacente a v_i, existe um vértice do grafo *G*, tal que esse vértice não é adjacente a v_j. Mas nesse caso, teríamos

$$d_G(v_i) \leq n - 1 - d_G(v_j)$$

Como $d_G(v_i) \geq \frac{n}{2}$, temos que

$$d_G(v_i) \leq n - 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

uma contradição. Logo, a afirmação é verdadeira, e o teorema está provado.

■

Teorema 14: Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 3$. Se temos

$$d_G(v_i) + d_G(v_j) \geq n \tag{11}$$

para todo par v_i e v_j de vértices não adjacentes, então o grafo G é hamiltoniano.

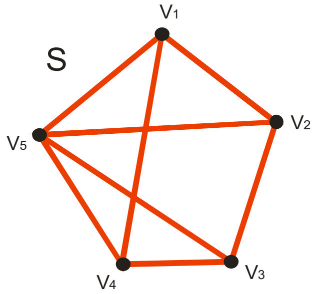
Demonstração: Dado um grafo G nas condições do teorema, suponhamos que o grafo G é não hamiltoniano. Adicione no grafo G, se possível, o maior número de arestas de modo que o grafo G continue não hamiltoniano. Após isso, qualquer aresta a mais tornará o grafo G hamiltoniano. Observe que com a adição dessas arestas, ainda temos $d_G(v_i) + d_G(v_j) \geq n$. Seja $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n$ um caminho em G que contém todos os vértices, tal caminho existe, pois com uma aresta a mais o grafo seria hamiltoniano fornecendo assim um caminho fechado hamiltoniano. Como o grafo G não é hamiltoniano, o caminho não é fechado e então os vértices v_1 e v_n não são adjacentes. Portanto, $d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n$, e, de modo análogo ao teorema 14, mostramos que existe algum vértice v_i adjacente a v_1 tal que v_{i-1} é adjacente à v_n. Desse modo, obtemos um caminho fechado $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{i-1}v_n, v_nv_{n-1}, ..., v_{i+1}v_i, v_iv_1$ contendo todos os vértices do grafo G, ou seja, um caminho fechado hamiltoniano. Mas isso contradiz as hipóteses sobre o grafo G e, portanto, o grafo G deve ser hamiltoniano.

■

Definição 35.4 (Grafo semihamiltoniano). Se um grafo G contém um caminho hamiltoniano, dizemos que o grafo G é um grafo semihamiltoniano.

Determinar se um dado grafo é hamiltoniano é extremamente árduo. Ainda não se conhece uma condição necessária e suficiente que nos permita decidir de forma eficiente se um grafo é hamiltoniano. Apesar de terem sido estudados por vários séculos, até hoje não há uma boa caracterização dos grafos hamiltonianos.

FIGURA 20 – Grafo hamiltoniano



FONTE: Autora (2017)

Por exemplo na FIGURA 20, temos o grafo *S*, que é um grafo hamiltoniano, por possuir um caminho fechado hamiltoniano, $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1$, de comprimento 5.

5. PROBLEMAS CLÁSSICOS DE GRAFOS

O que faz os grafos tão atrativos é o fato de vários problemas práticos poderem ser resolvidos com o auxílio dessa área da Matemática. A Teoria de Grafos nasceu de um problema prático, mas existem problemas em Teoria de Grafos que surgiram apenas da abstração. O fato de os grafos serem aplicáveis a problemas do cotidiano nos remeteu à Modelagem Matemática, que é uma alternativa de ensino e aprendizagem de Matemática fundamentada na resolução de problemas oriundos do mundo real através de modelos matemáticos. A Modelagem Matemática, por sua vez, propõe a resolução de problemas da realidade, onde é necessária coleta, sistematização e análise dos dados para a resolução da situação problema. O fato de os grafos terem surgido a partir da resolução de um problema real parece não ser coincidência, já que grande parte do desenvolvimento do que hoje chamamos Teoria de Grafos se deu pela resolução de quatro problemas: o problema das pontes de Königsberg, o problema da coloração de mapas, o problema do caixeiro viajante e o problema dos caminhos fechados hamiltonianos.

Os problemas descritos acima foram responsáveis por grande parte do desenvolvimento da Teoria de Grafos. O famoso problema das pontes de Königsberg é um exemplo de problema que possui um grafo como modelo. No entanto, o matemático aplicado sabe que as coisas não funcionam dessa forma. Quem lida com a modelagem sabe que um modelo sempre apresenta limitações, já que depende dos dados coletados, das variáveis consideradas, das hipóteses levantadas, entre outros fatores. Hoje em dia, com o avanço computacional, problemas de larga escala e grandes magnitudes, grafos com muitos vértices e arestas que gerem muitas possibilidades, que possam ser modelados através de alguma representação de grafos e admitirem um bom algoritmo que o resolva, podem, facilmente, ser resolvidos por um computador.

Neste capítulo resolveremos alguns problemas clássicos, segundo bibliografia consultada, BOAVENTURA, BOAVENTURA NETTO, JURKIEWICZ e LUCCHESI. Os problemas eram assim enunciados:

Problema 1 (Pontes de Königsberg). *A cidade de Königsberg era dividida em quatro partes pelos braços do rio Pregel e havia sete pontes que interligavam essas partes, conforme mostra a FIGURA 3. Será possível fazer um passeio pela cidade, passando exatamente uma única vez em cada ponte, começando e terminando no mesmo local?*

Solução: Vamos primeiro modelar o problema usando um grafo, no qual os vértices indicam às porções de terra e as arestas indicam as pontes, como indicado na FIGURA 4. Por meio do estudo analítico deste modelo, podemos ver que todos os 4 vértices do grafo têm grau ímpar. Note que para passearmos por cada ponte uma única vez, precisaríamos de um número par de arestas incidentes em cada vértice, pois teríamos que entrar e sair de cada vértice por arestas distintas. No entanto, como podemos ver no grafo da FIGURA 4, que modela o problema, em cada vértice incide um número ímpar de arestas, o que torna o problema impossível. Fica então provado que para se obter o percurso pretendido seria necessário que as porções de terra tivessem uma quantidade par de pontes conectando-as.

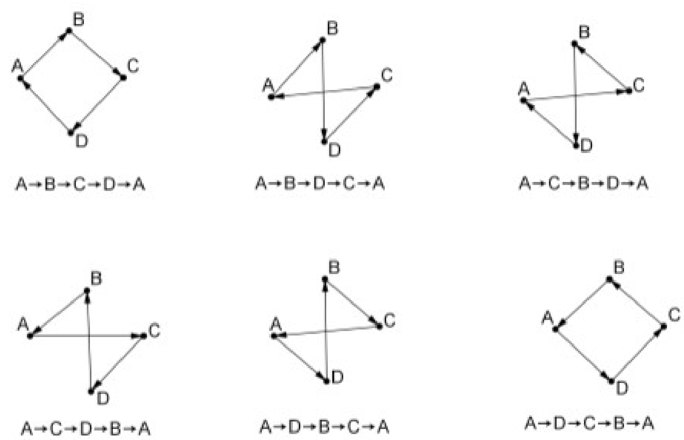
Problema 2 (Coloração de Mapas). *O problema da coloração de mapas surgiu da hipótese de cartógrafos de que, para colorir um mapa, seriam necessárias, no máximo, quatro cores. Quando um mapa é colorido, duas regiões com fronteira comum são associadas a cores diferentes. Entretanto, um número mínimo de cores deve ser usado sempre que possível. Na verdade, tratava-se de uma conjectura, hoje um teorema. Cada mapa do plano pode ser representado por um grafo, sendo as regiões do mapa representadas pelos vértices e as fronteiras pelas arestas. Desse modo, as arestas conectam os vértices se as regiões tiverem uma fronteira em comum. Então, colorir um mapa utilizando o mínimo de cores, contanto que regiões fronteiriças tenham cores diferentes é equivalente a colorir os vértices de grafo dual, de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Assim, surgiu o conhecido Problema das Quatro Cores: Todo mapa pode ser pintado com apenas quatro cores?*

Solução: Provar que, para qualquer mapa é necessário usar no máximo quatro cores, não é uma missão fácil. Formulado em meados do século XIX, foi somente em 1976 que se conseguiu um resultado significativo, porém com ajuda de computadores.

Problema 3 (Caixeiro Viajante). *O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) consiste na procura de um circuito que possua a menor distância, começando numa cidade qualquer, entre várias, visitando cada cidade precisamente uma vez e regressando à inicial. Apesar do simples enunciado do problema a caracterização desse tipo de caminho é complexa. O Problema do Caixeiro Viajante que pode ser enunciado da seguinte forma: Suponha que um caixeiro viajante tenha de visitar n cidades diferentes, iniciando e encerrando sua viagem na primeira cidade. Suponha, também, que não importa a ordem com que as cidades sejam visitadas e que de cada uma delas pode-se ir diretamente a qualquer outra.*

Solução: Esse problema, representado por grafos, será estudado para n cidades, as quais serão denotadas por vértices e as estradas por arestas. A cidade i será denominada c_i com $1 \leq i \leq n$, a distância entre c_i e c_j será representada por d_{ij}. Para esse problema, admite-se que há uma estrada entre cada uma das cidades e ela é única, ou seja, todos os vértices do grafo são mutuamente adjacentes. Isso caracteriza um grafo completo com n vértices, que normalmente é representado por K_n. Uma maneira para descobrir o número de arestas de K_n seria, como cada vértice é adjacente a todos os outros, então o grau de cada um deles é $n-1$ e, sabendo-se que soma de todos os graus do grafo é o dobro do número de arestas, então K_n possui $n(n-1) \cdot 2$ arestas. Podemos resolver este problema por enumeração, ou seja, achamos todas as rotas possíveis e, com a ajuda de um computador, calculamos o comprimento de cada uma e, então vemos qual a menor. Parece simples para um leigo, mas, até mesmo enumerando poderíamos levar um tempo proporcional ao fatorial do número de vértices do grafo. Com apenas quatro cidades, é fácil calcular as distâncias de todas as possíveis rotas. Explicando melhor, na FIGURA 21, partindo da cidade *A*, é necessário visitar três cidades *B, C* e *D* em uma viagem, existem conexões entre todas elas, e retornar ao final da viagem para *A*.

FIGURA 21 – Possíveis caminhos fechados hamiltonianos em um grafo K_4

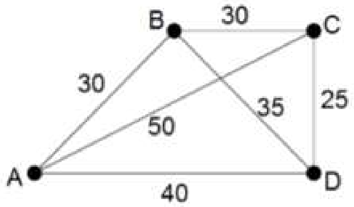


FONTE: MONTEIRO, p. 32 (2015)

Saindo de *A*, temos três escolhas a fazer *B*, *C* ou *D*. Escolhendo a segunda cidade temos duas escolhas para serem feitas, supondo que se escolha *B*, tem-se as opções *C* ou *D*. Após essa escolha, só restaria a última cidade a ser visitada. Assim, a quantidade de opções seria fatorial de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ opções. O problema pode ser exemplificado descrevendo uma possível viagem que é iniciada numa cidade *A* e que deve visitar uma única vez outras três cidades, *B*, *C* e *D*, de forma que o viajante retorne à cidade *A* percorrendo a menor distância possível,

FIGURA 22. Considere que as distâncias entre as ilhas são de 30 km entre *A* e *B*, *30* km entre *B* e *C*, 25 km entre *C* e *D*, 40 km entre *A* e *D*, 35 km entre *B* e *D* e 50 km entre *A* e *C*.

FIGURA 22 – Cálculo do menor caminho fechado hamiltoniano em um grafo K_4



Rota	Distância (km)
ABCDA	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
ABDCA	$30 + 35 + 25 + 50 = 140$
ACBDA	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
ACDBA	$50 + 25 + 35 + 30 = 140$
ADBCA	$40 + 35 + 30 + 50 = 155$
ADCBA	$40 + 25 + 30 + 30 = 125$

FONTE: VILAS-BOAS, p. 70 (2016)

Com apenas quatro vértices, é fácil calcular as distâncias de todas as possíveis rotas. Pode ser interessante propor o mesmo problema aumentando uma cidade. Tal problema será exemplificado, usando um grafo K_5, nesse caso já surge alguma dificuldade, pois são $4! = 24$ rotas possíveis. Com um número reduzido de cidades o problema de enumerar as rotas é relativamente simples, mas a busca por um método de resolução mais eficaz envolvendo um tempo polinomial na sua resolução tem envolvido muitos matemáticos aplicados pelo mundo todo. Acredita-se que tal método não exista.

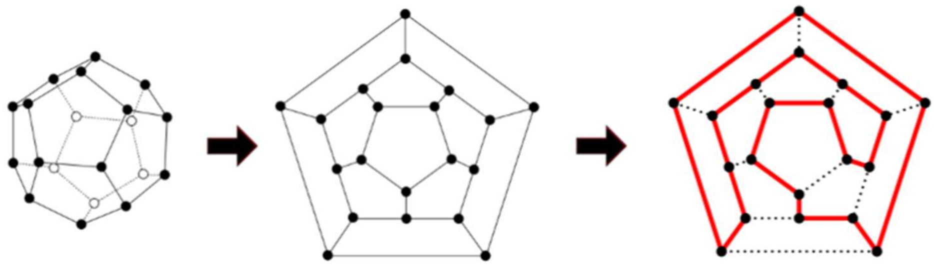
Problema 4 (*Icosien Game*). *O objetivo do jogo era utilizando as 30 arestas do dodecaedro regular, percorrer cada um dos 20 vértices, passando por cada vértice apenas uma vez e começando e terminando pelo mesmo vértice. Os vértices eram nomeados com nomes de cidades importantes e cujas arestas correspondiam às ligações entre as cidades. Como o dodecaedro é incômodo de manejar, podemos representa-lo utilizando um grafo. O desafio proposto é possível e não muito difícil. Os especialistas podiam jogar fixando duas ou mais cidades como ponto de partida. O problema: É possível começar em uma cidade, visitar todas as outras uma única vez e retornar à cidade de partida?*

Solução: Hamilton resolveu este problema observando que, quando o viajante chega a um dado vértice, percorrendo certa aresta, tem três opções: ou *(L)* continua pela aresta da esquerda, ou *(R)* continua pela aresta da direita, ou *(1)* fica no vértice, o que acontece quando percorre um caminho fechado. A partir desta observação definiu estes procedimentos à custa de operações com L e R, representando, por exemplo, por L^2R o procedimento de virar duas vezes seguidas à esquerda e posteriormente à direita. Adicionalmente, considerou que duas sequências de operações têm o mesmo resultado se, a partir de um mesmo vértice, ambas conduzem a esse vértice. Esta operação, embora não seja comutativa, uma vez que $LR \neq RL$, é claramente associativa, por exemplo, $(LL)R = L(LR)$. Devido ao fato das faces serem pentagonais é claro que $R^5 = L^5 = 1$ e, por outro lado, com facilidade se verifica que $LR^3L = R^2$. Com base nestas conclusões temos que,

$$1 = R^5 = R^2R^3 = \left(LR^3L\right)R^3 = \left(LR^3\right)^2 = \left(L\left(LR^3L\right)R\right)^2 = \left(L^2R^3LR\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = \left(L^2\left(LR^3L\right)RLR\right)^2 = \left(L^3R^3LRLR\right)^2 = LLLRRRLRLRLLLRRRLRLR$$

A sequência obtida contém 20 operações. Observe ainda que esse caminho fechado pode iniciar em qualquer um dos 20 vértices do dodecaedro. A solução para este tipo de problema depende de o grafo ter um caminho fechado que contém todas as arestas do grafo, como representado na FIGURA 23.

FIGURA 23 – Caminho fechado hamiltoniano no grafo platônico do dodecaedro



FONTE: Adaptada de MOREIRA ASSIS, p. 12-13 (2016)

6. O ESTUDO E O ENSINO DE GRAFOS NO BRASIL

A transição do século XX para o século XXI foi marcada por um avanço tecnológico que proporcionou uma revolução no tratamento e transmissão das informações. Aparelhos como calculadoras, relógios, celulares entre outros, tornaram-se mais populares e a utilização dos mesmos, mais frequente. O choque de culturas é constante e a sociedade atual sofre mudanças de paradigmas frequentemente, valores que até pouco tempo atrás perduravam décadas, hoje sofrem mudanças periódicas. A população tornou-se mais dinâmica e necessita de um novo tipo de orientação.

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (Brasil, 2000, p. 41)

São poucos os livros escritos por brasileiros dedicados ao tema grafos. Por outro lado, existem muitos trabalhos publicados em periódicos e trabalhos de conclusão de curso de pós-graduação. A ideia de estudar grafos no Ensino Médio vem sendo constantemente tema de dissertações e teses em todo país. Exemplos podem ser dados pelas dissertações no PROFMAT, um mestrado semipresencial, com oferta nacional, realizado por instituições de ensino superior e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), que visa atender professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente na rede pública.

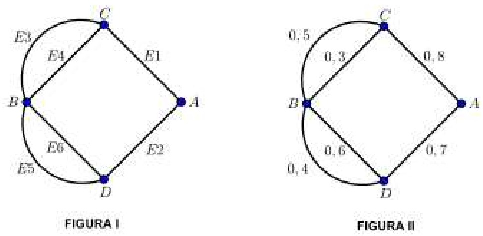
O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), considerado o maior instituto de pesquisa e desenvolvimento matemático da América do Sul e um dos maiores do mundo, compromissado com o ensino da Matemática, criou a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com o objetivo de estimular o estudo de Matemática e revelar talentos na área.

O ENEM, tornou-se a maior oportunidade de acesso às vagas federais de ensino superior. A Matemática do ENEM procura verificar as competências e habilidades que o aluno domina, tais como enfrentar situações-problemas apresentadas sobre diversas formas: numérica, algébrica e geométrica.

Há algumas questões sobre grafos presente no ENEM e na OBMEP. A seguir enunciaremos algumas dessas questões.

Questão 1 (ENEM 2010). A Figura I mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na Figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto *C* ao o ponto *B*, passando pela estrada *E4*, e de 50%, quando se passa por *E3*. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

FIGURA 24 – Questão do ENEM 2010



FONTE: GOMES BEZERRA, p. 7 (2015)

Paula deseja se deslocar da cidade *A* para a cidade *B* usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

(a) *E1E3*. (b) *E1E4*. (c) *E2E4*. (d) *E2E5*. (e) *E2E6*.

Resolução: Primeiro, vamos calcular a probabilidade de não pegar engarrafamento no primeiro e nem no segundo trecho:

Trajeto *E1E3*: $(1-0,8).(1-0,5)=0,1$

Trajeto *E1E4*: $(1-0,8).(1-0,3)=0,14$

Trajeto *E2E5*: $(1-0,7).(1-0,4)=0,18$

Trajeto *E2E6*: $(1-0,7).(1-0,6)=0,12$

Agora, iremos calcular a probabilidade de pegar engarrafamento pelo menos um trecho:

Trajeto *E1E3*: $1-0{,}1=0{,}9$

Trajeto *E1E9*: $1-0{,}14=0{,}86$

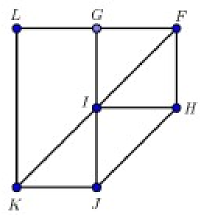
Trajeto *E2E5*: $1-0{,}18=0{,}82$

Trajeto *E2E6*: $1-0{,}12=0{,}88$

Assim, o melhor trajeto para Paula é o trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível sendo o trajeto *E2E5*, alternativa *c*.

Questão 2 (ENEM 2011). Um técnico em refrigeração precisa revisar todos os pontos de saída de ar de um escritório com várias salas. Na imagem apresentada, cada ponto indicado por uma letra é a saída do ar e os segmentos são as tubulações.

FIGURA 25 – Questão do ENEM 2011



FONTE: GOMES BEZERRA, p. 7 (2015)

Iniciando a revisão pelo ponto *K* e terminando em *F*, sem passar mais de uma vez por cada ponto, o caminho será passando pelos pontos

(a) *K*, *I* e *F*. (b) *K*, *J*, *I*, *G*, *L* e *F*. (c) *K*, *L*, *G*, *I*, *J*, *H* e *F*.

(d) *K*, *J*, *H*, *I*, *G*, *L* e *F*. (e) *K*, *L*, *G*, *I*, *H*, *J* e *F*.

Resolução: Saindo do ponto *K*, temos duas alternativas: passar por *J* ou *L*. Porém, se iniciarmos por *J*, teremos que passar duas vezes pelo ponto *G*. Portanto, o caminho correto é passar primeiramente por *L*, e depois pelos pontos *G*, *I*, *J*, *H* e *F*, alternativa *c*.

Questão 3 (Banco de Questões da OBMEP 2011 - Nível 2). Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

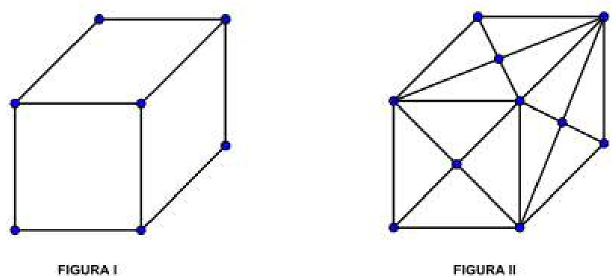
(a) 4 pessoas do grupo? (b) 3 pessoas do grupo?

Admita que se *A* conhece *B* então *B* conhece *A*.

Resolução: (a) Representamos as 15 pessoas por pontos, conforme um círculo. Um arco entre dois pontos significa que as duas pessoas representadas se conhecem. Como cada ponto está ligado a dois pontos à esquerda e a dois pontos à direita, saem quatro arcos de cada ponto, o que significa que é possível que cada pessoa conheça exatamente 4 pessoas do grupo. Portanto, é possível que cada uma delas conheça exatamente 4 pessoas do grupo. (b) Vamos representar as pessoas por pontos. Ligamos dois pontos se as pessoas representadas se conhecem. Cada ponto é extremidade de 3 arcos, vamos precisar traçar para representar todas as amizades um total de $15 \times 3 = 45$ arcos que saem de todos os pontos. Porém, nessa contagem, cada arco foi contado duas vezes, nas duas extremidades. Portanto, o número de segmentos deve ser $\frac{45}{2}$, o que é um absurdo, pois este número não é inteiro. Portanto, não é possível que cada uma delas conheça exatamente 3 pessoas do grupo.

Questão 4 (Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 3). A Figura I a seguir, um cubo de aresta 1. A Figura II mostra um cubo de aresta 1 no qual todas as 12 diagonais da face foram desenhadas. Assim criou-se uma rede com 14 vértices (os 8 vértices do cubo e os 6 do centro das faces) e 36 arestas (as 12 do cubo e mais 4 sobre cada uma das 6 faces).

FIGURA 26 – Questão do Banco de Questões da OBMEP 2013



FONTE: GOMES BEZERRA, p. 8 (2015)

(a) Qual o menor comprimento possível para um caminho formado por arestas do cubo que passa por todos os 8 vértices?

(b) Qual o menor comprimento possível para um caminho formado por arestas dessa rede que passa por todos os 14 vértices?

