Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Os números inteiros: construção histórica e as dificuldades atuais em sala de aula

Neander Medeiros Rios

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

São José dos Campos

Julho, 2017

Título: *Os números inteiros: construção histórica e as dificuldades atuais em sala de aula*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Julho, 2017

Rios, Neander Medeiros

Os números inteiros: construção histórica e as dificuldades atuais em sala de aula, Neander Medeiros Rios – São José dos Campos, 2017.

IX, 48 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

The integer numbers: historical construction and the current difficulties in the classroom.

História da Matemática Números inteiros Dificuldades de aprendizagem

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Carlos Marcelo Gurjão de Godoy

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

NEANDER MEDEIROS RIOS

OS NÚMEROS INTEIROS: CONSTRUÇÃO HISTÓRICA E AS DIFICULDADES ATUAIS EM SALA DE AULA

Presidente da banca: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Banca examinadora:

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Data da Defesa: 06 de julho de 2017

"Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura" — HERMANN HANKEL

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pois foi Ele quem me proporcionou tudo o que tenho hoje. Foi por meio dEle que me foi possível trilhar a caminhada do PROFMAT.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama, pela paciência e orientação em tempo oportuno.

Aos professores do PROFMAT que muito me auxiliaram na construção de novos conhecimentos e aos colegas de turma que foram parte fundamental na motivação e em tornarem as sextas-feiras muito mais agradáveis.

À minha família que em tudo me encoraja, sempre mostrando-se presente e envolvida.

À minha noiva Idala, que pacientemente compreendeu cada estágio da caminhada.

E, finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro durante a realização do curso.

RESUMO

O presente trabalho apresenta o processo histórico de construção e aceitação dos números negativos, com a finalidade de identificar em tal processo as dificuldades encontradas por importantes matemáticos e que, ainda hoje, permeiam as salas de aula. Desta forma, inicialmente, apresenta-se o que se tem entendido atualmente como as principais dificuldades encontradas pelos alunos no que diz respeito à temática. Na sequência, de forma resumida, encontramos o processo histórico de formalização e aceitação dos números negativos, destacando alguns dos principais obstáculos enfrentados por importantes matemáticos envolvidos neste processo. Faz-se a construção dos números inteiros a partir da estrutura aritmética dos naturais e do conceito de relações de equivalência. E, então, busca-se um comparativo entre as dificuldades presentes no processo histórico e, atualmente, em sala de aula, com a finalidade de disponibilizar ao professor um material de consulta para a utilização da história da matemática como técnica didática na superação das dificuldades relacionadas aos números inteiros, mais especificamente aos negativos.

Palavras Chaves: História da Matemática, Números inteiros, dificuldades de aprendizagem.

ABSTRACT

The present work presents the historical process of construction and acceptance of negative numbers in order to identify the difficulties encountered by leading mathematicians and that still permeate classrooms. Thus, initially, it is presented what is understood currently as the main difficulties encountered by students with regard to the subject. After that, in short, we find the historical process of formalization and acceptance of negative numbers, highlighting some of the main obstacles faced by leading mathematicians involved in this process. It is shown the construction of the integers from the arithmetic structure of natural numbers and from the equivalence relations concept. At last, it is displayed a comparison between the existing difficulties in the historical process and, currently, in the classroom, in order to make available to the teacher some material for the use of the history of mathematics as teaching technique in overcoming difficulties related to integers, more specifically to the negative numbers.

Keywords: History of Mathematics, Integer numbers, Learning difficulties.

SUMÁRIO

1

INTRODUÇÃO

Conforme encontramos em Glaeser (1985), "um dos mais importantes objetivos da didática da Matemática é determinar os obstáculos que se opõem a compreensão e ao aprendizado dessa ciência."

As dificuldades atuais em sala de aula, na temática do conjunto dos números inteiros, mais especificamente no tratamento dos números negativos, podem ser facilmente percebidas, ainda que em uma turma da 3^a série do ensino médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam algumas destas dificuldades, das quais selecionamos:

> - conferir significado às quantidades negativas;
> - perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais - por exemplo, é possível "adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado", como também é possível "subtrair um número de 2 e obter 9". (Brasil, 1998, p.98-99)

Comparando estas dificuldades ao que Glaeser (1985) traz em seu artigo "Epistemologia dos números negativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática", notamos que os obstáculos epistemológicos por ele apresentados, tais como: dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas e estagnação no estágio das operações concretas (dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos), estão intimamente ligados às dificuldades encontradas na atualidade.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar aos professores de matemática um breve resumo histórico do processo de formalização e aceitação dos números negativos, apresentar a construção do conjunto dos números inteiros a partir da estrutura algébrica do conjunto dos números naturais e do conceito de relações de equivalência e, assim, abrir espaço para uma reflexão sobre as semelhanças encontradas nas dificuldades atuais de nossos alunos e aquelas enfrentadas por importantes matemáticos integrantes deste processo.

Em relação à estrutura da dissertação, o texto está organizado em quatro capítulos.

No primeiro capítulo realizamos, com base no que está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, o levantamento das principais dificuldades encontradas pelos alunos da educação básica no que diz respeito ao conjunto dos números inteiros.

No capítulo dois, é apresentado um resumo histórico da formalização e aceitação dos números negativos, sendo levantados alguns dos principais obstáculos epistemológicos enfrentados por importantes matemáticos que fizeram parte deste processo.

O capítulo três traz a construção axiomática dos números naturais, para então apresentar a construção do conjunto dos números inteiros a partir das estruturas algébricas dos naturais, através das noções básicas de relações de equivalência.

Por fim, o capítulo quatro apresenta as considerações finais, relacionando as dificuldades dos alunos da educação básica atual, com aquelas enfrentadas pelos matemáticos que participaram do processo de aceitação dos números negativos.

Desta forma, ao professor de matemática, é possível compreender que é natural ao aluno ter tais dificuldades e, buscar na história da matemática, como técnica didática, e na construção formal do conjunto dos números inteiros, caminhos para ultrapassar tais dificuldades.

2

EDUCAÇÃO: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo tem como finalidade a apresentação do que está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática, para os anos finais do ensino fundamental, com relação aos números inteiros.

2.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: PCNS

Da necessidade de se construir uma referência curricular nacional para a educação básica, que possa ser discutida e servir como base para as diferentes propostas regionais, sejam das esferas estaduais ou municipais, surgem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

> A abrangência nacional dos Parâmetros Curriculares Nacionais visa criar condições nas escolas para que se discutam formas de garantir, a toda criança ou jovem brasileiro, o acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania para deles poder usufruir. (Brasil, 1998, p.49)

Desta forma os PCNs constituem-se em uma proposta curricular norteadora das decisões regionais e locais sobre os currículos a serem adotados pelas redes de educação, escolas e professores, não sobrepondo-se à diversidade e particularidades de cada região do país.

Divido nas tês etapas da educação básica, encontramos os PCNs para os anos iniciais do ensino fundamental (primeiro e segundo ciclos), para os anos finais do ensino fundamental (terceiro e quarto ciclos) e para o ensino médio. E, em cada uma destas etapas, sua divisão entre as áreas do conhecimento inerentes a cada uma delas.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros.
>
> Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. (Brasil, 1998, p.15)

2.2 OS NÚMEROS INTEIROS NOS PCNS

De acordo com os PCNs o conhecimento dos números é construído pelos alunos por meio do seu contato com estes como instrumentos no processo de resolução de problemas e como objetos de estudo em si mesmos, considerando neste ponto suas inter-relações, propriedades e a maneira como historicamente foram construídos.

Se tratando do conjunto dos números inteiros em seu processo histórico de construção, Glaeser (1985) aponta que foram necessários mais de 1500 anos para sua efetiva compreensão conceitual e que os matemáticos, durante todo esse tempo, trabalharam com números negativos, com espantosas lacunas. E é nesse sentido que os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam também que, na escola, o estudo dos números inteiros é cercado por dificuldades e os resultados obtidos no processo de ensino e aprendizagem de tal temática têm sido insatisfatórios.

Os PCNs trazem então uma relação das principais dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo dos números inteiros:

> - conferir significado às quantidades negativas;
> - reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
> - reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
> - perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais - por exemplo, é possível “adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado”, como também é possível “subtrair um número de 2 e obter 9”;
> - interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo).
>
> (Brasil, 1998, p.98)

Ainda conforme os PCNs, o trabalho pedagógico pautado na memorização de regras para efetuar cálculos não permite ao aluno a compreensão dos números inteiros como uma extensão do conjunto dos números naturais. E, apesar de sugerir que sejam desenvolvidas com os alunos atividades práticas que tenham como ponto de partida o conhecimento dos números naturais e as noções intuitivas dos números negativos presentes em anos anteriores, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que

> ao buscar as orientações para trabalhar com os números inteiros, deve-se ter presente que as atividades propostas não podem se limitar às que se apoiam apenas em situações concretas, pois nem sempre essas concretizações explicam os significados das noções envolvidas. É preciso ir um

> pouco além e possibilitar, pela extensão dos conhecimentos já construídos para os naturais, compreender e justificar algumas das propriedades dos inteiros. (Brasil, 1998, p.100)

2.3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam a História da Matemática como um importante recurso para o processo de ensino e aprendizagem.

