UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

MÁRCIO ALISSON LEANDRO COSTA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

JUAZEIRO DO NORTE
2017

MÁRCIO ALISSON LEANDRO COSTA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva.

JUAZEIRO DO NORTE
2017

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Semelhança de Triângulos: uma Abordagem Para o Ensino Básico

Marcio Alisson Leandro Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 26 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva - UFCA

Orientador

Maria Silvana Alcantara Cost

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Flávio França Cruz

Prof. Dr. Flávio França Cruz – URCA

A minha família, aos amigos, aos discentes e em geral, a todos que trabalham por uma Educação de qualidade para o nosso país.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pai Todo poderoso, aos professores, colegas e amigos que contribuíram direta e indiretamente sobre este trabalho e pelas amizades construídas durante esse percurso.

À banca examinadora, pela disponibilidade; meus pais. Agradeço ainda aos professores em especial do PROFMAT, pelos ensinamentos. A todos o meu mais sincero e feliz, muito obrigado.

*"A Matemática é o alfabeto com o qual
Deus escreveu o Universo."
(Galilei Galileu)*

RESUMO

Neste trabalho abordamos tópicos de Geometria Euclidiana ministrados no Ensino Básico: Semelhança de Triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo. Para isto, inicialmente fizemos um breve histórico da Geometria Euclidiana, em sequencia apresentamos alguns resultados sobre Congruência e o Teorema de Tales. Tal resultado é de fundamental importância para dar continuidade ao trabalho, pois a partir dele obtemos os critérios de semelhanças e consequentemente as relações métricas no triângulo retângulo. Finalizamos o trabalho com algumas aplicações e breves comentários sobre textos da literatura matemática do Ensino Médio que abordam o assunto estudado..

Palavras-chave: Semelhança de Triângulos. Teorema de Tales. Relações Métricas. Ensino Básico.

ABSTRACT

In this work we cover topics of Euclidean Geometry taught in Basic Education: Similarity of Triangles and the metric relations in the triangle rectangle. For this, we initially made a brief history of Euclidean geometry, in sequence we present some results on Congruence and the Thales Theorem. This result is of fundamental importance to continue the work, since from it we obtain the criteria of similarities and consequently the metric relations in the triangle rectangle. We conclude the work with some applications and brief comments on texts of the mathematics literature of High School that approach the studied subject.

Key-words: Similarity of Triangles. Tales Theorem. Metric Relations. Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho, consiste em uma abordagem de alguns tópicos da Geometria Euclidiana Plana apresentados no Ensino básico: Semelhança de triângulos e relações métricos no triângulo.

Durante o processo de investigação bibliográfica sobre o tema usamos elementos de natureza qualitativa de pesquisa que consistiu de um estudo sobre quais bibliografias apresentam uma abordagem histórica da geometria de modo a motivar alunos e professores a estudar verdadeiramente essa disciplina. Além disso, foram selecionados conceitos geométricos básicos, determinantes para todo o desenvolvimento da geometria.

Apresentamos resultados sobre congruência de triângulos, em sequência destacamos o Teorema de Tales e os casos de semelhança de triângulos de onde obtemos as relações métricas no triângulo retângulo. Vale salientar que os tópicos estudados são necessários à formação dos alunos do Ensino Básico, o que justifica a atenção dada.

Dessa forma, este trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro apresenta o objetivo central da temática; o segundo apresenta uma abordagem histórica da geometria; o terceiro é apresentado as noções básicas da geometria euclidiana plana; o quarto apresenta alguns livros didáticos no ensino médio que versam sobre o assunto de geometria e por fim, faz-se as considerações finais relevantes para o Ensino de Matemática sobre o tema.

2 ABORDAGEM HISTÓRICA DA GEOMETRIA

Neste capítulo, apresentaremos alguns aspectos históricos da Geometria Euclidiana Plana através da sua formalização, criação e desenvolvimento enquanto ramo da Matemá tica. Mostraremos também a criação de questões que foram fundamentais para atender a necessidade de cada geração, resultados estes atribuídos aos gregos e, por fim, exibiremos alguns fatores relevantes para a criação e desenvolvimento da Geometria Analítica.

2.1 A matemática e a formalização da geometria

Quando se trata de Geometria é bastante comum tratá-la como sendo um ramo da Matemática, a qual é responsável pelas inúmeras aplicações relevantes oferecida por essa ciência e além disso, ressalta-se que seus fundamentos nos faz entender sobre sua extensão e interpretação de tudo a cerca do mundo.

Sabe-se da existência de algumas histórias envolvendo a noção espacial geográfica acerca do Rio Nilo e um de seus principais personagens a destacar-se como Heródoto. Narra-se histórias antigas sobre a criação da Matemática e a formalização da Geometria, destacando-se a presença de sábios que participaram de grandes feitos matemáticos tais como: os cálculos sobre a superfície terrestre e a invenção de espelhos em formatos de paraboloides. Contudo, essas ideias não são suficientes para explicar a origem e formalização da geometria, porém esses fatos e momentos são importantes porque remetem a origem da disciplina.

Os egípcios foram importantes para o desenvolvimento da geometria, exemplo disso tem-se nos papiro Moscou (ou Golenischev) com 25 problemas e Rhind (ou Ahmes) com 85 problemas em escrita hierática, que são dois textos matemáticos de aproximadamente 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente, os quais foram encontrados no Egito e que juntos possuem 26 problemas geométricos, sendo a maioria sobre o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos, porém sem provar (neles ou em qualquer outro documento egípcio já encontrado) os egípcios tinham conhecimentos de algum caso particular, do teorema de Pitágoras e um exemplo correto que trata-se sobre o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas no papiro de Moscou onde podem ser encontrados em [8].

A geometria originou-se no Egito, sendo totalmente relacionada a atividades práticas do povo de acordo com a necessidade apresentada em cada geração. A medição de terras, principalmente após as cheias do Rio Nilo, via-se o quanto era necessária a reconstrução dos limites de terrenos.

Essas afirmações são questionáveis, uma vez que há certa concordância com o fato pelo qual o interesse pelas formas e suas propriedades, isto é, a própria geometria. Percebe-se ainda que esta disciplina oferece ferramentas que vão além da necessidade de medir terras. Indiscutivelmente, os interesses econômicos e sociais egípcios impulsionaram o desenvolvimento da Geometria, porém, pode-se encontrar instrumentos como: papiros; vasos e outros, mais antigos do que a própria civilização egípcia, e ainda de civilizações contemporâneas aos egípcios; esses instrumentos estão inteiramente relacionadas ao uso dos principais fundamentas da geometria.

Infere-se ainda que os babilônios 2000 a.C. a 1600 a.C. estavam acostumados com o uso das regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal.

Constata-se que a mensuração prática também está fortemente relacionada com geometria babilônica, onde se tem a possibilidade de uma introdução ao estudo da geometria, por meio dos babilônios. Além dos exemplos já citados, os babilônios se detiveram a muitos outros estudos sobre temas geométricos, alguns se mostraram errôneos quanto ao cálculo o volume de um tronco de cone e de uma pirâmide quadrangular regular como o produto da altura pela semi-soma das bases, enquanto outros com uma boa aproximação ou totalmente corretos, como tomar o comprimento de uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área de um círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva, veja [10].

Vários estudos demonstram como encontrar o volume de um cilindro circular reto através do produto da área da base pela altura ou tomando o estudo de triângulos, tema central desse trabalho, para isso basta usar a noção que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, bem como verificar que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide a base ao meio, além de conhecerem o Teorema de Pitágoras, este último comprovado através de vários ternos pitagóricos encontrados na mais notável das tábulas matemáticas babilônicas já estudadas, conhecida como Plimpton 322.

O senso algébrico é uma característica marcante da geometria babilônica, sendo notórios diversos problemas envolvendo uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo e que resultam em equações quadráticas. Assim, sem precisar se deter ao fato de que também se deve aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, temos diversos exemplos que comprovam a influência deste povo no estudo da geometria, e em particular no estudo dos triângulos.

Figura 1: Tabua Babilônica.

Fonte: http://www.nytimes.com/2010/11/27/arts/design/27tablets.html.

Ressalta-se ainda que os resultados adquiridos da placa deve-se aos estudos de Neugebauer (1969), a princípio os notáveis números registrados sobre a placa não apresentavam uma conexão de informações que pudessem obter naturalmente tais resultados. Sabe- se ainda que existiram várias interpretações a cerca do seu conteúdo visível por alguns historiadores, pois algumas das entradas da tabela apresentam-se danificadas. Porém, tais interpretações permitiram vários questionamentos por muitos matemáticos da época, onde os quais obtiveram êxito ao final do processo investigativo. Contudo, julga-se ainda que os erros obtidos durante o desenvolvimento das descobertas deve-se a falta de ferramentas matemáticas na época.

2.2 A geometria grega

Com o declínio dos povos egípcio e babilônico e o surgir da Idade de Ferro, o mundo passou por grandes mudanças econômicas e políticas, o que influenciou diretamente a Matemática. Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como: Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais? e Por que o diâmetro de um círculo o divide ao meio? [9]. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões da forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de porquê.

Com esse aspecto estabelecido acima apresentou-se a Geometria Demonstrativa, que embora alguns historiadores da matemática discordem, tem seu início dedicado, tradicionalmente, a Tales de Mileto, o qual ganhou destaque por sua inteligência ao se dedicar em diferentes áreas, desde os negócios e estadismo a filosofia e astronomia.

A ele são atribuídos alguns resultados elementares:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.

2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.

4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.

5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Resultado já conhecido pelos babilônios com aproximadamente 1400 anos de antecedência).

Tais resultados mostram que dois entre eles se referem à triângulos. Há inúmeras narrações medindo o conhecimento desse matemático, algumas fantasiosas ou sem comprovação, como o caso dele ter previsto um eclipse solar ocorrido em 585 a.C. que até hoje não foi comprovada, bem como diversas outras que sustentam a importância dele para o desenvolvimento não só da Matemática, mas o desenvolvimento da humanidade.

Ainda sobre os primórdios da matemática grega, diferentemente da matemática babilônica e egípcia, quase não existem documentos que a fundamentam, por isso, quando se fala em antiguidade, os babilônios e os egípcios superaram os gregos, os quais até buscavam uma troca de conhecimentos.