Resolução: (a) Como a distância entre cada par de vértices do cubo é igual a 1, qualquer caminho passando por 8 vértices distintos deve ter, no mínimo, comprimento igual a 7. Assim, a resposta para o exercício é 7. (b) Note que cada trecho ligando um vértice de uma face com um vértice do centro da face tem comprimento igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por outro lado, o trecho ligando um vértice do cubo a outro vértice do cubo adjacente a ele tem comprimento igual a 1. Qualquer caminho contendo os 14 vértices deve, obrigatoriamente, conter uma quantidade mínima de 13 trechos. Cada trecho poderia, a princípio, ser de três tipos diferentes:

• conectando um vértice do cubo a outro vértice do cubo adjacente a ele;

• conectando um vértice de uma face a um vértice do centro de uma face.

No primeiro caso, o trecho tem comprimento igual a 1, enquanto que no segundo ele tem comprimento igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, para minimizar o comprimento dos caminhos, devemos utilizar o máximo possível de trechos com comprimento igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como temos um total de oito vértices do cubo e apenas seis vértices de centro de faces, qualquer caminho que passe por todos os 14 vértices deve conter um trecho ligando dois vértices do cubo, ou seja, um trecho de comprimento 1. Portanto, a resposta para esse item é $6 \times \sqrt{2} + 1$.

Á escola, instituição responsável pela formação dos indivíduos, cabe a tarefa de adequar seus currículos correndo o risco, caso não ocorra a adequação, de tornar-se obsoleta e desinteressante. Adequar o estudo das disciplinas ao novo tempo, possibilitando um ensino – aprendizagem, sempre que possível, dinâmico, autônomo e participativo, é ainda um dos seus maiores desafios. As instituições de ensino precisam desenvolver a autonomia, o raciocínio cognitivo e aplicabilidade dos saberes. Para tanto, faz-se necessário, no ponto de vista da Matemática, uma maior exploração de conteúdos que possibilitem a modelagem e resolução de problemas. Hoje, para nortear a escolha dos conteúdos que irão compor os currículos escolares existem os PCNEM e as OCEM.

O primeiro documento foi a Lei 9.394/96 ou como é mais conhecida LDBEN, que regulamentou as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Na sequência de documentos que sucederam a LDBEN estão os PCNs. Os primeiros a serem lançados foram os do Ensino Fundamental que foram subdivididos em dois níveis, direcionados de 1ª à 4ª séries e de 5ª à 8ª séries.

No contexto da modernização tecnológica a Matemática é uma peça essencial, pois é base para praticamente todas as novas ideias e aplicações relacionadas às novas tecnologias. Contudo não se tem o interesse de excluir o contexto próprio da Matemática das escolas, pois mesmo nas OCME verifica-se o reconhecimento da Matemática com características próprias de desenvolvimento tecnológico ou simplesmente teórico.

> Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

A utilização desse tipo de tecnologia, possibilitaria a exploração de outros conceitos, tais como os princípios aditivo e multiplicativo em combinatória e a busca do melhor caminho no trabalho com grafos utilizando-se do método da exaustão. Esses são apenas alguns exemplos de aplicação que poderiam expandir o ensino com a utilização dos mesmos, uma vez que possuem uma característica de fácil contextualização e interdisciplinaridade.

A combinatória e o estudo de grafos estimulam o raciocínio cognitivo através da exploração de situações problemas que, quando bem elaboradas, aplicam-se à realidade. A impossibilidade de usar calculadoras, devido à discussão sobre o tema, reduz nossa prática pedagógica e impede o desafio aos alunos como afirma BRASIL (2012, p.127).

> Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares.
> Este tema estruturador permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sociocultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática.

A problemática do ensino de Matemática também tinha "raízes" no ensino universitário. Diante disso, foi necessário levar formas de aplicabilidades de conceitos matemáticos às instituições de ensino superior, a fim de se rever a forma como os profissionais que utilizam a Matemática estavam sendo formados nas universidades. Constatou-se que grande parte dos cursos de licenciatura e bacharelado ainda não haviam adequado seus currículos à formação de professores e pesquisadores que tivessem uma nova visão nessa sociedade de transição.

Destacando-se como uma dessas ações, foram lançadas as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), objetivando orientar professores, procedimentos e currículos em cumprimento a LDBEN. Essa prevê em seu Artigo 9º inciso IV, entre as incumbências da

União, estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum.

Os PCNEM de 1999 deixam a desejar no que diz respeito às orientações de atividades com as quais os professores poderiam explorar os conteúdos, quando comparados com os do Ensino Fundamental. Muitas críticas foram feitas a eles nesse ponto. Motivado, possivelmente, por essa deficiência, o Ministério da Educação (MEC) lançou em 2002 um texto complementar, os PCN+ Ensino Médio, para deixar mais claras suas orientações em relação a proposta do documento apresentado.

As discussões sobre currículos não pararam por aí, continuaram sendo realizados seminários regionais com a participação dos grupos interessados. Os frutos de tais discussões continuaram surgindo e, em 2006, o MEC lança as OCEM. Especificamente nas Orientações Para Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, fica evidente a possibilidade e a abertura dada ao trabalho com grafos no Ensino Médio, fato que pode ser verificado no trecho a seguir:

> [...]Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94).

Outro documento oficial, mas só que não a nível nacional, faz referência a aplicação de grafos para resolução de problemas, é o Currículo Básico Comum (CBC) da rede estadual de Minas Gerais. Especificamente na introdução do Ensino Médio nas orientações de eixos temáticos fica evidente a possibilidade e a abertura dada ao trabalho com grafos no Ensino Médio, fato que pode ser verificado no trecho a seguir:

> Eixo Temático I Números, Contagem e Análise de Dados: Contar é um dos atos primitivos da Matemática e se materializa no cotidiano e nas ciências através das perguntas “Quantos são?” e “De quantas maneiras?”. Os métodos e conceitos relativos ao ato de contar são essenciais em problemas tão diversos quanto enumeração de possíveis resultados de uma experiência genética, armazenamento de dados em formato eletrônico, estimativas do tempo de execução de programas em computadores e distribuição de senhas para usuários de sistemas seguros de comunicação. Todos estes problemas e inúmeros outros dependem da formalização Matemática das técnicas de contagem, conhecida como Análise Combinatória, e de suas fundamentais aplicações em Probabilidade e Teoria de Grafos. (MINAS GERAIS, 2006, p. 35)

Observando essa tendência, um número significativo de estudos aborda as possibilidades do trabalho com grafos ainda na Educação Básica. Atualmente, o MEC tem a proposta da confecção da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e, diante dessa intenção, estão sendo realizadas, desde de 2015, reuniões, seminários, consultas a níveis nacional e local por intermédio das secretarias municipais e estaduais. Em março de 2016, a primeira versão do documento é finalizada. Em junho, seminários com professores, gestores e especialistas abertos à participação pública são realizados por todo o Brasil, já para debater a segunda versão da BNCC. Em agosto, começa a ser redigida a terceira versão, em um processo colaborativo com base na versão 2. Em abril de 2017, o MEC entrega a versão final da BNCC ao Conselho Nacional de Educação (CNE). O CNE irá elaborar parecer e projeto de resolução sobre a BNCC, que serão encaminhados ao MEC. A partir da homologação da BNCC, começa o processo de formação e capacitação dos professores e o apoio aos sistemas de Educação Estaduais e Municipais para a elaboração e adequação dos currículos escolares.

São cobradas da educação a interdisciplinaridade e a relação com o cotidiano e, para isso, os professores terminam fazendo “sacrifícios” para descobrir formas de relacionar a Matemática com outras disciplinas e com o cotidiano de seus alunos. Os conhecimentos básicos da Teoria de Grafos, dependendo do nível de ensino, tornariam o trabalho bem mais simples já que possuem um leque de aplicações.

7. GRAFOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Sabemos que o livro didático é de extrema importância no processo de ensino – aprendizagem, vindo a se constituir em um recurso auxiliar e imprescindível na condução das atividades e do trabalho pedagógico. O autor do texto didático torna-se um interlocutor, proporcionando um diálogo entre professor e aluno, na medida em que os conteúdos matemáticos vão sendo apresentados.

Não é comum encontrar nos livros didáticos menções à Teoria de Grafos, porém, não é difícil encontrar situações que são modeladas ou até mesmo resolvidas por meio dos grafos. Analisando textos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), verificamos que alguns deles fazem menção ao conteúdo de grafos. Quando declaramos que o livro usa o conceito de grafos, na maioria das vezes, o autor não faz menção explícita ao termo “grafo” ou a qualquer conceito da Teoria de Grafos. Procedemos a seguir a uma breve análise de como esse assunto vem sendo abordado nesses textos.

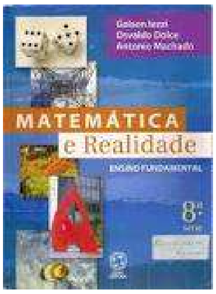
No texto “Tudo é Matemática de 7º ano”, veja FIGURA 27, do autor Luiz Roberto Dante, publicado pela Editora Ática em 2009, nas páginas 100 e 101, na seção “Leitura”, podemos perceber a inserção implícita da ideia de grafo quando se aborda no texto, “O problema das quatro cores”, o conceito de coloração de formas planas e mapas, na sequência, algumas atividades são apresentadas para a aplicação do conceito.

FIGURA 27 – Livro Didático Tudo é Matemática 7º Ano

FONTE: Mercado Livre (Acesso em: 9 jul. 2017)

No texto “Matemática e Realidade de 8ª série”, veja FIGURA 28, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, publicado pela Editora Atual, em 2005, na página 186, na seção “Exercícios”, é apresentado um problema de descobrir o número de equipes em um torneio escolar em que houve 91 jogos e cada par de equipes enfrentou-se só uma vez, resultando em um grafo completo. E na página 328, na seção “Desafio”, um problema chamado “Formiga Esperta”, sobre uma formiga que deseja buscar comida pelo menor caminho.

FIGURA 28 – Livro Didático Matemática e Realidade 8ª Série



FONTE: Mercado Livre (Acesso em: 9 jul. 2017)

No texto “Matemática e Realidade de 7ª série”, veja FIGURA 29, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, publicado pela Editora Atual, em 2005, na página 53, na seção “Desafio”, é apresentado um problema onde todos têm que abraçar a todos em uma festa, resultando em um grafo completo.

FIGURA 29 – Livro Didático Matemática e Realidade 7ª Série

FONTE: Estante Virtual (Acesso em: 9 jul. 2017)

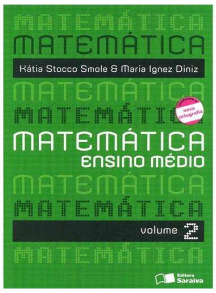
No texto “Tudo é Matemática de 6º ano”, veja FIGURA 30, do autor Luiz Roberto Dante, publicado pela Editora Ática em 2009, na página 73, na seção “Divertir-se”, há uma figura plana só com segmentos e propõe-se que “redesenhe a figura” sem cruzar linhas nem tirar o lápis do papel, um grafo euleriano. Na página 234, na seção “Desafio”, um problema sobre ligações diretas entre cinco telefones, gerando um grafo completo.

FIGURA 30 – Livro Didático Tudo é Matemática 6º Ano

FONTE: Mercado Livre (Acesso em: 9 jul. 2017)

No texto “Matemática Ensino Médio de 2º ano”, veja FIGURA 31, das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, publicado pela Editora Saraiva em 2010, na seção “Para saber mais”, é apresentado o problema “Redes de Comunicação”, que pode ser esquematizado através de um grafo.

FIGURA 31 – Livro Didático Matemática Ensino Médio 2º Ano



FONTE: Estante Virtual (Acesso em: 9 jul. 2017)

No texto “Matemática Ensino Médio de 1º ano”, veja FIGURA 32, das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, publicado pela Editora Saraiva em 2010, nas páginas 214 e 215, na seção “Jogos”, é apresentado o jogo “Labirinto” onde os jogadores devem fazer um caminho que acumule mais pontos.

FIGURA 32 – Livro Didático Matemática Ensino Médio 1º Ano

FONTE: Estante Virtual (Acesso em: 9 jul. 2017)

No texto “Matemática Contexto e Aplicações de 2º ano”, veja FIGURA 33, do autor Luiz Roberto Dante, publicado pela Editora Ática em 2016, na página 171, na seção “Relação de Euler”, é apresentado um texto “Uma aplicação da relação de Euler” onde é abordado grafo planar e grafo dual da região nordeste do brasil. Nas páginas 217 a 219, na seção “Exercícios Resolvidos”, há um exercício sobre apertos de mãos entre 30 alunos. E na página 224, na seção “Problemas que envolvem os vários tipos de contagem”, há um texto “As 7 pontes de Königsberg”, que conta a história de como que surgiu o problema, de como Euler solucionou esse problema e sobre o início da Teoria de Grafos.

FIGURA 33 – Livro Didático Matemática Contexto e Aplicações 2º Ano

FONTE: Mercado Livre (Acesso em: 9 jul. 2017)

Nota-se nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, seja no estudo de Análise Combinatória ou Probabilidade, a expressão “diagrama de árvores”, tratada de forma simplória e omitindo a real importância da teoria na resolução de problemas. A forma com a qual essa teoria vem sendo abordada pode contribuir para que os discentes não usem efetivamente esse modelo, principalmente sem a utilização de fórmulas, além de responder a problemas cotidianos.

8. METODOLOGIA E APLICAÇÃO DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, será explicada a realização da pesquisa, sobre quem foram os sujeitos envolvidos, metodologia utilizada, aplicação das atividades e as avaliações realizadas antes e depois dessas atividades, assim como a avaliação da pesquisa.

Localizado na Mesorregião do Campo das Vertentes e na Microrregião de Barbacena, o pequeno município de Alfredo Vasconcelos, de aproximadamente 6709 habitantes, segundo estimativa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), conta com somente uma escola que oferece o Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, localizada no perímetro urbano.

A Escola Estadual “Nossa Senhora do Rosário” é uma escola da rede pública do estado de Minas Gerais, localizada na rua Ângelo Bertolin, 27, no centro do município. A escola tem aproximadamente 718 alunos, distribuídos em três turnos, sendo que o primeiro turno é composto por três turmas do nono ano do Ensino Fundamental, três turmas do primeiro ano, três do segundo ano e três do terceiro ano do Ensino Médio. Já o terceiro turno é composto por três turmas de sexto ano, quatro turmas de sétimo ano e quatro turmas de oitavo ano do Ensino Fundamental, além de uma turma do Projeto de Elevação da Escolaridade - Metodologia Telessala[13]. O quinto turno é composto por uma turma do quarto período do Ensino Fundamental e uma turma do terceiro período do Ensino Médio, ambas da Educação para Jovens e Adultos (EJA).

A implementação da pesquisa deu-se em três turmas de 3º ano do Ensino Médio, a ambas no primeiro turno, de 7 a 18 de agosto de 2017, utilizando um público de 58 alunos, com faixa etária entre 17 e 18 anos. As atividades foram realizadas no período regular, durante as aulas de Matemática, cuja carga horária semanal é de 4 horas/aula, totalizando 8 horas/aula.

Esse grupo de alunos foi escolhido devido ao fato de se encontrarem na porta de entrada do ensino superior e do mercado de trabalho, no 3° ano, momento em que se inicia uma nova fase na vida do aluno, quando esse começa a almejar coisas como uma vaga na universidade ou um emprego.

[13] O Projeto Elevação da Escolaridade - Metodologia Telessala Minas Gerais é uma parceria entre a Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais e a Fundação Roberto Marinho. As turmas para desenvolvimento desse projeto devem ter no mínimo 15 e, no máximo, 25 alunos de 6º ao 9º ano que serão organizados numa mesma turma para efeito de conclusão do Ensino Fundamental. Esse projeto tem como eixo principal a formação, acompanhamento pedagógico dos professores e a oferta de metodologia diferenciada, buscando garantir a continuidade do percurso escolar dos jovens entre 15 e 17 anos em distorção idade/ano de escolaridade que ainda não concluíram o Ensino Fundamental.

A metodologia de pesquisa usada nesse trabalho consiste em um estudo de caso, no qual, nos primeiros encontros, foram aplicados dois testes preliminares, pré-testes motivacional e de conteúdo antes de aplicação de aulas sobre o conteúdo. Em seguida foram dadas aulas sobre grafos e, no fim, foram aplicados dois testes finais, pós-testes de conteúdo e motivacional.

No primeiro encontro, foi aplicado um questionário de pré-teste motivacional sobre os hábitos de estudo e relação dos alunos com a Matemática, a fim de saber sobre a visão dos alunos a respeito do estudo da Matemática.

O pré-teste motivacional consistiu num questionário aplicado no primeiro encontro com os alunos, denominado "Escala de Motivação em Matemática", formulado por Gontijo[14]. Esse teste foca não só no interesse, mas também a satisfação e o prazer de alguém, motivado pela Matemática, resolver um problema, pesquisar e explicar soluções aos companheiros de estudo. Acerca disso, segundo Gontijo afirma:

> [...] estudar frequentemente Matemática; dedicar tempo para os estudos; resolver problemas; criar grupos de estudos para resolver exercícios de Matemática; pesquisar informações sobre Matemática e sobre a vida de matemáticos; persistência na resolução de problemas; elaborar problemas para aplicar conhecimentos adquiridos; explicar fenômenos físicos a partir de conhecimentos matemáticos; realizar tarefas de casas; relacionar bem com o professor de Matemática; participar das aulas com perguntas e formulação de exemplos e cooperar com os colegas no aprendizado da Matemática. (GONTIJO, 2007, p.138)

Esse questionário é formado por 28 afirmações, divididas em 6 fatores que representam a relação do estudante com a Matemática. Os seis fatores são: (Fator 1) Satisfação pela Matemática, (Fator 2) Jogos e Desafios, (Fator 3) Resolução de Problemas, (Fator 4) Aplicações no Cotidiano, (Fator 5) Hábitos de Estudo, (Fator 6) Interação em Sala de Aula. A escala motivacional admite como possibilidades de resposta: (1) nunca, (2) raramente, (3) às vezes, (4) frequentemente e (5) sempre.

O motivo da aplicação Escala de Motivação em Matemática foi para conseguir fazer uma análise quantitativa da motivação presente nos alunos com a Matemática. Essa análise foi feita com observação dos percentuais de respostas na escala em cada item da lista. A seguir serão apresentadas as afirmações do questionário separadas por fatores:

[14] Cleyton Hércules Gontijo (19??) é um matemático e professor universitário brasileiro.

Fator 1 (Satisfação pela Matemática).

As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas.

Quando me pedem para resolver problemas de Matemática, fico nervoso(a).

Tenho muita dificuldade para entender Matemática.

Matemática é “chata”.

Aprender Matemática é um prazer.

Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas.

Tenho menos problemas com Matemática do que com as outras disciplinas.

Consigo bons resultados em Matemática.

Fator 2 (Jogos e Desafios).

Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.

Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.

Procuro relacionar a Matemática ao conteúdo das outras disciplinas.

Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática para meus amigos e familiares.

Fator 3 (Resolução de Problemas).

Gosto de resolver os exercícios rapidamente.

Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.

Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de Matemática.

Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.

Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.

Fator 4 (Aplicações no Cotidiano).

Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.

Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.

Faço desenhos usando formas geométricas.

Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola.

Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.

Fator 5 (Hábitos nos Estudos).

Estudo Matemática todos os dias durante a semana.

Realizo as tarefas de casa que o professor de Matemática passa.

Estudo as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.

Além do meu caderno, eu costumo estudar Matemática em outros livros para fazer provas e testes.

Fator 6 (Interação na Sala de Aula).

Faço perguntas nas aulas de Matemática quando eu tenho dúvidas.

Relaciono-me bem com meu professor de Matemática.

Seguem agora os resultados obtidos na aplicação da Escala de Motivação em Matemática, no pré-teste motivacional, separados por fatores e comentados.

TABELA 1 – Percentual de Respostas ao Fator 1 do Pré-Teste Motivacional

Satisfação pela Matemática		**Percentual de Respostas**				
Itens		1	2	3	4	5
1	As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas.	3%	16%	40%	26%	16%
2	Quando me pedem para resolver problemas de Matemática, fico nervoso (a).	9%	14%	41%	14%	22%
3	Tenho muita dificuldade para entender Matemática.	2%	16%	43%	16%	24%
4	Matemática é “chata”.	12%	17%	67%	3%	0%
5	Aprender Matemática é um prazer.	9%	12%	26%	16%	38%
6	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas.	17%	22%	26%	19%	16%
7	Tenho menos problemas com Matemática do que com as outras disciplinas.	12%	29%	17%	22%	19%
8	Consigo bons resultados em Matemática.	5%	12%	38%	28%	17%

FONTE: Autora (2017)

Quanto à satisfação pela Matemática, constatou-se que, mesmo com 40% tendo sempre ou frequentemente muita dificuldade na Matemática e 58% dos mesmos não terem a Matemática como sua disciplina preferida, apenas 3% a consideram chata, porém 9% não acha que aprender Matemática é um prazer e 41% tem menos problemas com a Matemática que com qualquer outra disciplina.

O grande problema que os alunos têm com a Matemática é o medo de errar; observa-se que mais de 90% dos alunos ficam nervosos ao terem de resolver um problema matemático, sendo que destes, em quase metade dos casos, isso acontece frequentemente ou sempre, algo preocupante. De todos os alunos participantes da experiência, mais da metade não costuma conseguir bons resultados em Matemática, outro dado para se analisar.

O nervosismo que sentem ao se deparar com uma questão que envolva conhecimento lógico ou prático recém adquirido e o coloque em teste. Alguns têm aversão à Matemática, mas esse número não é tão superior ao que poderia ser encontrado em outras disciplinas. Porém, aqueles que não têm muitos problemas com esta, tende a não se envolver muito, temendo o fracasso, poucos costumam testar seus conhecimentos. Logo, a maior parte no público tende a fazer o básico para que possam garantir a média e a progressão de série. Embora muitos tenham dificuldade em entender os conteúdos, a falta de prática dificulta ainda mais o processo de aprendizagem, pois nota-se que apenas 35% dos estudantes têm o costume de resolver, frequentemente ou sempre, problemas e fazer as atividades Matemáticas.

Mas, por outro lado, a minoria que descobre o prazer em aprender Matemática e não tem medo de testar seus conhecimentos em quaisquer circunstâncias, tendem a obter melhores resultados na área de exatas não só no colegial, mas em cursos profissionalizantes, concursos e afins.

TABELA 2 – Percentual de Respostas ao Fator 2 do Pré-Teste Motivacional

Jogos e Desafios		Percentual de Respostas				
Itens		1	2	3	4	5
9	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.	47%	40%	7%	5%	2%
10	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.	9%	16%	28%	19%	29%
11	Procuro relacionar a Matemática ao conteúdo das outras disciplinas.	12%	22%	28%	29%	9%
12	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática para meus amigos e familiares.	43%	31%	12%	9%	5%

FONTE: Autora (2017)

Constatou-se nesse fator, jogos e desafios, que 87% dos alunos não estão, ou raramente estão envolvidos em qualquer tipo de competição envolvendo Matemática ou raciocínio, 43% não gosta de elaborar desafios para conhecidos e 12% não relaciona Matemática com conteúdo de outras disciplinas. Contudo, 76% gostam de jogos que envolvam raciocínio lógico às vezes, frequentemente ou sempre.

