CARLOS ANDERSON GOMES CORREIA

GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL PARA O ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE

2017

CARLOS ANDERSON GOMES CORREIA

GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Plácido F. de Assis Andrade

JUAZEIRO DO NORTE

2017

CARLOS ANDERSON GOMES CORREIA
GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL PARA O ENSINO MÉDIO/ CARLOS ANDERSON GOMES CORREIA. – JUAZEIRO DO NORTE, 2017-
63 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Plácido F. de Assis Andrade

Dissertação(Mestrado) – UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL, 2017.

1. Geometria Analítica Vetorial. 2. Álgebra Linear. 3. Produto interno. 4. Matrizes. I. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Geometria Analítica Vetorial Para o Ensino Médio

Carlos Anderson Gomes Correia

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 26 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade – UFCA

Orientador

Maria Silvana Alcantara Cost

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Érica B. Batista

Profa. Dra. Erica Boizan Batista - UFCA

À minha amada mãe e a meu querido avô materno Damiana Gomes Monteiro Correia e Luiz Gomes Monte (in memoriam).

Agradecimentos

A Deus, por tudo em minha vida!

A minha mãe, Damiana Gomes Monteiro Correia (in memoriam), por tudo que ensinou a fazer e não fazer, por ter me tornado a pessoa honesta que sempre fui e todo amor que me proporcionou.

Ao meu pai, Antonio Carlos Correia, por tudo que me ensinou, estar sempre ao meu lado, todo amor que me proporcionou, ter me dado todo o tempo necessário para me dedicar aos estudos, ter me incentivado a buscar sempre mais e não desistir nunca.

A minha esposa, Maria Adriana Costa Correia, por todo o amor, todo o apoio em tudo que faço, toda a ajuda.

Ao meu orientador, Plácido de Andrade, pelo que me ensinou durante todo o mestrado e a ajuda imprescindível no desenvolvimento deste trabalho.

A minha família, em geral, por toda a ajuda.

A todos os meus professores do PROFMAT - UFCA e da minha graduação em matemática na URCA pela força e todo o ensinamento na área de matemática e didática em sala de aula.

Aos professores e coordenadores da Escola Adauto Bezerra de Jardim-CE pela força, pelos conselhos e por entenderem que eu precisaria de um tempo exclusivo para o mestrado e ajudarem no meu horário de aula.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Resumo

Com Pitágoras (560 - 500 a.C), Euclides (c. 325 - c. 265 a. C), Arquimedes (287 - 212 a. C) e Apolônio (262 - 190 a. C) a Matemática deixou de ser intuitiva e empírica e passou a ser estruturada em torno de axiomas, teoremas e definições. A partir destes matemáticos, a Geometria Euclidiana desenvolveu-se extensamente. Uma nova abordagem surgiu na Renascença com o advento de coordenadas cartesianas. Esta outra abordagem é apresentada no Ensino Médio e chamada Geometria Analítica - aritmetização da Geometria Euclidiana. Geralmente tal disciplina é ministrada no 3^o ano. A proposta deste trabalho é apresentar um roteiro para uma Geometria Analítica Vetorial para o Ensino Médio, utilizando os conceitos aprendidos com a disciplina de Álgebra Linear. Com vetores podemos trabalhar as medidas de comprimento, de ângulo e de área de forma mais simples. Trabalharemos apenas com vetores do $\mathbb{R}^2$.

Palavras-chave: Geometria Analítica Vetorial. Álgebra Linear. Produto interno. Matrizes.

Abstract

With Pythagoras (560-500 BC), Euclid (c 325 - c 265 BC), Archimedes (287-212 BC) and Apollonius (262 - 190 BC), mathematics ceased to be intuitive and empirical and became Structured around axioms, theorems and definitions. From these mathematicians, Euclidean Geometry has developed widely. A new approach emerged in the Renaissance with the Advent of Cartesian coordinates. This other approach is presented in High School and called Analytical Geometry - Arithmetization of Euclidean Geometry. Usually such discipline is given in the 3rd year. The proposal of this work is to present a script for a Analytical Geometry Model for High School, using the concepts learned with the discipline of Linear Algebra. With vectors it becames easyer to deal with length, angle and area in a simpler way. In this work we will consider only vectors in $\mathbb{R}^2$.

Keywords: Vectorial Analytical Geometry. Linear Algebra. Internal product. Matrices.

Lista de ilustrações

Lista de símbolos

Λ	Lambda;
$\in$	Pertence;
$<$	Menor;
$>$	Maior;
$\leq$	Menor ou igual;
$\geq$	Maior ou igual;
$\neq$	Diferente;
θ	Letra grega teta;
η	Letra grega eta;
$\perp$	Ortogonal ou perpendicular;
$\parallel$	Paralelismo;
$\overrightarrow{v}^{\perp}$	Vetor rotacionado em $\frac{\pi}{2}$ (sentido horário ou anti-horário, depende do contexto);
$A(x,y)$	Ponto A de coordenadas x e y;
AB	Segmento de reta com pontos extremos A e B;
$\overline{AB}$	Comprimento do segmento de reta com extremos A e B;
$\overrightarrow{AB}$	Segmento orientado com pontos extremos A e B;
$\overrightarrow{v}$	Vetor $\overrightarrow{v}$;
S_CD	Semirreta com pontos C e D.

Sumário

Introdução

Este trabalho é direcionado ao professor de Matemática que lida com conteúdos do Ensino Básico.

Ele tem o propósito de elaborar um Plano de ensino para a disciplina de Geometria Analítica ministrada, em geral, no Ensino Médio. A diferença fica no tratamento teórico. Enquanto o desenvolvimento desta disciplina nos textos disponibilizados às escolas tem um tratamento "pontual", a nossa proposta está fundamentada em vetores, daí o título *Geometria Analítica Vetorial*.

Entendemos que o tratamento vetorial simplifica a transposição dos conteúdos geométricos já estudados anteriormente pelo aluno para um estudo destes mesmos conceitos com tratamento algébrico. Aqui distinguimos o plano euclidiano do seu modelo aritmético $\mathbb{R}^2$. Vetores, elementos de $\mathbb{R}^2$, serão representados no plano euclidiano por segmentos orientados. Estabelecida esta relação, Capítulo 1, introduzimos duas ferramentas, produto interno e determinante, que possibilitarão estudar todas as medidas usuais da geometria plana: comprimento; ângulo; área. Feito isto, completamos a proposta estudando as duas curvas clássicas do plano, retas e circunferências nos Capítulos 2 e 4, respectivamente.

Acreditamos que tal tratamento trará ganho aos alunos. Primeiro na Física que sempre aborda muitas teorias utilizando o conceito de vetor. Depois na Matemática. Esta relação entre Aritmética e Geometria com tratamento vetorial possibilita ao aluno expressar mais facilmente seu raciocínio dedutivo, fugindo de fórmulas memorizadas.

Não nos detemos em listas de exercícios propostos, pois os exercícios que constam nos livros textos do Ensino Médio são passíveis de resoluções com tratamento vetorial, são abundantes. É suficiente o professor reproduzí-los com poucas adaptações de linguagem.

1 Vetores e Segmentos Orientados

René Descartes (1596 - 1650), em *Regras para a direção do espírito* (1628) anunciava o projeto para a criação de uma Matemática Universal. Ele tinha como objetivo utilizar a geometria para resolver problemas de construção. Na resolução de equações quadráticas com suas construções geométricas, Descartes queria aplicar a álgebra para resolver problemas geométricos. Com esse intuito, ele introduziu um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas, surge então o plano cartesiano.

Neste capítulo estabeleceremos a relação entre vetores (objetos algébricos), com segmentos orientados (objetos geométricos). Transporemos para o plano euclidiano as operações de adição de vetores e de produto de um vetor por um escalar. Aqui escalar significará um número real.

1.1 O plano cartesiano

Os axiomas da Geometria Plana permitem estabelecer uma correspondência bijetiva entre os pontos de uma reta r e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Para isso escolhemos um ponto O que será chamado de origem, para corresponder ao número zero, e escolhemos um ponto U da reta r para corresponder ao número 1. Escolhemos o lado de O que contém U para representar os números positivos e o outro lado para representar os números negativos. Para esta construção, ver [Figura 1]. Assim, com esta identificação, cada número real estará representado por um ponto na reta.

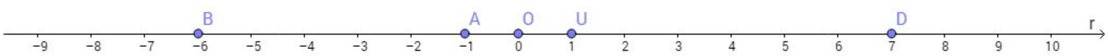

Figura 1 – Reta r

Para representar os pontos do plano euclidiano, consideramos duas retas numéricas perpendiculares que se intersetam em um ponto, geralmente representado por O denominado origem do plano cartesiano. As retas serão chamadas de eixos. Podemos estabelecer uma bijeção entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais, para isso tomamos um ponto P, baixamos duas perpendiculares a partir de P até os eixos, obtendo dois números reais x e y, denominadas coordenadas do ponto, onde x será denotado abscissa e y ordenada. Isto será indicado por $P(x, y)$. Daí, obtemos o sistema de coordenadas cartesianas XOY.

Vemos, na Figura 2, um exemplo de um ponto onde a primeira coordenada incide no eixo horizontal ox e a segunda coordenada incide no eixo vertical oy.

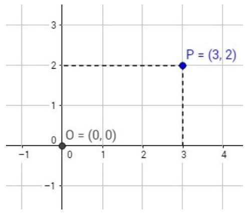

Figura 2 – Ponto P com suas coordenadas

Uma representação do sistema de coordenadas cartesianas:

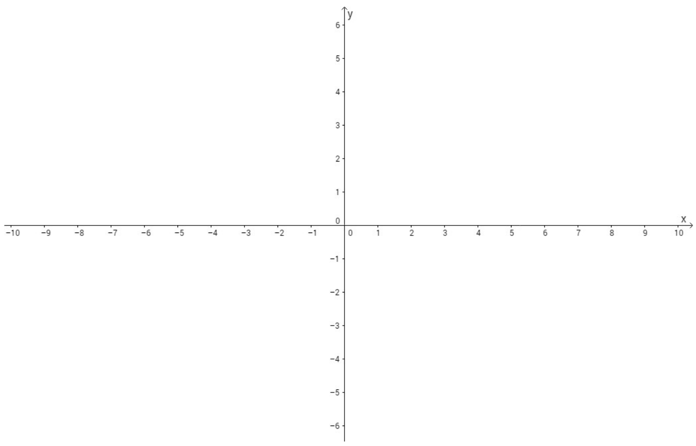

Figura 3 – Plano cartesiano

1.2 Vetores

Aqui, vetor significará um elemento do conjunto dos pares ordenados de números reais, ou seja, um elemento do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Um vetor será indicado por uma letra minúscula, tais como $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}$, etc.

Define-se duas operações com vetores:

1. Adição de dois vetores;

2. Produto de um vetor por um escalar.

Estas operações são definidas, respectivamente, da seguinte maneira: dados os vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e o escalar a, define-se:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ a \cdot \overrightarrow{u} &= (a \cdot u_1, a \cdot u_2) \end{cases}$$

Proposição 1.2.1 *Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores. A adição de vetores possui as seguintes propriedades.*

i) $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$. *(associatividade)*

ii) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$. *(comutatividade)*

iii) Existe um único vetor $\overrightarrow{o}$, *tal que* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{o} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$. *(vetor neutro)*

iv) Para cada $\overrightarrow{u}$ *existe um único vetor* $\overrightarrow{-u}$, *tal que* $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{-u}) = \overrightarrow{o}$. *(inverso aditivo)*

Demonstração Faremos apenas as demonstrações de duas propriedades.

(i) Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$, onde u_i, v_i, $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= (u_1, u_2) + ([v_1 + w_1], [v_2 + w_2]) \\
&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2]) \\
&= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2) \\
&= ([u_1 + v_1], [u_2 + v_2]) + (w_1, w_2) \\
&= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) \\
&= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}.
\end{aligned}$$

(ii) Com as mesmas coordenadas de (i):

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\
&= (v_1 + u_1, v_2 + u_2) \\
&= \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.2 *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores e a e b escalares. O produto de vetor por escalar possui as seguintes propriedades.*

i) $a \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow a = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$.

ii) $a \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a \cdot \overrightarrow{u} + a \cdot \overrightarrow{v}$. *(distributividade em relação à adição de vetores)*

iii) $(a + b) \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{u}$. *(distributividade em relação à adição de escalares)*

iv) $a \cdot (b \cdot \overrightarrow{u}) = (a \cdot b) \cdot \overrightarrow{u}$. *(Associatividade em relação ao produto de escalares)*

v) $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$. *(Elemento neutro no produto)*

Demonstração Faremos a demonstração de duas propriedades, as outras seguem facilmente.

