2017: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Sobre o Problema dos Jarros

Fernando Augusto Aguiar de Oliveira[1]
Marcelo Oliveira Veloso[2]

Resumo: Neste trabalho apresentamos um breve estudo sobre duas versões do Problema dos Jarros. A primeira versão consiste em verificar se é possível mensurar determinada quantidade de água utilizando somente três jarros, sem marcações. O resultado principal afirma que este problema tem solução quando as capacidades dos jarros menores são co-primas. A outra versão, com dois jarros, sem marcações, tem solução quando determinada equação diofantina linear tem solução.

Palavras-chave: Problema dos Jarros, Aritmética, Coordenadas Trilineares, Equações Diofantinas Lineares.

Introdução

A primeira versão do Problema dos Jarros, conhecida como Problema dos Três Jarros, foi formulada pelo matemático Niccolò Tartaglia (1499 - 1557). O Problema de Tartaglia, consiste em verificar se é possível dividir a água que está em um jarro totalmente cheio com capacidade inteira par, em duas partes iguais. E para realizar a tarefa só é permitido despejos entre o jarro totalmente cheio e outros dois jarros vazios com capacidades inteiras menores que o primeiro, todos sem marcações. Supõe-se que a soma das capacidades dos jarros menores é igual a capacidade do jarro maior, veja [1].

As resoluções do problema ficaram sem destaque por anos. Até que em 1939, o estatístico Maurice Kenneth Tweedie (1919 - 1996) relacionou o problema a uma grade formada por triângulos equiláteros denominada Coordenadas Trilineares. Esta grade fornece um método geométrico para verificar se o problema tem solução e como determiná-la. Assim, estudamos e apresentamos a relação entre Coordenadas Trilineares e o Problema dos Três Jarros.

Neste trabalho, o objetivo é mensurar qualquer quantidade inteira menor que a capacidade do maior jarro. Esta versão é conhecida como o Problema dos três jarros. O principal resultado (Teorema 3.1) verifica que o problema tem solução sempre que as capacidades dos jarros menores são co-primas. Além disso, a demonstração do resultado fornece um *algoritmo* para resolução do problema.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2015
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: ticle@bol.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: veloso@ufsj.edu.br

A segunda versão envolve dois jarros com capacidades inteiras, ambos sem marcações, um recipiente suficientemente grande e uma fonte abundante de água. O objetivo é mensurar determinada quantidade inteira de água. A solução do Problema dos Dois Jarros envolve a solução de certa equação diofantina linear.

O texto foi organizado da seguinte maneira: na primeira seção, citamos alguns conceitos e resultados utilizados ao longo do trabalho. Na segunda seção, formulamos e apresentamos o Problema dos Três Jarros com vários exemplos. Na terceira seção, temos o resultado principal, que fornece condições para que o Problema dos Três Jarros tenha solução. Na quarta seção, apresentamos um programa que resolve o Problema de Tartaglia. Na quinta seção, relacionamos o Problema dos Três Jarros com as Coordenadas Trilineares, por fim, na sexta seção, abordamos uma outra versão do problema, envolvendo desta vez, apenas dois jarros, também sem marcações.

1 Conceitos Básicos

Nesta seção recordamos alguns conceitos e resultados utilizados ao longo do texto no nosso tema principal.

1.1 Máximo Divisor Comum

Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Um inteiro $d > 0$ é dito o **máximo divisor comum** de a e b se

1. d divide a e d divide b (Notação: $d \mid a$ e $d \mid b$).

2. c é um inteiro tal que $c \mid a$ e $c \mid b$ então $c \mid d$.

É usual denotar por $\mathbf{mdc(a, b)}$ o máximo divisor comum de a e b. Veja que o segundo item garante a unicidade do $mdc(a,\, b)$. De fato, se $d = mdc(a,\, b)$ e $d_1 = mdc(a,\, b)$ então $d \mid d_1$ e $d_1 \mid d$, segundo item da definição. Logo $d \leq d_1$ e $d_1 \leq d$ e portanto $d = d_1$.

Exemplo 1.1. *O* $mdc(6,\, 9) = 3$, *pois* 3 *divide* 6 *e* 3 *divide* 9, (*item* 1). *Além disso, todo divisor de* 3 *e* 9 ($\pm 1, \pm 3$) *divide 3,* (*item* 2). ♢

O próximo resultado fornece um modo para determinar o máximo divisor comum entre dois inteiros e justifica o nome deste divisor. Antes fixamos a notação D_m para representar o conjuntos dos divisores do inteiro m. Por exemplo, $D_{10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.

Proposição 1.1. *Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Então $d = mdc(a,\, b)$ se, e somente se, d é o maior inteiro do conjunto $D_a \cap D_b$.*

Demonstração. Seja c o maior inteiro do conjunto $D_a \cap D_b$. É claro que $d \in D_a \cap D_b$, pois $d = mdc(a,\, b)$. Logo $d \leq c$, pela escolha de c. Visto que $c \in D_a \cap D_b$ nós temos que $c \mid a$ e $c \mid b$. Assim $c \mid d$, pois $d = mdc(a,\, b)$. Portanto $c \leq d$ e temos $d = c$. □

Exemplo 1.2. *Sejam os inteiros* 12 *e* 18. *Temos que* $D_{12} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ *e* $D_{18} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$. *Observe que* 6 *é o maior inteiro do conjunto* $D_{12} \cap D_{18} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, *então* $mdc(12,\, 18) = 6$, *pela Proposição 1.1.* ♢

Dois inteiros a e b são ditos coprimos, ou primos entre si, quando o maior divisor comum entre eles for 1.

Exemplo 1.3. *Sejam os números* 9 *e* 14 *e seus respectivos divisores,* $D_9 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ *e* $D_{14} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. *Observe que* 1 *é o maior inteiro do conjunto* $D_9 \cap D_{14} = \{\pm 1\}$. *Logo* $mdc(9,\, 14) = 1$ *(Proposição 1.1). Ou seja,* 9 *e* 14 *são coprimos.* $\diamondsuit$

No próximo resultado listamos algumas das mais importantes propriedades do máximo divisor comum.

Lema 1.1. *Sejam a e b números inteiros não simultaneamente nulos. Então:*

1. $mdc(a, b) = mdc(b, a) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b)$.
2. $mdc(1, a) = 1$.
3. $mdc(0, a) = |a|$.
4. $mdc(a, a) = |a|$.
5. $a \mid b \;\Leftrightarrow\; mdc(a,\, b) = |a|$.
6. $mdc(a,\, b) \mid (ax + by)$ *para todos* $x,\, y \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Os itens 1, 2, 3 e 4 decorrem da definição do máximo divisor comum. Verificamos somente os outros itens.

5) De fato, se $a \mid b$, temos que $|a|$ é um divisor comum de a e b, e se c é um divisor comum de a e b, então c divide $|a|$, o que mostra que $|a| = mdc(a,\, b)$. Reciprocamente, se $mdc(a,\, b) = |a|$, segue-se que $|a|$ divide b, logo $a \mid b$.
6) Seja $d = mdc(a,\, b)$, logo $d \mid a$ e $d \mid b$, assim existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $a = md$ e $b = nd$. Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que

$$ax + by = (md)x + (nd)y = d(mx + ny).$$

Donde que d divide $ax + by$. $\square$

Para encontrar o máximo divisor comum de dois inteiros, utilizamos o próximo resultado, que é conhecido como *Lema de Euclides*.

Lema 1.2 (Lema de Euclides)**.** *Sejam a, b, q, r números inteiros, a e b não simultaneamente nulos. Se $a = bq + r$, então*

$$mdc(a,\, b) = mdc(b,\, r).$$

Demonstração. Seja $d = mdc(a,\, b)$ e $d_1 = mdc(b,\, r)$. Como $d = mdc(a,\, b)$, temos que $d \mid a$ e $d \mid b$, logo $d \mid (a - bq)$, ou seja, $d \mid r$ e portanto $d \mid d_1$, pois $d_1 = mdc(b,\, r)$. Logo $d \leq d_1$. De maneira análoga temos que $d_1 \mid d$, ou seja, $d_1 \leq d$. Portanto, $d = d_1$. $\square$

Exemplo 1.4. *Para calcular o* $mdc(35,\, 20)$ *observe primeiro que* $35 = 1.20 + 15$, $20 = 1.15 + 5$ *e* $15 = 3.5 + 0$. *Então pelo Lema Euclides temos*

$$mdc(35,\, 20) = mdc(20,\, 15) = mdc(15,\, 5) = mdc(5,\, 0) = 5.$$

$\diamondsuit$

Corolário 1.1. *Sejam a, b e c inteiros, não simultaneamente nulos, tais que $c = a + b$ e $mdc(a,\, b) = 1$. Então*

$$mdc(c,\, a) = 1.$$

Demonstração. Note que $c = a + b = a \cdot 1 + b$. Logo o $mdc(c,\, a) = mdc(a,\, b) = 1$, pelo Lema de Euclides. $\square$

Exemplo 1.5. *Sejam os inteiros 3, 5 e 8. Visto que $8 = 5 \cdot 1 + 3$, e $mdc(5,\, 3) = 1$ segue do Corolário 1.1 que $mdc(8,\, 5) = 1$.* $\diamondsuit$

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Bézout, mostra que o máximo divisor comum de dois inteiros é uma combinação linear destes inteiros.