Grande parte dos alunos dessas turmas do Ensino Médio da rede pública gosta de resolver quebra-cabeças que envolvam o raciocínio matemático, porém nada que envolva uma competição com outras pessoas. Uma boa estratégia de aprendizado que infelizmente não usam, é a de relacionar a Matemática com outras disciplinas estabelecendo uma conexão entre certos assuntos que dão razão à parte prática da Matemática, ou seja, os cálculos. Costuma-se trabalhar em sala de aula conteúdo que tenham uma interdisciplinaridade, que ligue a Matemática com outras disciplinas, a fim de despertar nesses alunos, o desejo de aprender Matemática.

TABELA 3 – Percentual de Respostas ao Fator 3 do Pré-Teste Motivacional

Resolução de Problemas		**Percentual de Respostas**				
Itens		1	2	3	4	5
13	Gosto de resolver os exercícios rapidamente.	14%	19%	33%	16%	19%
14	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.	26%	28%	26%	16%	5%
15	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de Matemática.	5%	7%	19%	16%	53%
16	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.	7%	7%	26%	22%	38%
17	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.	3%	14%	36%	22%	24%

FONTE: Autora (2017)

Constatou-se, no fator de resolução de problemas, que 16% dos alunos gostam de resolver exercícios rapidamente com frequência, e 53% fica frustrado quando não consegue resolver um problema matemático. Percebe-se que mesmo que 38% sentem curiosidade pela resolução de um problema e 82% tentam de novo ao falhar na resolução de um problema, as vezes ou mais frequentemente, apenas 5% tentam resolver um exercício de maneiras diferentes.

A maioria dos alunos não gosta de resolver problemas matemáticos devido ao temor do fracasso, por causa da frustração que sentem, mesmo após algumas tentativas, ao não conseguir resolvê-lo. Observa-se que a grande maioria se sente frustrada ao não solucionar uma questão que se propôs a resolver. O problema é que, até para os que são mais bem-sucedidos nesse quesito, eles não tentam resolver um problema de uma maneira diferente. É como se eles tentassem, errassem, tentassem de novo, porém da mesma forma, ou seja, eles insistem no erro, não se abrindo para outras possibilidades de resolução. Quando conseguem, não tentam de outra maneira também, e tentam resolver todos os problemas seguindo aquele mesmo método. É importante atentá-los para o fato de que existem inúmeras possibilidades de se resolver cada problema, pois assim eles podem fazer mais tentativas, ou simplesmente podem escolher aquela que for mais fácil.

TABELA 4 – Percentual de Respostas ao Fator 4 do Pré-Teste Motivacional

Aplicações no Cotidiano		**Percentual de Respostas**				
Itens		1	2	3	4	5
18	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.	41%	16%	40%	3%	0%
19	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.	16%	9%	14%	14%	48%
20	Faço desenhos usando formas geométricas.	17%	33%	12%	17%	21%
21	Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola.	0%	26%	3%	19%	52%
22	Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.	3%	16%	10%	29%	41%

FONTE: Autora (2017)

Verificou-se que apesar de 84% dos alunos utilizarem Matemática no cotidiano quando vão percorrer um caminho para ir a algum lugar e 97% quando vão fazer compras, apenas 3% explica fenômenos da natureza utilizando a Matemática e apenas 26% não conseguem perceber a presença da Matemática em atividades diárias fora da escola.

Os alunos sabem que a Matemática está presente na maioria das coisas que os cercam, em boa parte de seus eventos cotidianos, tanto que costumam usá-la para calcular o tempo gasto no deslocamento de um lugar para outro, quando vão fazer compras ou até mesmo em momentos de lazer, como diversos tipos de jogos.

Em outras atividades como desenhar, maioria acredita que a Matemática não está tão presente, mas pelo menos alguns deles sabem que nas formas e contornos feitos por seu pincel, a geometria está explícita. Outros ainda sabem por exemplo, diferentemente da maioria, explicar fenômenos da natureza relacionando-os com a Matemática, o que mostra que não é impossível ensinar aos jovens que a Matemática está presente em praticamente tudo.

TABELA 5 – Percentual de Respostas ao Fator 5 do Pré-Teste Motivacional

Hábitos nos Estudos		**Percentual de Respostas**				
Itens		1	2	3	4	5
23	Estudo Matemática todos os dias durante a semana.	21%	29%	16%	33%	2%
24	Realizo as tarefas de casa que o professor de Matemática passa.	9%	7%	47%	31%	7%
25	Estudo as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.	67%	17%	10%	5%	0%
26	Além do meu caderno, eu costumo estudar Matemática em outros livros para fazer provas e testes.	21%	43%	16%	10%	10%

FONTE: Autora (2017)

Verificou-se que no fator de hábitos de estudo, há um grande problema, pois vemos que apenas 2% dos alunos pesquisados estudam todos os dias durante a semana, somente 10% estudam Matemática utilizando recursos adicionais além de seus cadernos e livros usados diariamente na escola, e apenas 5% estudam as matérias antes de serem ensinadas em sala de aula.

Segundo essa parte da pesquisa, o que mais atrapalha os alunos a adquirirem conhecimentos matemáticos é a falta de estudo. Repara-se que poucos deles têm o hábito de estudar frequentemente em casa. Muitas vezes deixam de realizar as atividades propostas pelo docente, fazendo com que o processo de fixação de cada conteúdo se torne mais demorado. Além disso, não tem o costume de consultar livros, internet ou outras fontes de informação, limitando-se ao que foi passado em sala de aula, e os professores sabem que o tempo é muito curto para se ensinar tudo o que se gostaria que aprendessem. Uma parceria entre pais e professores seria ideal, de modo que os alunos não restringissem seu tempo de estudo ao tempo que passam em sala de aula.

TABELA 5 – Percentual de Respostas ao Fator 6 do Pré-Teste Motivacional

Interação na Sala de Aula		**Percentual de Respostas**				
Itens		1	2	3	4	5
27	Faço perguntas nas aulas de Matemática quando eu tenho dúvidas.	12%	19%	29%	17%	22%
28	Relaciono-me bem com meu professor de Matemática.	0%	0%	3%	16%	81%

FONTE: Autora (2017)

Nesse fator, percebe-se que a interação em sala de aula não é um problema relevante no processo do ensino – aprendizagem da Matemática, pois constatou-se que 68% dos estudantes fazem perguntas durante as aulas quando têm dúvidas, ás vezes ou mais frequentemente, e 97% dos alunos se relacionam bem com o professor frequentemente ou sempre.

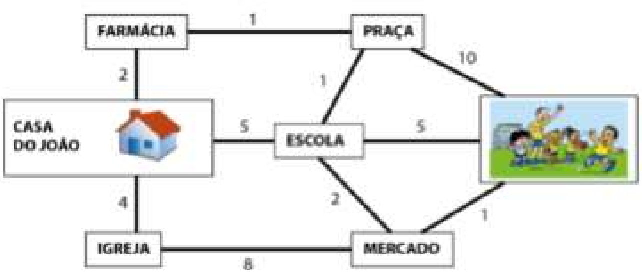
Apesar de a grande maioria ter um bom relacionamento com o professor, mais de 90%, nem todos tiram suas dúvidas durante a aula. Muitas vezes a timidez acaba atrapalhando os alunos a fazer determinados progressos, pois observa-se que metade do grupo não costuma esclarecer os conteúdos que não ficaram claros.

No segundo encontro com os alunos, foi aplicado um pré-teste de conteúdo, baseado nas atividades de pré-teste de conteúdo de ALVES. Foram propostas, no teste, questões que faziam parte do cotidiano dos alunos e que poderiam ser resolvidas com ou sem o auxílio de grafos, sendo realizados com os conhecimentos adquiridos pelos mesmos através do ensino tradicional. É testada, assim, a capacidade de pensar dos alunos, a fim de saber como eles solucionariam as questões antes de tomarem as primeiras aulas sobre grafos.

O pré-teste de conteúdo foi uma avaliação diagnóstica, composta por quatro atividades. Os alunos foram orientados a realizar as atividades que soubessem da forma como acreditavam que deveriam ser feitas, e as mesmas foram aplicadas sem a permissão de consulta a qualquer tipo de material ou troca de informações entre eles. Os problemas eram sobre menor caminho entre duas localidades, localização de instalações, otimização de caminhos cíclicos e planaridade. A seguir, serão apresentadas as atividades do pré-teste de conteúdo:

Atividade 1. Observe o esquema abaixo, onde as arestas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de João e o campinho.

FIGURA 34 – Atividade 1 do Pré-Teste de Conteúdo

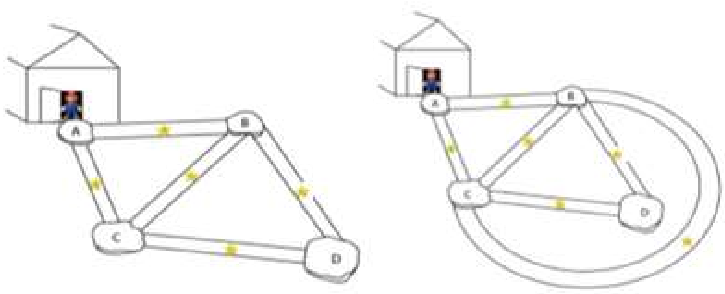


FONTE: ALVES, p. 55 (2016)

Resolução: Primeiramente, como o ponto de partida é a localidade “Casa do João”, deve-se analisar quais são, dentre as localidades vizinhas, as distâncias a serem percorridas. Então: Farmácia (2), Escola (5) e Igreja (4). Dentre estas, a Farmácia é a que possui a menor distância para nós, então, analisam-se os vizinhos dessa localidade. Há então a Praça (1), o que nos faz concluir que a distância pra Praça é 3. A seguir, verificam-se os vizinhos da Praça, que são Campinho (10) e Escola (1). Nesse instante, percebe-se que o caminho para Escola é mais curto passando pela Farmácia e pela Praça do que seguindo diretamente. As distâncias até agora são: Farmácia (2), Escola (4), Igreja (4), Praça (3) e Campinho (13). Serão analisados agora quem são os vizinhos de Escola, além da Casa de João e da Praça. São eles: Campinho (5) e Mercado (2). Aqui, vê-se que o caminho até o Campinho é mais curto passando pela Escola, bem como a distância até o Mercado: Campinho (9) e Mercado (6). Finalizando, serão checados os vizinhos de Mercado, que são Campinho (1) e Igreja (8). Descarta-se esse caminho até a Igreja por ser mais longo, porém, diminuímos a distância para o Campinho (7). Logo, o menor caminho de “Casa do João” para “Campinho” é 7, pelo trajeto: Casa do João → Farmácia → Praça → Escola → Mercado → Campinho.

Atividade 2. Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta *A*, e ele tem que percorrer todos os caminhos para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pelo caminho, essa ponte se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

FIGURA 35 – Atividade 2 do Pré-Teste de Conteúdo



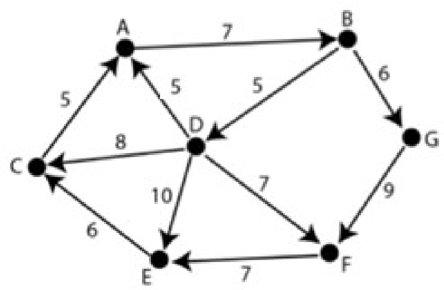
FONTE: ALVES, p. 59 (2016)

Resolução: Na primeira situação, conclui-se que não é possível realizar o trajeto proposto pela questão, pois os vértices *B* e *C* têm um número ímpar de vértices; então pode-se entrar e sair deles até que sobre uma aresta não utilizada. E não haveria como sair, uma vez que não haveria arestas para tal; logo, cada um desses vértices só poderia ser usado uma vez. Esses dois vértices estão ligados ao vértice *A* e são necessários para se sair do ponto de partida. Ao sair de *A* para

B, de lá seria necessário escolher ir para *C* ou *D*; porém, como não se pode voltar ao vértice *B*, a estrela que fica na ponte que liga o vértice *B* ao vértice que não foi escolhido jamais poderia ser recolhida, levando em consideração que seria necessário terminar o trajeto no vértice *A*. O raciocínio vale, analogamente, caso fosse feita a opção de sair do ponto de partida *A* para o vértice *C*. Assim, justifica-se a solução. Na segunda situação, pode-se reparar que todos os vértices do grafo têm um número par de arestas; logo, será possível entrar e sair de todos eles e voltar ao ponto de partida. O único raciocínio que o aluno deveria ter para encontrar o caminho seria o de só voltar ao ponto *A* após passar por todas as arestas, recolhendo as estrelas. O caminho se mostra automaticamente e a proposta é executada sem maiores dificuldades.

Atividade 3. No esquema abaixo, as letras de *A* a *G*, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor ao número da localização.

FIGURA 36 – Atividade 3 do Pré-Teste de Conteúdo



FONTE: ALVES, p. 61 (2016)

( ) DEPÓSITO DE LIXO ( ) HOSPITAL

( ) PIZZARIA ( ) CORPO DE BOMBEIROS

Resolução: A lógica que deveria ser usada para solucionar essa atividade é a seguinte: você deve alocar cada setor de acordo com sua necessidade e facilidade de acesso, para entrar ou para sair, ou, no caso do "depósito de lixo", a necessidade de que esteja longe dos demais setores, considerando que, em uma cidade, seria desagradável que esse setor ficasse próximo a lugares onde houvesse grande circulação de pessoas. Sendo assim, conclui-se que o lugar mais adequado para o "depósito de lixo" seria o vértice *G*, pois esse só possui uma única via de entrada e outra de saída, com uma boa distância para as demais localidades. A melhor localização para o "hospital" seria o vértice *A*, pois este possui o maior número de entradas, com menores distâncias a serem percorridas, uma vez que o acesso aos hospitais tem que ser rápido. A lógica usada para a localização da “pizzaria” é a mesma que se usou para alocar o “corpo de bombeiros”, porém aloca-se este último antes, pois se tratar de um serviço que requer maior atenção. Os bombeiros devem ter o maior número possível de saídas do local onde se encontra o quartel, pois quando precisam sair para atender a um chamado, possam ter um maior número de opções de caminhos, a fim de escolher aquele em que possa chegar mais rápido ao seu destino. Por outro lado, uma pizzaria também deve se localizar num local com mais vias de saída, uma vez que por conta do serviço *delivery*, quanto mais opções de saída houver, mais rápido será a entrega e melhor será a eficiência do serviço prestado. Sendo assim, a melhor localização para o “corpo de bombeiros” é o vértice D e, para a “pizzaria”, seria o vértice B, pois, mesmo que uma das duas saídas seja para o depósito de lixo, a outra será para o corpo de bombeiros, com um grande número de vias de saída.

Atividade 4. Você tem que levar água, luz e gás para três casas de uma cidade. As companhias de água, luz e gás permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

FIGURA 37 – Atividade 4 do Pré-Teste de Conteúdo

FONTE: ALVES, p. 65 (2016)

Resolução: Pode-se ilustrar a situação como um grafo bipartido, onde cada vértice deve estar interligado a todos os do lado oposto, não devendo haver ligações entre os vértices adjacentes. Nesse caso, há um grafo bipartido $K_{3,3}$, essa é a maior dificuldade imposta pelo problema, pois não é planar; chegando à conclusão de que seria impossível tal feito.

O método usado para correção dessas atividades foi apenas certo ou errado, pois o objetivo desse teste era descobrir se o aluno conseguia resolver a atividade ou não e, se conseguia, como ele resolvia a atividade sem usar conceitos da Teoria de Grafos. Os conceitos usados para correção de cada atividade estão relatados a seguir:

Insuficiente (I). 0 a 4,9 pontos. O desenvolvimento não atende minimamente o objetivo proposto da atividade.

Regular (R). 5 a 6,9 pontos. O desenvolvimento atende minimamente o objetivo proposto da atividade.

Bom (B). 7 a 7,9 pontos. O desenvolvimento atende satisfatoriamente o objetivo proposto da atividade.

Muito Bom (MB). 8 a 8,9 pontos. O desenvolvimento atende quase plenamente o objetivo proposto da atividade.

Ótimo (O). 9 a 10 pontos. O desenvolvimento atende plenamente o objetivo proposto da atividade.

Cada atividade desenvolvida pelos alunos no pré-teste de conteúdo teve um objetivo específico, e foi seguindo estes objetivos que os conceitos de avaliação definidos anteriormente foram aplicados. Os resultados obtidos no pré-teste de conteúdo estão mencionados na TABELA 7.

TABELA 6 – Percentual dos Conceitos do Pré-Teste de Conteúdo

Pré-Teste de Conteúdo	**Conceitos**				
Questão	I	R	B	MB	O
1	5%	12%	21%	62%	0%
2	12%	34%	50%	3%	0%
3	41%	29%	22%	7%	0%
4	41%	19%	38%	2%	0%

FONTE: Autora (2017)

Os objetivos de cada atividade estão descritos a seguir:

Atividade 1.

Objetivo: Identificar o menor caminho que leva a solução da atividade.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que 62% dos alunos atingiram o conceito MB, 21% conceito B e 17% tiveram conceitos R ou I. A maioria dos alunos não encontrou dificuldades para realização dessa atividade e atingiram totalmente ou parcialmente o objetivo proposto relacionado a mesma.

Atividade 2.

Objetivo: Reconhecer que a atividade só é possível se todos os vértices tiverem grau par.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que somente 3% dos alunos atingiram o conceito MB, 50% conceito B e 46% tiveram conceitos R ou I. A maior dificuldade encontrada, de acordo com as observações feitas, foi referentes à Figura I, justamente aquela em que não é possível realizar a tarefa proposta pelo enunciado. A maioria dos alunos não soube justificar o que deve ocorrer com o número de vértices de forma que a tarefa se torne possível.

Atividade 3.

Objetivo: Determinar como deve ser feita a alocação dos setores de acordo com sua necessidade de facilidade de acesso.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que 7% dos alunos atingiram o conceito MB, 22% conceito B e 70% tiveram conceitos R ou I. A maior dificuldade encontrada, de acordo com as observações feitas, foi referente à identificação dos vértices que tornam possível a obtenção do objetivo proposto pela atividade.

Atividade 4.
Objetivo: Concluir que o problema não tem solução.
Comentários: Após análises dos resultados observou-se que apenas 2% dos alunos atingiram o conceito MB, 38% conceito B e 60% tiveram conceitos R ou I. Após diversas tentativas vários alunos desistiram de tentar chegar a alguma solução não apresentando nenhuma resposta, e parte concluiu que a mesma não tinha solução pois sempre ficava faltando inserir um dos tipos de serviços.

Logo depois, foram ministradas quatro aulas de 50 minutos, com material de apoio baseado no dicionário visual de MORI. A cada assunto abordado durante as aulas sobre definição de grafos, os alunos relacionavam o conteúdo a uma das atividades abordadas no pré-teste de conteúdo, solucionando-a junto com o professor, da maneira correta. Recursos didáticos e tecnológicos, como computador, internet e *datashow*, foram utilizados durante a apresentação das aulas, visando torná-las mais interessantes e motivadoras para os alunos.

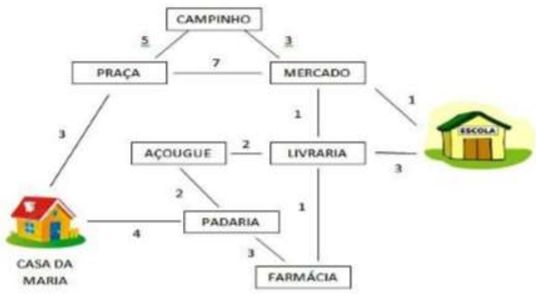
A primeira aula sobre grafos para o grupo de alunos foi baseada nas atividades aplicada como pré-teste de conteúdo. Foi feita a resolução de cada atividade com os alunos e foram explicadas as causas dos erros mais comuns encontrados pelo professor durante a correção. A segunda aula falou-se a respeito de conceitos básicos envolvendo grafos e algumas definições mais importantes para o andamento do trabalho, com o auxílio de um vídeo sobre a definição de grafos. A terceira aula falou-se um pouco dos grafos eulerianos e hamiltonianos, através do vídeo sobre o famoso desafio das pontes da cidade de Königsberg. Foi ensinado aos alunos como jogar o jogo *Icosien Game*, uma versão online, utilizando um *datashow* ligado a um computador com acesso à internet. Na última aula falou-se de alguns conceitos de planaridade. Foi proposto aos alunos o desafio *online* do clássico problema das três casas ligadas a água, luz e gás.

Após as aulas, os alunos foram testados novamente a resolver situações problema que envolviam tanto o raciocínio lógico quanto um conhecimento prévio do estudo de grafos, onde o objetivo do professor era avaliar o índice de melhora destes alunos após as aulas ministradas em sala, podendo mensurar, assim, o êxito que obtivera em sua pesquisa. Esse teste foi o pós-teste de conteúdo, uma atividade baseada no pré-teste de conteúdo de ALVES, para que os alunos fizessem após os conhecimentos adquiridos.

O pós-teste de conteúdo foi composto por quatro atividades similares às atividades do pré-teste de conteúdo, que avaliaram conhecimentos sobre grafos. A seguir, serão apresentadas as atividades do pós-teste de conteúdo realizado pelos alunos e as respostas comentadas de cada atividade:

Atividades 1. Observe o esquema abaixo, onde as setas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de Maria e a escola.

FIGURA 38 – Atividade 1 do Pós-Teste de Conteúdo

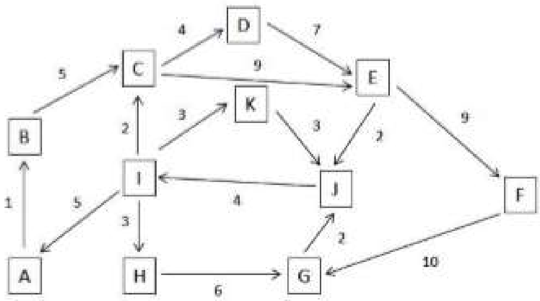


FONTE: ALVES, p. 82 (2016)

Resolução: Primeiramente, como parte-se da localidade "Casa da Maria", deve-se analisar quais são, dentre as localidades vizinhas, as distâncias a serem percorridas. Então há: Padaria (4), e Praça (3). Dentre estas, a Praça é a que possui a menor distância, então, analisam-se os vizinhos dessa localidade. Há então: Campinho (5) e Mercado (7), o que faz concluir que a distância para o Campinho é 8, e para Mercado é 10. A seguir, verificam-se os vizinhos de Campinho, que é Mercado (3); logo, a distância para Mercado, traçando esse caminho, é 11, ou seja, esse caminho é descartável, visto que se pode chegar a Mercado por um caminho mais curto. Os vizinhos de Mercado, além de Campinho e Praça, são Livraria (1) e Escola (1). Nesse instante, percebe-se que o caminho para Escola é 11; por esse caminho, será tentado algum caminho mais curto. Além disso, vê-se que a distância para Livraria também é 11. Será analisado agora o caminho pelo outro lado de "Casa de Maria", pela Padaria. As distâncias até agora são: Escola (11), Padaria (4), Praça (3), Campinho (8), Mercado (10) e Livraria (11). Começa-se verificando quem são os vizinhos de Padaria: Farmácia (3) e Açougue (2); logo, as distâncias para Farmácia e Açougue são, respectivamente, 7 e 6. Esses têm apenas um vizinho além de Padaria, que seria Livraria. A distância do Açougue para Livraria é 2, enquanto que a distância da Farmácia para a mesma Livraria é 1. Nesse caso, é fácil calcular que a distância para Livraria é 8, por ambos os caminhos, que são melhores do que o trajeto anterior, no qual a distância para Livraria seria 11. Para finalizar, basta calcular o menor caminho da Livraria para a escola. A escola é vizinha da Livraria, sendo que a distância entre elas é 3. Porém, passando pelo Mercado, cuja distância para Livraria é 1, e para a Escola também é 1, haveria uma distância mais curta (2). Conclui-se então, que o melhor caminho de “Casa da Maria” para “Escola” é: Casa da Maria → Padaria → Farmácia → Livraria → Mercado → Escola, ou ainda Casa da Maria → Padaria → Açougue → Livraria → Mercado → Escola.