(i) Sendo $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, se

$$a = 0 \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{u} = 0 \cdot (u_1, u_2) = (0 \cdot u_1, 0 \cdot u_2) = (0, 0) = \overrightarrow{o}.$$

Se

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot (0, 0) = (a \cdot 0, a \cdot 0) = (0, 0).$$

(ii) Sendo $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, temos

$$\begin{aligned} a \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \quad &= a \cdot (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (a \cdot (u_1 + v_1), a \cdot (u_2 + v_2)) \\ &= (a \cdot u_1 + a \cdot v_1, a \cdot u_2 + a \cdot v_2) \\ &= (a \cdot u_1, a \cdot v_1) + (a \cdot u_2, a \cdot v_2) \\ &= a \cdot \overrightarrow{u} + a \cdot \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

■

1.3 Segmentos orientados

Seja AB um segmento de reta do plano cartesiano, isto é, o conjunto de todos os pontos que estão entre[1] A e B unido com $\{A, B\}$. Orientar este segmento é escolher um dos seus pontos extremos como sendo o primeiro e o outro ponto extremo como o último. Feito isto, transmitimos esta informação por $\overrightarrow{AB}$. Um caso especial é o segmento orientado $\overrightarrow{AA}$. Este segmento reduz-se ao conjunto com um único ponto $\{A\}$. Relacionamos segmentos orientados e vetores da seguinte forma.

Definição 1.3.1 *Sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pontos do plano euclidiano e $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1)$ um vetor. Diremos que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor $\overrightarrow{v}$ se*

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & b_1 & - & a_1 \\ y_1 & = & b_2 & - & a_2 \end{array} \right. .$$

Exemplo 1.3.1 Escolhidos os pontos $P(4, 5)$ e $Q(3, 2)$, o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\overrightarrow{u} = (-1, -3)$, pois

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -1 & = & 3 & - & 4 \\ -3 & = & 2 & - & 5 \end{array} \right. .$$

◇

Quando afirmamos que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor $\overrightarrow{v}$, A será o ponto inicial e B o ponto final. Como vimos, podemos tomar outros representantes para o mesmo

[1] ESTÁ ENTRE é um termo indefinido nos axiomas da Geometria Euclidiana.

vetor $\overrightarrow{v}$, basta escolher qualquer ponto inicial ou escolher qualquer ponto final, e determinar as coordenadas do outro extremo do segmento de modo que as condições postas na Definição 1.3.1 sejam satisfeitas.

Exemplo 1.3.2 Sejam $P(3,5)$ e $v = (2,4)$. Existe apenas um ponto $Q(x_2, y_2)$ tal que $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\overrightarrow{v}$. Para calcular as coordenadas de Q, usaremos a Definição 1.3.1.

$$\begin{cases} 2 &= x_2 - 3 \\ 4 &= y_2 - 5 \end{cases}$$

O que resulta em $x_2 = 5$ e $y_2 = 9$, logo $Q(5,9)$. ◇

Exemplo 1.3.3 Sejam $Q(-2,3)$ e $v = (2,4)$. Existe apenas um ponto $P(x_1, y_1)$ tal que $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\overrightarrow{v}$. Para calcular as coordenadas de P, temos

$$\begin{cases} 2 &= -2 - x_1 \\ 4 &= 3 - y_1 \end{cases}.$$

O que resulta em $x_1 = -4$ e $y_1 = -1$, logo $P(-4,-1)$. ◇

Exemplo 1.3.4 Os segmentos orientados a seguir representam o mesmo vetor, qual seja $\overrightarrow{v} = (2,2)$. ◇

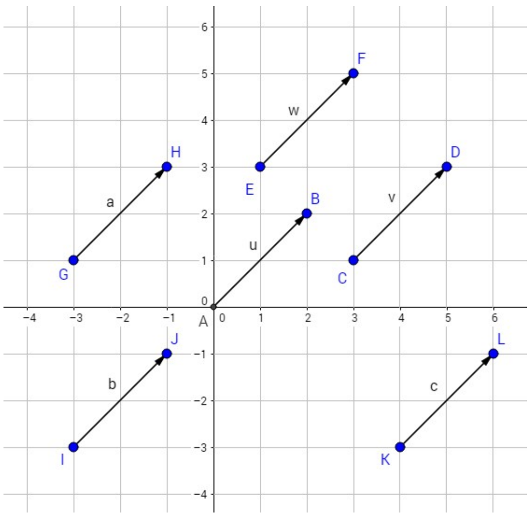

Figura 4 – Segmentos orientados equivalentes

Axioma 1.3.1 (Transporte de segmento) *Fixado um segmento arbitrário AB, para qualquer segmento CD, existe um único ponto E pertencente à semirreta $S_C D$ tal que $\overline{AB} = \overline{CE}$.*

Observação 1.3.1 *No caso de transporte paralelo de segmento, consideramos o segmento CD, citado no axioma anterior, paralelo ao segmento AB.*

Uma reta que contém os pontos A e B é chamada reta suporte do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. A notação $\overrightarrow{AA}$ representa o vetor nulo $\overrightarrow{o}$.

Os representantes do mesmo vetor são obtidos por transporte paralelo de um único representante. Portanto, duas retas suportes de duas representações de um mesmo vetor ou coincidem ou são paralelas.

Observamos um fato geométrico sobre representação de vetores. A representação canônica de $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1)$ é o segmento orientado $\overrightarrow{OV}$, onde $O(0,0)$ e $V(x_1, y_1)$.

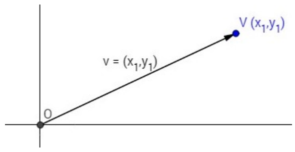

Figura 5 – Segmento orientado com origem O

1.4 Representações geométricas das operações

Representaremos algumas operações com vetores através de segmentos orientados que representam os mesmos.

Na Figura 6 temos a adição de dois vetores, onde $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

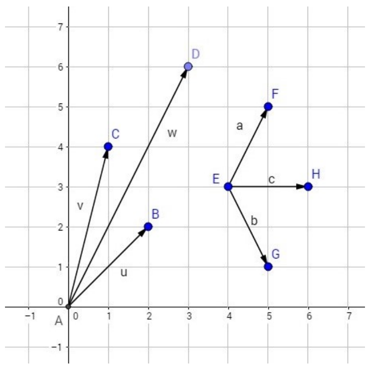

Figura 6 – Adição de dois vetores

Na Figura 7 temos o produto de um escalar por um vetor, sendo os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{DF}$ representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{a}$, respectivamente, teremos: $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{w}$.

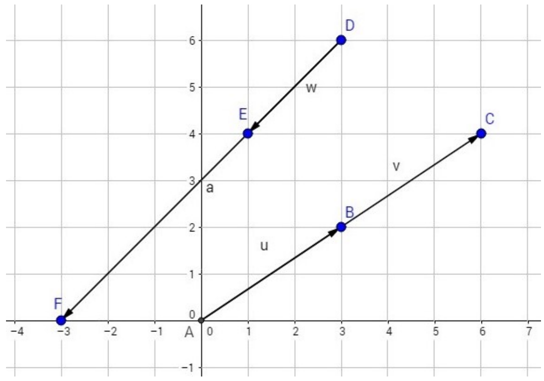

Figura 7 – Produto de vetor por escalar

Na Figura 8, representamos a adic c ao de três vetores, onde

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

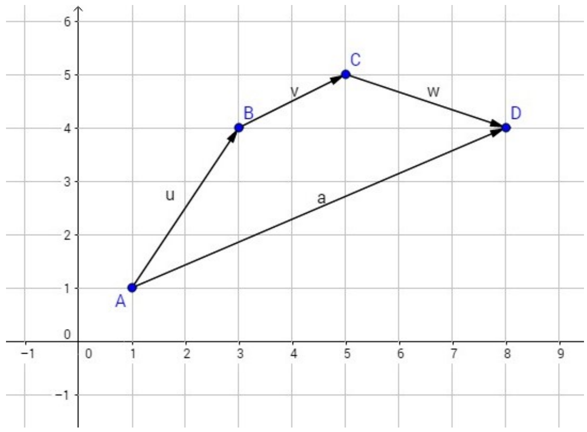

Figura 8 – Adição de três vetores

Na Figura 9, temos o produto de um vetor pelo escalar neutro, onde $\overrightarrow{v} = 1\overrightarrow{u}$.

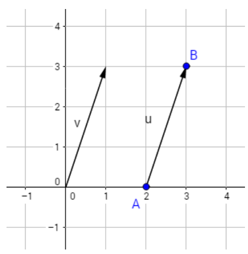

Figura 9 – Produto de um vetor pelo escalar neutro

Na Figura 10, calculamos o produto do vetor $\overrightarrow{u}$ por um escalar negativo e por um escalar não-inteiro, onde $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

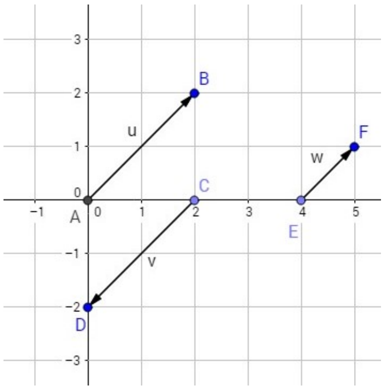

Figura 10 – Produto de um vetor por escalar negativo e não-inteiro

Na Figura 11, temos o produto do vetor $\overrightarrow{u}$ pelo escalar zero, resultando no vetor nulo $\overrightarrow{o}$, representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AA}$.

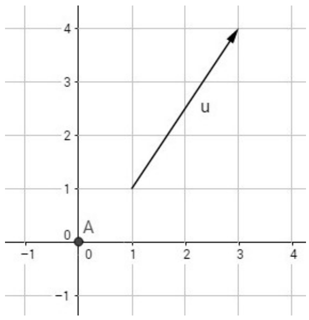

Figura 11 – Produto de vetor por escalar zero

Na Figura 12, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$ temos uma ilustração da associatividade em relação ao produto de escalares.

$$\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{v} = 3 \cdot (2\overrightarrow{u}) = (3 \cdot 2)\overrightarrow{u}.$$

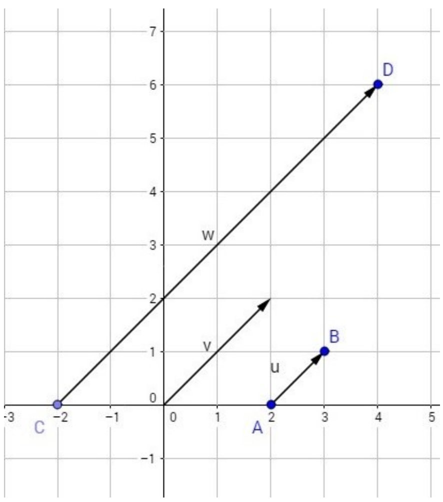

Figura 12 – Associatividade em relação ao produto de escalares

Na Figura 13, os segmentos orientados $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DG}$ representam os vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{b}$. Sejam $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{u}$. Temos a distributividade em relação à soma de escalares, onde:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} = (3+2)\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{u}.$$

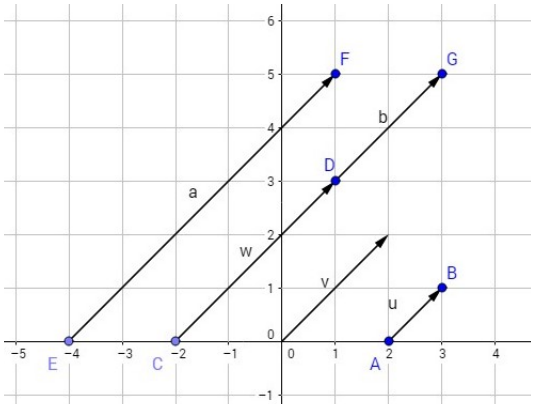

Figura 13 – Distributividade em relação à adição de escalares

Na Figura 14,

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}.$$

Assim como

$$\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{w} = 2(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

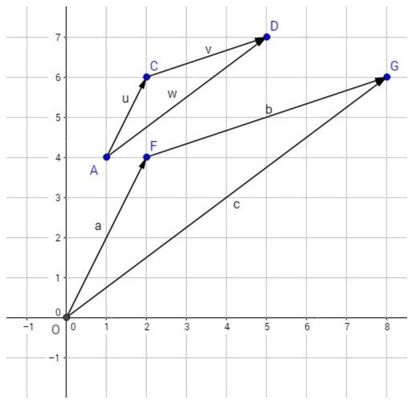

Figura 14 – Distributividade em relação à adição de vetores

1.5 Condição de alinhamento de três pontos

Diz-se que três pontos A, B e C do plano euclidiano estão alinhados, ou são colineares se, e somente se, pertencerem a uma mesma reta. Com vetores podemos facilmente determinar quando três pontos são colineares. Para verificarmos se os três pontos estão alinhados, verificamos se os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, são colineares, isto é, existe um escalar a, tal que $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v}$.

Exemplo 1.5.1 Considerando os pontos $A(2,3)$, $B(5,7)$ e $C(11,15)$, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor $\overrightarrow{v} = (3,4)$ e $\overrightarrow{BC}$ representa o vetor $\overrightarrow{w} = (6,8)$. Como $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{v}$, os pontos A, B e C estão alinhados. ◇

Exemplo 1.5.2 Na Figura 15, podemos perceber geometricamente que os pontos A, B e C estão alinhados. Podemos verificar algebricamente determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. Observamos que $\overrightarrow{v} = (2,1)$, $\overrightarrow{w} = (4,2)$ e $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{v}$.