Além dos feitos de Tales, narrados nesse material, temos a presença de outro importante matemático grego, Pitágoras, o qual sempre está envolto de mistérios e misticismos, o que dificulta precisão ao narrarmos suas conquistas e de seus aliados e seguidores. Para exemplificar isso temos o fato dos feitos descobertos dentro da escola pitagórica sempre serem atribuídos ao seu líder, fazendo com que não possamos identificar quais estudos são obra única de Pitágoras e quais são um trabalho coletivo ou de outro pitagórico.

É extremamente notável a influência dos pitagóricos no desenvolvimento da Teoria dos Números, quer quantitativa ou qualitativamente, contudo vamos nos ater à importância da escola para com a geometria, tendo como principal ponto o teorema que até já era conhecido pelos babilônios cerca de um milênio antes, mas que se atribui a Pitágoras a primeira demonstração geral dele e que assim atualmente recebe o nome de Teorema de Pitágoras: O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Os pitagóricos e outros matemáticos gregos da época trouxeram um grande avanço para a matemática, em especial para a geometria, visto que em sua maioria tratavam um número através de um comprimento sem ter uma notação algébrica completa para adequar-se aos problemas. Como são muito fartos os exemplos ao longo dos três séculos de matemática grega, aqui vemos necessário fazer um salto histórico, para tratar como a geometria demonstrativa culminou com os Elementos de Euclides, por volta de 300 a.C., veja [7].

É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que ele foi professor da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Muitos anos mais tarde, ao comparar Euclides com Apolônio, de maneira desfavorável a este último, Papus elogiou Euclides por sua modéstia e consideração para com os outros [7].

O fato é que devemos a Euclides a formalização de boa parte da Matemática Grega, pois seus estudos não se limitaram à sua obra mais famosa, Elementos, tendo sobrevivido ao longo dos tempos o texto completo de cinco dos dez principais trabalhos dele. A importância dos Elementos deve ser defendida por todo estudante da matemática, pois para se ter ideia, a exceção da Bíblia, é a obra mais estudada no mundo e pode-se dizer que é a que mais influenciou o pensamento científico.

É errado pensar que os Elementos se dedicam unicamente ao estudo da geometria, pois nele encontramos rico material de álgebra elementar geométrica e da teoria dos números, mas se deve principalmente à organização das ideias geométricas que a obra se difundiu.

Ao longo dos livros I, III, IV, VI, XI e XII, temos o estudo da Geometria Plana e Espacial estudada atualmente em nossas escolas, tomando por exemplo o livro I que inicia com definições, postulados e axiomas preliminares necessários para uma introdução ao estudo da geometria, seguidos de 48 proposições, divididas em três partes: as vinte e seis primeiras sobre as propriedades dos triângulos, o principal tema do nosso trabalho, seis proposições sobre a teoria das paralelas, quando prova que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos e dezesseis sobre paralelogramos, triângulos e quadrados, em especial a relação entre as áreas.

Ainda que não contivesse toda a geometria da época em que foi escrito, pois sequer toda a matemática que Euclides sabia estava contida na obra, podemos tomar os Elementos como um texto introdutório de matemática geral, que se transformou no maior referencial de formalização de uma ciência.

2.3 A geometria analítica

Em meados 1660 os franceses Gérard Desargues e Blaise Pascal criaram um novo ramo da geometria, a Geometria Projetiva, a qual estuda as propriedades descritivas das figuras geométricas. Desse modo, construiu-se um debate para formulação dos novos métodos da geometria, criados por René Descartes e Pierre de Fermat, a Geometria Analítica Moderna.

Para finalizar a abordagem histórica analisaremos o início da geometria projetiva, o qual se deve a genialidade de Desargues e Pascal, além de sofrer influência de Gaspar Monge (1746 - 1818) e Lazare Carnot (1753 - 1823), ela se desenvolveu apenas no século

XIX com Jean Victor Poncelet (1788 - 1867).

Apesar da Geometria Analítica, com sua correspondência entre os pontos do plano com um par ordenado de números reais, ter revolucionado a matemática do século XVII, pois Apolônio (262 a.C. - 190 a.V.) já tinha feito uma modesta contribuição com a ligação entre a álgebra e a geometria através de seus estudo de cônicas e Nicole Oresme, no século XIV, já tinha representado graficamente certas leis, foi preciso o desenvolvimento de processos algébricos, para que uma investigação geométrica passasse para uma investigação algébrica, e com a contribuição de Descartes e Fermat para se ter os primórdios da geometria analítica como é estudada hoje.

It is considered that sciences, as well as technologies, are historically situated human constructions and that the objects of study they construct and the discourses they elaborate are not confused with the physical and natural world, although this is referred to in these discourses. It is also important to understand that, although the world is the same, the objects of study are different as constructors of the knowledge generated by the sciences through their own laws, which must be appropriated and placed in a grammar internal to each science, conforme [8]. O leitor poderá facilmente traduzir o texto acima para português, sugiro que assim seja caso julgue necessário.

Portanto, se apropriar do conhecimento sobre a criação da Matemática poderá motivar os estudantes a acompanhar todo o processo evolutivo dessa ciência e, sobretudo, despertar seu interesse do quanto a Matemática se faz importante para o seu dia-a-dia e ainda, sobre em quais ramos a mesma é aplicável.

3 NOÇÕES DE GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo abordaremos algumas noções elementares de Geometria Plana tais como: conceitos básicos, congruência de triângulos, Teorema de Tales e semelhança de triângulos. Estes assuntos são de suma importância para o desenvolvimento dos principais resultados apresentados pela disciplina de Geometria Euclidiana Plana.

3.1 Conceitos elementares

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos e resultados elementares de Geometria Plana para garantir o bom andamento do texto e sobretudo, formar um conjunto de ferramentas essenciais para o desenvolvimento dessa disciplina.

Nesse texto, admitiremos que o leitor tenha certo conhecimento dos conceitos de ponto, reta e plano. Desse modo, iremos considerar tais conceitos como primitivos.

Definição 3.1.1 *Dados dois pontos distintos A e B em um plano qualquer. Chama-se segmento de reta AB a união do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles.*

Figura 2: Segmento de reta AB.

Fonte: Elaborada pelo autor

Usaremos AB para expressar o segmento da reta determinado pelos pontos A e B e $\overline{AB}$ para indicar a medida do comprimento (ou distância) entre A e B.

Exemplo 3.1.1 *Três pontos X, Y e Z pertencem a uma mesma reta r tal que $Z \in XY$. Se $\overline{XY} = 20$ cm e $\overline{XZ} = 4 \cdot \overline{YZ}$, determine $\overline{XZ}$.*

Solução. Pela hipótese tem-se que

$$\overline{XZ} = 4 \cdot \overline{YZ} \Leftrightarrow \overline{YZ} = 4 \cdot \overline{XZ}.$$

Portanto,

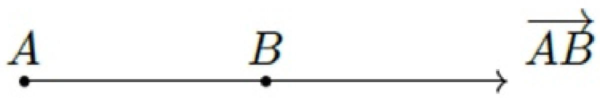
$$\begin{aligned}
\overline{XY} = \overline{XZ} + \overline{ZY} \quad &\Leftrightarrow \quad 20 = \overline{XZ} + \frac{1}{4} \cdot \overline{XZ} \\
&\Leftrightarrow \quad 80 = 4\overline{XZ} + \overline{XZ} \\
&\Leftrightarrow \quad 80 = 5\overline{XZ} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{XZ} = 16\ cm.
\end{aligned}$$

■

Percebe-se que quando se trata das aplicações referentes a pontos de um segmento de reta AB aquele se destaca é o ponto médio M , o qual é definido como o ponto que divide AB em dois segmentos de mesmo comprimento $\left(\overline{AM} = \overline{BM}\right)$.

Definição 3.1.2 *Dados dois pontos distintos A e B em um plano qualquer. Chama-se semirreta AB (indicada por $\overrightarrow{AB}$) a união do segmento da reta AB ao conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X.*

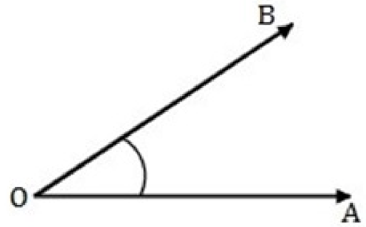
Figura 3: Semirreta AB.



Fonte: Elaborada pelo autor

Definição 3.1.3 *Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ duas semirretas de um plano qualquer. Diz-se que um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e o indicamos por $A\hat{O}B$.*

Figura 4: Ângulo $A\hat{O}B$.



Fonte: Elaborada pelo autor

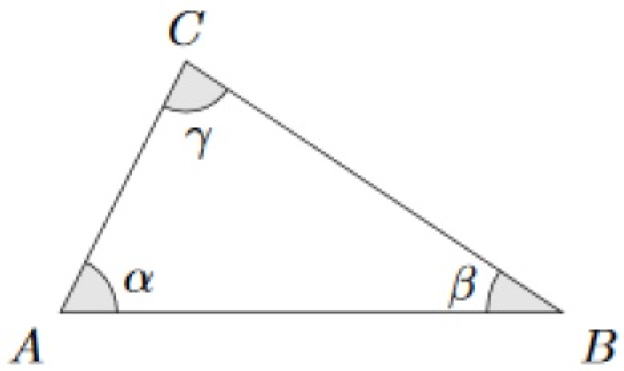
Denotaremos por α a medida do ângulo $A\hat{O}B$. Além disso, pode-se classificar α conforme seu valor em graus ou radianos, veja:

1. $A\hat{O}B$ é um ângulo agudo se $0° < \alpha < 90°$.
2. $A\hat{O}B$ é um ângulo reto se $\alpha = 90°$.
3. $A\hat{O}B$ é um ângulo obtuso se $90° < \alpha < 180°$..
4. $A\hat{O}B$ é um ângulo raso se $\alpha = 180°$.

