UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Combinatória: dos princípios fundamentais da contagem à álgebra abstrata

Renato da Silva Fernandes

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Renato da Silva Fernandes

Combinatória: dos princípios fundamentais da contagem à álgebra abstrata

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
Novembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes, Renato da Silva
F363c Combinatória: dos princípios fundamentais da contagem à álgebra abstrata / Renato da Silva Fernandes; orientador Hermano de Souza Ribeiro. -- São Carlos, 2017.
122 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Combinatória. 2. Álgebra abstrata. I. Ribeiro, Hermano de Souza , orient. II. Título.

Renato da Silva Fernandes

Combinatorics: from fundamental counting principles to abstract algebra

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
November 2017

Dedico esse trabalho à minha esposa Lidiane, por estar sempre ao meu lado durante esta longa trajetória, mesmo nos momentos mais difíceis; e a minha família, especialmente ao meu pai, Renato, por ter dedicado sua vida inteira à felicidade de seus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do programa do PROFMAT / ICMC-USP, em especial à coordenadora do programa, Dra. Ires Dias, por todo a atenção e apoio; à Dra. Miriam Cardoso Utsumi, pela grande contribuição na minha formação; e ao meu orientador Dr. Hermano de Souza Ribeiro, pela atenção, dedicação, ensinamentos e incentivo nas disciplinas cursadas e na orientação desse trabalho.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.” - ***Bertrand Russell***

RESUMO

FERNANDES, R. S. **Combinatória: dos princípios fundamentais da contagem à álgebra abstrata**. 2017. 122 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo amplo e sequencial sobre combinatória. Inicia-se com os fundamentos da combinatória enumerativa, tais como permutações, combinações simples, combinações completas e os lemas de Kaplanski. Num segundo momento é apresentado uma abordagem aos problemas de contagem utilizando a teoria de conjuntos; são abordados o princípio da inclusão-exclusão, permutações caóticas e a contagem de funções. No terceiro momento é feito um aprofundamento do conceito de permutação sob a ótica da álgebra abstrata. É explorado o conceito de grupo de permutações e resultados importantes relacionados. Na sequência propõe-se uma relação de ordem completa e estrita para o grupo de permutações. Por fim, investiga-se dois problemas interessantes da combinatória: a determinação do número de caminhos numa malha quadriculada e a contagem de permutações que desconhecem padrões de comprimento três.

Palavras-chave: Combinatória, álgebra abstrata.

ABSTRACT

FERNANDES, R. S. **Combinatorics: from fundamental counting principles to abstract algebra**. 2017. 122 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

The objective of this work is to make a broad and sequential study on combinatorics. It begins with the foundations of enumerative combinatorics, such as permutations, simple combinations, complete combinations, and Kaplanski's lemmas. In a second moment an approach is presented to the counting problems using set theory; the principle of inclusion-exclusion, chaotic permutations and the counting of functions are addressed. In the third moment a deepening of the concept of permutation is made from the perspective of abstract algebra. The concept of group of permutations and related important results is explored. A strict total order relation for the permutation group is proposed. Finally, we investigate two interesting combinatorial problems: the determination of the number of paths in a grid and the number of permutations that avoids patterns of length three.

Keywords: combinatorics, abstract algebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e objetivos

Combinatória é um ramo da matemática que estuda os diferentes arranjos e combinações de um determinado evento ou situação. A combinatória é dividida em problemas de contagem (combinatória enumerativa), análise de existência de uma situação ótima em problemas de otimização (combinatória extremal) e no estudo da álgebra abstrata (combinatória algébrica) . É uma área de grande importância na matemática discreta com aplicação em diversas áreas do conhecimento, como na química, biologia, estatística, entre outras.

A análise combinatória é um tema presente na educação básica e bastante explorado em vestibulares, principalmente em problemas de contagem. Lima *et al.* (2006a) destacam que a dificuldade natural enfrentada pelos alunos em análise combinatória deve-se, principalmente, à necessidade de utilizar-se, nesta área, o raciocínio crítico e criativo com uma frequência maior do que a utilizada em outros tópicos do Ensino Básico. Ressaltam ainda a importância do professor priorizar o uso inteligente do princípio da multiplicação, em vez de recorrer a diversas fórmulas, cujo uso torna-se confuso para o aluno.

Partindo dessa premissa, tomou-se como ponto de partida deste trabalho o princípio fundamental da contagem e, a partir dele, abordou-se gradualmente os principais temas da análise combinatória, dos mais simples aos mais abstratos, através de uma uma sequência encadeada de exemplos, generalizações, conceitos e definições.

1.2 Desenvolvimento do trabalho

O trabalho foi dividido da seguinte forma:

O Capítulo 2 contém os conceitos mais básicos que envolvem problemas de contagem, tais como o princípio fundamental da contagem e os conceitos de permutação, arranjo e combinação, que são os principais conceitos de combinatória abordados no ensino básico. Ainda nesse capítulo, abordam-se outros conceitos e técnicas de contagem, menos explorados no ensino básico, mas de grande importância para professores (e alunos) que desejam ampliar o repertório de técnicas para a resolução de problemas de combinatória. Entre eles estão o conceito de permutações cíclicas, anagramas com repetições, combinação completa e os lemas de Kaplanski.

O Capítulo 3 propõe uma nova abordagem aos problemas de contagem sob a ótica da teoria de conjuntos. Nesse capítulo é abordado o princípio da inclusão-exclusão, as permutações caóticas, a contagem de número de funções e o número de Stirling de segunda espécie.

O Capítulo 4 é dedicado ao aprofundamento sobre o grupo das permutações. Nesse capítulo são abordados os conceitos de grupo de permutações e ciclos de permutações, além de vários resultados importantes relacionados, tais como a decomposição em ciclos disjuntos, decomposição em transposições e paridade de uma permutação. Ao final desse capítulo é proposto uma relação de ordem total e estrita para o grupo de permutações.

O Capítulo 5 aborda dois problemas distintos bastante interessantes. O primeiro envolve a contagem de caminhos de uma partícula em uma malha quadriculada, sob um conjunto de restrições. O segundo problema consiste em contar o número de permutações que desconhecem padrões de permutação de comprimento 3.

O Capítulo 6 apresenta algumas considerações finais sobre este trabalho.

CAPÍTULO

2

CONCEITOS BÁSICOS DE CONTAGEM

Problemas de contagem consistem em determinar a quantidade de combinações ou possibilidades de um evento. Chamaremos genericamente de evento nosso objeto de investigação, uma determinada condição ou proposição que desejamos investigar; e de decisão cada escolha - ou possibilidade de escolha - que determina o evento. Para resolver problemas de contagem é comum sub-dividirmos o evento principal em sub-eventos ou estudá-lo através de uma analogia com outras situações já estudadas.

Iniciaremos definindo o *princípio fundamental da contagem.*

Definição 1 (Princípio fundamental da contagem)**.**

> O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$. (LIMA *et al.*, 2006a, p. 85)

De forma geral, se há $D_1, D_2, \ldots, D_n$ decisões a serem tomadas, de forma que há x_1 modos de se tomar a decisão D_1, e tomada essa decisão, há x_2 modos de se tomar a decisão D_2 e assim sucessivamente, até chegarmos a decisão D_n, com x_n modos de tomá-la; há então $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ formas de tomar, sucessivamente as decisões $D_1, D_2, \ldots, D_n$.. Esse princípio também é conhecido como princípio multiplicativo (da contagem).

Destacamos aqui a importância da ordem das decisões. Em muitos casos, uma decisão depende da(s) anterior(es), portanto a ordem não pode ser alterada; em outros casos, as decisões são independentes e a ordem em que são tomadas pode ser alterada.

Exemplo 1 (ENEM[1] - 2012)**.** O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa

[1] Exame Nacional do Ensino Médio.

de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

(A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resolução. Cada possível resposta é composta por 3 decisões: Objeto (5 opções), Personagem (6 opções) e Cômodo (9 opções). Pelo *princípio fundamental da contagem*, há $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$ possíveis respostas distintas. Como há 280 alunos, temos 10 alunos a mais do que possíveis respostas (alternativa A).

Exemplo 2 (ENEM - 2013)**.** Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

(A) $\dfrac{62^6}{10^6}$

(B) $\dfrac{62!}{10!}$

(C) $\dfrac{62!\,4!}{10!\,56!}$

(D) $62! - 10!$

(E) $62^6 - 10^6$

Resolução. Uma forma prática de resolver problemas de contagem é organizar um diagrama com o número de possibilidades para cada escolha. A Figura 1 mostra o número de possibilidades para cada dígito no sistema antigo e no sistema novo.

Sistema antigo	10	10	10	10	10	10
	dígito 1	dígito 2	dígito 3	dígito 4	dígito 5	dígito 6
Sistema novo	62	62	62	62	62	62
	dígito 1	dígito 2	dígito 3	dígito 4	dígito 5	dígito 6

Figura 1 – Diagrama de possibilidades de senhas (exemplo 2)

Para calcular a quantidade de senhas possíveis de cada sistema, basta usar o princípio multiplicativo. O sistema antigo permite $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$ senhas diferentes. O sistema novo permite $62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^6$ senhas diferentes. Portanto, o coeficiente de melhora (razão entre o novo número de possibilidades e o antigo) é $\frac{62^6}{10^6}$ (alternativa (A)).

O segundo princípio básico para resolver problemas de contagem é o *princípio aditivo*.

Definição 2 (Princípio aditivo:)**.** "Se A e B são conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos." (MORGADO *et al.*, 1991, p. 18)

De forma geral, se temos $C_1, C_2, \ldots C_n$ conjuntos disjuntos, com $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos, respectivamente, então $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ possui $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ elementos.

Exemplo 3 ((MORGADO *et al.*, 1991, p. 24))**.** O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código morse?

Resolução. Para calcular o total de "palavras" existentes, iremos dividi-las em 4 grupos: O conjunto das "palavras" com 1, 2, 3 ou 4 "letras". A Figura 2 mostra o número de possibilidades de cada um desses conjuntos.

"Palavras" com 1 "letra"	2			
	• ou –			
"Palavras" com 2 "letra"	2	2		
	• ou –	• ou –		
"Palavras" com 3 "letra"	2	2	2	
	• ou –	• ou –	• ou –	
"Palavras" com 4 "letra"	2	2	2	2
	• ou –	• ou –	• ou –	• ou –

Figura 2 – Diagrama de possibilidades de "palavras" do código morse.

Sejam os conjuntos C_1, C_2, C_3, C_4 das "palavras" com 1, 2, 3 e 4 "letras", respectivamente. Esses conjuntos possuem, respectivamente, 2, 4, 8 e 16 elementos. Como são todos disjuntos (não possuem elementos em comum), pelo *princípio aditivo*, o total de “palavras” é igual a: $2+4+8+16=30$.

2.1 Permutações, Arranjos e Combinações

Os principais tópicos de análise combinatória estudados no Ensino Médio são as permutações simples, arranjos e combinações. Uma dificuldade comum dos alunos é saber diferenciar quando a situação-problema envolve uma permutação, um arranjo ou uma combinação. Nesta seção abordaremos esses três tópicos, buscando desmistificar esses conceitos.

Exemplo 4. Quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra feliz?

Resolução. Para formar um anagrama com a palavra feliz, precisamos decidir qual letra ocupará cada posição. Para a primeira posição, temos 5 opções; escolhida uma letra (por exemplo, E), haverá então 4 opções para a segunda posição; escolhida a letra da segunda opção (por exemplo F), haverá 3 opções para a terceira posição; após essa escolha, restará 2 opções para a quarta posição e, por fim, apenas 1 opção para a quinta posição.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas será $5.4.3.2.1 = 5! = 120$.

Observamos que cada nova palavra formada pode ser obtida trocando as letras de posição na palavra. Chamamos essa mudança de posição dos elementos de uma sequência de *permutação*.

Teorema 1 (Número de permutações)**.** O número de modos P_n de se organizar n elementos distintos em uma fila (onde a ordem dos elemento é relevante) é dado por

$$P_n = n!$$

Exemplo 5. Doze pessoas disputam uma competição, onde são premiados com medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente, o primeiro, o segundo e o terceiro colocado. Há quantos possíveis resultados para o pódio dessa competição?

Resolução. Há 12 possibilidades para a primeira colocação. Estabelecida essa posição, há 11 possibilidades para a segunda colocação e, finalmente, 10 possibilidades para a terceira colocação. Há então $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ possíveis combinações para o pódio dessa competição.

Se quiséssemos o número de combinações para as 5 primeiras colocações, teríamos $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$ possibilidades. Por economia de notação podemos escrever $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ como $\frac{12!}{7!}$. este tipo de combinação é chamada de *arranjo simples*.

Teorema 2 (Arranjo Simples)**.** Seja um conjunto com n elementos. O número de modos de se dispor p elementos deste conjunto em fila (onde a ordem dos elemento é relevante), denotado por $A_{n,p}$ é dado por

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 6. Em uma sala de 20 alunos, 5 serão sorteados para representar a turma em um evento. De quantas formas diferentes estes alunos podem ser escolhidos?

Resolução. Podemos pensar inicialmente como um problema de arranjo. Há 20 possibilidades de escolha do primeiro aluno, 19 para o segundo, 18 para o terceiro, 17 para o quarto e 16 para o quinto, como visto na Figura 3. Isso resultaria em $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = \frac{20!}{15!}$.

20	19	18	17	16
1^{o} aluno	2^{o} aluno	3^{o} aluno	4^{o} aluno	5^{o} aluno

Figura 3 – Diagrama de possibilidades de escolha dos alunos (exemplo 6)

Este resultado porém, não está correto. Considerando 5 alunos (A, B, C, D e E), as sequências $ABCDE$, $EDCBA$, $ACBED, \ldots$, estão sendo contabilizadas como combinações diferentes, quando, na verdade, não são. De $\frac{20!}{15!}$, precisamos descartar então os conjuntos que foram contabilizados mais de uma vez. Escolhido 5 alunos $(A, B, C, D$ e $E)$, há 5! permutações desses elementos, então cada conjunto A,B,C,D,E está sendo contabilizada 5! vezes. O número de formas de se escolher 5 alunos dentre 20 é dado por

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} = \frac{20!}{15!5!} = 15504$$

Este tipo de situação é chamada de *combinação simples*. Nos referimos ao resultado acima como combinação de 20 elementos, tomados 5 à 5. No exemplo 6 poderíamos ter pensado, alternativamente, em escolher os 15 alunos que não foram sorteados e chegaríamos ao mesmo resultado final.

$$C_{20,15} = \frac{20}{(20-15)!15!} = \frac{20!}{5!15!} = 15504$$

Teorema 3 (Combinação simples)**.** O número de modos de escolher p elemento dentre n possíveis, onde a ordem dos elementos não é relevante é dado por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Demonstração. O número de modos de escolher p elementos dentre n é dada por $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Como neste caso, a ordem dos elementos não é relevante, basta dividir pelo número de permutações de p elementos. Logo, o número de combinações é dado por $\dfrac{n!}{(n-p)!p!}$. □

Exemplo 7 (ENEM - 2016)**.** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha. O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

(A) $10^2 \cdot 26^2$

(B) $10^2 \cdot 52^2$

(C) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2!}$

(D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

(E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

Resolução. A senha é formada por 4 caracteres. O primeiro passo é escolher em quais posições iremos colocar os algarismos e em quais posições iremos colocar as letras. Escolhido a posição dos algarismos, as 2 posições restantes serão para as letras (uma única possibilidade). Escolhido a posição dos algarismos, há 10 possibilidades para o primeiro espaço e 10 possibilidades para o segundo espaço. Da mesma forma, há 52 possibilidades para o primeiro espaço destinado às letras e 52 possibilidades para o segundo espaço. teremos no total:

$$C_{4,2} \cdot 10^2 \cdot 52^2 = 10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!2!} \qquad \text{(Alternativa (E))}$$

2.1.1 Permutações, Arranjos e Combinações com restrições

Exemplo 8. Quantos anagramas da palavra *MARTELO* não começam nem terminam com vogais?

Resolução. Quando temos restrições em permutações, devemos iniciar a resolução por essas restrições. Vamos começar posicionando consoantes na primeira e última letra: dessa forma há 4 possibilidades para a primeira letra e 3 para a última. Escolhida essas duas letras, as outras 5 letras podem ser posicionadas livremente (5! possibilidades). portanto, há $3.4.5! = 1440$ anagramas da palavra *MARTELO* que não iniciam nem terminam com vogais.

É comum encontrar problemas de permutações, arranjos e combinações que apresentem algumas restrições adicionais em seu enunciado. Lima *et al.* (2006a, p. 87) e Morgado *et al.* (1991, p. 20) defendem que não devemos *adiar dificuldades*, ou seja, nos problemas de combinatória, devemos buscar sempre tomar as decisões mais complicadas e mais restritas logo no começo da resolução.

Exemplo 9. Quantos anagramas de *MARTELO* a letra *A* não é sucedida pela letra *R*?

Resolução. Vamos resolver este problema através de dois métodos diferentes.

Método 1: Vamos iniciar posicionando a letra *A* e, em seguida, posicionar a letra *R*.

Se posicionarmos a letra *A* na última posição, as outras letras podem ser posicionadas livremente, pois não há o risco de formar a sequência AR. Então há 6! anagramas terminando com *A*.

Se posicionarmos a letra A entre a primeira e a sexta posição, a letra R não poderá sucedê-la. Há 6 formas de posicionar a letra A entre a primeira e a sexta posição. Feito isso, a letra R só não pode ser posicionada na posição subsequente de A; portanto a letra R pode ser posicionada em 5 lugares diferentes. Posicionadas as letras A e R, as demais letras podem ser posicionadas livremente (5! modos). Isso resulta em 6.5.5! anagramas não terminados com a letra A. Somando os dois resultados, temos

$$6!+6.5.5! = 6!+5.6! = 1.6!+5.6! = (1+5).6! = 6.6! = 4320 \text{ anagramas}$$

Método 2: Vamos contabilizar todos os anagramas e excluir as combinações indesejadas. Há 7! anagramas da palavra *MARTELO*.

Precisamos agora excluir as que não obedecem a restrição.Quantos anagramas há com a sequência *AR*? Se essas duas letras precisam ficar juntas, basta considerá-las como um único caractere. Dessa forma, teríamos uma permutação entre 6 elementos $\{M, AR, T, E, L, O\}$; há, portanto 6! anagramas com a sequência *AR*.

O número de anagramas que não possui a sequência AR é dada por

$$7!-6! = 7.6!-1.6! = (7-1).6! = 6.6! = 4320$$

Observamos que os resultados são idênticos, conforme esperado.

Ressaltamos que não há uma regra específica para se resolver problemas de permutações, arranjos ou combinações com restrições. A atenção e o cuidado deve ser maior neste tipo de problema, principalmente para evitar a contagem repetida, exclusão de combinações válidas ou não exclusão de combinações inválidas.

2.1.2 Coeficiente Binomial

Exemplo 10. Escreva o polinômio $P(x) = (x+y)^5$ como uma soma de monômios.

Resolução. Um uso interessante de combinação é na obtenção de fórmulas expandidas de polinômios. Cada monômio presente na expansão de $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ será um produto de 5 elementos, x ou y, cada um advindo de um dos fatores $(x+y)$. A Figura 4 ilustra a obtenção de um dos monômios e o total de monômios obtidos nessa expansão.

Pelo princípio multiplicativo, podemos concluir que haverá $2^5 = 32$ elementos nessa expansão, mas como a multiplicação de números reais é comutativa, existem fatores idênticos (por exemplo: $x.x.y.y.x = x.x.x.y.y = x^3.y^2$) que podem ser somados. Ao juntar os monômios semelhantes, obtemos o polinômio:

$$P(x) = a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 y + a_3 \cdot x^3 y^2 + +a_2 \cdot x^2 y^3 + +a_1 \cdot xy^4 + a_0 \cdot y^5$$

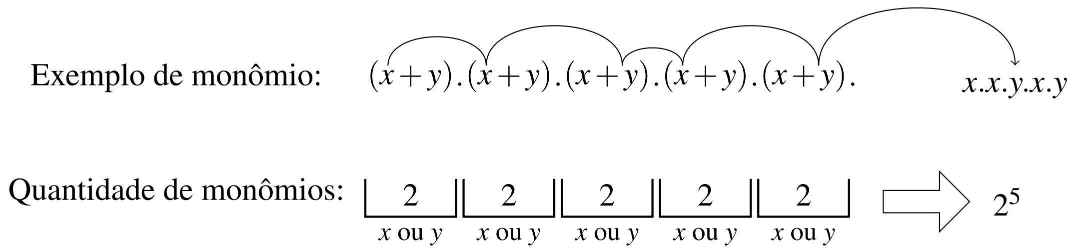


Figura 4 – Ilustração da expansão do polinômio $(x+y)^5$.

Podemos determinar cada coeficiente deste polinômio através de combinações. O coeficiente a_3, por exemplo, corresponde ao número de vezes que o produto $x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$ (ou uma de suas permutações) apareceu na expansão de $(x+y)^5$. Dessa forma, cada coeficiente de $P(x)$ pode ser obtido pensando no número de formas de combinar os fatores x e y em cada monômio. Para isso, basta pensar nas diferentes formas de se distribuir os fatores x e posicionar os fatores y nas posições restantes.

a_5: Número de combinações com 5 x e 0 y. Equivale a distribuir 5 x em 5 posições:

$$a_5 = C_{5,5} = \frac{5!}{5!0!} = 1$$

a_4: Número de combinações com 4 x e 1 y. Equivale a distribuir 4 x em 5 posições:

$$a_4 = C_{5,4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

a_3: Número de combinações com 3 x e 2 y. Equivale a distribuir 3 x em 5 posições:

$$a_3 = C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

a_2: Número de combinações com 2 x e 3 y. Equivale a distribuir 2 x em 5 posições:

$$a_2 = C_{5,2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

a_1: Número de combinações com 1 x e 4 y. Equivale a distribuir 1 x em 5 posições:

$$a_1 = C_{5,1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

a_0: Número de combinações com 0 x e 5 y. Equivale a distribuir 0 x em 5 posições:

$$a_0 = C_{5,0} = \frac{5!}{0!5!} = 1$$

Portanto: $(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$.

Teorema 4 (Expansão Binomial)**.** Dado um binônio $(a+b)^n$, sua expansão é dada por:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n + \binom{n}{0}$$

Em que $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ é chamado de *número binomial* ou *coeficiente binomial*.

O número binomial $\binom{n}{k}$ é igual ao número de combinações de n elementos tomados k à k.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

2.1.3 Triângulo de Pascal

O *Triângulo de Pascal* é uma tabela triangular em que estão listados, na linha k, os coeficientes do binômio $(a+b)^k$. A Figura 5 apresenta as seis primeiras linhas do triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{llllllllcllllll}
n=0 & \binom{0}{0} & & & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & 1 & 1 & & & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & 1 & 2 & 1 & & & 4+6=10 \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \Longrightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & & & & & & & &
\end{array}$$

Figura 5 – Triângulo de Pascal

A lei de formação do teorema de Pascal é dada pela *relação de Stifel*, enunciada no teorema 5.

Teorema 5 (Relação de Stifel)**.** Para quaisquer números $i, n \in \mathbb{N}^2$, com $1 \leq i \leq n$, é válida a relação

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

2 Neste trabalho considera-se que o elemento 0 pertence ao conjunto dos números naturais.

Demonstração. Para cada $i, n \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n$, temos que:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{i \cdot (n!)}{i \cdot (i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n! \cdot (n-i+1)}{i!(n-i)! \cdot (n-i+1)} \\
&= \frac{n! \cdot i}{i!(n+1-i)!} + \frac{n! \cdot (n+1-i)}{i!(n+1-i)!} \\
&= \frac{n!}{i!(n+1-i)!} \cdot (i + (n+1-i)) \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{i!(n+1-i)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i}
\end{aligned}$$

□

A relação de Stifel nos fornece um método prático para calcular os elementos do triângulo de Pascal, sem recorrer à fórmula $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Para calcular $\binom{n}{k}$, basta somar os elementos da coluna k e da coluna $k-1$ da linha anterior $(n-1)$ do triângulo de Pascal.

Teorema 6 (Simetria dos números binomiais)**.** Para quaisquer números $n, p \in \mathbb{N}$ com $p \leq n$, é válida a relação

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Demonstração.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

□

Teorema 7 (Soma da linha do Triângulo de Pascal)**.** Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Demonstração. Seja o binômio $(1+1)^n$. Por um lado, realizando a expansão, temos:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}.1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}.1^2 + ... + \binom{n}{n}1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$$

Por outro lado: $(1+1)^n = 2^n$

Portanto:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

□

2.2 Outras técnicas e princípios relacionados à contagem

Veremos agora outras técnicas de contagem utilizadas na resolução de problemas mais sofisticados.

2.2.1 Permutações circulares e com repetições

Exemplo 11. Em uma atividade escolar, os alunos tinham que pintar cada aresta de um hexágono regular de cores diferentes. Há 6 opções de cores diferentes. Desconsiderando as rotações do hexágono, de quantas maneiras diferentes esse hexágono pode ser pintado?

Resolução. Se a figura não pudesse ser rotacionada, haveriam 6! combinações. Mas rotacionando a figura, não podemos considerar que há 6! combinações, pois algumas combinações seriam contadas mais de uma vez. Sejam C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 cada uma das possíveis cores. A Figura 6 mostra duas configurações de cores equivalentes, sendo a segunda obtida a partir da rotação da primeira.

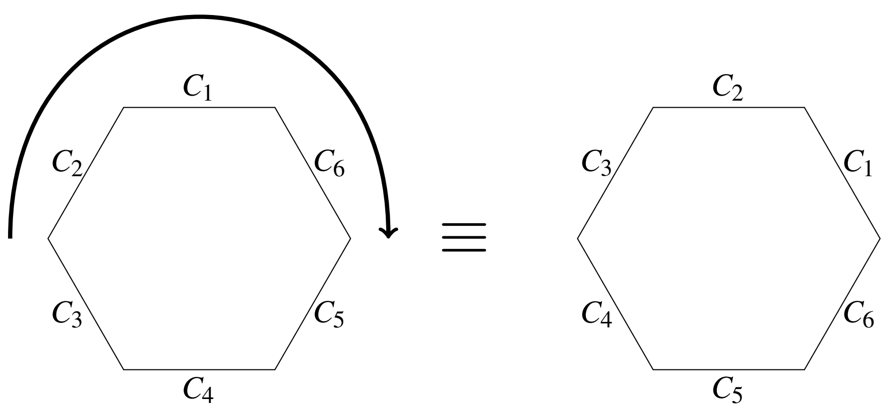


Figura 6 – Duas configurações equivalentes de pintura de um hexágono

Para resolver o impasse da rotação, basta tomar um elemento (cor) como ponto de referência e posicionar os demais elementos a partir desse ponto em determinado sentido (horário ou anti-horário) . Tomando uma determinada cor como referência (C_1) e um sentido (horário), basta posicionar as outras 5 cores nas 5 posições restantes (como pode ser visto na Figura 7). Há, portanto $5! = 120$ formas diferentes de se pintar o hexágono.

1	5	4	3	2	1
C_1	2ª aresta	3ª aresta	4ª aresta	5ª aresta	6ª aresta

Figura 7 – Possíveis combinações de cores para o hexágono

Teorema 8 (Permutação circular)**.** O número de maneiras de se dispor n elementos em um círculo, de forma que, configurações que coincidem se rotacionadas são consideradas iguais é dado por

$$PC_n = (n-1)!$$

Demonstração. Há $n!$ modos de se posicionar n elementos em fila. Se conectarmos o início e o fim da fila, formamos um polígono de n vértices. Dividindo esse resultado pelas n rotações possíveis, obtemos $(n-1)!$ permutações. □

Exemplo 12. De quantas formas podemos pintar o hexágono do exemplo 11 se houvessem 9 cores possíveis para pintar as 6 arestas?

Resolução. Neste caso, escolhemos 6 cores diferentes entre as 9 possíveis e a posição de cada cor. Como há $\binom{9}{6}$ modos de escolher as cores e PC_6 modos de escolher as posições, temos, princípio multiplicativo, que o número de formas de se se pintar esse hexágono é

$$\binom{9}{6} \cdot PC_6 = \frac{9!}{6!3!} \cdot 5! = 10080$$

Exemplo 13. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas crianças não fiquem juntas?

Resolução. Sejam A e B as crianças que não devem ficar juntas. Primeiro, consideramos a posição da criança A como primeira posição e numeramos sequencialmente as posições no sentido horário, conforme vemos na Figura 8.

Possíveis posições para B

A						
posição 1	posição 2	posição 3	posição 4	posição 5	posição 6	posição 7

Figura 8 – Diferentes formas de se posicionar 7 crianças em uma roda

Agora vamos posicionar a criança B. Onde ela não pode ir? Como não queremos que a criança B fique ao lado da criança A, ela não pode ocupar a posição 2 ou a última posição. Então há 4 possibilidades para se posicionar a criança B. Feito isso, há 5! formas de se posicionar as demais crianças. Dessa forma, há $4.5! = 480$ modos de formar a roda de ciranda sem que as crianças A e B fiquem juntas.

Exemplo 14. Quantos anagramas existem com a palavra *ARARAQUARA*?

Resolução. A palavra Araraquara possui 10 letras, mas o número de anagramas não é 10!, pois há letras repetidas.

Para ilustrar, vamos numerar as letras iguais. Quando contamos 10!, contabilizamos os anagramas $A_1R_1A_2R_2A_3Q_1U_1A_4R_3A_5$ e $A_5R_1A_4R_3A_3Q_1U_1A_2R_2A_1$ como palavras diferentes, quando na verdade, os dois formam a mesma palavra (ARARAQUARA). Para resolver esse problema, basta pensarmos em posicionar cada letra através de combinações.

Posicionando a letra A: Há 10 posições para ser ocupado por 5 letras A: $\binom{10}{5}$ modos.

Posicionando a letra R: Há 5 posições para ser ocupado por 3 letras R: $\binom{5}{3}$ modos.

Posicionando as letras Q e U: 2! modos.

O número de combinações será dado então por:

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2! = \frac{10}{5!5!} \cdot \frac{5}{3!2!} \cdot 2! = \frac{10}{5!3!} = 5040$$

A escolha de qual letra iremos posicionar primeiro não importa. Para qualquer ordem escolhida, o número de combinações será : $\dfrac{10!}{5!3!}$

Teorema 9 (Permutações com repetições)**.** O número de sequências distintas de n elementos com q_1 elementos iguais a a_1, q_2 elementos iguais a a_2, ..., q_{k-1} elementos iguais a a_{k-1} e q_k elementos iguais a a_k, é dado por

$$P^n_{(q_1,q_2,\ldots,q_k)} = \frac{n!}{q_1!q_2!q_3!\ldots q_k!}$$

2.2.2 Combinação completa

Exemplo 15. Marcos tem 10 bolinhas de gude idênticas para distribuir entre seus três sobrinhos. Marcos pode dar quantidades diferentes de bolinhas para cada sobrinho. Quantas distribuições diferentes podem ocorrer?

Resolução. Seja x, y e z a quantidade de bolinhas destinadas a cada sobrinho. Há várias combinações para a tríplice (x,y,z): $(1,4,5),(3,1,6),(10,0,0)$, entre outras. O número de possibilidades para o segundo sobrinho depende da quantidade que ficou para o primeiro sobrinho. A única certeza que temos é que $x+y+z = 10$.

Para resolver esse tipo de problema, vamos usar o seguinte recurso: imagine que todas as bolinhas sejam dispostas em um fila (vamos denotar por **o** cada bolinha). Para dividir as bolinhas entre os sobrinhos, vamos traçar 2 riscos (denotados por **I**), delimitando assim 3 grupos; cabendo ao primeiro sobrinho as bolinhas delimitadas no primeiro grupo, ao segundo sobrinho as bolinhas do segundo grupo e assim por diante.

Vamos ilustrar algumas possíveis distribuições para melhor compreensão:

o o o I o o o o I o o o $\Longrightarrow$ $x = 3,\ y = 4$ e $z = 3$

o o o o o o I I o o o o $\Longrightarrow$ $x = 6,\ y = 0$ e $z = 4$.