Atividade 2. No esquema abaixo, as letras de *A* a *K*, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor à letra da localização.

FIGURA 39 – Atividade 2 do Pós-Teste de Conteúdo



FONTE: ALVES, p. 87 (2016)

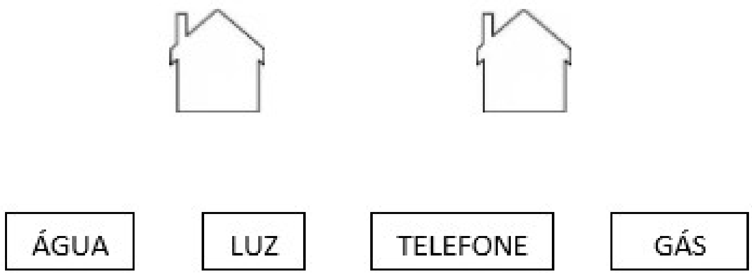
( ) FAST FOOD ( ) SHOPPING

( ) USINA NUCLEAR ( ) SAMU

Resolução: O modo mais aceitável era que o SAMU fosse localizado no vértice *I*, pois esta é a localidade com maior número de saídas, visto que, quando o serviço de emergência é chamado, ele tem que chegar ao seu destino com maior rapidez possível; daí um número maior de vias disponíveis facilitaria o acesso aos demais lugares. Além disso, é vizinho do vértice *J*, que é aquele que tem o maior número de entradas, o que facilitaria a volta. Agora falando do vértice *J*, entende-se que o melhor setor para se localizar nesse vértice seria o *Shopping*, pois é a localidade com maior número de entradas, ou seja, esses empreendimentos grandes e populares têm de ter um acesso facilitado para a população em geral, logo seria necessário um número maior de vias de acesso. Analisando novamente o "mapa", fica fácil concluir que a Usina Nuclear deve ser localizada no vértice *F*, pois esse tem apenas uma via de acesso e fica a uma distância maior das demais localidades, por razões óbvias, no caso de uma catástrofe. Por último, aloca-se o *Fast Food* no vértice *C*, por este setor de serviço ser caracterizado por trânsito intenso de pessoas que entram e saem a todo instante; ele será alocado no vértice que tem um equilíbrio entre o número de entradas e saídas, além de estar a curtas distâncias das demais localidades.

Atividade 3. Você tem que levar água, luz, telefone e gás para 2 casas de uma cidade. As companhias de água, luz, telefone e gás permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

FIGURA 40 – Atividade 3 do Pós-Teste de Conteúdo

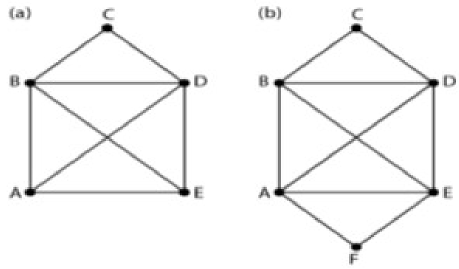


FONTE: ALVES, p. 90 (2016)

Resolução: Nesse caso, o grafo bipartido seria um $K_{2,4}$. Se for aplicado o teorema usado para grafos planares conexos, facilmente verifica-se que um o grafo é planar, logo o problema tem solução.

Atividade 4. Imagine que os desenhos abaixo representem o caminho feito por um caminhão de coleta de lixo de duas pequenas cidades, *X* e *Y*. Considere que o ponto *C* é o aterro sanitário, que é o ponto de partida do caminhão e as arestas são as ruas por onde devem ser feitas as coletas. Como você que planeja a rota desse caminhão, deve evitar que ele passe pela mesma rua duas vezes, a fim de evitar gastos com combustível e ganhar tempo. Trace a rota desse caminhão, de modo que após fazer a coleta ele volte para o aterro sanitário. É possível fazer isso nas duas cidades?

FIGURA 41 – Atividade 4 do Pós-Teste de Conteúdo



FONTE: ALVES, p. 92 (2016)

Resolução: Pela proposta da atividade, deve-se partir do ponto *C* em ambos os casos. Seguindo essa regra, na primeira situação, verifica-se que não será possível sequer percorrer todas as arestas, muito menos voltar ao ponto inicial, uma vez que todos os demais vértices, além do inicial, têm um número ímpar de arestas adjacentes. Já na segunda situação, todos os vértices têm um número par de arestas adjacentes, sendo possível traçar uma trilha euleriana, ou seja, é possível partir do ponto inicial *C* e percorrer todas as arestas, nesse caso, ruas, antes de voltar ao mesmo local de partida.

Usamos o mesmo método anterior, para correção das atividades do pós-teste de conteúdo, o objetivo deste foi descobrir se o aluno conseguia resolver a atividade ou não, usando os conceitos da Teoria de Grafos.

Os resultados obtidos no pós-teste de conteúdo estão mencionados na TABELA 8 onde se observam uma melhora significativa nos conceitos obtidos em todas essas atividades em relação aos resultados apresentados nas atividades do pré-teste de conteúdo.

TABELA 7 – Percentual dos Conceitos do Pós-Teste de Conteúdo

Pós-Teste de Conteúdo	Conceitos				
Questão	I	R	B	MB	O
1	0%	0%	12%	76%	12%
2	0%	17%	45%	28%	10%
3	3%	3%	5%	88%	0%
4	3%	2%	17%	69%	9%

FONTE: Autora (2017)

Os objetivos de cada atividade estão descritos a seguir:

Atividade 1.

Objetivo: Identificar os caminhos de custos mínimos que solucionam a atividade.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que 88% dos alunos atingiram os conceitos O ou MB e 12% conceito B. A maioria dos alunos não encontrou dificuldades para realização dessa atividade e atingiram totalmente ou parcialmente o objetivo proposto relacionado a mesma.

Atividade 2.

Objetivo: Organizar a distribuição dos serviços de forma que atenda a proposta do enunciado.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que 38% dos alunos atingiram os conceitos O ou MB, 45% conceito B e 17% tiveram conceitos R. A maior dificuldade encontrada, de acordo com as observações feitas, foi referente à identificação dos vértices que tornam possível a obtenção do objetivo proposto pela atividade.

Atividade 3.

Objetivo: Concluir que o problema tem solução.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que apenas 6% dos alunos atingiram os conceitos R ou I, 5% conceito B e 88% tiveram conceitos MB. Após a tentativas vários alunos chegaram a alguma solução e nenhum concluiu que a mesma tinha solução pois o grafo bipartido $K_{2,4}$ é planar, onde os alunos puderam visualizar que dentro desse grafo, não havia um $K_{3,3}$.

Atividade 4.

Objetivo: Reconhecer que em todo Grafo Euleriano os vértices possuem grau par.

Comentários: Após análises dos resultados observou-se que 78% dos alunos atingiram os conceitos O ou MB, 17% conceito B e 5% tiveram conceitos R ou I. A maioria dos alunos soube justificar o que deve ocorrer com o número de vértices de forma que a tarefa se torne possível.

Por fim, foi passado um questionário pós-teste motivacional, a fim de saber se teriam uma nova visão a respeito do estudo da Matemática. Esse questionário foi baseado no questionário de Gontijo, aplicado na primeira aula levando em consideração os mesmos fatores deste; porém, as 19 afirmações que o compõem têm o intuito de retratar o nível de satisfação do público alvo com as atividades que participaram.

Como esse questionário pós-teste motivacional é baseado no questionário anterior, ele também é dividido em seis fatores com afirmações que buscam retratar a relação do aluno com a Matemática, agora que conheceram uma nova área da Matemática com novas propostas. A seguir serão apresentados os itens do questionário separados por fatores:

Fator 1 (Satisfação pela Matemática).

Tive dificuldades em entender as atividades propostas.

As atividades propostas foram interessantes.

Quando me pediram para resolver exercícios durante e após o experimento, fiquei nervoso(a).

Aprender Matemática foi um prazer durante as atividades propostas.

Consegui bons resultados nas atividades propostas.

Fator 2 (Jogos e Desafios).

Consegui relacionar conhecimentos de outras disciplinas com conhecimentos da Matemática.

Senti-me desafiado em realizar as atividades propostas.

Eu gostaria de propor atividades semelhantes, envolvendo movimento e Matemática para futuros alunos.

Fator 3 (Resolução de Problemas).

Tentei resolver as atividades propostas rapidamente.

Fiquei curioso em saber a resolução das atividades propostas.

Fiquei frustrado(a) ao não conseguir resolver determinado problema proposto.

Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassaram, tentei de novo.

Fator 4 (Hábitos de Estudo).

Relembrei as tarefas propostas quando estava em casa.

Passei a realizar pesquisas na internet ou em livros para conhecer mais sobre os assuntos abordados nas atividades.

Fator 5 (Aplicações no Cotidiano).

Consegui perceber a presença da Matemática no meu cotidiano.

Consigo explicar os fenômenos da natureza utilizando conhecimentos da Matemática.

Passei a estimar o tempo que gasto para chegar num destino, de acordo com a rapidez do(s) meio(s) de transporte que uso.

Fator 6 (Interação na Sala de Aula).

Fiz perguntas sobre as atividades ao professor ou aos meus colegas quando tive dúvidas.

Tive um bom relacionamento com o professor durante as atividades.

O objetivo é que, com as novas atividades, aulas e conhecimentos adquiridos sobre um assunto com mais oportunidades de vivência por parte dos alunos, tenha sido possível melhorar a relação deles com a Matemática, pela importância que ela tem tanto na vida escolar quanto na acadêmica.

Será feita agora a análise da Escala Motivacional em Matemática, no pós-teste motivacional. Seguem abaixo os resultados, separados por fatores e com as conclusões obtidas a partir das respostas dos alunos.

TABELA 8 – Percentual de Respostas ao Fator 1 do Pós-Teste Motivacional

Satisfação pela Matemática	**Percentual de Respostas**				
Itens	1	2	3	4	5
Tive dificuldades em entender as atividades propostas.	3%	28%	60%	7%	2%
As atividades propostas foram interessantes.	0%	3%	19%	22%	55%
Quando me pediram para resolver exercícios durante e após o experimento, fiquei nervoso(a).	24%	29%	14%	21%	12%
Aprender Matemática foi um prazer durante as atividades propostas.	2%	7%	14%	24%	53%
Consegui bons resultados nas atividades propostas.	0%	0%	47%	41%	12%

FONTE: Autora (2017)

Percebe-se quanto ao Fator 1, satisfação pela Matemática, detectou-se que 100% dos alunos obtiveram bons resultados nas atividades, às vezes ou mais frequentemente, também que 31% dos alunos envolvidos no experimento, tiveram pouquíssima ou nenhuma dificuldade em entender os conceitos propostos em aula. Além desse alto nível de alunos que conseguiram entender o conceito sem problemas, 77% desses alunos tiveram prazer durante as atividades propostas frequentemente ou sempre.

Primeiramente, pode-se avaliar que os alunos em geral entenderam as atividades propostas, pois o questionário mostra que menos de 10% tiveram dificuldades em compreender o que deveria ser feito nas questões.

Quanto ao nível de interesse nas atividades, houve um resultado bem satisfatório. Todos os alunos gostaram de pelo menos uma das questões propostas nas atividades. Olhando de uma maneira geral, calcula-se que 96% acharam as atividades interessantes, pelo menos a maioria delas. Durante a aplicação das atividades, realmente foi notado pelo professor que os estudantes demonstraram mais interesse em resolver questões das quais tinham ouvido falar pouco ou nada, do que as questões geralmente aplicadas em sala de aula, seguindo a base curricular do Estado. Reitera-se o desafio dos professores nos dias atuais de conciliar o currículo obrigatório das escolas com atividades dinâmicas que despertem o interesse dos alunos.

Outra afirmação que já foi feita é que muitos alunos erram por conta do nervosismo são impedidos de produzir. Isso foi refletido na pesquisa também. Quase metade da turma ficou nervosa a maior parte do tempo em que as atividades foram aplicadas, e numa análise um pouco mais detalhada, pode-se observar que quase 80% dos alunos em algum momento tiveram de lidar com o nervosismo. Isso ainda levando em consideração que essas atividades eram apenas uma dinâmica, sem peso na avaliação bimestral e eles não eram obrigados a colocar o nome. Apenas em nível de comparação, imagina-se o nervosismo de um aluno ao fazer uma prova bimestral ou uma recuperação final.

Pouco mais de três quartos do grupo tiveram prazer em aprender a Matemática, o que pode ser considerado satisfatório se forem levados em consideração esses números para sala de aula, pois seria como se três em cada quatro alunos tivesse prazer em aprender Matemática, buscasse estudar mais, outras fontes de informação e desenvolvimento dos temas abordados, etc. Isso infelizmente, dificilmente acontece.

TABELA 9 – Percentual de Respostas ao Fator 2 do Pós-Teste Motivacional

Jogos e Desafios	Percentual de Respostas				
Itens	1	2	3	4	5
Consegui relacionar conhecimentos de outras disciplinas com conhecimentos da Matemática.	5%	16%	36%	22%	21%
Senti-me desafiado em realizar as atividades propostas.	3%	10%	14%	22%	50%
Eu gostaria de propor atividades semelhantes, envolvendo grafos e Matemática para meus colegas e familiares.	22%	16%	31%	19%	12%

FONTE: Autora (2017)

Constatou-se no segundo fator, jogos e desafios, que 97% dos alunos se sentiram desafiados em realizar as tarefas em sala de aula, ao mesmo tempo que desses alunos que sentiram o desafio, metade desses alunos se sentiram desafiados sempre durante as atividades.

Nesse segundo fator, apurou-se que a turma de maneira geral teve dificuldades em relacionar outras disciplinas com a Matemática, pois apenas 21% o fizeram sem problemas.

Por outro lado, a maioria se sentiu desafiada a fazer as atividades propostas, apenas uma pequena parcela, na faixa de 3%, não demonstrou interesse ou se sentiu desafiado a resolvê-las.

TABELA 10 – Percentual de respostas ao Fator 3 do Pós-teste Motivacional

Resolução de Problemas	Percentual de respostas				
Itens	1	2	3	4	5
Tentei resolver as atividades propostas rapidamente.	0%	19%	21%	31%	29%
Fiquei curioso em saber a resolução das atividades propostas.	0%	5%	14%	33%	48%
Fiquei frustrado(a) ao não conseguir resolver determinado problema proposto.	7%	5%	24%	19%	45%
Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassaram, tentei de novo.	0%	7%	17%	22%	53%

FONTE: Autora (2017)

No Fator 3, resolução de problemas, detectou-se que 95% ficou intrigado e curioso quanto as questões, ao menos às vezes. Também se verificou que 93% ficaram frustrados ao não conseguirem resolver algum problema proposto durante as atividades. Além disso, um alto número dos sujeitos da pesquisa, 75%, frequentemente ou sempre tentaram uma vez mais encontrar uma solução quando fracassaram.

A grande maioria da turma ficou interessada em saber os resultados dos problemas, isso pôde-se notar na aula em que foram discutidas e resolvidas as questões no quadro. Apenas uma pequena parte deles, 5%, não demonstrou sequer curiosidade nas resoluções das questões, fato que pode ser atribuído ao desinteresse de maneira geral ou à certeza de fracasso.

Embora boa parte dos alunos tenha de alguma forma se sentido frustrado por não conseguir resolver as questões, a maioria da turma encarou o trabalho como se estivessem fazendo uma gincana ou algo recreativo, ou seja, além de agregar conhecimento, tentaram se divertir nessa aula mais dinâmica, tentando de todas as maneiras resolverem os problemas.

TABELA 11 – Percentual de Respostas ao Fator 4 do Pós-Teste Motivacional

Hábitos de Estudo	Percentual de Respostas				
Itens	1	2	3	4	5
Relembrei as tarefas propostas quando estava em casa.	7%	31%	29%	22%	10%
Passei a realizar pesquisas na internet ou em livros para conhecer mais sobre os assuntos abordados nas atividades.	28%	22%	22%	19%	9%

FONTE: Autora (2017)

Quanto aos hábitos de estudo, percebeu-se que 50% dos alunos, raramente ou nunca, pesquisaram na internet, ou livros, ou outros meios, mais informações sobre o assunto tratado em sala de aula, apesar de 22% terem declarado que pelo menos às vezes terem pesquisado sobre o assunto abordado em outras fontes.

Um dos pontos mais críticos observado por nós após a aplicação da escala motivacional pré-teste, foram os hábitos de estudo. Os alunos têm o péssimo hábito de nunca ou quase nunca estudarem em casa, alguns nem se davam ao trabalho de realizar as tarefas escolares, muito menos revisar a matéria dada em sala.

Partindo desses dados, houve uma excelente melhora. Mais de três quartos do grupo de alunos tentaram fazer pelo menos uma das questões dadas nas atividades em casa, isso se levando em consideração que eles não poderiam levar a atividade para casa, ou seja, eles tiveram de fazer cópias escritas ou via máquina de xerox, para que pudessem continuar suas tentativas após o término da aula, com seus amigos ou familiares. Isso pode ser concluído ao vermos que apenas 4 dos 58 alunos do grupo responderam “nunca”, quando perguntados se relembraram as atividades em casa.

Outro fato que foi apurado que também foi bastante gratificante foi que 72% dos alunos procuraram em livros ou internet, textos relacionados ao estudo de grafos, mesmo que raramente. Percebe-se esse fato ao observar que 16 dos 58 alunos responderam “nunca” para a pergunta sobre pesquisas a respeito do assunto. Foi possível despertar nesse grupo de alunos o interesse por algo novo.

TABELA 12 – Percentual de Respostas ao Fator 5 do Pós-Teste Motivacional

Aplicações no Cotidiano	Percentual de Respostas				
Itens	1	2	3	4	5
Consegui perceber a presença da Matemática no meu cotidiano.	16%	5%	14%	22%	43%
Consigo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos da Matemática.	12%	26%	34%	9%	19%
Passei a estimar o tempo que gasto para chegar num destino, de acordo com a rapidez do(s) meio(s) de transporte que uso.	12%	7%	21%	12%	48%

FONTE: Autora (2017)

Percebeu-se, quanto ao fator aplicações no cotidiano, que pelo menos às vezes, 79% dos alunos perceberam quão importantes as atividades propostas podem ter em suas vidas, ao mesmo tempo em que um alto número de alunos, 62% conseguiram ver, às vezes ou mais frequentemente, uma relação do conteúdo apresentado com possíveis fenômenos da natureza.

Esse quinto fator sobre as aplicações no cotidiano era muito importante para a pesquisa, pois esse era um dos objetivos. Ensinar algo que o aluno tivesse contato e que pudesse usar durante seu cotidiano.

O resultado foi bom e veio ao encontro das perspectivas. A maioria dos alunos conseguiu entender que a Matemática está presente quando há o trabalho de escolher o melhor caminho para se chegar em um determinado destino, e essa maioria ainda afirmou que poderia explicar como ela está presente, conforme era o plano. Esse mesmo grupo, ou subgrupo de alunos, disse que agora passou a estimar o tempo em que demora para chegar aos lugares que costuma ir, ou seja, foi possível atingir uma boa parcela da turma com o trabalho.

TABELA 13 – Percentual de Respostas ao Fator 6 do Pós-Teste Motivacional

Interação na Sala de Aula	Percentual de Respostas				
Itens	1	2	3	4	5
Fiz perguntas sobre as atividades ao professor ou aos meus colegas quando tive dúvidas.	3%	7%	29%	16%	45%
Tive um bom relacionamento com o professor durante as atividades.	0%	0%	7%	5%	88%

FONTE: Autora (2017)

Constatou-se no Fator 6, interação em sala de aula, que pouco mais da metade, 61% fizeram perguntas sobre alguma dificuldade, frequentemente ou sempre.

Nesse último fator a ser analisado, reitera-se que o trabalho de alguma maneira incentivou esses alunos a estudar, mesmo que na hora da aula. Note que apenas dois alunos, na faixa de 3%, não fizeram perguntas sobre nenhuma questão, ainda sim, isso não quer dizer que eles não tenham feito, pois poderiam perfeitamente ter entendido todas as questões sem que surgisse dúvida alguma.

Um último ponto a se observar, foi que a turma quase que em sua totalidade teve uma ótima relação com o professor, salvo três ou quatro casos isolados, tudo ocorreu perfeitamente bem.

Com base nesse questionário, analisando-o em sua totalidade, de um modo geral, pode-se concluir que a grande maioria dos alunos não teve problema com as atividades resolvendo-as naturalmente, mesmo que falhassem, sentiram prazer em tentar novamente após cada fracasso. Isso mostra que atividades que sejam passadas envolvendo raciocínio ao invés de conteúdos pré-determinados em que o aluno acaba decorando funciona melhor no processo de aprendizagem, pois o estudante o faz sem aquele nervosismo de pôr em prática algo que acabou de aprender. Não está sendo dito que não são necessários conteúdos envolvendo fórmulas ou problemas, mas que seja possível fazer uma mescla com conteúdo lógicos que estimulem o aluno a pensar e o deem certa liberdade para fazer as atividades “do seu próprio jeito”.

Pode-se dizer ainda que de alguma forma os alunos se sentem desafiados a resolver uma questão que testa sua capacidade de pensar e problemas que eles possam enfrentar no cotidiano despertam sua curiosidade em saber qual a melhor maneira de resolvê-lo, tanto que alguns se lembraram das atividades em casa, desafiaram amigos e familiares a resolvê-las, pesquisaram na internet uma solução.

9. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NA PESQUISA

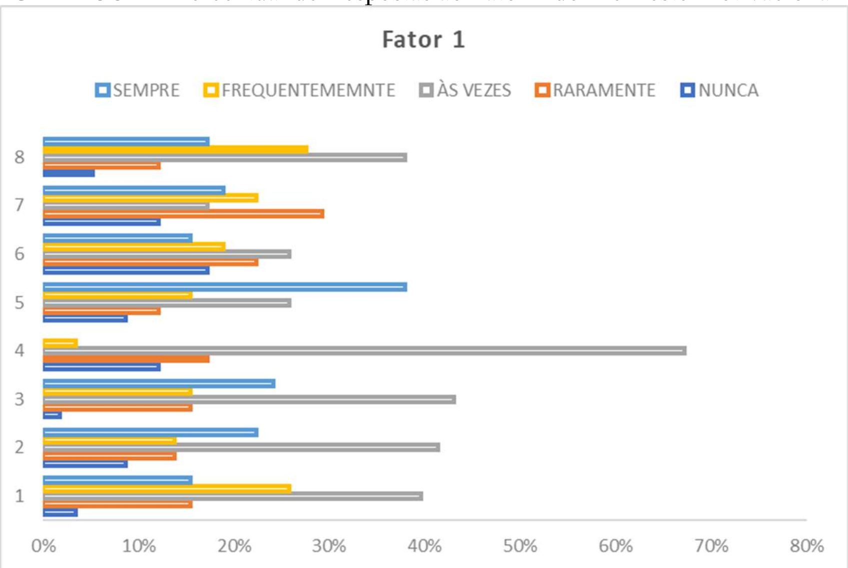
Depois de feito todo o procedimento de pesquisa descrito na metodologia, embora alguns comentários já tenham sido expostos no capítulo anterior, serão analisados nesse capítulo os resultados obtidos nos questionários e nas atividades aplicadas.

O primeiro resultado foi obtido com a aplicação do questionário de pré-teste motivacional, com tempo disponível de uma aula.

O objetivo da aplicação do questionário é saber qual a relação que os alunos da rede pública têm com a matemática nos dias atuais, através de uma análise quantitativa das respostas dadas por eles, com resultado final em escala percentual e demonstração gráfica.

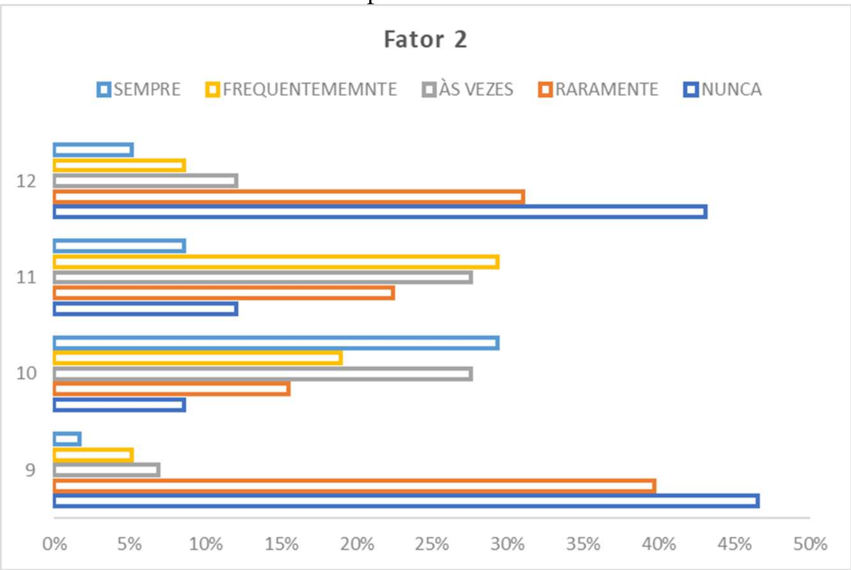
Lembrando que esse o questionário, aplicado em sala de aula antes de qualquer outra atividade realizada nessa pesquisa, continha 28 questões, obteve-se os seguintes gráficos separados por fatores.

GRÁFICO 1 – Percentual de Respostas ao Fator 1 do Pré-Teste Motivacional



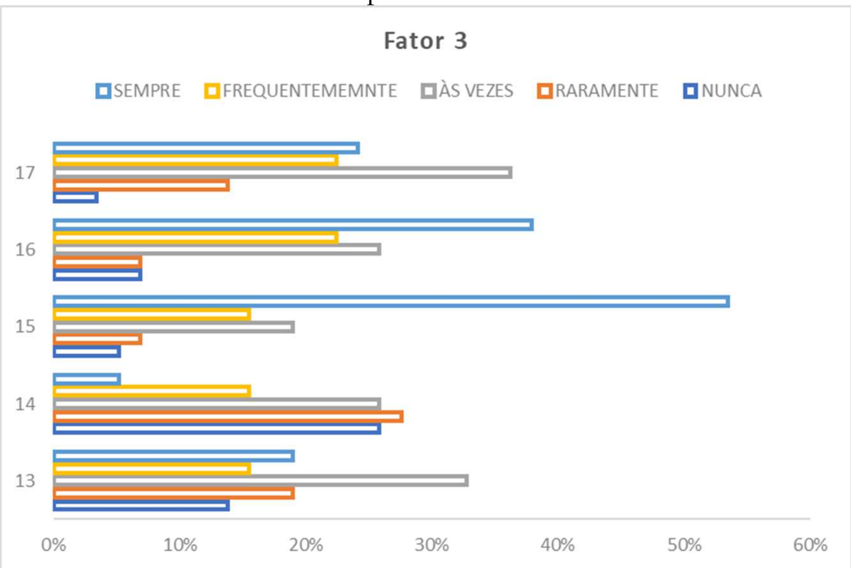
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 2 – Percentual de Respostas ao Fator 2 do Pré-Teste Motivacional



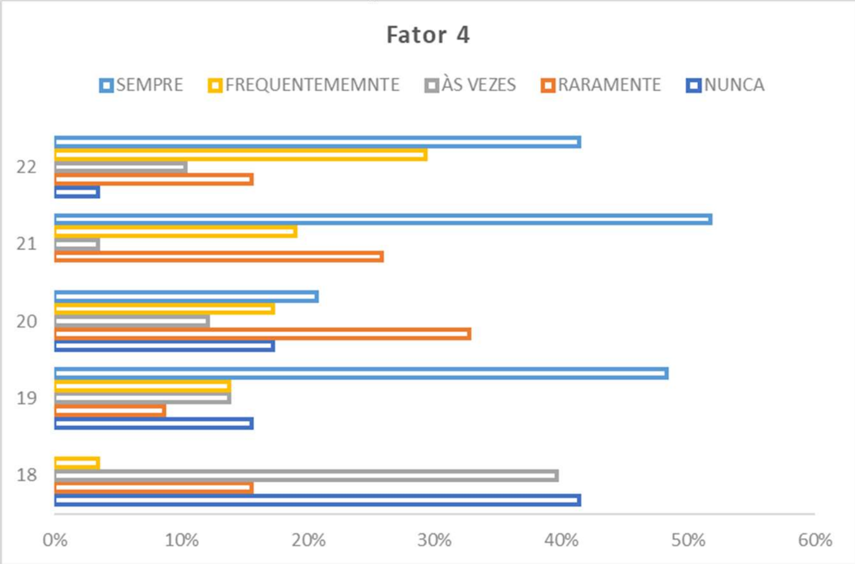
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 3 – Percentual de Respostas ao Fator 3 do Pré-Teste Motivacional



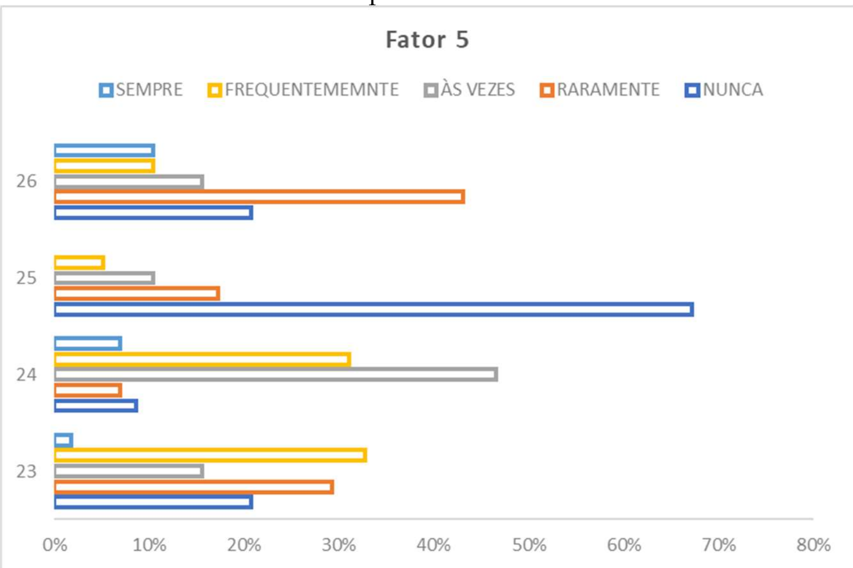
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 4 – Percentual de Respostas ao Fator 4 do Pré-Teste Motivacional



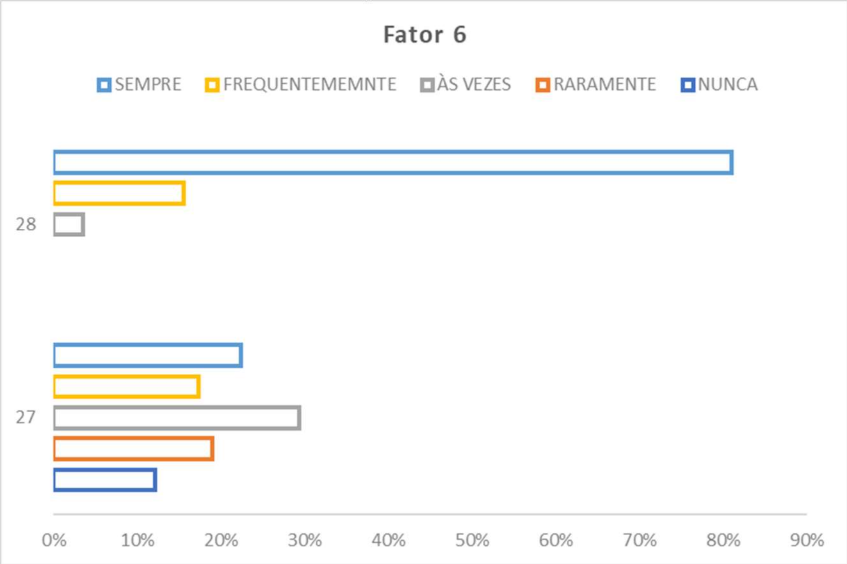
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 5 – Percentual de Respostas ao Fator 5 do Pré-Teste Motivacional



FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 6 – Percentual de Respostas ao Fator 6 do Pré-Teste Motivacional

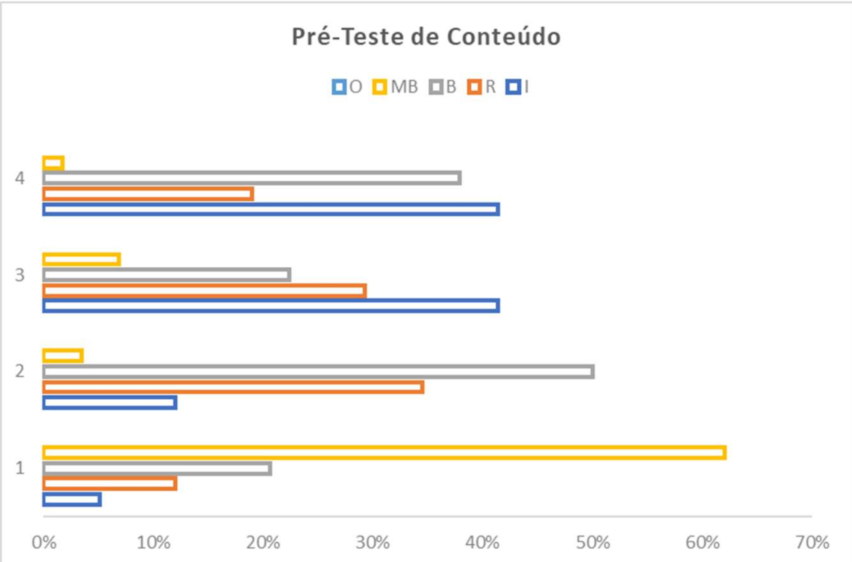


FONTE: Autora (2017)

Seguindo com os trabalhos, serão analisados agora os resultados do pré-teste de conteúdo, a atividade que foi aplicada sem que os alunos tivessem conteúdo algum para se basear, tendo de fazer uso apenas de seu raciocínio lógico para tentar solucionar as questões, quando isso era possível.

Essa atividade foi composta por quatro questões que abrangiam problemas sobre menor caminho entre duas localidades, localização de instalações, otimização de caminhos cíclicos e planaridade. Os resultados obtidos no pré-teste de conteúdo estão mencionados no GRÁFICO 7.

GRÁFICO 7 – Percentual de Conceitos do Pré-Teste de Conteúdos



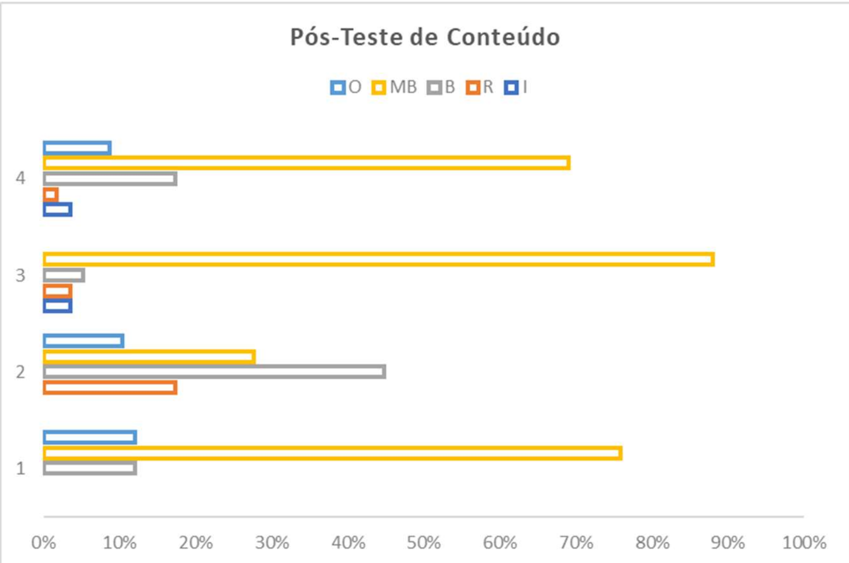
FONTE: Autora (2017)

Depois de ministradas as aulas, foram aplicados novos testes: uma atividade baseada no pré-teste de conteúdo e um questionário de pós-teste motivacional, para que fizessem após os conhecimentos adquiridos.

Seguindo os encontros, foram colocadas em prática as atividades de aprendizagem realizadas durante as aulas. Os alunos foram convidados a realizar um novo teste. O pós-teste de conteúdo foi composto por quatro questões similares às questões do pré-teste de conteúdo, que avaliaram conhecimentos sobre grafos, em questões de menor caminho, grafos eulerianos e semieulerianos, planaridade e grafos orientados. Além disso, a análise das respostas foi feita de uma maneira geral, ou seja, a evolução da turma foi avaliada como um todo, não individualmente, uma vez que os alunos não eram obrigados a colocar seus nomes nas folhas de atividades. Isso foi feito de modo que o aluno de maneira alguma tivesse medo de revelar seu raciocínio, devido à timidez ou algo parecido.

Procurou-se formular questões que tivessem a mesma exigência de conteúdo e nível de dificuldade, para que fosse coerente a comparação entre o pré e o pós-teste de conteúdo. Segue agora o GRÁFICO 8 para análise da segunda atividade.

GRÁFICO 8 – Percentual de Conceitos do Pós-Teste de Conteúdo



FONTE: Autora (2017)

Em ambos os testes de quatro questões cada, procurou-se, na 1ª questão, abordar o mesmo tema, o algoritmo de Dijkstra. A 2ª questão foi diferente nos pré e pós-testes de conteúdo, explorou-se a o conceito de caminho euleriano no pré-teste de conteúdo e alocação de setores no pós-teste de conteúdo. As 3ª e 4ª questões foram trocadas nos testes de conteúdo, mas exploraram os mesmos assuntos, na questão 4 do pré-teste de conteúdo temos o conceito de planaridade, que equivale a questão 3 do pós-teste de conteúdo.

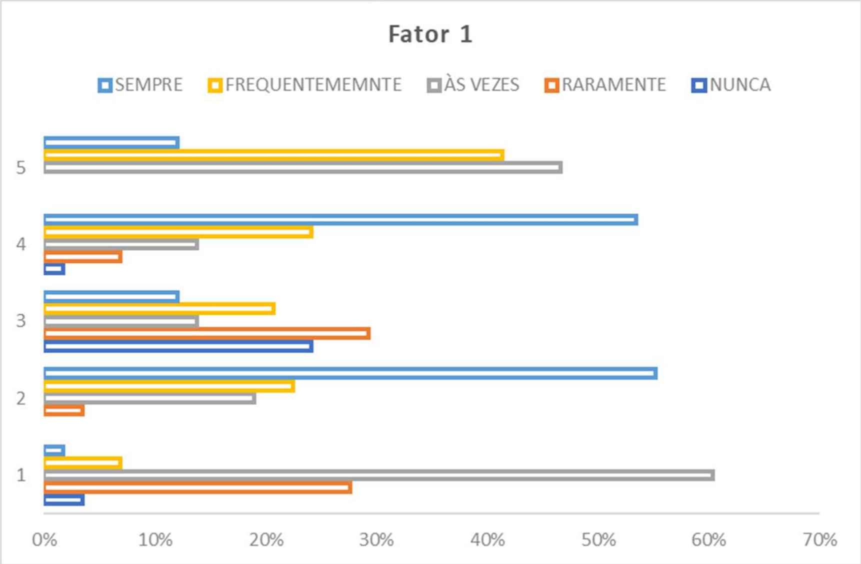
Comparando os dois testes de conteúdo constatou-se uma melhora significativa dos resultados e menor tempo de resolução dos testes, confirmando a hipótese de que a metodologia específica para a introdução à Teoria de Grafos teve bons resultados.

Houve evolução em quase todas as questões, com exceção da questão 4 do pré-teste de conteúdo que corresponde à questão 3 do pós-teste de conteúdo, manteve o mesmo percentual do conceito O. Provavelmente deve-se ao nível mais elevado de dificuldade da questão.

Será feita agora a análise dos gráficos dos fatores do questionário pós-teste motivacional, aplicado após as atividades do pós-teste de conteúdo. Será visto como os alunos avaliaram a experiência, o que de fato conseguiram aprender e agregar para seu conhecimento e cultura geral, se eles se sentiram motivados a ver a matemática de uma maneira diferente, se de alguma maneira daqui por diante irão se comprometer a estudar mais e tentar obter melhores resultados nessa tão importante disciplina.

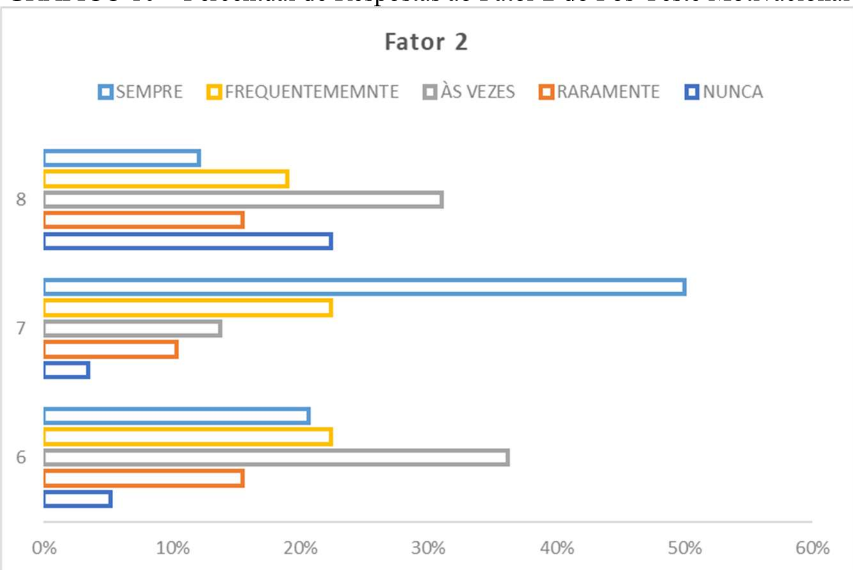
Esse questionário foi baseado no questionário aplicado na primeira aula levando em consideração os mesmos fatores deste; porém, as 19 perguntas que o compõem têm o intuito de retratar o nível de satisfação do público alvo com as atividades que participaram nas duas últimas semanas.