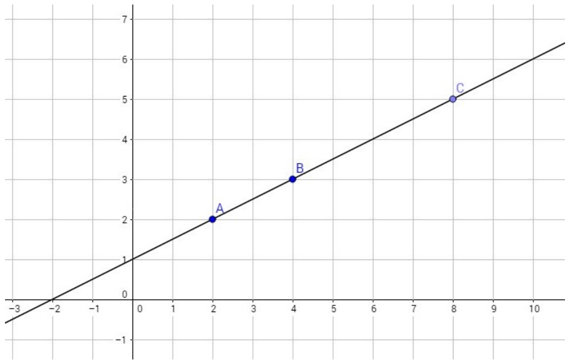

Figura 15 – Alinhamento de três pontos

◇

Exemplo 1.5.3 Considerando os pontos $A(2,3)$, $B(5,7)$ e $C(8,10)$. Os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, são representantes dos vetores $\overrightarrow{v} = (3,4)$ e $\overrightarrow{w} = (3,3)$, respectivamente. Como, para todo escalar a, $\overrightarrow{w} \neq a\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} \neq a\overrightarrow{w}$, então os três pontos A, B e C não estão alinhados.◇

1.6 Ponto médio de um segmento de reta

Definiremos ponto médio utilizando o conceito de vetor.

Definição 1.6.1 *O ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$ é o ponto $M(x_m, y_m)$ tal que os segmentos orientados $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{v}$.*

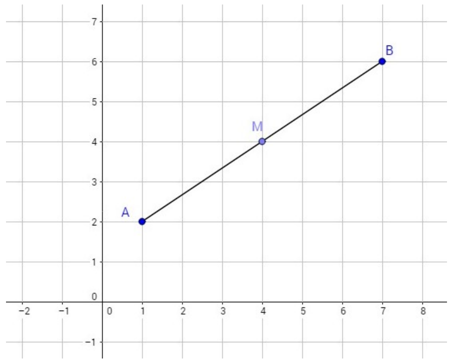

Figura 16 – Ponto médio de segmento

Exemplo 1.6.1 Calculemos o ponto médio do segmento AB onde $A(2,-3)$ e $B(3,1)$. Seja $M(x_m, y_m)$ um ponto tal que $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{v}$. Sendo assim, considerando os segmentos orientados $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ e a definição de representação de vetor, temos

$$\begin{cases} x_m - 2 = 3 - x_m \\ y_m + 3 = 1 - y_m \end{cases}.$$

Portanto $M\left(\dfrac{5}{2}, -1\right)$. $\diamond$

Proposição 1.6.1 *O ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$, onde $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ tem coordenadas $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.*

Demonstração Seja $M(x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento AB. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_m - x_1, y_m - y_1)$ os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AM}$, respectivamente. Por definição de ponto médio temos $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{v}$. Escrevendo esta igualdade em termos de coordenadas temos

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (2x_m - 2x_1, 2y_m - 2y_1).$$

Segue que

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 2x_m - 2x_1 \\ y_2 - y_1 = 2y_m - 2y_2 \end{cases}; \longrightarrow \qquad \begin{cases} x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \\ y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

Portanto $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ■

Considere os pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$, tal que $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$. Se desejarmos dividir o segmento de reta PQ em três partes iguais, devemos determinar pontos $C(x_c, y_c)$ e $D(x_d, y_d)$, de modo que os segmentos orientados $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DB}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{v}$. Considerando $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{w}$, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} v_1 = 3x_c - 3x_p \\ v_2 = 3y_c - 3y_p \end{cases}; \qquad \begin{cases} v_1 = 3x_d - 3x_c \\ v_2 = 3y_d - 3y_c \end{cases}; \qquad \begin{cases} v_1 = 3x_q - 3x_d \\ v_2 = 3y_q - 3y_d \end{cases}.$$

Para determinarmos as coordenadas de C e D, basta resolvermos dois desses três sistemas.

Exemplo 1.6.2 Determinemos os dois pontos que dividem o segmento PQ, na Figura 17 em três partes iguais.

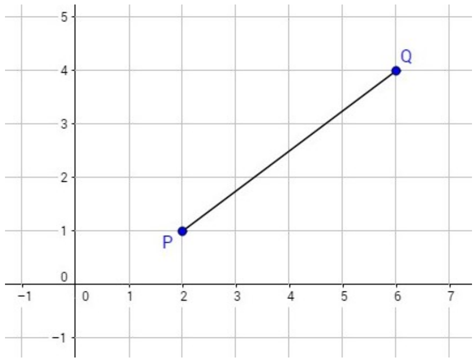

Figura 17 – Segmento PQ

Resolução Sejam $C(x_c, y_c)$ e $D(x_d, y_d)$ estes pontos. Considerando $\overrightarrow{PQ}$ um representante do vetor $\vec{v} = (4,3)$ e sendo $\vec{v} = 3\vec{w}$, temos:

$$\begin{cases} 4 &= 3 \cdot x_c - 3 \cdot 2 \\ 3 &= 3 \cdot y_c - 3 \cdot 1 \end{cases}.$$

Obtemos $x_c = \frac{10}{3}$ e $y_c = 2$, logo $C\left(\frac{10}{3}, 2\right)$. De

$$\begin{cases} 4 &= 3 \cdot x_d - 3 \cdot \frac{10}{3} \\ 3 &= 3 \cdot y_d - 3 \cdot 2 \end{cases}$$

obtemos $x_d = \frac{14}{3}$ e $y_d = 3$, logo $D\left(\frac{14}{3}, 3\right)$. O segmento PQ será dividido como na Figura 18:

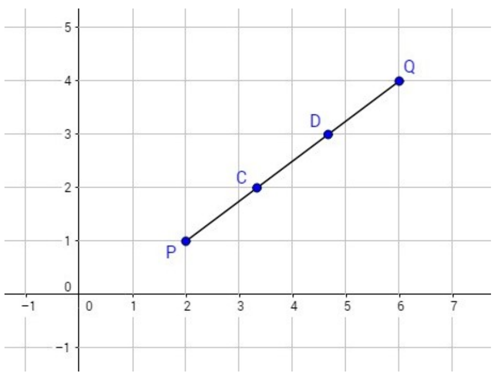

Figura 18 – Segmento PQ dividido em três partes iguais

◇

1.6.1 Ponto médio de um segmento pela Geometria Analítica Pontual

Consideramos um segmento de reta AB com pontos extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e ponto médio $M(x_M, y_M)$, como na Figura 19:

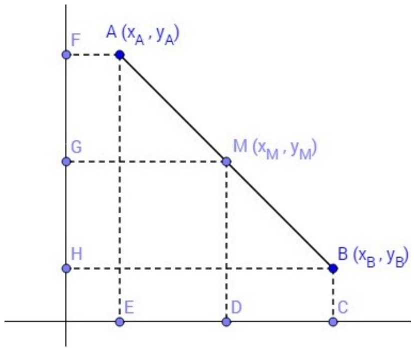

Figura 19 – Ponto médio do segmento AB

Pelo Teorema de Tales, temos

$$AM = MB \Rightarrow ED = DC \text{ e } HG = GF \Rightarrow \cdots \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

. Portanto, a abscissa do ponto médio de um segmento será a média aritmética das abscissas dos extremos e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas dos extremos.

Exemplo 1.6.3 *O ponto médio do segmento AB da Figura 20 será*

$$M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (4, 3).$$

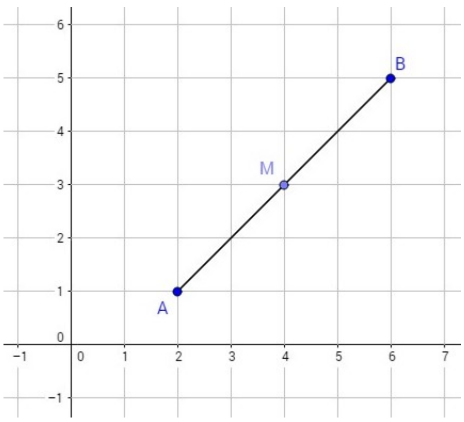

Figura 20 – Ponto médio

2 Medindo objetos geométricos

Neste capítulo veremos como podemos utilizar o conceito de vetor para o cálculo de comprimentos, medida de ângulos e áreas. Para isto, definiremos o produto interno e o determinante de matrizes 2×2.

2.1 Produto interno

O conceito de produto interno é crucial para o desenvolvimento da proposta. A partir dele podemos falar sobre norma de vetor, medida de ângulo, projeções, área, equações da reta e da circunferência, distâncias e posições relativas, pois são utilizados nos cálculos.

Definição 2.1.1 *Sejam* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$*, vetores. A aplicação*

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

é chamada produto interno canônico.

Produto interno de vetores pode ser positivo, negativo ou zero.

Exemplo 2.1.1 Consideremos os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 5)$, $\overrightarrow{v} = (3, -2)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 3)$. Calculemos os produtos internos entre estes vetores.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = -4; \qquad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = 19; \qquad \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0. \qquad \diamond$$

Listemos algumas propriedades básicas do produto interno.

Proposição 2.1.1 *Sejam* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *vetores e* a *um escalar. O produto interno possui as seguintes propriedades.*

(i) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geq 0$ *e* $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$. *(positivo definido)*

(ii) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$. *(comutatividade)*

(iii) $\langle \overrightarrow{u}, (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$. *(distributividade)*

(iv) $\langle (a\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle = a \langle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \rangle = \langle \overrightarrow{u}, (a\overrightarrow{v}) \rangle$. *(associatividade)*

Demonstração (i) Sendo $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ um vetor não-nulo, uma de suas coordenadas não é zero. Como quadrados de números positivos é positivo e adição de numeros positivos é positivo, segue que

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle (u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle = u_1^2 + u_2^2 > 0.$$

Seja $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$. Então

$$0 = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle (u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle = u_1^2 + u_2^2,$$

se, e somente se, $u_1 = 0 = u_2$, ou equivalentemente, $\overrightarrow{u} = (0, 0)$.

(ii) Sendo $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \\ &= v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 \\ &= \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle. \end{aligned}$$

(iii) Seja $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$ e sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores como definidos anteriormente. Por definição de adição de vetores temos $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Agora,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}, (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \rangle &= \langle (u_1, u_2), (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \rangle \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_2 + u_2w_2) \\ &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle. \end{aligned}$$

(iv) Sejam a um escalar e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como antes. Sabemos que $a\overrightarrow{u} = (au_1, au_2)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \langle (a\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle &= \langle (au_1, au_2), (v_1, v_2) \rangle \\ &= au_1v_1 + au_2v_2 \\ &= a(u_1v_1 + u_2v_2) \\ &= a\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \end{aligned}$$

A segunda igualdade segue da comutavidade do produto interno e desta última propriedade. ■

2.2 Norma de vetor e comprimento de segmento

Com a definição de produto interno podemos iniciar o estudo de medida de vários objetos geométricos. O primeiro será comprimento de segmento.

Definição 2.2.1 *A norma é a função* $\| \ \| : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty), \quad \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}.$

Usualmente diz-se que $\|\overrightarrow{v}\|$ é a norma do vetor $\overrightarrow{v}$. A norma de um vetor está bem definida pois o produto interno $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \geq 0$, portanto podemos determinar sua raiz quadrada positiva. Em termos de coordenadas, se $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ temos a expressão

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Exemplo 2.2.1 Calculemos as normas dos vetores $\overrightarrow{u} = (3,4)$ e $\overrightarrow{v} = (-1,-4)$:

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5; \qquad \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2} = \sqrt{17}. \qquad \diamond$$

Vejamos a relação entre a norma de vetor e o comprimento do segmento orientado que representa o vetor. Sejam $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $\overrightarrow{PQ}$ é um segmento orientado que representa o vetor, onde $P(p_1,p_2)$ e $Q(q_1,q_2)$. Por definição de representante temos

$$\begin{cases} v_1 = q_1 - p_1 \\ v_2 = q_2 - p_2 \end{cases}.$$

Portanto,

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2} = \overline{PQ},$$

onde $\overline{PQ}$ indica o comprimento do segmento PQ que é obtido pelo Teorema de Pitágoras. Vejamos. Na Figura 17, os pontos $P(p_1,p_2)$, $Q(p_1+v_1,p_2+v_2)$ e $R(p_1+v_1,p_2)$ formam um triângulo retângulo. Tomando os segmentos PR, RQ e PQ, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2} = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = \sqrt{\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle}.$$

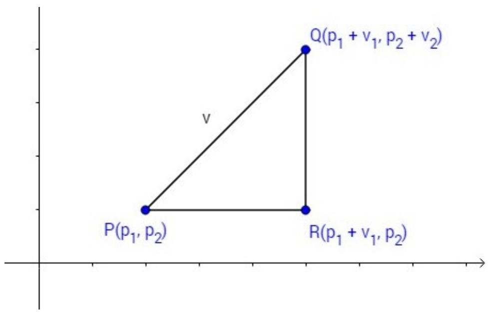

Figura 21 – Triângulo PQR

Exemplo 2.2.2 Calculemos o comprimento do segmento PQ, onde $P(1,2)$ e $Q(4,6)$.