Para descobrir o número de formas de se distribuir essas bolinhas, basta calcular número de distribuições de 10 caracteres **o** e 2 caracteres **I**. Isso nada mais é do que um problema de anagrama de 12 letras, com 10 letras **o** e 2 letras **I**. Para calcular o número de anagramas, basta escolher 2 posições, dentre as 12, para as letras **I** e distribuir as letras **o** nos espaços restantes.

Conclusão: Marcos tem $\binom{12}{2} = 66$ maneiras de distribuir as 10 bolinhas para seus três sobrinhos.

Exemplo 16. De quantas formas podemos distribuir 20 bolinhas entre cinco crianças?

Resolução. Usando o mesmo raciocínio do problema anterior, teremos 20 **o** para representar as bolinhas. E quantos **I**? Ora, para formar 5 grupos, precisamos de 4 delimitadores, ou seja, 4 **I**. Dessa forma, precisamos descobrir quantos anagramas existem com 20 letras **o** e 4 letras **I**.

Conclusão: Há $\binom{24}{4} = 10626$ modos de distribuir 20 bolinhas para cinco crianças.

Teorema 10 (Combinação completa)**.** O número de formas de se distribuir n objetos idênticos entre p pessoas (com a possibilidade que algumas não recebam nenhum objeto) é dada por

$$CR_{n,p} = \binom{n+p-1}{n}$$

Exemplo 17. Em uma eleição de representante de classe com 4 candidatos inscritos e 25 alunos com direito a voto. Todos os 25 alunos votaram uma única vez e cada candidato recebeu, ao menos, um voto. Qual é o número de resultados diferentes que podem ocorrer nessa eleição?

Resolução. Temos mais uma vez em um problema de combinação completa, porém com uma restrição: cada candidato recebeu ao menos um voto. Sendo x, y, z e w os votos de cada candidato, temos que

$$x+y+z+w = 25. \qquad x,\, y,\, z,\, w \in \mathbb{N}, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ w > 0.$$

Realizando a mudança de variável: $x = x'+1,\ y = y'+1,\ z = z'+1,\ w = w'+1$, obtemos:

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 25 \\ x'+1+y'+1+z'+1+w'+1 &= 25 \end{aligned}$$

$$x' + y' + z' + w' + 4 = 21 + 4$$
$$x' + y' + z' + w' = 21 \quad (x', y', z', w' \in \mathbb{N})$$

Precisamos então distribuir 21 votos restantes entre os 4 candidatos (sendo que agora, cada candidato já possui um voto). Dessa forma, teremos 21 **o** e 3 delimitadores **I**. O número de combinações será

$$\binom{21+3}{3} = \binom{24}{3} = 2024$$

Exemplo 18 ((MORGADO *et al.*, 1991, p. 48))**.** De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

Resolução. À primeira vista, poderíamos pensar que o resultado é $\binom{7}{4}$. Mas isso seria correto se fossemos escolher 4 sabores diferentes dentre os 7. O problema propõe escolher 4 sorvetes (possivelmente do mesmo sabor) dentre 7 opções de sabores. Denominando de A, B, C, D, E, F e G os possíveis sabores, podemos ver algumas possíveis combinações na Figura 9.

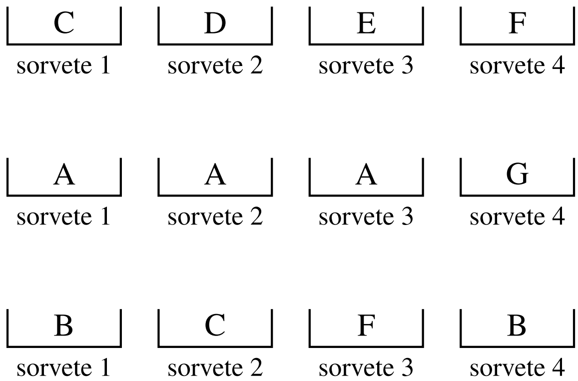


Figura 9 – Possíveis combinações de escolha de sorvetes (exemplo 18).

O número de combinações também não é 7^4, pois diferentes ordens na escolha do sabor (por exemplo, *AABC* e *ABCA*) não configuram escolhas diferentes.

Poderíamos dividir o problemas em casos (três sorvetes do primeiro sabor e um sorvete do segundo sabor; dois sorvetes do primeiro sabor e dois sorvetes do segundo sabor; dois sorvetes do primeiro sabor, um sorvete do segundo sabor e um sorvete do terceiro sabor; todos sorvetes de sabores distintos), mas esse método seria bastante trabalhoso, principalmente se aumentarmos a quantidade de sorvetes e de sabores disponíveis.

O método mais prático é usar o conceito de combinação completa.

Sejam x_A, x_B, ..., x_G a quantidade de sorvetes dos sabores $A, B, \ldots, G$. Temos que:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G = 4 \qquad (x_A,\ x_B,\ x_C,\ x_D,\ x_E,\ x_F,\ x_G \in \mathbb{N})$$

O número de soluções dessa equação é igual ao número de anagramas produzidos por 4 letras **o** e 6 letras **I**. Há portanto, $\binom{4+6}{4} = \binom{10}{4} = 210$ modos de escolher 4 sorvetes dentre 7 opções de sabores.

Teorema 11 (Número de soluções naturais)**.** Seja a equação:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

Onde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{N}$. O número de soluções dessa equação é dada por

$$\binom{S+n-1}{S}$$

Demonstração. Procuramos valores naturais para $x_1, x_2 \ldots, x_n$, de forma que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$. Isto é equivalente a distribuir S objetos em n grupos distintos (variáveis). Usando **o** para representar cada objeto e **I** para representar as separações entre os grupos; precisamos contar o número de anagramas formados por S símbolos **o** e $n-1$ símbolos **I**. Isso resulta em $\binom{S+n-1}{S}$ anagramas.

Portanto, existem $\binom{S+n-1}{S}$ n-túplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ naturais que são solução para a equação $x_1 + x_2 + \ldots x_n = S$. □

Observamos que o número de **o** é igual o resultado do somatório (S) e o número de **I** é igual a quantidade de símbolos "+" na equação ($n-1$).

2.2.3 Lemas de Kaplanski

Definição 3 (Cardinalidade de um conjunto finito)**.** Seja A um conjunto finito formado por n elementos distintos. Dizemos que a cardinalidade deste conjunto é n e denotamos por $|A| = n$.

Definição 4 (p-subconjunto)**.** Dado um conjunto A, dizemos que B é *p-subconjunto* de A se $B \subset A$ e $|B| = p$.

Definição 5 (Função característica[3])**.** Seja A um conjunto não vazio, e B um subconjunto de A. Chamamos de função característica de B (em A) a função $\chi_B : A \to \{0,1\}$ definida por:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in B \\ 0 & \text{se} \quad x \notin B \end{cases}$$

Definição 6 (sequência característica)**.** Seja o conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B \subset A$. A *sequência característica* de B (em A) é a sequência $S_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a_i \in B \\ 0 & \text{se} \quad a_i \notin B \end{cases}$$

A sequência característica permite utilizar uma notação binária de pertinência para representar um subconjunto qualquer. Por exemplo, dado o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, a sequência $(1,0,1,0,1,0,0)$ representa o subconjunto $\{1,3,5\}$ e a sequência $(0,1,0,0,1,1,1)$ representa o subconjunto $\{2,5,6,7\}$.

[3] Definição dada por Muniz Neto (2012)

Exemplo 19. Seja $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Há quantos subconjuntos de A de 3 elementos de forma que não possua elementos consecutivos?

Resolução. Queremos *3-subconjuntos* de A sem elementos consecutivos, como, por exemplo, os subconjuntos $\{1,3,7\}$ e $\{2,4,7\}$. Como deve ser o subconjunto desejado?

Como são necessários três elementos, a sequência característica dele será formada por três algarismos **1** e quatro algarismos **0**. Como não queremos algarismos consecutivos, cada algarismo **1** precisa ser intercalado por, pelo menos, um algarismo **0**. Porém determinar quantos **0** serão colocados entre cada **1** não é fácil.

O segredo é fazer o oposto. Posicionar os algarismos **1** entre os algarismos **0**. Primeiro formamos uma fila de **0** intercalados por lacunas, conforme a Figura 10.

$$\underbrace{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 1}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 2}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 3}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 4}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 5}}$$

Figura 10 – Diagrama para formação de subconjuntos sem elementos consecutivos

Agora basta posicionar os três algarismos **1** nas cinco lacunas disponíveis, que pode ser feito de $\binom{5}{3} = 10$ maneiras diferentes. Desconsiderando as lacunas vazias, a sequência formada pelos algarismos **0** e **1** corresponderão à sequência característica de um subconjunto de 3 elemento não consecutivos.

Portanto há 10 *3-subconjuntos* de A que não possuem elementos consecutivos.

Exemplo 20. Dado $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, existem quantos subconjuntos de B com 4 elementos não consecutivos do conjunto?

Resolução. Como o conjunto B tem 11 elementos e queremos *4-subconjuntos*, a sequência característica será formada por 4 algarismos **1** e 7 algarismos **0**. Primeiro, escrevemos os algarismos **0** intercalados por lacunas, como pode ser visto na Figura 11.

$$\underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 1}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 2}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 3}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 4}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 5}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 6}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 7}}\ 0\ \underbrace{\sqcup\!\sqcup}_{\text{lacuna 8}}$$

Figura 11 – Diagrama para formação de subconjuntos sem elementos consecutivos

Para formar uma sequência característica de um *4-subconjunto*, basta escolher 4 lacunas dentre as 8 para posicionar os algarismos **1**; essa escolha pode ser feita de $\binom{8}{4} = 70$ modos.

Conclusão: Há 70 *4-subconjuntos* de $B = \{1,2,3,\ldots,11\}$ sem elementos consecutivos.

De forma geral, sendo $A = \{1,2,\ldots,n\}$, a sequência característica de um **p-subconjunto** de A é formada por p algarismos **1** e $n-p$ algarismos **0**. Para formar um subconjunto sem elementos consecutivos, precisamos intercalar os algarismos **0** com $n-p+1$ lacunas. Feito isso, basta escolher p lacunas dentre as $n-p+1$ para posicionar os algarismos **1**. Esse resultado é conhecido como *primeiro lema de Kaplanski*.

Teorema 12 (Primeiro Lema de Kaplanski)**.** Dado um conjunto $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de *p-subconjuntos* de A $(A_i \subset A \,:\, |A_i| = p)$ sem elementos consecutivos é dada por

$$f(n,p) = \binom{n-p+1}{p}$$

Exemplo 21 ((MORGADO *et al.*, 1991, p. 73))**.** Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito?

Resolução. O primeiro passo é escolher as cadeiras que serão ocupadas. Pensando que as cadeiras estão numeradas de 1 a 15, basta então contar a quantidade de *5-subconjuntos* de $A = \{1,2,3,\ldots,15\}$ sem elementos consecutivos. Isso pode ser feito de $f(15,5) = \binom{15-5+1}{5} = \binom{11}{5}$.

Agora precisamos posicionar as pessoas. Temos 5! formas distribuir essas cinco pessoas nas cadeiras selecionadas.

Conclusão: Há $5! \cdot \binom{11}{5} = 55440$ dos cinco homens sentarem-se sem ocuparem cadeiras contíguas.

Exemplo 22 ((MORGADO *et al.*, 1991, p. 74))**.** Quantos anagramas da palavra *MISSISSIPI* nos quais não há duas letras *S* consecutivas?

Resolução. Primeiro vamos escolher onde iremos posicionar as letras *S*. Temos que escolher 4 posições dentre as 10 de modo a não escolher duas posições consecutivas. Isso equivale a formar um *4-subconjuntos* de $\{1,2,\ldots,10\}$ sem elementos consecutivos. Pelo primeiro lema de Kaplanski, há $f(10,4) = \binom{10-4+1}{4} = \binom{7}{4}$ formas de se fazer isso.

Agora posicionamos as 4 letras *I* nos 6 espaços restantes. Há $\binom{6}{4}$ formas de se posicionar as letras *I*.

Por fim, posicionamos a letra *M* -$\binom{2}{1}$ formas - e a letra *P* (1 forma).

Conclusão: O número total de anagramas da palavra *MISSISSIPI* sem letras *S* consecutivas é igual à $\binom{7}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} = 1050$.

Exemplo 23. Quatro pessoas irão se sentar em uma mesa redonda de dez lugares numerados. De quantas formas elas podem se sentar em torno dessa mesa de forma que haja sempre pelo menos um lugar vazio entre duas pessoas?

Resolução. Este problema consiste em escolher 4 números do conjunto $\{1,2,\ldots,10\}$ de forma que não haja números consecutivos; porém, neste caso, os números 1 e 10 são considerados como consecutivos.

O primeiro passo é formar a sequência característica desse subconjunto. Essa sequência será formada por 4 algarismos **1** e 6 algarismos **0**. Agora intercalamos os 6 algarismos **0** entre 7 lacunas, das quais, preencheremos 4. Para contornar o problema da primeira e última posição serem consideradas consecutivas, vamos dividir a resolução em 2 casos:

Caso 1 - A primeira posição está ocupada: Se a primeira cadeira estiver ocupada, a última deve ficar obrigatoriamente vazia. Colocando um algarismo 1 na primeira lacuna (já que estamos supondo que o primeiro número pertence ao subconjunto), marcaremos a última lacuna com um **X** para indicar que essa lacuna não pode ser preenchida. Dessa forma, temos que distribuir 3 algarismos **1** entre as 5 lacunas restantes - $\binom{5}{3}$ modos.

Caso 2 - A primeira posição está desocupada: Neste caso, marcamos um **X** na primeira lacuna, indicando que essa posição não pode ser ocupada. Agora, temos que distribuir 4 algarismos **1** entre as 6 lacunas restantes - $\binom{6}{4}$ modos. A Figura 12 representa a distribuição de lugares nesses dois casos.

$$\underbrace{\ \mathbf{1}\ }_{\text{lacuna 1}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 2}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 3}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 4}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 5}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 6}}\ 0\ \underbrace{\ \mathbf{X}\ }_{\text{lacuna 7}}$$

Diagrama da mesa com a primeira cadeira ocupada.

$$\underbrace{\ \mathbf{X}\ }_{\text{lacuna 1}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 2}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 3}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 4}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 5}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 6}}\ 0\ \underbrace{\qquad}_{\text{lacuna 7}}$$

Diagrama da mesa com a primeira cadeira vazia.

Figura 12 – Distribuição de lugares na mesa (exemplo 23)

Juntando as duas possibilidades, temos que há $\binom{5}{3}+\binom{6}{4}=25$ modos de se distribuir as 4 pessoas entre 10 lugares de forma que sempre fique pelo menos uma cadeira vazia entre duas pessoas.

De forma geral, podemos descobrir quantos *p-subconjuntos* $A=\{1,2,\ldots,n\}$ que não possuem elementos consecutivos, sendo 1 e n considerados consecutivos, partindo do mesmo raciocínio. A sequência característica destes *p-subconjuntos* seriam formadas por p algarismos **1** e $n-p$ algarismos **0**. Formaríamos então uma sequência de algarismos **0** intercalados por $n-p+1$ lacunas. A partir deste ponto, vamos dividir em 2 casos: calculamos os subconjuntos que incluem o elemento 1 e os subconjuntos que não incluem o elemento **1**.

Para calcular quantos *p-subconjuntos* incluem o elemento 1, colocamos um algarismo **1** na primeira lacuna e um **X** na última lacuna. Agora, basta distribuir os $p-1$ algarismos **1** restantes entre as $n-p-1$ lacunas possíveis. Há, portanto, $\binom{n-p-1}{p-1}$ subconjuntos que incluem o número 1.

Para calcular quantos *p-subconjuntos* não incluem o elemento **1**, colocamos um **X** na primeira lacuna, para indicar que essa posição permanecerá vazia. Dessa forma, basta distribuir os p algarismos **1** entre as $n-p$ lacunas possíveis.Temos então, $\binom{n-p}{p}$ subconjuntos que não incluem o elemento **1**. A Figura 13 ilustra esses dois casos mencionados.

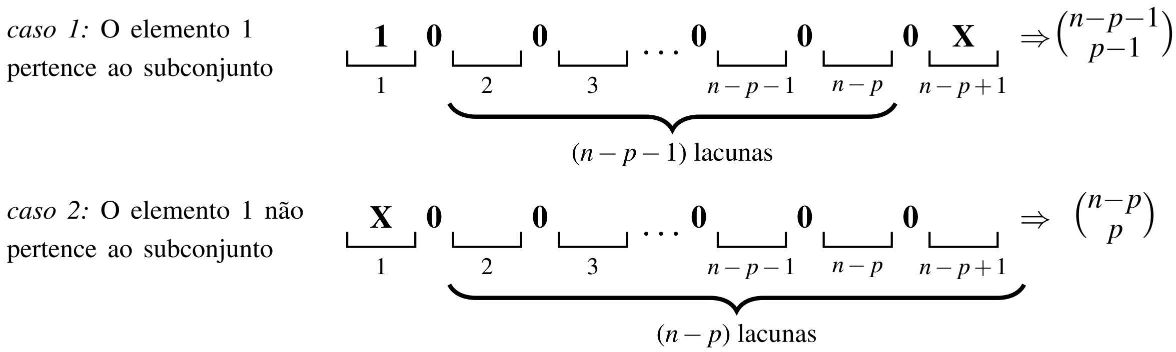


Figura 13 – Formação de um *p-subconjunto* sem elementos consecutivos.

Concluímos então que há $\binom{n-p-1}{p-1}+\binom{n-p}{p}$ *p-subconjuntos* de $A=\{1,2,\dots,n\}$ que não possuem elementos consecutivos, sendo 1 e n considerados consecutivos. Esse resultado é conhecido como *segundo lema de Kaplanski*.

Realizando algumas manipulações, podemos simplificar a expressão acima.

$$\binom{n-p}{p} = \frac{(n-p)!}{p!(n-p-p)!} = \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}$$

$$\binom{n-p-1}{p-1} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!((n-p-1)-(p-1))!}$$

$$= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!}$$

$$= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} \cdot \frac{(n-p)\cdot p}{(n-p)\cdot p}$$

$$= \frac{p}{n-p} \cdot \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}$$

$$\begin{aligned}\binom{n-p-1}{p-1}+\binom{n-p}{p} &= \frac{p}{n-p}\cdot\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}+\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}\\ &= \frac{p+(n-p)}{n-p}\cdot\frac{(n-p)!}{(p-1)!(n-2p)!}\\ &= \frac{n}{n-p}\cdot\frac{(n-p)!}{(p-1)!(n-2p)!}\\ &= \frac{n}{n-p}\cdot\binom{n-p}{p}\end{aligned}$$

Teorema 13 (Segundo Lema de Kaplanski)**.** Dado um conjunto $A=\{1,2,3,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}$, o número de *p-subconjuntos* de A que não possuem elementos consecutivos, sendo 1 e n considerados consecutivos é dado por:

$$g(n,p)=\binom{n-p-1}{p-1}+\binom{n-p}{p}=\frac{n}{n-p}\cdot\binom{n-p}{p}$$

Exemplo 24. De quantas formas podemos escolher três números entre 1 e 9, de forma que haja, pelo menos, uma diferença de três unidades entre os números escolhidos?

Resolução. Para compreender melhor o problema e sua resolução, vamos ilustrar algumas possíveis combinações: Os subconjuntos $\{1,4,7\}$, $\{2,5,9\}$ e $\{3,6,9\}$ são algumas possíveis combinações de três números entre 1 e 9, com uma diferença de, pelo menos, três unidades entre eles. A Figura 14 ilustra esses subconjuntos e suas respectivas sequências características.

$$\begin{aligned}\{1,4,7\} &\Rightarrow (1,0,0,1,0,0,1,0,0)\\ \{2,5,9\} &\Rightarrow (0,1,0,0,1,0,0,0,1)\\ \{3,6,9\} &\Rightarrow (0,0,1,0,0,1,0,0,1)\end{aligned}$$

Figura 14 – Sequência característica dos subconjuntos $\{1,4,7\},\{2,5,9\}$ e $\{3,6,9\}$.

Observamos que, para que a diferença entre dois elementos do subconjunto seja maior ou igual a três unidades, cada algarismo **1** da sequência característica precisa estar intercalado com, pelo menos, dois algarismos **0**. Para resolver esse problema, podemos então pensar em distribuir os algarismos **0** entre os algarismos **1** da sequência característica. Inicialmente, vamos desenhar lacunas entre os três algarismos **1** para depois distribuir nessas lacunas os seis algarismos **0**, sendo que cada lacuna pode ser ocupada por qualquer quantidade de algarismos **0**. A Figura 15 ilustra esse diagrama.

Para descobrir quantos subconjuntos podemos formar, basta calcular de quantas maneiras podemos distribuir os algarismos **0** nas quatro lacunas, sendo que, as lacunas 2 e 3 precisam ter,

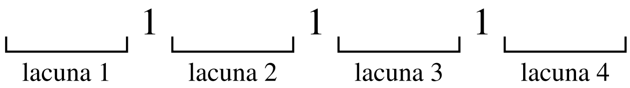


Figura 15 – Diagrama para formação de um *3-subconjunto* com elementos intercalados.

ao menos, dois algarismos **0**. Chamando de L_1, L_2, L_3 e L_4 a quantidade de algarismos **0** em cada lacuna, obtemos a seguinte equação:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 6 \qquad L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathbb{N} \quad L_2 \geq 2, L_3 \geq 2$$

Realizando a mudança de variável: $L_2 = L_2' + 2, \quad L_3 = L_3' + 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 6 \\
&L_1 + L_2' + 2 + L_3' + 2 + L_4 = 6 \\
&L_1 + L_2' + L_3' + L_4 = 2 \qquad (L_1,\, L_2',\, L_3',\, L_4 \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Precisamos descobrir o número de soluções naturais para essa equação. Trata-se então de um problema de *combinação completa*. O número de soluções será igual ao número de anagramas produzidos por 2 letras **o** e 3 letras **I**, portanto $\binom{5}{3} = 10$.

Conclusão: Existem $\binom{5}{3} = 10$ formas de se escolher três números entre 1 e 9 de forma que haja, pelo menos, uma diferença três unidades entre os números escolhidos.

Exemplo 25 ((MORGADO *et al.*, 1991, p. 77)). De quantos modos é possível formar um *p-subconjunto* de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto?

Resolução. Trata-se de uma *generalização do primeiro lema de Kaplanski*. Queremos encontrar o número de *p-subconjuntos* de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que, para quaisquer dois elementos do subconjunto, há, pelo menos, r números naturais entre eles.

Para resolver esse problema, iremos usar o mesmo método usado no exemplo 24. Para formar a sequência característica dos subconjuntos, primeiro formamos uma sequência de p algarismos **1** intercalados por $p+1$ lacunas, conforme a Figura 16. Nessas lacunas, iremos distribuir $n-p$ algarismos **0**, sendo que, as lacunas $2, 3, \ldots, p$ devem conter, ao menos, r algarismos **0**.

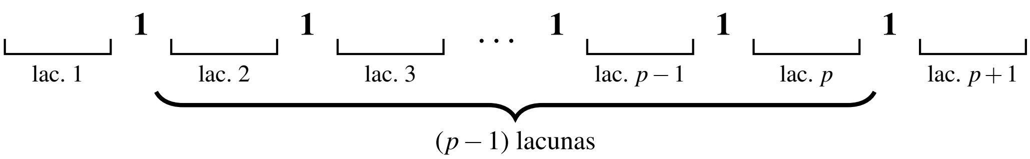


Figura 16 – Diagrama da generalização do primeiro lema de Kaplanski.

Chamando de $L_1, L_2, \ldots L_{p+1}$ a quantidade de algarismos **0** em cada lacuna, obtemos a seguinte equação:

$$L_1 + L_2 + \ldots L_p + L_{p+1} = n - p \qquad L_1, L_2, \ldots L_{p+1} \in \mathbb{N}, \;\; L_i \geq r, \;\; \forall i \in 2, 3, \ldots, p$$

Realizando as seguintes mudanças de variáveis:

$L_i = L_i' + r, \;\; \forall i \in 2, 3, \ldots, p$

Obtemos:

$L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_{p-1} + L_p + L_{p+1} = n - p$

$$L_1 + \underbrace{(L_2' + r) + (L_3' + r) + \ldots + (L_{p-1}' + r) + (L_p + r)}_{p-1 \text{ parcelas}} + L_{p+1} = n - p$$

$$L_1 + L_2' + L_3' + \ldots + L_{p-1}' + L_p' + L_{p+1} + (p-1) \cdot r = n - p$$

$$L_1 + L_2' + L_3' + \ldots + L_{p-1}' + L_p' + L_{p+1} = n - p - (p-1) \cdot r \qquad (L_1, L_2', \ldots, L_p', L_{p+1} \in \mathbb{N})$$

Agora basta usar o conceito de combinação completa, para descobrir o número de soluções dessa equação. Seja $k = n - p - (p-1)r$; o número de soluções será igual ao número de anagramas com k letras **o** e p letras **I**. O número de soluções é dado por:

$$\binom{k+p}{p} = \binom{(n-p-(p-1)r)+p}{p} = \binom{n-(p-1)r}{p}$$

Conclusão: Há $\binom{n-(p-1)r}{p}$ *p-subconjuntos* tais que, para quaisquer dois elementos do subconjunto, há pelo menos r números naturais entre eles.

Teorema 14 (Generalização do primeiro Lema de Kaplanski)**.** Seja o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. A quantidade de *p-subconjuntos* de A onde, entre cada dois elementos do subconjunto há, pelo menos r elementos que não pertencem a esse subconjunto é dado por:

$$f(n, p, r) = \binom{n - (p-1) \cdot r}{p}$$

CAPÍTULO

3

COMBINATÓRIA E A TEORIA DE CONJUNTOS

Uma combinação pode ser analisada sob ótica da teoria de conjuntos. Os problemas de contagem consistem em calcular a cardinalidade do conjunto formado a partir das condições apresentadas no problema. Todos os problemas apresentados no capítulo 2 podem ser representados utilizando conjuntos finitos de números naturais e produtos cartesianos desses conjuntos. Veremos alguns exemplos de como fazer essa representação.

Nesta seção, definiremos, em todos os exemplos, um conjunto que representa as combinações desejadas e descobriremos o número de combinações calculando a cardinalidade do conjunto.

Exemplo 26. Qual é o número de senhas formadas de 5 dígitos composta por qualquer algarismo de 0 a 9?

Resolução. Nesse exemplo, precisamos escolher 5 números do conjunto $\{0,1,\ldots,9\}$ para ocupar a posição de cada dígito. Neste caso, a posição de cada número escolhido é relevante $(20340 \neq 00234)$. Se chamarmos de d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5 cada dígito; cada senha corresponde a uma 5-tupla $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$.

Chamando de A o conjunto de todas as senhas de 5 dígitos, esse conjunto será formado pelo produto cartesiano de cinco conjuntos $\{0,1,\ldots,9\}$, ou seja:

$$A = \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,9\}$$

É fácil perceber que o número de senhas é dado pela cardinalidade do conjunto A, $|A| = 10^5 = 100000$.

Exemplo 27. Quantas senhas de 5 dígitos (com algarismos de 0 a 9) existem onde o último dígito é ímpar?

Resolução. Cada restrição imposta ao exemplo 26 implica num “recorte” do nosso conjunto A, definido anteriormente. O conjunto B de todas as senhas onde o último dígito é ímpar é um subconjunto de A. O conjunto B é definido como:

$$B = \{0,1,\dots,9\} \times \{0,1,\dots,9\} \times \{0,1,\dots,9\} \times \{0,1,\dots,9\} \times \{1,3,5,7,9\}$$

Portanto o número de senhas é dado por : $|B| = 10^4 \cdot 5 = 50000$

Exemplo 28. Quantas são as senhas de 5 dígitos onde todos dígitos são distintos?

Resolução. Seja C o conjunto de todas as senhas de 5 dígitos distintos. Dado o conjunto A, conforme definido no exemplo 26, o conjunto C pode ser definido como:

$$C = \{(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5) \subset A : d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_4 \neq d_5\}$$

Porém, essa definição não ajuda a calcular $|C|$. Podemos definir o conjunto C como:

$C = \{(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5) \,:\, d_1 \in B_1,\ d_2 \in B_2,\ d_3 \in B_3,\ d_4 \in B_4,\ d_5 \in B_5\}$

Onde: $B_1 = \{0,1,\dots,9\}$, $B_2 = B_1 \setminus \{d_1\}$, $B_3 = B_2 \setminus \{d_2\}$, $B_4 = B_3 \setminus \{d_3\}$, $B_5 = B_4 \setminus \{d_4\}$

Dessa forma: $|B_1| = 10$; $|B_2| = 9$; $|B_3| = 8$; $|B_4| = 7$; $|B_5| = 6$

Portanto: $|C| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$

Vamos apresentar agora duas definições que utilizaremos nos próximos exemplos.

Definição 7 (Conjunto das partes)**.** Dado um conjunto A, denominamos de *conjunto das partes de* A, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A, e denotamos este conjunto por $\mathcal{P}(A)$. Formalmente, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ é definido como: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$

Definição 8 (Subconjunto das Partes com k elementos)**.** Seja A um conjunto. Denotamos por $\mathcal{P}_k(A)$ o subconjunto das partes de A que possuem (exatamente) k elementos[4]. Denominaremos $\mathcal{P}_k(A)$ de *conjuntos das partes com k elementos* ou *conjunto dos k-subconjuntos de* A, definido como:

$$\mathcal{P}_k(A) = \{X : X \subset A, |X| = k\}$$

Exemplo 29. De quantas formas diferentes podemos escolher 3 professores para formação de uma comissão dentre um grupo de 20 professores?

Resolução. Seja D o conjunto dos professores. Mesmo esse conjunto não sendo um conjunto numérico, podemos estabelecer uma bijeção do conjunto D com o conjunto $D' = \{1,2,\dots,20\}$. Para isso, basta atribuir um número de 1 a 20 a cada professor. Veja que o critério para essa numeração não é importante. De fato, esse critério sequer precisa ser explícito. Como D e D'

4 Muniz Neto (2012, p. 162) apresenta a notação $\mathcal{P}_n(A)$, mas não define um uma nomenclatura para este conjunto. A denominação apresentada foi escolhida pelo autor deste trabalho.

possuem a mesma cardinalidade, isso é suficiente para garantir a existência de uma bijeção entre esses dois conjuntos.

Seja C o conjunto de todas as possíveis comissões. O conjunto C pode ser definido como: $C = \{\{x,y,z\} : x,y,z \in D\}$. O conjunto C é formado por todos os *3-subconjuntos* de D. Usando a notação da definição 8, $C = \mathcal{P}_3(D)$. Se desejarmos trabalhar apenas com conjuntos numéricos, temos que $C' = \mathcal{P}_3(D')$.

Para calcular o número de *3-subconjuntos* de $D' = \{1,2,\dots,20\}$, basta calcular $\binom{20}{3}$. Dessa forma $|C| = |C'| = \binom{20}{3} = 1140$.

Exemplo 30. De quantas formas pode ser formada uma comissão de 3 membros escolhidos dentre 20 professores, sendo que um desses membro será designado como presidente da comissão?

Resolução. Vamos utilizar novamente o conjunto D de professores definido no exemplo 29. Neste caso, dentre os 3 membros, há uma posição de destaque e duas posições idênticas. O conjunto C de todas as possíveis comissões pode ser definida então como:

$$C = \{\ (x,\{y,z\}) : x \in D,\ \ y,z \in D \setminus \{x\}\ \}$$

Veja que C é então o produto cartesiano de dois conjuntos de naturezas distintas. A primeira coordenada x é um elemento do conjunto D; a segunda coordenada é um *2-subconjunto* de $D \setminus \{x\}$. Como $|D| = 20$ e $|\mathcal{P}_2(D \setminus \{x\})| = \binom{19}{2}$, então $|C| = 20 \cdot \binom{19}{2} = 3420$.