Teorema 1.1 (Bézout)**.** *Sejam a, b inteiros não simultaneamente nulos. Então existem x e $y \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$mdc(a,\, b) = ax + by.$$

Demonstração. Considere o conjunto de todas as combinações lineares de a e b

$$I(a, b) = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Visto que a e b não são simultaneamente nulos, temos que $I(a, b) \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$. De fato, basta observar que $a^2 + b^2 = a \cdot a + b \cdot b \in I(a, b) \cap \mathbb{N}$.

Pelo Princípio da Boa Ordenação existe $d = ax_0 + by_0$, o menor elemento de $I(a, b) \cap \mathbb{N}$. Afirmamos que d divide todos os elementos do conjunto $I(a, b)$. De fato, dado $m \in I(a, b)$ temos que $m = ax + by$. Sejam q, $r \in \mathbb{Z}$ o quociente e o resto da divisão euclidiana de m por d. Ou seja,

$$m = d \cdot q + r \text{ e } 0 \leq r < d.$$

Então

$$r = m - dq = a(x - qx_0) + b(y - qy_0) \in I(a, b).$$

Assim $r = 0$, visto que $r < d$ e d é o menor elemento positivo de $I(a, b)$, o que verifica nossa afirmação. Segue da nossa afirmação que $d \mid a$ e $d \mid b$. Logo $d \mid mdc(a,\, b)$ e $d \leq mdc(a,\, b)$. Veja também que se existe um c tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid ax_0 + by_0$ logo $c \mid d$. Então $mdc(a,\, b) \mid d$ e assim $mdc(a,\, b) \leq d$. Portanto, $d = mdc(a,\, b)$. $\square$

Exemplo 1.6. *Veja que como $mdc(10,\, 66) = 2$ então o Teorema de Bézout (Teorema 1.1) garante a existência de inteiros x e y que tornam verdadeira a equação $2 = 10x + 66y$. De fato, basta observar que $x = 20$ e $y = -3$ satisfaz $2 = 10 \cdot (20) + 66 \cdot (-3)$.* $\diamondsuit$

A recíproca do Teorema de Bézout (Teorema 1.1) não vale em geral. Por exemplo, veja que $2 = 3(-1) + 5(1)$ não implica que o $mdc(3,\, 5)$ é igual a 2, visto que $mdc(3,\, 5) = 1$. O próximo resultado mostra que a recíproca só é possível se $mdc(a,\, b) = 1$.

Teorema 1.2. *Dois inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros x e y tais que $ax + by = 1$.*

Demonstração. Suponha que a e b são primos entre si. Então $mdc(a,\, b) = 1$. Segue do Teorema de Bézout (Teorema 1.1) que existem números inteiros x e y tais que $ax + by = 1 = mdc(a,\, b)$. Reciprocamente, suponha que existem números inteiros x e y tais que $ax + by = 1$. Seja $d = mdc(a,\, b)$, nessas condições, $d \mid a$ e $d \mid b$, logo $d \mid ax + by$, assim podemos afirmar que $d \mid 1$, como $d > 0$, temos que $d = 1$. Portanto $mdc(a,\, b) = 1$. $\square$

Teorema 1.3. *Sejam a, b e d números inteiros. Se $mdc(a,\, b) = d$, então $mdc(\frac{a}{d},\, \frac{b}{d}) = 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Bèzout (Teorema 1.1) sabemos que existem inteiros x e y tais que $ax + by = d$. Segue, por definição, que $d \mid a$ e $d \mid b$. Assim, $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são inteiros. Logo $(\frac{a}{d})x + (\frac{b}{d})y = 1$. Finalmente, pelo Teorema 1.2, temos que $mdc(\frac{a}{d},\, \frac{b}{d}) = 1$. □

Teorema 1.4. *Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \mid bc$ e $mdc(a,\, b) = 1$, então $a \mid c$.*

Demonstração. Se $a \mid bc$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$. Além disso, se o $mdc(a,\, b) = 1$, então pelo Teorema 1.1, existem inteiros x e y tais que $xa + yb = 1$. Multiplicando por c ambos os lados da equação $xa + yb = 1$ temos $xac + ybc = c$, e substituindo bc por ak temos $c = xac + yak = a(xc + yk)$, verificando que a divide c, como queríamos. □

1.2 Equações Diofantinas Lineares

Uma equação da forma

$$ax + by = c \tag{1}$$

onde a, b, $c \in \mathbb{Z}$ e as indeterminadas x e y são números inteiros é chamada de **equação diofantina linear**. A nomenclatura é uma homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria (aproximadamente 300 DC).

Uma **solução** de uma equação diofantina linear (1) é um par ordenado de inteiros $(x_0\, , y_0)$ tais que

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Exemplo 1.7. *Dada a equação diofantina linear $3x + 5y = 1$, é fácil verificar que o par $(2, -1)$ é uma solução, pois $3(2) + 5(-1) = 1$.* ♢

Nem toda equação diofantina linear tem solução. Por exemplo, a equação $6x + 14y = 7$ não possui nenhum par (x_0, y_0) como solução, pois $6x + 14y$ necessariamente é um número par, para todo par ordenado $(x,\, y)$.

É natural perguntar-se quando tais equações possuem soluções e como determinar tais soluções. Os dois resultados a seguir fornecem as respostas.

Proposição 1.2. *Sejam a, b e c números inteiros. A equação diofantina linear $ax + by = c$ admite solução se, e somente se, $mdc(a, b)$ divide c.*

Demonstração. Suponha que exista um par $(x_0,\, y_0)$ como solução para $ax + by = c$. Ou seja, $ax_0 + by_0 = c$. Segue do Lema 1.1 que o $mdc(a, b)$ divide $ax_0 + by_0$. Logo $mdc(a, b)$ divide c. Reciprocamente, se $mdc(a, b) \mid c$, então existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = k \cdot mdc(a, b)$. Segue do Teorema de Bézout que existe um par de inteiros $(x_0,\, y_0)$ tal que $ax_0 + by_0 = mdc(a, b)$. Multiplicando esta última igualdade por k temos $a(kx_0) + b(ky_0) = kmdc(a, b)$. Assim $a(kx_0) + b(ky_0) = c$, verificando que o par de inteiros $x = kx_0$ e $y = ky_0$ é uma solução da equação diofantina linear $ax + by = c$. □

O teorema anterior mostrou quando as equações diofantinas lineares tem solução. O próximo resultado, ensina como determinar o conjunto solução, quando possível.

Teorema 1.5. *Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Suponha que $(x_0,\, y_0)$ é uma solução particular da equação $ax + by = c$ onde $mdc(a,\, b) = d$. Então $(u,\, v)$ é solução da equação $ax + by = c$ se, e somente se,*

$$(u,\, v) = (x_0 + \frac{b}{d}t,\, y_0 - \frac{a}{d}t)$$

para algum $t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $b \neq 0$. Observe que se (r, s) é solução de $ax + by = c$. Então (r, s) também é solução de

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

onde $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b_1}{d} \neq 0$ e $c_1 = \frac{c_1}{d}$. Suponha agora que $(u,\, v)$ é solução de $a_1x + b_1y = c_1$. Segue da observação inicial que