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (Brasil, 1998, p.42)

É possível, por meio da História da Matemática, que no processo de construção do seu conhecimento, o aluno tenha esclarecidas ideias inerentes ao tema estudado, respondendo alguns dos "porquês" e, assim, desenvolva um olhar mais crítico sobre os objetos do conhecimento. Entretanto, a História da Matemática não pode ser vista como um simples rol de fatos, datas e nomes a serem memorizados e que seja necessário que o professor a apresente para todos os conteúdos desenvolvidos. Deve ser vista, antes de tudo, como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conteúdos.

3 HISTÓRIA DOS NÚMEROS NEGATIVOS

3.1 INTRODUÇÃO

Segundo Anjos e Sá (2011), há na trajetória histórica dos números duas categorias de construção: uma que tem sua origem por motivação externa ou das atividades de contagem e medida e outra que tem sua origem interna ou das necessidades da própria matemática. Os números negativos têm sua trajetória pautada na segunda motivação, ou seja, das necessidades da própria matemática mais especificamente nas manipulações algébricas.

Seguiremos neste capítulo a mesma linha de desenvolvimento apresentada em Anjos e Sá (2011), o qual apresenta o processo histórico de construção do conceito de números negativos e sua aceitação, dividindo a história em Antiguidade, Idade Média, Idade Moderna e Idade Contemporânea.

3.2 NÚMEROS NEGATIVOS NA ANTIGUIDADE

Não se sabe ao certo, dentre as grandes civilizações da Idade Antiga, em que momento surgem os números negativos. Em Eves (2011), encontramos que na civilização babilônica "há tábuas astronômicas do século III a.C. que fazem uso explícito da regra de sinais na multiplicação" (EVES, 2011, p.63). Entretanto, (HOYRUP, 2002, p.294-296, apud MEDEIROS E MEDEIROS, 2007, p.164) mostra que tal alegação é um engano.

Entre os chineses, Boyer (1974) aponta como significativo o capítulo 8 da obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* (séc. III a.C.), um dos mais antigos textos e talvez o mais influente livro de matemática chinês, contendo 246 problemas sobre a mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos retângulos. Tal capítulo apresenta tanto a utilização de números positivos quanto de negativos como soluções de problemas sobre equações lineares.

Na Grécia antiga, um dos matemáticos que apesar de não ter feito referência alguma a utilização dos números negativos, desempenhou um importante papel no desenvolvimento da álgebra, foi Diofanto de Alexandria. Segundo Eves (2011), Diofanto escreveu três importantes trabalhos: *Aritmética*, *Sobre números poligonais* e *Porismas*. Foi entretanto, segundo Glaeser (1985), no início do livro 1 dos 6 que restaram dos 13 livros da obra *Aritimética* que Diofanto, ainda que implicitamente, fez referência às regras de sinais da multiplicação entre números negativos, dizendo que “o que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta” (DIOPHANTES, 1959, apud GLAESER, 1985, p.47).

3.3 NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE MÉDIA

Segundo Anjos e Sá (2011), entre 200 d.C. e 1200 a civilização de Alexandria influenciou os hindus e, consequentemente, seu desenvolvimento matemático. Os hindus, conforme encontramos em Anjos e Fossa (2007), obtiveram a apreciação clara dos números negativos como entidades independentes, usando inclusive, respostas finais de problemas.

Segundo Boyer (1979), Brahmagupta, importante matemático hindu, que viveu na Índia central, no século VII d.C., trouxe à álgebra importantes contribuições, mais altas do que suas regras de mensuração, pois em sua obra encontramos soluções gerais para equações quadráticas, incluindo duas raízes mesmo quando uma delas é negativa e, também, a aritmética sistematizada do zero e dos números negativos, pela primeira vez.

Bháskara, outro importante matemático hindu segundo Eves (2011), em seu trabalho intitulado *Siddhanta S'iromani* (“diadema de um sitema astronômico”), mostrou progressos com relação ao trabalho de Brahmagupta. Mas, suas obras mais importantes são o *Lilavati* e o *Vija-Ganita*, nos quais, segundo Anjos e Sá (2011), “encontramos numerosos problemas sobre os tópicos mais utilizados pelos hindus como equações lineares e quadráticas” (ANJOS E SÁ, 2011, p.4). Em um desses problemas, Bháskara, ao resolver uma equação quadrática, encontrou as raízes $x = 50$ e $x = -5$, porém considerou o segundo valor inadequado, uma vez que as pessoas não aceitavam ainda soluções negativas. Ele próprio, afirmava que as raízes negativas não podiam existir, uma vez que um número negativo não é um quadrado. Entretanto, uma vez introduzidos, os números negativos foram usados de forma prática cada vez melhor no cálculo.

3.4 NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE MODERNA

Anjos e Sá (2011) relatam que, apesar da presença dos números negativos nas obras de Brahmagupta, muitos matemáticos europeus, nos séculos XVI e XVII, consideravam os números negativos como falsos ou impossíveis quando estes apareciam em seus cálculos. Exemplo disto é o matemático Simon Stevin (1540-1620) que, ao longo de sua obra, trata abundantemente dos números negativos como *artifícios de cálculo*, porém quando sente a necessidade de interpretar as raízes negativas de uma equação, faz uso de uma engenhosa preposição afirmando, serem as raízes negativas da equação, raízes positivas obtidas pela substituição de x por $(-x)$, ou seja, se -2 é a raiz de uma equação $x^2 - px = q$, isto implica que $+2$ é raiz de $(-x)^2 + px = -q$. Tal postura apresenta o que Glaeser (1985), chama de *sintoma de evitação.*

Outro matemático que assumiu tal postura foi Michael Stifel. Em sua obra *Arithmetica integra*, uma das mais importantes de todas as álgebras alemãs do século XVI, trás como aspecto mais importante o tratamento dos números negativos e, ainda que conhecesse muitíssimo bem as propriedades dos números negativos, recusou-se a aceitá-los como raízes de uma equação, chamando-os de "*numeri absurdi*". Tal como fez Girolamo Cardano (1501-1576) que, mesmo utilizando os números negativos, presentes em sua obra *Ars magna*, chamava-os de "*numeri ficti*" (BOYER, 1974).

Além destes, outros matemáticos dos séculos XVI e XVII não aceitavam os números negativos como mais do que meros símbolos e, os que o aceitavam, não os admitiam como raízes de equações. (ANJOS e SÁ, 2011)

> Pierre de Fermat (1601-1665), por exemplo, fez com que seu amigo Jacques de Billy (Fermat, 1891) redigisse conselhos sobre o comportamento a adotar diante de uma raiz "falsa" em uma equação diofantina. Ele propôs um método para obter dela, em alguns casos, uma solução "aceitável". (GLAESER, 1985, p.54-55)

Apesar de os números negativos aparecerem naturalmente nos trabalhos de cunho científico, aceitos por sua eficácia do cálculo, É nos trabalhos de cunho pedagógico que se manifestam os apuros (GLAESER, 1985). Colin MacLaurin, em seu trabalho intitulado "Tratado dos fluxos" (1742), escreve: "o uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas consequências difíceis de admitir, em princípio, e que propiciara ideias aparentemente sem qualquer fundamento real". (MACLAURIN, 1742, apud GLAESER, 1985, p.58)

Entretanto, em seu trabalho "Tratado da Álgebra" (1748), obra de referência na Grã-Bretanha, MacLaurin apresenta as quantidades negativas da seguinte forma:

> Chamam-se quantidades positivas, ou afirmativas, as que são precedidas do sinal $+$, e negativas, as que são precedidas do sinal $-$. Para se ter uma ideia clara e exata desses dois tipos de quantidades, deve-se notar que toda quantidade pode entrar num cálculo algébrico, acrescentada, ou subtraída, ou seja, como aumento, ou como diminuição; ora, a oposição que se observa entre aumento e diminuição ocorre na comparação das quantidades. Por exemplo: entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o do dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada à direita, e uma linha traçada à esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que, quando a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor. (MACLAURIN, 1748, apud GLAESER, 1985, p.59-60)

Como vemos no trecho acima, apesar de MacLaurin só admitir quantidades negativas em comparação e nunca isoladamente, suas ideias foram de fundamental importância para que se caminhasse rumo à aceitação dos números negativos.

Leonhard Euler (1707-1783), um dos mais destacados matemáticos do século XVIII, fazia uso dos números negativos com total destreza, sem porém levantar qualquer questionamento sobre a legitimidade de suas construções. Entretanto, em uma obra destinada a principiantes, sentindo a necessidade do viés pedagógico, foi obrigado a oferecer explicações quanto à regra de sinais. Glaeser (1985) apresenta no trecho que se segue a argumentação utilizada por Euler, fazendo uma análise de cada uma delas.