GRÁFICO 9 – Percentual de Respostas ao Fator 1 do Pós-Teste Motivacional



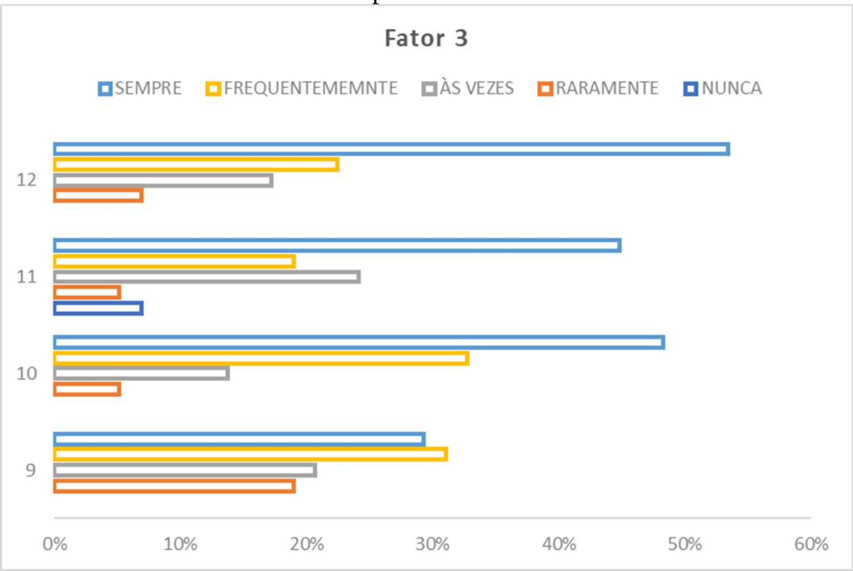
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 10 – Percentual de Respostas ao Fator 2 do Pós-Teste Motivacional



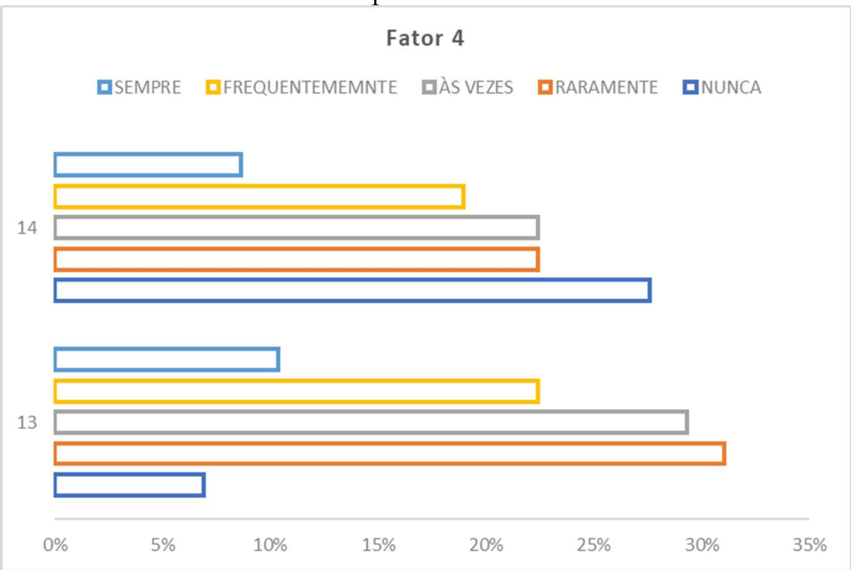
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 11 – Percentual de Respostas ao Fator 3 do Pós-Teste Motivacional



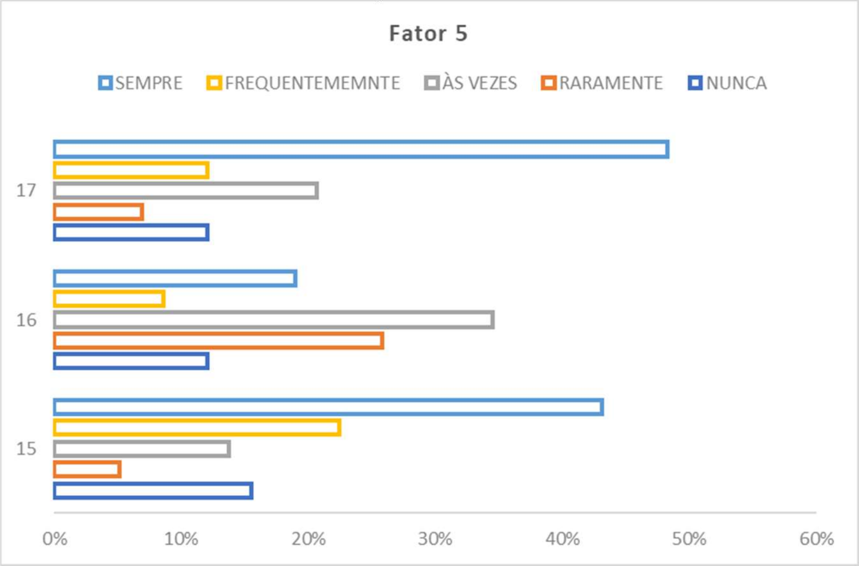
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 12 – Percentual de Respostas ao Fator 4 do Pós-Teste Motivacional



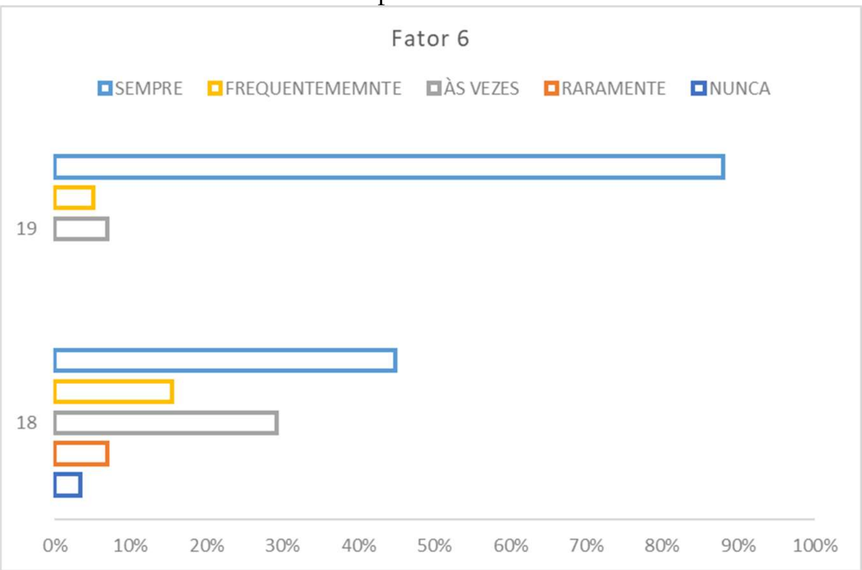
FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 13 – Percentual de Respostas ao Fator 5 do Pós-Teste Motivacional



FONTE: Autora (2017)

GRÁFICO 14 – Percentual de Respostas ao Fator 6 do Pós-Teste Motivacional



FONTE: Autora (2017)

Uma boa surpresa foi constatar a motivação e a nova vontade dos alunos em estudar Matemática com um tema diferente e que fugia dos assuntos comuns dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio. Alunos que costumavam desprezar as aulas passaram a se interessar por elas, pelo menos aparentemente. Pode-se afirmar com convicção que a qualidade da educação da rede pública seria muito melhor se os alunos demonstrassem sempre essa gana, essa vontade de aprender algo novo ou solucionar um problema o qual seja obrigado a pensar.

Diante do exposto, cabe a nós professores encontrar maneiras de cativar esses alunos, com assuntos diferentes, mas que sejam passados de uma forma a qual eles sejam tentados a pensar e produzir, e não estar na escola apenas porque estão obrigados.

Claramente a hipótese de se exigir poucos conhecimentos prévios foi confirmada, os conhecimentos prévios se restringiam a abstrair objetos como pontos e as ligações entre objetos como linhas, direcionados ou não. Os dois testes, o pré e o pós-teste de conteúdo, bem como os questionários motivacionais mostraram que houve um estímulo muito forte nas turmas do experimento.

10. CONCLUSÃO

A preocupação com ensino é algo que deve ser constante, principalmente em um país em desenvolvimento como o Brasil. Tendo em vista as extensas aplicações da Teoria de Grafos, que vão desde o tradicional problema das sete pontes de Königsberg, até mesmo a problemas da tecnologia da informação. A Teoria de Grafos é um conteúdo relevante para a compreensão de várias situações do cotidiano, o que é significativo quando propomos atividades que relacionam teoria e prática de forma conjunta, estando, portanto, em consonância com o educador matemático Ubiratam D'Ambrósio[15] que preceitua:

> "Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido (D'Ambrósio, 1998). E continua: "A pesquisa é um elo entre a teoria e a prática" (D'Ambrósio, 1998).

Ao explorarmos a solução de problemas de uma forma mais simples e contextualizada ao ambiente do aluno do Ensino Médio por meio de mapeamento dos dados através de pontos e traços, que constituem a base da definição de grafos, e ao darmos a ele a oportunidade de integrar todo esse processo ao uso de recursos computacionais, acreditamos que essa estratégia de ensino possa contribuir para despertar o interesse do aluno pelo aprendizado de conteúdos da Matemática, além de desenvolver capacidades tais como interpretação, investigação e contextualização.

Tentamos ao máximo realizar uma linguagem que pudesse facilitar a compreensão, principalmente nas demonstrações. Sendo o professor um mediador de conhecimentos para os seus alunos, acreditamos que o uso do material de apoio, confeccionado de forma simples, fornecerá a ele noções iniciais de como poderíamos apresentar e trabalhar com os alunos a Teoria de Grafos, já que o mesmo pode precisar ser apresentado à Teoria de Grafos e, para tanto, seria interessante ajudarmos esse profissional a ter conhecimento e domínio do assunto tratado.

[15] Ubiratan D'Ambrosio (1932) é um matemático e professor universitário brasileiro.

É trivial dizer que para ensinar algo a alguém é necessário o conhecimento sobre o assunto a que se pretende ensinar. O cotidiano de um professor não é fácil; é extremamente trabalhoso a cada tarefa, seja na hora de preparar uma aula, seja na hora de dar aula ou na hora de corrigir provas. Esse quadro se agrava com os enormes obstáculos que têm que ser enfrentados pelo professor, como a falta de interesse apresentada pelos alunos no cenário atual. Isso torna o ensino da Matemática altamente ineficaz, já que o aluno aprenderá matemática apenas pelas razões específicas de passar de ano e passar no ENEM, em vez de aprendê-la pelo prazer, pela sua beleza ou por sua importância.

A experiência com grafos em sala de aula abriu novos caminhos para os alunos que participaram dela, pois esses puderam ver a matemática de uma outra maneira, diferente do habitual. O grupo pesquisado mostrou-se interessado e satisfeito com as atividades que foram mostradas de maneira diferente de como estão acostumados, participando voluntariamente de uma atividade que foi descrita apenas como uma ferramenta que não faz parte do atual currículo da escola, mas que é uma ferramenta relativamente simples de aprender e aplicar em problemas que podem facilmente surgir no cotidiano de qualquer pessoa.

A pesquisa teve como objetivo principal descrever uma experiência através da observação do avanço ou não de alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual na resolução de problemas relacionados com o cotidiano dos mesmos, antes e depois de aprenderem sobre grafos. Dessa forma, o trabalho foi desenvolvido com intuito de avaliar se a proposta de ensino apresentada melhorou ou não a motivação e o interesse deles pelo estudo. Buscou-se verificar uma forma de favorecer a motivação dos alunos na realização dessas atividades e, consequentemente, a contribuição para a melhoria do desempenho nessa disciplina. Através da comparação dos resultados obtidos nos pré-teste de conteúdo, pós-teste de conteúdo e nos questionários aplicados, observou-se uma melhora significativa na compreensão dos conceitos em relação ao método tradicional, com aplicação dos conceitos estudados sobre a Teoria de Grafos nas atividades desenvolvidas no grupo de alunos participantes da pesquisa.

Conclui-se que o objetivo foi atingido, pois foi possível fazer com que os alunos raciocinassem para resolver problemas que colocavam à prova sua capacidade intelectual e conhecer seu verdadeiro potencial, com o objetivo de melhorar a qualidade da sua educação.

Ainda que a proposta aqui apresentada seja dirigida ao Ensino Médio, sempre é possível fazer adaptações e inserções sobre grafos em tópicos do ensino fundamental. Desde mostrar ao estudante que uma simples árvore genealógica de sua casa já gera uma árvore até fazê-lo refletir sobre a importância de planejar o tráfego em um sistema de trânsito muito movimentado, com ruas de sentido único ou não, os grafos acabam sendo uma ferramenta de acesso ao raciocínio matemático que não precisa nem mesmo ser exposta como “teoria”.

Segundo Piaget[16], os adolescentes se desprendem do real sem precisar se apoiar em fatos, ou seja, começam a pensar e a entender o abstrato e a deduzir mentalmente sobre várias hipóteses que se colocam. Entendemos, portanto, ser uma boa hora para aprenderem sobre grafos, pois são capazes de entender e encontrar soluções de problemas. A modelagem de um problema em grafos faz exatamente isso, leva o aluno a um raciocínio mais abstrato, tornando-se uma técnica ou ferramenta capaz de ajudá-lo a tomar a decisão mais adequada para resolver problemas.

Durante a realização da pesquisa, foi possível verificar que, do ponto de vista legal e dos documentos referentes ao currículo da Educação Brasileira, a introdução da Teoria de Grafos é aplicável na Educação Básica, pois ela apresenta como característica natural, desde o seu surgimento, a modelagem, a resolução de problemas e a interdisciplinaridade, entre outros itens que passaram a reger a Educação Nacional.

Por fim o trabalho contribui para aqueles que desejarem encaminhar-se na Teoria de Grafos, descobrir sua diversidade de aplicações e a utilidade de seus conceitos e ainda, quem sabe, como ocorre a maioria dos que a conhecem, ser contaminado com o que se costuma definir como “Febre dos Grafos” como citado por Jurkiewicz (2009).

Porém, conversando com colegas de profissão, percebemos que o assunto também ainda é desconhecido entre a maior parte dos professores de Matemática. Esperamos que esta dissertação seja uma motivação para que professores e estudantes de todos os níveis passeiem pela Teoria de Grafos, fazendo descobertas surpreendentemente divertidas.

Para isso é necessário voltar nossa atenção para a formação de professores de matemática, pois a inserção de tais temas no ensino médio, tem necessariamente impacto nos programas dos cursos de licenciatura.

[16] Jean William Fritz Piaget (1896 – 1980) foi um biólogo, psicólogo e epistemólogo suíço, considerado um dos mais importantes pensadores do século XX.

Dessa forma podemos acreditar em mudanças, pois um professor motivado pode realizar grandes transformações no ensino. Fica evidenciado que tornar o ensino da Matemática mais significativo para o aluno requer mais preparação do professor. Este deve se sentir desafiado a buscar alternativas no seu fazer pedagógico, tanto do ponto de vista conceitual quanto metodológico. Por isso, acreditamos que é necessário que sejam dadas mais oportunidades para o professor se capacitar e que esse encontre na pesquisa uma das suas principais atribuições enquanto educador em um mundo contemporâneo. Com isso, espera-se que o mesmo se mantenha atualizado com relação aos conhecimentos produzidos e estudados nas universidades, a fim de que possa assim incorporar temas atuais nas suas práticas pedagógicas.

Em resumo, se queremos uma educação de qualidade, todos os envolvidos devem se mostrar comprometidos com essa causa. Devemos usar as dificuldades encontradas no dia a dia como molas propulsoras que nos incentivem a estudar e pesquisar para que então possamos, enfim, remover os obstáculos impostos pela vida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Victor Leite. **Caminhos em Grafos: uma experiência no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=12808859716&d=20171105223201&h=63925687fa242b6142837a879e55afb65a6bd067. Acesso em: 13 jul. 2017.

AQUINO, Andréia Araújo de Faria. **Atividades de Modelagem Matemática Envolvendo a Teoria dos Grafos no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=05511040908&d=20171108233809&h=6a7928451f8e31373cad7dbdef31da3d8a54deb7. Acesso em: 2 jul. 2017.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. **Teoria e Modelos de Grafos.** São Paulo: Edgard Blucher, 1979.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos: Introdução e Prática.** São Paulo: Blucher, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias).** Brasília: MEC; SEMTEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** V. 2. Brasília: MEC; SEMTEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares.** Brasília: MEC; SEMTEC, 2012.

BRITO, Adriana Priscila de. **Grafos, a Fórmula de Euler e os Poliedros Regulares.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=04285089440&d=20171110214528&h=bc00cd4cfd4225c22ac0d400b3e05db5f494a67c. Acesso em: 2 jul. 2017.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática.** V. 2. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações.** Vol. 2. São Paulo: Ática, 2016.

GOMES BEZERRA, Francisco Adriano. **Um Convite aos Grafos: Uma Possibilidade de Estudo no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí. Teresina: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=00796937338&d=20171105224444&h=aaae3a76deaa73e1aab1d598b4bfc8dce7891999. Acesso em: 2 jul. 2017.

GONTIJO, Cleyton Hercules. **Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio.** Tese (Doutorado) - Universidade de Brasília. Brasília: 2007. Disponível em: http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/2528/1/2007_CleytonHerculesGontijo.PDF. Acesso em: 2 jul. 2017.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, MACHADO, Antônio. **Matemática e realidade.** V. 4. São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, José Fábio de Araújo. **Modelagem e resolução de problemas por meio de grafos: aplicações no ensino básico.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=00105085545&d=20171108235214&h=18524f312ddc3f41a7cdafbb2ac2a931a4812cd1. Acesso em: 2 jul. 2017.

LUCCHESI, Cláudio Leonardo. **Introdução a Teoria dos Grafos.** Rio de Janeiro: IMPA.

MARTINS, Gizele Justino Diniz. **Grafos: definições elementares e método probabilístico.** Dissertação (Mestrado) – Universidade da Paraíba. João Pessoa: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=05242726466&d=20171105222827&h=32c46b4bd5eb8625c61ceea910d9593cbab85d77. Acesso em: 11 maio 2017

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Currículo Básico Comum: Matemática Ensino Fundamental e Médio.** Belo Horizonte: SEEMG, 2006.

MONTEIRO, Silvia Helena da Gama. **Modelagem Matemática e Recursos Computacionais: Uma Proposta para a Teoria de Grafos no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Uberaba: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=97166260610&d=20171109223240&h=9fd0e16b01de350e6fd0246d6ac387d9b81f6e24. Acesso em: 2 jul. 2017.

MOREIRA ASSIS, Julio Serafim. **Grafos Eulerianos no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – IMPA. Rio de Janeiro: 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=11302215710&d=20171109222428&h=aa2f0c11b80895d5aa385b36b3d56a8a90497ab0. Acesso em: 2 jul. 2017.

MORI, Ricardo de Almeida. **Grafos: Planaridade e Projeto de Ensino.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do ABC. Santo André: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=15260368860&d=20171110004406&h=307cfcdaf33bb5c96cfdc9752f37f527047ace5a. Acesso em: 2 jul. 2017.

NOGUEIRA, Daniel Klug. **Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília. Brasília: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=03751908641&d=20171109001730&h=745ef09c694dbe912131b1b169cc641cbac47ad0. Acesso em: 2 jul. 2017.

OLIVEIRA DA SILVA, Alan Marcelo. **Grafos: Uma experiência no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=01316374793&d=20171109002251&h=5fe4b6f892f5896a868a82d0a07269cee0894a7f. Acesso em: 2 jul. 2017.

PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PIAGET, Jean William Fritz. **O nascimento da inteligência na criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio**. V. 1. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio**. V. 2. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

SOUZA, Audemir Lima de. **Teoria dos Grafos e Aplicações.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amazonas. Manaus: 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=24026999220&d=20171109002645&h=a8b927c8e1fab6a37b10a131a5731cc11a68c34d. Acesso em: 2 jul. 2017.

VILAS-BOAS, Clóvis Rodrigues. **Introdução ao estudo de grafos.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas: 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=03143235624&d=20171105220226&h=80f90bb71da9dc26f268cb20be5b94a8901380cb. Acesso em: 2 jul. 2017.

Imagem - Euler. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg. Acesso em: 6 jun. 2017.

Imagem - As sete pontes de Königsberg. Disponível em: https://www.universoracionalista.org/wp-content/uploads/2016/03/untitled-infographic_block_1.jpg. Acesso em: 6 jun. 2017.

Imagem - Grafo do problema das sete pontes de Königsberg. Disponível em: https://www.universoracionalista.org/wp-content/uploads/2016/03/untitled-infographic_block_3.jpg. Acesso em: 6 jun. 2017.

Imagem - Hamilton. Disponível em: https://www.thefamouspeople.com/profiles/images/sir-william-rowan-hamilton-3.jpg. Acesso em: 6 jun. 2017.

Imagem - Grafos Platônicos. Disponível em: http://figuras-tridimensionales.webnode.mx/images/200000014-a9f73aaee2-public/poliedros.gif. Acesso em: 22 jun. 2017.

Imagem - Livro Didático Tudo é Matemática 7º Ano. Disponível em: https://http2.mlstatic.com/tudo-e-matematica-7ano-dante-D_NQ_NP_380701-MLB20378441333_082015-F.webp. Acesso em: 9 jul. 2017.

Imagem - Livro Didático Matemática e Realidade 8ª Série. Disponível em: https://http2.mlstatic.com/livro-matematica-e-realidade-8-serie-9-ano-gelson-iezzi-D_NQ_NP_671815-MLB25305942444_012017-F.webp. Acesso em: 9 jul. 2017.

Imagem - Livro Didático Matemática e Realidade 7ª Série. Disponível em: https://d1pkzhm5uq4mnt.cloudfront.net/imagens/capas/_96ee1ad98229be231bee7b612e203e9eefb4196d.jpg. Acesso em: 9 jul. 2017.

Imagem - Livro Didático Tudo é Matemática 6º Ano. Disponível em: https://http2.mlstatic.com/tudo-e-matematica-6-ano-2012-D_NQ_NP_394321-MLB20757992643_062016-F.webp. Acesso em: 9 jul. 2017.

Imagem - Livro Didático Matemática Ensino Médio 2º Ano. Disponível em: https://d1pkzhm5uq4mnt.cloudfront.net/imagens/capas/_f4ea209da4f0a812f1f81abc8b96dbf47a4f4bb6.jpg. Acesso em: 9 jul. 2017.

Imagem - Livro Didático Matemática Ensino Médio 1º Ano. Disponível em: https://d1pkzhm5uq4mnt.cloudfront.net/imagens/capas/3d9759a3bbd6c9500c01c8140b9847076ab4c9ed.jpg. Acesso em: 9 jul. 2017.

Imagem - Livro Didático Matemática Contexto e Aplicações 2º Ano. Disponível em: https://http2.mlstatic.com/matematica-contexto-aplicacoes-dante-2016-vol-2-em-pdf-D_NQ_NP_860464-MLB26290324413_112017-F.webp. Acesso em: 9 jul. 2017.

Jogo - Icosien Game. Disponível em: https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwitqNHFzrLXAhWElJAKHUOkAowQFggvMAE&url=http%3A%2F%2Fjogosonline.uol.com.br%2Ficosien_13544.html&usg=AOvVaw3yIubaY0_slfxU7AIgwt5y. Acesso em: 15 jul. 2017.

Jogo - SuPuzzle. Disponível em: http://mrjogos.uol.com.br/jogo/supuzzle.jsp. Acesso em: 15 jul. 2017.

Vídeo - Grau de um vértice e o problema das Pontes de Königsberg. Disponível em: https://youtu.be/125pPCIRjZ8?list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I. Acesso em: 15 jul. 2017.

Vídeo - O que é um grafo. Disponível em: https://youtu.be/Frmwdter-vQ?list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I. Acesso em: 15 jul. 2017.

SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

ALVES DOS SANTOS JÚNIOR, Jânio. **Grafos e suas aplicações.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás. Jataí: 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=01781076111&d=20171108233348&h=d63538a1f981f4072ea76026249a238b02f9ea86.

ALVES SOUZA, Marcelo. **Grafos no Ensino Básico.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do ABC. Santo André: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=30079119824&d=20171108233603&h=7fc1d8d7244dab108fe2ada7a6666858d8e6b298.

FONTE, Carla Cristina. **Introdução aos grafos no ensino médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=38306037898&d=20171108234018&h=858a68f16e7dfbe5180b1befcdca4dea190115cd.

GOMES, Alessandro de Araújo. **Grafos: Uma experiência no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=12202560807&d=20171108234213&h=adffb6a93469d45e78041052cb6a38d83db2b932.

MAURI, Rone. **Uma abordagem da Teoria de Grafos no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória: 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=09421590716&d=20171109001508&h=86cf0767074190bb35c5d60190394d22e0456ece.

MELO, Gildson Soares de. **Introdução à Teoria dos Grafos.** Dissertação (Mestrado) Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=01167704495&d=20171109001627&h=babe74cac6f8966fee25e9ba24deb4465ce3ca71.

OLIVEIRA, Maxsuel Gonçalves de. **Grafos e Aplicações para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=04307679431&d=20171109001947&h=aeea9c0721715fe34059dc0fb7461ba7afefca82.

QUIROZ SILVA, Alison. **Grafos: Uma ferramenta possível e necessária na Educação Básica.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=01518381510&d=20171109002058&h=5fb3d7fef715b0633affc38242aba0911ba78bf7.

SOUZA, Marcelo Silva de. **Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Médio à Luz das Contribuições do PROFMAT.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão: 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=69568820515&d=20171109002541&h=5c40144736b68004936eae35d157a620af981222.

SOUZA, Renato Ferreira de. **Resolução de problemas via Teoria de Grafos.** Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. São Carlos: 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=32301760812&d=20171109002758&h=3592e438189c0fc1afa05af9be80184b074d4444.