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 = a_1u + b_1v.$$

Ou seja,

$$a_1(u - x_0) = b_1(y_0 - v).$$

Visto que $mdc(a_1,\, b_1) = 1$ (Teorema 1.3), segue do Teorema 1.4 que $b_1 \mid (u - x_0)$, logo existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $u - x_0 = tb_1$ e assim

$$u = x_0 + b_1t = x_0 + \frac{b}{d}t.$$

Substituindo $u - x_0$ por tb_1 na equação $a_1(u - x_0) = b_1(y_0 - v)$ temos $a_1tb_1 = b_1(y_0 - v)$ o que implica

$$v = y_0 - a_1t = -y_0 - \frac{a}{d}t.$$

Portanto toda solução da equação $ax + by = c$ é da forma

$$(u,\, v) = (x_0 + \frac{b}{d}t,\, y_0 - \frac{a}{d}t)$$

para algum $t \in \mathbb{Z}$. É claro que

$$(u,\, v) = (x_0 + \frac{b}{d}t,\, y_0 - \frac{a}{d}t),$$

para qualquer inteiro t, é solução da equação. □

Exemplo 1.8. *Seja a equação $24x + 14y = 18$. Encontramos uma solução particular e utilizando a técnica descrita acima determinamos a forma das outras soluções a partir dessa primeira.*

Observe que esta equação tem solução, pois $mdc(24, 14) = 2$ e 2 divide 18. Dividindo ambos os membros da equação por 2, obtemos a equação equivalente $12x + 7y = 9$. Achamos uma solução particular (x_0, y_0) desta última utilizando o algoritmo euclidiano. Dessa forma temos que

$$12 = 7 \cdot 1 + 5$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos

$$1 = 12 \cdot 3 - 7 \cdot 5$$

para chegarmos a um resultado particular basta multiplicarmos a equação por 9. *Assim temos*

$$9 = 12 \cdot 27 + 7 \cdot (-45)$$

Logo, $x_0 = 27$ *e* $y_0 = (-45)$ *é uma solução particular da equação e, consequentemente, as soluções serão encontradas por:*

$$x = 27 + 7t$$
$$y = -45 + 12t$$

com $t \in \mathbb{Z}$. ♢

1.3 Aritmética Modular

Seja m um inteiro positivo. Dado dois inteiros a e b, dizemos que a e b **são congruentes módulo m** se, e somente se, o resto da divisão euclidiana de a por m é igual ao resto da divisão de b por m. Quando a é congruente a b módulo m, usamos a seguinte notação:

$$a \equiv b \, mod(m).$$

Exemplo 1.9. *Veja que* $21 \equiv 13 \, mod(2)$, *pois os restos da divisão de* 21 *e* 13 *por* 2 *são iguais, no caso, o resto é igual a* 1. ♢

Exemplo 1.10. *Veja que* $25 \equiv 10 \, mod(5)$, *pois os restos da divisão de* 25 *e* 10 *por* 5 *são iguais, no caso, o resto é igual a* 0. ♢

Quando a relação $a \equiv b \, mod(m)$ for falsa, dizemos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes módulo m. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$a \not\equiv b \, mod(m)$$

Exemplo 1.11. *Veja que* $11 \not\equiv 4 \, mod(3)$. *É fácil ver que os restos da divisão de* 11 *e* 4 *por* 3 *são diferentes.* ♢

Para verificar se dois números são congruentes módulo m não é necessário efetuar a divisão de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente verificar se a diferença entre os respectivos números é divisível por m. Veja o teorema.

Teorema 1.6. *Suponha que* a, b, *e* $m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Tem-se que* $a \equiv b \, mod(m)$ *se, e somente se,* m *divide* $(a - b)$.

Demonstração. Sejam $a = mq + r$ e $b = mQ + R$ as divisões euclidianas de a e b por m com $0 \leq r < m$, $0 \leq R < m$. Sem perda de generalidade podemos supor que $R < r$ (se o contrário ocorrer basta trocarmos os papéis de R e r). Se subtrairmos as equações temos

$$a - b = m(q - Q) + (r - R).$$

Temos por hipótese que $a \equiv b\, mod(m)$, assim $(r - R) = 0$, logo $m \mid (a - b)$. Reciprocamente, $m \mid (a - b)$ se, e somente se, $m \mid (r - R)$. Por ser $0 \leq |R - r| < m$, segue que m divide $(a - b)$ se $r - R = 0$, ou seja, $r = R$, e portanto $a \equiv b\, mod(m)$. □

A congruência módulo m é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros, isto é, reflexiva, simétrica e transitiva. O teorema abaixo verifica esta afirmação.

Teorema 1.7. *Seja m um inteiro positivo. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que:*

1. *$a \equiv a\, mod(m)$. (Propriedade Reflexiva)*
2. *Se $a \equiv b\, mod(m)$ então $b \equiv a\, mod(m)$. (Propriedade Simétrica)*
3. *Se $a \equiv b\, mod(m)$ e $b \equiv c\, mod(m)$, então $a \equiv c\, mod(m)$. (Propriedade Transitiva)*

Demonstração.

1) Se $a \equiv a\, mod(m)$ então $m \mid (a - a)$ pelo Teorema 1.6. Observando que $a - a = 0$ e que 0 é divisível por qualquer número, verifica-se que $a \equiv a\, mod(m)$.
2) Veja que a e b divididos por m deixam resto r e b e a divididos por m também deixam o mesmo resto r, ou seja, fazendo a divisão euclidiana de a e b por m temos $a = mk_1 + r$ e $b = mk_2 + r$ com $r \in [0, m - 1]$, assim como $a \equiv b\, mod(m)$ então $b \equiv a\, mod(m)$.
3) Fazendo a divisão euclidiana de a, b e c por m temos: $a = mk_1 + r_1$ com $r_1 \in [0, m - 1]$, da mesma forma temos que $b = mk_2 + r_2$ com $r_2 \in [0, m - 1]$, e finalmente $c = mk_3 + r_3$ com $r_3 \in [0, m - 1]$. Como $a \equiv b\, mod(m)$, obtemos $r_1 = r_2$ e de $b \equiv c\, mod(m)$ obtemos $r_2 = r_3$, logo $r_1 = r_3$, então por definição $a \equiv c\, mod(m)$. □

Veja agora algumas propriedades da Aritmética Modular.

Teorema 1.8. *Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Dessa forma temos:*

1. *Se $a \equiv b\, mod(m)$ e $c \equiv d\, mod(m)$, então $(a \pm c) \equiv (b \pm d)\, mod(m)$.*
2. *Se $a \equiv b\, mod(m)$ e $c \equiv d\, mod(m)$, então $a \cdot c \equiv b \cdot d\, mod(m)$.*
3. *Se $mdc(c,\, m) = 1$ e $ac \equiv bc\, mod(m)$, então $a \equiv b\, mod(m)$.*

Demonstração.

1) Como $a \equiv b\, mod(m)$ e $c \equiv d\, mod(m)$ então obtemos as seguinte equações, $a = mk + b$ e $c = mq + d$. Somando as equações temos $a + c = m(k + q) + (b + d)$ e nessas condições temos que $(a + c) \equiv (b + d)\, mod(m)$. Faremos a demonstração somente para o caso da soma, pois o caso da diferença é análogo.
2) Como $a \equiv b\, mod(m)$ e $c \equiv d\, mod(m)$ então obtemos as seguinte equações, $a = mk + b$ e $c = mq + d$. Se multiplicarmos as equações temos $ac = (mk + b)(mq + d)$ e ao desenvolver as multiplicações teremos $ac = m(kmq + kd + bq) + bd \Rightarrow ac \equiv bd\, mod(m)$.
3) Como $ac \equiv bc\, mod(m)$ obtemos a seguinte equação $ac - bc = mk$, com $k \in \mathbb{Z}$, colocando c em evidência temos $c(a - b) = mk$, como $mdc(c,\, m) = 1$ então m não divide c logo $m \mid (a - b)$ que pode ser escrito na forma $a \equiv b\, mod(m)$. □

Veja o próximo exemplo onde verificamos cada item do Teorema 1.8.

Exemplo 1.12. *Se* $5 \equiv 11\, mod(2)$ *e* $21 \equiv 3\, mod(2)$*, então pelo primeiro item temos que* $26 \equiv 14\, mod(2)$*. Se* $4 \equiv 7\, mod(3)$ *e* $5 \equiv 8\, mod(3)$*, então pelo segundo item temos que* $20 \equiv 56\, mod(3)$*. Se* $16 \equiv 10\, mod(3)$*, então* $8 \cdot 2 \equiv 5 \cdot 2\, mod(3)$*. Visto que* $mdc(2,3) = 1$*, então, segue do terceiro item que* $8 \equiv 5\, mod(3)$*.* ♢

2 O Problema dos Três Jarros

Nesta seção, verificamos uma generalização do Problema de Tartaglia, ou seja, analisamos se podemos ou não mensurar outros valores inteiros no intervalo fechado entre 1 e C. Apresentamos exemplos com e sem solução.

Primeiro introduzimos a notação necessária, a regra do despejo entre dois jarros e enunciamos o problema.