Definição 3.1.4 *Dadas as medidas de dois ângulos α e β quaisquer. Diz-se que α e β são complementares (respectivamente, suplementares e replementares) quando a soma das suas medidas é igual a $\alpha = 90°$ (respectivamente, $180°$ e $360°$).*

Definição 3.1.5 *(Triângulo). Dados três pontos não colineares A, B e C em um plano qualquer. Diz-se que a união dos segmentos de reta que unem tais pontos formam um triângulo ABC.*

Figura 5: Triângulo ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor

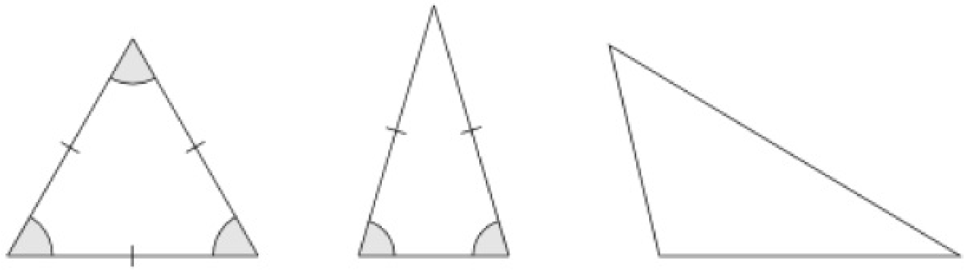
Os pontos A, B e C são os vértices, os segmentos AB, BC e AC são os lados do triângulo ABC, α, β e γ, são respectivamente, as medidas dos ângulos $B\hat{A}C, A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, os quais representam os ângulos internos do triângulo.

Considerando o triângulo ABC podemos classificá-lo conforme o comprimento dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Isto é,

1. Diz-se que o triângulo ABC é equilátero quando $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$;
2. Diz-se que o triângulo ABC é isósceles quando $\overline{AB} = \overline{BC}$ ou $\overline{AB} = \overline{AC}$ ou $\overline{BC} = \overline{AC}$;
3. Diz-se que o triângulo ABC é escaleno quando $\overline{AB} \neq \overline{BC}, \overline{AB} \neq \overline{AC}$ e $\overline{BC} \neq \overline{AC}$.

A Figura 6 a seguir, apresenta ordenadamente um triângulo equilátero, isósceles e escaleno. Além disso, tem-se que em todo triângulo equilátero seus ângulos internos têm a mesma medida, todo triângulo isósceles apresenta dois dos seus ângulos internos iguais e todo triângulo escaleno apresenta os três ângulos distintos dois a dois.

Figura 6: Triângulos: equilátero, isósceles e escaleno.

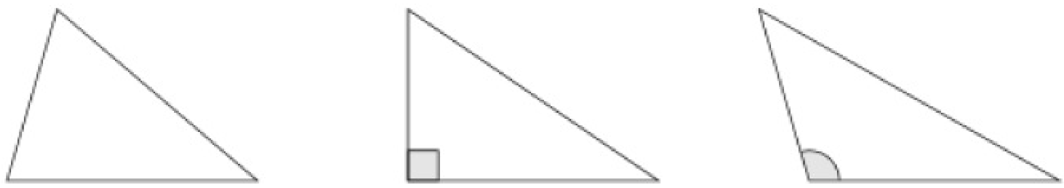


Fonte: Elaborada pelo autor

Além da classificação de um triângulo quanto a medida de seus lados, pode-se também classificá-lo quando a medida de seus ângulos, veja.

1. Um triângulo é acutângulo quando todos os seus ângulos internos forem agudos;
2. Um triângulo é retângulo quando possuir um ângulo reto;
3. Um triângulo é obtusângulo quando possuir um ângulo interno obtuso.

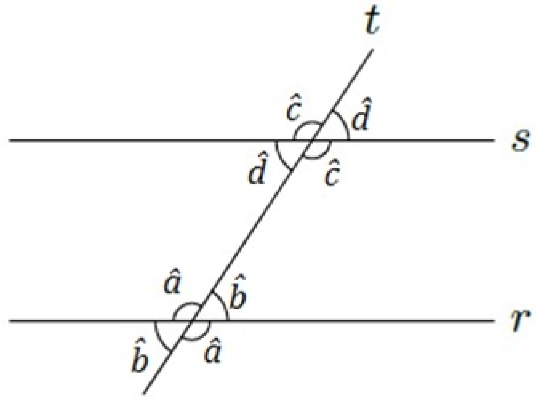
Figura 7: Triângulos: acutângulo, retângulo e obtusângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Consideremos a seguir duas retas paralelas r e s cortadas por um reta transversal t pertencentes a um plano qualquer, veja figura abaixo.

Figura 8: Retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se perceber que a reta t determina com as retas paralelas r e s oito ângulos, onde define-se os pares de ângulos na Figura 8 como:

1. Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são correspondentes.

2. Os ângulos $\hat{b}$ e $\hat{d}$ são alternos internos.

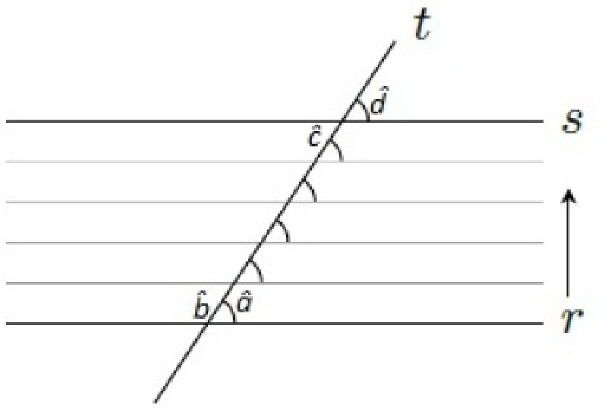
3. Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{d}$ são colaterais internos.

A partir desse fato, segue o resultado crucial quando tratamos sobre retas paralelas cortadas por ou mais retas transversais.

Teorema 3.1.1 *No plano sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t. As retas r e s são paralelas quando elas determinam com a reta t ângulos alternos internos de mesma medida.*

Demonstração. Transportando paralelamente a reta r sobre a transversal t (conforme Figura 9) os ângulos determinados por r e t não se modificam ao longo desse movimento. Logo, os pares de ângulos $(\hat{a}, \hat{c})$ e $\left(\hat{b}, \hat{d}\right)$ possuem a mesma medida. Como $(\hat{a}, \hat{c})$ e $\left(\hat{a}, \hat{d}\right)$ são alternos internos, conclui-se o resultado. ∎

Figura 9: Transporte da reta r sobre à reta s.



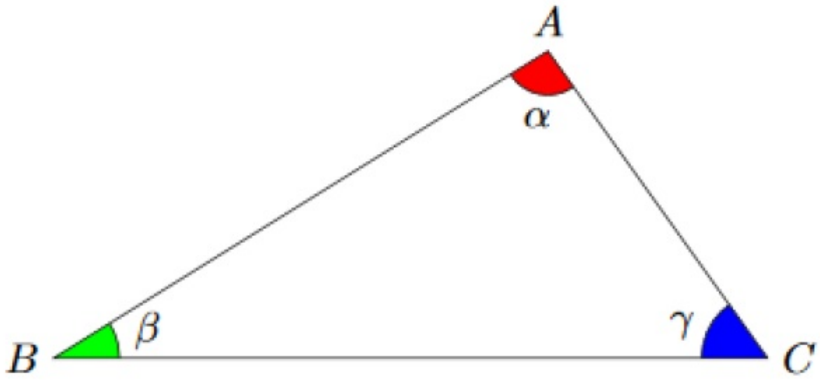
Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, apresentaremos um teorema importante para a obtenção de muitos resultados encontrados na geometria euclidiana plana. Sobretudo, perceberemos em sua demonstração o uso crucial do teorema anterior.

Teorema 3.1.2 *A soma dos ângulo internos de um triângulo é igual a* $180°$.

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer e α, β e γ seus ângulos internos, conforme Figura 10.

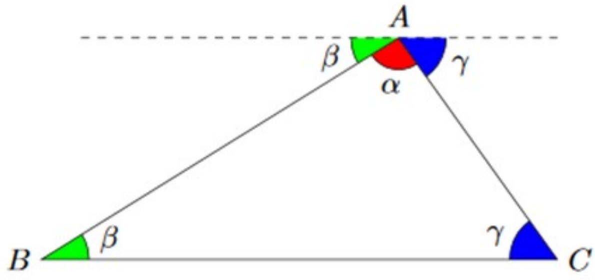
Figura 10: Soma dos ângulos internos do triângulo ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor

Tracemos pelo vértice A uma reta paralela ao segmento de reta $\overleftrightarrow{BC}$. Assim, determinamos dois ângulos alternos internos a β e γ conforme Figura 11 a seguir.

Figura 11: Ângulo agudo em A.



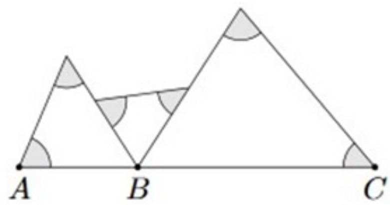
Fonte: Elaborada pelo autor

Daí, segue que no vértice A obtém-se um ângulo raso determinado pela soma dos ângulos adjacentes α, β e γ, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Com isso, fica demonstrado o Teorema. ■

Exemplo 3.1.2 *Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?*

Figura 12: Soma dos ângulos marcados em cinza.



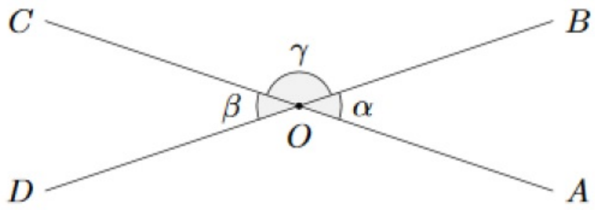
Fonte: OBMEP 2014 - N2Q3 - 1ª fase

Solução. Pelo Teorema 3.1.2 sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°. Como no vértice B temos o ângulo raso, pois pela hipótese os pontos A, B e C estão alinhados.

Fazendo-se a soma dos ângulos internos dos três triângulos em questão obtém-se 540°, logo a soma dos ângulos marcados em cinza é $(540° - 180°) = 360°$. ■

Definição 3.1.6 *Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são Opostos Pelo Vértice (OPV) se seus lados forem semirretas opostas.*

Figura 13: Ângulos Opostos pelo Vértice.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 3.1.3 *Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais.*

Demonstração. Considere a Figura 13, assim $\alpha = A\hat{O}B$ e $\beta = C\hat{O}D$. Como os pontos A, O e C estão alinhados segue que $\alpha + \gamma = 180°$. De modo análogo, $\beta + \gamma = 180°$.

Logo, $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$.