Exemplo 31. De quantas formas podemos distribuir 10 bolas idênticas em 3 cestos?

Resolução. Seja E o conjunto dos diferentes modos de se distribuir 10 bolinhas em 3 cestos. Definindo as variáveis x,y,z para representar a quantidade de bolinhas em cada cesto, podemos definir o conjunto E da seguinte maneira:

$$E = \{(x,y,z) :\ x,y,z \in \mathbb{N},\ \ x+y+z = 10\}$$

Usando o conceito de combinação completa, temos que $|E| = \binom{10+2}{2} = \binom{12}{2} = 66$.

Nesta seção, todos os exemplos foram resolvidos, partindo da definição de um conjunto de combinações. Algumas das vantagens de se definir as combinações como um conjunto são:

- poder definir de forma clara e precisa o conjunto de combinações procurado em problemas mais complexos;
- conseguir realizar estimativas e resultados aproximados da cardinalidade do conjunto de combinações para problemas complexos;
- poder utilizar as operações e conceitos da teoria de conjuntos - união e interseção de conjuntos, conjunto complementar, diferença de conjuntos, conjuntos disjuntos, entre outros - na resolução de problemas de combinatória.

3.1 Princípio da inclusão-exclusão

Vimos na seção anterior que os problemas de contagem se resumem em descobrir a cardinalidade de um conjunto de possibilidades. O princípio da inclusão-exclusão permite descobrir o número de elementos do conjunto união de dois ou mais conjuntos não disjuntos.

Teorema 15 (Princípio da Inclusão-Exclusão simples)**.** Dados dois conjuntos A e B: $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

Demonstração. Vamos dividir a resolução em dois casos: A e B serem ou não disjuntos.

Caso 1- Se A e B são disjuntos, $A\cap B=\varnothing$, o que implica: $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| = |A|+|B|$, como já visto na definição 2 (Princípio Aditivo).

Caso 2- Se A e B não são disjuntos, $A\cap B\neq\varnothing$. Seja $A\cap B=C$. Definamos os conjuntos $A'=A\setminus C$ e $B'=B\setminus C$.

$$A = A'\cup C \text{ e } A'\cap C=\varnothing \implies |A| = |A'\cup C| = |A'|+|C|$$

$$\begin{aligned}
|A\cup B| =& |(A'\cup C)\cup B| = |(A'\cup(C\cup B)| = |A'\cup B| \\
=& |A'|+|B| \\
=& |A'|+|B|+|C|-|C| = (|A'|+|C|)+|B|-|C| \\
=& |A'\cup C|+|B|-|C| \\
=& |A|+|B|-|C|
\end{aligned}$$

□

Agora vamos generalizar o princípio da inclusão-exclusão para n conjuntos.

Teorema 16 (Princípio da Inclusão-Exclusão Generalizado)**.** Seja $A_1,A_2,\ldots,A_n$ conjuntos finitos e $S_1,S_2,\ldots S_n$ as somas:

$$\begin{aligned}
S_1 =& \sum_{i=0}^{n}|A_i| \\
S_2 =& \sum_{0\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| \\
S_3 =& \sum_{0\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
\ldots& \\
S_n =& \left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right|
\end{aligned}$$

temos que:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| = S_1-S_2+S_3-\ldots+(-1)^n\cdot S_n$$

No princípio da inclusão-exclusão ocorre a alternância dos sinais das parcelas. Começamos contabilizando a cardinalidade de todos os conjuntos; depois excluímos (subtraímos) a cardinalidade de todas as intersecções de 2 conjuntos; depois incluímos (adicionamos) a cardinalidade de todas as intersecções de 3 conjuntos; e assim sucessivamente.

No teorema 16, S_k representa o somatório da cardinalidade de todas as intersecções de k conjuntos escolhidos dentre $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Observamos que S_k é uma soma de $\binom{n}{k}$ parcelas.

Exemplo 32 ((MORGADO *et al.*, 1991, p. 66))**.** Quantos são os inteiros de n dígitos, que têm todos os dígitos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3\}$? Em quantos deles os inteiros $1,2$ e 3 figuram todos?

Resolução. A quantidade de números de n dígitos formados pelos dígitos $1,2$ e 3 é 3^n.

Já para contar a quantidade de números onde os três algarismos figuram, iremos utilizar o princípio da inclusão-exclusão. Iniciamos considerando todas os números de n dígitos formados pelos algarismos $1,2$ e 3 (total: 3^n). Na sequência, excluímos aqueles onde um dos algarismos não figura: Escolhemos então dois algarismos dentre os 3 e formamos um número de n dígito com eles $\left(\binom{3}{2}2^n\right)$. Agora, incluímos novamente os números onde dois dos algarismos não figuram: $\left(\binom{3}{1}1^n\right)$. Dessa forma, a quantidade de número de n dígitos formados pelos algarismos $1,2$ e 3 onde todos eles figuram é dado por:

$$3^n - \binom{3}{2}2^n + \binom{3}{1}1^n$$

Podemos reescrever essa expressão para induzir uma expressão mais geral:

$$\binom{3}{3}3^n - \binom{3}{2}2^n + \binom{3}{1}1^n - \binom{3}{0}0^n$$

3.2 Permutações Caóticas

Para ilustrar o que é uma permutação caótica, vamos analisar uma situação relatada por Carneiro (1995).

> Pouco antes das festas do último fim de ano, eu estava reunido com um grupo de familiares, que resolveu planejar a célebre brincadeira do "amigo oculto". Éramos 9 pessoas. Foi escrito o nome de cada pessoa em um papelzinho, e procedeu-se ao sorteio, para determinar quem iria dar presente a quem. Feito o sorteio, logo apareceu alguém que tirou a si mesmo. Sendo contra as regras da brincadeira que alguém presenteie a si mesmo, e para preservar o sigilo, tivemos que proceder a outro sorteio. No segundo sorteio, o mesmo fenômeno ocorreu, dessa vez com outra pessoa. Uma das pessoas presentes — um analista de sistemas — voltou-se para mim e perguntou: "Você, que é matemático, diga: vai ficar acontecendo isso a vida toda? Qual a probabilidade de isso ocorrer?" (CARNEIRO, 1995)

Para que um sorteio de "amigo oculto" seja válido é necessário que nenhuma pessoa tire o próprio nome. Se associarmos a cada pessoa um número de 1 a 9, de acordo com a ordem da retirada dos papéis, todas as possibilidades de sorteio são meras permutações. Para que um sorteio seja válido é necessário que nenhuma pessoa sorteie o próprio número, ou seja, nenhum número pode estar associado a ele mesmo.

Esse tipo de permutação é conhecida como permutação caótica.

Definição 9 (Permutação Caótica)**.** Uma permutação dos números (1, 2, ..., n) é dita *caótica* (ou desordenamento) quando nenhum número está na seu lugar primitivo.

As permutações 52134 e 31452 são caóticas; já a permutação 15234 não é, pois o elemento **1** está na primeira posição.

Exemplo 33. Qual é a probabilidade de nenhuma pessoa retirar o próprio nome num sorteio de "amigo oculto" com 9 pessoas?

Resolução. Primeiramente, vamos descobrir o número de combinações onde uma pessoa não retira o próprio nome, ou seja, o número de permutações caóticas de 9 elementos. Vamos resolver esse problema usando o princípio da inclusão-exclusão.

Primeiro, contamos todas as possibilidades de sorteios: 9!.

Agora, contamos as combinações onde pelo menos 1 pessoa sorteou o próprio nome: Neste caso, há $\binom{9}{1}$ formas de escolher a pessoa que irá sortear ela mesma e 8! formas de se sortear o restante das pessoas. Temos, portanto, $\binom{9}{1}8!$ combinações.

O número de combinações onde pelo menos 2 pessoas sortearam o próprio nome: Há $\binom{9}{2}$ formas de escolher as duas pessoas que irão sortear a si mesmas e 7! formas de se sortear o restante das pessoas. Temos, portanto, $\binom{9}{2}7!$ combinações.

Seguindo o mesmo raciocínio, o número de combinações onde pelo menos k pessoas sortearam o próprio nome $(0 < k \leq 9)$ é dado por $\binom{9}{k} \cdot (9-k)!$.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, o número de permutações onde nenhuma pessoa tira o próprio nome é dada por:

$$9! - \binom{9}{1}8! + \binom{9}{2}7! - \binom{9}{3}6! + \binom{9}{4}5! - \binom{9}{5}4! + \binom{9}{6}3! - \binom{9}{7}2! + \binom{9}{8}1! - \binom{9}{9}0! = 133496$$

Logo, a probabilidade de nenhuma das 9 pessoas sortear o próprio nome é:

$$\frac{133496}{9!} \approx 37\%$$

Vamos generalizar o cálculo das permutações caóticas.

Seja D_n o número de permutações caóticas do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. A ideia é utilizar o raciocínio complementar: o número de permutações caóticas é igual o número total de permutações menos as permutações onde algum elemento se encontra na posição original. O número total de permutações é dado por $n!$. Para padronizar a escrita, tomaremos o total de permutações como $\binom{n}{0}n!$.

Agora, excluímos as permutações onde há, pelo menos, um elemento na posição original. Para isso, escolhemos 1 elemento dentre n e permutamos os outros: isso gera $\binom{n}{1}(n-1)!$ combinações.

Dentre os elementos excluídos, há aqueles onde dois elementos estão na posição original. Essas permutações foram contadas repetidamente e, por isso, precisamos "excluir" da exclusão. Há $\binom{n}{2}(n-2)!$ permutações dessa forma.

Seguindo esse raciocínio e utilizando o princípio da inclusão-exclusão, obtemos a seguinte expressão:

$$D_n = \binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}0!$$

Logo:

$$D_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(n-i)!$$

Essa expressão pode ser simplificada:

$$D_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(n-i)!$$

$$D_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)(n-i)!$$

$$D_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n \cdot \frac{n!}{i!}$$

$$D_n = n!\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^n}{i!}\right)$$

Teorema 17 (Número de permutações caóticas)**.** O número de permutações caóticas (ou desarranjos) de n elementos é dada por

$$D_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(n-i)! \;=\; n!\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^n}{i!}\right)$$

Exemplo 34 (Morgado *et al.* (1991, p. 71))**.** Quantas são as permutações de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ que têm exatamente 3 elementos no seu lugar primitivo?

Resolução. Queremos que exatamente 3 elementos ocupem suas posições originais. Para isso, basta escolher 3 elementos (dentre 7) e *desarranjar* os 4 elementos restantes. Logo, o número de permutações será dado por

$$\binom{7}{3}D_4 = \binom{7}{3}\left[4!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)\right] = 35 \cdot 9 = 315$$

3.3 Contando Funções

A proposta desta seção é contar o número de funções de um conjunto finito A em um conjunto finito B que atendam a algumas condições e restrições. Diversos problemas de combinatória consistem em determinar de quantas formas podemos posicionar um conjunto de elementos. Ao distribuir os elementos em uma determinada posição, a relação entre posição e elemento pode ser vista como uma função matemática. Por isso, vários problemas de contagem em diversos contextos podem ser interpretados como um problema de contagem de funções. Estabelecer essa relação torna a resolução de problemas de contagem mais objetiva.

Exemplo 35. Dados os conjuntos $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{1,2,\ldots,10\}$, existem quantas funções $f : A \to B$?

Resolução. Uma função associa cada valor $x \in A$ a um (único) valor $y \in B$. Dessa forma, cada $x \in \{1,2,\ldots,6\}$ pode ser associado a qualquer valor $y \in \{1,2,\ldots,10\}$, inclusive valores repetidos. A Figura 17 representa o número de possibilidades de imagem para cada valor de $x \in \{1,2,\ldots,6\}$. Como, para cada valor de x, temos 10 possíveis imagens, existem 10^6 funções $f : A \to B$.

10	10	10	10	10	10
$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$

Figura 17 – Possibilidades para a função $f : \{1,2,\ldots,6\} \to \{1,2,\ldots,10\}$

Exemplo 36. Dados $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{1,2,\ldots,10\}$, quantas funções $f : A \in B$ são injetoras?

Resolução. Uma função $f : A \to B$ é injetora se, $\forall\, x,y \in A \;\; x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Em outras palavras, um mesmo elemento do conjunto B não pode estar associado a dois elementos distintos de A. Para contar o número de funções injetoras, basta então escolher 6 dentre os 10 elementos do conjunto B e permutá-los como imagem dos 6 elementos de A.

Conclusão: Há $\binom{10}{6}6! = 151200$ funções $f : A \in B$ injetoras.

Exemplo 37. Dados $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{1,2,\ldots,10\}$, quantas funções $f : A \in B$ são crescentes?

Resolução. Uma função $f : A \to B$ é crescente se, $\forall\, x,y \in A,\; x > y \implies f(x) > f(y)$. Note que se f é crescente, então f é injetora. Primeiramente, vamos escolher 6 elementos de B para o conjunto imagem dessa função. Escolhidos os 6 elementos, basta ordená-los de forma crescente. Veja que só há uma forma de colocar os elementos em ordem crescente.

Conclusão: Existem $\binom{10}{6} = 210$ funções $f : A \to B$ crescentes.

Exemplo 38. Dados $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{1,2,\ldots,10\}$, quantas funções $f : A \in B$ são decrescentes?

Resolução. Basta proceder como no exemplo anterior, porém posicionando os elementos em ordem decrescente. Há, portanto, $\binom{10}{6} = 210$ funções $f : A \to B$ decrescentes.

Exemplo 39. Dados $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{1,2,\ldots,10\}$, quantas funções $f : A \in B$ são não decrescentes? E não crescentes?

Resolução. Uma função $f : A \to B$ é não decrescente se, $\forall\, x,y \in A,\ x > y \implies f(x) \geq f(y)$.

Em funções não decrescentes, dois elementos diferentes de A podem estar associados ao mesmo elemento de B. Precisamos determinar quais elementos de B formarão o conjunto imagem e quantas vezes cada elemento da imagem será repetido - isto é, a quantos elementos do domínio esse elemento da imagem está associado. Escolhidos os elementos do conjunto imagem e quantas vezes eles se repetirão, só existe uma forma de associá-los aos elementos de A para que a função seja não decrescente.

Para determinar quantas vezes cada elemento de B será imagem de algum elemento de A, basta calcular, através de combinação completa, o número de modos de distribuir 6 objetos (elementos de A) em 10 grupos (elementos de B).

Sendo $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ a quantidade de vezes que o elemento $1,2,\ldots,10$ aparece como imagem da função, temos que: $y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 6\ , \quad (y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N})$.

O número de soluções dessa equação é igual ao número de funções $f : A \to B$ não decrescentes.

$$CR_{6,10} = \binom{10-1+6}{6} = \binom{15}{6} = 5005$$

O número de funções não crescentes será idêntico, pois para estabelecer uma bijeção entre as funções não crescentes e não decrescentes, basta inverter a ordem das imagens.

Conclusão: Há 5005 funções $f : A \to B$ não decrescentes e 5005 não crescentes.

Exemplo 40. Quantas funções de $A = \{1,2,\ldots,6\}$ em $B = \{1,2,\ldots,10\}$ são monótonas?

Resolução. Uma função monótona é uma função que preserva (ou inverte) a relação de ordem entre os conjuntos relacionados. As funções monótonas são classificadas como:

- crescentes ($\forall\, x,y \in A,\ x > y \implies f(x) > f(y)$);
- decrescentes ($\forall\, x,y \in A,\ x > y \implies f(x) < f(y)$);
- (monótonas) não decrescentes ($\forall\, x,y \in A,\ x > y \implies f(x) \geq f(y)$);
- (monótonas) não crescentes ($\forall\, x,y \in A,\ x > y \implies f(x) \leq f(y)$).

Seja U o conjunto de todas as funções $f : A \to B$. Seja C, D, E, F e G, respectivamente, os subconjuntos de U das funções crescentes, das funções decrescentes, das funções não decrescentes, das funções não crescentes e das funções monótonas. Temos que: $G = C \cup D \cup E \cup F$; além disso, $C \subset E$ e $B \subset F$, então $G = E \cup F$.

Vimos no exemplo 39 que o número de funções não crescentes é igual ao número de funções não decrescente ($|E| = |F|$). Dessa forma, $|G| = |E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F| = 2|E| - |E \cap F|$.

Precisamos determinar $|E \cap F|$. O conjunto $E \cap F$ não é vazio. Ele é formado por todas as funções que são, simultaneamente, não decrescentes e não crescentes. $E \cap F$ é o conjunto das funções constantes ($f(x) = k$, $\forall\, x \in A$). Para cada elemento de B, teremos uma função constante diferente, então $|E \cap F| = 10$. Como $|E| = CR_{6,10} = \binom{15}{6} = 5005$ (exemplo 39), o número de funções $f : A \to B$ monótonas é igual à:

$$2 \cdot \binom{15}{6} - 10 = 10000$$

Exemplo 41. Seja $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantas funções $f : A \to B$ são sobrejetoras?

Resolução. Uma função é sobrejetora quando todos os elementos do contradomínio (conjunto B) fazem parte da imagem da função. Para encontrar o número de funções sobrejetoras, usaremos o princípio da inclusão-exclusão; para isso, calculamos:

1. O número de funções de A em B: há 4 possibilidades de imagem para cada elemento de A, portanto há 4^7 funções. Para uniformizar a representação, tomaremos 4^7 como $\binom{4}{4} \cdot 4^7$.

2. O número de funções onde 1 elemento de B não pertence a imagem: escolhemos 3 elementos a, b e c do conjunto B e calculamos o números de funções $f : A \to \{a, b, c\}$. Isso resulta em $\binom{4}{3} \cdot 3^7$ funções.

3. O número de funções onde 2 elementos de B não pertence a imagem: escolhemos 2 elementos a e b do conjunto B e calculamos o números de funções $f : A \to \{a, b\}$. Isso resulta em $\binom{4}{2} \cdot 2^7$ funções.

4. O número de funções onde 3 elementos de B não pertence a imagem: $\binom{4}{1} \cdot 1^7$ funções.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, o número de funções sobrejetoras é:

$$\binom{4}{4} \cdot 4^7 + \binom{4}{3} \cdot 3^7 + \binom{4}{2} \cdot 2^7 + \binom{4}{1} \cdot 1^7 = 8400$$

Exemplo 42. Dados dois conjuntos A e B, ambos com n elementos. Quantas são as funções bijetoras $f : A \to B$?

Resolução. Uma função $f : A \to B$ é bijetora se todos elementos de B estão associados a um, e somente um, elemento de A. Se formarmos uma sequência com todos elementos de A, basta determinar o número de formas de posicionar os elementos de B sobre essa sequência.

Conclusão: Existem $n!$ funções bijetoras $f : A \to B$.

Com base no que foi observado nos exemplos anteriores, forneceremos fórmulas gerais para a contagem de funções.

Teorema 18 (Número de Funções)**.** Dados dois conjuntos A e B tal que $|A| = k$ e $|B| = n$, $(n, k \in \mathbb{N}^*)$.

1. O número **total** de funções $f : A \to B$ é dado por

$$n^k \qquad (\forall\ k, n)$$

2. O número de funções $f : A \to B$ **injetoras** é dado por

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (n \geq k)$$

3. O número de funções $f : A \to B$ **crescentes / decrescentes** é dado por

$$\binom{n}{k} \qquad (k \geq n)$$

4. O número de funções $f : A \to B$ **não decrescentes / não crescentes** é dado por

$$CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} \qquad (\forall\ k, n)$$

5. O número de funções $f : A \to B$ **sobrejetoras**, denotado por $Fs(n, k)$, é dado por

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{k-i} \cdot (k-i)^n \qquad (k \leq n)$$

6. O número de funções $f : A \to B$ **bijetoras** é dado por

$$n! \qquad (k = n)$$

3.4 Número de Stirling de segunda espécie

Exemplo 43. De quantas formas podemos separar 10 crianças em dois grupos, não necessariamente com a mesma quantidade de crianças?

Resolução. Observamos que este não é um caso de combinação completa, pois cada criança é diferente da outra. Temos 10 crianças, cada qual pode estar no grupo a ou b. Dessa forma, teríamos 2^{10} grupos. Porém, não faz sentido ter todas as crianças em um só grupo. Subtraímos então 2 combinações, referentes a todas as crianças no grupo a ou todas no grupo b. Ainda, como os grupos são indistintos, devemos dividir o total de combinações por 2. Temos, portanto, $\dfrac{2^{10}-2}{2} = 511$ formas de separar 10 crianças em dois grupos.

Exemplo 44. De quantas formas podemos separar 10 crianças em três grupos indistintos entre si?

Resolução. Ressaltamos que cada criança precisa estar associado a um único grupo. Se chamarmos de A o conjunto das crianças e $B = \{a,b,c\}$ o conjunto dos grupos, a associação de cada aluno a um grupo é uma função.

Como não faz sentido ter grupos vazios, procuramos funções $f : A \to B$ onde todos os elementos de B estão associados a algum elemento de A; ou seja, buscamos funções $f : A \to B$ que sejam sobrejetoras. Como $|A| = 10$ e $|B| = 3$, o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ é:

$$Fs(10,3) = \binom{3}{3} \cdot 3^{10} - \binom{3}{2} \cdot 2^{10} + \binom{3}{1} \cdot 1^{10}$$

Como os grupos são indistintos, devemos ainda dividir o resultado acima por 3!.

Conclusão: O número de formas de se dividir 10 alunos em três grupos indistintos é :

$$\frac{1}{3!}\left[\binom{3}{3} \cdot 3^{10} - \binom{3}{2} \cdot 2^{10} + \binom{3}{1} \cdot 1^{10}\right] = 9330$$

Dividir 10 alunos em 3 grupos indistintos (exemplo 44) é equivalente à particionar um conjunto de 10 elementos em 3 subconjuntos. O número de formas de se particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos é conhecido como *Número de Stirling de segunda espécie* e é denotado por $\left\{ n \atop k \right\}$ ou $S(n,k)$.

Definição 10 (Número de Stirling de segunda espécie)**.** O número de formas de se particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos é denominado de *Número de Stirling de segunda espécie*.

Teorema 19. O número de Stirling de segunda espécie é calculado pela expressão:

$$S(n,k) = \left\{ n \atop k \right\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i \cdot (k-i)^n}{(k-i)!i!}$$

Demonstração. Para calcular o número de modos de se particionar um conjunto A de n elementos em k subconjuntos não vazios (isto é, calcular $S(n,k)$), basta calcular o número de funções sobrejetoras$f : A \to B$, com $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, (onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ representam cada subconjunto), depois dividir o resultado por $k!$, já que a ordem que os subconjuntos são, na verdade, indistintos. Dessa forma, o número de modos de se particionar n elementos em k subconjuntos não vazios é dada por

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{k-i}\cdot(k-i)^n =$$
$$\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{k!}{(k-i)!i!}\cdot(k-i)^n =$$
$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i\cdot(k-i)^n}{(k-i)!i!}$$

□

Teorema 20. Os Números de Stirling de segunda espécie podem ser obtidos através da recorrência

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}$$

Demonstração. Queremos determinar de quantas formas podemos particionar $n+1$ elementos em k subconjuntos.

Seja $A=\{1,2,\ldots,n\}$. Há $\left\{ {n \atop k} \right\}$ formas de particionar o conjunto A em k subconjuntos disjuntos.

Seja $A' = A\cup\{n+1\}$. De quantas formas podemos particionar A' em k subconjuntos?

Vamos dividir em 2 casos:

1º caso - O elemento $n+1$ pertencer a um subconjunto não unitário.

Seja $P_1,P_2,\ldots,P_k$ uma partição de A. Podemos inserir o elemento $n+1$ em qualquer subconjunto $P_i(i\in\{1,2,\ldots,k\})$, formando assim uma partição de A' em k subconjuntos. Para cada uma das $\left\{ {n \atop k} \right\}$ partições, $n+1$ pode ser inserido em qualquer um dos k subconjuntos. Dessa forma, obtemos $k\left\{ {n \atop k} \right\}$ partições do conjunto $A'=\{1,2,\ldots,n+1\}$ em k subconjuntos.

2º caso - O elemento $n+1$ formar um subconjunto unitário.

Seja $P'_1,P'_2,\ldots,P'_{k-1}$ uma partição do conjunto A em $k-1$ subconjuntos. Os conjuntos $P'_1,P'_2,\ldots,P'_{k-1}$, $\{n+1\}$ formam uma partição de A' em k subconjuntos. Dessa forma, obtemos $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$ partições do conjunto $A'=\{1,2,\ldots,n+1\}$ em k subconjuntos.

Juntando os dois casos, temos que o número de partições de uma conjunto de $n+1$ elementos em k subconjuntos é dado por:

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}$$

□

3.4.1 Triângulo dos números de Stirling de segunda espécie

De forma análoga ao que foi feito com os números binomiais, é interessante organizar os números de Stirling de segunda espécie numa tabela triangular. Definindo $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ e usando a relação de recorrência do teorema 20, obtemos o triângulo exibido na Figura 18.

$$
\begin{array}{lccccccc}
n=0 & \left\{ {0 \atop 0} \right\} & & & & & & \\
n=1 & \left\{ {1 \atop 0} \right\} & \left\{ {1 \atop 1} \right\} & & & & & \\
n=2 & \left\{ {2 \atop 0} \right\} & \left\{ {2 \atop 1} \right\} & \left\{ {2 \atop 2} \right\} & & & & \\
n=3 & \left\{ {3 \atop 0} \right\} & \left\{ {3 \atop 1} \right\} & \left\{ {3 \atop 2} \right\} & \left\{ {3 \atop 3} \right\} & & & \\
n=4 & \left\{ {4 \atop 0} \right\} & \left\{ {4 \atop 1} \right\} & \left\{ {4 \atop 2} \right\} & \left\{ {4 \atop 3} \right\} & \left\{ {4 \atop 4} \right\} & & \\
n=5 & \left\{ {5 \atop 0} \right\} & \left\{ {5 \atop 1} \right\} & \left\{ {5 \atop 2} \right\} & \left\{ {5 \atop 3} \right\} & \left\{ {5 \atop 4} \right\} & \left\{ {5 \atop 5} \right\} & \\
n=6 & \left\{ {6 \atop 0} \right\} & \left\{ {6 \atop 1} \right\} & \left\{ {6 \atop 2} \right\} & \left\{ {6 \atop 3} \right\} & \left\{ {6 \atop 4} \right\} & \left\{ {6 \atop 5} \right\} & \left\{ {6 \atop 6} \right\} \\
 & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & \\
0 & 1 & 1 & & 1+7\cdot 2 = 15 & & \\
0 & 1 & 3 & 1 & & & \\
0 & 1 & 7 & 6 & 1 & & \\
0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \\
k=0 & k=1 & \boxed{k=2} & k=3 & k=4 & k=5 & k=6
\end{array}
$$

Figura 18 – Triângulo dos números de Stirling de segunda espécie

Uma das utilidades da tabela acima é auxiliar o cálculo do número de funções sobrejetoras. Vimos anteriormente que:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \cdot Fs(n,k)$$

Onde $Fs(n,k)$ representa o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, onde $|A| = n$ e $|B| = k$. Portanto, $Fs(n,k)$ pode ser calculado através da fórmula:

$$Fs(n,k) = k! \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Exemplo 45 (IME[5] - 2016/2017)**.** Seja $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?

b) Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

Resolução. **a)** Começamos escolhendo 2 elementos a e b para formar o conjunto imagem. Escolhido a e b, calculamos o número de funções sobrejetoras $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b\}$. O número de funções com exatamente 2 elementos no conjunto imagem é:

$$\binom{4}{2} \cdot Fs(4,2) = \binom{4}{2} \cdot 2! \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 6 \cdot 2 \cdot 7 = 84$$

[5] Instituto Militar de Engenharia

b) $f \circ g$ é constante se f leva a imagem de g em um único valor. Vamos dividir em casos, de acordo com o conjunto imagem da função g.

1º caso - O conjunto imagem de g ser unitário: Seja $Im(g) = \{a\}$, o conjunto imagem de g, com $a \in \{1,2,3,4\}$. Existem $\binom{4}{1}$ formas de se escolher essa imagem. Agora, calculamos quantas funções g que levam $\{1,2,3,4\}$ no elemento a. Para isso, basta calcular o número de funções sobrejetoras $g : \{1,2,3,4\} \to \{a\}$. Existem $Fs(4,1)$ funções g cujo o conjunto imagem é unitário.

Agora precisamos escolher a função f. A função f precisa levar a imagem de g (no caso, o conjunto $\{a\}$) em um único valor. Como a pertence ao domínio da f, para qualquer função f, $f \circ g$ será constante. Existem então 4^4 opções para a função f tal que $f \circ g$ é constante.

Isso resulta em $\binom{4}{1} \cdot Fs(4,1) \cdot 4^4$ funções f e g tais que $f \circ g$ é constante e o conjunto imagem de g é unitário.

2º caso - O conjunto imagem de g possuir dois elementos: Primeiro, escolhemos 2 elementos (a e b) para formarem o conjunto imagem de g. Feito isso, calculamos o número de sobrejetoras $g : \{1,2,3,4\} \to \{a,b\}$, $a,b \in \{1,2,3,4\}$

Agora, precisamos determinar a função f. Como $im(g) = \{a,b\}$, para $f \circ g$ ser constante, a função f deve ser tal que $f(a) = f(b)$. Seja $f : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\}$. Para descobrir quantas funções f satisfazem a condição $f(a) = f(b)$, devemos calcular o número de modos de escolher a imagem para os valores a, c e d do domínio de f. Como a imagem de b deverá ser igual a imagem de a, não há escolha para imagem de b. Precisamos, portanto, escolher a imagem para 3 elementos, dentre 4 opções. Existem, então, 4^3 funções f' tal que $f' \circ g = f \circ g$ é constante.

Isso resulta em $\binom{4}{2} \cdot Fs(4,2) \cdot 4^3$ funções f e g tais que $f \circ g$ é constante e o conjunto imagem de g possui dois elementos.

3º caso - O conjunto imagem de g possuir três elementos: Seguindo o mesmo raciocínio, existem $\binom{4}{3} \cdot Fs(4,3) \cdot 4^2$ funções f e g tais que $f \circ g$ é constante e o conjunto imagem de g possui três elementos.

4º caso - O conjunto imagem de g possuir quatro elementos: Existem $\binom{4}{4} \cdot Fs(4,4) \cdot 4^1$ funções f e g tais que $f \circ g$ é constante e o conjunto imagem de g possui quatro elementos.

Juntando todas as possibilidades, concluímos que o número de funções $f \circ g$ constantes é

$$\binom{4}{1} \cdot Fs(4,1) \cdot 4^4 + \binom{4}{2} \cdot Fs(4,2) \cdot 4^3 + \binom{4}{3} \cdot Fs(4,3) \cdot 4^2 + \binom{4}{4} \cdot Fs(4,4) \cdot 4^1 =$$

$$\binom{4}{1} \cdot 1! \left\{ {4 \atop 1} \right\} \cdot 4^4 + \binom{4}{2} \cdot 2! \left\{ {4 \atop 2} \right\} \cdot 4^3 + \binom{4}{3} \cdot 3! \left\{ {4 \atop 3} \right\} \cdot 4^2 + \binom{4}{4} \cdot 4! \left\{ {4 \atop 4} \right\} \cdot 4^1 =$$

$$4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 256 \ + \ 6 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 64 \ + \ 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 \ + \ 1 \cdot 24 \cdot 1 \cdot 4 \ = \ 8800$$

Como existem $4^4 \cdot 4^4$ modos de se sortear duas funções f e g, a probabilidade de que a composição $f \circ g$ das funções sorteadas seja uma função constante é:

$$\frac{8800}{4^4 \cdot 4^4} = \frac{8800}{65536} = \frac{275}{2048} \approx 13,4\%$$

Conclusão: a probabilidade é de aproximadamente 13,4%.

Veremos agora duas identidades importantes relacionadas aos números de Stirling de segunda espécie.