1. Denotamos por A, B e C os três jarros, sem marcas, em ordem crescente de capacidade.
2. Por conveniência utilizamos as respectivas letras A, B e C para denotar a capacidade inteira de cada jarro.
3. Representamos o despejo do jarro U para o jarro V com a notação $\xrightarrow{UV}$.
4. O despejo de um jarro para outro só é permitido quando o que recebe fica cheio ou quando o jarro que transfere fica vazio.

Agora estamos em condições de enunciar o Problemas dos três jarros:

Dado três jarros A*,* B *e* C *com capacidades inteiras satisfazendo* $A + B = C$ *e* C *litros de um determinado líquido. É possível mensurar* k *litros deste líquido utilizando somente os três jarros?*

Neste trabalho, após qualquer despejo, a distribuição do líquido entre os jarros é descrita por uma tripla (x, y, z) de inteiros tais que $0 \leq x \leq A$, $0 \leq y \leq B$, $0 \leq z \leq C$. Observe que $x + y + z = C$ em cada distribuição. Além disso, perceba que em cada distribuição sempre temos um jarro vazio ou um jarro completamente cheio.

Consideramos sempre como *distribuição inicial* a tripla $(0, 0, C)$.

Quando a capacidade de C for par, ou seja, $2n$ e o objetivo é mensurar n litros, temos o Problema de Tartaglia. Assim, pretende-se chegar na distribuição $(0, n, n)$.

Nesta seção, tentamos resolver o problema listando sequências de distribuições possíveis, segundo a regra, encontrando assim, uma que mensure um determinado valor desejado.

Exemplo 2.1. *Sejam os jarros* A*,* B *e* C *com capacidades* 3*,* 5 *e* 8 *litros respectivamente. Na distribuição inicial temos* $(0, 0, 8)$*, veja duas possíveis sequências de despejos que resolvem o problema de Tartaglia, ou seja, distribuição final* $(0, 4, 4)$*.*

1.

$$(0,0,8) \xrightarrow{CA} (3,0,5) \xrightarrow{AB} (0,3,5) \xrightarrow{CA} (3,3,2) \xrightarrow{AB} (1,5,2)$$
$$\xrightarrow{BC} (1,0,7) \xrightarrow{AB} (0,1,7) \xrightarrow{CA} (3,1,4) \xrightarrow{AB} (0,4,4)$$

2.

$$\begin{gathered}(0,0,8) \xrightarrow{CB} (0,5,3) \xrightarrow{BA} (3,2,3) \xrightarrow{AC} (0,2,6)\\ \xrightarrow{BA} (2,0,6) \xrightarrow{CB} (2,5,1) \xrightarrow{BA} (3,4,1) \xrightarrow{AC} (0,4,4)\end{gathered}$$

Observe que, se o objetivo fosse apenas mensurar o valor 4*, não haveria a necessidade de fazer o último despejo.*

$\diamondsuit$

Exemplo 2.2. *Sejam os jarros A, B e C com capacidades* 5*,* 7 *e* 12 *litros respectivamente. Deseja-se mensurar os valores* 1 *e* 3*.*

$$\begin{gathered}(0,0,12) \xrightarrow{CB} (0,7,5) \xrightarrow{BA} (5,2,5) \xrightarrow{AC} (0,2,10) \xrightarrow{BA} (2,0,10)\\ \xrightarrow{CB} (2,7,3) \xrightarrow{BA} (5,4,3) \xrightarrow{AC} (0,4,8) \xrightarrow{BA} (4,0,8) \xrightarrow{CB} (4,7,1)\end{gathered}$$

$\diamondsuit$

Nos dois exemplos anteriores os valores das capacidades dos jarros menores eram primos entre si, veja agora dois exemplos onde não temos essa característica.

Exemplo 2.3. *Sejam os jarros A, B, e C com capacidades* 5*,* 35 *e* 40 *litros respectivamente. Deseja-se mensurar os valores* 20 *e* 30*.*

$$\begin{gathered}(0,0,40) \xrightarrow{CB} (0,35,5) \xrightarrow{BA} (5,30,5) \xrightarrow{AC} (0,30,10)\\ \xrightarrow{BA} (5,25,10) \xrightarrow{AC} (0,25,15) \xrightarrow{BA} (5,20,15)\end{gathered}$$

$\diamondsuit$

No próximo exemplo, tentamos mensurar um determinado valor e não conseguimos.

Exemplo 2.4. *Sejam os jarros A, B e C com capacidades* 2*,* 8 *e* 10 *litros respectivamente. Deseja-se mensurar os valores* 4 *e* 7*.*

1ª tentativa:

$$\begin{gathered}(0,0,10) \xrightarrow{CA} (2,0,8) \xrightarrow{AB} (0,2,8) \xrightarrow{CA} (2,2,6) \xrightarrow{AB} (0,4,6) \xrightarrow{CA}\\ (2,4,4) \xrightarrow{AB} (0,6,4) \xrightarrow{CA} (2,6,2) \xrightarrow{AB} (0,8,2) \xrightarrow{BC} (0,0,10)\end{gathered}$$

2ª tentativa:

$$\begin{gathered}(0,0,10) \xrightarrow{CB} (0,8,2) \xrightarrow{BA} (2,6,2) \xrightarrow{AC} (0,6,4) \xrightarrow{BA} (2,4,4) \xrightarrow{AC}\\ (0,4,6) \xrightarrow{BA} (2,2,6) \xrightarrow{AC} (0,2,8) \xrightarrow{BA} (2,0,8) \xrightarrow{AC} (0,0,10)\end{gathered}$$

Mensuramos o valor 4 e, percebemos que não conseguiríamos mensurar o valor 7*, pois ao fazermos sequências despejos diferentes, vimos que em todas distribuições (x,y,z) temos apenas entradas pares, devido às capacidades dos jarros A e B.*

$\diamondsuit$

3 Resultado Principal

Nesta seção, verificamos que o Problema dos Três Jarros tem solução quando os valores das capacidades dos jarros menores forem primos entre si. Para tal verificação é necessário o algoritmo abaixo.

Algoritmo 3.1. *Entrada: Distribuição inicial* $(0,\ 0,\ C)$.
Saída: Sequência de distribuições encontradas.
Repita C-vezes
Passo 1*: Despeje o jarro C no jarro A e em seguida, despeje o jarro A no jarro B.*
Se o jarro B esta cheio, então
Passo 2*: Despeje o jarro B no jarro C e em seguida, despeje o Jarro A no jarro B.*

Vejamos como funciona o Algoritmo 3.1.

Exemplo 3.1. *Sejam os jarros A, B e C que comportam respectivamente* 3, 7 *e* 10 *litros. Vejamos que é possível medir qualquer quantidade inteira d no intervalo $1 \leq d \leq 10$ utilizando o Algoritmo* 3.1*. De fato, dado a distribuição inicial* $(0, 0, 10)$ *e aplicando o algoritmo temos a sequência de distribuições abaixo.*

Passo 1: $(0,0,10) \xrightarrow{CA} (3,0,7) \xrightarrow{AB} (0,3,7) \xrightarrow{CA} (3,3,4) \xrightarrow{AB} (0,6,4) \xrightarrow{CA} (3,6,1) \xrightarrow{AB} (2,7,1)$

Passo 2: $(2,7,1) \xrightarrow{BC} (2,0,8) \xrightarrow{AB} (0,2,8)$

Passo 1: $(0,2,8) \xrightarrow{CA} (3,2,5) \xrightarrow{AB} (0,5,5) \xrightarrow{CA} (3,5,2) \xrightarrow{AB} (1,7,2)$

Passo 2: $(1,7,2) \xrightarrow{BC} (1,0,9) \xrightarrow{AB} (0,1,9)$

Passo 1: $(0,1,9) \xrightarrow{CA} (3,1,6) \xrightarrow{AB} (0,4,6) \xrightarrow{CA} (3,4,3) \xrightarrow{AB} (0,7,3)$

Passo 2: $(0,7,3) \xrightarrow{BC} (0,0,10)$

Observe que ao atingirmos a distribuição $(0, 7, 3)$ *utilizando o Algoritmo* 3.1*, temos a ocorrência de todos os valores inteiros de* 1 *a* 10 *no jarro C.* $\diamondsuit$

O procedimento descrito no Exemplo 3.1 é essencialmente a demostração do Teorema 3.1 abaixo.