■

3.2 Congruência de triângulos

Nesta seção, apresentaremos um conjunto de condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser congruentes. Ressalta-se que ao mencionarmos no texto dois triângulos quaisquer de vértices e lados correspondentes, estaremos nos referindo aos triângulos ABC e DEF, exceto quando for especificado o contrário. Vale ressaltar que todo o assunto pode ser visto em [18].

Definição 3.2.7 *Dois triângulos ABC e DEF são congruentes quando existir uma correspondência entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes.*

Pela definição acima dois triângulos ABC e DEF são congruentes e indicaremos $OABC \equiv ODEF$ quando possuírem ângulos internos correspondentes iguais e lados correspondestes de mesma medida.

Considerando a correspondência entre vértices $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$ e $C \longleftrightarrow F$ dos triângulos ABC e DEF teremos que

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longleftrightarrow \left(\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F} \text{ e } \overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF} \text{ e } \overline{AC} = \overline{DF}\right).$$

A seguir listaremos alguns critérios (casos de congruência) para determinar se dois triângulos quaisquer são congruentes.

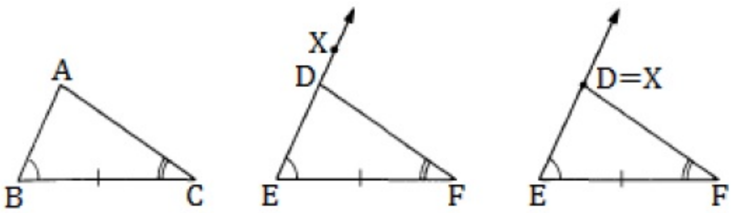
Axioma 3.2.1 *(1° Caso - LAL). Se dois lados de um triângulo ABC e o ângulo formado por esses lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo DEF e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Observa-se pelo axioma acima que se $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ *e* $\hat{B} = \hat{E}$, *então* $\overline{AC} = \overline{DF}$ $\hat{C} = \hat{F}$ *e* $\overline{AB} = \overline{DE}$.

(2° Caso - ALA). Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração. Considere que $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$, conforme Figura 14. Devemos mostrar que $\overline{BA} = \overline{ED}$, pois com isso garantiremos o caso LAL, o que conclui o resultado.

Figura 14: Congruência de triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor

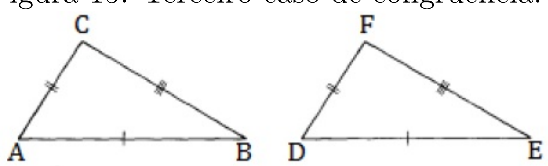
Seja X um ponto pertencente a semirreta $\overrightarrow{ED}$ tal que $\overline{EX} = \overline{BA}$. Daí, segue pelo caso LAL que

$$\begin{aligned}\left(\overline{BC} = \overline{EF}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \overline{EX} = \overline{BA}\right) &\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle XEF \\ &\Rightarrow B\hat{C}A = E\hat{F}X.\end{aligned}$$

Pela hipótese tem-se que $B\hat{C}A = E\hat{F}D$. Assim, pela transitividade temos $E\hat{F}D = E\hat{F}X$, o que implica $D = X$. Logo, $\overline{BA} = \overline{ED}$. ∎

3° Caso - LLL. Se os três lados de um triângulo são, em certa ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

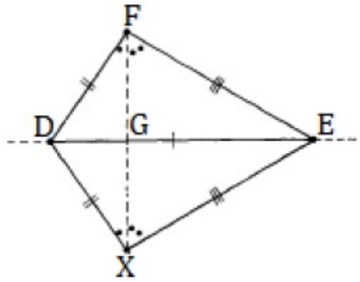
Figura 15: Terceiro caso de congruência.



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração. Para podermos fundamentar a demonstração considere a Figura 16.

Figura 16: Demonstração do terceiro caso de congruência.



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja X um ponto tal que $X\hat{D}E = C\hat{A}B$ e $\overline{DX} = \overline{AC}$. Pela hipótese $\overline{AC} = \overline{DF}$, o que implica em $\overline{DX} = \overline{DF}$. Considere G o ponto de interseção entre os segmentos $\overline{FX}$ e $\overline{DE}$. Daí, segue que

$$\Big(AB = DE, X\hat{D}E = C\hat{A}B \text{ e } DX = AC\Big) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEX \Rightarrow \overline{XE} = \overline{CB} \Rightarrow \overline{XE} = \overline{FE}.$$

Como $\overline{DX} = \overline{DF}$ e $\overline{XE} = \overline{FE}$ segue respectivamente que $\triangle DFX$ e $\triangle EFX$ são isósceles de base $\overline{FX}$, decorrendo que $D\hat{F}E = D\hat{X}E$.

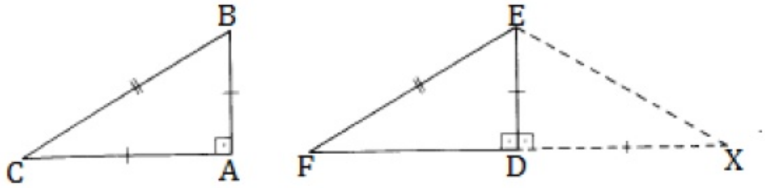
Logo, pelo caso LAL temos que $\triangle DFX \equiv \triangle DEX \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$. ■

4° Caso - LAAo. Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Exemplo 3.2.3 *(caso especial de congruência). Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, mostraremos que os triângulos são congruentes.*

Solução. Seja X um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{FD}$ tal que $\overline{DX} = \overline{AC}$, veja Figura 17.

Figura 17: Caso especial de congruência.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que

$$\left(\overline{AB} = \overline{DE}, \hat{A} = \hat{D} \text{ e } \overline{AC} = \overline{DX}\right) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEX, (LAL) \Rightarrow \overline{BC} = \overline{EX} \text{ e } \hat{C} = \hat{X}.$$

Por outro lado, $\overline{EF} = \overline{BC}$ e $\overline{BC} = \overline{EX}$ decorre que $\overline{EF} = \overline{EX}$. Daí, conclui-se que $\triangle EFX$ é isósceles de base $\overline{FX}$ e, portanto $\hat{F} = \hat{X}$.
Logo,

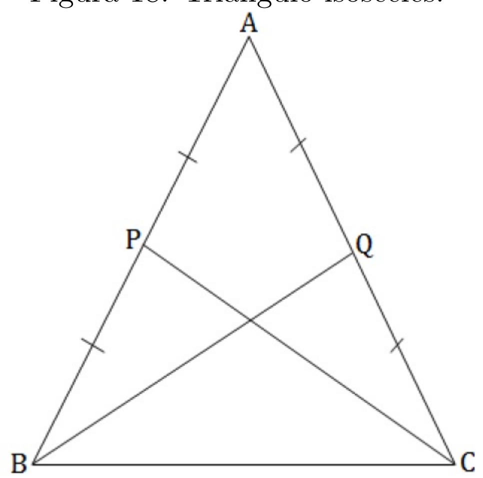
$$\left(\overline{BC} = \overline{EF}, \hat{C} = \hat{F} \text{ e } \hat{A} = \hat{D}\right) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF,$$

pelo caso LAA_0. ■

Exemplo 3.2.4 *Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, então $\hat{B} = \hat{C}$.*

Solução. Considere ABC um triângulo isósceles de base BC como segue abaixo. Assim, devemos mostrar que $\hat{B} = \hat{C}$.

Figura 18: Triângulo isósceles.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Traçando as medianas relativas aos lados AB e AC digamos CP e BQ teremos que

$$\overline{AQ} = \overline{CQ} = \frac{\overline{AC}}{2} \text{ e } \overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\overline{AB}}{2}.$$

Como ABC é um triângulo isósceles de base BC tem-se que $\overline{AB} = \overline{AC}$ segue que

$$\overline{AQ} = \overline{CQ} = \overline{AP} = \overline{BP}.$$

Portanto,

$$\left(\overline{AB} = \overline{AC}, \hat{A} = \hat{A} \text{ e } \overline{AQ} = \overline{AP}\right) \Rightarrow \triangle ABQ = \triangle ACP,\ (LAL) \Rightarrow \overline{CP} = \overline{BQ}.$$

Logo,

$$\left(\overline{PC} = \overline{BQ}, \overline{BP} = \overline{QC} \text{ e } \overline{BC} = \overline{BC}\right) \Rightarrow \triangle BCP = \triangle CBQ, \ (LLL) \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}.$$

■

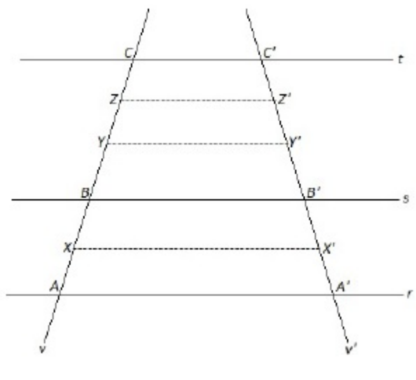
Ressalta-se que para mais detalhes sobre este assunto, veja [18].

3.3 Teorema de Tales

Nesta seção, será apresentado um dos principais teoremas da Geometria Euclidiana Plana conhecido como Teorema de Tales, o qual se mostrará indispensável doravante em todo o texto. Assumiremos neste texto que o leitor tenha certa maturidade das noções básicas sobre retas, razão e proporção no plano. Conforme, [18].

Teorema 3.3.4 *(Teorema de Tales). Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos A, $A' \in r$, $B, B' \in$ e $C, C' \in$ de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois termos de pontos colineares. Então,* $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'C'}}$.

Figura 19: Teorema de Tales.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Se $\overline{AB} = \overline{BC}$, então pelo teorema da base média de um trapézio teremos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \ e \ \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'C'}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'C'}}.$$

Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ é um número racional, por exemplo $\frac{2}{3}$. Então, basta dividirmos os segmentos AB e BC respectivamente em 2 e 3 partes iguais, obtendo os pontos X, Y e Z em v, tais que

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}.$$

Traçando pelos pontos X, Y e Z paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam v' respectivamente em X', Y' e Z', então aplicando-se mais três vezes o teorema da base média de um trapézio teremos que

$$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}.$$

Assim temos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}.$$

Raciocinando de modo análogo, considere $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$. Então, dividindo AB e BC em m e em n partes iguais respectivamente teremos $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$, e portanto,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

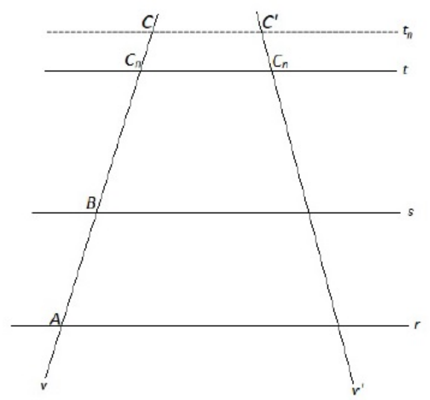
Supondo que $\overline{AB} = x$ seja um número irracional. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ então existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y < x + \frac{1}{n}$.