> 1. A multiplicação de uma *dívida* por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma de dívida de $3a$ escudos. Logo $b \times (-a) = -ab$.
>
>   — Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma *operação externa*. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.
>
> 2. Por comutatividade, Euler deduz daí que $(-a) \times b = -ab$.
>
>   — Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de a escudos?
>
> 3. Resta determinar o que é o produto $(-a) \times (-b)$.
>
>   — É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto de decidir entre $+ab$ e $-ab$. Como $(-a) \times b$ já vale $-ab$, a única possibilidade restante é de que $(-a) \times (-b) = +ab$. (GLAESER, 1985, p.64-65)

Notamos no trecho em questão que Euler não tinha conhecimento suficiente para justificar convincentemente os resultados expostos. No item 3, por exemplo, claramente percebe-se que não foram apresentados argumentos suficientes para provar ou mesmo justificar que *negativo* por *negativo* é igual a *positivo*.

O comportamento de Euler, demonstra o que Boyer (1979) expõe no trecho que se segue:

> Os textos de álgebra do século dezoito ilustram uma tendência a dar ênfase crescente a algoritmos, ao passo que ao mesmo tempo perdurava uma considerável incerteza quanto à base lógica do assunto. A maior parte dos autores achava necessário demorar-se longamente sobre as regras que governam a multiplicação de números negativos e alguns rejeitavam categoricamente a possibilidade de multiplicar dois números negativos. (BOYER, 1979, p. 337-338)

Segundo Glaeser (1985), o texto que melhor expressa a confusão que viveu-se ao final do século XVIII, encontra-se no artigo *Negativo* que Jean Rond D'Alembert (1717-1783) escreveu para a Enciclopédia de Diderot:

> As quantidades negativas são o contrário das positivas: onde termina o positivo começa o negativo.
>
> Deve-se confessar que não é fácil fixar a ideia das quantidades negativas e que algumas pessoas engenhosas chegaram a contribuir para confundi-las, pelas noções pouco exatas que divulgaram. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conhecer. (GLAESER, 1985, p.73)

3.5 NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE CONTEMPORÂNEA

Segundo Glaeser (1985), os números negativos, na metade do século XIX, haviam conquistado a condição de igualdade com os números positivos. A compreensão das propriedades aditivas havia sido satisfeita, entretanto, a regra dos sinais na multiplicação dos números negativos isolados ainda necessitava de uma justificativa aceitável.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em sua obra publicada em 1821, um curso destinado à Escola Politécnica, compara os símbolos $+$ e $-$ a adjetivos que, precedendo um número, indicariam, respectivamente, grandezas a serem aumentas (quantidades positivas) e grandezas a serem diminuídas (quantidades negativas). Tal argumento, conforme Glaeser (1985), surge como semente de uma confusão entre os sinais ($+$ ou $-$) operatórios e predicativos, uma vez que o modelo metafórico apresentado (positivo = aumento; negativo = diminuição), apesar de facilitar a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação.

Apesar de inicialmente cometer a confusão entre sinais operatórios e predicativos, Cauchy busca formalizar a multiplicação, sem evocar a modelos metafóricos ou concretos, definindo a regra de sinais para a multiplicação. Entretanto, a transposição do estágio "concreto" para o ponto de vista "formal", mudança essencial na construção da teoria dos números negativos, deu-se na obra de Herman Hankel (1839-1873), publicada em 1867.

Na "Teoria dos sistemas dos números complexos", Hankel faz a exposição formal da teoria dos números complexos, sem dar-se conta, entretanto, que eliminou a tensão existente desde Diofanto. Foi apenas de passagem, em algumas de suas demonstrações, que eliminou todas as dúvidas existentes relacionadas aos números negativos.

Conforme Glaeser (1985) aponta, o grande passo dado por Hankel está relacionado ao problema da explicação da regra dos sinais. Ele propõe, a extensão da multiplicação de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$, uma vez que "a existência e unicidade dessa extensão resulta do seguinte teorema: a única multiplicação em $\mathbb{R}$, que estende a multiplicação usual em $\mathbb{R}^+$, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais" (GLAESER, 1985, p.105-106).

A revolução realizada por Hankel está no abandonar a busca por um modelo, ou seja, a busca por exemplos práticos extraídos da natureza que explicam de forma metafórica os números negativos, apontando não mais para números descobertos, mas inventados, imaginados. Nesse sentido, Anjos e Sá (2011) relata que no final do século XIX, com a finalidade de construir o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, surgiram teorias não mais preocupadas com o significado concreto ou metafórico buscado pelos matemáticos anteriores. Essas teorias podem ser divididas em dois grupos: extensão do número cardinal e extensão do número ordinal.

A teoria dos pares ordenados, inerente ao grupo de teorias dos números inteiros como extensão do número cardinal, construída a partir da ideia de Hankel de conceber um número negativo como a diferença entre dois números naturais, foi finalmente formalizada por Richard Dedekind (1831-1916), que estabeleceu uma relação de equivalência entre pares de números naturais e fez referência à subtração como inversa da adição: $a - b = c - d$, logo $a + d = b + c$. Dedekind demonstrou que essa relação é de equivalência, e que o conjunto das classes de equivalência será o conjunto dos números inteiros. (ANJOS e SÁ, 2011)

4 A CONSTRUÇÃO RIGOROSA DO CONCEITO DE NÚMERO

A história da matemática nos mostra que o processo de desenvolvimento teórico do conceito de número que hoje conhecemos, deu-se através de muitos anos e por meio de várias civilizações. Esse processo por sua vez está intimamente ligado à maneira como nós realizamos a nossa própria formulação desse conceito.

O presente capítulo tem por finalidade apresentar a construção dos conjuntos numéricos (naturais e inteiros) da forma como os matemáticos dos séculos XIX e XX o fizeram, seguindo uma ordem lógica e coerente.

4.1 NÚMEROS NATURAIS

Atrelado à ideia de quantidade e, consequentemente, à necessidade de contagem, existem duas maneiras possíveis de formalização do conceito de número natural. Uma delas se dá através da Teoria dos Conjuntos, que expressa melhor a ideia de número natural como quantidade. Seguiremos, entretanto, outro caminho. Conforme encontramos em Ferreira (2011), que apresenta "uma adaptação para a simbologia matemática atual daquela que foi apresentada pelo matemático italiano Giuseppe Peano, no final do século XIX" (FERREIRA, 2011, pp. 19-20), faremos a formalização axiomática do conjunto do"números naturais.

4.1.1 *Construção axiomática do conjunto dos números naturais*

Segundo Ferreira (2011) os axiomas de Peano têm por finalidade dar à ideia que temos do conjunto dos números naturais, como um conjunto que começa no zero e prossegue de um em um, uma apresentação rigorosa, apoiada em conceitos matemáticos tais como o de conjunto e funções. Façamos então, tal apresentação:

Axiomas de Peano: $\mathbb{N}$ é um conjunto com as seguintes propriedades:

1. Existe um único número natural, designado por 0, ao qual chamaremos de *zero*;
2. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

3. s é injetora;

4. Não existe nenhum elemento $n \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = 0$, ou seja, $0 \notin Im(s)$;

5. *(Princípio da Indução)* Se X é um subconjunto de $\mathbb{N}$, tal que:

   i) $0 \in X$ e

   ii) para todo $k \in X$, tem-se $s(k) \in X$,

   então $X = \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ se chama **Conjunto dos Números Naturais** e o axioma (1) nos garante que $\mathbb{N} \neq \emptyset$, pois $0 \in \mathbb{N}$.

A função s presente nos axiomas de Peano, denominada função *sucessor*, nos traz algumas importantes informações a cerca do conjunto dos números naturais. O fato de ser s injetora, nos garante que números naturais distintos possuem diferentes sucessores (axioma 3). Por $0 \notin Im(s)$, temos que 0 não é sucessor de nenhum número natural (axioma 4).

4.1.2 *Adição em* $\mathbb{N}$

Definição 4.1. *A adição de dois números naturais, m e n, é designada por $m + n$ e definida recursivamente do seguinte modo:*

$$\begin{cases} m + 0 = m; \\ m + s(n) = s(m + n). \end{cases}$$

(FERREIRA, 2011, *p.*25*)*

Segue de imediato da definição acima que $m + s(0) = s(m + 0) = s(m)$. De forma recursiva, temos então: $m + s(s(0)) = s(s(m))$, $m + s(s(s(0))) = s(s(s(m)))$ e assim por diante.

Por meio do *Princípio da Indução*, o processo acima pode ser formalizado e nos garantir que a soma $m + n$ de todo par de números $m, n \in \mathbb{N}$ está definida, ou seja, a adição está fechada em $\mathbb{N}$. De fato, definamos o conjunto $S_m = \{n \in \mathbb{N} | m + n \text{ está definida}\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente. Assim sendo, temos:

1. $m + 0$ está definido, portanto, $0 \in S_m$;

2. seja $k \in S_m$, isto é, $m + k$ está definido. Segue que $m + s(k) = s(m + k)$ está definido, logo $s(k) \in S_m$.