Teorema 21. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vale a igualdade:

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Demonstração. $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ representa o número de formas de se particionar um conjunto de n elementos em $n-1$ subconjuntos. A única forma de particionar n elementos em $n-1$ subconjuntos é formar um subconjunto de 2 elementos e $n-2$ conjuntos unitários. Há $\binom{n}{2}$ formas de se escolher os 2 elementos para formar o *2-subconjunto*; portanto:

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

□

Teorema 22. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vale a igualdade:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

Demonstração. $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ representa o número de formas de se particionar um conjunto de n elementos em 2 subconjuntos. Seja o conjunto $|A| = n$ e os subconjuntos B e C tal que $A = B \cup C$ e $B \cap C = \varnothing$.

Seja f a função que associa cada elemento de A a um dos subconjuntos B ou C (sendo que cada conjunto possui pelo menos um elemento). Existem 2^n funções deste tipo. Excluímos desse resultado as duas funções que levam todos os elementos em um único subconjunto. Como não há distinção entre os subconjuntos (isto é, feita a distribuição dos elementos, não importa qual é o subconjunto B e qual é o conjunto C), precisamos dividir o número de funções por 2. Portanto, o número de formas de se particionar um conjunto de n elementos em 2 subconjuntos é dado por:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

□

3.4.2 Número de Bell

Exemplo 46. De quantas formas podemos particionar o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$?

Resolução. Como o conjunto A possui 6 elementos, ele pode ser particionado em 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 subconjuntos. Portanto o número total de modos de se particionar esse conjunto é dado por:

$$\left\{ {6 \atop 1} \right\} + \left\{ {6 \atop 2} \right\} + \left\{ {6 \atop 3} \right\} + \left\{ {6 \atop 4} \right\} + \left\{ {6 \atop 5} \right\} + \left\{ {6 \atop 6} \right\} = 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203$$

Definição 11 (Número de Bell)**.** O número de modos de se particionar um conjunto de n elementos, é chamado de n-ésimo *número de Bell* e denotado por B_n.

Teorema 23. O n-ésimo *número de Bell* é calculado pela expressão:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$$

Demonstração. O número $\left\{ {n \atop i} \right\}$ calcula o número de modos de se particionar um conjunto de n elementos em i subconjuntos. Variando i de 0 a n subconjuntos, teremos todos subconjuntos possíveis. Dessa forma, o número de modos de particionar um conjunto de n elementos é igual à

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$$

□

CAPÍTULO

4

PERMUTAÇÕES NA ÁLGEBRA ABSTRATA

O objetivo deste capítulo é realizar um aprofundamento no estudo das permutações, sob a ótica da álgebra abstrata. No capítulo 2, definimos permutação, de maneira pouco formal, como uma mudança de posição dos elementos de uma sequência. Na álgebra abstrata, uma permutação é definida como uma bijeção de um conjunto A, finito, nele mesmo.

Definição 12 (Permutação)**.** Seja o conjunto A, finito e não vazio e $f : A \to A$, uma função bijetora. A função f é dita uma **permutação** do conjunto A.

Essa definição é válida para qualquer conjunto A finito não vazio. O conjunto A pode ser um conjunto de números naturais ou não, podendo, inclusive, ser um conjunto não numérico. Para qualquer conjunto finito A, com $|A| = n$, podemos estabelecer uma bijeção $T : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$, pois os dois conjuntos tem o mesmo número de elementos. Dessa forma, podemos substituir, sem perda de generalidade, as permutações de qualquer conjunto A de n elementos pelas permutações do conjunto de números naturais $\{1, 2, \ldots, n\}$. Denotaremos o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ por $\boldsymbol{[n]}$.

4.1 O Grupo das Permutações

Dado o conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, existem $n!$ permutações distintas para esse conjunto. Ou seja, existem $n!$ funções bijetoras de $[n]$ em $[n]$. Denotamos por $\boldsymbol{S_n}$ o conjunto de todas as permutações do conjunto $[n]$. Mostraremos a seguir que o conjunto S_n, juntamente com a composição de funções forma um grupo, denominado de *grupo das permutações de n*.

Definição 13 (Grupo [6])**.** Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G e uma operação $(x, y) \to x \circ y$ sobre G é chamado **grupo** se essa operação possui as seguintes propriedades:

[6] Definição extraída de Domingues e Iezzi (2003).

- *Associatividade:* $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)\ \forall\, a,b,c \in G$.
- *existência de elemento neutro:* existe $e \in G$ tal que $a \circ e = e \circ a = a,\ \forall\, a \in G$.
- *Existência de simétrico (inverso):* $\forall\, a \in G$, existe $a' \in G$ tal que $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Se, além disso, possuir a propriedade da *comutatividade* ($a \circ b = b \circ a,\ \forall\, a,b \in G$), esse grupo é dito *comutativo* ou *abeliano*.

Teorema 24. O conjunto das permutações S_n juntamente com a operação composição de funções ($\circ$) é um *grupo* (não comutativo).

Demonstração. Vamos mostrar que S_n juntamente com a operação composição de funções ($\circ$) obedece cada condição necessária para ser um grupo.

1. *Fechamento de S_n*: Quando dizemos que uma operação $\circ$ está definida sobre um conjunto G, isso implica que, para qualquer $a,b \in G$, $a \circ b \in G$.

   Sejam as funções bijetoras $f : [n] \to [n]$ e $g : [n] \to [n]$. Por definição $f,g \in S_n$. A função $g : [n] \to [n]$ é bijetora, portanto sua imagem é o próprio conjunto $[n]$. Ao compor $f \circ g = f(g(x))$, levamos o conjunto imagem de g (conjunto $[n]$) em $[n]$ através da função f. Como f também é bijetora, ao receber o conjunto $[n]$ (imagem de g), retorna como imagem o conjunto $[n]$. Dessa forma, $f \circ g = f(g(x))$ é uma bijeção de $[n]$ em $[n]$.

   Conclusão: $f \circ g \in S_n,\ \ \forall f,g \in S_n$.

2. *Associatividade:*

   Iremos mostrar que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, para qualquer f, g, $h \in S_n$. Sejam $f : [n] \to [n]$, $g : [n] \to [n]$, $h : [n] \to [n]$ tais que

$$
\begin{aligned}
f(1) = f_1,\ \ f(2) = f_2,\ \ \ldots,\ \ f(n) = f_n \\
g(1) = g_1,\ \ g(2) = g_2,\ \ \ldots,\ \ g(n) = g_n \\
h(1) = h_1,\ \ h(2) = h_2,\ \ \ldots,\ \ h(n) = h_n
\end{aligned}
$$

   Temos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\} = [n]$ pois f,g e h são bijeções de $[n]$ em $[n]$.

   Para todo $i \in [n]$, temos que $g \circ h(i) = g(h(i)) = g(h_i) = g_j$, para algum $j \in [n]$ e $f \circ (g \circ h)(i) = f(g(h(i))) = f(g(h_i)) = f(g_j) = f_k$, para algum $k \in [n]$, pois g e f é bijetora. Portanto, $\forall\, i \in [n]$, $f \circ (g \circ h)(i) = f_k$, $k \in [n]$.

   Analisemos agora $(f \circ g) \circ h$. Seja $r(x) = f \circ g(x) = f(g(x)),\ \forall\, x \in [n]$. Em particular, tomando $x = h_i$, $r(h_i) = f(g(h_i)) = f(g_j) = f_k$, então $(f \circ g) \circ h(i) = r \circ h(i) = r(h(i)) = r(h_i) = f_k$. Logo $(f \circ g) \circ h(i) = f \circ (g \circ h)(i),\ \forall\, i \in [n]$.

   Conclusão: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,\ \forall\, f,g,h \in S_n$.

3. *Existência do elemento neutro:*

   Vamos mostrar que a função identidade $e : [n] \to [n]$,definida como $e(x) = x$ é o elemento neutro da composição. Para isso, basta mostrar que $e \circ f = f \circ e = f$.

   Temos que $e \circ f(i) = e(f(i)) = e(f_i) = f_i = f(i), \forall\, i \in [n]$. Da mesma forma, $f \circ e(i) = f(e(i)) = f(i), \forall\, i \in [n]$. Portanto $f \circ e(i) = e \circ f(i) = f(i), \forall\, i \in [n]$.

   Conclusão: $e \circ f = f \circ e = f,\ \forall\, f \in S_n$.

4. *Existência do elemento inverso:*

   vamos mostrar que para qualquer $f \in S_n$ existe $g \in S_n$ tal que $f \circ g = g \circ f = e$, em que e é a função identidade.

   Seja a função bijetora $f : [n] \to [n]$, tal que $f(1) = f_1, f(2) = f_2, \ldots, f(n) = f_n$. Temos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = [n]$. Dada a função f, podemos definir a função bijetora $g : [n] \to [n]$ tal que: $g(f_1) = 1, g(f_2) = 2, \ldots, g(f_n) = n$. As funções $f, g \in S_n$ pois são bijeções de $[n]$. $g \circ f(i) = g((f(i))) = g(f_i) = i, \forall\, i \in [n]$. $f \circ g(f_i) = f(g(f_i)) = f(i) = f_i, \forall\, f_i \in [n]$. Logo $g \circ f(x) = x = f \circ g(x), \forall\, x \in [n]$.

   Conclusão: $g \circ f = f \circ g = e$, em que e é a função identidade.

Conclusão final: Como S_n juntamente com a composição de funções $(\circ)$ obedece às quatro condições da definição, o sistema $(S_n, \circ)$ é um grupo. □

A notação formal do grupo das permutações de n elementos é $(S_n, \circ)$, mas por simplicidade de notação iremos nos referir a esse grupo como o grupo S_n.

4.2 Notações usuais para permutação

Sejam o conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e a função bijetora $\sigma : [n] \to [n]$ tal que $\sigma(1) = \sigma_1$, $\sigma(2) = \sigma_2$, $\ldots$, $\sigma(n) = \sigma_n$. Podemos usar a seguinte **notação de duas linhas**[7] para denotar essa permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Na notação de duas linhas, a linha superior indica os valores do domínio e a linha inferior suas respectivas imagens. Apesar de não ser uma regra, costuma-se ordenar a linha superior em ordem crescente. Estando a linha superior organizada em ordem crescente, podemos omití-la sem perda de informações; a permutação σ pode ser denotada então por $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_{n-1} \sigma_n$. Essa notação é denominada *notação de uma linha*.

[7] Tradução livre do termo *"two-row notation"* utilizado por Bhattacharya, Jain e Nagpaul (1986).

Exemplificando: A notação $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ representa a função bijetora $f : [5] \to [5]$ definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ e $f(5) = 5$. Podemos denotar essa permutação, na notação de uma linha, por $\sigma = 21435$.

Exemplo 47. Sejam as permutações f e g representadas na notação de uma linha por $f = 143256$ e $g = 234165$. Encontre a permutação h tal que $h = f \circ g$.

Resolução. As permutações $f = 143256$ e $g = 234165$ indicam que

$$f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3,\ f(4) = 2,\ f(5) = 5 \text{ e } f(6) = 6$$
$$g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 4,\ g(4) = 1,\ g(5) = 6 \text{ e } g(6) = 5$$

Queremos encontrar h tal que $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Temos que $h(1) = f(g(1)) = f(2) = 4$. Poderíamos repetir esse processo para todos os valores do domínio para determinar o mapeamento de h. Há, porém, uma forma mais prática de determinar h usando a notação em duas linhas. Escrevemos a permutação g, e a permutação f abaixo dessa, reordenando as colunas de f de modo que primeira linha da permutação f coincida com a segunda linha da permutação g. A permutação h é obtida pela junção da primeira linha da g e a última linha da f, conforme pode ser observado na Figura 19.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6} \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \end{pmatrix}$$

f reordenada

$$f = \begin{pmatrix} 2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \\ \boxed{4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 5} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 19 – Obtenção da composição $h = f \circ g$ usando a notação de duas linhas.

Conclusão: A permutação h é dada por $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ ou, na notação de uma linha, $h = 432165$.

Exemplo 48. Sejam as permutações $f = 45312$, $g = 12543$ e $h = 54132$. Obtenha a permutação resultante $\sigma = f \circ g \circ h$.

Resolução. Aplicando a mesma técnica usada no exemplo anterior, obtemos:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g \circ h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Conclusão: $\sigma = f \circ g \circ h = 31425$.

Exemplo 49. Encontre a permutação inversa de $f = 615324$.

Resolução. A permutação inversa de f é uma função f^{-1} tal que $f^{-1} \circ f = e = 123456$. Usando a notação de duas linhas e o processo utilizado nos exemplos anteriores, obtemos

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ \sigma_6 & \sigma_1 & \sigma_5 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_4 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Conclusão: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 5, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 6, \sigma_5 = 3, \sigma_6 = 1$, portanto $f^{-1} = 254631$.

Outra forma usual de denotar permutações é através de *ciclos de permutações*. Antes de definir formalmente um ciclo de permutação, vamos ilustrar através de um exemplo.

Seja a permutação $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. A permutação f mapeia os elementos da seguinte forma:$1 \to 3$, $3 \to 6$, $6 \to 2$, $2 \to 1$; e $4 \to 5$, $5 \to 4$. Se acompanharmos a sequência de mapeamentos, o elemento 1 é levado ao elemento 3, que é levado ao elemento 6, que é levado ao elemento 2, que, por fim, é levado ao elemento 1. Da mesma forma, o elemento 4 é levado ao elemento 5, que é levado de volta ao elemento 4. Dizemos então que essa permutação é formada pelos ciclos (1362) e (45). Representamos a permutação f através da notação de ciclos $f = (1362)(45)$. A Figura 20 ilustra os ciclos (1362) e (45) que formam a permutação f.

Ressaltamos que (1362), (2136), (6213) e (3621) representam o mesmo ciclo.

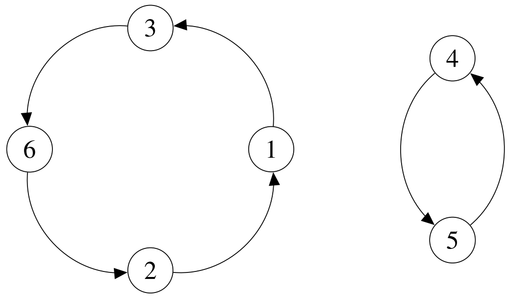


Figura 20 – Ilustração dos ciclos (1362) e (45)

.

Definição 14 (Ciclos de permutação)**.** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_r$ elementos distintos do conjunto $[n]$. A permutação $f \in S_n$ definida por

$$\begin{aligned} f(a_i) &= a_{i+1}, \qquad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,r-1\} \\ f(a_r) &= a_1 \\ f(x) &= x, \qquad \forall x \in [n] : x \notin \{a_1,a_2,\ldots,a_r\} \end{aligned}$$

é denominada um *r-ciclo* e representado por $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_r)$. O número $\boldsymbol{r}$ é denominado comprimento do ciclo.

Definição 15 (Transposição)**.** Um ciclo de permutação de comprimento dois (*2-ciclo*) é denominado de *transposição*.

4.3 Ciclos de permutação

Nesta seção veremos alguns resultados importantes envolvendo os ciclos de permutação.

Definição 16 (Ciclos disjuntos)**.** Dois ciclos $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_r)$ e $(b_1\ b_2\ \ldots\ b_r)$ são ditos **disjuntos** se

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_r\} \cap \{b_1,b_2,\ldots,b_k\} = \varnothing.$$

Definição 17 (Conjunto suporte)**.** Dado um ciclo $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \ldots \sigma_k)$, o conjunto $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\}$ é denominado *conjunto suporte* do ciclo σ e denotado por $sup(\sigma)$.

Teorema 25. A composição de dois ciclos disjuntos comutam.

Demonstração. Sejam $a = (a_1,a_2,\ldots,a_r)$ e $b = (b_1,b_2,\ldots,b_k)$ dois ciclos disjuntos. Sejam os conjuntos suportes $sup(a) = \{a_1,a_2,\ldots,a_r\} = A$ e $sup(b) = \{b_1,b_2,\ldots,b_t\} = B$.

O ciclo $a = (a_1,a_2,\ldots,a_r)$ representa a função $a : [n] \to [n]$ tal que $a(a_1) = a_2$, $a(a_2) = a3$, $\ldots$, $a(a_{r-1}) = a_r$, $a(a_r) = a_1$ e $f(x) = x$, $\forall\, x \notin A$. Da mesma forma, o ciclo $b = (b_1,b_2,\ldots,b_t)$ representa a função $b : [n] \to [n]$ tal que $b(b_1) = b_2$, $b(b_2) = b_3$, $\ldots$, $b(b_{t-1}) = b_t$, $b(b_t) = b_1$ e $f(x) = x$, $\forall\, x \notin B$.

Mostraremos que $a \circ b = b \circ a$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $t \geq r$. Analisemos agora as composições $a \circ b(x)$ e $a \circ b(x)$, para todo $x \in [n]$:

Seja $x \in A$:

Tome a composição $a \circ b(x) = a\,(b(x))$, $x \in A$.

$b(a_i) = a_i$, $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,r\}$ pois $a_1,a_2,\ldots,a_r \notin B$. Logo

$$a \circ b(a_i) = a\,(b(a_i)) = a(a_i) = a_{i+1}, \qquad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,r-1\}$$
$$a \circ b(a_r) = a\,(b(a_r)) = a(a_r) = a_1$$

Tome agora composição $b \circ a(x) = b\,(a(x))$, $x \in A$.

$a(a_i) = a_{i+1}$, $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,r-1\}$ e $a(a_r) = a_1$. Como $a_1,a_2,\ldots,a_r \notin B$ então

$$b \circ a(a_i) = b\,(a(a_i)) = b(a_{i+1}) = a_{i+1} \qquad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,r-1\}$$
$$b \circ a(a_r) = b\,(a(a_r)) = b(a_1) = a_1$$

Portanto, $a \circ b(x) = b \circ a$, $x \in A$.

Seja $x \in B$:

Tome a composição $a \circ b(x) = a\,(b(x))$, $x \in B$.

$b(b_i) = b_{i+1}$, $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,t-1\}$ e $b(b_t) = b_1$. Como $b_1,b_2,\ldots,b_t \notin A$ então

$$a \circ b(b_i) = a\,(b(b_i)) = a(b_i) = b_{i+1} \qquad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,t-1\}$$
$$a \circ b(b_r) = a\,(b(b_t)) = a(b_1) = b_1$$

Tome agora composição $b \circ a(x) = b\,(a(x))$, $x \in B$.

$a(b_i) = b_i$, $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,t\}$ pois $b_1,b_2,\ldots,b_t \notin A$. Logo

$$b \circ a(b_i) = b\,(a(b_i)) = b(b_i) = b_{i+1} \qquad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,t-1\}$$
$$b \circ a(a_r) = b\,(a(b_t)) = b(b_t) = b_1$$

Portanto, $a \circ b(x) = b \circ a$, $x \in B$. Seja $x \notin A \cup B$:

Neste caso, $a\,(b(x)) = a(x) = x$, pois $x \notin A$ e $x \notin B$.

Da mesma forma, $b\,(a(x)) = b(x) = x$ pois $x \notin A$ e $x \notin B$.

Portanto, $a \circ b(x) = b \circ a$, $x \notin A \cup B$.

Conclusão: $a \circ b(x) = b \circ a(x)$, $\forall\, x \in [n]$. Isto é, dois ciclos disjuntos comutam. $\square$

A composição de ciclos é uma composição de permutações que, por sua vez, é uma composição de funções. Como vimos no resultado anterior, a composição de dois ciclos disjuntos é comutativa, mas esse resultado não é válido para ciclos não disjuntos. Quando os ciclos não são disjuntos, essa operação deve ser realizada da direita para a esquerda.

Exemplo 50. Encontre o ciclo de permutação resultante da composição $(24) \circ (142)$ em S_4.

Resolução. Esse problema podeira ser resolvido usando a notação de duas linhas, como no exemplo 47 e exemplo 48. Porém, resolveremos utilizando o conceito de ciclo de permutação.

Sendo $c = (142)$ e $b = (24)$, a composição desejada é $b \circ c$. O ciclo c leva 1 em 4, 4 em 2 e 2 em 1. O ciclo b leva 2 em 4 e 4 em 2. O elemento 3 é levado nele mesmo.

A composição $b \circ c(x)$ indica que o elemento x é levado em um elemento y pela função c que é levado a um elemento z pela função b. Em notação mais sintética: $x \to y \to z$.

Analisando $b \circ c(x)$, temos que:

$$b \circ c(1) : 1 \to 4 \to 2 \implies 1 \to 2$$

$$b \circ c(2) : 2 \to 1 \to 1 \implies 2 \to 1$$

$$b \circ c(3) : 3 \to 3 \to 3 \implies 3 \to 3$$

$$b \circ c(4) : 4 \to 2 \to 4 \implies 4 \to 4$$

Dessa forma, obtemos o seguinte mapeamento: $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$ e $4 \to 4$. Portanto $b \circ c = (24)(142) = (12)(3)(4)$. Os ciclos unitários (3) e (4) podem ser omitidos, temos então que $b \circ c = (12)$. A Figura 21 mostra a representação em grafos dos ciclos b, c e o ciclo $b \circ c$.

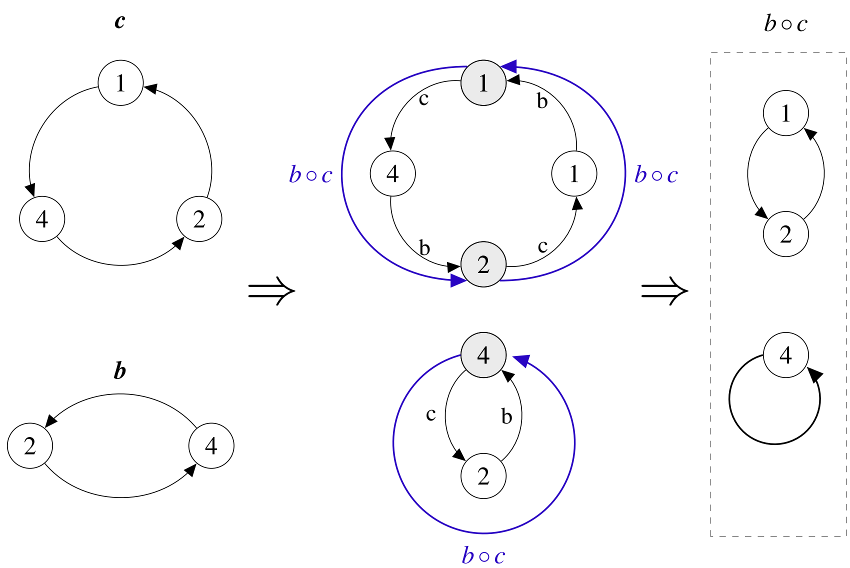


Figura 21 – Grafos dos ciclos $b = (24)$, $c = (142)$ e a composição $b \circ c$.

Exemplo 51. Encontre o ciclo de permutação resultante da composição de $(132)(24)(142)$.

Resolução. Sejam os ciclos $a = (132)$ $b = (24)$ e $c = (142)$. Podemos realizar a composição $a \circ b \circ c$ como $a \circ (b \circ c)$ ou podemos compor diretamente os três ciclos.

$$a \circ b \circ c(1) : 1 \to 4 \to 2 \to 1 \implies 1 \to 1$$

$$a \circ b \circ c(2) : 2 \to 1 \to 1 \to 3 \implies 2 \to 3$$

$$a \circ b \circ c(3) : 3 \to 3 \to 3 \to 2 \implies 3 \to 2$$

$$a \circ b \circ c(4) : 4 \to 2 \to 4 \to 4 \implies 4 \to 4$$

Temos então que $a \circ b \circ c = (1)(23)(4) = (23)$, conforme ilustrado pela Figura 22.

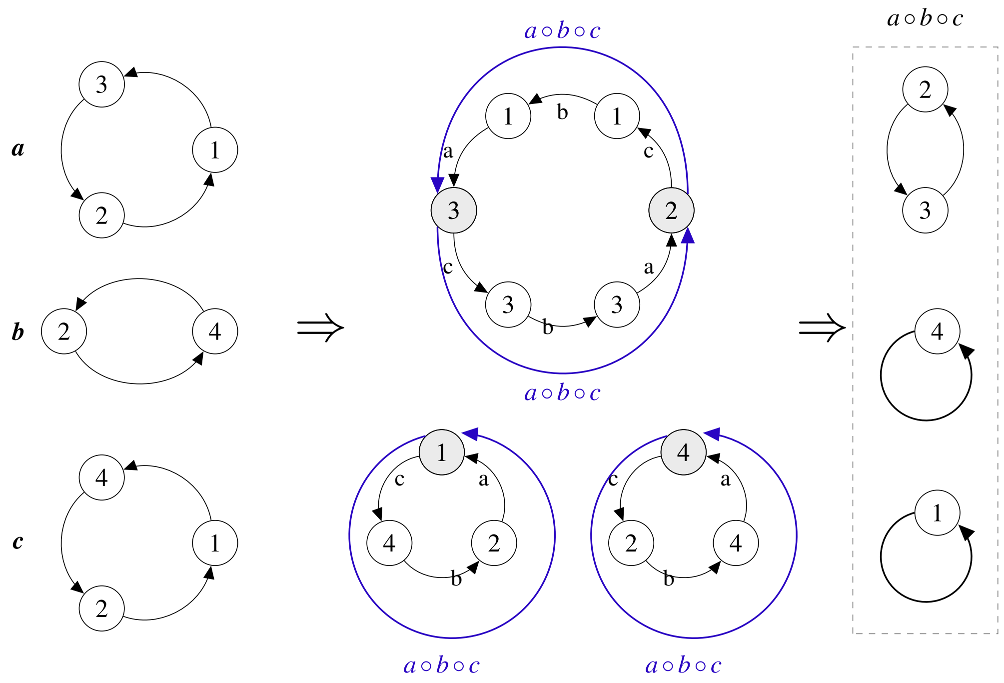


Figura 22 – Composição dos ciclos $a = (132)$, $b = (24)$, $c = (142)$.

Mostraremos agora alguns resultados importantes relativos aos ciclos de permutações.

Teorema 26. Toda permutação pode ser descrita de forma única por uma composição de ciclos disjuntos, exceto, possivelmente, pela ordem dos fatores.

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em duas partes: primeiro mostraremos que toda permutação pode ser escrita como uma composição de ciclos disjuntos; depois mostraremos que essa decomposição é única, exceto pela ordem dos fatores.

1 - Toda permutação pode ser escrita como uma composição de ciclos disjuntos.

Mostremos inicialmente que, dada uma permutação $f : [n] \to [n]$, qualquer elemento pertence a algum ciclo.

Seja $a_1 \in [n]$. Se $f(a_1) = a_1$, o elemento a_1 forma um ciclo unitário (a_1). Se $f(a_1) \neq a_1$, mostraremos que existem elementos distintos $a_2, a_3, \ldots, a_k \in [n]$, tal que $f(a_1) = a_2,\ f(a_2) =$

$a_3, \ldots, f(a_{k-1}) = a_k$, $f(a_k) = a_1$ para algum $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Em outras palavras, existem $a_2, a_3, \ldots, a_k \in [n]$ tal que $\sigma_1 = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_k)$ é um ciclo.

Suponha, por absurdo, que não existe $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, $\ldots$, $f(a_{k-1}) = a_k$ e $f(a_k) = a_1$. Para isso, existem duas possibilidades:

i) *O ciclo retorna para um ponto diferente do inicial:* isto é, $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3, \ldots,$ $f(a_{k-1}) = a_k$ e $f(a_k) = a_i$, para algum $i \in \{2,3,\ldots,k\}$ $(a_i \neq a_1)$. Absurdo, pois $f(a_k) = a_i$ e $f(a_{i-1}) = a_i$, o que contraria o fato de f ser bijetora.

ii) *O ciclo não termina:* isto é, $f(a_k) \neq a_1$, $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Absurdo, pois f é uma bijeção, portanto, existe $a_k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $f(a_k) = a_1$.

Resultado 1: para qualquer elemento $a_1 \in [n]$, existe $k \in [n]$ tal que $\sigma_1 = (a_1\ a_2\ \ldots a_k)$ é um ciclo.

Sejam $\sigma_1 = (a_1\ a_2\ \ldots a_k)$ e $b_1 \in [n] \notin sup(\sigma_1)$. Se b_1 não pertence ao ciclo σ_1, existem $b_2, b_3, \ldots, b_j$, tal que $\sigma_2 = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_j)$ para algum $j \in \{1,2,\ldots,n-k\}$. Como $b_1 \notin sup(\sigma_1)$, então $sup(\sigma_2) \cap sup(\sigma_1) = \varnothing$ pois f é bijetora e não pode haver dois elementos b_m, a_n com mesma imagem. Portanto σ_2 é um ciclo de f disjunto de σ_1.

Resultado 2: se um elemento b_1 não pertence ao ciclo σ_1, ele pertence a um ciclo $\sigma_2 = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_j)$ tal que σ_1 e σ_2 são disjuntos.

Dada a função $f : [n] \to [n]$, temos que cada elemento $x \in [n]$ pertence a um, e somente um, ciclo. Como $[n]$ é um conjunto finito, existe uma quantidade finita de ciclos disjuntos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ $(p \leq n)$ tal que $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \sigma_p$.

Conclusão 1: qualquer permutação pode ser escrita como uma composição de ciclos disjuntos.

2 - A representação de uma permutação em ciclos disjuntos é única.

Seja f uma permutação tal que $f = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_p$, onde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ é uma decomposição de σ em ciclos disjuntos (incluindo os ciclos unitários). Mostraremos que, se existe uma decomposição de f em ciclos disjunto $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$, tal que $f = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_q$, então $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q\}$ (isto é, $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,p\}$, $\exists!\, j \in \{1,2,\ldots,q\} : \sigma_i = \tau_j$).

Temos que, para todo $a_i \in [n]$, existe $\sigma_i \in \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$, tal que $a_i \in sup(\sigma_i)$. Da mesma forma, existe $\tau_j \in \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q\}$ tal que $a_i \in sup(\tau_j)$. Vamos mostrar que $\sigma_i = \tau_j$.

Seja o ciclo $\sigma_1 \in \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$ tal que $a_1 \in \sigma_1$. Seja $\sigma_1 = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_k)$; este ciclo existe e é único. Como σ_1 é um ciclo de f, $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{k-1}) = a_k$ e $f(a_k) = a_1$. Seja $\tau_j \in \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q\}$ tal que $a_i \in sup(\tau_j)$. Como τ_j é um ciclo de f, $f(a_1) = a_2 \in sup(\tau_j)$, $f(a_2) = a_3 \in sup(\tau_j), \ldots, f(a_{k-1}) = a_k \in sup(\tau_j)$.

Suponha por absurdo, que existe $b_1 \in sup(\tau_j)$, tal que $b_1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Se $b_1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, qualquer ciclo que contenha b_1 é disjunto do ciclo $(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_k)$; absurdo.

Logo, não existe $b_1 \in sup(\tau_j)$, tal que $b_1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Portanto, $\tau_j = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_k) = \sigma_1$.

Conclusão 2: Quaisquer duas decomposições de f são idênticas, exceto, possivelmente, pela ordem dos fatores.

Conclusão final: Qualquer permutação pode ser representada de forma única como a composição de ciclos disjuntos, exceto, possivelmente, pela ordem dos ciclos. □

Definição 18 (Ordem de uma permutação)**.** Seja $\sigma \in S_n$. Definimos como ordem de σ, denotado por $o(\sigma)$ o menor número r ($r \in \mathbb{N}^*$) tal que $\sigma^r = e$, onde e representa a permutação identidade.

Teorema 27. Seja $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k$, onde $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots\ , \tau_k$ ciclos disjuntos de comprimentos $\tau_1 = r_1,\ \tau_2 = r_2,\ \ldots\ , \tau_k = r_k$. A ordem de σ é dada por

$$o(\sigma) = mmc(r_1, r_2, \ldots, r_k)$$

Demonstração. A ordem de um ciclo τ_i é o próprio comprimento r_i, pois esse é o número de vezes que precisamos compor o ciclo τ_i para que um elemento a_i retorne a ele mesmo. Temos então que $\tau_i^{k \cdot r_i} = e$, para qualquer número $k \in \mathbb{Z}$ e $\tau_i^x \neq e$ para qualquer x que não seja múltiplo de r_i.