VULCANI, Renata de Lacerda Martins. **Grafos Eulerianos e Aplicações.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas: 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=19511194879&d=20171109002925&h=0f85952a8ceb74b5800eb0d50b97c2db22716a44.

ÍNDICE REMISSIVO

APÊNDICE A – O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Existe um princípio na Matemática muito conhecido e simples de entender e demonstrar, que serve para resoluções de muitos problemas que a princípio parecem complicados, no entanto ao utilizamos essa ferramenta se tornam simples: O princípio da casa dos pombos ou o princípio das gavetas de Dirichlet[1].

Teorema 1 (Princípio da casa dos pombos). Se pelo menos $n + 1$ objetos (pombos) devem ser organizados em n ou menos gavetas (casas), pelo menos uma gaveta (casa) conterá 2 ou mais objetos (pombos).

Demonstração: Numeremos as casas de pombos com os inteiros de 1 a n. E consideremos $n + 1$ pombos. Numeremos os pombos com os números inteiros de 1 a $n + 1$. Consideremos que o pombo 1 entra em uma das casas, por simplicidade digamos na casa 1; se o pombo 2 entra na mesma casa, está resolvido o problema; se não, temos n casas para ele escolher, digamos que escolha a 2. Podemos repetir esse processo até que o pombo n entre na casa n. Ainda teremos o pombo $n + 1$ e todas as casas já estarão ocupadas, dessa forma, alguma das casas terá pelo menos 2 pombos.

Exemplo1. Quantas crianças são necessárias em uma sala de aula para garantirmos que pelo menos 2 fazem aniversário no mesmo mês?

Resolução: No exemplo as crianças representam os objetos ou os pombos e os meses, as casas dos pombos ou as gavetas. É fácil perceber que 13 crianças são suficientes, pois temos 12 meses.

Algo simples e elementar, entretanto, como já dissemos, bastante utilizado na resolução de inúmeros problemas, sejam de combinatória ou outros. Uma forma mais generalizada de enunciar este princípio:

Teorema 2 (Princípio das gavetas). Se n objetos são colocados em m gavetas e $n > mk$, onde m, n e k são números naturais, então alguma gaveta conterá pelo menos $k + 1$ objetos.

---

[1] Acredita-se que Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), matemático alemão, foi o primeiro a referência o princípio em 1834, com o nome de “princípio das gavetas”.

Demonstração: Consideremos inicialmente os mk elementos, se colocássemos mais de k objetos em alguma gaveta, o princípio já estaria atendido; caso contrário, teremos k objetos em cada uma das m gavetas, faltando ainda $n - mk$ objetos, que é maior ou igual a 1, em qualquer uma das gavetas que sejam colocados, teremos pelo menos 1 gaveta com, no mínimo, $k + 1$ objetos.

Exemplo 2. Em um grupo de 39 pessoas, existem sempre 4 que fazem aniversário no mesmo mês?

Resolução: Os meses serão as gavetas, e as pessoas os objetos. Assim temos 12 gavetas e 39 objetos para fazerem aniversários nesses meses, $39 > 12 \cdot 3 = 36$. Daí teremos pelo menos $4 = 3 + 1$ objetos em alguma gaveta. Ou de outra forma: $\frac{39}{12} = 3,25$. O menor número inteiro maior ou igual a 3,25 é 4, podemos representar por $\lceil 3,25 \rceil = 4$[2]. Logo um dos meses terá pelo menos 4 aniversariantes.

[2] Função Teto: Dado um número real x, define-se como Função Teto de x, o menor inteiro maior do que x. Notação $\lceil x \rceil = min\{c \in Z;\ c \geq x\}$.

APÊNDICE B – ROTEIRO DAS AULAS

Aula 1

Atividade 1. Na primeira atividade, foi ensinado aos alunos o Algoritmo de Djikstra e foi explicada a resolução feita através desse algoritmo. Nenhum dos alunos tinha ouvido falar desse algoritmo, como já era de se esperar. O ponto positivo foi que a grande maioria se interessou em aprender a resolução do problema, e deram sinais de que entenderam como se aplica o algoritmo usado para tal.

Atividade 2. Na segunda atividade, foi explicado que esta tratava de grafos eulerianos, assunto que também seria abordado nas aulas seguintes. Aos alunos, que concluíram que o trajeto na primeira situação era impossível, explicou-se o porquê de suas conclusões, visto que eles as obtiveram através do método "tentativa e erro". Aos alunos, que pensavam que havia a possibilidade de êxito na proposta, a explicação foi para saberem a causa de estarem enganados. Considerando a segunda situação, todos os alunos que participaram da atividade conseguiram completar o trajeto proposto, por caminhos diferentes. Há, no total, doze soluções possíveis para essa situação.

Atividade 3. Na terceira atividade, que era a questão da alocação de setores, foi explicada a solução mais compatível com a lógica, e foram feitas ilustrações no quadro. Foram explicadas as características de cada vértice perante o todo, a fim de que os próprios alunos chegassem às conclusões de onde deveria ficar localizado cada setor. Esse tipo de grafo é usado para simular o sentido das vias, como acontece nas cidades, uma noção de como é feito o planejamento urbano.

Atividade 4. Na última atividade, um problema clássico das brincadeiras entre amigos em idade escolar, foi dada a definição de grafo bipartido, com ilustrações, dizendo que o esquema das três casas e três serviços poderia ser representado por um grafo bipartido $K_{3,3}$. Foi explicado o conceito de grafo planar e se afirmou que para ser fosse possível solucionar a questão, o grafo bipartido $K_{3,3}$ deveria ser planar, o que não acontece. Logo, concluiu-se que a questão não teria solução. Essa questão foi usada principalmente para despertar um maior interesse no aluno, por se tratar de um problema conhecido por quase todos, e que nenhum deles nunca conseguiu encontrar uma solução, pois esta não é possível. Foi sugerido pelo professor que tentassem passar quatro serviços para três casas. Para finalizar, ilustrou-se o esquema da nova questão, com quatro serviços e três casas, através de um grafo bipartido $K_{3,4}$, onde os alunos puderam visualizar que dentro desse grafo, havia um $K_{3,3}$, descartando assim, qualquer possibilidade de solução da nova questão.

Aula 2

(Exibição do vídeo: O que é um grafo).

Descrição: Introduz o conceito de grafo, uma representação de elementos e das relações entre eles através de vértices e arestas. Apresenta dois problemas aparentemente não relacionados, mas que podem ser visualizados através de grafos. O primeiro é o famoso problema das Pontes de Königsberg, e o segundo pede para se mostrar que em qualquer grupo existem duas pessoas que possuem o mesmo número de amizades dentro do grupo.

Aula 3

(Exibição do vídeo: Grau de um vértice e o problema das Pontes de Königsberg).

Descrição: Define-se o conceito de grau de um vértice e observamos que, dependendo do problema a ser estudado, olhar apenas os graus dos vértices de um grafo pode fornecer informações não triviais para o problema. Como exemplo, damos uma solução ao problema das Pontes de Königsberg.

Aula 4 (Grafos planares e bipartidos).

(Exibição do jogo: *Icosien Game*).

Descrição: Esse jogo pode ajudar a desenvolver toda a abstração e raciocínio necessários ao entendimento das trilhas eulerianas e caminhos hamiltonianos. O jogo tem dez níveis de trilhas eulerianas e dez níveis de caminhos hamiltonianos.

(Exibição do jogo: *SuPuzzle*).

Descrição: Esse jogo permite introduzir de forma natural e até motivadora o conceito de grafo planar.

ANEXO A – PRÉ-TESTE MOTIVACIONAL

Para responder ao questionário, leia atentamente cada afirmação e, em seguida, marque a resposta que mais caracteriza ou se aplica a você em relação à Matemática. Lembre-se: as respostas devem refletir o seu modo de pensar e agir. Não deixe nenhum item sem resposta.

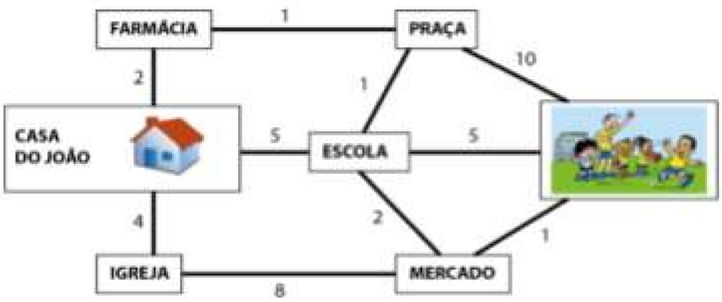
Use a seguinte correspondência para manifestar sua opinião: (1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre.

Itens	1	2	3	4	5
As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas.					
Quando me pedem para resolver problemas de Matemática, fico nervoso (a).					
Tenho muita dificuldade para entender Matemática.					
Matemática é "chata".					
Aprender Matemática é um prazer.					
Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas.					
Tenho menos problemas com Matemática do que com as outras disciplinas.					
Consigo bons resultados em Matemática.					
Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.					
Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.					
Procuro relacionar a Matemática ao conteúdo das outras disciplinas.					
Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática para meus amigos e familiares.					
Gosto de resolver os exercícios rapidamente.					
Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.					

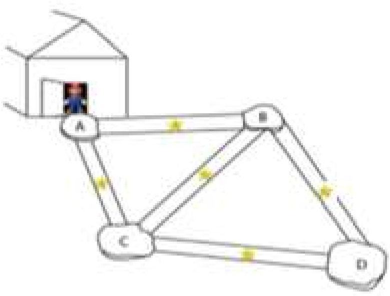
Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de Matemática.					
Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.					
Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.					
Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.					
Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.					
Faço desenhos usando formas geométricas.					
Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola.					
Faço "continhas de cabeça" para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.					
Estudo Matemática todos os dias durante a semana.					
Realizo as tarefas de casa que o professor de Matemática passa.					
Estudo as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.					
Além do meu caderno, eu costumo estudar Matemática em outros livros para fazer provas e testes.					
Faço perguntas nas aulas de Matemática quando eu tenho dúvidas.					
Relaciono-me bem com meu professor de Matemática.					

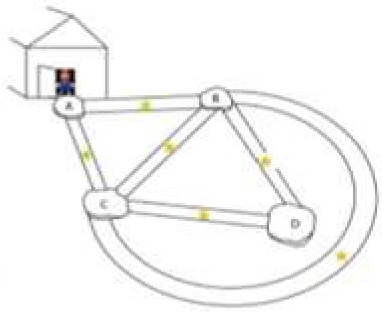
ANEXO B – PRÉ-TESTE DE CONTEÚDO

Atividade 1. Observe o esquema abaixo, onde as arestas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de João e o campinho.

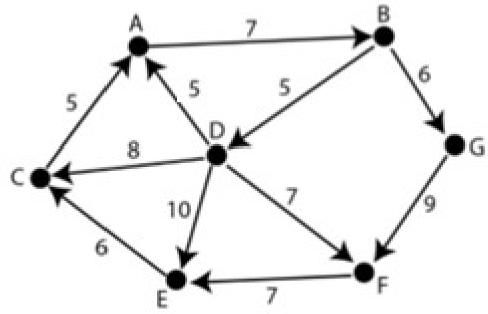


Atividade 2. Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta *A*, e ele tem que percorrer todos os caminhos para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pelo caminho, essa ponte se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?





Atividade 3. No esquema abaixo, as letras de *A* a *G*, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor ao número da localização.



( ) DEPÓSITO DE LIXO ( ) HOSPITAL
( ) PIZZARIA ( ) CORPO DE BOMBEIROS

Atividade 4. Você tem que levar água, luz e gás para três casas de uma cidade. As companhias de água, luz e gás permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

ANEXO C – MATERIAL DE APOIO

1. DEFINIÇÃO DE GRAFO

Um grafo $G\ (V, E)$ é uma estrutura matemática formada por dois conjuntos:

- Um conjunto não nulo $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, onde seus elementos são chamados de vértices.
- Um conjunto E, que será chamado de conjunto das arestas, formado por pares (não necessariamente distintos ou ordenados) de elementos de V.

Vértices são geralmente representados por pontos e arestas costumam ser representadas por segmentos de reta unindo dois vértices.

Uma representação gráfica de um grafo é também chamada de diagrama.

Na figura 1, temos um diagrama representando o grafo G, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$.

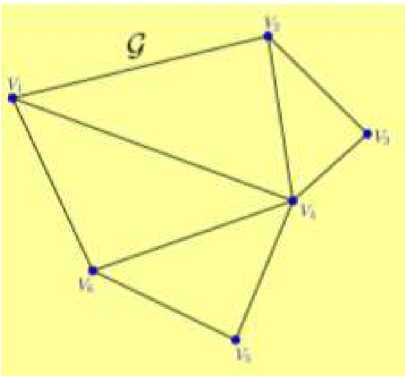


Figura 1 - Os pontos da figura são os vértices do grafo G e os segmentos de reta suas arestas.

Note que existe um número ilimitado de diagramas para representar o mesmo grafo, mas o que realmente importa é quais vértices estão ligados e não como são feitas essas ligações. Isso fica claro na figura 2, onde um mesmo grafo é representado por três diagramas distintos.

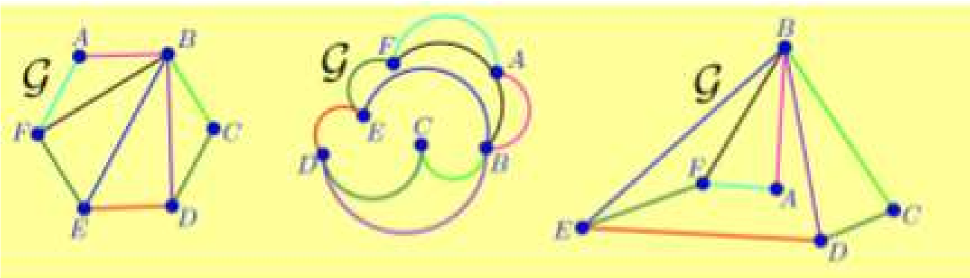


Figura 2 - Três diagramas que representam o mesmo grafo G.

2. PRINCIPAIS TERMOS UTILIZADOS EM GRAFOS

Aresta incidente: Se uma aresta está ligada a um vértice, a aresta é dita incidente a este vértice.

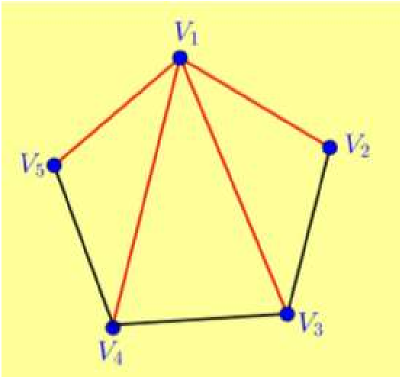


Figura 3 - As arestas v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 e v_1v_5 são incidentes ao vértice v_1.

Vértices adjacentes: São vértices ligados por uma mesma aresta.

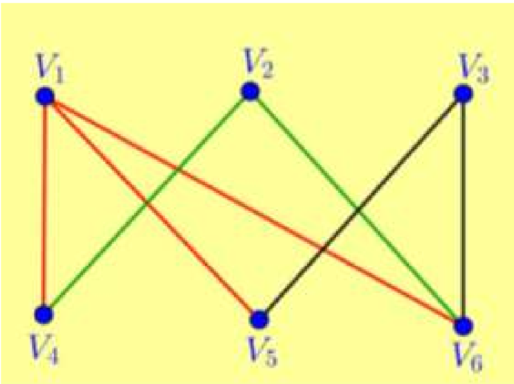


Figura 4 - O vértice v_1 é adjacente aos vértices v_4, v_5 e v_6 e o vértice v_2 é adjacente aos vértices v_4 e v_6.

Grau de um vértice: É o número de arestas incidentes ao vértice.

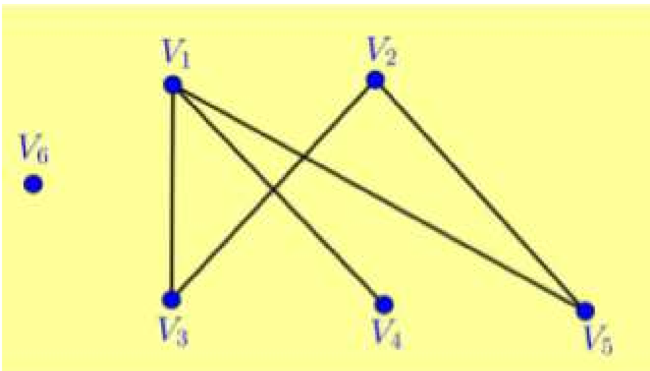


Figura 5 - O grau de v_1 é igual a 3, o grau de v_2 é igual a 2 e o grau de v_6 vale zero.

Laço: É uma aresta que liga um vértice a ele próprio. Ao contar o grau de um vértice, o laço deve ser contado duas vezes.

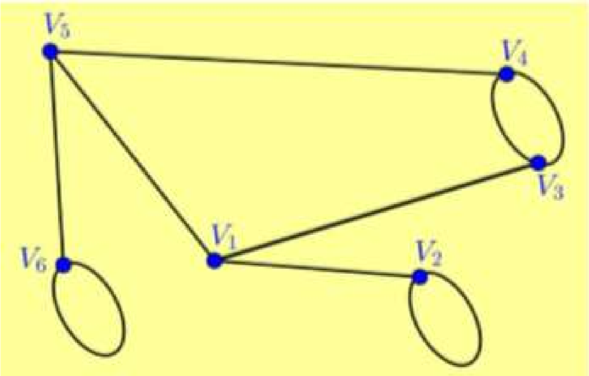


Figura 6 - Existe um laço em v_2 e outro em v_6, entretanto v_4 e v_3 não formam laços. O grau de v_2 e v_6 é 3, pois o laço conta duas vezes.

Arestas paralelas: São arestas associadas ao mesmo conjunto de vértices. Um grafo que possui arestas paralelas é chamado de multigrafo.

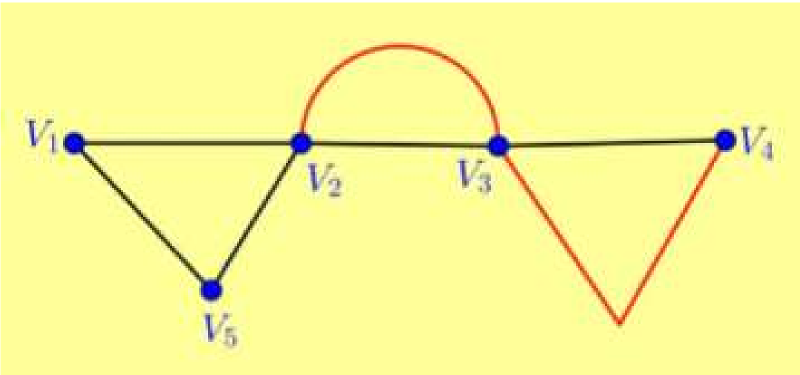


Figura 7 - As arestas v_2v_3 e v_3v_4 são exemplos de arestas paralelas.

Grafo simples: É o grafo que não possui laços nem arestas paralelas.

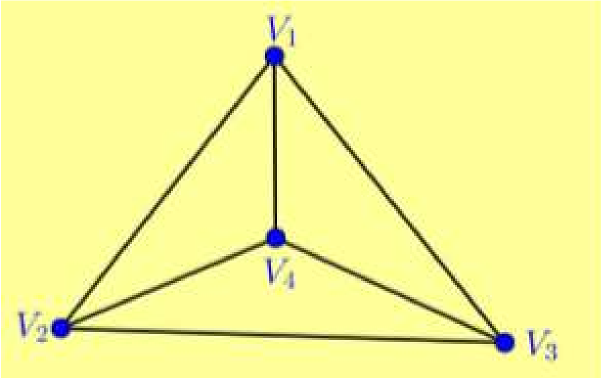


Figura 8 - Exemplo de grafo simples.

<u>Passeio:</u> É uma sequência de arestas adjacentes que ligam dois vértices.

Um passeio é chamado de <u>caminho</u> se não passa duas vezes pelo mesmo vértice e é chamado de <u>trilha</u> se não passa duas vezes pela mesma aresta.

Um passeio é dito fechado se a sequência começar e terminar no mesmo vértice (caso contrário ela é dita aberta).

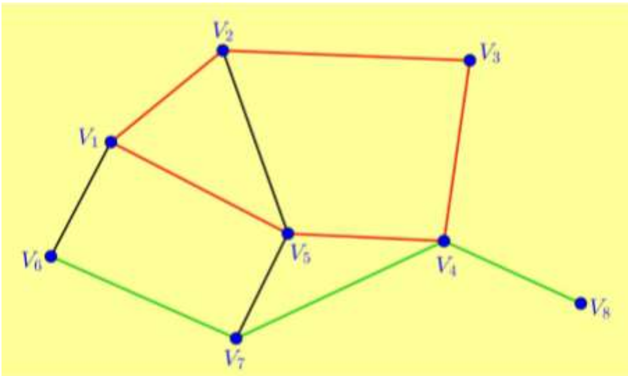


Figura 9 - A sequência $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ e a sequência $v_6v_7v_4v_8$ são exemplos de passeios.

<u>Trilha fechada:</u> É um passeio que não passa duas vezes pela mesma aresta e a sequência começar e terminar no mesmo vértice.

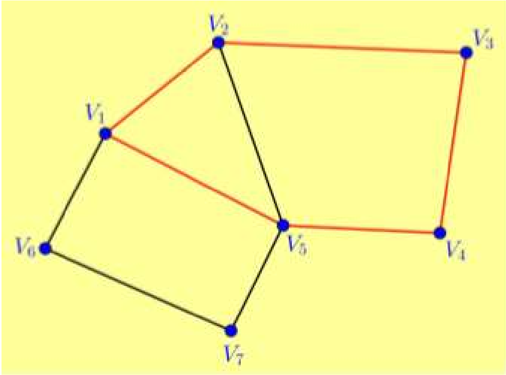


Figura 10 - A sequência $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ é uma trilha fechada.

<u>Grafo conexo:</u> É aquele onde há pelo menos um passeio ligando cada par de vértices do grafo. Informalmente um grafo é conexo se é possível caminhar de qualquer vértice para qualquer outro vértice através de uma sequência de arestas adjacentes.

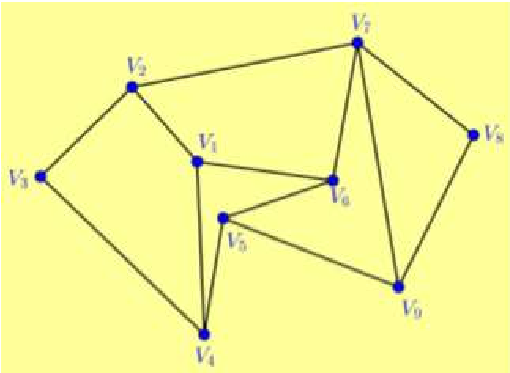


Figura 11 - Exemplo de grafo conexo.

<u>Grafo desconexo:</u> É aquele onde há pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhuma cadeia.