Portanto $S_m = \mathbb{N}$ e, como m é arbitrário, $m + n$ está definida para todo o par (m, n) de naturais, ou seja, a adição é de fato uma operação em $\mathbb{N}$.

Proposição 4.2. *0 é o único* ***elemento neutro*** *para a operação de adição em* $\mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente, mostremos que 0 é um elemento neutro para a operação de adição, ou seja, para todo $m \in \mathbb{N}$, vale $m + 0 = m = 0 + m$. De fato, pela definição de adição, temos $m + 0 = m$. Provemos agora que $0 + m = m$. Consideremos o conjunto $A_0 = \{m \in \mathbb{N} | 0 + m = m\}$.

1. Por definição, $0 + 0 = 0$, logo, $0 \in A_0$;

2. Supondo $k \in A_0$, isto é, $0 + k = k$. Temos que $0 + s(k) = s(0 + k) = s(k)$, ou seja, $s(k) \in A_0$.

Logo, por indução, concluímos que $A_0 = \mathbb{N}$.

Resta-nos mostrar que, supondo existir $u \in \mathbb{N}$ tal que $m + u = m$ (ou que $u + m = m$), para todo $m \in \mathbb{N}$, então $u = 0$. Ou seja, 0 é o **único** elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$. De fato, para um tal u, temos:

$$0 = 0 + u = u.$$

□

Proposição 4.3. *Indicando o número natural que é sucessor de* 0*, por* 1 *(lê-se "um"), ou seja,* $s(0) = 1$*. Para todo* $m \in \mathbb{N}$*, temos* $m + 1 = s(m) = 1 + m$*.*

Demonstração. Para a primeira igualdade, basta observar que $s(m) = s(m + 0) = m + s(0) = m + 1$.

Já a segunda igualdade pode ser verificada por indução. Considerando o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} | s(m) = 1 + m\}$, temos:

(a) $s(0) = 1 = 1 + 0$, logo $0 \in A$;

(b) Supondo $k \in A$, isto é, $s(k) = 1 + k$. Temos: $s(s(k)) = s(1 + k) = 1 + s(k)$. Logo $s(k) \in A$

Diante disso, temos que $A = \mathbb{N}$ e, portanto, $s(m) = m + 1$ para todo m natural. □

Teorema 4.4. *Sejam* m, n *e* p *naturais arbitrários, valem as seguintes propriedades:*

1. $m + (n + p) = (m + n) + p$ *(Associatividade);*

2. $m + n = n + m$ *(Comutatividade);*

3. $m + p = n + p \Rightarrow m = n$ (Lei do cancelamento da adição).

Demonstração.

1. Consideremos o conjunto $A_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} | m + (n + p) = (m + n) + p\}$, com m e n fixados arbitrariamente. Aplicando indução sobre p, segue que:

   (a) $m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0$, logo $0 \in A_{(m,n)}$;

   (b) Suponhamos que $k \in A_{(m,n)}$, isto é, $m + (n + k) = (m + n) + k$.Temos que $m + (n + s(k)) = m + s(n + k) = s(m + (n + k))$ e, por hipótese de indução, $s(m + (n + k)) = s((m + n) + k) = (m + n) + s(k)$. Logo, $m + (n + s(k)) = (m + n) + s(k)$ e, assim, $s(k) \in A_{(m,n)}$.

   Portanto, por serem m e n arbitrários, $A_{(m,n)} = \mathbb{N}$.

2. Fixemos arbitrariamente $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $C_m = \{n \in \mathbb{N} | n + m = m + n\}$. Mostremos por indução que $C_m = \mathbb{N}$. De fato, temos:

   (a) Pela proposição 4.2, $0 + m = m + 0$, logo $0 \in C_m$;

   (b) Supondo $k \in C_m$, temos que $k + m = m + k$. Logo, $m + s(k) = s(m + k) = s(k + m) = (k + m) + 1$. Pela associatividade da adição, segue que $m + s(k) = k + (m + 1) = k + (1 + m)$ e, novamente pela associatividade, temos $m + s(k) = (k + 1) + m = s(k) + m$. Ou seja, $s(k) \in C_m$.

   Portanto, vale a comutatividade da adição em $\mathbb{N}$.

3. Considerando agora o conjunto $S = \{p \in \mathbb{N} | m + p = n + p \Rightarrow m = n\}$, fixemos arbitrariamente os naturais m e n e, provemos por indução em p a Lei do Cancelamento da adição.

   (a) Temos que $m + 0 = n + 0 \Rightarrow m = n$, logo $0 \in S$;

   (b) Mostremos que, se para algum $k \in S$ temos que $m + k = n + k \Rightarrow m = n$, então $s(k) \in S$. De fato,

   $$\begin{aligned} & m + s(k) = n + s(k) \Rightarrow m + (k + 1) = n + (k + 1) \\ & \Rightarrow m + (1 + k) = n + (1 + k) \text{ (Proposição 4.3)} \\ & \Rightarrow (m + 1) + k = (n + 1) + k \text{ (Associatividade)} \\ & \Rightarrow s(m) + k = s(n) + k \Rightarrow s(m) = s(n). \end{aligned}$$

   E, por ser s injetora, segue que $m = n$. Logo, $s(k) \in S$.

□

4.1.3 *Multiplicação em* $\mathbb{N}$

Definição 4.5. *Denotamos por $m \cdot n$ a multiplicação de dois números naturais m e n. Definida recursivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0; \\ m \cdot (n+1) = mn + m. \end{cases}$$

A seguir, apresentaremos as principais propriedades da multiplicação no conjunto dos números naturais. Antes porém, duas proposições enunciadas a seguir, se fazem necessárias para a adequada demonstração de algumas destas propriedades.

Proposição 4.6. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos $0 \cdot m = 0$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $S = \{m \in \mathbb{N} | 0 \cdot m = 0\}$. Por indução em m, segue que:

1. $0 \in S$, pois por definição, $0 \cdot 0 = 0$;

2. Supondo $k \in S$, isto é, $0 \cdot k = 0$. Temos que $0 \cdot s(k) = 0 \cdot (k+1) = 0 \cdot k + 0 = 0 \cdot k = 0$, logo $s(k) \in S$.

Segue portanto que $S = \mathbb{N}$. □

Proposição 4.7. *Sejam m e n naturais. Se $m + n = 0$, então $m = n = 0$.*

Demonstração. Supondo $n \neq 0$, temos que existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(n') = n' + 1$. Segue daí que

$$0 = m + n = m + (n' + 1) = (m + n') + 1 = s(m + n'),$$

ou seja, 0 é o sucessor de $(m + n')$, o que é um absurdo. Logo, $n = 0$ e, assim, $m + n = 0 \Rightarrow m + 0 = 0 \Rightarrow m = 0$. □

Teorema 4.8. *(Propriedades da multiplicação em $\mathbb{N}$) Dados $m, n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, valem:*

1. *A multiplicação é fechada em $\mathbb{N}$, ou seja, $mn \in \mathbb{N}$;*

2. *$1 \cdot n = n = n \cdot 1$ (Elemento neutro multiplicativo);*

3. *$m(n + p) = mn + mp$ (Distributividade em relação a adição);*

4. *$m(np) = (mn)p$ (Associatividade);*

5. *$mn = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$;*

6. *$mn = nm$ (Comutatividade).*

Demonstração.

1. Considerando o conjunto $F_m = \{n \in \mathbb{N} | mn \in \mathbb{N}\}$ e fixando arbitrariamente m. Por indução em n, temos:

   (a) $0 \in F_m$, pois por definição $0 = m \cdot 0$;

   (b) Supondo $k \in F_m$, isto é, $mk \in \mathbb{N}$. Temos $m(k+1) = mk + m$. Por serem mk e m naturais, segue do fechamento da adição em $\mathbb{N}$ que $m(k+1) \in \mathbb{N}$, logo $(k+1) \in F_m$.

   Portanto, $mn \in \mathbb{N}$ para todo par de naturais m e n.

2. Para a primeira igualdade $n \cdot 1 = n$, temos que $n \cdot 1 = n(0+1)$ e, pela definição da multiplicação, segue que $n \cdot 1 = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$.

   Agora, para $1 \cdot n = n$, por definição temos que $1 \cdot 0 = 0$, isto é, a propriedade vale para 0. Além disso, supondo que para algum natural n, valha $1 \cdot n = n$, segue que $1 \cdot (n+1) = 1 \cdot n + 1 = n + 1$. Logo, por indução, $1 \cdot n = n$.

3. Consideremos o conjunto $D_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} | m(n+p) = mn + np\}$. Fixando arbitrariamente o par de naturais m e n, por indução em p, temos:

   (a) $0 \in D_{(m,n)}$, pois $m(n+0) = mn + 0 = mn$ e $mn + n \cdot 0 = mn + 0 = mn$;

   (b) Supondo que para algum natural k, tenhamos $m(n+k) = mn + mk$, mostremos que a igualdade vale também para $k+1$. De fato, temos que $m(n+(k+1)) = m((n+k)+1) = m(n+k) + m = mn + mk + m = mn + m(k+1)$. Ou seja, $k \in D_{(m,n)} \Rightarrow (k+1) \in D_{(m,n)}$.