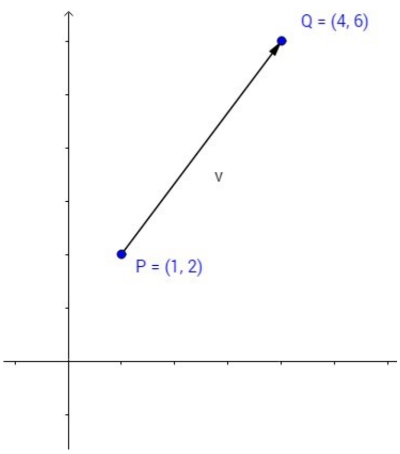

Figura 22 – Comprimento de segmento

O segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4)$. Logo, o comprimento (ou a distância entre P e Q) vale $\overline{PQ} = \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. $\diamond$

Teorema 2.2.1 *Seja* $\|\ \ \| : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ *a função norma. Para quaisquer vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *e qualquer escalar* a *as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) $\|\overrightarrow{u}\| \geq 0$ *e* $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$. *(positiva definida)*

(ii) $\|a \cdot \overrightarrow{u}\| = |a| \cdot \|\overrightarrow{u}\|$

(iii) $\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \pm 2 \cdot \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2$.

Demonstração As provas dos itens (i) e (ii) serão omitidas.

(iii) Por definição de norma temos $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \langle\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\rangle$. Desenvolvendo o membro direito da igualdade utilizando a distributividade e comutatividade do produto interno temos

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\rangle + \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\rangle + \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2 \cdot \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2.
\end{aligned}$$

Idem para $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$. ■

Observação 2.2.1 *Para determinar o comprimento de um segmento* PQ, *calculamos a distância entre os pontos* $P(x_p, y_p)$ *e* $Q(x_q, y_q)$ *dada por*

$$d_{P,Q} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}.$$

2.3 Medida de ângulo

A próxima medida a ser definida é a medida de ângulo. Para definir esta medida utilizando vetores necessitamos de uma importante desigualdade, chamada desigualdade de Schwarz. Numa primeira apresentação a demonstração pode ser omitida em sala de aula.

Teorema 2.3.1 (Desigualdade de Schwarz) *Se* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *são dois vetores não nulos, então*

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

Demonstração Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ dois vetores. Podemos ver a desigualdade apresentada do teorema na forma $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$, assim, se um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ for o vetor nulo, ambos os lados da desigualdade serão iguais a zero, ocorrendo assim a igualdade. Supondo que $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ são, ambos, não-nulos. Pela Proposição 2.2.1, p. 30, para quaisquer escalar a e vetor $\overrightarrow{v}$, temos $\langle a\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, a\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\rangle \geq 0$. A igualdade ocorre se os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem colineares. Desenvolvendo este produto interno:

$$\langle a\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, a\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\rangle = a^2\|v\|^2 - 2a\langle v, w\rangle + \|\overrightarrow{w}\|^2 \geq 0.$$

Obtemos assim um polinômio de grau 2 na variável a. Como seu valor não se torna negativo, então o discriminante $\delta \leq 0$, calculando-o, obtemos:

$$\delta = 4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0.$$

Daí segue que $\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$, que é equivalente à desigualdade $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. Por uma fácil manipulação algébrica chegamos ao resultado ■

A desigualdade de Schwarz permite definir o conceito de ângulo entre vetores. Como

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$cos\,\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}.$$

Este θ é chamado de medida de ângulo entre os vetores e fica estabelecida uma relação entre produto interno, medida de ângulo e comprimento, qual seja

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|cos\,\theta.$$

A medida do ângulo entre dois vetores corresponde à medida do ângulo determinado por segmentos orientados que representam os vetores que possuem o mesmo ponto inicial.

Exemplo 2.3.1 Na Figura 20, tomando os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ como representantes dos vetores $\overrightarrow{u} = (3, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (5, 0)$, respectivamente, podemos verificar que a medida do ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é igual a $\frac{\pi}{4}$, pois

$$15 = \langle v, w\rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\,\theta = 5\sqrt{18}\cos\,\theta.$$

Por simplificação, chegamos ao valor $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como existe um único $\theta \in [0, \pi]$ cujo cosseno é este valor, segue que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

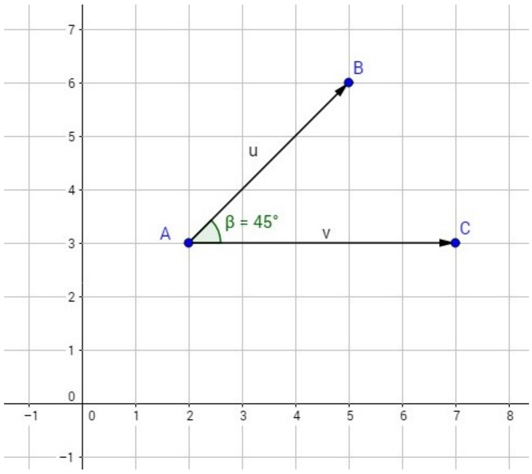

Figura 23 – Ângulo entre dois vetores

Geometricamente podemos verificar que a medida do ângulo entre os segmentos orientados também vale $\frac{\pi}{4}$. $\diamond$

Exemplo 2.3.2 Considere os vetores $\overrightarrow{u} = (3,2)$ e $\overrightarrow{v} = (-2,4)$, calculemos a medida do ângulo entre eles.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{(3,2)\cdot(-2,4)}{\|(3,2),(-2,4)\|} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Portanto, $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$. $\diamond$

Exemplo 2.3.3 Na Figura 24, pela lei dos cossenos vale a igualdade

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

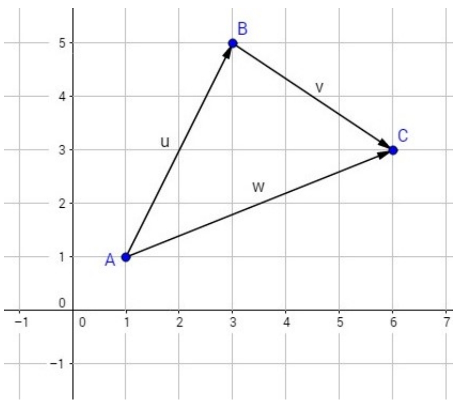

Figura 24 – Norma da adição de vetores não-colineares

Vejamos a Lei dos cossenos verificada vetorialmente para valores de $\theta \in [0,\pi]$.

Considere os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Denote por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ os vetores representados por estes segmentos orientados, respectivamente e seja θ a medida do ângulo entre estes segmentos. Observamos que o segmento orientado $\overrightarrow{CB}$ representa do vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

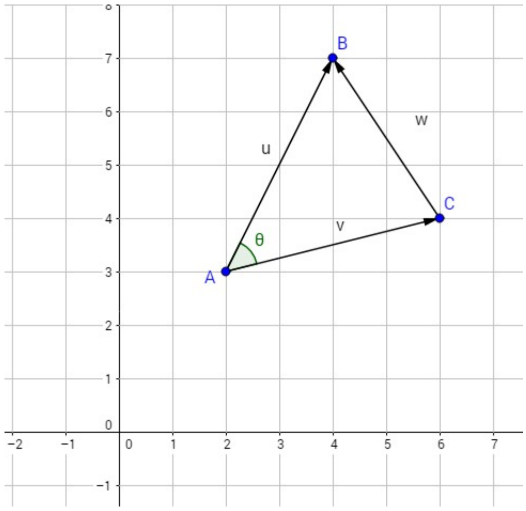

Figura 25 – Lei dos cossenos

Calculemos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\langle u, v\rangle \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

Transpondo esta última igualdade para linguagem de Geometria Euclidiana clássica, se $a = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$, $b = \|\overrightarrow{u}\|$ e $c = \|\overrightarrow{v}\|$ temos a Lei do cosseno relativo ao triângulo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Isto mostra que a medida do ângulo entre dois vetores, calculado algebricamente, coincide com a medida do ângulo entre os segmentos orientados que os representam, medida esta, definida geometricamente.

Definição 2.3.1 *Diz-se que dois vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$ são ortogonais quando a medida do ângulo entre eles é igual a $\frac{\pi}{2}$.*

Proposição 2.3.1 *Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ são ortogonais se, e somente se, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.*

Demonstração Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não nulos. Como sabemos $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\,\cos\theta$. Desde que os vetores são não nulos suas normas são diferentes de 0. Logo

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

(consideramos $\theta \in [0, \pi]$). ∎

O conceito de ortogonalidade para vetores corresponde ao conceito de perpendicularidade para segmentos orientados. Isto é, se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares, então os vetores que eles representam são ortogonais.

Exemplo 2.3.4 Examinemos a Figura 2.3.4.

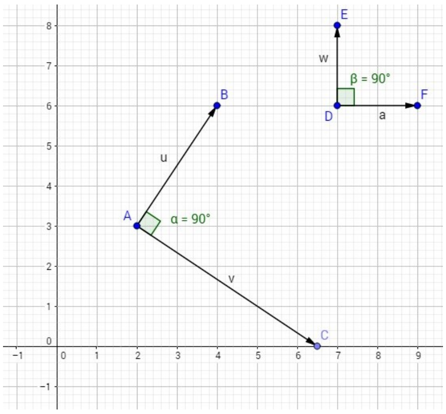

Figura 26 – Vetores ortogonais

Para verificar a perpendicularidade entre os segmentos orientados, calculamos o produto interno dos vetores que eles representam.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle (2, 3), (4.5, -3) \rangle = 9 - 9 = 0.$$

Logo $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Do mesmo modo, $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{a} \rangle = \langle (0, 2), (2, 0) \rangle = 0$. Logo $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{a}$. ◇

Observamos que determinar um vetor ortogonal a uma vetor $v = (v_1, v_2)$ é simples. É suficiente considerar o vetor denotado por $v^\perp$ e definido por $v^\perp = (-v_2, v_1)$.

2.4 Vetor unitário e projeção

Nesta seção veremos como podemos realizar algebricamente uma projeção de um segmento sobre outro. Como sabemos da Geometria Euclidiana, se um segmento PQ faz um ângulo medindo θ com outro segmento PR, o comprimento da projeção ortogonal de PR sobre PQ digamos PS, vale $\overline{PS} = \overline{PR} \cos\theta$.

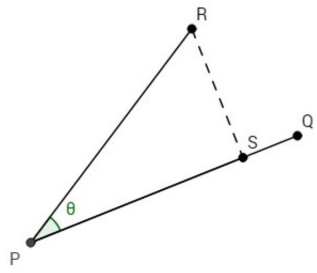

Figura 27 – Projeção ortogonal

Vejamos o cálculo vetorial deste fato. Diz-se que um vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário se $\|\overrightarrow{u}\| = 1$. É fácil descrever vetores unitários. Com um cálculo simples verifica-se que os seguintes vetores são unitários.

$$\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right); \qquad \overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \qquad \overrightarrow{w} = (0, 1).$$

Geralmente, um vetor vetor unitário é da forma $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, onde θ é qualquer real do intervalo $[0, 2\pi]$. Pela identidade fundamental da trigonometria temos

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1.$$

Normalizar um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ é considerar o vetor unitário $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|v\|}\overrightarrow{v}$, ou seja, dividir o vetor $\overrightarrow{v}$ por sua norma para construir um vetor unitário. Esta terminologia justifica-se pois $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, vejamos,

$$\|\overrightarrow{u}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \cdot \|\overrightarrow{v}\| = 1.$$

Exemplo 2.4.1 Determinemos o normalizado do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 7)$.

Resolução Para determinar o normalizado de $\overrightarrow{v}$, calculamos:

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|(3,7)\|} \cdot (3, 7) = \frac{1}{\sqrt{58}} \cdot (3, 7). \qquad \diamond$$

Voltando ao problema de projeção, agora com tratamento vetorial.

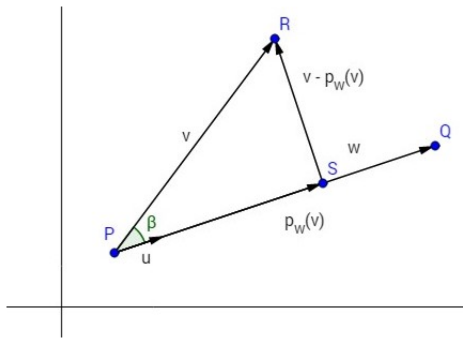

Figura 28 – Projeção ortogonal de vetores

Considere os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PQ}$, respectivamente. Seja $\overrightarrow{u}$ o normalizado de $\overrightarrow{w}$ e $p_w(v)$ o vetor projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$, indicado na Figura 28 pelo segmento orientado $\overrightarrow{PS}$. Nestas condições temos

$$p_w(v) = (\|v\| \cos\theta)\overrightarrow{u} = \|v\|\,\|u\| \cos\theta \overrightarrow{u} = \langle v, u\rangle \overrightarrow{u}.$$

Em resumo, $p_w(v) = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u}$. O segmento orientado $\overrightarrow{SR}$ representa o vetor $\overrightarrow{v} - p_w(v)$, onde $p_w(v) \perp \overrightarrow{v} - p_w(v)$ ou ainda $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v} - p_w(v)$.