Escolhendo-se uma sequência (y_n) de reais positivos tal que $x < y_n < x + \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, marcamos o ponto $C_n \in v$ tal que $\frac{AB}{BC_n} = y_n$.

Seja t_n a reta paralela às retas r, s e t traçadas por C_n e C'_n o ponto onde t_n intersecta v'. Como $y_n \in \mathbb{Q}$ teremos de modo análogo que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}.$$

Figura 20: t_n a reta paralela às retas r, s e t traçadas por C_n e C'_n.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos escrever ainda que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A''B}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}.$$

Perceba que as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, à medida que n aumenta, os pontos C_n aproximam-se cada vez mais do ponto C. Porém, uma vez que $t_n \parallel t$ teremos que os pontos C'_n aproximam-se cada vez mais do ponto C, de modo que a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ aproximam-se cada vez mais da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$. Ou seja,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \longrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$. Por outro lado, a partir das desigualdades do segundo membro pode-se garantir que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

Pelo fato de que uma sequência de números não pode convergir simultaneamente para dois números reais distintos quando $n \longrightarrow +\infty$, então concluímos que

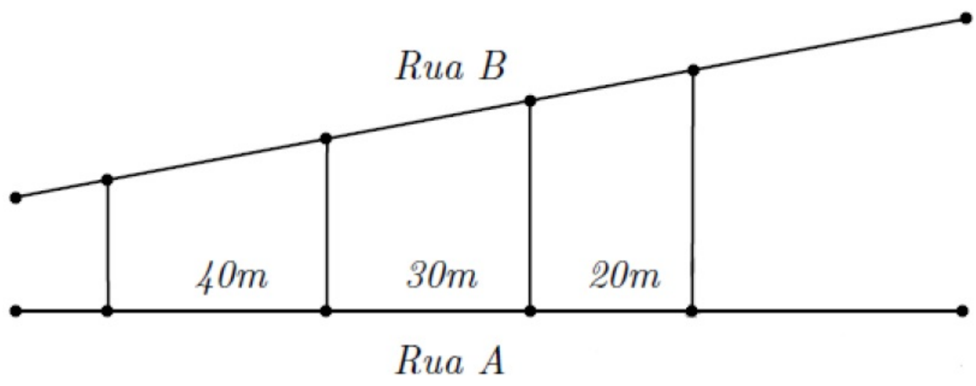
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'C'}}.$$

∎

A demonstração do Teorema de Tales fugiu um pouco dos objetivos propostos nesse trabalho, porém essa demonstração é devida a [18]. A seguir, apresentaremos três exemplos que mostrarão a utilidade do Teorema de Tales.

Exemplo 3.3.5 *Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como mostra Figura* 20. *As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente de cada lote para a rua B, sabendo que a frente total para essa rua mede* 180 *m?*

Figura 21: Subdivisão de lotes da rua B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução. Sejam x, y e z as medidas de frente de cada lote para a rua B, respectivamente opostas a $40\ m, 30\ m$ e $20\ m$.

Pelo Teorema de Tales segue que

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = k \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = k \Rightarrow x = 4k, y = 3k \ e \ z = 2k$$

Pela hipótese temos,

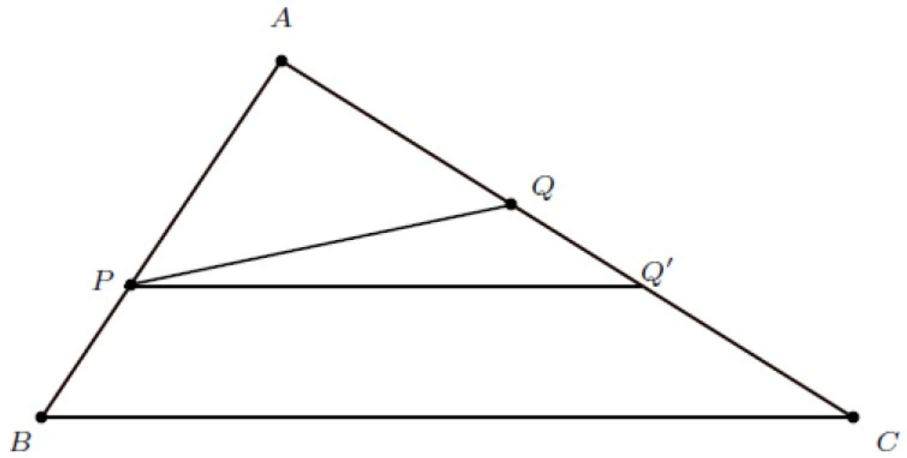
$$x + y + z = 180\ m \Rightarrow 9k = 180\ m \Rightarrow k = 20\ m.$$

Logo, $x = 80\ m$, $y = 60\ m$ e $z = 40\ m$. ■

Exemplo 3.3.6 *Considere o triângulo ABC e os pontos P e Q sobre os lados AB e AC, respectivamente. Se $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, prove que $PQ \parallel BC$.*

Solução. Suponhamos, por absurdo, que PQ não seja paralelo a BC, veja Figura 21. Pelo ponto P tracemos uma reta PQ' paralela a BC como segue abaixo.

Figura 22: Aplicação do Teorema de Tales.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Daí, segue pelo Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'C}}.$$

Pela hipótese temos,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}},$$

então pelas equações acima segue que

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'C}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}},$$

absurdo, pois os pontos Q e Q' são distintos. Logo, $PQ \parallel BC$. ■

3.4 Semelhança de triângulos

Nesta seção, apresentaremos os critérios de semelhança de triângulos, mostraremos sua eficácia durante a obtenção das relações métricas do triângulo retângulo. Todavia, se dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, indicaremos tal fato por

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Definição 3.4.8 *Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes quando existir uma correspondência entre os vértices dos triângulos de modo que os lados correspondentes sejam proporcionais e os ângulos correspondentes sejam congruentes entre si.*

Em símbolos, considere a correspondência entre vértices $A \longleftrightarrow A', B \longleftrightarrow B'$ e $C \longleftrightarrow C'$ dos triângulos citados acima. Dessa forma teremos,

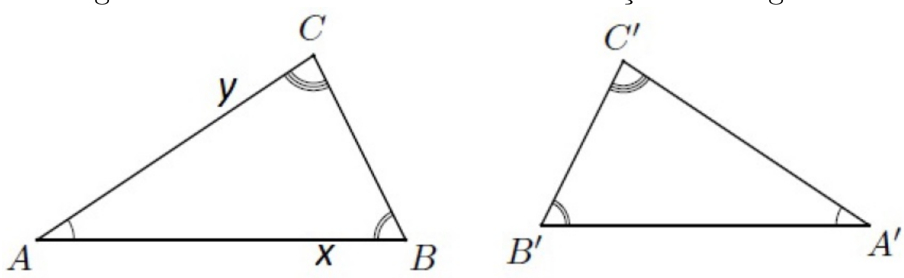
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \text{ e } A = A', B = B' \text{ e } C = C'.$$

Ressalta-se que ao mencionarmos no texto sobre dois triângulos semelhantes, admitiremos todas as características da Definição 3.4.8.

Além disso, é trivial perceber que a congruência de triângulos é um caso particular da semelhança de triângulos, ocorrendo quando a razão de semelhança for $k = 1$.

Teorema 3.4.5 *(Critério AAA de semelhança). Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os ângulos correspondentes sejam congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

Figura 23: Primeiro critério de semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Considere X e Y dois pontos pertencentes as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ respectivamente, tais que $\overline{AX} = \overrightarrow{A'B'}$ e $\overline{AY} = \overrightarrow{A'C'}$. O caso de congruência LAL garante que $\triangle ABC?\triangle A'B'C'$ e, portanto vale

$$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C' \text{ e } B\hat{C}A = B'\hat{C}'A' = Y\hat{X}A.$$

Daí, segue que devemos analisar dois casos: ou $\overline{XY} = \overline{BC}$ ou $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Para o primeiro caso tem-se que $B = X$ e $C = Y$. Assim, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e, portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle AB'C'$. No segundo caso, teremos pelo Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{AG} = \frac{\overline{AC}}{AH} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Analogamente, pode-se demonstrar que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{B'C'},$$

o que conclui a demostração ■

Teorema 3.4.6 *(Critério AA de semelhança). Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois pares de ângulos correspondentes sejam congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

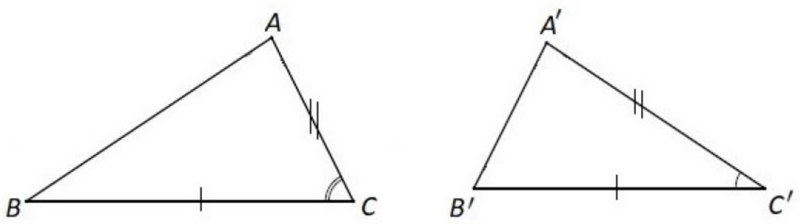
Demonstração. Suponha que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}$. Pelo Teorema 3.1.1 temos,

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \text{ e } \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180° \quad &\Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' \\ &\Rightarrow \quad \hat{C} = \hat{C}'. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.4.7 *(Critério LAL de semelhança). Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois pares de ângulos correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

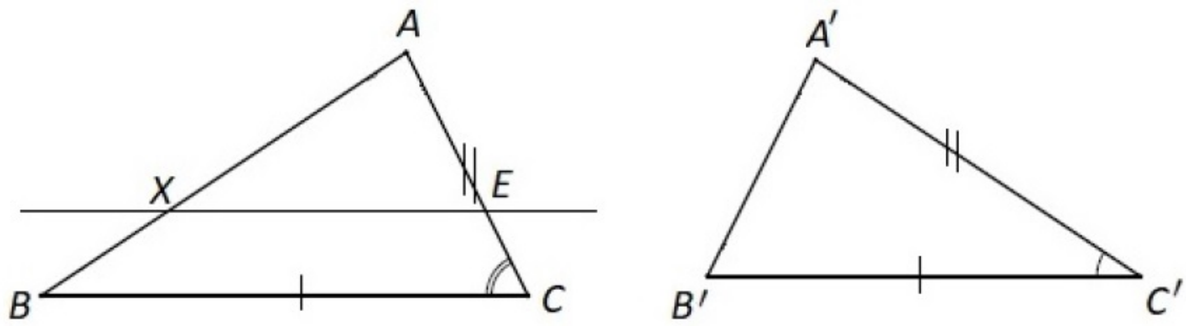
Figura 24: Segundo critério de semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Suponhamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ não sejam congruentes e além disso, que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Considere $X \in B$ tal que $\overline{AX} = \overline{A'B'}$ e o triângulo AXE com $\hat{X} = \hat{B}'$ e $E \in AC$.