   Logo, $D_{(m,n)} = \mathbb{N}$ e, por serem m e n arbitrários, vale $m(n+p) = mn + mp$ para todos naturais dados.

4. Novamente usando o *Princípio da Indução*, fixemos arbitrariamente os naturais m e n e consideremos o conjunto $A_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} | m(np) = (mn)p\}$. Temos que $0 \in A_{(m,n)}$, pois $m(n \cdot 0) = m \cdot 0 = 0$ e, por definição, $(mn) \cdot 0 = 0$. Além disso, dado um natural $k \in A_{(m,n)}$, temos pelas propriedades anteriormente demonstradas que $m(n(k+1)) = m(nk+n) = m(nk) + mn = (mn)k + mn = (mn)(k+1)$. Concluímos portanto, que $A_{(m,n)} = \mathbb{N}$.

5. Supondo $n \neq 0$, existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(n')$, ou seja, $n = n' + 1$. Segue daí que:
$$0 = mn = m(n' + 1) = mn' + m$$
e, pela proposição 4.7, $mn' = m = 0$. De modo análogo, supondo $m \neq 0$, temos $n = 0$.

6. Consideremos o conjunto $C_m = \{n \in \mathbb{N} | mn = nm\}$ com o natural m fixado arbitrariamente. Por indução em n, temos:
   (a) $0 \in C_m$, pois por definição, $m \cdot 0 = 0$ e, pela proposição 4.6, $0 \cdot m = 0$;
   (b) Supondo $k \in C_m$, ou seja, $mk = km$. Segue que $m \cdot s(k) = m(k + 1) = mk + m = km + m = (k + 1)m = s(k) \cdot m$. Logo, $s(k) \in C_m$. Portanto, por ser m arbitrário, segue que $mn = nm$ para todo par m e n de naturais.

□

4.1.4 *Relação de ordem em* $\mathbb{N}$

Definição 4.9. *Dados os naturais m e n, escrevemos $m \leq n$ (lê-se m é menor do que ou igual a n), quando existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.*

Notação: Conforme Ferreira (2011)

1. Dizemos que m é maior do que ou igual a n e escrevemos $n \geq m$, como alternativa para $m \leq n$.

2. Dizemos que m é menor do que n e escrevemos $m < n$, quando $m \leq n$ e $m \neq n$.

3. Dizemos que n é maior do que m e escrevemos $n > m$, como alternativa para $m < n$.

Teorema 4.10. *A relação $\leq$ definida acima é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$, ou seja, é reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Demonstração. De fato, temos:

1. Dado o natural m, existe $0 \in \mathbb{N}$ tal que $m = m + 0$, logo $m \leq m$.

2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.

   De $m \leq n$ segue que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$ e, de $n \leq m$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, temos $m = m + (p + q)$. Logo, $p + q = 0$ e, pela proposição 4.7, $p = q = 0$. Portanto, $m = n$.

3. Sejam os naturais m, n e p tais que $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.

   Por serem $m \leq n$ e $n \leq p$, existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $n = m + r$ e $p = n + s$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, segue que $p = m + (r + s)$ e, por ser $(r + s) \in \mathbb{N}$, então $m \leq p$.

□

Proposição 4.11. *Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $0 < n$.*

Demonstração. Devemos mostrar que existe $p \in \mathbb{N}^*$, tal que $n = 0 + p$.

Como $n \in \mathbb{N}^*$, segue que $n = s(n_1) = s(n_1) + 0 = 0 + s(n_1)$, para algum $n_1 \in \mathbb{N}$. Desta forma, encontramos $p = s(n_1) \in \mathbb{N}^*$, tal que $n = 0 + p$. □

Proposição 4.12. *(Lei da Tricotomia) Das relações seguintes, sendo $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, temos que uma, e somente uma, ocorre:*

1. *$m < n$;*

2. *$m = n$;*

3. *$m > n$.*

Demonstração. Para tal demonstração é necessário mostrar que duas das relações acima não podem ocorrer simultaneamente e que ao menos uma das três ocorre.

De fato, temos por definição que existem $p, p' \in \mathbb{N}$, diferentes de zero, tais que se $m < n$ ou $m > n$, então $n = m + p$ ou $m = n + p'$, não ocorrendo em nenhum dos dois casos $m = n$, ou seja, (1) e (2) bem como (2) e (3) não ocorrem simultaneamente. Além disso, supondo que ocorressem (1) e (3) simultaneamente, seguiria:

$$n + 0 = n = m + p = (n + p') + p = n + (p + p').$$

Cancelando n, segue $p + p' = 0$ e, pela proposição 4.7, $p = p' = 0$, absurdo.

Mostremos agora que para todo par de naturais m e n, uma das três relações ocorre. Consideremos o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} | m < n \text{ ou } m = n \text{ ou } m > n\}$, fixando arbitrariamente o natural m, por indução em n, segue:

i. Temos que $m = 0$ ou $m \neq 0$ e, nesse segundo caso, pela proposição 4.11, $0 < m$. Logo $0 \in A$;

ii. Supondo que $k \in A$, isto é, $k < m$ ou $k = m$ ou $k > m$. Analisemos os três casos:

(a) $k = m \Rightarrow k + 1 = m + 1 \Rightarrow (k + 1) > m \Rightarrow k + 1 \in A$;

(b) $k < m$. Neste caso, existe $p \in \mathbb{N}^*$, tal que $m = k + p$. Como $p \neq 0$, podemos escrever $p = p' + 1$, com $p' \in \mathbb{N}$. Seguindo que:

$$m = k + p = k + (p' + 1) = (k + 1) + p'.$$

Se $p' = 0$, então $m = k + 1$ e $k + 1 \in A$. Se $p' \neq 0$, então $k + 1 < m$ e $k + 1 \in A$;

(c) $k > m$. Neste caso, existe $p \in \mathbb{N}^*$, tal que $k = m + p$. Segue daí que, $k + 1 = (m + p) + 1 = m + (p + 1)$ e, assim, $k + 1 > m$. Logo $k + 1 \in A$

Portanto, por ser m fixado arbitrariamente, segue por indução em n que $A = \mathbb{N}$. □

Teorema 4.13. *(Compatibilidade da relação de ordem com as operações em $\mathbb{N}$) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ quaisquer. Valem as seguintes implicações:*

1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$;

2. $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

Demonstração.

1. Sendo $a \leq b$, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + p$. Segue daí, que $b + c = (a + p) + c$ e, assim, $b + c = (a + c) + p$. Logo $a + c \leq b + c$.

2. Da mesma forma, por ser $a \leq b$, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + p$. Seguindo daí, que $bc = (a + p)c = ac + pc$. Logo $ac \leq bc$.

□

Note que o teorema anterior é válido com $<$ no lugar de $\leq$ (com $c \neq 0$ no caso (2)) e a demostração segue da mesma forma.

Uma vez definida a relação de ordem em $\mathbb{N}$ podemos demonstrar a *Lei do Cancelamento multiplicativo* em $\mathbb{N}$.

Teorema 4.14. *Dados os naturais a, b e c, com $c \neq 0$. Se $ac = bc$, então $a = b$*

Demonstração. Supondo $a \neq b$, pela lei da tricotomia temos que $a < b$ ou $b < a$. Se tivéssemos $a < b$, pelo teorema anterior, teríamos $ac < bc$, contradizendo a hipótese. Da mesma forma que $b < a$ contradiz a hipótese, pois teríamos $bc < ac$. Portanto $a = b$. □

4.2 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Em todo o trabalho que se segue, referente à construção do conjunto dos números inteiros, estará presente o conceito de relações de equivalência, fazendo-se necessária a apresentação de sua definição bem como de outros conceitos.

Definição 4.15. *Dados dois elementos a e b de um conjunto A não vazio, define-se o par ordenado (a,b) como sendo o conjunto {{a},{a,b}}.*

Teorema 4.16. *Dados a,b,c,d $\in$ A, sendo A um conjunto. Temos que os pares ordenados (a,b) e (c,d) são iguais se, e somente, se $a = c$ e $b = d$.*

Demonstração. De fato, se $a = c$ e $b = d$ temos $\{a\} = \{c\}$ e $\{a, b\} = \{c, d\}$ o que implica $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, ou seja, $(a, b) = (c, d)$.

Supondo agora que $(a, b) = (c, d)$, analisemos duas situações: $a = b$ e $a \neq b$:

- $a = b$

  Neste caso, temos que $(a, b) = (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$, logo $\{\{a\}\} = (c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, o que só acontece se $a = c = d$ e, portanto, temos $a = b$ e $c = d$.

- $a \neq b$

  Nesta situação, temos $\{c\} \neq \{a, b\}$, pois, caso contrário, teríamos $a = b = c$, contradizendo $a \neq b$. Logo, segue deste fato e da igualdade $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ que, $\{a\} = \{c\}$ e $\{a, b\} = \{c, d\}$ e, portanto $a = c$ e $b = d$.