Teorema 3.1. *Sejam três jarros com capacidades A, B e C satisfazendo $A < B$ e $C = A+B$. Sendo os valores das capacidades de A e B primos entre si, então qualquer quantidade inteira d com $1 \leq d \leq C$ pode ser mensurada.*

Demonstração. Dado a distribuição inicial $(0, 0, C)$ aplique o Passo 1 do Algoritmo 3.1 até encher o jarro B. Visto que $mdc(A,\ B) = 1$ obtemos assim a distribuição $(r, B,\ C - Aq)$, donde r e q são inteiros positivos. Agora aplique o Passo 2 e obtemos a distribuição

$$(0, r,\ C - Aq + B) = (0, r,\ C - Aq + B + (A - A)) = (0, r,\ 2C - A(q + 1)).$$

Lembre que $C = A + B$. Note que até este momento o jarro C já assumiu os valores

$$C,\ C - A,\ C - 2A, \ldots,\ 2C - A(q + 1).$$

Agora observe que o volume do jarro C em cada uma das distribuições, dada pelo Algoritmo 3.1 é congruente módulo C a um dos inteiros

$$0, -A, -2A, -3A, \ldots$$

Visto que A e B são coprimos, temos que A e C também são coprimos (Corolário 1.1). Logo, todos os valores $0, -A, -2A, -3A, \ldots, -A(C-1)$ são diferentes módulo C (Teorema 1.8). Dessa forma temos que o conjunto

$$\{0\,mod(C),\ -A\,mod(C),\ -2A\,mod(C),\ -3A\,mod(C), \ldots,\ -A(C-1)\,mod(C)\}$$

é igual ao conjunto

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, C-1\}.$$

Portanto, é possível mensurar todas as quantidades entre 1 e C. □

Observe que são necessários $(C-1)$ despejos envolvendo o jarro C ao longo da resolução utilizando o Algoritmo 3.1 para obtermos a ocorrência de todos os inteiros no intervalo fechado entre 1 e C no jarro C; sendo este o critério de parada do algoritmo.

Veja agora um exemplo que utiliza apenas o Passo 1 do algoritmo para mensurar qualquer valor inteiro no intervalo fechado entre 1 e C. Isso ocorre quando a capacidade do jarro A é igual a 1.

Exemplo 3.2. *Sejam os jarros A, B e C que comportam respectivamente 1, n e $n+1$ litros. Mensuramos todos os inteiros no intervalo fechado entre 1 e $n+1$ usando o algoritmo.*

$$\begin{gathered}(0,0,n+1) \xrightarrow{CA} (1,0,n) \xrightarrow{AB} (0,1,n) \xrightarrow{CA} (1,1,n-1) \xrightarrow{AB} \\ (0,2,n-1) \xrightarrow{CA} (1,2,n-2) \xrightarrow{AB} (0,3,n-2) \xrightarrow{CA} (1,3,n-3) \xrightarrow{AB} \\ (0,4,n-3) \xrightarrow{CA} (1,4,n-4) \xrightarrow{AB} (0,5,n-4) \xrightarrow{CA} \cdots \xrightarrow{CA} (1,n,0)\end{gathered}$$

Como são feitos despejos de 1 em 1 do jarro C para o jarro A e do jarro A para o B, então ao atingirmos a distribuição $(1,n,0)$ todos os valores inteiros no intervalo fechado entre 1 e $n+1$ são mensurados sem utilizar o Passo 2. ♢

Note que para n ímpar neste última situação, temos a configuração necessária para o problema de Tartaglia, tal situação pode ser resolvida com $(n+1)$ despejos. Veja o exemplo.

Exemplo 3.3. *Sejam os jarros A, B e C que comportam respectivamente 1, 5 e 6 litros. Mensuramos todos os inteiros no intervalo fechado entre 1 e 6 utilizando o algoritmo.*

$$\begin{gathered}(0,0,6) \xrightarrow{CA} (1,0,5) \xrightarrow{AB} (0,1,5) \xrightarrow{CA} (1,1,4) \xrightarrow{AB} \\ (0,2,4) \xrightarrow{CA} (1,2,3) \xrightarrow{AB} (0,3,3) \xrightarrow{CA} (1,3,2) \\ (0,4,2) \xrightarrow{CA} (1,4,1) \xrightarrow{AB} (0,5,1) \xrightarrow{CA} (1,5,0)\end{gathered}$$

Note que para chegarmos na distribuição $(0,3,3)$ foram necessários 6 despejos, resolvendo o Problema de Tartaglia, e ao chegarmos na distribuição $(1,4,1)$ mensuramos todos os valores inteiros entre 1 e 6 no jarro C. ♢

Corolário 3.1. *Seja C um múltiplo de 4. Dados os jarros A, B e C com capacidades $(\frac{C}{2}-1)$, $(\frac{C}{2}+1)$ e C respectivamente. Dessa forma, qualquer quantidade inteira d no intervalo $1 \leq d \leq C$ pode ser mensurada.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1 basta verificar que A e B são coprimos, ou seja, $mdc(A\,,B) = 1$. Para isto, basta observar se existem x_0 e $y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $Ax_0 + By_0 = 1$. Tomando $x_0 = \dfrac{C}{4}$ e $y_0 = -\dfrac{C}{4} + 1$ teremos

$$A(\frac{C}{4}) + B(-\frac{C}{4} + 1) = (\frac{C}{2} - 1)(\frac{C}{4}) + (\frac{C}{2} + 1)(-\frac{C}{4} + 1) = 1.$$

e o resultado segue do Teorema 1.2.

□

Veja um exemplo numérico da situação acima.

Exemplo 3.4. *Sejam os jarros A, B e C que comportam respectivamente 7, 9 e 16 litros. Nessas condições, qualquer quantidade inteira d no intervalo $1 \leq d \leq 10$ pode ser mensurada, aja visto o Corolário 3.1. Para isso, basta observar se existem x_0 e y_0 tais que $7x_0 + 9y_0 = 1$. De fato, tomando $x_0 = 4$ e $y_0 = -3$ teremos*

$$7(4) + 9(-3) = 1$$

4 Recurso Computacional

Nesta seção elaboramos um programa que resolve em específico o Problema de Tartaglia. Para o leitor interessado, o *link* para fazer o download do mesmo se encontra no fim desta seção.

O programa é um software auto executável, ou seja, não há a necessidade de existir outros programas instalados no computador para que ele funcione (rode). Além disso, ele é gratuito em virtude de sua construção (implementação) ter sido feita pelo desenvolvedor intitulado *Visual Studio*, que utiliza a linguagem *Csharp*. Veja sua tela inicial na próxima figura.

Figura 1: Tela Inicial

A tela inicial apresenta duas abas, uma que descreve o problema a ser resolvido e outra que recebe os valores inteiros das capacidades do jarros A e B; automaticamente o programa completa o volume do jarro C. Após isso, deve-se clicar no botão solução, que mostrará a resolução do problema, ao longo de uma tabela, quando houver solução. Na próxima figura temos a resolução para jarro $A = 3$ litros e jarro $B = 7$ litros.

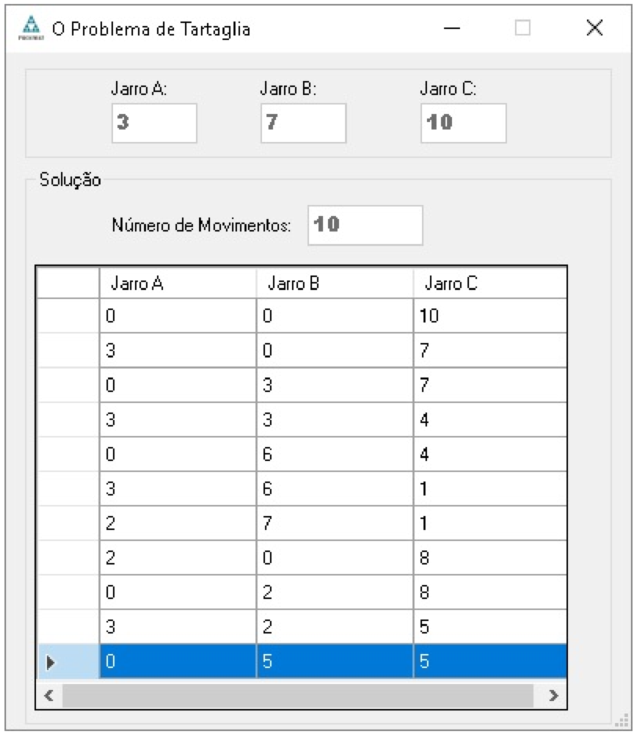

Figura 2: Capacidades 3, 5 e 8 litros

Observe que as linhas apresentadas pela resolução do programa são as distribuições de líquidos entre os jarros A, B e C; de acordo com a sequência de passos apresentados pelo Algoritmo 3.1. Como o objetivo do programa é resolver o problema de Tartaglia, então para jarro $A = 3$ e jarro $B = 5$ o programa termina na distribuição $(0, 5, 5)$. Para a utilização do programa, basta acessar o seguinte *link* abaixo.

https://drive.google.com/open?id=0BzZpCSQXdJBXNHJxeWNjVWx3N3c

5 Coordenadas Trilineares

Nesta seção, verificamos a relação entre o Problema dos Três Jarros com as Coordenadas Trilineares.