Exemplo 2.4.2 Sendo $\overrightarrow{w}$ o normalizado de $\overrightarrow{v}$, determinar os vetores $p_w(u)$ e $\overrightarrow{u} - p_w(u)$ na Figura 29.

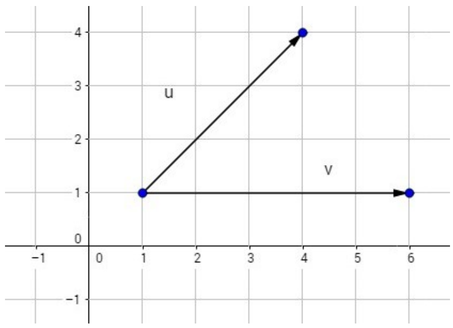

Figura 29 – Projeção ortogonal

Resolução Temos $\overrightarrow{u} = (3, 3)$, $\overrightarrow{v} = (5, 0)$ e, portanto, $\overrightarrow{w} = (1, 0)$. Calculando $p_w(u)$:

$$p_w(u) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{w} = \langle (3, 3), (1, 0)\rangle (1, 0) = (3, 0).$$

Calculando agora $\overrightarrow{u} - p_w(u)$:

$$\overrightarrow{u} - p_w(u) = (3, 3) - (3, 0) = (0, 3). \qquad \diamond$$

2.5 Matrizes quadradas de ordem 2

Como utilizaremos os conceitos de matrizes e determinantes para o cálculo de área, faremos uma breve apresentação sobre eles. Por simplicidade, apresentaremos apenas matrizes quadradas de ordem 2, pois são estas que utilizaremos na teoria a seguir. Além disto, em algumas escolas a Teoria de matrizes pode não ter sido ainda apresentada quando do estudo de Geometria Analítica e um desenvolvimento extensivo desta teoria não seria conveniente.

Uma matriz de ordem 2×2 é uma sequência finita de números reais, $[a_{ij}]$, $1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 2$, indicada por $[A]$. Muitas vezes escrevemos $[A] = [a_{ij}]$, onde o escalar a_{ij} representa a ij - ésima entrada da matriz. Uma matriz de ordem 2×2 também é chamada matriz quadrada de ordem 2.

Exemplo 2.5.1 A matriz a seguir, é uma matriz quadrada de ordem 2,

$$[A] = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \diamond$$

Nas matrizes quadradas de ordem 2 podemos adicioná-las e calcular o produto por um escalar. A definição destas operações é como segue.

1. *Adição de matrizes*: Se

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

então

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

2. *Produto por escalar*: Se r é um escalar, então

$$r[A] = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{bmatrix}$$

Um modo conveniente para indicar matrizes é utilizar uma notação que envolva a notação vetorial. Sejam $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$ dois vetores. Indicaremos por $[A] = [v,\, w]$ a matriz cujas entradas por colunas são as coordenadas dos vetores v_1 e v_2. Mais precisamente,

$$[A] = [v,\, w] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

As coordenadas dos vetores v e w são chamadas colunas da matriz.

A matriz identidade $[Id]$ é a matriz definida por $[Id] = [e_1,\, e_2]$ onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Sendo assim, temos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que com esta notação, as operações de adição de matrizes e produto por escalar podem ser expressas por

$$[u,\, v] + [w,\, z] = [u + w,\, v + z] \qquad \text{e} \qquad r[u,\, v] = [ru,\, rv].$$

2.6 Determinante de uma matriz de ordem 2

Continuamos a utilizar a notação para matrizes como explicado no final da seção anterior: $[A] = [v,\, w]$. O determinante de uma matriz de ordem 2,

$$[A] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix},$$

é o número indicado por $det[A]$ e definido por

$$det[A] = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1.$$

Proposição 2.6.1 *O determinante possui as seguintes propriedades.*

(i) $det[Id] = 1.$

(ii) $det[v,\, v] = 0.$

(iii) $det[v + ru,\, w] = det[v,\, w] + rdet[u,\, w].$

(iv) $det[v,\, w] = -det[w,\, v].$

(v) Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{o}$ *ou* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{o}$*, então* $det[v,\, w] = 0.$

Demonstração (i) Como vimos $[Id] = [e_1,\, e_2]$. Pela definição de determinante temos

$$det[Id] = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

(ii) Dada a matriz $[A] = [v,\, v]$, onde $v = (a, b)$, temos

$$det[A] = det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

(iii) Se $[A] = [v + ru, w]$, onde $v = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $u = (p, q)$, segue que

$$det[v + ru, w] = det \begin{bmatrix} a + rp & c \\ b + rq & d \end{bmatrix} = (ad - bc) + r(pd - qc) = det[v,\, w] + rdet[u, w].$$

(iv) Se $[A] = [v, w]$, onde $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, temos

$$det[v, w] = det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = -det[w,\, v].$$

(v) Se $[A] = [v, w]$, onde $v = (a, b)$ e $w = (0, 0)$, temos

$$det \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0.$$

■

2.7 Área

Um paralelogramo $ABCD$ possui lados opostos paralelos e têm o mesmo comprimento. Sendo assim, os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são representantes do mesmo vetor $\overrightarrow{u}$, pois são equivalentes, e os segmentos orientados $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{v}$.

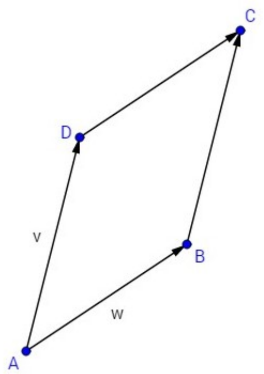

Figura 30 – Paralelogramo $ABCD$

Proposição 2.7.1 *Seja $ABCD$ um paralelogramo. Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$, então a área do paralelogramo é*

$$\textit{área}(ABCD) = |det[v,\, w]|\,.$$

Demonstração Consideremos um paralelogramo $OABC$ qualquer, de vértices $O(0,0)$, $A(a,b)$, $B(a+c,b+d)$ e $C(c,d)$, determinado pelos vetores $\overrightarrow{v} = (c,d)$ e $\overrightarrow{w} = (a,b)$, representados, respectivamente, pelos segmentos orientados $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OA}$. Para o cálculo da área de $OABC$, podemos tomar $\overline{OA}$ como base, para determinar a altura, determinamos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} - p_w(v)$. Sendo $\overrightarrow{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ o normalizado de $\overrightarrow{w}$. Calculemos estes fatores.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} - p_w(v) &= (c,d) - \langle (c,d), \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\rangle \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= (c,d) - \left(\frac{a^2c+abd}{a^2+b^2}, \frac{abc+b^2d}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2c+b^2c-a^2c-abd}{a^2+b^2}, \frac{a^2d+b^2d-abc-b^2d}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{b^2c-abd}{a^2+b^2}, \frac{a^2d-abc}{a^2+b^2}\right).
\end{aligned}$$

Calculando $\|\overrightarrow{w}\|\|\overrightarrow{v} - p_w(v)\|$, temos

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{w}\|\|\overrightarrow{v} - p_w(v)\| &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\frac{b^4c^2 - 2ab^3cd + a^2b^2d^2 + a^4d^2 - 2a^3bcd + a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2)}{a^2+b^2}} \\
&= \sqrt{(bc-ad)^2} \\
&= |bc - ad| \\
&= \left| det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right| \\
&= |det[v, w]|.
\end{aligned}$$

Como o paralelogramo $OABC$ é qualquer, concluímos a demonstração. ■

Exemplo 2.7.1 Para calcular a área do paralelogramo a seguir, determinamos os vetores $\overrightarrow{u} = (2,3)$ e $\overrightarrow{v} = (5,0)$, e depois calculamos

$$|det[u,\, v]| = \left| det \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = 15 \text{ unidades de área.}$$

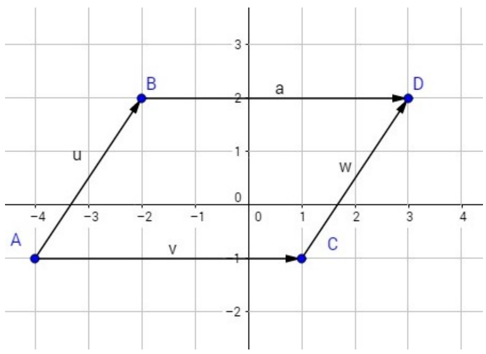

Figura 31 – Paralelogramo

◇

Proposição 2.7.2 *Sendo ABC um triângulo. Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então a área do triângulo é*

$$\textit{área}(ABC) = \frac{1}{2}\left|det[v,\, w]\right|.$$

Demonstração Seja $ABDC$ o paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, onde $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{v}$. Os triângulos ABC e BDC são congruentes pelo caso LLL. Portanto,

$$2\,\acute{a}rea(ABC) = \acute{a}rea(ABDC) = \left|det[v,\, w]\right|.$$

■

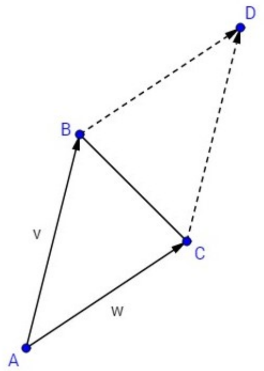

Figura 32 – Triângulo ABC

2.7.1 Área de uma superfície triangular por Geometria Analítica Pontual

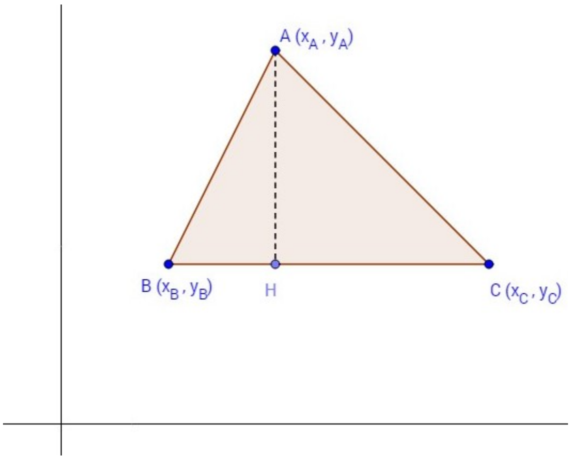

Figura 33 – Triângulo ABC com altura H

Consideremos o triângulo ABC da Figura 33. Pela Geometria Plana temos que a área do triângulo será

$$\acute{A}rea(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH.$$

Considerando a distância entre os pontos, teremos

$$\acute{A}rea(ABC) = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,H}.$$

Pela fórmula de distância entre dois pontos, pela fórmula de distância entre ponto e reta e por um algebrismo, chegamos em

$$\acute{A}rea(ABC) = \frac{1}{2}|D|$$

onde

$$D = det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$$

.

Portanto, devemos calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, onde vetorialmente, calculamos o determinante de uma matriz de ordem 2. No caso de calcular a área de um paralelogramo ou um outro polígono de n lados, teríamos que dividir o paralelogramo (polígono) em triângulos, o que torna o cálculo enfadonho.

Exemplo 2.7.2 Calculemos a área do triângulo ABC, onde $A(2,1)$, $B(4,3)$ e $C(3,7)$.

Resolução Sendo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ representantes dos vetores $\overrightarrow{u} = (2,2)$ e $\overrightarrow{v} = (1,6)$, respectivamente, temos o seguinte valor em unidade de área para o triângulo

$$\text{área(ABC)} = \frac{1}{2}\left|det[u,v]\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 10. \qquad \diamond$$

3 A reta

Neste capítulo estudaremos equações de uma reta e examinaremos a posição relativa entre elas dentre outros tópicos presentes nos conteúdos do Ensino Médio.

3.1 Equação paramétrica da reta

Seja r uma reta do plano euclidiano. Um vetor direção de r ou vetor diretor é qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ representado por um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, onde A e B são pontos distintos da reta. Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são dois vetores diretores, então existe um escalar t tal que $\overrightarrow{w} = t\overrightarrow{v}$, pois os vetores têm r como reta suporte.

Como vimos anteriormente, quando representamos um vetor $\overrightarrow{q} = (q_1, q_2)$ por um segmento orientado com ponto inicial $O(0, 0)$, seu ponto final é o ponto com as mesmas coordenadas, $Q(q_1, q_2)$. Se Q pertence à reta r, as coordenadas de qualquer ponto $P(x, y)$ da reta é obtido como ponto final do segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ que representa o vetor $\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{v}$ para algum escalar t, onde $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ é um vetor direção da reta r. O escalar t é chamado parâmetro da equação paramétrica.