□

Definição 4.17. *O conjunto de todos os pares ordenados (a,b), onde a e b são elementos do conjunto A, denotado por $A \times A$, é chamado de* ***produto cartesiano de A por A****, isto é, $A \times A = \{(x, y)|x, y \in A\}$.*

Definição 4.18. *Qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$ é definido como uma relação R sobre o conjunto A. Ou seja, $R \subset A \times A$.*

Notação: Se R é uma relação definida sobre o conjunto A e $(a, b) \in R$. Dizemos que a está relacionado a b e escrevermos aRb, ou seja, $(a, b) \in R \Leftrightarrow aRb$.

Definição 4.19. *Uma relação R sobre o conjunto A é dita* ***relação de equivalência****, quando satisfaz as seguintes propriedades, dados a, b e $c \in A$:*

1. aRa (*refexiva*);

2. se aRb, então bRa (*simétrica*);
3. se aRb e bRc, então aRc (*transitiva*).

Definição 4.20. *Uma* ***classe de equivalência de a pela relação R*** *é dada pelo conjunto*

$$\bar{a} = \{x \in A | xRa\}$$

onde R é uma relação de equivalência em A e $a \in A$ é um elemento fixado arbitrariamente.

Teorema 4.21. *Seja A um conjunto e R uma relação de equivalência sobre tal conjunto. Dados a e $b \in R$, temos:*

i) $a \in \bar{a}$;

ii) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow aRb$;

iii) $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

Demonstração. Considerando $a, b \in A$, temos:

i) pela propriedade reflexiva de uma relação de equivalência, segue que para todo $a \in A$, temos aRa, logo $a \in \bar{a}$;

ii) ($\Rightarrow$) Suponhamos $\bar{a} = \bar{b}$. Como $b \in \bar{b} = \bar{a}$, então $b \in \bar{a}$. Logo, bRa e, pela simetria de R, aRb.

   ($\Leftarrow$) Se aRb, então dado $x \in \bar{a}$, temos que xRa e, pela transitividade de R, $x \in \bar{b}$, logo $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. De modo análogo, pela propriedade simétrica de R, temos bRa e assim, $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. Portanto, $\bar{a} = \bar{b}$.

iii) Suponhamos por contradição que exista $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Segue daí que, cRa, cRb e, pela simetria e transitividade de R, aRb. Logo, por (ii), temos $\bar{a} = \bar{b}$, o que contraria a hipótese $\bar{a} \neq \bar{b}$.

□

Definição 4.22. *Denominado* ***conjunto quociente*** *de A por R. Define-se $A/R = \{ \bar{a} | a \in A\}$ como o conjunto de todas as classes de equivalência em A pela relação R.*

4.3 NÚMEROS INTEIROS

A construção que se segue do conjunto dos números inteiros está pautada na definição deste como o conjunto das classes de equivalências dadas por relações de equivalência no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

4.3.1 *Construção do conjunto dos números inteiros*

Teorema 4.23. *Considerando o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e sobre ele a relação $\sim$ que satisfaça: $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $a + d = b + c$. Afirmamos que $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. De fato, temos:

i) $(a, b) \sim (a, b)$ (reflexividade)
Pela comutatividade da adição em $\mathbb{N}$, segue que $a + b = b + a$ e daí, $(a, b) \sim (a, b)$;

ii) $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ (simetria)
Segue ainda da comutatividade da adição em $\mathbb{N}$ que $a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$, isto é, $(c, d) \sim (a, b)$;

iii) $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$ (transitividade)
Como $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, temos que $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Adicionando b a ambos os membros da segunda igualdade, temos $b + c + f = b + d + e$, de onde segue que $a + d + f = b + d + e$ e, pela lei do cancelamento da adição, $a + f = b + e$, ou seja, $(a, b) \sim (e, f)$.

□

Definição 4.24. *Denotando por $\overline{(a, b)}$ a classe de equivalência do par ordenado (a, b) pela relação $\sim$. Definimos o conjunto dos números inteiros, designado por $\mathbb{Z}$, como o conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$.*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim) = \{\overline{(a, b)} | (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

onde,

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (x, y) \sim (a, b)\}$$

4.3.2 *Adição em $\mathbb{Z}$*

Definição 4.25. *O inteiro $\overline{(a+c,b+d)}$ é definido como a soma $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}$, onde $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$.*

A priori, há na definição acima um problema, pois por envolver classes de equivalência, precisamos mostrar que tal definição não depende dos representantes das classes de equivalências envolvidos. Desta forma, apresentamos o lema a seguir:

Lema 4.26. *A adição em $\mathbb{Z}$ está bem definida.*

Demonstração. Para demonstrar tal afirmação, será necessário mostrar que se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$.

De fato, como $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$ e, assim, $a+b' = b+a'$ e $c+d' = d+c'$.

Além disso, da definição de adição, temos:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)} \text{ e } \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')} = \overline{(a'+c',b'+d')}$$

Como $a+b' = b+a'$ e $c+d' = c'+d$, então:

$$(a+c)+(b'+d') = (a+b')+(c+d') = (b+a')+(c'+d) = (b+d)+(a'+c'),$$

ou seja, $(a+c)+(b'+d') = (b+d)+(a'+c')$, de onde segue que $(a+c,b+d) \sim (a'+c',b'+d')$ e, então, $\overline{(a+c,b+d)} = \overline{(a'+c',b'+d')}$. Logo $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$ □

Teorema 4.27. *Valem as seguintes propriedades para a operação de adição em $\mathbb{Z}$:*

1. *Associatividade;*
2. *Comutatividade;*
3. *Existência e unicidade do elemento neutro $\overline{(0,0)}$;*
4. *Lei do cancelamento da adição;*
5. *Existência e unicidade do simétrico aditivo.*

Demonstração. Dados $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$ em $\mathbb{Z}$.

1. $\overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = (\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) + \overline{(e,f)}$.

   Temos que:

$$\overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} + \overline{(c+e,d+f)} = \overline{(a+(c+e),b+(d+f))}$$

e, pela propriedade associativa da adição em $\mathbb{N}$, segue que:

$$\overline{((a+c)+e,(b+d)+f)} = \overline{(a+c,b+d)} + \overline{(e,f)} = (\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) + \overline{(e,f)}.$$

2. $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}$

   Temos que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$ e, pela comutatividade da adição em $\mathbb{N}$, $\overline{(a+c,b+d)} = \overline{(c+a,d+b)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}$.

3. Inicialmente mostremos que se existe o elemento neutro na adição em $\mathbb{Z}$, então ele é único.

   Suponha que $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(a',b')}$ sejam elementos neutros. Então, temos que $\overline{(a,b)} = \overline{(a,b)} + \overline{(a',b')}$, por $\overline{(a',b')}$ ser elemento neutro, mas $\overline{(a,b)} + \overline{(a',b')} = \overline{(a',b')}$, por $\overline{(a,b)}$ ser elemento neutro. Assim, não pode haver mais de um elemento neutro.

   Mostremos agora que a adição em $\mathbb{Z}$ tem $\overline{(0,0)}$ como elemento neutro.

   De fato, temos

   $$\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a+0,b+0)} = \overline{(a,b)} = \overline{(0+a,0+b)} = \overline{(0,0)} + \overline{(a,b)}$$

4. Se $\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}$, então $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.
   De fato, temos que:

   $$\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \Rightarrow \overline{(a+e,b+f)} = \overline{(c+e,d+f)}$$
   $$\Rightarrow (a+e,b+f) \sim (c+e,d+f) \Rightarrow a+e+d+f = b+f+c+e$$

   e, pela lei do cancelamento da adição em $\mathbb{N}$, tem-se:

   $$a+d = b+c \Rightarrow (a,b) \sim (c,d) \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$$

5. Dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, existe um único $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$. Este $\overline{(c,d)}$ é o elemento $\overline{(b,a)}$.

   Inicialmente mostremos que, se existir o simétrico aditivo de $\overline{(a,b)}$, ele é único.

   Suponhamos $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$ tais que: $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$ e $\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(0,0)}$. Desta forma temos:

$$\overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(0,0)} = \overline{(c,d)} + (\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)}) =$$
$$(\overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}) + \overline{(e,f)} = \overline{(0,0)} + \overline{(e,f)} = \overline{(e,f)}$$

Logo $\overline{(c,d)} = \overline{(e,f)}$

Além disso, temos que:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)} \Leftrightarrow \overline{(a+c,b+d)} = \overline{(0,0)} \Leftrightarrow a+c = b+d.$$

Para a igualdade $a+c = b+d$ se realizar, devemos tomar $c = b$ e $d = a$.

Portanto, o único simétrico de $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ deve ser $\overline{(b,a)}$.

□

A existência e a unicidade do oposto de um número inteiro permite que definamos uma operação em $\mathbb{Z}$, denominada *subtração*.

Definição 4.28. *A subtração em $\mathbb{Z}$, denotada por $(-)$, é a operação definida da seguinte forma: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, então:*

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

onde $-\beta$ (lê-se "menos beta") é o simétrico de β (ou oposto de β, ou inverso aditivo de β).