Dessa forma, $\sigma^x = \tau_1^x \circ \tau_2^x \circ \ldots \circ \tau_k^x = e$ se, somente se, x é um múltiplo de $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Como a ordem de σ é definida como o menor número r tal que $\sigma^r = e$, esse número r é dado por

$$r = o(\sigma) = mmc(r_1, r_2, \ldots, r_k)$$

□

4.3.1 Número de Stirling de primeira espécie

Definição 19 (Forma cíclica canônica[8])**.** Seja a permutação $\sigma \in S_n$ e $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k$ a decomposição de σ em ciclos disjuntos. A forma canônica é uma representação de σ tal que a representação de cada ciclo é iniciada com seu maior elemento e os ciclos são ordenados na composição, da esquerda para direita, em ordem crescente de seu maior elemento. Além disso, os ciclos unitários são omitidos.

Vamos exemplificar a notação em forma canônica. Seja $\sigma = (56)(143)(827)$. Primeiro, reescrevemos os ciclos de modo a serem iniciados por seus maiores elementos: $\sigma = (65)(431)(827)$. Depois, ordenamos os ciclos em ordem crescente de seu maior elemento; assim, a permutação σ, é representada na notação canônica por $\sigma = (431)(65)(827)$.

[8] Definição extraída de BÓNA (2006, p. 111). O termo forma cíclica canônica é uma tradução livre do termo *canonical cycle form* realizada pelo autor.

Uma das grandes vantagens da notação canônica é o fato dela ser única, isto é, a notação na forma canônica está relacionada de forma biunívoca com as permutações $\sigma \in S_n$. Usaremos esse fato para calcular o número de permutações de S_n que possuem exatamente k ciclos disjuntos.

Definição 20 (Número de Stirling de primeira espécie (sem sinal)[9]). O número de permutações de $\sigma \in S_n$ que possuem exatamente k ciclos disjuntos é denominado de *número de Stirling de primeira espécie* e denotado por $c(n,k)$ ou $\left[{n \atop k}\right]$.

Teorema 28. Os números de Stirling de primeira espécie podem ser obtidos através da recorrência

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*$$

Demonstração. Calcularemos quantas permutações de k ciclos podem ser obtidas inserindo o elemento $n+1$ nas permutações $\sigma \in S_n$. Seja $\left[{n+1 \atop k}\right]$ o número de permutações $\sigma' \in S_{n+1}$ com k ciclos. Podemos obter uma permutação $\sigma' \in S_{n+1}$ com k ciclos das seguintes formas:

1-Tomamos uma permutação $\sigma \in S_n$ que possui $k-1$ ciclos e inserimos o elemento $n+1$ como um ciclo unitário.

Para cada permutação $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{k-1} \in S_n$ formada pelos ciclos $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots\ \tau_{k-1}$, formamos uma nova permutação $\sigma' \in S_{n+1}$ definida como $\sigma' = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{k-1} \circ (n+1)$. Como σ tem $k-1$ ciclos, σ' terá k ciclos. Com esse procedimento, obtemos $\left[{n \atop k-1}\right]$ permutações com k ciclos.

2- Tomamos uma permutação $\sigma \in S_n$ que possui k ciclos e inserimos o elemento $n+1$ em um dos ciclos já existentes.

Para isso, precisamos determinar onde iremos inserir o elemento $n+1$. Primeiro escrevemos a permutação σ na forma canônica, evitando assim contar mais de uma vez a mesma inserção. Seja $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_i)(\sigma_{i+1}\ \sigma_{i+2}\ \ldots \sigma_j)\ldots(\sigma_{s+1}\ \sigma_{s+2}\ \ldots\ \sigma_n)$ a decomposição de σ em ciclos disjuntos escrito na forma canônica. Podemos inserir o elemento $n+1$ à direita de cada elemento σ_i formando assim uma nova permutação a cada inserção.

Note que, inserindo o elemento $n+1$ sempre à direita, não há risco de formarmos o mesmo ciclo duas vezes, pois dado um ciclo $(\sigma_k\ \sigma_{k+1}\ \ldots \sigma_l)$

$$(\sigma_k\ (n+1)\ \sigma_{k+1}\ \ldots \sigma_l) \neq (\sigma_k\ \sigma_{k+1}\ (n+1)\ \ldots \sigma_l) \neq \ldots \neq (\sigma_k\ \sigma_{k+1}\ \ldots \sigma_l\ (n+1))$$

Portanto, a cada $\sigma \in S_n$ que possui k ciclos, há n modos de formar uma permutação $\sigma' \in S_{n+1}$ com k ciclos. Obtemos então uma parcela de $n \cdot \left[{n \atop k}\right]$ permutações com k ciclos.

[9] Destacamos a expressão *sem sinal* pois existem os número de Stirling de primeira espécie com sinal definidos como $s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k)$. Os números de Stirling de primeira espécie com sinal são utilizado na expansão do produto $(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ através da fórmula $(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$. De qualquer forma, o número com sinal não será utilizado neste trabalho.

Somando os dois resultados, concluímos que

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$\square$

4.3.2 Triângulo do números de Stirling de primeira espécie

Definindo $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} = 1$ e $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{0} = 0$, podemos montar um triângulo com os números de Stirling de primeira espécie a partir da recorrência demonstrada no teorema 28, conforme exibido na Figura 23.

$$\begin{array}{lccccccc}
n=0 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} & & & & & & \\
n=1 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{1} & & & & & \\
n=2 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{2} & & & & \\
n=3 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} & & & \\
n=4 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{4} & & \\
n=5 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{5} & \\
n=6 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{5} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{6} \\
 & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{lccccccc}
n=0 & 1 & & & & & & \\
n=1 & 0 & 1 & & & & & \\
n=2 & 0 & 1 & 1 & & \rightarrow & 6+11\cdot 4=50 & \\
n=3 & 0 & 2 & 3 & 1 & & & \\
\boxed{n=4} & 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & & \\
n=5 & 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & \\
n=6 & 0 & 120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1
\end{array}$$

Figura 23 – Triângulo com os números de Stirling de primeira espécie

4.4 Paridade de uma permutação

Teorema 29. Toda permutação pode ser representada por uma composição de transposições, não necessariamente disjuntas.

Demonstração. Mostraremos que qualquer ciclo $\sigma = (\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3\ \ \ldots\ \ \sigma_k)$ pode ser decomposto em

$$\sigma = (\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3\ \ \ldots\ \ \sigma_k) = (\sigma_{k-1}\ \ \sigma_k)(\sigma_{k-2}\ \ \sigma_k)\ldots(\sigma_2\ \ \sigma_k)(\sigma_1\ \ \sigma_k)$$

Seja $\tau = \tau_{k-1}\tau_{k-2}\ldots\tau_2\tau_1$, em que $\tau_1 = (\sigma_1\ \ \sigma_k)$, $\tau_2 = (\sigma_2\ \ \sigma_k)$, $\ldots$, $\tau_{k-1} = (\sigma_{k-1}\ \ \sigma_k)$. Vamos analisar o comportamento de $\tau(x)$ para todo $x \in [n]$.

O elemento σ_1 é levado em σ_k pela transposição $\tau_1 = (\sigma_1\ \ \sigma_k)$, que é levado em σ_2 pela transposição $\tau_2 = (\sigma_2\ \ \sigma_k)$; as demais transposições $\tau_3, \tau_4, \ldots, \tau_{k-1}$ levam σ_2 em σ_2, pois σ_2 não pertence ao conjunto suporte de nenhuma dessas transposições. Logo, $\tau(\sigma_1) = \sigma_2$.

O elemento σ_2 é levado em σ_2 pela transposição $\tau_1 = (\sigma_1\ \ \sigma_k)$, que é levado em σ_k pela transposição $\tau_2 = (\sigma_2\ \ \sigma_k)$, que é levado em σ_3 pela transposição $\tau_3 = (\sigma_3\ \ \sigma_k)$; as demais transposições $\tau_4, \tau_5, \ldots, \tau_{k-1}$ levam σ_3 em σ_3. Logo, $\tau(\sigma_2) = \sigma_3$.

De forma geral, qualquer σ_i, com $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ é levado a σ_i pelas transposições $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{i-1}$; após isso, σ_i é levado em σ_k pela transposição $\tau_i = (\sigma_i\ \ \sigma_k)$ e σ_k é levado em σ_{i+1} pela transposição $\tau_{i+1} = (\sigma_{i+1}\ \ \sigma_k)$. Por fim, σ_{i+1} é levado em σ_{i+1} pelas transposições τ_j, para todo $j \in \{i+2, i+3, \ldots, k\}$. Logo, $\tau(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

O elemento σ_k é levado em σ_1 pela transposição $\tau_1 = (\sigma_1\ \ \sigma_k)$ e σ_1 é levado em σ_1, pelas transposições seguintes.

Tomando $x \notin \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$, $\tau(x) = x$, pois cada transposição $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ levará x em x.

Dessa forma

$$\begin{aligned}
&\tau(\sigma_i) = \sigma_{i+1}, && \forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\\
&\tau(\sigma_k) = \sigma_1 &&\\
&\tau(x) = x && \forall i \notin \{1, 2, \ldots, k\}
\end{aligned}$$

Portanto, por definição, $\tau = (\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3\ \ \ldots\ \ \sigma_k) = \sigma$.

Conclusão: como uma permutação f pode ser escrita como uma composição de ciclos disjuntos e esses ciclos podem ser escritos como uma composição de transposições, qualquer permutação pode ser escrita como a composição de transposições. □

Vale ressaltar que um ciclo qualquer $\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3\ \ \ldots\ \ \sigma_k)$ pode ser representado pela composição de transposições $(\sigma_{k-1}\ \ \sigma_k)(\sigma_{k-2}\ \ \sigma_k)\ldots(\sigma_2\ \ \sigma_k)(\sigma_1\ \ \sigma_k)$, mas essa decomposição não é única. Tome como exemplo o ciclo $(1\ 5\ 4\ 2)$: ele pode ser decomposto como $(2\ 4)(2\ 5)(2\ 1)$, mas também pode ser decomposto como $(1\ 5)(2\ 4)(5\ 2)$ e inúmeras outras opções.

Definição 21 (Paridade de uma permutação)**.** Dizemos que uma permutação é *par* se ela pode ser representada por um número par de transposições. Analogamente, a permutação será *ímpar*, se for representada por um número ímpar de transposições.

Para compreender o conceito de paridade de uma permutação, considere o seguinte exemplo: $(4\ 1\ 2)$ é uma permutação par, pois $(4\ 1\ 2) = (4\ 2)(4\ 1)$; já $(1\ 5\ 3\ 6)$ é uma permutação ímpar, pois $(1\ 5\ 3\ 6) = (1\ 6)(1\ 3)(1\ 5)$.

Como dito anteriormente, a decomposição de uma permutação em transposições não é única, mas, independente da decomposição realizada, a paridade da permutação nunca será alterada. Esse resultado é de grande importância para o estudo de permutações; para demonstrarmos, utilizaremos o conceito de *assinatura*[10]de uma permutação.

Definição 22 (Assinatura de uma permutação[11]). Seja a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in S_n$. A assinatura de σ, denotada por $sgn(\sigma)$, é o numero real dado por

$$sgn(\sigma) = \prod_{0<i<j\leq n} \frac{j-i}{a_j - a_i}$$

Calcular a assinatura de uma permutação através dessa definição é muito trabalhoso. Os próximos resultados facilitarão o processo de determinação da assinatura de uma permutação.

Teorema 30. A assinatura de uma transposição é igual a -1.

Demonstração. Seja a transposição $\sigma = (p\ q)$, com $p, q \in [n]$).Temos que $\sigma(p) = q$, $\sigma(q) = p$ e $\sigma(x) = x$ para qualquer $x \notin \{p, q\}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p < q$. Vamos decompor o produtório $\prod_{0<i<j\leq n} \frac{j-i}{a_j - a_i}$ nos produtos $P_1, P_2, \dots, P_8$ definidos como:

$$P_1 = \prod_{i,j\notin\{p,q\}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{i,j\notin\{p,q\}} \frac{j-i}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{i,j\notin\{p,q\}} \frac{j-i}{j-i} = 1$$

$$P_2 = \prod_{\substack{j=p \\ i<p}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{i<p} \frac{p-i}{\sigma(p) - \sigma(i)} = \prod_{i<p} \frac{p-i}{q-i}$$

$$P_3 = \prod_{\substack{j=q \\ i<p}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{i<p} \frac{q-i}{\sigma(q) - \sigma(i)} = \prod_{i<p} \frac{q-i}{p-i}$$

$$\text{Logo,} \quad P_2 \cdot P3 = \prod_{i<p} \frac{p-i}{q-i} \cdot \prod_{i<p} \frac{q-i}{p-i} = \prod_{i<p} \frac{(p-i)}{(q-i)} \cdot \frac{(q-i)}{(p-i)} = 1$$

$$P_4 = \prod_{\substack{i=p \\ p<j<q}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{p<j<q} \frac{j-p}{\sigma(j) - \sigma(p)} = \prod_{p<j<q} \frac{j-p}{j-q}.$$

Mudando o índice de j, para i, obtemos

$$P_4 = \prod_{p<j<q} \frac{j-p}{j-q} = \prod_{p<i<q} \frac{i-p}{i-q} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \prod_{p<i<q} \frac{p-i}{q-i}$$

$$P_5 = \prod_{\substack{j=q \\ p<i<q}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{p<i<q} \frac{q-i}{\sigma(q) - \sigma(i)} = \prod_{p<i<q} \frac{q-i}{p-i}$$

[10] As literaturas internacionais utilizam o termo *sign* (que pode ser traduzido como *sinal* ou *assinatura*) para se referir a esse conceito. Nesse trabalho optou-se por usar o termo assinatura, em consonância com Domingues e Iezzi (2003).

[11] Definição extraída de Domingues e Iezzi (2003).

$$\text{Logo, } P_4 \cdot P_5 = \prod_{p<i<q} \frac{p-i}{q-i} \cdot \prod_{p<i<q} \frac{q-i}{p-i} = \prod_{p<i<q} \frac{(p-i)}{(q-i)} \cdot \frac{(q-i)}{(p-i)} = 1$$

$$P_6 = \prod_{\substack{i=p \\ j>q}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{j>q} \frac{j-p}{\sigma(j) - \sigma(p)} = \prod_{j>q} \frac{j-p}{j-q}$$

$$P_7 = \prod_{\substack{i=q \\ j>q}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \prod_{j>q} \frac{j-q}{\sigma(j) - \sigma(q)} = \prod_{j>q} \frac{j-q}{j-p}$$

$$\text{Logo, } P_6 \cdot P_7 = \prod_{j>q} \frac{j-p}{j-q} \cdot \prod_{j>q} \frac{j-q}{j-p} = \prod_{i<p} \frac{(j-p)}{(j-q)} \cdot \frac{(j-q)}{(j-p)} = 1$$

$$P_8 = \prod_{\substack{i=p \\ j=q}} \frac{j-i}{a_j - a_i} = \frac{p-q}{\sigma(p) - \sigma(q)} = \frac{p-q}{q-p} = \frac{-(q-p)}{q-p} - 1$$

Deste modo, $sgn(\sigma) = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_8 = -1$.

Conclusão: a assinatura de qualquer transposição é igual a -1. $\square$

Teorema 31. $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$ para qualquer $\sigma, \tau \in S_n$.

Demonstração. Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. Como $\sigma,\ \tau \in S_n$, existem $b_1, b_2, \ldots b_n$ tal que $\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$.

Dessa forma, $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$. Logo

$$sgn(\sigma) = \prod_{0<i<j\leq n} \frac{j-i}{a_j - a_i}$$

$$sgn(\tau) = \prod_{0<i<j\leq n} \frac{a_j - a_i}{b_j - b_i}$$

$$sgn(\sigma \circ \tau) = \prod_{0<i<j\leq n} \frac{j-i}{b_j - b_i}$$

$$sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)=\prod_{0<i<j\leq n}\frac{j-i}{a_j-a_i}\cdot\prod_{0<i<j\leq n}\frac{a_j-a_i}{b_j-b_i}$$

$$sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)=\prod_{0<i<j\leq n}\frac{j-i}{a_j-a_i}\cdot\frac{a_j-a_i}{b_j-b_i}$$

$$sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)=\prod_{0<i<j\leq n}\frac{j-i}{b_j-b_i}$$

$$sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)=sgn(\sigma\circ\tau)$$

Conclusão: $sgn(\sigma\circ\tau)=sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)$ para qualquer $\sigma,\tau\in S_n$. $\square$

Teorema 32. Para qualquer $\sigma\in S_n$, $sgn(\sigma)=1$, se σ é uma permutação par e $sgn(\sigma)=-1$, se a permutação é ímpar.

Demonstração. Seja $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_k$, em que $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k$ são transposições. Provamos no teorema 29 que σ pode ser escrito como uma composição de transposições. Provamos ainda no teorema 30 que a assinatura de toda transposição é igual a-1. Por fim, provamos no teorema 31 que a assinatura de uma composição é igual ao produto das assinaturas. Dessa forma

$$sgn(\sigma)=sgn(\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_k)=sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)\cdot\ldots sgn(\sigma_k)=(-1)\cdot(-1)\ldots(-1)=(-1)^k$$

Logo, $sgn(\sigma)=1$, se k for um número par e $sgn(\sigma)=-1$, se k for um número ímpar, onde k é o número de transposições da decomposição de σ.

Conclusão: $sgn(\sigma)=1$, se σ é decomposto em um número par de transposições e $sgn(\sigma)=-1$ se σ é decomposto em um número ímpar de transposições. $\square$

Corolário 1. Seja $\sigma\in S_n$. Se $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_p$ e $\sigma=\tau_1\circ\tau_2\circ\ldots\circ\tau_q$, são duas decomposições distintas de σ em transposições, então os índices p e q possuem a mesma paridade.

Demonstração. Do teorema 32 temos que $sgn(\sigma)=sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)\cdot\ldots sgn(\sigma_p)=(-1)^p$. Da mesma forma, $sgn(\sigma)=sgn(\tau_1)\cdot sgn(\tau_2)\cdot\ldots\cdot sgn(\tau_q)=(-1)^q$.

Como a assinatura é uma característica intrínseca de cada permutação, isto é, não depende da sua representação ou de sua decomposição, $sgn(\sigma)=(-1)^p=(-1)^q$. Logo p e q são ambos números pares, ou ambos números ímpares. $\square$

Corolário 2. Um $r-ciclo$ é uma permutação par quando r é um número ímpar e uma permutação ímpar quando r é um número par.

Demonstração. Este resultado decorre do fato que um r-ciclo $\sigma=(a_1\ a_2\ \ldots a_r)$ pode ser decomposto como $(a_1\ a_2\ \ldots a_r)=(a_r\ a_{r-1})(a_r\ a_{r-2})\ldots(a_r\ a_2)(a_r\ a_1)$. Logo, a assinatura deste ciclo é dada por $sgn(\sigma)=(-1)^{r-1}$, o ciclo será par se r for ímpar, e será ímpar, se r for par. $\square$

4.5 Números de Euler

Definição 23 (Ascentes e Descentes)**.** Seja $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ uma permutação de S_n. Chamamos de *ascentes* de σ todos os números i tais que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$, para $i \in [n-1]$. Analogamente, chamamos de *descentes* de σ todos os números i tais que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$, para $i \in [n-1]$.

Definição 24 (Conjunto dos ascentes)**.** Seja $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. Denominamos conjunto dos ascentes de σ, o conjunto definido por

$$asc(\sigma) = \{i \in [n-1] \; : \; \sigma_i < \sigma_{i+1}\}$$

Teorema 33. Seja a permutação $\sigma \in S_n$. Se σ possui k ascentes, ela possui $n-1-k$ descentes.

Demonstração. Se $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$, quando comparamos σ_i e σ_{i+1}, com $i \in [n-1]$, há somente duas opções: $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ ou $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. Se σ possui exatamente k ascente, σ terá então $n-1-k$ descentes. □

Definição 25 (Número de Euler de primeira espécie)**.** O número de *Euler de primeira espécie* representa o número de permutações de n elementos que possui exatamente k ascentes e é denotado por $A(n,k)$ ou $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

Teorema 34. Os Números de Euler de primeira espécie podem ser obtidos através da recorrência

$$\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = (k+1)\cdot\left\langle {n \atop k} \right\rangle + (n-k+1)\cdot\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \qquad \forall\, n,k \in \mathbb{N}\; k \in \mathbb{N}^*$$

Demonstração. Seja $P_k(n)$ o conjunto de todas as permutações de S_n que possuem exatamente k ascentes.

$$P_k(n) = \{\sigma \in S_n \; : \; asc(\sigma) = k\}$$

Queremos contar o número de permutações de S_{n+1} que possuem exatamente k ascentes. Esse número é dado por $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = |P_k(n+1)|$. Para isso, tomaremos as permutações $\sigma \in S_n$ e incluiremos o elemento $n+1$ para obter as permutações $\sigma' \in S_{n+1}$ que possuem k ascentes. Podemos obter as permutações $\sigma' \in P_k(n+1)$ de dois modos:

1- Tomando as permutações $\sigma \in S_n$ que possuem $k-1$ ascentes.

Seja $\sigma \in P_{k-1}(n)$. Se σ possui $k-1$ ascentes, então σ possui $n-k$ descentes. Temos que

$$\sigma_i < \sigma_{i+1}, \quad \forall\, i \in asc(\sigma) \;\; \text{e} \;\; \sigma_j > \sigma_{j+1}, \quad \forall\, j \notin asc(\sigma)$$

Inserindo $n+1$ entre algum $a_j > a_{j+1}$ formamos a permutação $a_1\ldots a_j\,(n+1)\,a_{j+1}\ldots a_n$, obteremos um novo ascente, sem alterar os demais. Para isso, tomamos $\sigma' \in S_{n+1}$ definida como

$$\sigma'_p = \sigma_p,\; \forall\, p \le j$$
$$\sigma'_{j+1} = n+1$$
$$\sigma'_{q+1} = \sigma_q,\; \forall\, q > j$$

Temos então que, para qualquer $j \notin asc(\sigma)$, $\sigma'_j < \sigma'_{j+1}$ e $\sigma'_{j+1} > \sigma'_{j+2}$ (1 ascente). Além disso, $\sigma'_1\sigma'_2\ldots\sigma'_j$, juntamente com $\sigma'_{j+2}\sigma'_{j+3}\ldots\sigma'_n$ possui $k-1$ ascentes, tal como σ. Portanto σ' possui k ascentes.

Para cada $j \notin asc(\sigma)$, formamos uma permutação σ' com k ascentes. Dessa forma, para cada $\sigma \in P_{k-1}(n)$, obtemos $n-k$ permutações $\sigma' \in P_k(n+1)$. Obtemos então $(n-k)\cdot\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ permutações $\sigma' \in P_k(n)$.

Ainda podemos formar permutações $\sigma' \in S_{n+1}$ inserindo o elemento $n+1$ à direita de σ_n nas permutações $\sigma \in S_n$ com $k-1$ ascentes. Para isso, tomamos $\sigma' \in S_{n+1}$ definida como

$$\sigma'_{n+1} = n+1,\ \sigma'_p = \sigma_p, \qquad p \in [n]$$

Com isso $\sigma_n < \sigma_{n+1}$. Dessa forma obtemos mais $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ permutações $\sigma' \in P_k(n+1)$.

2- Tomando as permutações $\sigma \in S_n$ que possuem k ascentes.

Seja $\sigma \in P_k(n)$. Temos que

$$\sigma_i < \sigma_{i+1}, \quad \forall\, i \in asc(\sigma) \ \text{ e } \ \sigma_j < \sigma_{j+1}, \quad \forall\, j \notin asc(\sigma)$$

Inserindo $n+1$ entre algum $\sigma_i < \sigma_{i+1}$, formamos a permutação $a_1\ldots a_i\,(n+1)\,a_{i+1}\ldots a_n$, estaremos removendo um ascente e formando outro no lugar. A permutação σ' formada desse modo continua tendo k ascentes. Para isso, tomamos $\sigma' \in S_{n+1}$ definida como

$$\begin{aligned}
&\sigma'_p = \sigma_p,\ \forall\, p \le i \\
&\sigma'_{i+1} = n+1 \\
&\sigma'_{q+1} = \sigma_q,\ \forall\, q > j
\end{aligned}$$

Temos então que, para qualquer $i \in asc(\sigma)$, $\sigma'_i < \sigma'_{i+1}$ e $\sigma'_{i+1} > \sigma'_{i+2}$ (1 ascente). Além disso, $\sigma'_1\sigma'_2\ldots\sigma'_i$, juntamente com $\sigma'_{i+2}\sigma'_{i+3}\ldots\sigma'_n$ possui $k-1$ ascentes. Portanto, σ' possui k ascentes.

Para cada $i \in asc(\sigma)$, formamos uma permutação σ' com k ascentes. Dessa forma, para cada $\sigma \in P_k(n)$, obtemos k permutações $\sigma' \in P_k(n+1)$. Obtemos então $k\cdot\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ permutações.

Podemos ainda formar permutações $\sigma' \in S_{n+1}$ inserindo o elemento $n+1$ à esquerda de σ_1 nas permutações σ com k ascentes. Para isso, tomamos $\sigma' \in S_{n+1}$ definida como

$$\sigma'_1 = n+1,\ \sigma'_{p+1} = \sigma_p, \qquad p \in [n]$$

Com isso $\sigma'_1 > \sigma'_2$, mantendo o número de ascentes da permutação σ. Dessa forma obtemos mais $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ permutações $\sigma' \in P_k(n+1)$.

Conclusão: o número de permutações de S_{n+1} com k ascentes é dado por

$$\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle = k \cdot \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k)\left\langle \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1)\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k+1)\left\langle \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$$

$\forall\, n > k.$

□

4.5.1 Triângulo dos números de Euler de primeira espécie

Definindo $\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle = 1$ e $\left\langle {i \atop j} \right\rangle = 0$ para $j \geq i$, podemos montar um triângulo com os números de Euler de primeira espécie a partir da recorrência demonstrada no teorema 34, conforme exibido na Figura 24.

$n=1$	$\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle$						
$n=2$	$\left\langle {2 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {2 \atop 1} \right\rangle$					
$n=3$	$\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle$				
$n=4$	$\left\langle {4 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 3} \right\rangle$			
$n=5$	$\left\langle {5 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 4} \right\rangle$		
$n=6$	$\left\langle {6 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 5} \right\rangle$	
$n=7$	$\left\langle {7 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {7 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {7 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {7 \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {7 \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {7 \atop 5} \right\rangle$	$\left\langle {7 \atop 6} \right\rangle$
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$

$\Longrightarrow$

$26 \cdot (5-2+1) + 66 \cdot (2+1) = 302$

$n=1$	1						
$n=2$	1	1					
$n=3$	1	4	1				
$n=4$	1	11	11	1			
$\boxed{n=5}$	1	26	66	26	1		
$n=6$	1	57	302	302	57	1	
$n=7$	1	120	1191	2461	1191	120	1
	$k=0$	$k=1$	$\boxed{k=2}$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$

Figura 24 – Triângulo com os números de Euler de primeira espécie

4.6 Permutações inversas

Nesta seção abordaremos como obter a função inversa de um determinada permutação e o conceito de número de inversões. É importante lembrar que qualquer permutação possui inversa pois S_n é um grupo. Veremos agora como obter a permutação inversa a partir da notação de ciclo.

Teorema 35. Seja $\sigma = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k)$. A inversa de σ é $\sigma^{-1} = (a_k\, a_{k-1}\, \ldots\, a_2\, a_1)$

Demonstração. Observemos inicialmente que a inversa de uma transposição $\tau_1 = (u\, v)$ é a própria τ_1. Basta verificar que $\tau_1 \circ \tau_1 = (u\, v) \circ (u\, v) = (u)(v) = e$.

Temos que $\sigma = (a_{k-1}\ a_k)(a_{k-2}\ a_k)\dots(a_2\ a_k)(a_1\ a_k)$. Realizando a composição de σ com $\sigma' = (a_1\ a_k)(a_2\ a_k)\dots(a_{k-1}\ a_k)$, obtemos:

$$\sigma\circ\sigma' = (a_{k-1}\ a_k)\dots(a_3\ a_k)(a_2\ a_k)\,[\,(a_1\ a_k)\circ(a_1\ a_k)\,]\,(a_2\ a_k)(a_3\ a_k)\dots(a_{k-1}\ a_k)$$

$$\sigma\circ\sigma' = (a_{k-1}\ a_k)\dots(a_3\ a_k)[\,(a_2\ a_k)\circ(a_2\ a_k)\,](a_3\ a_k)\dots(a_{k-1}\ a_k)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\sigma\circ\sigma' = e$$

Logo, a permutação σ' é a inversa de σ. Reescrevendo a permutação σ', obtemos:

$$\sigma' = (a_1\ a_k)(a_2\ a_k)\dots(a_{k-1}\ a_k) = (a_k\, a_{k-1}\ \dots\ a_2\, a_3)$$

Conclusão: a permutação inversa de $\sigma = (a_1\, a_2\ \dots\ a_{k-1}; a_k)$ é $\sigma^{-1} = (a_k\, a_{k-1}\ \dots\ a_2\, a_3)$.

$\square$

Exemplo 52. Seja $\sigma = 23415$ uma permutação de S_5 escrita na notação de uma linha. Encontre as transposições que transformam a permutação σ na permutação identidade.

Resolução. Antes de iniciar esta resolução, vamos analisar o que acontece na composição de uma permutação com uma transposição. Considere a transposição $\tau_1 = (34) \in S_5$, ela representa a função $f : A \to B$ tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ e $f(5) = 5$. Se $\sigma = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$, então $\sigma\circ\tau_1 = a_1\, a_2\, a_4\, a_3\, a_5$; isto é, a composição de σ com τ_1 inverterá a ordem do terceiro e do quarto elemento de σ.

Precisamos analisar então quais elementos de $\sigma = 23415$ precisam ser invertidos. essa permutação pode ser levada à permutação identidade $e = 12345$ através das seguintes transposições

$$2\,3\,\mathbf{4}\,\mathbf{1}\,5 \xrightarrow{(34)} 2\,\mathbf{3}\,\mathbf{1}\,4\,5 \xrightarrow{(23)} \mathbf{2}\,\mathbf{1}\,3\,4\,5 \xrightarrow{(12)} 1\,2\,3\,4\,5$$

Portanto $[\,[\,[\sigma\circ(34)]\circ(23)]\circ(12)] = \sigma\circ(34)\circ(23)\circ(12) = e$.

conclusão: A permutação $\sigma = 23415$ precisa ser composta com as transposições (34), (23) e (12) para retornar à identidade.

Nosso objetivo é reordenar a permutação $\sigma = a_1\, a_2\, \dots\, a_n$ para seu estado original através das composições com as transposições $\tau_1,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_k$. Isto é, determinar $\tau_1,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_k$ tal que $\sigma\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\dots\circ\tau_k = e$. Podemos transformar a permutação $\sigma = a_1\, a_2\, \dots\, a_n$ na identidade através do seguinte processo:

Tomamos o elemento da posição $n-1$: se ele for maior que o elemento da posição n invertemos a posição desses dois elementos. Senão, mantemos os elementos nas mesma posição.

Seja σ' a permutação obtida. Tomamos o elemento da posição $n-2$: se ele for maior que o elemento da posição $n-1$, invertemos a posição desses dois elementos. Feito isso, comparamos os novos elementos da posição $n-1$ e n; se o elemento da posição $n-1$ for maior que o elemento da posição n, invertemos a posição desses dois elementos.

Repetimos esse processo para todas as posições, da direita para esquerda, invertendo a posição dos elementos adjacentes toda vez que o elemento da esquerda for maior que o elemento da direita.

Esse processo irá transformar a permutação σ na permutação identidade $e = 1\,2\,3\,\ldots\,n$.