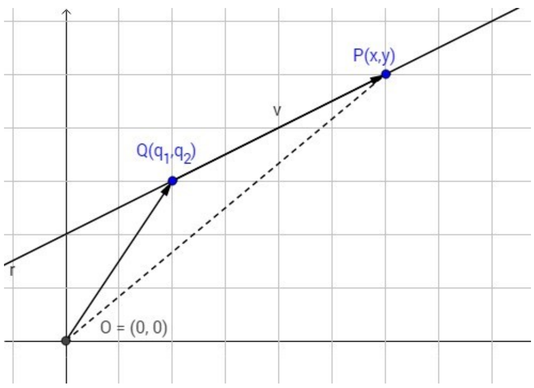

Figura 34 – Reta suporte QP com vetor diretor

Portanto, se $P(x, y) \in r$ as suas coordenadas são

$$r : \begin{cases} x = q_1 + tv_1 \\ y = q_2 + tv_2 \end{cases},$$

para algum parâmetro t.

Exemplo 3.1.1 Uma equação paramétrica da reta r que incide no ponto $Q(1, 2)$ e tem um vetor direção $\overrightarrow{v} = (2, 2)$ fica sendo

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}.$$

Para $t = 0$, temos $Q(1, 2) \in r$. Para $t = 2$ obtemos o ponto $R(5, 6) \in r$, etc.

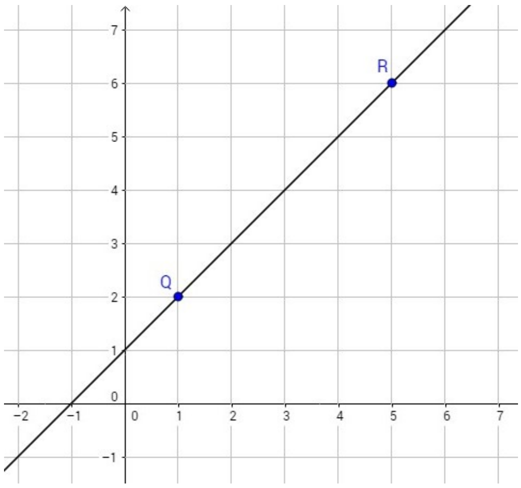

Figura 35 – Reta suporte QR

Se considerarmos outro vetor direção de r, digamos $\overrightarrow{w} = -3\overrightarrow{v} = (-6, -6)$, e outro ponto no qual a reta incida, por exemplo, $R(5, 6)$ obtemos outra equação paramétrica da mesma reta,

$$r : \begin{cases} x &= 5 - 6s \\ y &= 6 - 6s \end{cases} .$$

Aqui estamos utilizando outro parâmetro, qual seja, s. ◇

Exemplo 3.1.2 Verifiquemos se o ponto $P(2, 5)$ pertence à reta r com equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x &= -2 + t \\ y &= 3 + 4t \end{cases} .$$

Para responder a esta questão, é suficiente verificar se existe t tal que

$$r : \begin{cases} 2 &= -2 + t \\ 5 &= 3 + 4t \end{cases} .$$

Como, pela primeira equação, o valor do parâmetro é $t = 4$ e substituindo este valor na segunda equação temos $5 \neq 3 + 4 \cdot 4$, constata-se que $P \notin r$. ◇

Exemplo 3.1.3 Determinemos uma equação paramétrica para a reta r que incide nos pontos $A(2, 5)$ e $B(5, 7)$.

Considere o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Este segmento representa um vetor diretor de r, qual seja $\overrightarrow{v} = (3, 2)$. Portanto

$$\begin{cases} x &= 2 + 3 \cdot t \\ y &= 5 + 2 \cdot t \end{cases}$$

é uma equação paramétrica da reta r. ◇

3.1.1 Equação paramétrica da reta por Geometria Analítica Pontual

As equações paramétricas de uma reta relacionam as variáveis x e y com uma terceira variável t chamada de parâmetro na forma:

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases} .$$

Onde f e g são funções sem relacionar com algum ponto da reta ou vetor diretor, ou seja, não há uma maior relação entre a geometria e a álgebra que envolvem a reta em questão.

3.2 Equação normal da reta

Em Geometria Euclidiana, um teorema que estabelece que "por um ponto P de um segmento PQ incide uma única reta perpendicular a este segmento". Podemos utilizar este resultado para estabelecer uma equação nas variáveis x e y de modo que um ponto $A(x, y) \in r$ se, e somente se, as coordenadas do ponto satisfazem a equação.

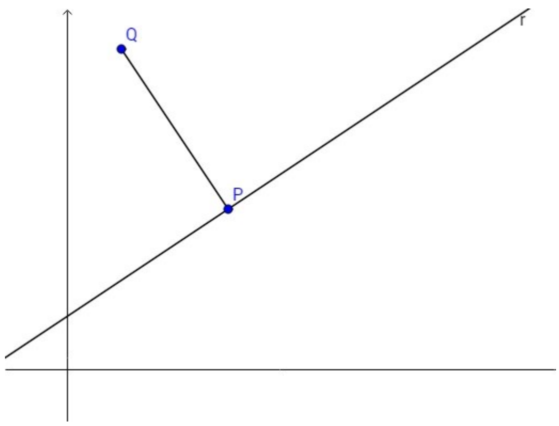

Figura 36 – Reta perpendicular a segmento

Considere o ponto $P(x_0, y_0)$ em r. Seja η o vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$. Um tal vetor é chamado de vetor normal à reta r. Considere um ponto qualquer $A(x, y)$ do plano euclidiano. Este ponto $A(x, y) \in r$ se, e somente se, o vetor $w = (x - x_0, y - y_0)$ representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{PA}$ é ortogonal ao vetor η. Desta forma $A(x, y) \in r$ se, e somente se,

$$\langle w, \eta \rangle = 0.$$

Esta igualdade nos dá uma equação para a reta r. Acima foram descritos os procedimentos para determinar a equação.

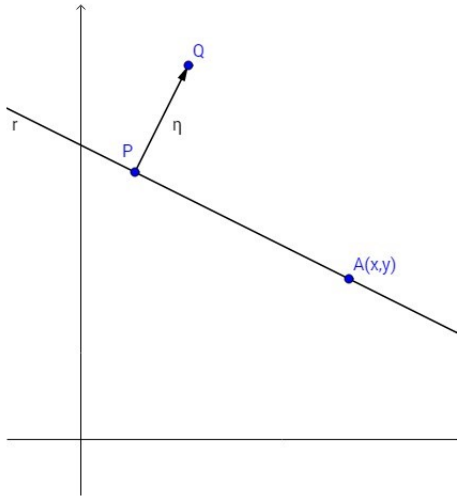

Figura 37 – Reta r e seu vetor normal

Exemplo 3.2.1 Considere a reta r que incide no ponto $P(3,2)$ e é perpendicular ao segmento PQ, onde $Q(1,5)$. Ver Figura 38.

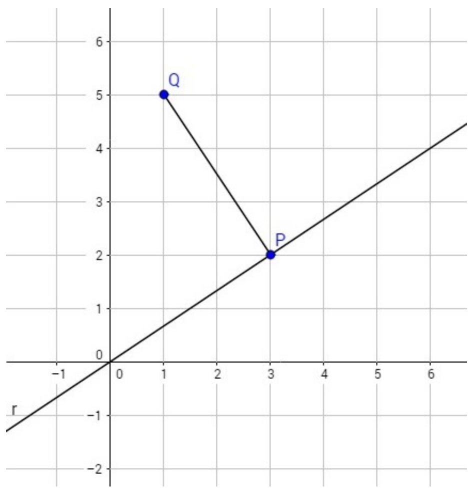

Figura 38 – Vetor normal à reta

Seja $A(x,y)$ um ponto genérico da reta. O segmento orientado $\overrightarrow{PA}$ representa o vetor diretor $\overrightarrow{w} = (x-3, y-2)$ da reta r e o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor normal à reta, $\overrightarrow{\eta} = (-2,3)$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{\eta} \rangle \\ & = & \langle (x-3, y-2), (-2,3) \rangle \\ & = & -2x + 3y. \end{array}$$

Portanto $r : -2x + 3y = 0$ é chamada de equação normal da reta. Observamos que examinando os coeficientes de x e y, quais sejam,-2 e 3, respectivamente, são precisamente as coordenadas, nesta ordem, do vetor normal considerado $\eta = (-2,3)$. $\diamond$

3.2.1 Equaçao normal da reta por Geometria Analítica Pontual

Para determinar a equação normal da reta r, precisamos saber as coordenadas de dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes a r, consideramos um ponto genérico $C(x, y)$, usamos a condição de alinhamento de três pontos em que ocorre a igualdade

$$det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} = 0$$

. O que implica na equação

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

. Fazendo $(y_A - y_B) = a$, $(x_B - x_A) = b$ e $x_A y_B - x_B y_A = c$ obtemos finalmente a equação $ax + by + c = 0$. Além de usarmos muito algebrismo até chegar na equação pretendida, os coeficientes não são triviais. Uma informação muito importante deixa de ser analisada nesse caso, que é o fato de os coeficientes a e b serem as coordenadas do vetor normal à reta r.

3.3 Ângulos entre duas retas

Quando duas retas r e s se intersetam, elas determinam quatro ângulos. Aqueles opostos pelos vértices são congruentes. Portanto, temos dois valores θ_1 e θ_2, para as medidas dos ângulos. Como dois destes ângulos são suplementares, vale que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

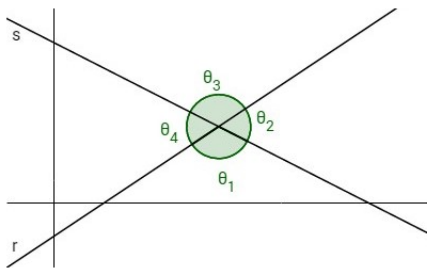

Figura 39 – Ângulos entre duas retas

Observação 3.3.1 *$\theta_1 = \theta_3$ e $\theta_2 = \theta_4$.*

A questão agora é como calcular as medidas dos ângulos entre duas retas. Pelo visto basta calcular uma medida θ, a outra medida será $\pi - \theta$. para isto utilizamos o produto interno.

Exemplo 3.3.1 Considere as retas r e s descritas parametricamente por:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 4t \end{cases} ; \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases} .$$

Escolhamos $\overrightarrow{u} = (1,4)$ e $\overrightarrow{v} = (1,-5)$ como os vetores diretores de r e s, respectivamente. Com eles podemos calcular as medidas dos ângulos. Uma das medidas do ângulo entre as retas será calculada pela igualdade $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\theta$ que permite calcular o ângulo entre dois vetores.

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{(1,4)\cdot(1,-5)}{\|(1,4)\|\,\|(1,-5)\|} = -\frac{19}{\sqrt{442}}.$$

Logo, $\theta = arccos\left(-\frac{19}{\sqrt{442}}\right)$. O outro ângulo tem medida $\pi - \theta$. ◇

Exemplo 3.3.2 Consideremos duas retas determinadas por equações normais:

$$r : 2x - 4y - 1 = 0; \qquad\qquad s : 3x + y - 5 = 0.$$

Os vetores normais de r e s, respectivamente, são $\eta_1 = (2,-4)$ e $\eta_2 = (3,1)$. Observamos que se rotacionarmos estes vetores de $\frac{\pi}{2}$ no sentido horário, obtemos vetores diretores de r e s, respectivamente: $\eta_1^{\perp} = (4,2)$; $\eta_2^{\perp} = (-1,3)$. Claro, o ângulo entre os vetores η_1 e η_2 é o mesmo entre os vetores rotacionados $\eta_1^{\perp}$ e $\eta_2^{\perp}$. Portanto para determinar uma medida de um dos ângulos entre as retas r e s, podemos utilizar os seus normais:

$$\cos\theta = \frac{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle}{\|\eta_1\|\,\|\eta_2\|} = \frac{2}{\sqrt{200}}.$$ ◇

Exemplo 3.3.3 Considere as retas r e s da Figura 40 e determine o ângulo entre elas.

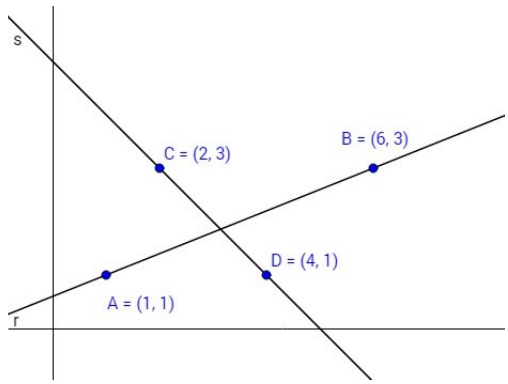

Figura 40 – Ângulo entre r e s

Resolução Os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{u} = (5,2)$ e $\overrightarrow{v} = (2,-2)$ que são os vetores diretores de r e s, respectivamente. Portanto, o ângulo entre r e s será

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{58}}.$$

◇

3.3.1 Ângulo entre duas retas por Geometria Analítica Pontual

Primeiro definimos *coeficiente angular de uma reta* r, que será a tangente do ângulo formado entre a reta r e a horizontal e denotado por m, onde $m = \dfrac{-a}{b}$.