Assim, a subtração $\alpha - \beta$ nada mais é do que a soma de α como simétrico de β.

Proposição 4.29. *Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, vale:*

1. $-(-\alpha) = \alpha$;
2. $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$;
3. $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$;
4. $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$;
5. $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$.

Demonstração. Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$, temos:

1. $-(-\alpha) = -\overline{(b,a)} = \overline{(a,b)} = \alpha$.
2. $-\alpha + \beta = \overline{(b,a)} + \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(b,a)} = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$.
3. $\alpha - (-\beta) = \overline{(a,b)} - \overline{(d,c)} = \overline{(a,b)} + (-\overline{(d,c)}) = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \alpha + \beta$.

4. Sabendo que $\alpha+\beta=\overline{(a+c,b+d)}$, segue que:

$$-\alpha-\beta=-\alpha+(-\beta)=\overline{(b,a)}+\overline{(d,c)}=\overline{(b+d,a+c)}=-\overline{(a+c,b+d)}=-(\alpha+\beta).$$

5. Uma vez que $\beta+\gamma=\overline{(c+e,d+f)}$, temos:

$$\alpha-(\beta+\gamma)=\overline{(a,b)}-\overline{(c+e,d+f)}=\overline{(a,b)}+(-\overline{(c+e,d+f)})=\overline{(a,b)}+\overline{(d+f,c+e)}=\overline{(a,b)}+\overline{(d,c)}+\overline{(f,e)}=\overline{(a,b)}+(-\overline{(c,d)})+(-\overline{(e,f)})=\overline{(a,b)}-\overline{(c,d)}-\overline{(e,f)}=\alpha-\beta-\gamma.$$

□

4.3.3 *Multiplicação em $\mathbb{Z}$*

Definição 4.30. *Definimos o produto $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}$ entre os inteiros $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, como o inteiro $\overline{(ac+bd,ad+bc)}$.*

Assim como na adição, por estarmos trabalhando com classes de equivalências, faz-se necessário mostrarmos que a definição acima apresentada independe da representação de tais classes, ou seja, a multiplicação em $\mathbb{Z}$ está bem definida, conforme teorema a seguir.

Teorema 4.31. *Dados $\overline{(a,b)},\overline{(a',b')},\overline{(c,d)},\overline{(c',d')}\in\mathbb{Z}$ tais que, $\overline{(a,b)}=\overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)}=\overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(a',b')}\cdot\overline{(c',d')}$.*

Demonstração. Sabemos que por serem $\overline{(a,b)}=\overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)}=\overline{(c',d')}$, temos $(a,b)\sim(a',b')$ e $(c,d)\sim(c',d')$, então,

$$a+b'=b+a' \text{ e } c+d'=d+c'.$$

Além disso, temos que:

$$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)} \text{ e } \overline{(a',b')}\cdot\overline{(c',d')}=\overline{(a'c'+b'd',a'd'+b'c')}$$

Mostremos que os dois segundos membros das igualdades acima coincidem. Isso equivale a mostrar que $(ac+bd)+(a'd'+b'c')=(ad+bc)+(a'c'+b'd')$.

De fato, temos:

$c(a+b')+a'(c+d')+d(b+a')+b'(d+c') = c(b+a')+a'(d+c')+d(a+b')+b'(c+d')$
$\Leftrightarrow (ac+bd)+(a'd'+b'c')+cb'+a'c+da'+b'd=(ad+bc)+(a'c'+b'd')+ca'+$

$a'd + db' + b'c$
$\Leftrightarrow (ac + bd) + (a'd' + b'c') = (ad + bc) + (a'c' + b'd')$.

Portanto, $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}$ e, assim, a multiplicação em $\mathbb{Z}$ está bem definida. $\square$

Teorema 4.32. *Para a multiplicação em $\mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:*

1. *Comutatividade;*
2. *Associatividade;*
3. *Existência e unicidade do elemento neutro $\overline{(1,0)}$;*
4. *Distributividade em relação a adição;*
5. *Cancelamento multiplicativo.*

As demonstrações das propriedades 1, 2 e 3 são feitas de modo análogo à adição. Desta forma, faremos a seguir apenas as demonstrações de 4 e 5.

Demonstração.
(Distributividade em relação a Adição): Dados $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}, \gamma = \overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

De fato:

$\alpha(\beta + \gamma) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c+e, d+f)} = \overline{(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e))} = \overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bf, af + be)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

(Cancelamento multiplicativo): Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}, \gamma = \overline{(e,f)} \neq \overline{(0,0)}$, tais que $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Segue que:

$$\overline{(ae + bf, af + be)} = \overline{(ce + df, cf + de)} \tag{1}$$

o que é equivalente a

$$ae + bf + cf + de = af + be + ce + df. \tag{2}$$

Logo, pelas propriedades dos números naturais,

$$e(a + d) + f(b + c) = e(b + c) + f(a + d). \tag{3}$$

Além disso, temos $e \neq f$, por ser $\overline{(e,f)} \neq \overline{(0,0)}$. Suponhamos assim, sem perda de generalidade, $e > f$, o que equivale a $e = f + g$, para algum $g \in \mathbb{N}^*$. Substituindo e por $f + g$ em 3, obtemos:

$$f(a+d) + g(a+d) + f(b+c) = f(b+c) + g(b+c) + f(a+d). \tag{4}$$

De onde segue, pelas leis dos cancelamentos aditivo e multiplicativo em $\mathbb{N}$, que $(a+d) = (b+c)$, ou seja, $(a,b) \sim (c,d)$. Logo $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$ e, portanto, $\alpha = \beta$. □

4.3.4 *Relação de ordem em $\mathbb{Z}$*

Vamos comparar os elementos de $\mathbb{Z}$ através de uma relação de ordem, conforme definição abaixo:

Definição 4.33. *Dados $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, dizemos que $\overline{(a,b)}$ é menor do que ou igual a $\overline{(c,d)}$ e, escrevemos $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$, quando $a+d \leq b+c$.*

Assim como feito para a relação de ordem em $\mathbb{N}$, são definidos os símbolos $\geq, >$ e $<$.

Proposição 4.34. *A relação $\leq$ está bem definida, ou seja, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ então, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Leftrightarrow \overline{(a',b')} \leq \overline{(c',d')}$.*

Demonstração. Temos que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Leftrightarrow a+d \leq b+c$ e, além disso, por hipótese $a+b' = b+a'$ e $c+d' = d+c'$. Daí, segue que:

$$(a'+d') + (a+d) \leq (a'+d') + (b+c) = (b+a') + (c+d') = (a+b') + (d+c')$$

e, consequentemente,

$$(a'+d') + (a+d) \leq (b'+c') + (a+d)$$

Logo, $(a'+d') \leq (b'+c')$ e, portanto, $\overline{(a',b')} \leq \overline{(c',d')}$

A reciproca é demonstrada de forma análoga. □

Teorema 4.35. *A relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$, ou seja, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ arbitrários, valem:*

1. *$\alpha \leq \alpha$ (Reflexividade);*

2. *$\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ (Antissimetria);*

3. $\alpha \leq \beta$ *e* $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ *(Transitividade).*

Demonstração. Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$, temos:

1. $\alpha \leq \alpha$, pois $a + b \leq b + a$.

2. $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha \Leftrightarrow a + d \leq b + c$ e $b + c \leq a + d$. Logo, $a + d = b + c$ e daí, $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$. Portanto $\alpha = \beta$.

3. $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma \Leftrightarrow a + d \leq b + c$ e $c + f \leq d + e$. Temos então,

$$(a+d)+(c+f) \leq (b+c)+(d+e) \Rightarrow (a+f)+(c+d) \leq (b+e)+(c+d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+f) \leq (b+e).$$

Logo, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$ e, portanto, $\alpha \leq \gamma$.

□

Proposição 4.36. *(Lei da tricotomia) Dado o inteiro* α*, apenas uma das situações seguintes ocorre:*

1. $\alpha = \overline{(0,0)}$ *ou*

2. $\alpha < \overline{(0,0)}$ *ou*

3. $\alpha > \overline{(0,0)}$.

Demonstração. Seja $\alpha = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos que $\alpha = \overline{(0,0)}$ e $\alpha < \overline{(0,0)}$ (ou $\alpha > \overline{(0,0)}$) simultaneamente. Desta forma teríamos:

$$\alpha = \overline{(0,0)} \Rightarrow a = b$$
$$\text{e}$$
$$\alpha < \overline{(0,0)} \Rightarrow a < b,$$

o que é um absurdo pela lei da tricotomia dos naturais.

Suponhamos agora que, $\alpha < \overline{(0,0)}$ e $\alpha > \overline{(0,0)}$ simultaneamente. Seguiria daí que:

$$\alpha < \overline{(0,0)} \Rightarrow a < b$$
$$\text{e}$$
$$\alpha > \overline{(0,0)} \Rightarrow a > b,$$

o que ainda, pela lei da tricotomia dos naturais, seria um absurdo. □

Teorema 4.37. *A relação $\leq$ é compatível com as operações em $\mathbb{Z}$, isto é, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ arbitrários, vale:*

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
2. $\alpha \leq \beta$ *e* $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Demonstração. Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$. Temos:

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow a + d \leq b + c$.