Figura 25: Segundo critério de semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Daí, segue-se que

$$\hat{A} = \hat{A}', \overline{AX} = \overline{A'B'} \text{ e } \hat{X} = \hat{B}' \Rightarrow \triangle AXE \equiv \triangle A'B'C', (ALA).$$

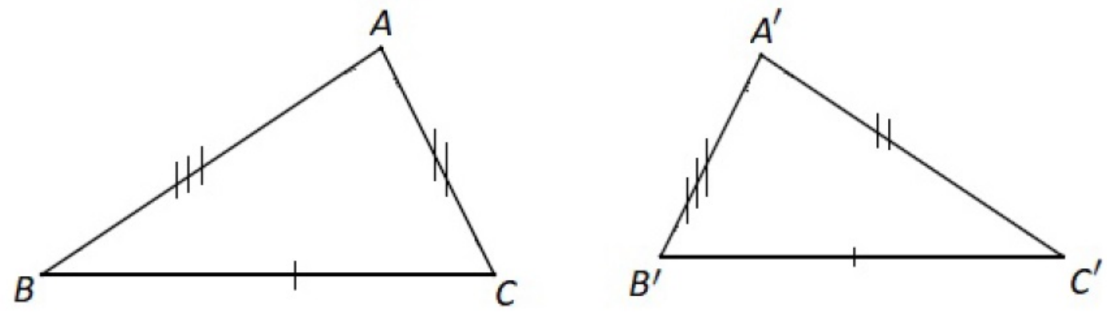
Portanto,

$$\hat{X} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{X} = \hat{B} \Rightarrow XE \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AXE \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

■

Teorema 3.4.8 *(Critério LLL de semelhança). Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os pares de lados correspondentes são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.*

Figura 26: Terceiro critério de semelhança de triângulos.

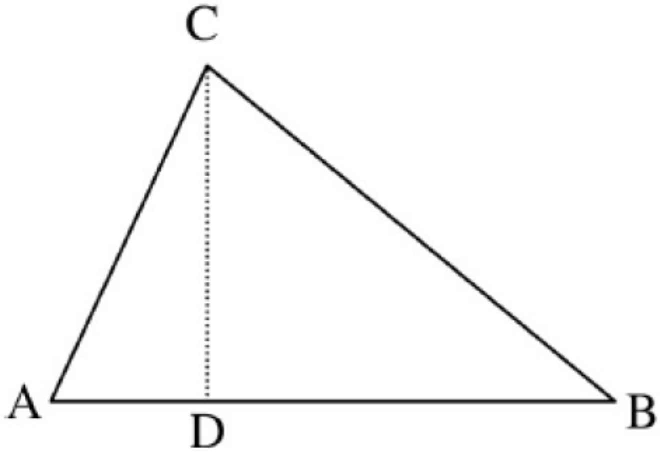


Fonte: Elaborada pelo autor.

A demonstração do Teorema 3.4.7 é análoga ao caso anterior, basta utilizar o caso LAL de congruência entre triângulos.

Exemplo 3.4.7 *Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa ao vértice do ângulo reto divide o triângulo em triângulos menores que são semelhantes entre si e também semelhantes ao triângulo original.*

Figura 27: Triângulos retângulos semelhantes entre si.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução. Seja ABC um triângulo retângulo em C tal que CD é altura desse triângulo relativa a hipotenusa AB, conforme Figura 25. Devemos mostrar que os triângulos ACD, BCD e ABC são congruentes entre si. Pelo Teorema 3.1.1 temos que

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C = D\hat{B}C + B\hat{C}D = C\hat{A}D + A\hat{C}D = 90°$$

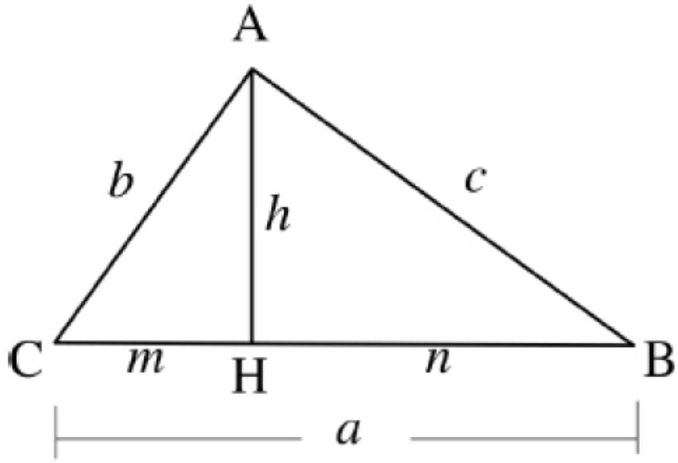
Daí, segue que

$$B\hat{A}C = B\hat{C}D \text{ e } A\hat{B}C = A\hat{C}D.$$

Logo, pelo Teorema 3.4.4 conclui-se o resultado. ■

Proposição 3.4.1 *(Relações métricas no triângulo retângulo). Sejam ABC um triângulo retângulo em A e H o pé da perpendicular baixada de A sobre BC, conforme Figura 26, tal que*

Figura 28: Triângulos retângulos semelhantes entre si.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) $\overline{BC} = a$ é a hipotenusa;
(b) $\overline{BC} = b$ é um cateto;
(c) $\overline{AB} = c$ é um cateto;
(d) $\overline{CH} = m$ é a projeção do cateto b sobre a hipotenusa;
(e) $\overline{BH} = n$ é a projeção do cateto c sobre a hipotenusa;
(f) $\overline{AH} = h$ é a altura relativa à hipotenusa.

Mostre que

1. $b^2 = a \cdot m$;
2. $c^2 = a \cdot n$;
3. $h^2 = m \cdot n$;
4. $b \cdot c = a \cdot h$;
5. $b \cdot h = c \cdot m$;
6. $c \cdot h = b \cdot n$.

Demonstração. Pela Figura 26 temos que os triângulos ABC, HAC e HAB são semelhante entre si e, portanto valem as seguinte relações:

$$\triangle ABC \sim \triangle HAB \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \ (1) \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = an \ (2) \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{n} \Rightarrow ch = bn \ (3) \end{cases}$$

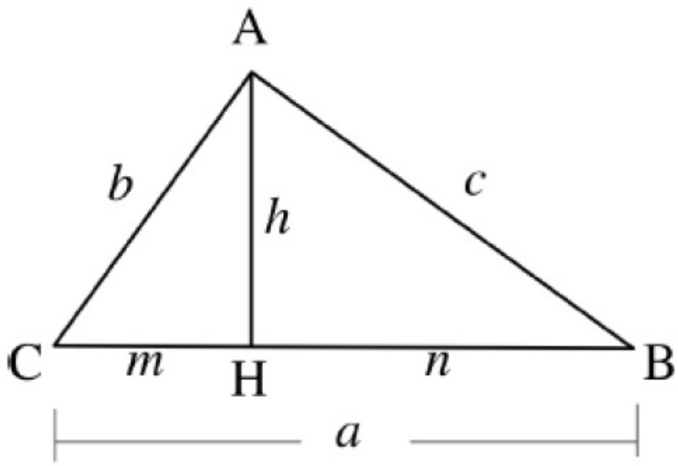
$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = am \ (4) \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \ (5) \\ \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \Rightarrow bh = cm \ (6) \end{cases}$$

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{h}{m} \Rightarrow bh = cm \ (7) \\ \frac{c}{b} = \frac{n}{h} \Rightarrow ch = bn \ (8) \\ \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn \ (9) \end{cases}$$

Logo, conclui-se o resultado. ∎

Exemplo 3.4.8 *(Teorema de Pitágoras). O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Figura 29: Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução. Considere o triângulo retângulo acima. Assim, devemos mostrar que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

De fato, pelas relações métricas $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$ temos,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a \cdot m + a \cdot n \\ &= a \cdot (m+n) \\ &= a \cdot a = a^2. \end{aligned}$$

∎

Exemplo 3.4.9 *Sendo b, c e h, respectivamente os catetos e a altura de um triângulo retângulo ABC. Mostre que $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Solução. Usaremos como referência o triângulo retângulo ABC conforme figura acima. Assim, pelas relações métricas $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{a \cdot m} + \frac{1}{a \cdot n} \\
&= \frac{a \cdot n + a \cdot m}{a^2 \cdot mn} \\
&= \frac{a \cdot (m + n)}{a^2 \cdot mn} \\
&= \frac{a \cdot a}{a^2 \cdot mn} \\
&= \frac{a^2}{a^2 \cdot mn} \\
&= \frac{1}{mn} = \frac{1}{h^2}.
\end{aligned}$$

■

4 LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Nesse contexto, o livro didático torna-se material de extrema importância no estudo particular dos alunos, bem como no bom andamento da aula pelo professor. Porém, somente o livro não resume uma boa aula, apesar de ser um grande responsável pelo aprendizado do aluno. Com base nisso, quatro coleções aprovadas pelo MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO para o PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO PARA O ENSINO MÉDIO - PNLEM ressaltam a importância da organização dos livros e como trabalha-los de forma significativa.

É importante estudar a estrutura e a organização dos livros para se determinar quais são os princípios norteadores do livro em si e sobretudo suas metodologias. Assim sendo, os livros que apresentam a abordagem dos conteúdos são:

- COLEÇÃO 01 IEZZI, GELSON [et. al] Matemática: Ciência e Aplicações - Ensino Médio. Volume 1. São Paulo: Saraiva 2010.