Exemplo 53. Obtenha as transposições que transformam a permutação $\sigma = 5\,1\,4\,3\,2$ na permutação identidade.

Resolução. A permutação $\sigma = 5\,1\,4\,3\,2$ pode ser transformada na permutação identidade através do seguinte processo

$$5\,1\,4\,\mathbf{3}\,\mathbf{2} \xrightarrow{(45)} 5\,1\,\mathbf{4}\,\mathbf{2}\,3 \xrightarrow{(34)} 5\,1\,2\,\mathbf{4}\,\mathbf{3} \xrightarrow{(45)} \mathbf{5}\,\mathbf{1}\,2\,3\,4 \xrightarrow{(12)} 1\,\mathbf{5}\,\mathbf{2}\,3\,4 \xrightarrow{(23)} 1\,2\,\mathbf{5}\,\mathbf{3}\,4 \xrightarrow{(34)} 1\,2\,3\,\mathbf{5}\,\mathbf{4} \xrightarrow{(45)} 1\,2\,3\,4\,5$$

Conclusão: A permutação $\sigma = 5\,1\,4\,3\,2$ é transformada na identidade através da composição,da esquerda para direita, por (45), (34), (45), (12), (23), (34) e (45).

Vimos no exemplo anterior que a permutação $\sigma = 5\,1\,4\,3\,2$ pode ser transformada na permutação identidade através de sete transposições. Porém, esse não é o único processo possível; sequer podemos garantir que esse é processo que exija o menor número de trocas. De qualquer forma, como foram necessárias sete transposições para transformar a permutação σ na identidade, σ é uma permutação ímpar.

4.7 Código Lehmer

Definição 26 (Inversão)**.** Seja $\sigma \in S_n$ representada pela notação de uma linha $\sigma = a_1\,a_2\,\ldots\,a_n$. O par $(a_i\,;\,a_j)$, com $i < j$, é uma *inversão* de σ se $a_i > a_j$.

Definição 27 (Código Lehmer[12])**.** Seja a permutação $\sigma \in S_n$ representada pela notação de uma linha como $\sigma = a_1\,a_2\,\ldots\,a_n$. A função $L(\sigma) : [n] \to \{1,2,\ldots,n-1\}$ que associa a cada número i do domínio de f, o número de elementos a_j, com $i < j$, em que $a_i > a_j$ é chamada de *código Lehmer* ou tabela de inversões.

Formalmente, a função $L(\sigma)$ é definida como

$$\begin{aligned} L(\sigma) \colon [n] &\longrightarrow \{1,2,\ldots,n-1\} \\ i &\longmapsto l_i(\sigma) = |M(i)| \\ \text{onde } \; M(i) &= \{a_j \in \{a_1,a_2,\ldots,a_n\} : j > i \;\text{ e }\; a_i > a_j\} \end{aligned}$$

[12] Segundo definição de Mantaci (2001). Tradução livre dos termos “Lehmer code” e “inversion table” realizada pelo autor deste trabalho.

Utilizaremos a notação $L(\sigma) = l_1\ l_2\ \dots\ l_n$ para representar o código Lehmer da permutação $\sigma = a_1\, a_2 \dots a_n$, em que l_i é o número de elementos $a_j < a_i$, quando $j > i$; para facilitar a escrita, iremos nos referir aos elementos a_j com essa propriedade como *menores à direita* de a_i.

Exemplo 54. Seja $\sigma = 43152$. Obtenha o código Lehmer dessa permutação e determine o número de transposições necessárias para transformar σ na permutação identidade.

Resolução. Na permutação $\sigma = 43152$, há 3 elementos menores à direita de a_1, 2 à direita de a_2, 0 à direita de a_3, 1 à direita de a_4 e 0 à direita de a_5. Dessa forma, o código Lehmer de σ é $L(\sigma) = 32010$.

Para retornar $a_4 = 5$ para a quinta posição, faremos 1 transposição; para retornar $a_2 = 3$ para a terceira posição, faremos 2 transposições; para retornar $a_1 = 4$ para a quarta posição, faremos 3 transposições; conforme o processo abaixo:

$$431\mathbf{52} \xrightarrow{(45)} 4\mathbf{31}25 \xrightarrow{(23)} 41\mathbf{32}5 \xrightarrow{(34)} \mathbf{41}235 \xrightarrow{(12)} 1\mathbf{42}35 \xrightarrow{(23)} 12\mathbf{43}5 \xrightarrow{(34)} 12345$$

Conclusão: o código Lehmer da permutação $\sigma = 43152$ é $L(\sigma) = 32010$ e são necessárias 6 transposições para transformar σ na permutação identidade.

Observamos que l_i indica o número de transposições sucessivas que devemos aplicar ao elemento a_i para que ele retorne à sua posição original. Dessa forma, a soma $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ corresponde ao número de transposições necessárias para obter a permutação identidade a partir de σ. Consequentemente, a soma $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ possui a mesma paridade de σ.

Veremos agora como recuperar uma permutação σ a partir do seu código Lehmer.

Exemplo 55. Determine a permutação σ cujo código Lehmer é $L(\sigma) = 40210$.

Resolução. Como $L(\sigma) = 40210$ possui 5 algarismos, sabemos que $\sigma \in S_5$. Seja $\sigma = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$. $l_1 = 4$, então existem quatro números menores que a_1 à sua direita; logo $a_1 = 5$. $l_2 = 0$, então não existe nenhum número menor que a_2 à sua direita; logo $a_2 = 1$. $l_3 = 2$, então existem dois números menores que a_3 à sua direita; como só restaram os números $2, 3$ e 4,logo $a_3 = 4$. $l_4 = 1$, então existe um número menor que a_4 à sua direita; como só restaram 2 e 3, logo $a_4 = 3$. Por fim, $a_5 = 2$.

Conclusão: $\sigma = 51432$.

Exemplo 56. Qual é a permutação σ que corresponde ao código $L(\sigma) = 5423010$.

Resolução. Como $L(\sigma)$ é formado por 7 algarismos, $\sigma \in S_7$. Seja $\sigma = a_1\, a_2 \dots a_7$. Vamos determinar cada elemento de σ.

$$\begin{array}{llll} l_1 = 5 \to \{1,2,3,4,5,\mathbf{6},7\} & \Longrightarrow a_1 = 6 & \text{Resta} & \{1,2,3,4,5,7\} \\ l_2 = 4 \to \{1,2,3,4,\mathbf{5},7\} & \Longrightarrow a_2 = 5 & \text{Resta} & \{1,2,3,4,7\} \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
l_3 = 2 \to \{1,2,\mathbf{3},4,7\} & \Longrightarrow a_3 = 3 & \text{Resta } \{1,2,4,7\} \\
l_4 = 3 \to \{1,2,4,\mathbf{7}\} & \Longrightarrow a_4 = 7 & \text{Resta } \{1,2,4\} \\
l_5 = 0 \to \{\mathbf{1},2,4\} & \Longrightarrow a_5 = 1 & \text{Resta } \{2,4\} \\
l_6 = 1 \to \{2,\mathbf{4}\} & \Longrightarrow a_6 = 4 & \text{Resta } \{2\} \\
l_7 = 0 \to \{\mathbf{2}\} & \Longrightarrow a_7 = 2 &
\end{array}
$$

Conclusão: $\sigma = 6537142$.

Teorema 36. Seja T a função que associa cada $\sigma \in S_n$ a seu respectivo código Lehmer $L(\sigma)$. A função T é bijetora.

Demonstração. Sejam S_n o conjunto das permutações de n elementos, C o conjunto de todos os códigos Lehmer de n dígitos e f a função que associa cada $\sigma \in S_n$ ao seu respectivo código $L(\sigma)$.

Para cada $\sigma \in S_n$, em que $\sigma = a_1\, a_2 \ldots a_n$, existe um único código Lehmer $L(\sigma)$ associado a essa permutação. Portanto a função $f : S_n \to C$ é injetora.

Mostremos que essa função também é sobrejetora. Seja $L(\sigma) = l_1\ l_2\ \ldots\ l_n$. Para qualquer $i \in [n]$, temos que $0 \leq l_i \leq n - i$, pois há, no máximo, $n - i$ elementos à direita de a_i. Como l_i conta o número de elemento à direita de a_i que são menores que a_i, então l_i é um número natural entre 0 e $n - i$. Logo, $L(\sigma)$ é uma função tal que

$$
\begin{aligned}
& l_1 \in \{1,2,\ldots,n-1\}, \\
& l_2 \in \{1,2,\ldots,n-2\}, \\
& \vdots \\
& l_{n-1} \in \{0,1\} \ \text{ e} \\
& l_n \in \{0\}
\end{aligned}
$$

Podemos determinar a cardinalidade do conjunto C calculando o número de sequências $l_1\ l_2\ \ldots\ l_n$ existentes. Pelo princípio fundamental da contagem, temos que $|C| = n \cdot (n-1) \cdot 2 \ldots 1 = n!$. Portanto C e S_n possuem a mesma cardinalidade.

Conclusão: como a função $f : S_n \to C$ é injetora e $|C| = |S_n|$, a função $f : S_n \to C$ é bijetora. □

4.8 Uma ordenação para as permutações de S_n

Mostraremos agora que é possível estabelecer uma ordenação para todas as permutações de S_n usando o código Lehmer. Para isso, vamos definir o conceito de relação de ordem total estrita.

Definição 28 (Relação entre dois conjuntos)**.** Sejam A e B dois conjuntos. Uma relação entre A e B, denotada por R é um subconjunto de $A \times B$. Dado $a \in A$ e $b \in B$, dizemos que a está relacionado a b se $(a,b) \in R$ e denotamos por aRb.

Definição 29 (Propriedades das Relações)**.** Sejam A um conjunto e R uma relação de A em A. Definimos as seguintes propriedades de R.

1. *Reflexiva*: R é reflexiva se: $\forall\, x \in A,\ xRx$. Isto é $(x,x) \in R$ para qualquer $x \in A$.

2. *Irreflexiva*: R é irreflexiva se: $\forall\, x \in A,\ x\not{R}x$. Isto é $(x,x) \notin R$ para qualquer $x \in A$.

3. *Simétrica*: R é simétrica se: $\forall\, x,y \in A,\ xRy \implies yRx$. Isto é, se $(x,y) \in R$, então $(y,x) \in R$ para qualquer $x,y \in A$.

4. *Anti-simétrica*: R é anti-simétrica se: $\forall\, x,y \in A,\ xRy$ e $yRx \implies x = y$. Isto é, se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ então $x = y$ para qualquer $x,y \in A$.

5. *Assimétrica*: R é assimétrica se: $\forall\, x,y \in A,\ xRy \implies y\not{R}x$. Isto é, se $(x,y) \in R$ então $(y,x) \notin R$ para qualquer $x,y \in A$.

6. *Transitiva*: R é transitiva se: $\forall\, x,y,z \in A,\ xRy$ e $yRz \implies xRz$. Isto é, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então $(x,z) \in R$ para qualquer $x,y,z \in A$.

Definição 30 (Relação de ordem estrita)**.** Sejam A um conjunto e R uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de ordem estrita (denotada pelo símbolo$\prec$) se R possui as seguintes propriedades:

1. *Irreflexibilidade*: $\forall\, x \in A,\ x \nprec x$

2. *Assimétrica*: $\forall\, x,y \in A,\ x \prec y \implies y \nprec x$

3. *Transitiva*: $\forall\, x,y,z \in A,\ x \prec y \wedge y \prec z \implies x \prec z$

Se além dessas propriedades, quaisquer dois elementos distintos $x,y \in A$, $x \prec y$ ou $y \prec x$, chamamos essa relação de *ordem estrita total*.

Se um determinado conjunto A possui uma relação de ordem estrita total, essa relação estabelece uma ordenação completa entre os elementos de A, isto é, podemos ordenar os elementos de A tal qual ordenamos números reais. A sentença $x \prec y$ é lida como x precede y; essa sentença não indica, necessariamente, que x é menor que y.

4.8.1 Sistema numérico fatorial

Definição 31 (Sistema numérico fatorial)**.** Chamamos de *sistema numérico fatorial* a função que associa a sequência $(d_{n-1}\ d_{n-2}\ \ldots\ d_1\ d_0)_!$ a um número $k \in \mathbb{N}$ definido por

$$(d_{n-1}\ d_{n-2}\ \ldots\ d_1\ d_0)_! = d_{n-1}\cdot(n-1)! + d_{n-2}\cdot(n-2)! + \ldots + d_1\cdot 1! + d_0\cdot 0! = k$$

Em que $d_i \in \mathbb{N},\ 0 \leq d_i \leq i\ ,\quad \forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Exemplo 57. Calcule o número k representado por $(10210)_!$ no sistema numérico fatorial.

Resolução. $k = (10020)_! = 1\cdot 4! + 0\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! + 0\cdot 0! = 29$.

Exemplo 58. Represente o número 34 no sistema numérico fatorial.

Resolução. Temos que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ e $5! = 120$. Portanto 34 será escrito no máximo como $(d_4\ d_3\ d_2\ d_1\ d_0)$. Como $34 = 24+6+4$, temos que $34 = 1\cdot 4! + 1\cdot 3! + 2\cdot 2! + 0\cdot 1! + 0\cdot 0! = (11200)_!$.

Conclusão: 34 é escrito como $(11200)_!$ no sistema fatorial.

Teorema 37. Para cada número natural $k \in \{0,1,\ldots,(n!-1)\}$, existe uma única representação no sistema numérico fatorial. Isto é, qualquer número pode ser representado de forma única por uma sequência $(d_{n-1}\ d_{n-2}\ \ldots\ d_1\ d_0)_!$, em que $d_i \in \mathbb{N},\ 0 \leq d_i \leq i\ \ \forall\, i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Demonstração. Seja $D_{n-1} = (d_{n-1}\ d_{n-2}\ldots d_1\, d_0)_!$ a representação com $n-1$ dígitos de um número k no sistema fatorial onde:

$$(d_{n-1}\ d_{n-2}\ \ldots\ d_1\ d_0)_! = d_{n-1}\cdot(n-1)! + d_{n-2}\cdot(n-2)! + \ldots + d_1\cdot 1! + d_0\cdot 0! = k$$

Em que $d_i \in \mathbb{N},\ 0 \leq d_i \leq i\ ,\quad \forall i \in [n]$.

Mostraremos que, variando os valores dos dígitos d_0, d_1, …, d_{n-1} tal qual variamos os dígitos em um sistema numérico de base fixa (respeitando os valores limites de cada dígito d_i), formamos a sequência de números naturais. Para ilustrar esse fato, representaremos os número de 0 a 10 usando o sistema fatorial.

$$
\begin{aligned}
(00000)_! &= 0.4! + 0.3! + 0.2! + 0.1! + 0.0! = 0\\
(00010)_! &= 0.4! + 0.3! + 0.2! + 1.1! + 0.0! = 1\\
(00100)_! &= 0.4! + 0.3! + 1.2! + 0.1! + 0.0! = 2\\
(00110)_! &= 0.4! + 0.3! + 1.2! + 1.1! + 0.0! = 3\\
(00200)_! &= 0.4! + 0.3! + 2.2! + 0.1! + 0.0! = 4\\
(00210)_! &= 0.4! + 0.3! + 2.2! + 1.1! + 0.0! = 5\\
(01000)_! &= 0.4! + 1.3! + 0.2! + 0.1! + 0.0! = 6\\
(01010)_! &= 0.4! + 1.3! + 0.2! + 1.1! + 0.0! = 7\\
(01100)_! &= 0.4! + 1.3! + 1.2! + 0.1! + 0.0! = 8\\
(01110)_! &= 0.4! + 1.3! + 1.2! + 1.1! + 0.0! = 9\\
(01200)_! &= 0.4! + 1.3! + 2.2! + 0.1! + 0.0! = 10
\end{aligned}
$$

Seguindo essa lógica, conseguimos representar, sequencialmente e sem repetição, todos os números naturais. Além disso, o maior número que pode ser representado no sistema fatorial de n dígitos é:

$$
\begin{aligned}
(\,(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 2\ 1\ 0)_! &= (n-1).(n-1)! + (n-2).(n-2)! + \ldots + 2.2! + 1.1! + 0.0!\\
(\,(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 2\ 1\ 0)_! &= (n-1).(n-1)! + (n-2).(n-2)! + \ldots + 2.2! + (1.1! + 1) - 1\\
(\,(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 2\ 1\ 0)_! &= (n-1).(n-1)! + (n-2).(n-2)! + \ldots + (2.2! + 2) - 1\\
&\vdots\\
(\,(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 2\ 1\ 0)_! &= n! - 1.
\end{aligned}
$$

Seja a sequência de números naturais $a_n = (0, 1, 2, \ldots, n! - 1)$. Mostraremos, por indução finita, que cada combinação possível de valores para d_0, d_1, ..., d_{n-1}, o número D_{n-1} representa, um único elemento da sequência a_n.

1) Tomando $n = 1$, temos que o maior elemento de a_1 é $1! - 1 = 0$. Logo $a_1 = (0)$. Por outro lado, $D_0 = (d_0)_!$; o único número formado por D_0 é $D_0 = (0)_! = 0$. Portanto, $D_0 = \{0\} = a_1$.

2) Mostremos agora que, se D_{n-1} representa um único elemento da sequência a_n, então D_n representa um único elemento da sequência a_{n+1}.

Por hipótese, $D_{n-1} = (d_{n-1}\ d_{n-2}\ \ldots\ d_2\ d_1\ d_0)_!$ representa, de forma única, todos os elementos da sequência $a_n = (0, 1, 2, \ldots, n! - 1)$. Analisaremos agora os números formados por D_n. Temos que

$$D_n = (d_n\, d_{n-1}\, d_{n-2} \ldots\, d_1\, d_0)_!$$

$$
\begin{aligned}
D_n &= d_n \cdot n! + [d_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots + d_1 \cdot 1! + d_0 \cdot 0!] \\
D_n &= d_n \cdot n! + (d_{n-1}\, d_{n-2}\, \ldots\, d_1\, d_0)_! \\
D_n &= d_n \cdot n! + D_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto todos os valores de D_n podem ser obtidos através da soma de combinações de $d_n \cdot n! + D_{n-1}$. Como, por hipótese, D_{n-1} varia de 0 a $n! - 1$, basta analisar as combinações obtidas variando d_n entre 0 e n; e D_{n-1} variando entre 0 e $n! - 1$.

Seja b_i a sequência formada ao tomarmos $d_n = i$ e variarmos D_{n-1} de 0 e $n! - 1$. As sequências de valores formadas são:

$$
\begin{aligned}
&d_n = 0 \implies D_n = 0 \cdot n! + D_{n-1} \\
&b_0 = (0+0, 0+1, 0+2, \ldots, 0+n!-1) = (0, 1, 2, \ldots, n!-1) \\
\\
&d_n = 1 \implies D_n = 1 \cdot n! + D_{n-1} \\
&b_1 = (n!+0, n!+1, n!+2, \ldots, n!+n!-1) = (n!, n!+1, n!+2, \ldots, 2n!-1) \\
&d_n = 2 \implies D_n = 2 \cdot n! + D_{n-1} \\
&b_2 = (2n!+0,\ 2n!+1,\ 2n!+2, \ldots,\ 2n!+n!-1) = (2n!,\ 2n!+1,\ 2n!+2, \ldots,\ 3n!-1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&d_n = 2 \implies D_n = 2 \cdot n! + D_{n-1} \\
&b_n = (n! \cdot n! + 0,\ n! \cdot n! + 1,\ \ldots,\ n! \cdot n! + n! - 1) = (n! \cdot n!,\ n! \cdot n! + 1,\ \ldots,\ (n+1)! - 1)
\end{aligned}
$$

Cada sequência b_i possui exatamente $n!$ elementos consecutivos; o primeiro termo da sequência b_{i+1} é o sucessor do último termo de b_i. Justapondo as sequências b_0, $b_1 \ldots$, b_n, obtemos a sequência $a_{n+1} = (0, 1, 2, \ldots (n+1)! - 1)$. Portanto, pelo princípio da indução finita, cada possível combinação $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ em $D_{n-1} = (d_{n-1}\, d_{n-2}\, \ldots\, d_2\, d_1\, d_0)_!$ representa um único número da sequência $a_n = (0, 1, 2, \ldots n! - 1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Conclusão: Qualquer número $k \in \{0, 1, \ldots, n! - 1\}$ possui uma única representação no sistema numérico fatorial $(d_{n-1}\, d_{n-2}\, \ldots\, d_2\, d_1\, d_0)_!$. $\square$

4.8.2 Relação de ordem induzida pelo código Lehmer

Teorema 38. O código Lehmer estabelece uma relação de ordem total e estrita para as permutações de S_n

Demonstração. Vimos no teorema 36 que há uma relação biunívoca entre as permutações de S_n e o código Lehmer. Seja $L(\sigma) = l_1\, l_2\, \ldots\, l_n$. Para qualquer $i \in [n],\ 0 \le l_i \le n - i$. Portanto $L(\sigma)$ pode ser associado de forma única ao número k tal que $k = (l_1\, l_2\, \ldots\, l_n)_!$.

Para cada permutação σ há um código Lehmer $L(\sigma) = l_1\ l_2\ \ldots\ l_n$ associado e cada código pode ser associado a um número $k = (l_1\ l_2\ \ldots\ l_n)_!$. Portanto, podemos estabelecer uma relação biunívoca entre as permutações $\sigma \in S_n$ e o conjunto de números naturais $\{0, 1, \ldots, n! - 1\}$ através do código Lehmer $L(\sigma)$ dessa permutação.

Conclusão: Há uma relação de ordem total e estrita para todas as permutações de S_n induzida pelo código Lehmer. $\square$

Vamos mostrar um exemplo de aplicação desse resultado. Sejam as permutações 123, 132, 213, 231, 312 e 321 $\in S_3$.

$$
\begin{aligned}
L(123) = 000 &\implies k_1 = (000)_! = 0 \\
L(132) = 010 &\implies k_2 = (010)_! = 1 \\
L(213) = 100 &\implies k_3 = (100)_! = 2 \\
L(231) = 110 &\implies k_4 = (110)_! = 3 \\
L(312) = 200 &\implies k_5 = (200)_! = 4 \\
L(321) = 210 &\implies k_6 = (210)_! = 5
\end{aligned}
$$

Conclusão: $123 \prec 132 \prec 213 \prec 231 \prec 312 \prec 321$ pois $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$.

Observamos que sequer é necessário calcular o valor k correspondente à representação do código Lehmer no sistema fatorial. É possível ordenar as permutações diretamente a partir do código Lehmer. Para isso, basta comparar os códigos como se fossem números escritos numa base qualquer.

Por exemplo, tomando as permutações $\sigma = 45123$, $\tau = 41235$ e $\pi = 45231$, temos que $L(\sigma) = 33000$, $L(\pi) = 30000$ e $L(\tau) = 33110$; logo $\tau \prec \sigma \prec \pi$.

Dessa forma é possível ordenar todas as permutações de um conjunto S_n através de um critério simples e objetivo. Ressaltamos que essa é uma forma de estabelecer uma ordem, mas não é a única. Para diferentes aplicações, pode ser desejável criar uma relação de ordem diferente que possua uma determinada propriedade.

CAPÍTULO

5

CAMINHOS NA MALHA E DESCONHECIMENTO DE PADRÕES

5.1 Caminho na malha quadriculada

Nesta seção, nosso objetivo será determinar o número de possíveis caminhos que uma partícula pode realizar para se deslocar de um ponto (x_i, y_i) até o ponto (x_f, y_f) em uma malha quadriculada, sendo que, a cada movimento, essa partícula só pode deslocar-se unidades inteiras para cima ou para a direita. Chamaremos esse tipo de trajeto de *caminho norte-leste*.[13]

Definição 32 (Caminho Norte-Leste)**.** Sejam uma malha quadriculada bidimensional e uma partícula que se desloca nessa malha do ponto (x_i, y_i) até o ponto (x_f, y_f). Denominamos de *caminho norte-leste* o trajeto realizado por essa partícula se, a cada movimento, ela só pode se deslocar uma unidade para cima- do ponto (x_k, y_k) para o ponto $(x_k, y_k + 1)$ - ou uma unidade para direita - do ponto (x_k, y_k) para o ponto $(x_k + 1, y_k)$.

Exemplo 59. Seja uma partícula localizada no ponto $(0,0)$ em uma malha quadriculada. Suponha que essa partícula pode se movimentar nessa malha avançando uma unidade para a direita ou uma unidade para cima. Há quantos caminhos possíveis para essa partícula chegar no ponto $(10,5)$?

Resolução. Queremos determinar o número de *caminhos norte-leste* existentes partindo do ponto $(0,0)$ e terminando no ponto $(10,5)$. A Figura 25 mostra dois possíveis caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto $(10,5)$.

[13] A expressão *caminho norte-leste* foi inspirada na denominação utilizada por BÓNA (2006), "*northeastern lattice path*". Optou-se por não se fazer a tradução literal da expressão em inglês pois poderia gerar mal-entendidos.

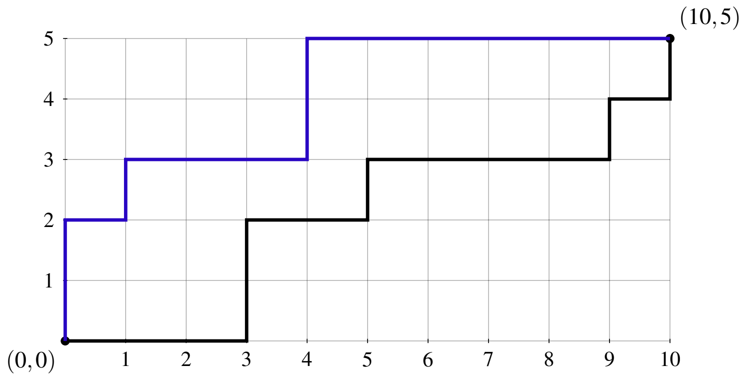


Figura 25 – Dois possíveis caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto $(10,5)$

Independentemente do caminho escolhido, para sair do ponto $(0,0)$ e chegar no ponto $(10,5)$, a partícula realizará 10 movimentos para a direita e 5 movimentos para cima. Utilizando a letra **C** para representar os deslocamentos para cima e **D** para representar os deslocamento para a direita, qualquer caminho realizado será equivalente a um anagrama com as letras : **C C C C C D D D D D D D D D D.**

Conclusão: Há $\binom{10+5}{5} = \binom{15}{5} = 3003$ possíveis caminhos norte-leste, partindo de $(0,0)$ para chegar em $(10,5)$.

Exemplo 60. Há quantos caminhos norte-leste possíveis para uma partícula se deslocar do ponto (-4, 5) ao (10, 8) ?

Resolução. Neste caso, a partícula terá que se deslocar 14 unidades para direita e 3 unidades para cima. O número de caminhos será igual ao número de anagramas com 14 letras **D** e 3 letras **C**.

Conclusão: Há $\binom{14+3}{3} = \binom{17}{3} = 680$ caminhos possíveis.

Teorema 39 (Número de Caminhos Norte-Leste)**.** O número de caminhos norte-leste do ponto (x_i, y_i) até o ponto (x_f, y_f), em que $x_i, y_i, x_f, y_f \in \mathbb{Z}$, e $x_f \geq x_i, y_f \geq y_i$, é dado por

$$\binom{(x_f - x_i) + (y_f - y_i)}{x_f - x_i}$$

Demonstração. Qualquer caminho norte-leste de (x_i, y_i) até o ponto (x_f, y_f) é composto por $(x_f - x_i)$ movimentos para a direita e $(y_f - y_i)$ movimentos para a cima. O número de caminhos é dado então pelo número de anagramas formado por $(x_f - x_i)$ letras **D** e $(y_f - y_i)$ letras **C**. Portanto, há $\binom{(x_f - x_i)+(y_f - y_i)}{x_f - x_i}$ caminhos. □

Exemplo 61. Qual é o número de caminhos norte-leste partindo do ponto $(0,0)$ para chegar no ponto $(12,6)$ que passam pelo ponto $(5,5)$?

Resolução. Neste caso, basta dividir o problema em duas partes. Primeiro, calculamos o número de caminhos partindo do ponto $(0,0)$ e chegando no ponto $(5,5)$: $\binom{10}{5}$ possibilidades. Depois, calculamos o número de caminhos partindo do ponto $(5,5)$ e chegando no ponto $(12,6)$: $\binom{8}{1}$

possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, o número total de caminhos será igual ao produto desses dois resultados.

Conclusão: Existem $\binom{10}{5} \cdot \binom{8}{1} = 2016$ caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto $(12,6)$ que passam pelo ponto $(5,5)$.

Exemplo 62. Quantos caminhos norte-leste do ponto (-3, -2) ao ponto (10, 5) **não passam** pela origem?

Resolução. Resolveremos este problema usando o raciocínio complementar.

O número total de caminhos do ponto $(-3,-2)$ ao ponto $(10,5)$, que passando ou não pela origem, é igual a $\binom{20}{7}$

O número de caminhos norte-leste do ponto $(-3,-2)$ ao ponto $(10,5)$, que passam pela origem é igual a $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{5}$

Conclusão: o número de caminhos do ponto $(-3,-2)$ ao ponto $(10,5)$, que não passam pela origem é dado por:

$$\binom{20}{7} - \binom{5}{2} \cdot \binom{15}{5} = 47490$$

5.1.1 Princípio da reflexão

Exemplo 63. Qual é o número de caminhos norte-leste partindo do ponto $(0,0)$ ao ponto $(8,8)$ que tocam a reta $y = x+2$?

Resolução. Para resolver esse problema, usaremos uma técnica chamada de princípio da reflexão. Suponhamos que um determinado caminho norte-leste toca a reta $y = x+2$ no ponto $(k, k+2)$. O caminho de $(0,0)$ até $(k, k+2)$ pode ser refletido em relação à reta $y = x+2$. A Figura 26 mostra dois caminhos do ponto $(0,0)$ ao ponto $(8,8)$ que tocam a reta $y = x+2$ pela primeira vez em pontos distintos. Observamos que, independentemente do caminho realizado, a reflexão projeta o ponto $(0,0)$ no ponto $(-2,2)$.

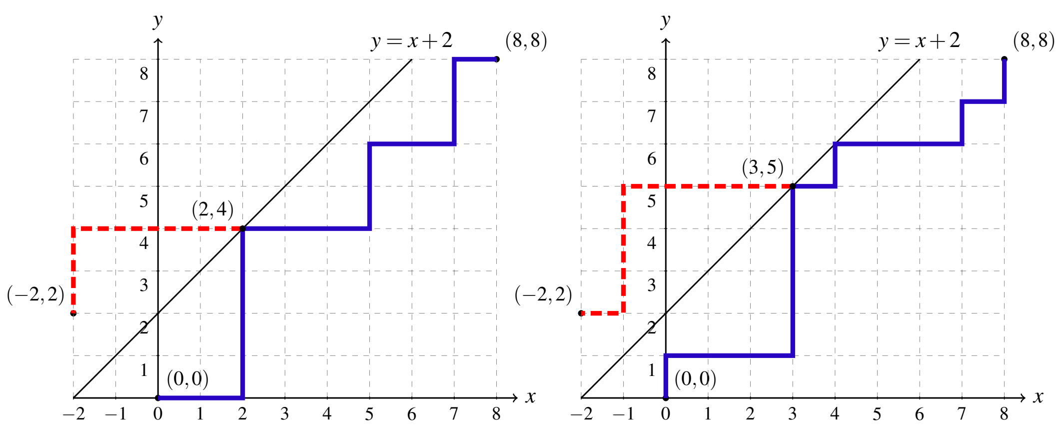


Figura 26 – Princípio da reflexão aplicado na reta $y = x+2$ em dois caminhos norte-leste.

Da mesma forma, qualquer caminho partindo do ponto $(-2,2)$ ao ponto $(8,8)$, toca a reta $y = x+2$ em algum ponto $(k,k+2)$; o trecho $(-2,2)$ à $(k,k+2)$ pode ser refletido em relação a reta $y = x+2$, projetando o ponto $(-2,2)$ no ponto $(0,0)$. Há, portanto, uma bijeção entre o número de caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto $(8,8)$ que passam pela reta $y = x+2$ e os caminhos do ponto $(-2,2)$ até o ponto $(8,8)$. O número de caminhos do do ponto $(-2,2)$ até o ponto $(8,8)$ são fáceis de calcular: são realizados 10 movimentos para direita e 6 movimentos para cima.