   Além disso, pela compatibilidade da relação de ordem com a adição em $\mathbb{Z}$, segue que
   $$(a+d) + (e+f) \leq (b+c) + (e+f),$$
   ou seja,
   $$(a+e) + (d+f) \leq (b+f) + (c+e).$$
   Logo
   $$\overline{(a+e, b+f)} \leq \overline{(c+e, d+f)}$$
   e, portanto,
   $$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

2. Temos que $\alpha\gamma = \overline{(ae+bf, af+be)}$ e $\beta\gamma = \overline{(ce+df, cf+de)}$.

   Além disso, como $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \overline{(0,0)}$ implicam $a + d \leq b + c$ e $f \leq e$. Segue que, existem g e $h \in \mathbb{N}$, tais que $b + c = a + d + g$ e $e = f + h$. Então,
   $$be + ce = ae + de + ge, \; bf + cf = af + df + gf \text{ e } ge = gf + gh$$
   Das igualdades acima e pela lei do cancelamento, segue que:
   $$ae + de + ge + bf + cf + gf + gh = be + ce + af + df + gf + ge$$
   $$\Leftrightarrow (ae+bf) + (cf+de) + gh = (af+be) + (ce+df)$$
   $$\Leftrightarrow (ae+bf) + (cf+de) \leq (af+be) + (ce+df)$$
   $$\Leftrightarrow \overline{(ae+bf, af+be)} \leq \overline{(ce+df, cf+de)}$$
   Portanto, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

□

Definição 4.38. *(Ferreira, 2011) Dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, dizemos que:*

i) $\overline{(a,b)}$ *é positivo quando* $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$;

ii) $\overline{(a,b)}$ *é não negativo quando* $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$*;*

iii) $\overline{(a,b)}$ *é negativo quando* $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$*;*

iv) $\overline{(a,b)}$ *é não positivo quando* $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)}$*.*

Observemos que se $\overline{(a,b)}$ é positivo, pela definição da relação de ordem em $\mathbb{Z}$, temos que $a+0 > b+0$ e, assim $a > b$. Logo existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = b+m$, o que equivale a $\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$. Analogamente, se $\overline{(a,b)}$ é negativo, temos $\overline{(a,b)} = \overline{(0,m)}$.

Por fim, a tricotomia em $\mathbb{Z}$ e as observações acima nos dizem que:

$$\mathbb{Z} = \{\overline{(0,m)} | m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0,0)}\} \cup \{\overline{(m,0)} | m \in \mathbb{N}^*\},$$

sendo a união disjunta.

Utilizando as seguintes notações:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}_-^* = \{\overline{(0,m)} | m \in \mathbb{N}^*\},\ \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_-^* \cup \overline{(0,0)}, \\ &\mathbb{Z}_+^* = \{\overline{(m,0)} | m \in \mathbb{N}^*\},\ \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+^* \cup \overline{(0,0)}, \end{aligned}$$

notemos que o conjunto dos números inteiros não negativos, $\mathbb{Z}_+$, é uma "cópia algébrica" de $\mathbb{N}$, uma vez que está em bijeção com ele.

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Currículo do Estado de São Paulo (2011) em suas orientações quanto ao processo de ensino aprendizagem dos conteúdos básicos diz que

> o trabalho com o bloco de conteúdos denominado **Números** tem por objetivo principal um enriquecimento do escopo da linguagem numérica, inicialmente restrita a situações e problemas envolvendo a contagem e a medida. As sucessivas ampliações dos campos numéricos por meio de situações significativas que problematizem essa necessidade constituem caminho natural para tal enriquecimento.
>
> Tais situações podem estar apoiadas na história, como, por exemplo, a ampliação dos números naturais para os inteiros devido às necessidades prementes do desenvolvimento comercial e financeiro dos séculos XV e XVI... (Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias, 2011,p.40)

Afirma ainda que:

> em qualquer disciplina, conhecer é sempre conhecer o **significado**, ou seja, o grande valor a ser cultivado é a apresentação de conteúdos significativos para os alunos. O significado é mais importante do que a utilidade prática, que nem sempre pode ser associada ao que se ensina... E, na construção dos significados, uma ideia norteadora é a de que as **narrativas** são muito importantes, são verdadeiramente decisivas na arquitetura de cada aula. É contando histórias que os significados são construídos. [...] uma fonte primária para alimentar as histórias a serem contadas é a História em sentido estrito: História da Matemática, História da Ciência, História das Ideias, História... E é na história que buscamos não apenas uma compreensão mais nítida dos significados dos conceitos fundamentais, mas principalmente o significado das mudanças conceituais, ou seja, o significado das mudanças de significado. (Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias, 2011,p.45)

Partindo destas ideias e, tendo ciência de que é no 7º ano do ensino fundamental que está previsto o primeiro contato com o estudo dos números negativos no currículo do Estado de São Paulo, podemos notar na prática docente que é nesta etapa que as grandes confusões inerentes à temática e, já mencionadas no capítulo 2 deste trabalho, surgem nas salas de aula.

Atualmente, é comum nas salas de aula, que os alunos sejam apresentados inicialmente ao modelo comercial (débitos e créditos) quando se trata das operações com os números inteiros. Sendo que, por compreenderem o significado deste modelo, não apresentam dificuldades em sua compreensão. Porém, quando são apresentados às operações de multiplicação e divisão, são expostos às regras de sinais. Os alunos, neste momento, por não compreenderem o significado das regras de sinais, assumem que tais regras são válidas para todas as situações envolvendo operações com números inteiros e, assim, até mesmo o modelo comercial que estava bem compreendido deixa de fazer sentido para eles.

Neste sentido, a proposta didática presente neste trabalho refere-se à utilização da história da construção dos números inteiros, identificando as dificuldades encontradas por importantes matemáticos no que diz respeito a compreensão dos números negativos, até a sua formalização, comparando-as com as dificuldades atuais em sala de aula.

A princípio, apresentar a construção dos conjuntos dos números naturais e inteiros como feita no capítulo 4 deste trabalho, está distante da realidade dos alunos da educação básica, porém percebemos que a tentativa de evitá-la fazendo uso de regras sem significado não tem surtido o resultado esperado.

Como, no 9º ano do ensino fundamental, está previsto no currículo do Estado de São Paulo o trabalho de ampliação dos conjuntos numéricos, sugerimos ao professor o estudo do processo histórico de construção e aceitação dos números negativos e a construção formal destes conjuntos, para poder dar significado às regras de sinais aos alunos, usando parte desta formalização no trabalho em sala de aula. Uma vez que entendemos, que o conhecimento do processo histórico terá papel motivacional na busca da superação das dificuldades e a formalização dos conceitos dará o significado necessário para a efetiva aprendizagem da temática.

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Sistemas de numeração • Sistemas de numeração na Antiguidade • O sistema posicional decimal Números negativos • Representação • Operações Números racionais • Representação fracionária e decimal • Operações com decimais e frações (complementos)	• Compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração e realizar cálculos simples com potências • Compreender a relação entre uma fração e a representação decimal de um número, sabendo realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com decimais • Saber realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, compreendendo o significado das operações realizadas • Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos • Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos
2º Bimestre	**Geometria** Geometria • Ângulos • Polígonos • Circunferência • Simetrias • Construções geométricas • Poliedros	• Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos • Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia • Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados • Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas • Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista • Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais

Figura 1: (Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias, 2011,p.59)

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números reais • Conjuntos numéricos • Números irracionais • Potenciação e radiciação em R • Notação científica	• Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais • Saber representar os números reais na reta numerada • Incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional • Saber realizar de modo significativo as operações de radiciação e de potenciação com números reais • Compreender o significado e saber utilizar a notação científica na representação de números muito grandes ou muitos pequenos
2º Bimestre	**Números/Relações** Álgebra • Equações de 2º grau: resolução e problemas Funções • Noções básicas sobre função • A ideia de variação • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus	• Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos práticos • Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau • Saber construir gráficos de funções de 1º e de 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções $y = x$ e $y = x^2$

Figura 2: (Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias, 2011,p.63)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números Negativos: uma história de Incertezas. **Bolema**, Rio Claro, v. 7, n. 8, p. 49–59, 1992.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[5] GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática. **Boletim do GEPEM**, Seropédica, v. 17, p. 29–124, 1985.

[6] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

[7] FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. Textos Universitários. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[8] FOSSA, J.A.; ANJOS, M.F. Sobre a incompatibilidade dos números negativos com o conceito grego de Arithmós, **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v.7, n.14, p. 163–171, 2007.

[9] SÁ, P.F.; ANJOS, L.J.S. Números Negativos: uma trajetória histórica. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracaju. **Anais eletrônicos**... Rio Claro: SBHMat, 2011. Disponível em: <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/indicecom.php> Acesso em: 08 abril 2017.

[10] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coorde-

nação de área, Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo : SE, 2011, 72 p.