- COLEÇÃO 02 PAIVA, MANOEL. Matemática. Volume 1. São Paulo: Moderna 2010.

- COLEÇÃO 03 GIOVANNI, J. RUY; BONJORNO, J. ROBERTO. Matemática Completa Segunda Edição Renovada. Volume Único. São Paulo: FTD 2005.

- COLEÇÃO 04 DANTE, L. ROBERTO. Matemática Contexto e Aplicações. Volume 1. São Paulo: Ática 2013.

4.1 O processo de ensino/aprendizagem em matemática

Criou-se uma ilusão sobre a aprendizagem da Matemática Moderna, a qual é considerada pelos alunos como uma disciplina difícil de se aprender. Porém, acredita-se que tal fato seja intitulado ao despreparo de parte de alguns professores ao abordar sobre a Matemática Moderna e outra na falta de interesse por parte dos alunos. Além disso, sabe-se que o processo de aquisição do conhecimento perpassa por diversas etapas para assegurar o ensino e a aprendizagem dessa disciplina.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (2007), a matemática é uma componente importante na construção e no exercício da cidadania. Desse modo, comprova-se que a aprendizagem dessa disciplina poderá ser melhorada através da contextualização do seu ensino, sejam direcionados ao espaço físico escolar ou até mesmo a situações encontradas no convívio social. Destaca-se ainda que a aprendizagem dos principais conceitos matemáticos ocorre pela interação dos alunos através das suas experiências vivenciadas em seu dia-a-dia.

Todo o professor deve refletir quanto a forma pedagógica de ensino, porém se tratando de Matemática percebemos que há uma necessidade de um olhar diferenciado como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva e da sua imaginação.

Todavia, para que se possa entender sobre a contribuição do professor de Matemática na formação do cidadão, deve-se primeiramente perceber até que ponto seu papel esta garante aos alunos de todas as classes sociais assimilarem os conteúdos da disciplina, os quais são relevantes na sua prática social.

O Ministério da Educação divulgou por meio do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) detalhes sobre a situação dos rendimentos escolares no Brasil. O ensino de matemática, conforme os dados, apresentou pouca evolução, tanto em termos de nota quanto de aprendizagem ao longo dos últimos anos, conforme demonstração do quadro:

Figura 30: Resultados do Brasil no PISA desde 2000.

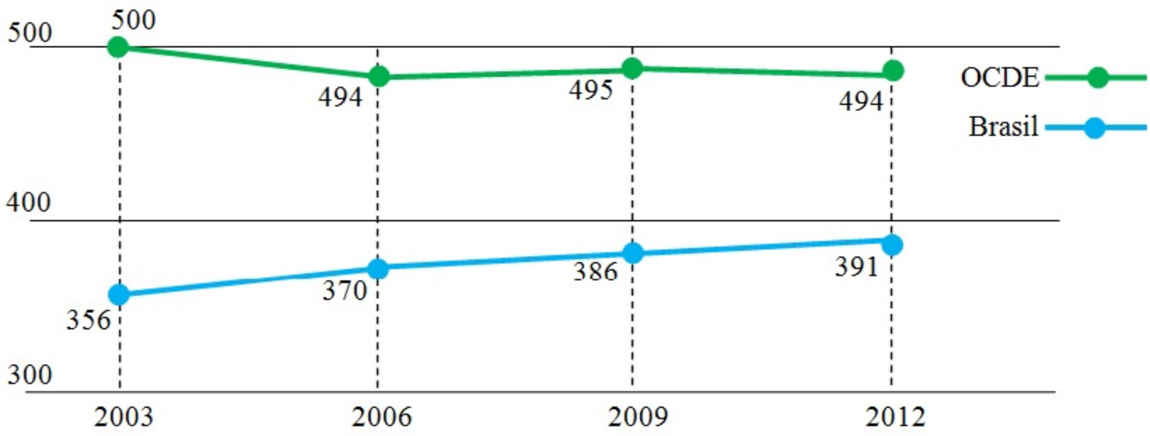
	Pisa 2000	Pisa 2003	Pisa 2006	Pisa 2009	Pisa 2012
Número de alunos participantes	4893	4452	9295	20127	18589
Leitura	396	403	393	412	410
Matemática	334	356	370	386	391
Ciências	375	390	390	405	405

Fonte:
portal.inep.gov.br/internacional - novo - pisa - resultados, ltimoacessoem12.abr.2017.

Este exame é realizado a cada três anos, com estudantes de diversos países, cujo objetivo é avaliar os sistemas educacionais no mundo através de um conjunto de testes em assuntos como leitura, matemática e ciências para produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico.

A última edição do exame ocorreu em 2015, mas quando o parágrafo inicial deste trabalho cita últimas cinco edições está fazendo referência àquele cujo resultado já foi divulgado. Essa análise indica ao mesmo tempo os bons resultados tidos nos últimos anos, ressalta também considerar valida a necessidade de continuar melhorando-se a educação, pois estes resultados ainda não são suficientes para colocar o Brasil na colocação que se espera, ou seja, a situação é ainda bastante preocupante. O gráfico abaixo traz a comparação dos resultados em matemática com a média da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE.

Figura 31: Evolução das médias em matemática no Pisa.



Fonte:
educacao.uol.com.br/noticias/2013/12/03/pisa - desempenho - do - brasil - piora - em - leitura - e - empaca - em - ciencias.htm, ltimoacessoem12.Abr.2017.

A Figura 31 apresenta a pontuação em Matemática dos estudantes brasileiros com 391 pontos, em média, abaixo da média da OCDE e com- parável com a Albânia, Argentina, Jordania e Tunísia. Entre países latino-americanos, o Brasil está abaixo do Chile, México, Uruguai e Costa Rica, mas acima de Colômbia e Peru.

De acordo com o levantamento dos resultados em Matemática encontrados na figura acima nota-se que o Brasil está entre a 57^a e 60^a posição dos países avaliados e que 67, 1% de nossos estudantes estão classificados nos menores dos 6 níveis de Matemática. Isto é, a aprendizagem nessa disciplina dos alunos que concluem o Ensino Médio encontra-se devassada, mostrando portanto o mau desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais nesta fase do ensino.

Há exatamente nas duas últimas décadas, existem diversos mecanismos para as avaliações nacionais que mostram os baixos índices da Educação Básica em Matemática. Porém, sabe-se que existe uma iniciativa do governo em oferecer uma melhoria da formação dos professores que atuam na Educação Básica do Brasil. Para tanto, criou-se o Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, o qual tem a conceito máximo igual a 5 e cada ano se expande em nosso pais, e consequentemente, aumenta o números de professores capacitados em nosso país.

4.2 Abordagem da primeira obra

A primeira obra, do Iezzi et. al (2010) contém 279 (duzentos e setenta e nove) páginas e 13 (treze) capítulos, apresentando também como autores Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, publicado pela editora Saraiva.

O capítulo doze da obra trata-se de semelhança e triângulos retângulos, e apresenta-se da seguinte maneira: Semelhança Entre Figuras; Semelhança de Triângulos (introdução e razão de semelhança); Teorema de Tales e Teorema Fundamental da Semelhança; Crité rios de Semelhança (AA - ângulo-ângulo; LAL - lado-ângulo - lado; LLL - lado-lado-lado); Consequência de Semelhança de Triângulo; O Triângulo Retângulo (semelhança no triângulo retângulo; relações métricas; aplicações notáveis do Teorema de Pitágoras).

No livro o conteúdo de semelhança de triângulos é descrito em vinte e uma páginas com definições e exemplos de figuras geométricas, bem como alguns exercícios propostos. Os autores constroem os conteúdos de forma significativa, clara e segura para o aprendizado do aluno. Inicia-se trazendo a semelhança de figuras a partir de uma comparação de figuras com a mesma forma, porém em escalas diferentes, tendo como esboço um mapa contendo algumas capitais brasileiras, sendo-o dividido em Figura A e Figura B. Neste esboço, os elementos da Figura A corresponde aos elementos da Figura B, onde pode-se tirar conceitos básicos e importantes como a proporcionalidade entre lados homólogos e ângulos correspondentes congruentes.

A obra em análise apresenta a matéria de forma clara e de fácil compreensão através de definições, demonstrações, exemplos e exercícios, no entanto, os autores deixam de abordar o conteúdo de congruência de triângulos, que deveria ser tratado junto com a semelhança. Isso traria um aumento significativo na apresentação do conteúdo.

4.3 Abordagem da segunda obra

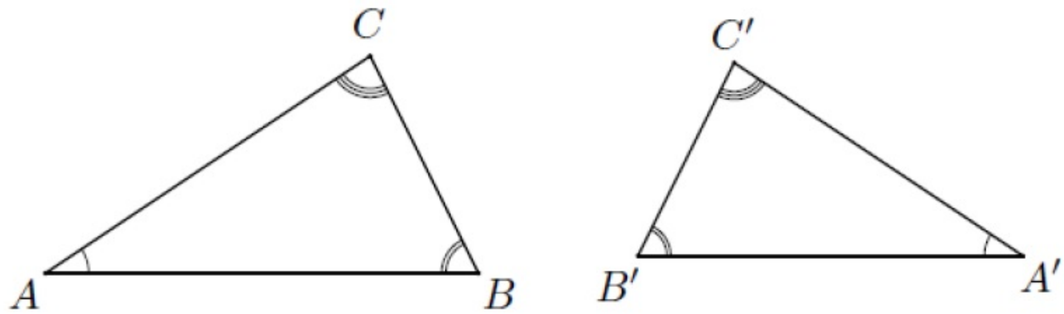
A segunda obra de Paiva (2010) contém seiscentas páginas, quinze capítulos e o conteúdo apresenta-se no capítulo dez sobre os seguintes tópicos: Congruência de triângulos (casos: $LAL, ALA, LLL, LAA_0, RHC$), Teorema de Tales, Semelhança de figuras planas, semelhança de triângulos (casos: AA, LAL, LLL), cálculo da razão de semelhança de dois triângulos, relações métricas no triângulo retângulo. O conteúdo inicia-se na página trezentos e vinte e seis, onde Paiva apresenta uma ideia intuitiva de sobreposição de triângulos para mostrar a congruência de triângulos e em seguida mostrar a definição e seus casos.