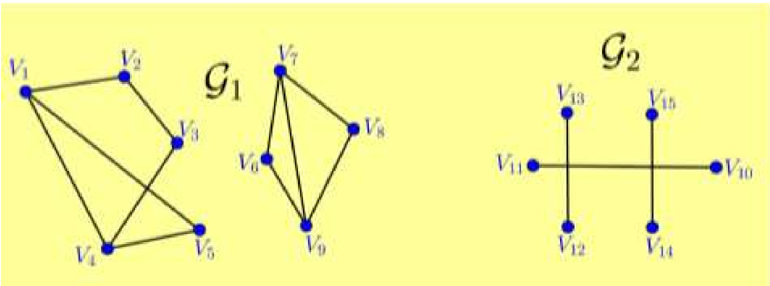


Figura 12 - Exemplos de grafos desconexos.

Grafo orientado: É o grafo onde as arestas são orientadas. Em um grafo orientado as conexões entre os vértices são chamadas de arcos. Em geral utilizamos setas para mostrar a orientação das arestas.

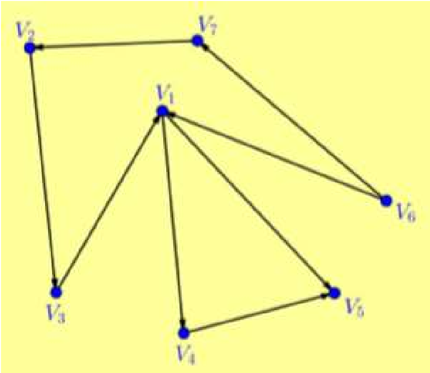


Figura 13 - Exemplo de dígrafo.

Ponte: Uma aresta é chamada de ponte quando sua remoção provoca uma redução na conexidade do grafo.

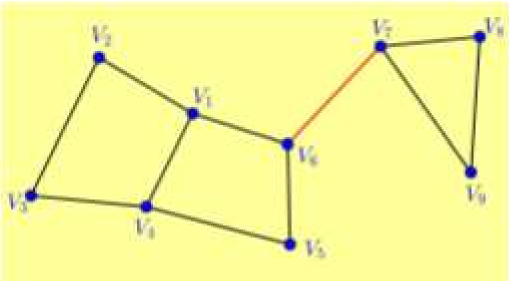


Figura 14 - A aresta v_6v_7 é uma ponte.

Vértice de corte: É o vértice cuja remoção (juntamente com as arestas a ele conectadas) torna o grafo desconexo.

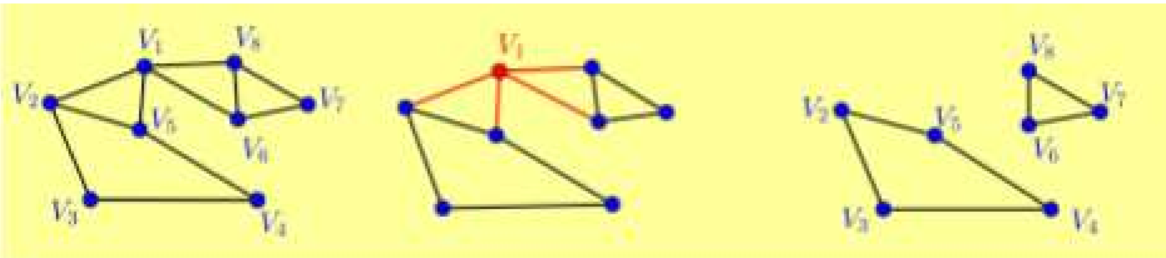


Figura 15 - Na sequência, o vértice v_1 é um vértice de corte.

Árvore: É um grafo conexo e sem trilha fechada.

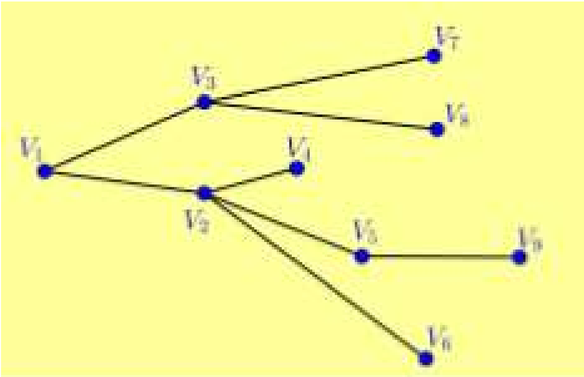


Figura 16 - Exemplo de árvore.

Arborescência: É uma árvore orientada.

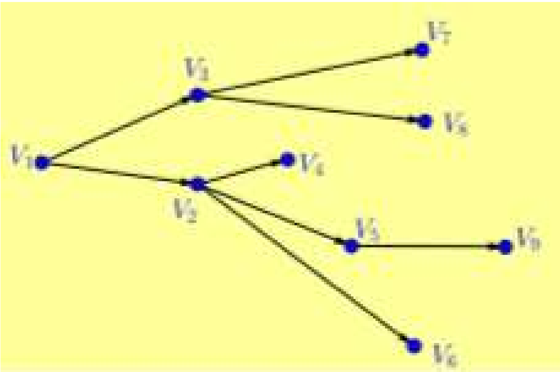


Figura 17 - Exemplo de arborescência.

Floresta: É um grafo onde as componentes conexas são árvores.

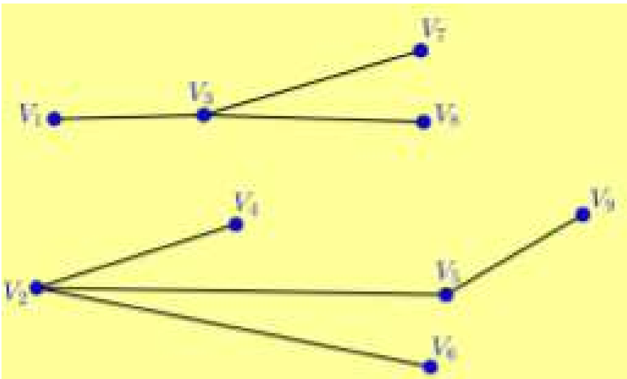


Figura 18 - Exemplo de floresta.

Isomorfismo: Dois grafos são isomorfos quando preservam as adjacências entre vértices. Em outras palavras, os grafos são de fato idênticos, mas estão desenhados de maneiras diferentes.

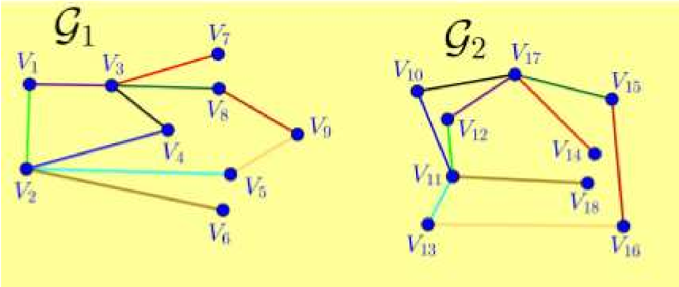


Figura 19 - G_1 e G_2 são grafos isomorfos.

Observe a correspondência entre vértices e arestas para os grafos G_1 e G_2.

Vértices		Arestas	
G_1	G_2	G_1	G_2
v_1	v_{12}	v_1v_2	$v_{11}v_{12}$
v_2	v_{11}	v_2v_6	$v_{11}v_{18}$
v_3	v_{17}	v_1v_3	$v_{12}v_{17}$
v_4	v_{10}	v_2v_4	$v_{11}v_{10}$
v_5	v_{13}	v_2v_5	$v_{11}v_{13}$
v_6	v_{18}	v_5v_9	$v_{13}v_{16}$
v_7	v_{14}	v_3v_4	$v_{17}v_{10}$
v_8	v_{15}	v_8v_9	$v_{15}v_{16}$
v_9	v_{16}	v_3v_8	$v_{17}v_{15}$
-	-	v_3v_7	$v_{17}v_{14}$

Tabela 1 – Correspondência entre vértices e arestas de G_1 e G_2.

<u>Grafo planar:</u> É aquele onde existe alguma maneira de arranjar seus vértices no plano de modo que nenhum par de arestas se cruze.

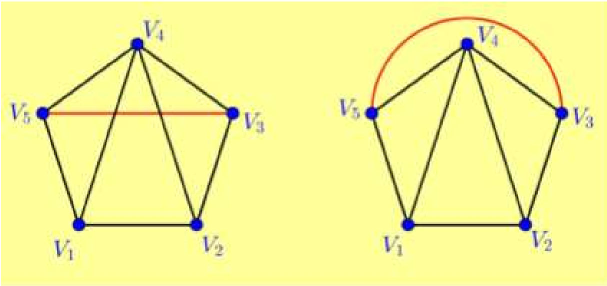


Figura 20 - A direita temos uma representação do grafo da esquerda sem que suas arestas se cruzem.

Grafo regular: É o grafo em que todo vértice tem o mesmo número de adjacências, ou em outras palavras o mesmo grau.

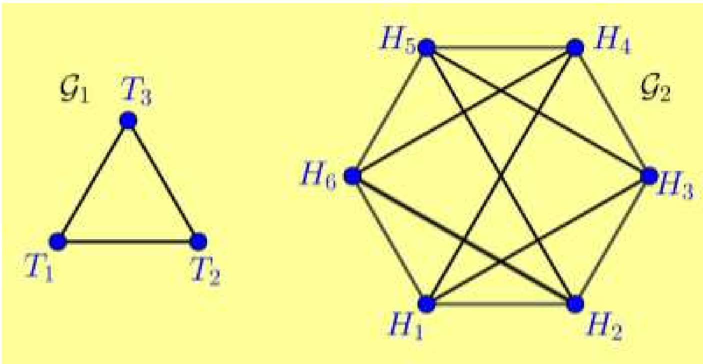


Figura 21 - Em G_1 todos os vértices têm grau 2 e em G_2 todos os vértices tem grau 4.

Grafo completo: É aquele no qual todo par de vértices possui uma aresta. Um grafo completo é representado por K_n, onde n é o número de vértices deste grafo.

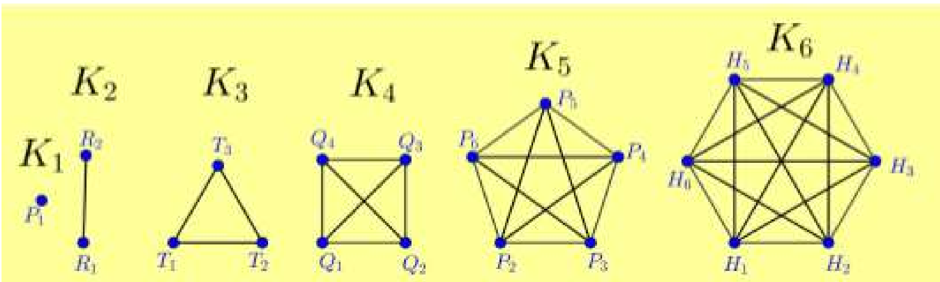


Figura 22 - Da esquerda para direita tem-se K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 e K_6.

Grafo bipartido completo: É aquele onde o conjunto de seus vértices V pode ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2, de modo que toda aresta do grafo une um vértice de V_1 a um vértice de V_2. Esses grafos são representados por $K_{n,m}$, onde n é o número de vértices de V_1 e m é o número de vértices de V_2.

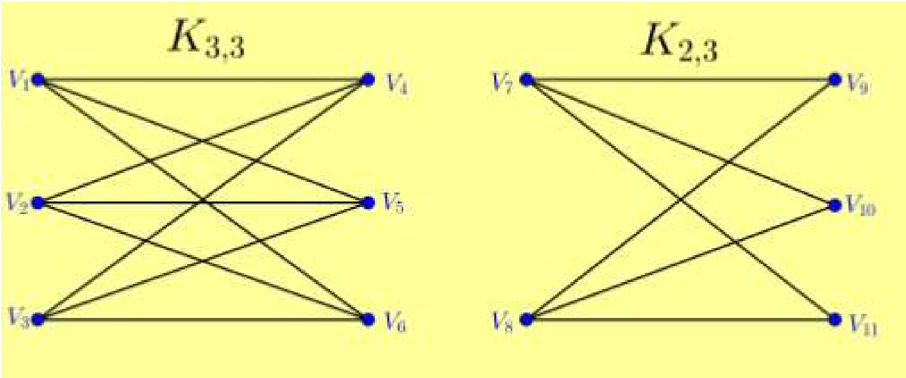


Figura 23 - Da esquerda para direita, temos $K_{3,3}$ e $K_{2,3}$.

Grafo complementar: Dado um grafo G, o seu grafo complementar será o grafo que possuir os mesmos vértices de G e um conjunto de arestas formado por todos os pares de vértices distintos que não aparecem em G.

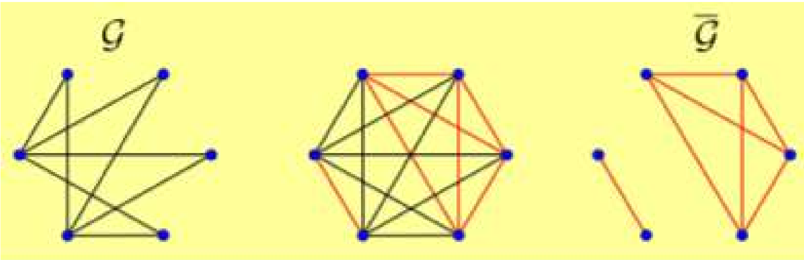


Figura 24 - O complementar do grafo G é o grafo em vermelho.

Subgrafo e supergrafo: Um grafo $G_1(V_1, E_1)$ é um subgrafo de $G(V, A)$ se V_1 é um subconjunto de V e E_1 é um subconjunto de E. Da mesma forma um grafo $G_2(V_2, E_2)$ é um supergrafo de $G(V, A)$ se G é um subgrafo de G_2.

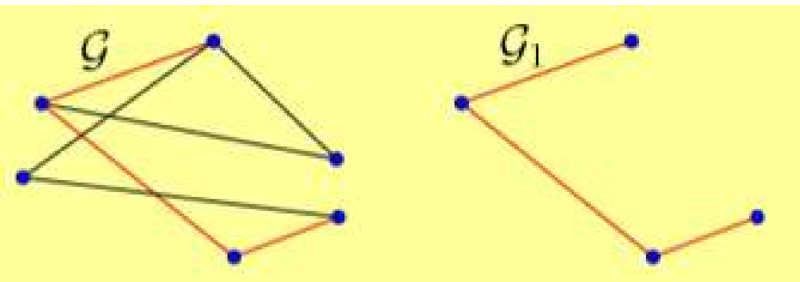


Figura 25 - G_1 é um subgrafo de G. Também é possível dizer que G é um supergrafo de G_1.

Multigrafo: É um grafo que possui múltiplas arestas (arestas paralelas) entre um par de vértices.

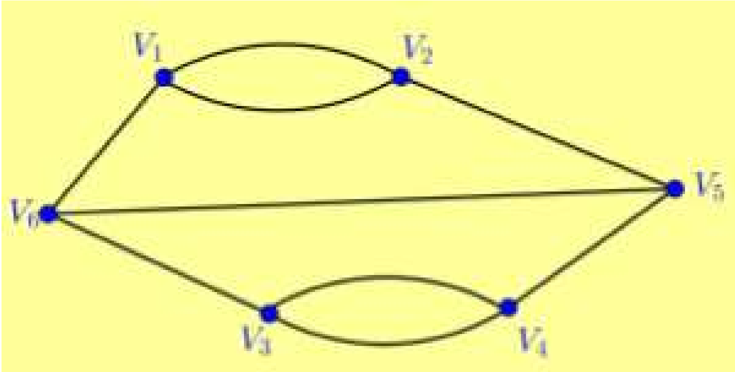


Figura 26 - O grafo acima é um multigrafo, já que v_1v_2 e v_3v_4 são arestas paralelas.

<u>Face de um grafo:</u> É a representação planar de uma região do grafo contornada por arestas. A porção do plano infinita que não é contornada por arestas é chamada de face externa ou face infinita.

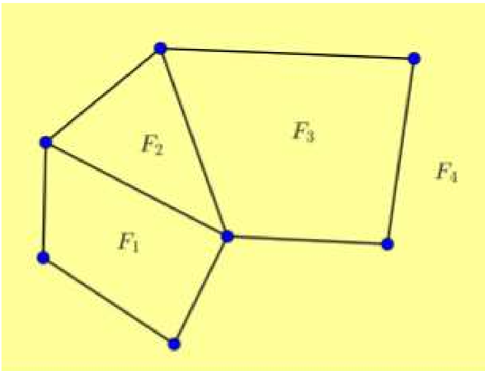


Figura 27 - A figura acima possui 4 faces: três são polígonos e a quarta face é a face externa.

<u>Grau de uma face:</u> É o número de arestas que limita uma face. Quando uma aresta faz fronteira com apenas uma face, ela deve ser contada duas vezes.

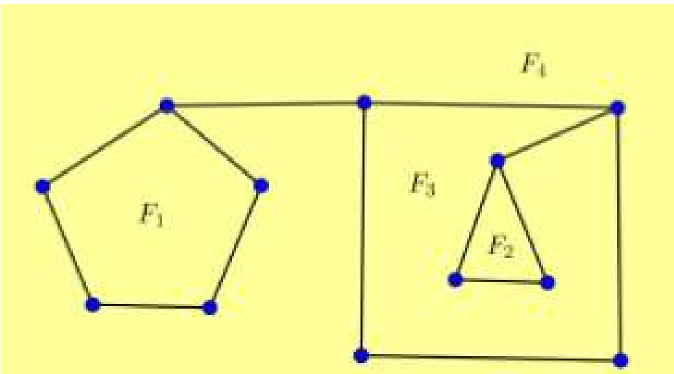
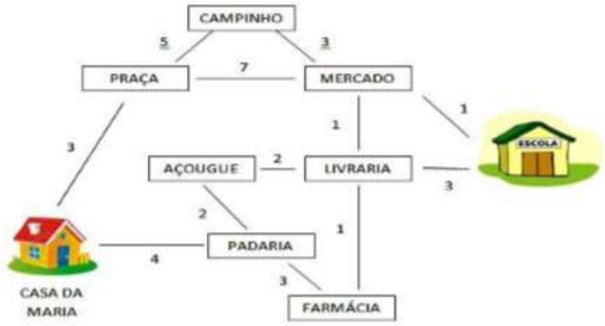


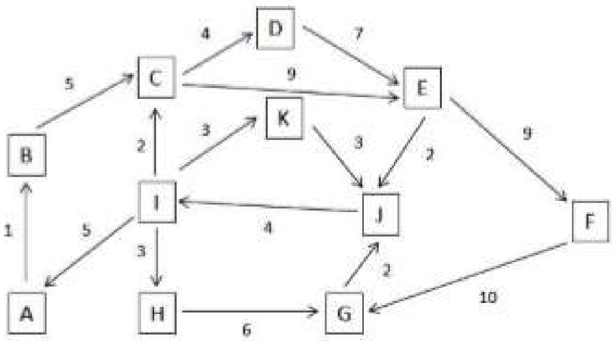
Figura 28 - Na figura acima, F_1 possui grau 5, F_2 possui grau 3, F_3 possui grau 9 e F_4 possui grau 11.

ANEXO D – PÓS-TESTE DE CONTEÚDO

Atividade 1. Observe o esquema abaixo, onde as setas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de Maria e a escola.



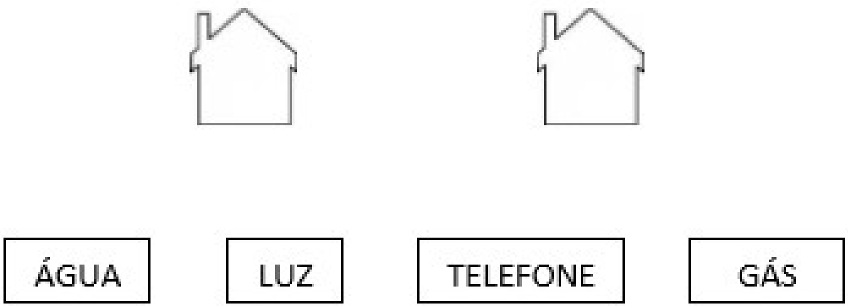
Atividade 2. No esquema abaixo, as letras de *A* a *K*, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor à letra da localização.



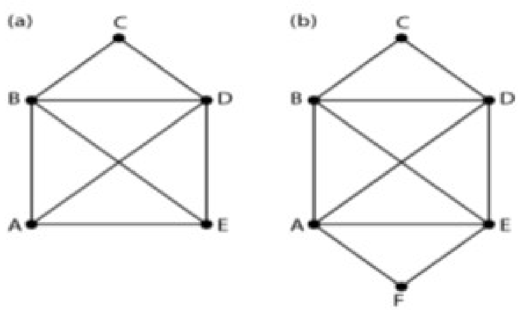
( ) FAST FOOD ( ) SHOPPING

( ) USINA NUCLEAR ( ) SAMU

Atividade 3. Você tem que levar água, luz, telefone e gás para 2 casas de uma cidade. As companhias de água, luz, telefone e gás permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?



Atividade 4. Imagine que os desenhos abaixo representem o caminho feito por um caminhão de coleta de lixo de duas pequenas cidades, *X* e *Y*. Considere que o ponto *C* é o aterro sanitário, que é o ponto de partida do caminhão e as arestas são as ruas por onde devem ser feitas as coletas. Como você que planeja a rota desse caminhão, deve evitar que ele passe pela mesma rua duas vezes, a fim de evitar gastos com combustível e ganhar tempo. Trace a rota desse caminhão, de modo que após fazer a coleta ele volte para o aterro sanitário. É possível fazer isso nas duas cidades?



ANEXO E - PÓS-TESTE MOTIVACIONAL

Para responder ao questionário, leia atentamente cada afirmação e, em seguida, marque a resposta que mais caracteriza ou se aplica a você em relação à Matemática. Lembre-se: as respostas devem refletir o seu modo de pensar e agir. Não deixe nenhum item sem resposta.

Use a seguinte correspondência para manifestar sua opinião: (1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre.

Itens	1	2	3	4	5
Tive dificuldades em entender as atividades propostas.					
As atividades propostas foram interessantes.					
Quando me pediram para resolver exercícios durante e após o experimento, fiquei nervoso(a).					
Aprender Matemática foi um prazer durante as atividades propostas.					
Consegui bons resultados nas atividades propostas.					
Consegui relacionar conhecimentos de outras disciplinas com conhecimentos da Matemática.					
Senti-me desafiado em realizar as atividades propostas.					
Eu gostaria de propor atividades semelhantes, envolvendo grafos e Matemática para meus colegas e familiares.					
Tentei resolver as atividades propostas rapidamente.					
Fiquei curioso em saber a resolução das atividades propostas.					
Fiquei frustrado(a) ao não conseguir resolver determinado problema proposto.					
Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassaram, tentei de novo.					
Relembrei as tarefas propostas quando estava em casa.					

Passei a realizar pesquisas na internet ou em livros para conhecer mais sobre os assuntos abordados nas atividades.					
Consegui perceber a presença da Matemática no meu cotidiano.					
Consigo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos da Matemática.					
Passei a estimar o tempo que gasto para chegar num destino, de acordo com a rapidez do(s) meio(s) de transporte que uso.					
Fiz perguntas sobre as atividades ao professor ou aos meus colegas quando tive dúvidas.					
Tive um bom relacionamento com o professor durante as atividades.					