As Coordenadas Trilineares são as coordenadas dos vértices de uma grade formada por triângulos equiláteros que possui dois eixos, um na horizontal e outro na diagonal, como mostra a figura abaixo. Cada vértice (ponto) é denotado por (x, y, z), tais que x, y, z são, respectivamente, os volumes nos jarros A, B e C ao longo dos despejos em cada distribuição. No eixo diagonal ficam as quantidades que podem aparecer do jarro A, já no eixo horizontal temos as quantidades que podem aparecer no jarro B.

A utilização das Coordenadas Trilineares possibilita visualizar as possíveis distribuições no Problema dos Três Jarros segundo as regras já mencionadas, além de permitir chegar ao resultado desejado de forma otimizada, sem a necessidade de cálculos. A seguir, temos uma grade formada por triângulos equiláteros genérica.

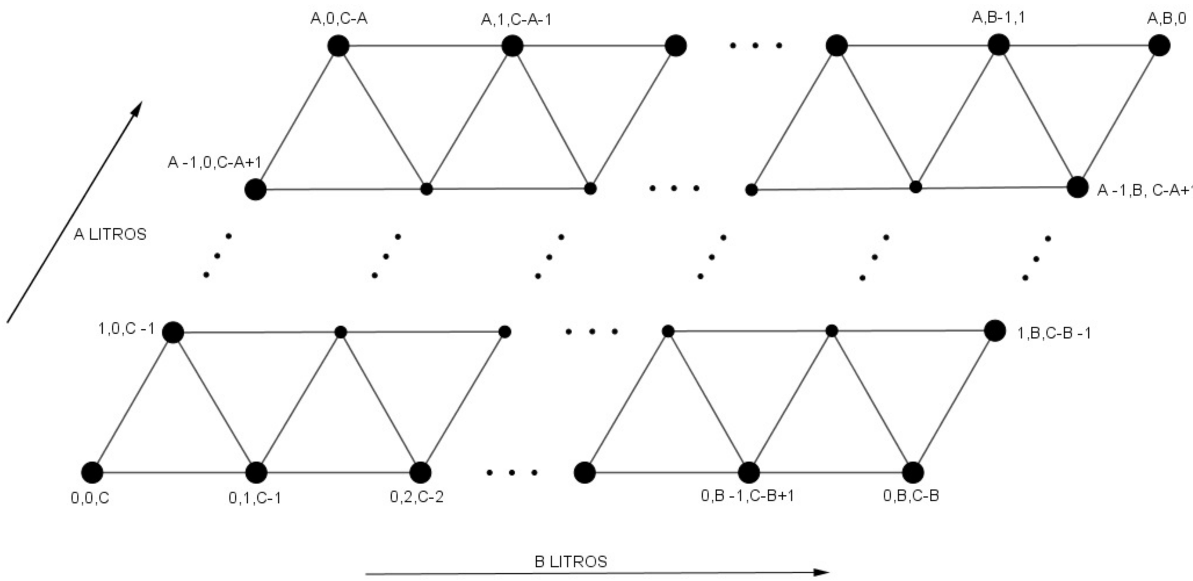

Figura 3: Jarros A, B e C

Perceba que nossa origem (distribuição inicial) é o ponto $(0, 0, C)$. Os pontos maiores, sobre os lados periféricos da grade são aqueles que correspondem às possíveis distribuições de líquido ao longo das soluções, pois somente neles, temos algum jarro vazio ou algum jarro completamente cheio, de acordo com as regras. Já os pontos menores, internos, representam distribuições que não são permitidas, pois neles não encontramos jarros cheios ou vazios.

Em seguida temos dois exemplos cujas capacidades de A e B são de valores primos entre si. No primeiro, vamos resolver o Problema de Tartaglia de duas formas e, no segundo, desejamos mensurar um determinado valor.

Exemplo 5.1. *Dado os jarros A, B e C com capacidades* 3, 5 *e* 8 *litros respectivamente. Na distribuição inicial temos* $(0, 0, 8)$ *e desejamos resolver o Problema de Tartaglia, ou seja, distribuição final* $(0, 4, 4)$*, veja a solução utilizando as Coordenadas Trilineares.*

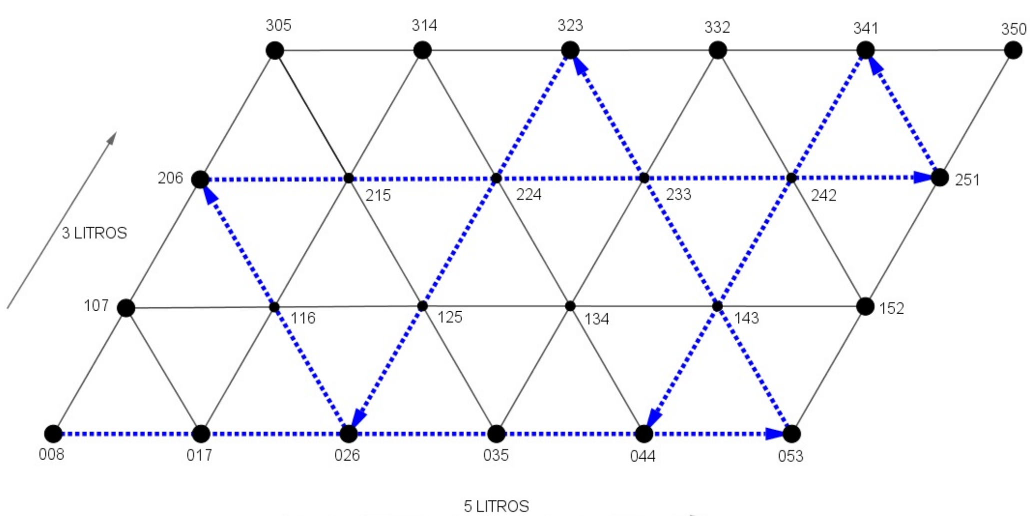

Figura 4: Jarros 3, 5 e 8 litros

A resolução em qualquer exemplo tem dois movimentos iniciais possíveis, ou pela direita na horizontal ou para cima na diagonal, nesse exemplo, com o auxílio de uma seta tracejada, o primeiro despejo foi na horizontal, de $(0, 0, 8)$ *para* $(0, 5, 3)$*, satisfazendo as regras.*

É fácil observar quais despejos foram realizados, seguindo o rumo da seta, a partir da distribuição $(0, 0, C)$*. Além disso, em todos os pontos, a coordenada* z *é formada pela operação:* $z = C - x - y$*.*

Contudo, não poderíamos seguir diretamente com a seta para a distribuição $(0, 4, 4)$ *por dois motivos, primeiro estaríamos quebrando a regra, pois ao fazermos o despejo do jarro* C *para o jarro* B *não teríamos um jarro vazio ou um totalmente cheio. E segundo, não teríamos como saber se de fato estaríamos despejando exatos* 4 *litros de* C *para* B*, pois os jarros não possuem marcações, como já dito anteriormente.*

Finalmente, é possível prever quais são os próximos despejos possíveis (pontos maiores), pelas orientações da seta, sendo um deles mais apropriado para otimizar a resolução. Veja a resolução do mesmo exemplo, mas começando pela diagonal.