Conclusão: Existem $\binom{16}{6} = 8008$ caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto $(8,8)$ que tocam a reta $y = x+2$.

Exemplo 64. Há quantos caminhos norte-leste saindo do ponto $(0,0)$ ao ponto (a,b), com $a > 0$ e $b > 0$, que tocam a reta $r : y = x+m$,com $m \in \mathbb{Z}$?

Resolução. Observamos que, dependendo do valor de m, pode não haver nenhum caminho que toque esta reta. Suponhamos inicialmente que a partícula toca a reta r, depois determinamos as condições para que isso ocorra.

Para determinar o número de caminhos que tocam a reta r, utilizamos o princípio da reflexão. A posição para onde o ponto $(0,0)$ será refletido independe do ponto onde o caminho toca a reta r. Seja $y_p = x_p + m$, a ordenada do ponto onde o caminho toca a reta $y = x+m$ pela primeira vez. Se o caminho feito do ponto $(0,0)$ até o ponto $(x_p, x_p + m)$ não importa para determinar a reflexão, podemos analisar o caso mais simples. Suponhamos que a partícula partiu do ponto $(0,0)$, deslocou-se x_p unidades para a direita e depois $x_p + m$ unidades para cima, até tocar no ponto $(x_p, x_p + m)$. A reflexão deste caminho em torno da reta $y = x+m$, refletirá o ponto $(0,0)$ no ponto (m,m), conforme mostra a Figura 27.

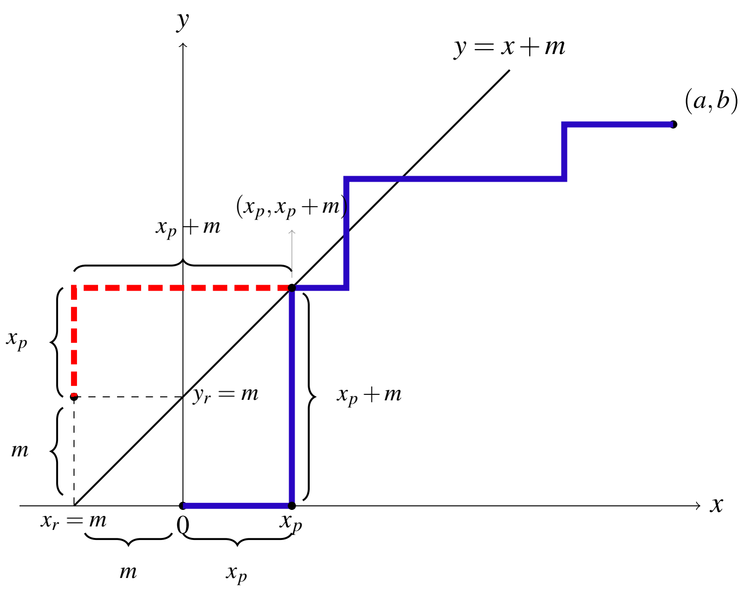


Figura 27 – Reflexão do ponto $(0,0)$ em relação a reta $y = x+m$

O número de caminhos partindo do ponto $(0,0)$ ao ponto (a,b) que toca a reta $y = x + m$ é igual o número de caminhos partindo do ponto $(-m,m)$ ao ponto (a,b). Este número é dado por

$$\binom{a-(-m)+b-m}{b-m} = \binom{a+b}{b-m}$$

A expressão acima é válida quando $b \geq m$ e $a \leq m$.

Conclusão: O número de caminhos partindo do ponto $(0,0)$ ao ponto (a,b) que toca a reta $y = x + m$ é igual $\binom{a+b}{b-m}$.

Teorema 40. As coordenadas do ponto $R = (x_r, y_r)$ correspondente a reflexão do ponto $A = (x_a, y_a)$ em relação a reta $r : y = x + m$ são dada por:

$$x_r = y_a - m \qquad \text{e} \qquad y_r = x_a + m$$

Demonstração. O ponto $R = (x_r, y_r)$ será a reflexão do ponto $A = (x_a, y_a)$ em relação a reta r se os dois pontos se encontram à mesma distância desta reta, porém ocupam semi-planos distintos.

Determinaremos as coordenadas do ponto R em função do ponto A. Seja $f(x) = x + m$ a função que determina a reta r. Sejam os pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ pertencentes à reta r, tal que AP seja perpendicular ao eixo x, e AQ paralelo ao eixo x. Como a reta r forma um ângulo de $45°$ com o eixo x, RP será paralelo ao eixo x e RQ, perpendicular ao eixo x.

AP é perpendicular ao eixo x, logo $x_p = x_a$ e $y_p = f(x_p) = f(x_a) = x_a + m$.

RP é paralelo ao eixo x, logo $y_r = y_p$. Portanto $y_r = x_a + m$.

RQ é perpendicular ao eixo x, logo $x_q = x_r$ e $y_q = f(x_q) = f(x_r) = x_r + m$.

AQ é paralelo ao eixo x, logo $y_a = y_q$. Portanto $y_a = x_r + m \implies x_r = y_a - m$ □

Exemplo 65. Qual é o número de caminhos norte-leste partindo do ponto $(0,0)$ ao ponto (n,n) que não ultrapassam a reta $y = x$?

Resolução. No exemplo 64, calculamos o número de caminhos norte-leste que tocam uma reta $y = x + m$. A questão agora é determinar quantos caminhos não ultrapassam a reta $y = x$.

Calcular diretamente o número de caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto (n,n) que não ultrapassam a reta $y = x$ é muito trabalhoso. Calcularemos então o número de caminhos que ultrapassam a reta $y = x$ e excluiremos esse valor do total de caminhos.

A Figura 28 ilustra um caminho norte-leste do $(0,0)$ ao ponto $(8,8)$ que ultrapassa a reta $y = x$.

Um caminho ultrapassa a reta $y = x$, se, somente se, ele toca a reta $y = x + 1$ em algum ponto. Podemos então calcular o número de caminhos que ultrapassam a reta $y = x$, calculando o número de caminhos que tocam a reta $y = x + 1$.

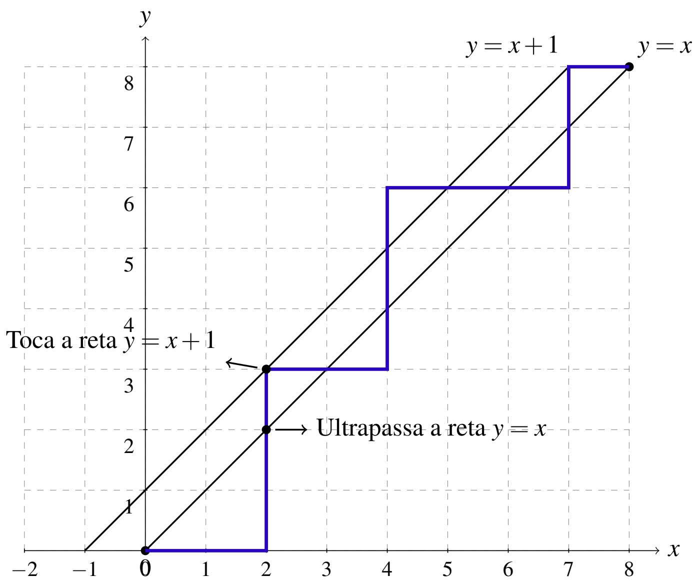


Figura 28 – Um caminho norte-leste que ultrapassa a reta $y = x$.

Para calcular o número de caminhos que tocam a reta $y = x + 1$, usaremos o princípio da reflexão. O ponto $(0, 0)$ é refletido, em relação à reta $y = x + 1$, no ponto $(-1, 1)$. O número de caminhos que tocam a reta $y = x + 1$ é igual ao número de caminhos partindo do ponto $(-1, 1)$ ao ponto (n, n)

$$\binom{n-(-1)+n-1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$$

O total de caminhos de $(0, 0)$ à (n, n) é dado por

$$\binom{n-0+n-0}{n-0} = \binom{2n}{n}$$

Portanto, o número de caminhos desejados é dado por

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(2n-(n-1))!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{n}{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!n!(n+1)} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Conclusão: o número de caminhos norte-leste do ponto $(0,0)$ ao ponto (n,n) que não ultrapassam a reta $y = x$ é $\dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$

Teorema 41. O número C_n de caminhos norte-leste partindo do ponto $(0,0)$ até o ponto (n,n) que **não ultrapassam** a reta $y = x$ é calculado pela expressão:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

O número C_n é conhecido como *n-ésimo número de Catalan* e tem diversas aplicações no campo da análise combinatória.

5.2 Permutações que desconhecem padrão

Nesta seção abordaremos um problema interessante de desconhecimento de padrão. Este problema consiste em descobrir o número de permutações onde um certo padrão não ocorre.

Definição 33 (Desconhecimento de Padrão 132[14])**.** Dizemos que a permutação $\sigma = \sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ possui o padrão 132, se, existem $i, j, k \in [n]$,com $i < j < k$, tais que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$. Se não existem $i, j, k \in [n]$, com $i < j < k$, tais que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$, dizemos que a permutação σ *desconhece* o padrão 132.

A permutação $\sigma = 31254$ possui o padrão 132 pois $\sigma_1 < \sigma_5 < \sigma_4$ (no caso, os elementos 3, 4 e 5). A Figura 29 ilustra a permutação $\sigma = 31254$, destacando a ocorrência do padrão 132 nos elementos σ_1, σ_5 e σ_4. essa não é a única ocorrência do padrão 132 nessa permutação; ele ocorre também com o segundo, quarto e quinto elemento da permutação ($\sigma_2 < \sigma_5 < \sigma_4$); e novamente com o terceiro, quarto e quinto elemento ($\sigma_3 < \sigma_5 < \sigma_4$).

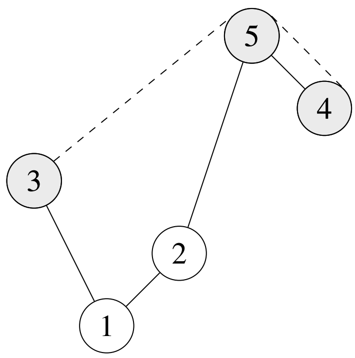


Figura 29 – Permutação $\sigma = 31254$ e o padrão 132 nos elementos σ_1, σ_5 eσ_4

[14] BÓNA (2006) utiliza o termo *132-avoiding* para se referir as permutações que não apresentam o padrão 132. Neste trabalho optou-se por utilizar a expressão *desconhece o padrão 132* adotada em Moraes (2012).

O padrão 132 é um padrão de comprimento 3. Cada permutação de três elementos formam um novo padrão de comprimento 3. Há, portanto seis padrões de comprimento 3: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. A característica mais fácil para reconhecer um padrão é a disposição geométrica de seu grafo. A Figura 30 relaciona cada padrão de comprimento 3 com sua respectiva disposição espacial.

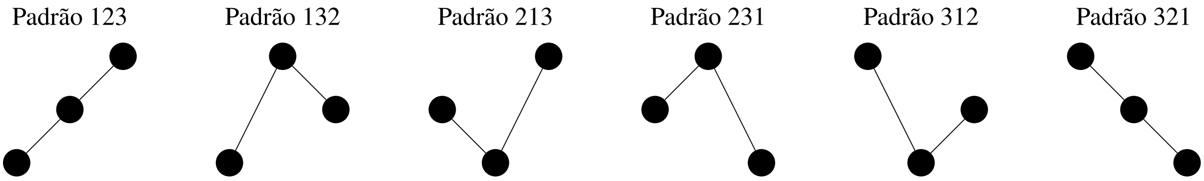


Figura 30 – Grafos dos padrões de comprimento 3.

Quando uma permutação possui o padrão 132, temos três elementos posicionados de forma que o menor precede o maior, que precede o intermediário (sem necessariamente estarem em posições adjacentes). Quando isso não ocorre, dizemos que a permutação desconhece o padrão 132. A Figura 31 ilustra a permutação $\sigma = 43125$ que desconhece o padrão 132; isto é, não existem $i, j, k \in \{1,2,3,4,5\}$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$. Nosso objetivo nesta seção será exatamente calcular quantas permutações de n elementos desconhecem o padrão 132.

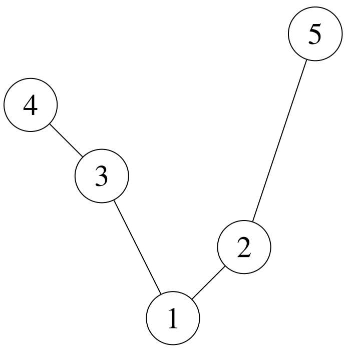


Figura 31 – Exemplo de permutação que desconhece o padrão 132.

Exemplo 66. Quantas permutações de S_{10} desconhecem o padrão 132; isto é, não existem $i, j, k \in [10]$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$.

Resolução. Nesta primeira abordagem, começaremos posicionando os elementos da permutação do maior para o menor de modo que a sequência formada desconheça o padrão 132.

Suponhamos que o elemento 10 esteja na quarta posição da esquerda para direita. Como podemos posicionar os demais números a fim de evitar o padrão 132?

Se posicionarmos o elemento 9 à direita do 10, não poderemos posicionar o 8 à esquerda de 10, pois teríamos uma sequência onde $8 \prec 10 \prec 9$ (isto é, 8 precede 10, que precede 9), ocorrendo o padrão 132. Na verdade, se posicionarmos o elemento 9 à direita do 10, qualquer sequência formada a partir disso possuirá o padrão 132, pois haverá um elemento $a < 9$ à esquerda de 10 e teremos uma sequência onde $a \prec 10 \prec 9$. Portanto o algarismo 9 precisa ser posicionado à esquerda de 10.

Seguindo o mesmo raciocínio, os algarismos 8 e 7 também devem estar à esquerda de 10. Consequentemente, os números de 1 a 6 ficarão à direita de 10. A figura Figura 32 ilustra a distribuição dos elementos de uma permutação de 10 elementos que desconhece o padrão 132, após posicionarmos o maior elemento na quarta posição.

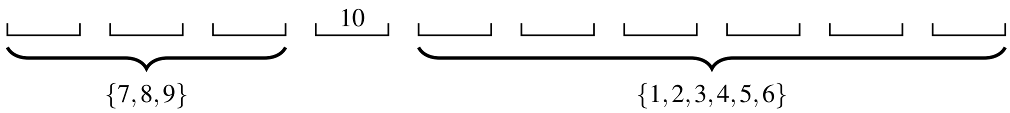


Figura 32 – Formação de uma permutação que desconhece o padrão 132.

Como todos os elementos à esquerda de 10 são maiores que todos os elementos à direita de 10, não há mais o risco de se formar um padrão 132 com o elemento 10. Nosso problema agora é posicionar os elementos do subconjuntos $\{7,8,9\}$ e $\{1,2,3,4,5,6\}$ de forma que cada um desses subconjuntos desconheçam o padrão 132. Isto equivale a calcular o número de permutações de S_3 e multiplicar pelo número de permutações de S_6 que desconhecem o padrão 132.

Seja $p(n)$ o número de permutações de n elementos que desconhece o padrão 132. Determinaremos uma expressão para $p(10)$: número de permutações de 10 elementos que desconhece o padrão 132.

Se posicionarmos o algarismo 10 na quarta posição, o número de permutações de S_{10} que desconhecem o padrão 132 é dada por $p(3) \cdot p(6)$. Se posicionarmos o algarismo 10 na quinta posição, teremos o subconjunto $\{6,7,8,9\}$ à direita e $\{1,2,3,4,5\}$ à esquerda de 10. Logo a parcela de permutações S_{10} que desconhecem o padrão 132 com o elemento 10 na quinta posição é $p(4) \cdot p(5)$. Variando a posição do elemento 10 entre a primeira e a última posição, obtemos a seguinte expressão

$$p(10) = p(0) \cdot p(9) + p(1) \cdot p(8) + p(2) \cdot p(7) + \ldots + p(9) \cdot p(0) = \sum_{i=1}^{10} p(i-1) \cdot p(10-i)$$

De forma geral, o número $p(k)$ é dado por

$$p(k) = \sum_{i=1}^{k} p(i-1) \cdot p(k-i)$$

Definindo $p(0) = 1$, temos de imediato que $p(1) = 1! = 1$, $p(2) = 2! = 2$, pois nenhuma permutação de 1 ou 2 elemento possui o padrão 132. Além disso, $p(3) = 3! - 1 = 5$, pois todas as permutações de S_3 desconhecem o padrão 132, exceto a própria 132. Calcularemos agora $p(10)$ através da recorrência acima.

$$p(4) = p(0) \cdot p(3) + p(1) \cdot p(2) + p(2) \cdot p(1) + p(3) \cdot p(0)$$

$$p(4) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

$$\begin{aligned}
p(5) =& p(0) \cdot p(4) + p(1) \cdot p(3) + p(2) \cdot p(2) + p(3) \cdot p(1) + p(4) \cdot p(0) \\
p(5) =& 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(6) =& p(0) \cdot p(5) + p(1) \cdot p(4) + p(2) \cdot p(3) + p(3) \cdot p(2) + p(4) \cdot p(1) + p(5) \cdot p(0) \\
p(6) =& 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(7) =& p(0) \cdot p(6) + p(1) \cdot p(5) + p(2) \cdot p(4) + p(3) \cdot p(3) + p(4) \cdot p(2) + p(5) \cdot p(1) \\
& + p(6) \cdot p(0) \\
p(7) =& 1 \cdot 132 + 1 \cdot 42 + 2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 2 + 42 \cdot 1 + 132 \cdot 1 = 429
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(8) =& p(0) \cdot p(7) + p(1) \cdot p(6) + p(2) \cdot p(5) + p(3) \cdot p(4) + p(4) \cdot p(3) + p(5) \cdot p(2) \\
& + p(6) \cdot p(1) + p(7) \cdot p(0) \\
p(8) =& 1 \cdot 429 + 1 \cdot 132 + 2 \cdot 42 + 5 \cdot 14 + 14 \cdot 5 + 42 \cdot 2 + 132 \cdot 1 + 429 = 1430
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(9) =& p(0) \cdot p(8) + p(1) \cdot p(7) + p(2) \cdot p(6) + p(3) \cdot p(5) + p(4) \cdot p(4) + p(5) \cdot p(3) \\
& + p(6) \cdot p(2) + p(7) \cdot p(1) + p(8) \cdot p(0) \\
p(9) =& 1 \cdot 1430 + 1 \cdot 429 + 2 \cdot 132 + 5 \cdot 42 + 14 \cdot 14 + 42 \cdot 5 + 132 \cdot 2 + 429 \cdot 1 + 1430 \cdot 1 \\
& = 4862
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(10) =& p(0) \cdot p(9) + p(1) \cdot p(8) + p(2) \cdot p(7) + p(3) \cdot p(6) + p(4) \cdot p(5) + p(5) \cdot p(4) \\
& + p(6) \cdot p(3) + p(7) \cdot p(2) + p(8) \cdot p(1) + p(9) \cdot p(0) \\
p(10) =& 4862 \cdot 1 + 1430 \cdot 1 + 429 \cdot 2 + 132 \cdot 5 + 14 \cdot 42 + 42 \cdot 14 + 132 \cdot 5 + 429 \cdot 2 \\
& + 1430 \cdot 1 + 4862 \cdot 1 = 16796
\end{aligned}$$

Conclusão: Existem 16796 permutações de S_{10} que desconhecem o padrão 132.

O exemplo 66 pode ser generalizado para calcular o número de permutações de S_n que desconhecem o padrão 132 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 42. Seja S_n o conjunto das permutações de n elementos. O número $p(n)$ de permutações de n elementos que desconhecem o padrão 132 é dada pela recorrência:

$$p(n) = \sum_{i=1}^{n} p(i-1) \cdot p(n-i)$$

Com $p(0) = p(1) = 1$, por definição.

A fórmula de recorrência do teorema 42 é útil, mas bastante trabalhosa, principalmente quando tomamos valores de n cada vez maiores. Abordaremos agora o problema sobre uma perspectiva diferente para obter uma fórmula geral para o cálculo do número de permutações que desconhecem o padrão 132.

Por simplicidade, tomaremos as permutações de S_7. Analisaremos graficamente quais são as restrições para a formação de uma permutação $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_7$.

Não há restrição para escolha de σ_1. Seja $\sigma_1 = 5$. Quais são os possíveis valores para σ_2?

O elemento σ_2 pode ser qualquer número menor que 5, pois tomando $\sigma_2 < \sigma_1$, para qualquer σ_i, com $2 < i \leq 7$, a sequência $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \sigma_i$ não formará o padrão 132. Se tomarmos σ_2 maior que 5, a única opção é $\sigma_2 = 6$; pois se $\sigma_2 > 6$, existirá algum $\sigma_i = 6$, com $i > 2$, e a sequência $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \sigma_i$ $(5 \prec \sigma_2 \prec 6)$ terá o padrão 132. Portanto $\sigma_2 \in \{1,2,3,4,6\}$.

A Figura 33 ilustra a permutação $\sigma = 5731624$ destacando o padrão 132 formado por σ_1, σ_2 e σ_5, devido σ_2 ser maior que σ_1 e existir um elemento entre σ_1 e σ_2.

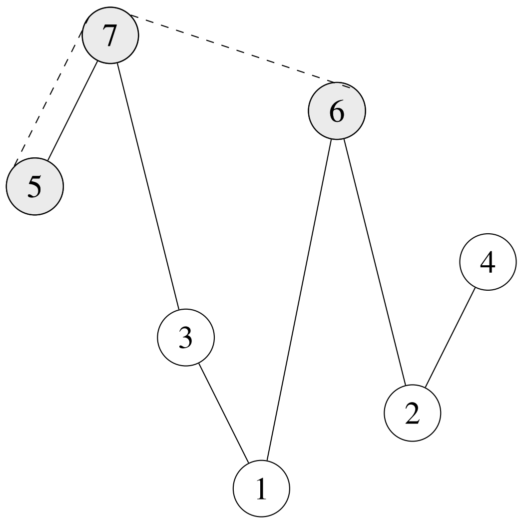


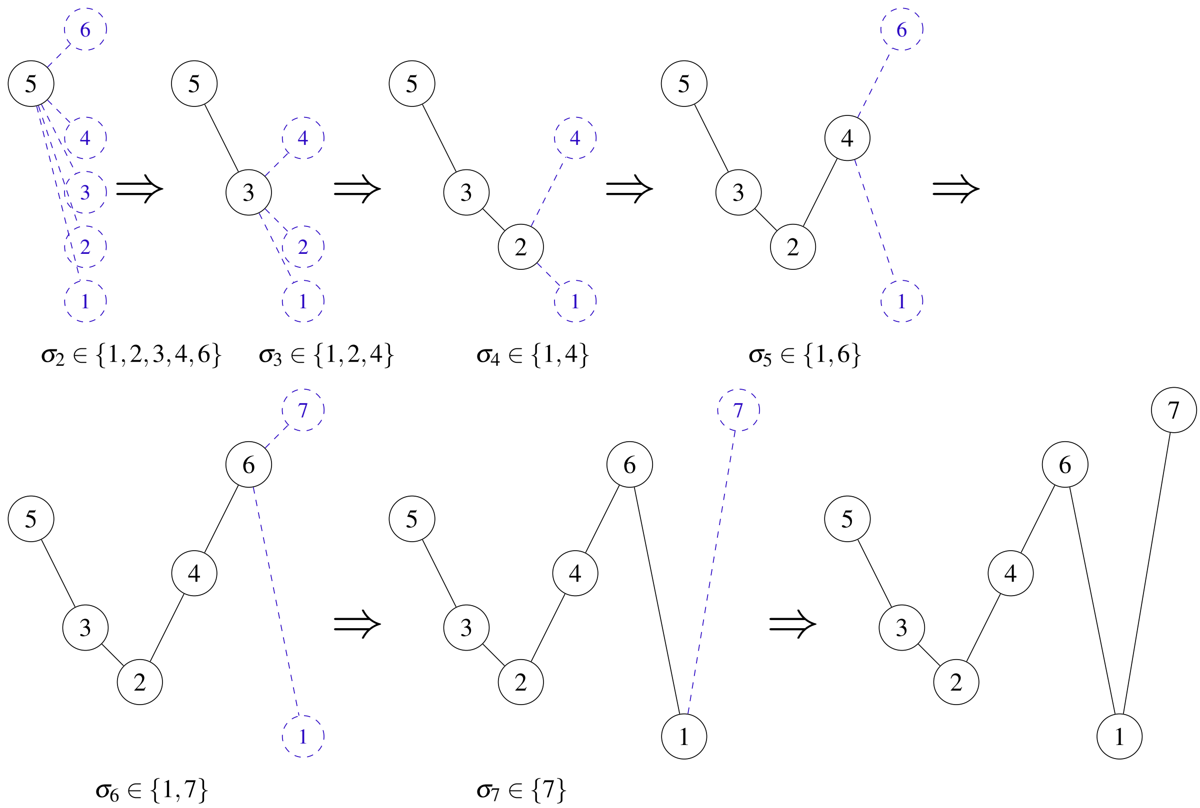
Figura 33 – Permutação $\sigma = 5731624$, e o padrão 132 formado por σ_1, σ_2 e σ_5.

Seja $\sigma_2 = 3$. O elemento σ_3 poderá ser qualquer número menor que σ_2 ou o número imediatamente superior a σ_2 que ainda não foi tomado (no caso, o número 4). Dessa forma, $\sigma_3 \in \{1,2,4\}$.

Seja $\sigma_3 = 2$. O elemento σ_4 poderá ser qualquer número menor que σ_3 ou o número imediatamente superior a σ_3 que ainda não foi tomado (no caso, o número 4). Dessa forma, $\sigma_4 \in \{1,4\}$.

Continuando esse processo, formamos uma permutação de S_7 que desconhece o padrão 132.

A Figura 34 ilustra a formação de uma permutação que desconhece o padrão 132, etapa por etapa, partindo de $\sigma_1 = 5$ e destacando as possíveis escolhas para $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_7$.



Legenda:As linhas e círculos pontilhados indicam as possíveis escolhas para o próximo termo da sequência.

Figura 34 – Processo de formação de uma permutação que desconhece o padrão 132.

Definiremos agora uma processo para formar uma permutação $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_n$ que desconhece o padrão 132. Sejam os conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_i &= \bigcup_{k=1}^{i} \sigma_k && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}\\
R_i &= [n]/A_i && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}\\
B_i &= \{x \in R_i \colon x < \sigma_i\} && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}\\
C_i &= \{x \in R_i \colon x > \sigma_i\} && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}$$

Para formar uma sequência que desconhece o padrão 132, escolhemos sucessivamente σ_1, σ_2, $\ldots\,\sigma_n$ tal que:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 \in [n]\\
&\sigma_2 \in B_1 \quad \text{ou} \quad \sigma_2 = min\{C_1\}\\
&\sigma_3 \in B_2 \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = min\{C_2\}\\
&\quad\vdots\\
&\sigma_{n-1} \in B_{n-2} \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = min\{C_{n-2}\}\\
&\sigma_n \in R_{i-1}
\end{aligned}$$

Analisaremos uma permutação $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,\sigma_n$ pelo comportamento do grafo formado pela sequência σ_1, σ_2, $\ldots\sigma_n$. Podemos pensar que estamos nos deslocando pelo grafo do ponto $(1,\sigma_1)$ ao ponto (n,σ_n). De qualquer ponto $(i-1,\sigma_{i-1})$, com $1 < i < n$, temos duas possibilidades para o próximo movimento:

- nos deslocamos para baixo, escolhendo para σ_i qualquer valor $x < \sigma_{i-1}$ que ainda não pertença a sequência $\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\sigma_{i-1}$; ou
- nos deslocamos para cima, tomando σ_i como o menor valor $x > \sigma_{i-1}$ que ainda não pertença a sequência $\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\sigma_{i-1}$.

Dessa forma, cada permutação que desconhecem o padrão 132, pode ser analisada a partir dos possíveis caminhos do ponto $(1,1)$ ao ponto (n,n) que obedeçam os critérios estabelecidos anteriormente.

5.2.1 Sequência de descidas

Definição 34 (Sequência de descidas[15])**.** Seja $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,\sigma_n$ uma permutação que desconhece o padrão 132. Seja a função $Q_\sigma : [n] \to [n]$ definida como:

$$Q_\sigma(1) = n - \sigma_1$$
$$Q_\sigma(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_i > \sigma_{i-1} \\ \min\limits_{0<k<i}\{\sigma_k\} - \sigma_i & \text{se } \sigma_i < \sigma_{i-1} \end{cases}$$
$$\forall\, i \in \{2,3,\ldots,n\}$$

Denominaremos de *sequência de descidas* e denotaremos por $Q_\sigma = q_1\,q_2\ldots q_n$ a sequência formada a partir da função Q_σ tal que $q_i = Q_\sigma(i)$ para cada $i \in [n]$.

Na *sequência de descidas* $Q_\sigma = q_1\,q_2\ldots q_n$ de uma permutação σ, q_i representa quantas unidades σ_i está abaixo do menor número entre σ_1, σ_2, $\ldots\sigma_{i-1}$. Se $q_i = 0$, não houve descida no movimento do ponto $(i-1,\sigma_{i-1})$ ao ponto (i,σ_i), portanto σ_i "subiu" para o próximo valor disponível. Dessa forma, dada uma sequência de descida, conseguimos estabelecer qual foi a permutação que gerou essa sequência.

Exemplo 67. Seja a permutação $\sigma = 634512$ que desconhece o padrão 132. Encontre a sequência de descidas Q_σ dessa permutação.

Resolução. Utilizando a definição 34, temos que $Q_\sigma = q_1\,q_2\,q_3\,q_4\,q_5\,q_6$ é dada por

$$\sigma_1 = 6 \qquad \Longrightarrow q_1 = n - \sigma_1 = 6 - 6 = 0$$

[15] Sequência elaborada e definida pelo autor deste trabalho para auxiliar a resolução do problema de contagem de permutações que desconhecem o padrão 132.

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= 3 < \sigma_1 && \implies q_2 = \min \sigma_1 - \sigma_2 = 6 - 3 = 3 \\
\sigma_3 &= 4 > \sigma_2 && \implies q_3 = 0 \\
\sigma_4 &= 5 > \sigma_3 && \implies q_4 = 0 \\
\sigma_5 &= 1 < \sigma_4 && \implies q_5 = \min \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 - \sigma_5 = 3 - 1 = 2 \\
\sigma_6 &= 2 > \sigma_1 && \implies q_6 = 0
\end{aligned}$$

Conclusão: a sequência de descidas da permutação $\sigma = 634512$ é $Q_\sigma = 030020$.

Exemplo 68. Seja a sequência $Q_\sigma = 30021010$ gerada por uma permutação σ que desconhece o padrão 132. Determine a permutação σ.

Resolução. Usando a definição 34 e o fato de que $\sigma \in S_8$, temos que:

$$\begin{aligned}
q_1 &= 3 && \implies q_1 = 8 - \sigma_1 && \implies \sigma_1 = 8 - 3 = 5 \\
q_1 &= 0 && \implies \sigma_2 > \sigma_1 && \implies \sigma_2 = 6 \\
q_3 &= 0 && \implies \sigma_3 > \sigma_2 && \implies \sigma_3 = 7 \\
q_4 &= 2 && \implies q_4 = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_3\} - \sigma_4 && \implies \sigma_4 = 5 - 2 = 3 \\
q_5 &= 1 && \implies q_5 = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_4\} - \sigma_5 && \implies \sigma_5 = 5 - 1 = 2 \\
q_6 &= 0 && \implies \sigma_6 > \sigma_5 && \implies \sigma_3 = 4\,(\text{pois } \sigma_4 = 3) \\
q_7 &= 1 && \implies q_7 = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_6\} - \sigma_7 && \implies \sigma_7 = 2 - 1 = 1 \\
q_8 &= 0 && \implies \sigma_8 > \sigma_7 && \implies \sigma_3 = 8
\end{aligned}$$

Conclusão: $\sigma = 56732418$.