Os casos de congruência apresentam-se de cinco maneiras diferentes, a saber: LAL (lado - ângulo - lado), ALA (ângulo - lado - ângulo), LLL (lado - lado - lado) LAA_0 (lado- ângulo-ângulo oposto) RHC (ângulo reto - hipotenusa - cateto). No tópico 10.2 que aborda o Teorema de Tales, Paiva inicia com um pequeno contexto histórico sobre Tales de Mileto, onde aparece Tales de Mileto é considerado o primeiro filósofo grego e é também o primeiro pensador da História a quem se atribuem descobertas matemáticas específicas, embora antes dele a humanidade já tivesse acumulado conhecimento matemático.

Em seguida apresenta a demonstração do Teorema de Tales, a saber: Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois seguimentos de uma mesma transversal é igual a razão entre os seguimentos correspondentes da outra transversal. Nesta segunda obra, o conteúdo semelhança de figura apresenta-se de forma mais resumida, embora faça alguns contextos históricos antes de abordar a semelhança de figuras.

Conforme Paiva (2010) demonstrado na figura abaixo, teremos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existir uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro tal que: os ângulos com vértices correspondentes sejam congruentes e, os lados opostos a vértices correspondentes sejam proporcionais.

Figura 32: Semelhança de triângulos.

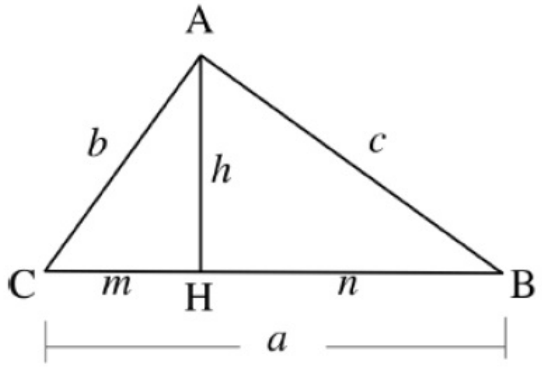


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os casos de semelhança de triângulos (AA, LAL, LLL) aparecem de forma impressionante tanto pelas demonstrações e definições como pelos exercícios resolvidos e os exercícios propostos. O autor aborda o conteúdo de forma clara e direta, resultando numa melhor compreensão pelo aluno da matéria apresentada. No conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo, Paiva (2010) considera a seguinte situação:

- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa a hipotenusa;
- m é a projeção ortogonal do cateto AB sobre a hipotenusa;
- n é a projeção ortogonal do cateto AC sobre a hipotenusa.

Figura 33: Relações métricas no triângulo retângulo..



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos as seguintes relações métricas no triângulo retângulo.

1. $b^2 = a \cdot m$.

2. $c^2 = a \cdot n$.

3. $h^2 = m \cdot n$.

4. $b \cdot c = a \cdot h$.

5. $b \cdot h = c \cdot m$.

6. $c \cdot h = b \cdot n$.

O autor demonstra as relações métricas através de semelhança de triângulos e encerra o conteúdo com mais duas páginas que constam de exercícios resolvidos bem como propostas para as resoluções. Percebe-se, então, que Paiva (2010) é incisivo e objetivo no conteúdo e em suas demonstrações, sendo considerada uma obra de alto nível.

4.4 Abordagem da terceira obra

A terceira obra em análise é a de Giovanni e Bonjorno (2005), que consta de quinhentas e quarenta e oito páginas e trinta e cinco capítulos. Os autores trazem na Unidade D do livro didático a parte de geometria e consta no capítulo 1 (semelhança de figuras geométricas planas) e no capítulo 2 (relações métricas no triângulo retângulo).

Giovanni e Bonjorno (2005, p. 409 e 410) apresentam o Teorema de Tales e o Teorema da bissetriz interna de forma simples e sem nenhum tipo de demonstração, fazendo apenas o enunciado de cada teorema. Em seguida trata-se da semelhança de triângulos, fazendo uma abordagem bem limitada, mostrando apenas algumas propriedades, como a de que se dois triângulos são semelhantes então os lados de um são proporcionais aos lados homólogos do outro; teorema fundamental da semelhança e as medidas dos perímetros de dois triângulos semelhantes são proporcionais as medidas de dois lados homólogos quaisquer, deixando de apresentar os casos de semelhança de triângulos.

No capítulo 2 os autores apresentam as relações métricas no triângulo retângulo de forma parecida como tratou o conteúdo no capítulo 1, fazendo apenas um enunciado sem nenhum tipo de demonstração dessas relações. Destarte, a obra supracitada apresenta a congruência de triângulos dentre os casos de semelhança de triângulos, tomando a abordagem resumida. Por outro lado, a parte dos exercícios é satisfatória na quantidade e qualidade.

4.5 Abordagem da quarta obra

A quarta obra é a de Dante (2013), o livro possui quatrocentos e setenta e duas páginas, sendo dividido em doze capítulos. O capítulo 12 com o título de Geometria Plana é o que consta o Teorema de Tales, o Teorema da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo, semelhança de triângulos (casos de semelhança de triângulos e Teorema fundamental da semelhança) e Relações métricas no triângulo retângulo.

O conteúdo inicia-se na página trezentos e sessenta e um, onde Dante (2013, p. 361) destaca o Teorema de Tales e o Teorema da bissetriz interna, fazendo o enunciado e a demonstração de forma coerente e de fácil compreensão. Além disso, apresenta alguns exercícios propostos bem elaborados, que farão com que o aluno se dedique na sua resolução.

Nas duas páginas seguintes ele apresenta a semelhança de triângulos, onde enuncia que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordena damente congruentes e os lados homólogos proporcionais. Em seguida o autor mostra a razão de semelhança e os casos de semelhança de triângulo, que são AA (ângulo - ângulo), LLL (lado - lado - lado) LAL (lado - ângulo - lado), bem como o Teorema fundamental da se- melhança, no entanto não apresenta nenhuma demonstração.

Dante (2013, p. 366) aborda as relações métricas no triângulo retângulo apontando os elementos hipotenusa, catetos, projeções e altura relativa a hipotenusa. Utiliza ainda a semelhança de triângulos para fazer a demonstração das quatro relações métricas e a do Teorema de Pitágoras.

Na obra de Dante (2013) a congruência de triângulos é apresentada nos casos de semelhança de triângulos, por isso é importante o professor mencionar com os alunos que a congruência de triângulos é um caso particular de semelhança.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Ensino de Matemática apresenta várias dificuldades em nosso país desde os primórdios dos Jesuítas. Apesar das melhoras relevantes, nem todos os problemas foram superados. Infelizmente, enquanto a Matemática universitária brasileira se desenvolve substancialmente, nas instituições de Ensino Básico, a Matemática parece não concordar com os resultados dos acadêmicos. Dessa forma acredita-se que o Ensino dessa disciplina nas sérios iniciais do Fundamental e Médio não consegue acompanhar tal evolução.

Esse descompasso entre a evolução da Matemática acadêmica e do Ensino Básico é um fator marcante para o Ensino da Geometria Euclidiana Plana, pois basta observar através de diferentes fatos como na hipervalorizarão das humanidades clássicas quando o ensino brasileiro se estabeleceu, ou na falta de livros e cuidados na implementação de novas ideias.

No Brasil a Matemática não alcançou os méritos que tanto se deseja em uma Educação Nacional. Diante disso a postura do profissional pode ajudar ou simplesmente contribuir para o aumento do números indesejados na educação.

Além disso, estes mesmos estudantes tornam-se excessivamente dependentes do professor e do livro didático, uma vez que seu principal objetivo dentro da instituição educacional é obter nota suficiente para serem aprovados. Outro grande problema refere-se ao fato de que a matemática é frequentemente tratada como sendo uma área do conhecimento humano desligada da realidade e do cotidiano onde o indivíduo encontra-se inserido.

Portanto, sabe-se que as condições na qual se encontra o Ensino de Matemática se desenvolve nas instituições do nosso país ainda não é satisfatório para melhorias educativa da disciplina. Todavia, acredita-se que as abordagens bibliográficas adotadas nesse trabalho possam a contribuir com os métodos de Ensino de Matemática em nosso país.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, R. **A Alegria de Ensinar.** São Paulo: Ars Poética, 1994.

[2] BRASIL, C. B. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - Parâmetros Curriculares Nacional: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] BRASIL, C. B. Ministério da Educação - Guia de Livros Didáticos PNLD, 2008: Matemática. Brasília: MEC, 2007.

[4] BRASIL, PISA. Análises e Reflexões Sobre o Desempenho dos Estudan- tes Brasileiros - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE. São Paulo: Fundação Santillana, 2015.

[5] DANTE, R. L. Didática de Resolução de Problemas de Matemática. 12. ed. São Paulo, Editora Ática, 1999.

[6] EUCLIDES. Os Elementos - Traduzido por Irineu Bicudo. São Paulo. Editora Unesp, 2009.

[7] EVES, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas. Unicamp, 2004.

[8] FORIAN, Cajori A History of Mathematical Notations. Nem York. Dover, Publications. Inc., 1993.

[9] GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J.R. Matemática Completa. 2. ed. vol. 1. São Paulo: FTD, 2005.

[10] $https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_{d}e_{P}it\%C3\%A1goras.$

[11] EIZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. vol. 9. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[12] LIMA, E. L. Coordenadas no Espaço. 4.ed. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

[13] LIMA, E. L. Matemática e Ensino - 2. ed. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

[14] LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria - 2. ed. Coleção Matemática Elementar. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

[15] Material Teórico do Portal da Matemática - OBMEP. Semelhança entre Triângulos. SATO, J. Revisor MUNIR, A. C. M. Rio de Janeiro: IMPA.

[16] MIORIM, M. A. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.

[17] MORGADO, A. C. Temas e Problemas Elementares. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[18] MUNIZ, A. C. M. Geometria - Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM 2013.

[19] MUNIZ, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar - Geometria euclidiana plana. v. 2. SBM. Rio de Janeiro, 2012.

[20] PAIVA, Manoel. Matemática. vol. 1. São Paulo: Moderna, 2009.

[21] POGORELOV, A. V. Geometria Elemental - Tradução para o espanhol por Carlos Vegas, Editora Mir, Moscou, 1974.

[22] ROBSON, E. Historia Mathematica. v. 28, Number 3: Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322, New York: Academic Press, 2001.

[23] SOUZA, J. R. Matemática - Coleção nova olhar. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.