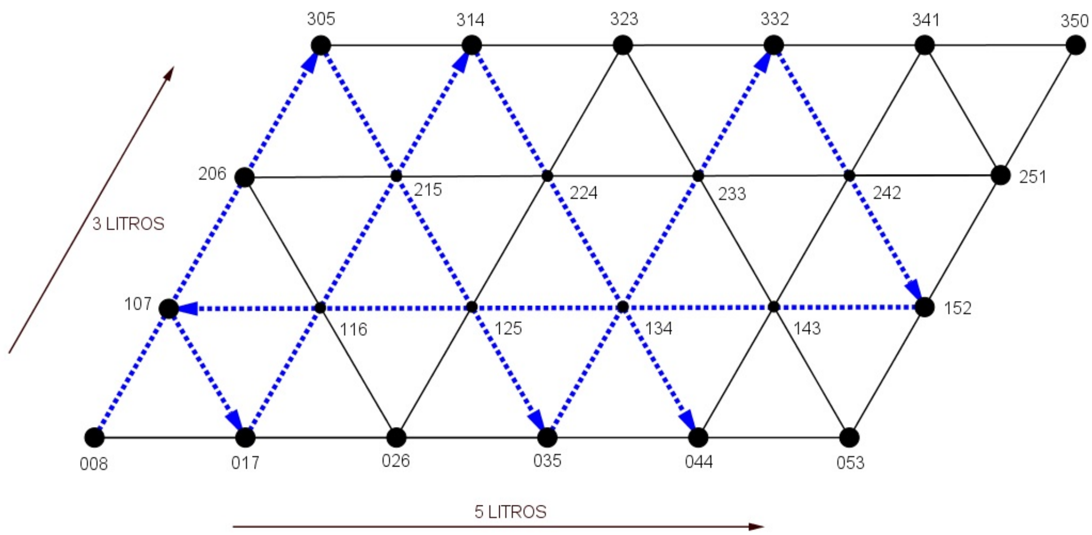

Figura 5: Jarros 3, 5 e 8 litros

♢

Exemplo 5.2. *Dado os jarros* A*,* B *e* C *com capacidades* 1*,* 5 *e* 6 *litros respectivamente. Veja como mensurar o inteiro* 3 *utilizando as Coordenadas Trilineares.*

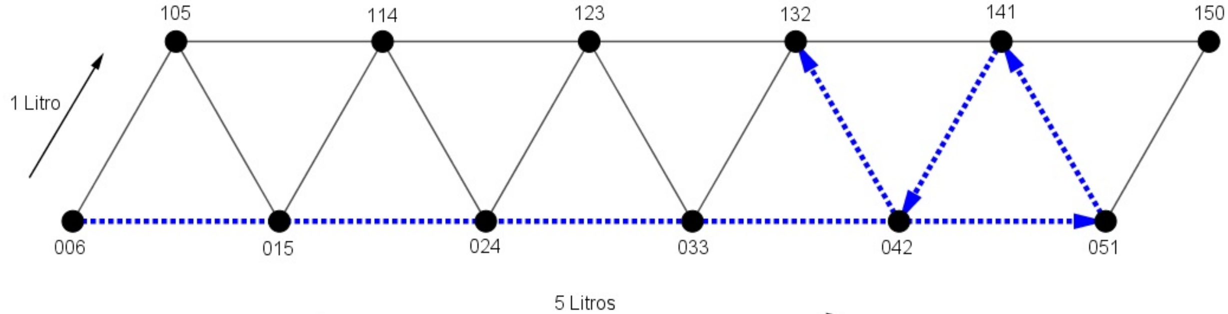

Figura 6: Jarros 1, 5 e 6 litros

♢

Vejamos agora dois exemplo onde as capacidades dos jarros menores não são valores primos si.

Exemplo 5.3. *Dado os jarros A, B e C com capacidades* 2*,* 6 *e* 8 *litros respectivamente. Veja como mensurar o inteiro* 4 *utilizando as Coordenadas Trilineares.*

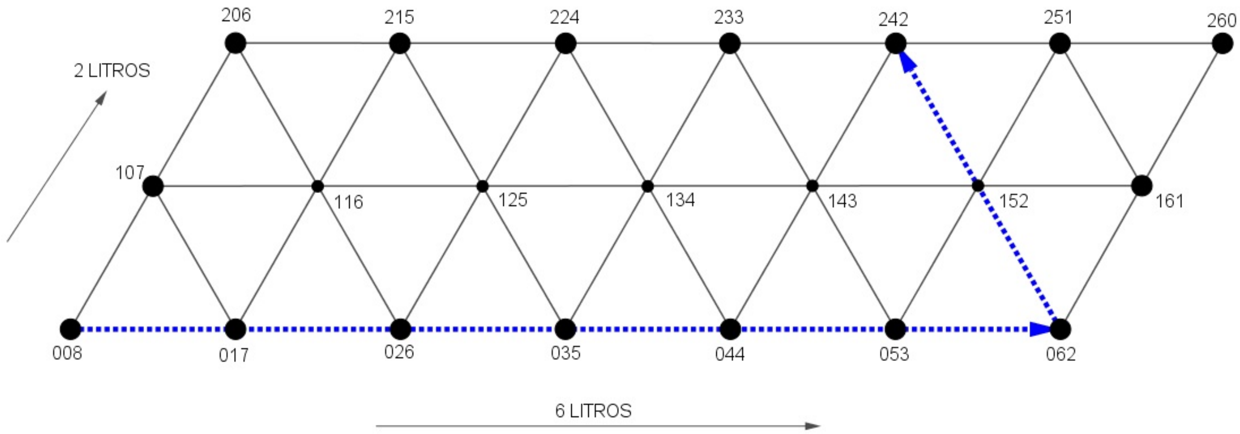

Figura 7: Jarros 2, 6 e 8 litros

♢

Vimos anteriormente que em algumas situações não conseguimos mensurar um determinado valor, como observado no Exemplo 2.4, observe-o utilizando as Coordenadas Trilineares.

Exemplo 5.4. *Sejam os jarros A, B e C com capacidades* 2*,* 8 *e* 10 *litros respectivamente. Veja que não conseguimos mensurar o inteiro* 7*.*

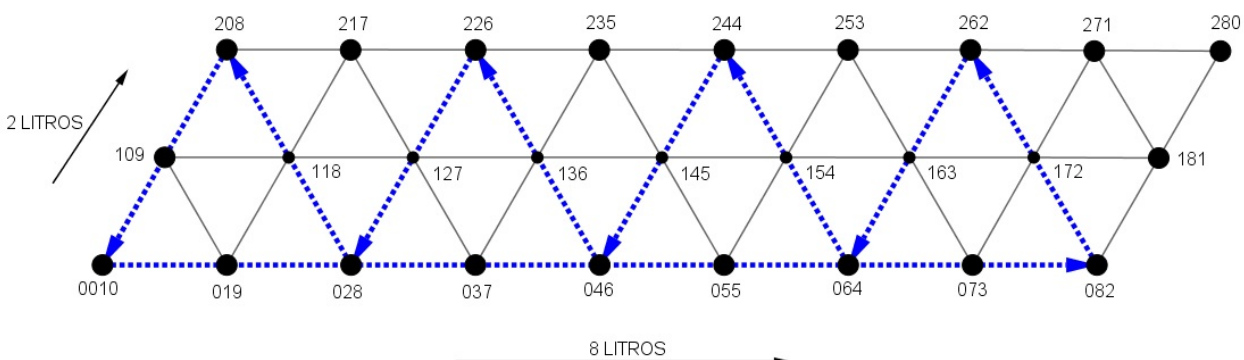

Figura 8: Jarros 2, 8 e 10 litros

O rumo natural da seta se orienta sempre para as mesmas distribuições (pontos), que possuem somente entradas pares e, dessa forma, nunca irá mensurar o valor 7 *e nenhum outro valor ímpar.* ♢

Finalmente, mostramos por meio das Coordenadas Trilineares que todos os valores inteiros no intervalo fechado entre 1 a C são alcançáveis (mensuráveis); quando os valores das capacidades de A e B são primos entre si. Basta perceber que o rumo natural da seta vai de encontro a todos os pontos maiores da grade. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 5.5. *Dado os jarros A, B e C com capacidades 3, 5 e 8 litros respectivamente. Veja como mensurar todos os valores inteiros no intervalo fechado entre 1 e 8 no jarro C. Observe o percurso da seta.*