Consideremos duas retas concorrentes r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente. Sendo θ o ângulo entre r e s, com um algebrismo chegamos em

$$\tan\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right|$$

. Se s é uma reta vertical teremos

$$\tan\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right|.$$

3.4 Posição relativa entre duas retas

Por definição, duas retas r e s são paralelas se elas não se intersetam e são perpendiculares quando se intersetam e os ângulos entre elas medem $\frac{\pi}{2}$, ou seja, todos os ângulos entre as retas são retos. A primeira posição relativa indicamos por $r \parallel s$ e a segunda por $r \perp s$. Quando duas retas se intersetam dizemos que elas são concorrentes.

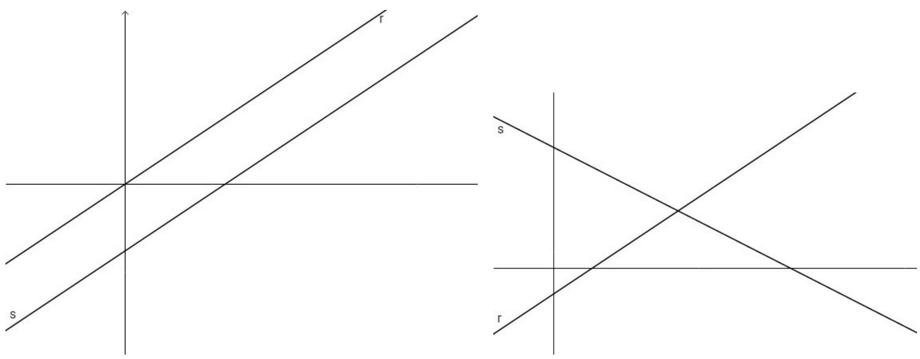

Figura 41 – Retas paralelas e retas concorrentes

Proposição 3.4.1 *Duas retas r e s são paralelas se, e somente se, seus vetores diretores são colineares e as retas não se intersetam.*

Exemplo 3.4.1 Consideremos as retas descritas pelas equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 4t \end{cases}; \qquad s : \begin{cases} x = -4 - 2s \\ y = 1 - 8s \end{cases}.$$

os vetores $\overrightarrow{v} = (1,4)$ e $\overrightarrow{w} = (-2,-8)$ são vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Como $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{v}$, os vetores são colineares, portanto as retas são paralelas, pois não se intersetam.

Também podemos determinar se as retas são paralelas examinando as equações normais das retas. Para r um vetor normal é $\overrightarrow{\eta_1} = \overrightarrow{v}^{\perp} = (-4,1)$ e para s um vetor normal é $\overrightarrow{\eta_2} = \overrightarrow{w}^{\perp} = (8,-2)$. O ponto $P(2,3)$ pertence à reta r e $Q(-4,1)$ pertence à reta s. Calculando as equações normais das retas temos:

$$r : -4x + y = -5; \qquad s : 8x - 2y = -34.$$

Da mesma forma, os vetores normais são colineares, $\overrightarrow{\eta}_2 = -2\overrightarrow{\eta}_1$. Logo, as retas são paralelas. $\diamond$

Exemplo 3.4.2 As retas $r : (x, y) = (2, 3) + t \cdot (1, 4)$ e $s : (x, y) = (1, 3) + t \cdot (3, 12)$ são paralelas, pois seus vetores diretores $\overrightarrow{u} = (1, 4)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 12)$ são múltiplos um do outro, $\overrightarrow{v} = 3 \cdot \vec{u}$ e as retas não se intersetam. $\diamond$

Proposição 3.4.2 *Duas retas r e s são paralelas se, e somente se, seus vetores normais são colineares e as retas não se intersetam.*

Proposição 3.4.3 *Duas retas são concorrentes se seus vetores diretores não forem colineares.*

Exemplo 3.4.3 As retas $r : (x, y) = (2, 3) + t \cdot (1, 4)$ e $s : (x, y) = (1, 3) + t \cdot (1, 5)$ são concorrentes, pois seus vetores diretores $\overrightarrow{u} = (1, 4)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 5)$ não são colineares. $\diamond$

Proposição 3.4.4 *Duas retas são concorrentes se seus vetores normais não forem colineares.*

Teorema 3.4.1 *Duas retas r e s com vetores diretores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.*

Exemplo 3.4.4 Consideremos as retas descritas pelas equações paramétricas

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 4 & + & 2t \\ y & = & 3 & + & 5t \end{array} \right. ; \qquad s : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 3 & - & 10s \\ y & = & 11 & + & 4s \end{array} \right. .$$

os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 5)$ e $\overrightarrow{v} = (-10, 4)$ são vetores normais das retas r e s, respectivamente. Como

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle (2, 5), (-10, 4) \rangle = 0.$$

Logo $r \perp s$. $\diamond$

Proposição 3.4.5 *Duas retas r e s com vetores normais $\overrightarrow{\eta_1}$ e $\overrightarrow{\eta_2}$, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $\langle \overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2} \rangle = 0$.*

3.4.1 Posição relativa entre duas retas por Geometria Analítica Pontual

Definimos coeficiente linear de uma reta r de equação $ax + by + c = 0$, como sendo $n_r = \frac{-c}{b}$.

Consideremos duas retas r e s de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, respectivamente.

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s.$$

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

r e s são concorrentes se, e somente se, $m_r \neq m_s$.

3.5 Distância entre um ponto e uma reta

Sejam $r : \eta_1 x + \eta_2 y + c = 0$ uma equação normal de uma reta no plano euclidiano e $A(a_1, a_2)$ um ponto qualquer deste plano. Recordamos que $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ é o vetor normal a r. Desejamos calcular a distância do ponto A à reta r. Isto pode ser feito utilizando a projeção de um vetor sobre outro.

Escolhamos qualquer ponto $P(p_1, p_2)$ da reta r. Seja $Q(q_1, q_2)$ um ponto tal que $\overrightarrow{PQ}$ é um segmento orientado que representa $\overrightarrow{\eta}$. Seja $\overrightarrow{v}$ o vetor representado por $\overrightarrow{PA}$. A distância $d(A, r)$ entre o ponto A e a reta r será $d(P, r) = \|p_{\overrightarrow{\eta}}(\overrightarrow{v})\|$.

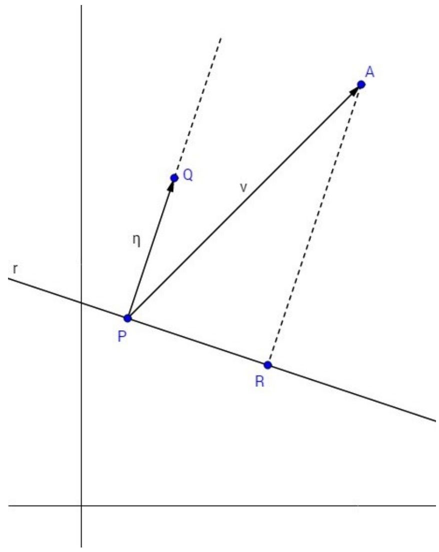

Figura 42 – Distância entre um ponto e uma reta

Para determinar as coordenadas de R, o pé da perpendicular baixada de A a r, é suficiente calcular a interseção da reta s que incide em A e que seja perpendicular a r. Claro, o vetor normal de s será $\overrightarrow{\eta}^{\perp} = (-\eta_2, \eta_1)$.

Exemplo 3.5.1 Calculemos a distância entre o ponto $A(2, 3)$ e a reta $r : 4x + 3y - 9 = 0$ e as coordenadas do pé da perpendicular baixada de A a r.

Resolução O vetor normal a r é $\overrightarrow{\eta} = (4, 3)$ Considere um ponto qualquer da reta, digamos $P(3, -1)$. O segmento orientado $\overrightarrow{PA}$ representa o vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 4)$. Calculemos a distância $d(A, r)$. Para isso, considere o normalizado de $\overrightarrow{\eta}$,

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\eta}\|}\overrightarrow{\eta} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

e calculemos

$$d(A, r) = \|p_{\overrightarrow{\eta}}(\overrightarrow{v})\| = |\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle| = \frac{8}{5}.$$

Para determinar o pé da perpendicular consideramos a reta s que incide em $A(2, 3)$ e tem vetor normal $\overrightarrow{\eta}^{\perp} = (-3, 4)$. Pelo visto na segunda seção deste capítulo temos

$$s : \langle (x-2, y-3), (-3, 4) \rangle = 0.$$

Calculando o produto interno obtemos $s : -3x + 4y - 3 = 0$. Portanto as coordenadas de $R(x, y)$ é a solução dos sistema constituído pelas equações das retas r e s:

$$\begin{cases} 4x & + & 3y & = & 9 \\ -3x & + & 4y & = & 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos $R(-\frac{27}{25}, \frac{111}{25})$. $\diamond$

Da mesma forma, podemos utilizar projeções de vetores para determinar a projeção do ponto P sobre a reta r, isto é, determinar o pé da perpendicular baixada de P a r.

3.5.1 Distância entre ponto e reta por Geometria Analítica Pontual

A distância $d_{P,r}$ entre um ponto $P(x_p, y_p)$ e uma reta $r : ax + by + c = 0$ será calculada pela igualdade

$$d_{P,r} = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

A demonstração dessa igualdade será omitida.

4 A Circunferência

Este capítulo é dedicado ao exame de uma curva plana estudada no Ensino Médio denominada circunferência. Fixados um ponto C do plano euclidiano e um escalar $r > 0$, a circunferência com centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos cuja distância a C é igual a r, ou seja, é o conjunto c constituído por todos os pontos P do plano tais que $\overline{PC} = r$. Observamos que nos textos do Ensino Superior, uma circunferência é chamada de círculo.

4.1 Equação reduzida da circunferência

Como antes, para determinar equações de curvas, devemos fixar um sistema de eixos cartesianos no plano. Seja c uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio $r > 0$. Se um ponto $P(x, y) \in c$, o segmento orientado $\overrightarrow{CP}$ representa o vetor $\overrightarrow{z} = (x - a, y - b)$. Como $\|z\| = \overline{CP} = r$, segue que c tem equação, em termos de coordenadas,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Como o raio, por definição, é positivo, podemos estabelecer a equação da circunferência c.

$$c : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Nos textos do Ensino Médio, esta equação é chamada **Equação reduzida da circunferência**.

Exemplo 4.1.1 Na Figura 43, determinamos os seguintes elementos da circunferência c.

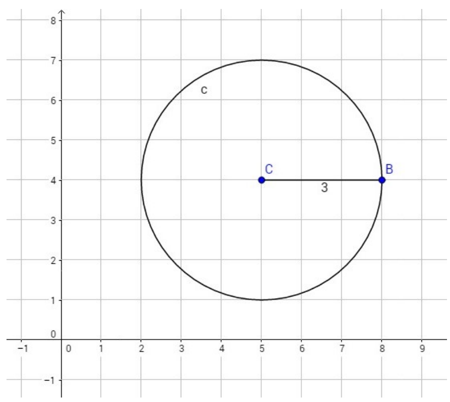

Figura 43 – Circunferência 1

1. O centro de c é $C(5, 4)$.

2. O raio de c é $r = 3$.

3. Se $P(x, y) \in c$, então $c : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$. (Equação reduzida)

Verifiquemos se os pontos $D(3,2)$ e $E(5,7)$ pertencem a c. Para isto, é suficiente substituir as coordenadas dos pontos na equação de c. Para $D(3,2)$ temos $(3-5)^2+(2-4)^2=8\neq 9$. Com isto concluímos que $D\notin c$. Por substituição das coordenadas de $E(5,7)$ na equação de c nos dá $(5-5)^2+(7-4)^2=9$. Logo, $E\in c$. $\diamond$

Uma circunferência merece atenção especial, pois é utilizada na generalização da trigonometria construída com triângulos. Esta circunferência é denominada círculo unitário canônico, denotada por $\mathbb{S}^1$ e tal conjunto é constituído pelos ponto P tal que $\overline{OP}=1$. O centro de $\mathbb{S}^1$ é a origem do sistema de coordenadas, $O(0,0)$, e o raio mede $r=1$. Portanto sua equação reduzida fica sendo $\mathbb{S}^1: x^2+y^2=1$.

Exemplo 4.1.2 Determinemos as coordenadas do centro C e do raio r da circunferência de equação $c: x^2-4x+y^2+10y=-4$.

Resolução Uma técnica bastante utilizada é “completar quadrados”:

$$x^2-4x+4+y^2+10y+25=-4+4+25.$$

Feito isto, temos $(x-4)^2+(y+5)^2=5^2$. Logo, a equação original é equivalente à esta equação, que é a equação de uma circunferência com centro $C(4,-5)$ e raio $r=5$.