Teorema 43. Sejam $\sigma \in S_n$ uma permutação que desconhece o padrão 132 e Q_σ a sequência de descida gerada por essa permutação. Temos que

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = n - \min_{0<j\leq r}\{\sigma_j\}, \quad \forall\, r \in [n]$$

Demonstração. Mostraremos, por indução finita, que $q_1 + q_2 + \dots q_r = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\forall\, r \in [n]$.

Como caso inicial, tomemos $r = 2$. Temos, por definição que $q_1 = n - \sigma_1$. Se $\sigma_2 > \sigma_1$, $q_2 = 0$, então $\min\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_1$ e $q_1 + q_2 = n - \sigma_1 + 0 = n - \sigma_1 = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Se $\sigma_2 < \sigma_1$, $q_2 = \sigma_1 - \sigma_2$, então $\min\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_2$ e $q_1 + q_2 = n - \sigma_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) = n - \sigma_2 = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Portanto $q_1 + q_2 = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Mostremos que

$$q_1 + q_2 + \dots + q_r = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \implies q_1 + q_2 + \dots + q_{r+1} = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}\}$$

Temos, por hipótese de indução, que $q_1 + q_2 + \ldots q_r = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$. Vamos dividir esta parte da demonstração em dois casos.

i. $\sigma_{r+1} > \sigma_r$.

Se $\sigma_{r+1} > \sigma_r$, então $q_{r+1} = 0$. Logo $q_1 + q_2 + \ldots q_r + q_{r+1} = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$.

ii. $\sigma_{r+1} < \sigma_r$

Se $\sigma_{r+1} < \sigma_r$, então $q_{r+1} = \sigma_{r+1} - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$. Logo $q_1 + q_2 + \ldots q_r + q_{r+1} = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\} - (\sigma_{r+1} - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}) = n - \sigma_{r+1}$.

Mostremos agora que $\sigma_{r+1} = \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}\}$. Suponha que exista $\sigma_i < \sigma_{r+1}$, com $i < r$. Dessa forma, $\sigma_i < \sigma_{r+1} < \sigma_r$ com $i < r < r+1$. Absurdo, pois σ, por hipótese inicial, desconhece o padrão 132. Logo, $q_1 + q_2 + \ldots q_r + q_{r+1} = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}\}$, quando $\sigma_{r+1} < \sigma_r$.

De **i** e **ii**, temos que $q_1 + q_2 + \ldots q_r + q_{r+1} = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}\}$.

Conclusão: como $q_1 + q_2 = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ e $q_1 + q_2 + \ldots q_r = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ implica que $q_1 + q_2 + \ldots q_{r+1} = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}\}$, temos, pelo princípio da indução finita que:

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = n - \min_{0<j\leq r}\{\sigma_j\}, \quad \forall r \in [n]$$

□

Corolário 3. Sejam $\sigma \in S_n$ uma permutação que desconhece o padrão 132 e Q_σ a sequência de descida gerada por essa permutação. Temos que

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = n - 1$$

Demonstração. Decorre direto do teorema 43 pois

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = n - \min_{0<j\leq n}\{\sigma_j\} \quad \text{e} \quad \min_{0<j\leq n}\{\sigma_j\} = 1$$

□

Teorema 44. Sejam $\sigma \in S_n$ uma permutação que desconhece o padrão 132 e Q_σ a sequência de descida gerada por essa permutação. Temos que

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k \geq k - 1, \quad \forall k \in [n]$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $q_1 + q_2 + \ldots + q_k < k - 1$. Do teorema 43, temos que $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$. Substituindo, temos

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k < k - 1$$
$$n - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\} < k - 1$$

$$\min\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\} > n-k+1$$
$$\min\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\} \geq n-k+2$$

Sejam σ_i e σ_j, respectivamente o maior e o menor elemento de $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\}$. Temos que $\sigma_i \leq n$ e $\sigma_j \geq n-k+2$. Entre n e $(n-k+2)$ há, no máximo, $k-1$ elementos; mas o conjunto $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\}$ possui k elementos distintos. Absurdo.

Conclusão: $q_1+q_2+\ldots+q_k \geq k-1, \quad \forall k \in [n]$. □

Teorema 45. Sejam $\sigma \in S_n$ uma permutação que desconhece o padrão 132 e Q_σ a sequência de descida gerada por essa permutação. Temos que

$$q_k < n-k+2, \qquad \forall k \in [n]$$

Demonstração. Temos, pelo teorema 44 que:

$$\begin{aligned} q_1+q_2+\ldots+q_{k-1} &\geq k-2, && \text{então} \\ q_1+q_2+\ldots+q_{k-1}+q_k &\geq k-2+q_k && \forall k \in [n] \end{aligned}$$

Temos do corolário 3 que:

$$q_1+q_2+\ldots+q_n = n-1 \implies q_1+q_2+\ldots+q_k \leq n-1, \quad \forall k \in [n]$$

Dessa forma:

$$n-1 \geq q_1+q_2+\ldots+q_{k-1}+q_k \geq k-2+q_k$$
$$n-1 \geq k-2+q_k$$
$$q_k \leq n-k+1$$

Conclusão: $q_k < n-k+2, \qquad \forall k \in [n]$ □

Com esses resultados podemos deduzir uma fórmula para calcular o número de permutações de S_n que desconhecem o padrão 132. Uma primeira abordagem poderia ser contar o número de soluções da equação $q_1+q_2+\ldots+q_n = n-1, q_1,q_2,\ldots q_n \in \mathbb{N}$ usando combinação completa. Porém calcular o número de soluções dessa equação com as restrições $q_i < n-i+2$, $\forall i \in [n]$ usando princípio da inclusão-exclusão seria inviável.

5.2.2 Caminhos sul-leste gerados pela sequência de descidas

Partiremos para uma outra abordagem: Sejam a permutação σ que desconhece o padrão 132 e $Q_\sigma = q_1 q_2 \ldots q_n$ a sequência de descidas gerada por essa permutação. Tome a malha quadriculada de $(0,0)$ à (n,n). Seja C_σ o *caminho sul-leste*[16]- isto é, caminhos onde a partícula pode deslocar-se apenas para baixo ou para direita - partindo do ponto $(0,n)$ com $2n$ passos definidos do seguinte modo:

Passo 1: a partícula parte do ponto $P_0 = (0,n)$ e desloca-se q_1 unidades para baixo, chegando ao ponto $P_1 = (0, n-q_1)$;

Passo 2: a partícula parte do ponto $P_1 = (0, n-q_1)$ e desloca-se 1 unidades para direita, chegando ao ponto $P_2 = (1, n-q_1)$;

Passo 3: a partícula parte do ponto $P_2 = (1, n-q_1)$ e desloca-se q_2 unidades para baixo, chegando ao ponto $P_3 = (1, n-(q_1+q_2))$;

Passo 4: a partícula parte do ponto $P_3 = (1, n-(q_1+q_2))$ e desloca-se 1 unidades para direita, chegando ao ponto $P_4 = (2, n-(q_1+q_2+q_3))$;

$\ldots$

Passo $2n-1$*:* a partícula parte do ponto $P_{2n-2} = (n-1, n-(q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}))$ e desloca-se q_n unidades para baixo, chegando ao ponto $P_{2n-1} = (n-1, n-(q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}+q_n))$;

Passo $2n$*:* a partícula parte do ponto $P_{2n-1} = (n-1, n-(q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}+q_n)))$ e desloca-se 1 unidades para direita, chegando ao ponto $P_{2n} = (n, n-(q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}+q_n))$.

A Figura 35 ilustra a permutação $\sigma = 5324617$ que desconhece o padrão 132 e o caminho C_σ formado a partir da sequência de descidas $Q_\sigma = 2210010$. Note que todos os pontos onde $\sigma_i < \sigma_{i-1}$ o grafo da permutação e o caminho C_σ coincidem.

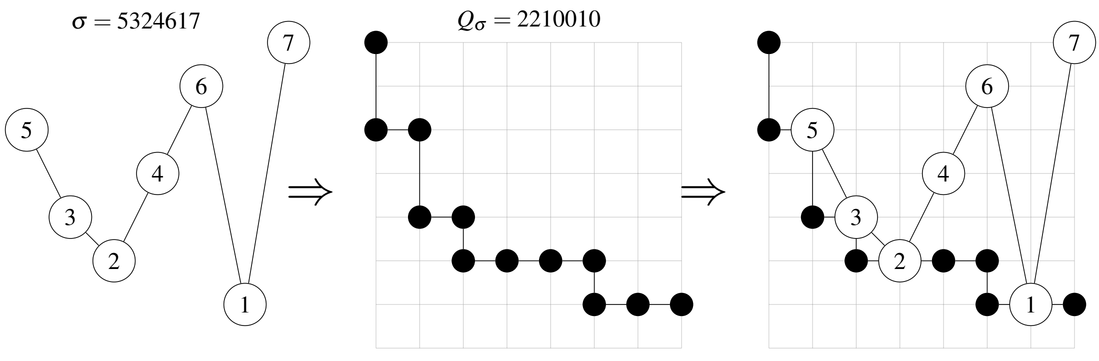


Figura 35 – Permutação $\sigma = 5324617$ e o caminho C_σ formado a partir de $Q_\sigma = 2210010$.

O caminho C_σ é definido de forma que cada passo de número ímpar $2k-1$ corresponde a um deslocamento de q_k unidades para baixo, enquanto os passos de número par correspondem a um deslocamento de 1 unidade para esquerda.

Todos os passos pares correspondem a um deslocamento de $n-1$ unidades para a direita. Todos os n passos ímpares correspondem a um deslocamento de $q_1+q_2+\ldots+q_n = n-1$ unidades para baixo. Portanto o caminho C_σ parte do ponto $(0,n)$ e chega no ponto final $(n,1)$.

[16] Em analogia ao conceito de caminho norte-leste, definido na página 93 deste trabalho.

As coordenadas do passos ímpares $2k-1$ são dadas por

$$(k-1,\, n-(q_1+q_2+\ldots+q_{k-1}+q_k))$$

As coordenadas dos passos pares $2k$ são dadas por

$$(k,\, n-(q_1+q_2+\ldots+q_{k-1}+q_k))$$

Seja $y_k = n-(q_1+q_2+\ldots q_{k-1}+q_k)$. Do teorema 44 temos que

$$\begin{aligned}
& q_1+q_2+\ldots+q_{k-1}+q_k \geq k-1 \\
& y_k = n-(q_1+q_2+\ldots q_{k-1}+q_k) \leq n-k+1 \\
& y_k \leq n-k+1 \\
\therefore\, & y_k < n+2-k
\end{aligned}$$

Portanto as coordenadas dos pontos dos passos ímpares são dadas por $(k-1, y_k)$ e dos passos pares (k, y_k), onde $y_k < n+2-k$. Note que nas coordenadas (x,y) tanto dos passos pares, quanto dos ímpares, $y < n+2-x$, portanto o caminho C_σ é um caminho sul-leste do ponto $(0,n)$ ao ponto $(n,1)$ que não encosta na reta $y = n+2-x$.

Para calcular o número de caminhos sul-leste do ponto $(0,n)$ ao ponto $(n,1)$ que não encosta na reta $y = n+2-x$, usaremos um raciocínio análogo ao usado para provar o teorema 41 da página 99.

Primeiramente, contamos o total de caminhos sul-leste do ponto $(0,n)$ ao ponto $(n,1)$. Denotando por B os deslocamentos para baixo e por D os deslocamentos para a direita, qualquer caminho do ponto $(0,n)$ ao ponto $(n,1)$ equivale a um anagrama formado por $n-1$ letras B e n letras D. Temos então $\binom{(n-1)+n}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ caminhos.

Descontamos agora os caminhos *sul-leste* que tocam a reta $y = n+2-x$. Para calcular o número de caminhos que tocam a reta $y = n+2-x$, usamos o princípio da reflexão.

$$\begin{aligned}
& \text{Reflexão do ponto } (x,y) = (0,n) \text{ em relação à reta } y = n+2-x \\
& x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = n+2-0 \quad \Longrightarrow y' = n+2 \\
& y = n \quad \Longrightarrow \quad n = n+2-x \quad \Longrightarrow x' = 2
\end{aligned}$$

Pelo princípio da reflexão, o número de caminhos do ponto $(0,n)$ ao ponto $(n,1)$ que tocam a reta $y = n+2-x$ é igual ao número de caminhos partindo do ponto $(2,n+2)$ ao ponto $(n,1)$. Temos então $\binom{(n-2)+(n+2-1)}{n-2} = \binom{2n-1}{n-2}$.

Logo, o número de caminhos que não tocam a reta $y = n+2-x$ é dado por

$$\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}$$

$$\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!(n+1)!}$$

$$\frac{(2n-1)! \cdot 2n}{(n-1)!n! \cdot 2n} - \frac{(2n-1)! \cdot 2n \cdot (n-1)}{(n-2)!(n+1)! \cdot 2n \cdot (n-1)}$$

$$\frac{(2n)!}{2(n!n!)} - \frac{(2n)! \cdot (n-1)}{2(n!(n+1)!)}$$

$$\frac{(2n)!}{2(n!n!)} - \frac{(2n)! \cdot (n-1)}{2(n!n!(n+1))}$$

$$\frac{(2n)!}{2(n!n!)} \left[\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2(n+1)}\right]$$

$$\binom{2n}{n} \left[\frac{(n+1)-(n-1)}{2(n+1)}\right]$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Conclusão: Como cada caminho C_σ está associado de forma biunívoca a uma permutação que desconhecem o padrão 132, o número de permutações desse tipo é dada por $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.

Como vimos na página 99, esse resultado é conhecido como número de Catalan.

Teorema 46. O número P_n de permutações de S_n que desconhece o padrão 132 é dada por

$$P_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

5.2.3 Desconhecimento de outros padrões de comprimento 3

O número de permutações de n elementos que desconhecem o padrão 132 é dado por $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Analisaremos agora qual é o número de permutações que desconhecem os outros padrões de comprimento 3. Há mais 5 padrões possíveis de comprimento 3: o padrão 123, o padrão 213, o padrão 231, o padrão 312 e o padrão 321.

Como os padrões 213, 231, 312 são simétricos ao padrão 132, é de se esperar que o número de permutações que possuem/desconhecem cada um desses padrões sejam iguais. Mostraremos que essa conjectura é verdadeira.

Padrões 132 e 231

Geometricamente, o padrão 231 pode ser obtido através de uma reflexão em relação a uma reta vertical do padrão 132, como pode ser visto na Figura 36. Para obter uma permutação que possui/desconhece o padrão 231, basta tomar uma permutação que possui/desconhece o padrão 132 e inverter a ordem de seus elementos.

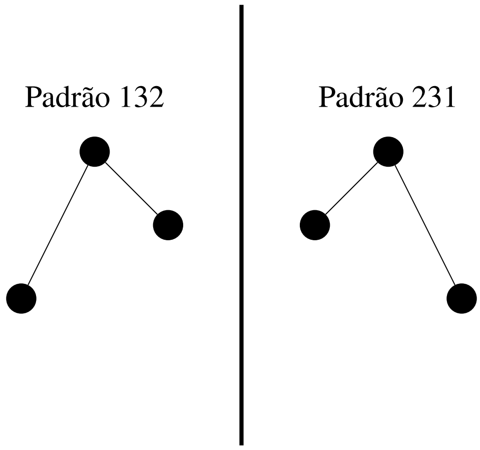


Figura 36 – Reflexão vertical do padrão 132.

Teorema 47. Seja uma permutação $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2\ldots\,\sigma_{n-1}\sigma_n$. Se σ possui o padrão 132, então a permutação $\sigma' = \sigma'_1\,\sigma'_2\ldots\,\sigma'_{n-1}\sigma'_n$, tal que $\sigma'_1 = \sigma_n,\ \sigma'_2 = \sigma_{n-1},\ \ldots,\ \sigma'_{n-1} = \sigma_2$ e $\sigma'_n = \sigma_1$, possui o padrão 231. Da mesma forma, se σ desconhece o padrão 132,então σ'_n desconhece o padrão 231.

Demonstração. Se $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2\ldots\,\sigma_{n-1}\sigma_n$ possui o padrão 132, então existem $i, j, k \in [n]$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$.

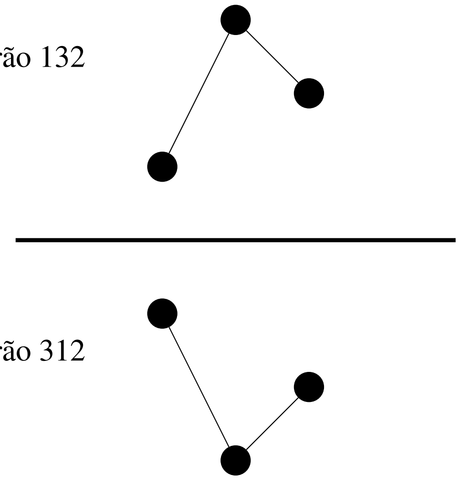
Como $\sigma_i = \sigma'_{n-i}$, $\sigma_k = \sigma'_{n-k}$, $\sigma_j = \sigma'_{n-j}$ e $n-k < n-j < n-i$, temos que $\sigma'_{n-i} < \sigma'_{n-k} < \sigma'_{n-j}$. Portanto σ' possui o padrão 231.

Analogamente, se não existem $i, j, k \in [n]$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$, então não existem $n-k < n-j < n-i$ tal que $\sigma'_{n-i} < \sigma'_{n-k} < \sigma'_{n-j}$. Portanto se σ desconhece o padrão 132, σ' desconhece o padrão 231. □

Padrões 132 e 312

Geometricamente, o padrão 312 pode ser obtido através de uma reflexão em relação a uma reta horizontal do padrão 132, como visto na Figura 37. Para obter uma permutação que possui / desconhece o padrão 312, basta tomar uma permutação que possui / desconhece o padrão 132 e substituir elemento 1 pelo elemento n, o elemento 2 pelo elemento $n-1$ e assim por diante.

Teorema 48. Seja uma permutação $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2\ldots\,\sigma_{n-1}\sigma_n$. Se σ possui o padrão 132, então a permutação $\sigma' = \sigma'_1\,\sigma'_2\ldots\,\sigma'_{n-1}\sigma'_n$, tal que $\sigma'_i = n - \sigma_i + 1$, $\forall i \in [n]$, possui o padrão 312. Da mesma forma, se σ desconhece o padrão 132, σ'_n desconhece o padrão 312.



Padrão 132

Padrão 312

Figura 37 – Reflexão horizontal do padrão 132.

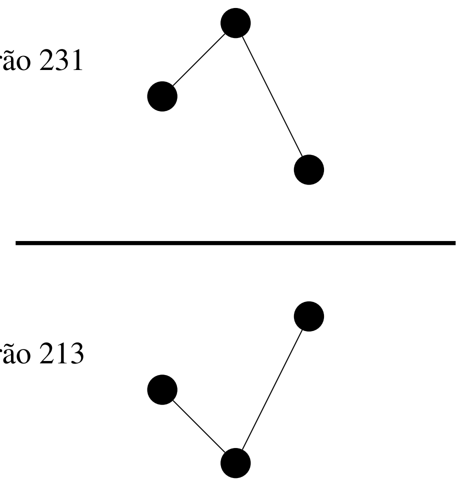
Demonstração. Se $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}\sigma_n$ possui o padrão 132, então existem $i, j, k \in [n]$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$.

Como $\sigma'_i = n - \sigma_i + 1$, $\sigma'_j = n - \sigma_j + 1$, $\sigma'_k = n - \sigma_k + 1$, então $\sigma'_j < \sigma'_k < \sigma'_i$, com $i < j < k$. Portanto σ' possui o padrão 312.

Analogamente, se não existem $i, j, k \in [n]$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$, então não existem i, j, k, com $i < j < k$, tal que $\sigma'_j < \sigma'_k < \sigma'_i$. Portanto se σ desconhece o padrão 132, então σ' desconhece o padrão 312. □

Padrões 231 e 213

O padrão 213 pode ser pode ser obtido através de uma reflexão horizontal do padrão 231, como pode ser visto na Figura 38. Para obter uma permutação que possui/ desconhece o padrão 213, basta tomar uma permutação que possui/desconhece o padrão 231 e substituir o número k por $n - k + 1$ para todo $k \in [n]$. A demonstração é análoga à teorema 48.



Padrão 231

Padrão 213

Figura 38 – Reflexão horizontal do padrão 231.

Conclusão: o número de permutações de S_n que desconhecem os padrões 132, 312, 231 e 213 são iguais e dado por

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

.

Padrões 123 e 321

O padrão 321 pode ser obtido a partir de uma reflexão vertical do padrão 123, como visto na Figura 39. Há portanto uma bijeção entre as permutações que possuem / desconhecem o padrão 123 e as que possuem / desconhecem o padrão 321.

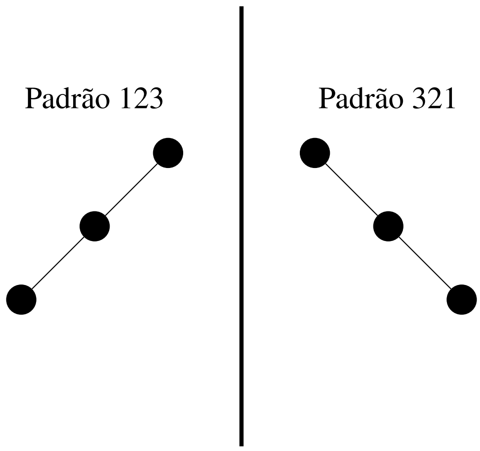


Figura 39 – Reflexão vertical do padrão 123.

Mostraremos agora que existe uma bijeção entre o número de permutações que desconhecem o padrão 132 e as permutações que desconhecem o padrão 123.

Uma permutação $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,\sigma_n$ desconhece o padrão 123 se não existem $i, j, k \in [n]$, com $i < j < k$, tal que $\sigma_i < \sigma_j < \sigma_k$.

Para formar uma sequência que desconhece o padrão 123, ao tomarmos um elemento $\sigma_i > \sigma_{i-1}$, qualquer número maior que σ_i deve precedê-lo na sequência. Não há restrição em tomar $\sigma_i < \sigma_{i-1}$. Dessa forma, podemos escolher livremente $\sigma_i < \sigma_{i-1}$ dentre os elementos restantes; para tomar $\sigma_i > \sigma_{i-1}$, devemos tomar o maior número disponível.

Definindo os conjuntos

$$\begin{aligned}
A_i &= \bigcup_{k=1}^{i} \sigma_k && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
R_i &= [n]/A_i && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
B_i &= \{x \in R_i \colon x < \sigma_i\} && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
C_i &= \{x \in R_i \colon x > \sigma_i\} && \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}$$

Para formar uma sequência que desconhece o padrão 123, escolhemos sucessivamente $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ tal que:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 \in [n] \\
&\sigma_2 \in B_1 \quad \text{ou} \quad \sigma_2 = max\{C_1\} \\
&\sigma_3 \in B_2 \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = max\{C_2\} \\
&\quad \vdots \\
&\sigma_{n-1} \in B_{n-2} \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = max\{C_{n-2}\} \\
&\sigma_n \in R_{i-1}
\end{aligned}$$

Dada uma $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ que desconhece o padrão 123, podemos tomar uma sequência de descidas Q_σ segundo a definição 34. A única diferença entre a formação de uma permutação que desconhece o padrão 132 e uma permutação que desconhece o padrão 123, é que na primeira, toda vez que $\sigma_i > \sigma_{i-1}$, tomamos σ_i o *menor* elemento do subconjunto dos números maiores que σ_i; enquanto nas permutações que desconhecem o padrão 123, tomamos o *maior* elemento desse subconjunto.

Dessa forma, cada permutação σ que desconhece o padrão 123 está associada a uma única sequência Q_σ, que por sua vez está associada a uma única permutação σ' que desconhece o padrão 132. Portanto, o número de permutações que desconhecem o padrão 132 é igual o número de permutações que desconhecem o padrão 123; que, por sua vez, é igual ao número de permutações que desconhecem o padrão 321.

Conclusão: o número de permutações de n elementos que desconhece os padrões 123, 132, 213, 231, 312 e 321 são iguais e calculados através do n-ésimo número de Catalan

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Combinatória é um ramo da matemática de grande importância, mas que nem sempre é bem compreendido pelos estudantes. É comum a análise combinatória no Ensino Básico limitar-se ao estudo de permutações, arranjos e combinações, mas como Morgado *et al.* (1991) destacam, o campo da "análise combinatória" é muito mais amplo, com aplicação na estatística, na biologia, na química, entre outros. Dessa forma, neste trabalho buscou-se realizar um extenso estudo sobre análise combinatória, abordando conceitos e temas que são pouco explorados na Educação Básica, como o conceito de combinação completa, os lemas de Kaplanski, o princípio da inclusão-exclusão, entre outros; bem como adentrar em tópicos mais abstratos da análise combinatória, como o grupo de permutações e os ciclos de permutações, normalmente abordados somente no Ensino Superior.

Lima *et al.* (2006a, p. 111) destacam a importância de se priorizar o desenvolvimento do raciocínio lógico em detrimento da memorização e aplicação de fórmulas muito específicas. Este trabalho foi construído com base nessa premissa. Partindo-se do pilar básico da combinatória, o princípio fundamental da contagem, foi-se construindo conceitos cada vez mais abstratos e complexos da análise combinatória, pautados no raciocínio lógico, no uso de analogias e reaplicação/adaptação de técnicas e raciocínios desenvolvidos em situações anteriores na resolução de novos problemas.

Nessa busca da construção gradual dos conceitos de combinatória, optou-se por uma escrita direcionada ao leitor, repleta de indagações, reflexões e descrições detalhadas das resoluções, no lugar de respostas rápidas aos exemplos e problemas. O objetivo dessa escolha é tornar mais fácil e didática a compreensão dos métodos de resolução utilizados. Essa compreensão permite ao leitor a reaplicação dos métodos em problemas similares e abre espaço para adaptação desses métodos ou desenvolvimento de novas metodologias na resolução de problemas diferentes.

Uma da pretensões deste trabalho é tornar mais acessível os temas de combinatória abordados. Almeja-se, dessa forma, que este sirva como um instrumento de estudo, pesquisa e reflexão para professores da Educação Básica. Espera-se que o professor da Educação Básica possa utilizá-lo como fonte de consulta na elaboração de sequência didática sobre análise combinatória.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, A. d.; PICCININI, R. **Introdução à teoria dos grupos.** [S.l.: s.n.], 1969. 114 p. Nenhuma citação no texto.

BHATTACHARYA, P. B.; JAIN, S. K.; NAGPAUL, S. **Basic abstract algebra**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1986. 454 p. Citado na página 65.

BÓNA, M. **A walk through combinatorics**: An introduction to combinatorics and graph theory. 2. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing, 2006. 469 p. Citado nas páginas 73, 93, 99 e 121.

CARNEIRO, J. P. C. O problema do amigo oculto. **Revista do professor de matemática**, n. 28, 1995. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/28/4.htm>. Citado na página 49.

DAVIS, T. **Catalan numbers**. [S.l.]: Berkeley Math Circle Handouts, http://mathcircle. berkeley. edu/BMC6/pdf0607/catalan. pdf, 2006. Nenhuma citação no texto.

DIAS, I.; GODOY, S. M. S. de. **Elementos de Matemática - Notas de Aulas**. São Carlos: Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2009. Nenhuma citação no texto.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. reformulada. ed. São Paulo: Atual, 2003. 368 p. Citado nas páginas 63 e 77.

ELIZALDE, S.; DEUTSCH, E. A simple and unusual bijection for dyck paths and its consequences. **Annals of Combinatorics**, Springer, v. 7, n. 3, p. 281–297, 2003. Nenhuma citação no texto.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. **Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science**. 2nd. ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1994. ISBN 0201558025. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 308 p. (Coleção do Professor de Matemática). Citado nas páginas 19, 21, 26 e 117.

____. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 237 p. (Coleção do Professor de Matemática). Nenhuma citação no texto.

MANTACI, F. R. R. A permutations representation that knows what ”eulerian” means. **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science,DMTCS**, v. 4, n. 2, p. 101–108, 05 2001. Disponível em: <https://hal.inria.fr/hal-00958950/document>. Citado na página 84.

MORAES, J. L. C. d. **Ordenação de Sequências Finitas por Reversões Usando Conjugações em Grupos de Permutações**. 70 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, Junho 2012. Citado na página 99.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Ánalise Combinatória e Probabilidade**: com as soluções de exercícios. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 343 p. (Coleção do Professor de Matemática). Citado nas páginas 23, 26, 35, 38, 42, 49, 51 e 117.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de matemática elementar**: Combinatória. 1. ed.. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 237 p. (Coleção Professor de Matemática). Citado nas páginas 36 e 46.

PROVAS E GABARITOS DO ENEM. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Accesso em: 11/08/2017. Nenhuma citação no texto.

VAJNOVSZKI, V. Lehmer code transforms and mahonian statistics on permutations. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 313, n. 5, p. 581–589, 2013. Nenhuma citação no texto.

VESTIBULARES ANTERIORES DA FUVEST. Disponível em: <http://acervo.fuvest.br/fuvest/>. Accesso em: 11/08/2017. Nenhuma citação no texto.

VESTIBULARES ANTERIORES DA UNICAMP. Disponível em: <https://www.comvest.unicamp.br/vestibulares-anteriores/>. Accesso em: 10/08/2017. Nenhuma citação no texto.

VESTIBULARES ANTERIORES DO IME. Disponível em: <http://ime.eb.br/provas-anteriores-cfg.html>. Accesso em: 11/08/2017. Nenhuma citação no texto.

VESTIBULARES ANTERIORES DO ITA. Disponível em: <http://www.vestibular.ita.br/provas.htm>. Accesso em: 11/08/2017. Nenhuma citação no texto.

APÊNDICE

A

COMENTÁRIOS DO AUTOR

Comentário sobre as permutações que desconhecem o padrão 132

Os problemas de combinatória sempre me despertaram grande interesse por serem desafiantes e possibilitarem, quase sempre, mais de uma abordagem. A busca por soluções simples e elegantes é um desafio estimulante.

Gostaria de tecer aqui um comentário sobre a solução apresentada para o problema das permutações que desconhecem o padrão 132.

A demonstração apresentada em BÓNA (2006) difere da apresentada neste trabalho. BÓNA (2006) primeiro mostra que o número $f(n)$ de permutações de S_n que desconhecem o padrão 132 satisfaz a recorrência

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i-1)f(n-i), \quad \text{onde } \; f(0) = 1,\; f(1) = 1$$

Depois mostra que o número de caminhos norte-leste $c(n)$ do ponto $(0,0)$ ao ponto (n,n) que não ultrapassam a reta $y = x$ satisfazem uma relação equivalente

$$c(n) = \sum_{i=1}^{n} c(i-1)c(n-i), \quad \text{onde } \; c(0) = 1,\; c(1) = 1$$

Como essas recorrências são idênticas, ele conclui que há uma bijeção entre o número de permutações que desconhecem o padrão 132 e o número de caminhos norte-leste que não ultrapassa a reta $y = x$.

Feito isso, ele demonstra que o número $c(n)$ é dado por $c(n) = \dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

Após conhecer essa relação entre as permutações que desconhecem o padrão 132 e o número de caminhos norte-leste, iniciei uma busca para estabelecer uma relação explícita de bijeção entre esses dois conjuntos. O resultado dessa busca foi a criação da sequência descidas Q_σ, definida na página 105 e o caminho sul-leste C_σ definido na página 109. A partir dessa construção, consegui estabelecer uma relação explícita entre as permutações que desconhecem o padrão 132 e um caminho na malha quadriculada (não exatamente o mesmo de Bona, mas um equivalente). Em minha pesquisa por artigos relacionados, não encontrei nenhuma solução semelhante a que desenvolvi neste trabalho.

ICMC USP
SÃO CARLOS