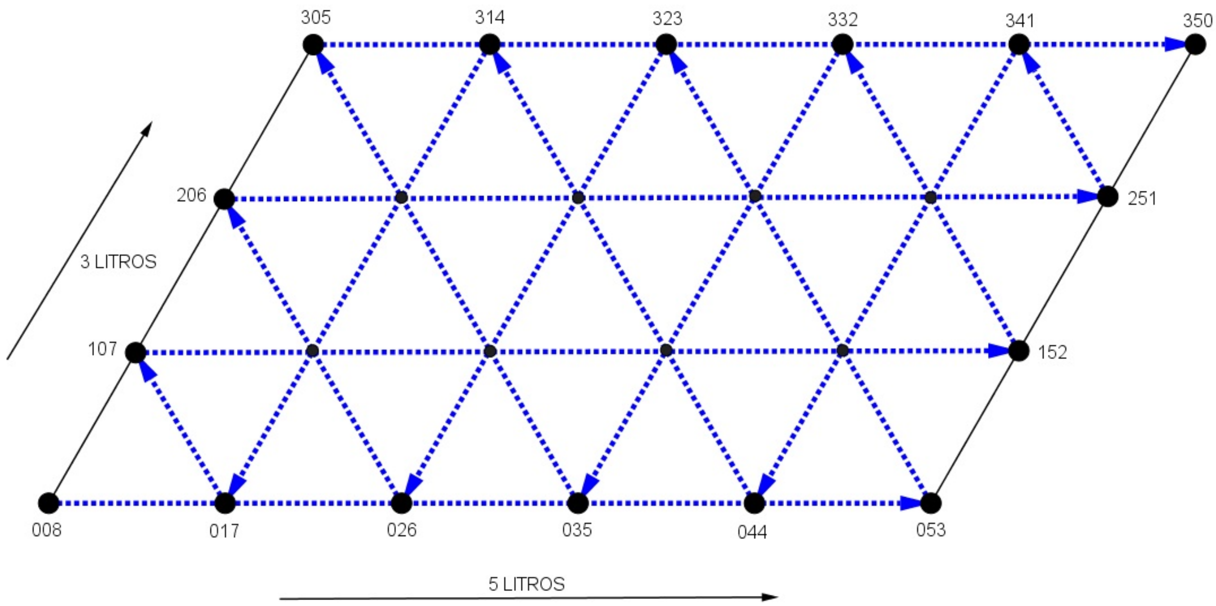

Figura 9: Mensurando todos os valores

♢

6 O Problema dos 2 Jarros

Existem outras versões do problema dos jarros. Uma dessas versões utiliza somente dois jarros, uma fonte de água abundante e um reservatório suficientemente grande.

Dado dois jarros de capacidades inteiras A e B, uma fonte de água abundante e um reservatório suficientemente grande. É possível mensurar determinada quantidade inteira $k \geq 1$?

A resposta é dada no próximo resultado.

Teorema 6.1. *É possível mensurar qualquer quantidade inteira $k \geq 1$ se, e somente se, a equação $Ax + By = k$ tem solução.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$. Denotando por $(+x)$ e $(-x)$ para quando enchermos ou esvaziarmos o reservatório com a capacidade do jarro A, e $(+y)$ e $(-y)$ para quando enchermos ou esvaziarmos o reservatório com a capacidade do jarro B. Dessa forma, o problema é modelado pela equação diofantina linear

$$Ax + By = k$$

que tem solução se, e somente se, $mdc(A, B)$ divide k (Teorema 1.2). Ou seja, o problema proposto tem solução se, e somente se, o máximo divisor comum das quantidades dos jarros A e B divide a quantidade a ser mensurada, k. □

O Teorema 6.1 indica uma forma de obter a solução pretendida. Dada a solução particular $(r,\, s)$ do problema $Ax + By = k$, procede-se da seguinte maneira: se $r \geq 0$ ($r < 0$) adicione (retire) r-jarros, e se $s \geq 0$ ($s < 0$) adicione (retire) s-jarros. veja o exemplo.

Exemplo 6.1. *Sejam os jarros A e B com capacidades 3 e 5 litros, deseja-se mensurar o valor 4 litros. Logo, podemos escrever a equação diofantina $3x+5y = 4$ que tem solução, pois o mdc(3, 5) divide 4. Nessas condições, temos que uma solução particular é o par $(3, -1)$, logo dizemos que basta despejarmos três jarros de capacidade A e retirarmos e um jarro de capacidade B para termos o volume 4 mensurado. Além disso, qualquer par formado pelos valores x e y e o inteiro t na forma abaixo também mensuram o valor 4.*

$$x = 3 + 5t$$
$$y = (-1) - 3t$$

Dessa forma, para $t = 1$ temos que o par $(8, -4)$ que também satisfaz a equação, mensurando o valor 4, nesse caso, teríamos que encher oito vezes o reservatório com a capacidade A e retirarmos quatro vezes a capacidade B. $\diamondsuit$

Ademais, existem situações que não têm soluções, ou seja, valores que não podem ser mensurados dependendo das capacidades dos jarros A e B.

Exemplo 6.2. *Sejam os jarros A e B com capacidades 3 e 6 respectivamente, deseja-se mensurar o valor 7 litros. Logo, pode-se até escrever a equação $3x + 6y = 7$, mas veja que o mdc(3, 6) não divide 7, e portanto a equação não tem solução como já estudado, nessas condições, não conseguiremos mensurar a quantidade 7 litros.*

7 Considerações Finais

Como vimos, o assunto aqui tratado pode ter uma relevância significativa no processo de ensino/aprendizagem de Matemática, já que aborda temas importantes relacionados à Teoria do Números, como Máximo Divisor Comum, Equações Diofantinas e Congruências. Além disso, o tema da pesquisa pode ser tratado de forma construtiva e lógica, aguçando a curiosidade dos alunos por meio de experiências simples e tangíveis, sem a necessidade de técnicas matemáticas abstratas. Nessas condições, aumenta-se a possibilidade dos alunos participarem de forma perspicaz no desenvolvimento e solução do assunto abordado, situação essencial para uma absorção efetiva do conhecimento.

Outro fato percebido é a importância de uma resolução construtiva, pois nela é apresentado um *algoritmo* para os alunos e, no nosso caso, um algoritmo de certa forma simples, que, por sua vez, possibilita a abordagem do tema em qualquer nível de ensino, seja ele fundamental, médio ou superior. Desse modo, oportuniza o aprendizado e a organização de pensamentos dos alunos, para chegar a solução de um problema proposto Por fim, levando em consideração o mundo tecnológico em que vivemos, a abordagem do tema no software desenvolvido é de grande valia para os estudantes, pois aborda o tema de uma maneira mais interativa.

8 Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a CAPES e aos colaboradores da UFSJ, em especial os professores, por me ajudarem a tornar possível um sonho, que por vezes parecia tão distante, dando-nos todo suporte possível para um aprendizado real e de qualidade.

Agradeço a força maior que nos rege nesse planeta, dando-me sabedoria e saúde para caminhar até aqui.

Agradeço aos meus pais pelo apoio, em especial a minha mãe Maria Darci Aguiar de Oliveira, por sempre insistir em dizer que eu era capaz e jamais duvidar de mim.

Agradeço aos colegas de sala, tão importantes no suporte emocional e motivacional, em especial Eduardo Estevão e Frederico Ferreira pelos momentos juntos vividos, começamos colegas e terminamos grandes amigos.

Agradeço a todos meus amigos, em especial Bruna Paula, Everton Márcio, Gleydson Ferreira, Guilherme Cruz, Guilherme Brito, Gustavo Peixoto, Helbert Cristelli, Luis Fernando Braúlio, Renato Carneiro, Rodnei Eduardo, Pedro Ferreira e Tiago Ramos, pelo apoio durante esse tempo de estudo.

Agradeço aos professores da época de graduação, Dr. Jamil Ferreira e Dr. Luiz Gustavo Carneiro, pelo apoio, motivação e confiança, tanto no passado como agora. Com eles ao meu lado a confiança sempre foi maior.

Agradeço a instituição COOPVEST por sempre confiar e acreditar em meu trabalho como professor, levando-me a galgar por sonhos maiores.

Por fim, um agradecimento especial ao meu orientador, Dr. Marcelo Oliveira Veloso, pela paciência, dedicação e ensinamentos em prol da conclusão deste trabalho final.

Referências

[1] Ian Stewart, *Incríveis passatempos matemáticos*, Ed. Zahar, p.117, Rio de Janeiro, 2010.

[2] Abramo Hefez, *Aritmética*, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[3] Jamil Ferreira, *A Construção dos Números*, SBM, Coleção Textos Universitários, 3ª Edição, 2013.

[4] Abramo Hefez; *Elementos de Aritmética.*, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[5] Alexander Bogomolny, *The Three Jugs Problem. Introduction and a story from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* http://www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml, Acesso em 04 de agosto de 2017.

[6] Alexander Bogomolny, *Water puzzle, experimental math* - Second JavaScript from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Disponível em: http://www.cut-the-knot.org/water2.shtml, acesso em 04 de agosto de 2017.

[7] CodeChef Discuss, *Algorithm of Pouring Water.* Disponível em: https://discuss.codechef.com/questions/22862/algorithm-of-pouring-water, acesso em 30 de agosto de 2017.

[8] César Guilherme de Almeida, *O Problema dos 3 Potes D'água*, Série de Procedimentos da Sociedade Brasileira de Matemática Computacional e Aplicada, Rio Grande do Norte, Volume 3, Número 1, outubro de 2014.