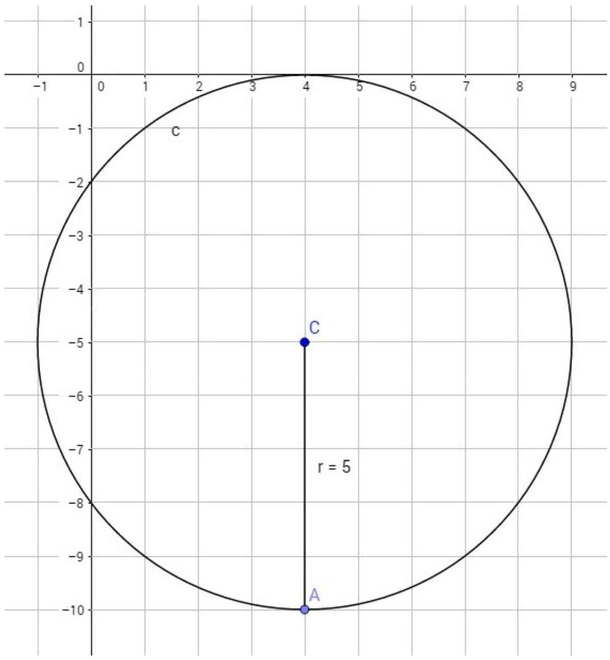

Figura 44 – Circunferência 2

$\diamond$

4.2 Posições relativas

Uma circunferência c particiona naturalmente o plano em três conjuntos disjuntos, a saber, a circunferência, o interior da circunferência e o exterior da circunferência. Se r é o raio da circunferência e $C(a,b)$ seu centro, definimos estes dois novos conjuntos da seguinte forma.

$$\begin{cases} int(c) & \text{conjunto constituído pelos pontos } P \text{ tais que } \overline{CP} < r \\ \\ ext(c) & \text{conjunto constituído pelos pontos } P \text{ tais que } \overline{CP} > r \end{cases}.$$

Estas definições podem ser descritas algebricamente.

$$\begin{cases} int(c) & : & (x-a)^2+(y-b)^2 & < & r^2 \\ c & : & (x-a)^2+(y-b)^2 & = & r^2 \\ ext(c) & : & (x-a)^2+(y-b)^2 & > & r^2 \end{cases}.$$

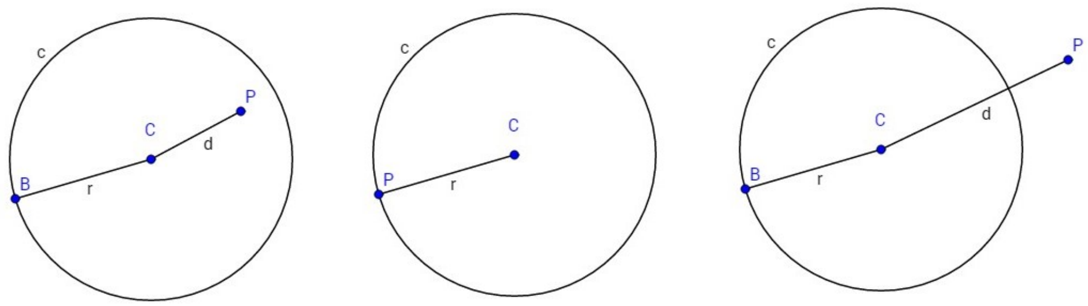

Figura 45 – Posições relativas ponto-circunferência

Exemplo 4.2.1 Determinemos a posição de cada um dos pontos em relação à circunferência de equação reduzida $c : (x-4)^2 + (y-6)^2 = 5$.

(i) $D(2,5)$. *(ii)* $E(3,6)$. *(iii)* $F(2,3)$.

Resolução A resposta obtemos por simples substituição.

(i) Para $D(2,5)$: $(2-4)^2 + (5-6)^2 = 5$. Isto significa que $P \in c$.

(ii) Para $E(3,6)$: $(3-4)^2 + (6-6)^2 = 1 < 5$. Logo, $E \in int(c)$.

(iii) Para $F(2,3)$: $(2-4)^2 + (3-6)^2 = 13 > 5$. Portanto $F \in ext(c)$. $\diamond$

Exemplo 4.2.2 Sabendo que a equação reduzida da circunferência c é $c : (x-1)^2+(y-2)^2 = 26$, determine o(s) valor(es) do escalar k para que o ponto $P(2,k)$:

(i) pertença a c; *(ii)* pertença a $\int(c)$; *(ii)* pertença a $ext(c)$.

Resolução Substituindo as coordenadas de P nas expressões que definem c, $ext(c)$ e $int(c)$ obtemos, respectivamente, $(k-2)^2 = 25$, $(k-2)^2 > 25$ $(k-2)^2 < 25$. Portanto,

(i) $P \in c$ quando $k = 7$ ou $k = -3$.

(ii) $P \in ext(c)$ quando $k > 7$ ou $k < -3$.

(iii) $P \in int(c)$ quando $-3 < k < 7$. ◇

Exemplo 4.2.3 Um quadrilátero têm vértices consecutivos $D(2,1)$, $E(2,9)$, $F(10,9)$, $G(10,1)$.

(i) Mostremos que $DEFG$ é um quadrado.

(ii) Determine a equação reduzida da circunferência c inscrita no quadrado.

(iii) Determine a equação reduzida da circunferência d que circunscreve o quadrado.

Resolução (i) Os segmentos orientados $\overrightarrow{DG}$ e $\overrightarrow{EF}$ representam o vetor $\overrightarrow{v} = (8,0)$, portanto o quadrilátero é um paralelogramo. Os segmentos orientados $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{GF}$ representam o vetor $\overrightarrow{w} = (0,8)$. Como $\|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{w}\|$, concluímos que o paralelogramo é um losango. Os lados são perpendiculares, pois $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$. Portanto, $DEFG$ é um quadrado.

Antes de continuarmos, observamos que ambas as circunferências têm o mesmo centro, que é o ponto médio de uma diagonal. O ponto médio da diagonal DF é $C(6,5)$.

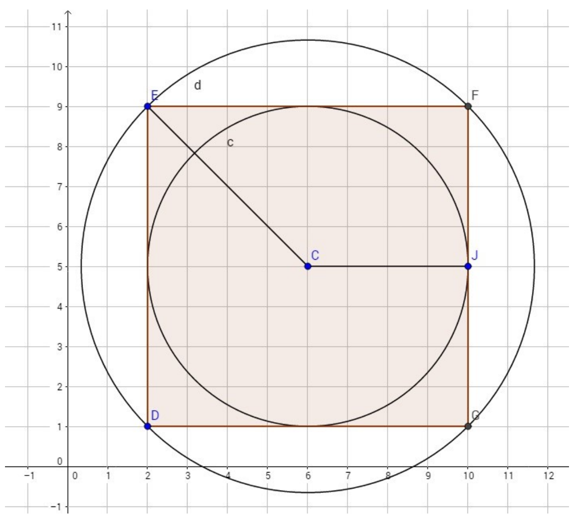

Figura 46 – Circunferência 6

(ii) O raio da circunferência inscrita no quadrado é a metade do lado do quadrado, logo $r_c = \frac{1}{2}\|v\| = 4$ e $c : (x-6)^2 + (y-5)^2 = 16$.

(iii) O raio da circunferência que circunscreve o quadrado é a metade da medida de uma de suas diagonais, ou seja $r_d = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| = 4\sqrt{2}$. Logo $d : (x-6)^2 + (y-5)^2 = 32$. ◇

4.2.1 Posição relativa entre uma reta e uma circunferência

A classificação da posição relativa de uma reta s e uma circunferência é feita utilizando-se os três conjuntos determinados pela circunferência.

Seja $d(C,s)$ distância do centro da circunferência $c : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ e a reta $s : mx + ny + p = 0$.

$$\begin{cases} s & \text{é tangente a } c \text{ se } d(C,s) = r \\ s & \text{é exterior a } c \text{ se } d(C,s) > r. \\ s & \text{é secante a } c \text{ se } d(C,s) < r. \end{cases}.$$

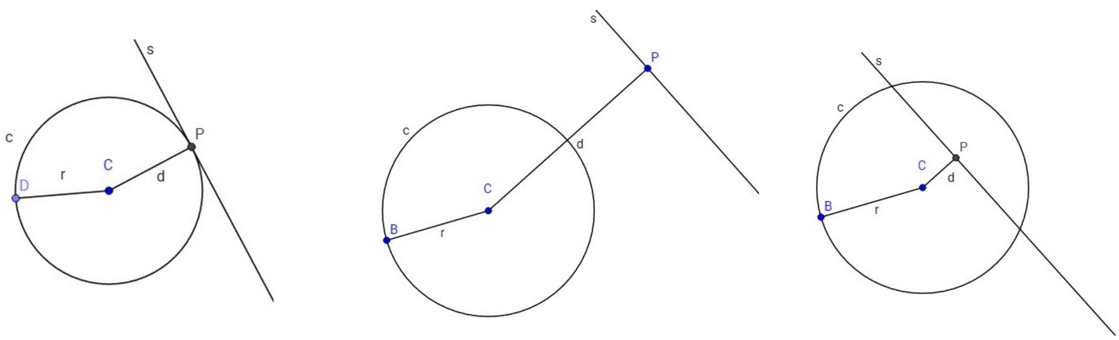

Figura 47 – Posições relativas reta-circunferência

Exemplo 4.2.4 Determinemos a posição relativa entre a reta s e a circunferência c de equação vetorial $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 10$, sendo:

(i) $s : x - 2y + 1 = 0$; *(ii)* $s : x + y - 14 = 0$; *(iii)* $s : 3x - y - 1 = 0$.

Resolução Sejam $C(5,4)$ e $r = \sqrt{10}$ o centro e o raio de c, respectivamente. Sejam $\overrightarrow{\eta}$ o vetor normal da reta s e $\overrightarrow{u}$ seu normalizado. Considere qualquer ponto P de s. Pelo visto no capítulo anterior a distância entre C e s é dada por

$$d(C,s) = |\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle|.$$

onde $\overrightarrow{v}$ é o vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{PC}$.

(i) Para este item tomamos $P(-1,0) \in s$. Neste caso

$$d(C,s) = \left| \langle (6,4), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2) \rangle \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{5}} 2 \right| = \frac{2}{\sqrt{5}} < \sqrt{10}.$$

Para verificar a última desigualdade basta considerar os quadrados de ambos os membros. Neste caso temos s é secante a c.

(ii) Considere o ponto $P(14,0) \in s$. Calculando

$$d(C,s) = \left| \langle (-9,4), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \rangle \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} 5 \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} > \sqrt{10}.$$

(iii) Considere a ponto $P(1,2) \in s$. Calculando.

$$d(C,s) = \left| \langle (4,2), \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1) \rangle \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} 10 \right| = \sqrt{10}.$$

Portanto, s é tangente a c. ◇

Geometricamente, temos a circunferência c e as três retas de cada item na Figura 48.

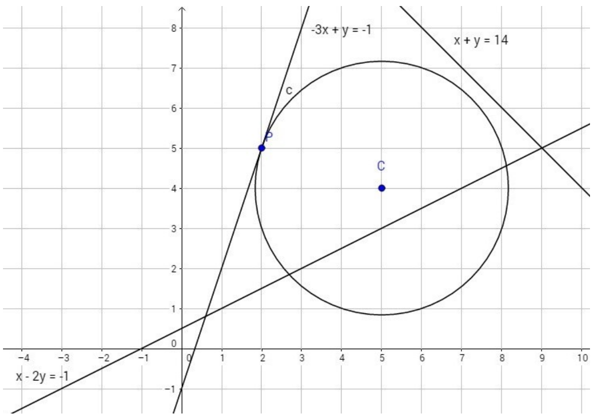

Figura 48 – Reta secante, reta tangente e reta exterior à circunferência c

No caso em que uma reta s é tangente a uma circunferência c, de centro $C(a,b)$ e raio r, podemos determinar as coordenadas de $P(x_p, y_p)$, o ponto na interseção entre s e c, utilizando o vetor normal $\overrightarrow{\eta}$ de s. Sendo $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$, $\overrightarrow{PC}$ um representante do vetor $k\overrightarrow{\eta}$, onde k é um escalar, teremos

$$\begin{cases} k\eta_1 &= a - x_p \\ k\eta_2 &= b - y_p \end{cases}$$

Como $d(C,p) = r$, temos $\|k\overrightarrow{\eta}\| = r$, de onde segue que $|k| = \frac{r}{\|\overrightarrow{\eta}\|}$. Logo, o sistema ficará

$$\begin{cases} \pm\dfrac{r}{\|\overrightarrow{\eta}\|}\eta_1 &= a - x_p \\ \\ \pm\dfrac{r}{\|\overrightarrow{\eta}\|}\eta_2 &= b - y_p \end{cases} \quad \text{ou ainda} \quad \begin{cases} x_p &= a \mp \dfrac{r}{\|\overrightarrow{\eta}\|}\eta_1 \\ \\ y_p &= b \mp \dfrac{r}{\|\overrightarrow{\eta}\|}\eta_2 \end{cases}$$

Exemplo 4.2.5 Sabendo-se que $s : 4x - 3y + 9 = 0$ é tangente a $c : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$, calculemos o ponto de tangência.

Resolução O centro da circunferência é $C(4,5)$ e seu é $r = 2$. O vetor normal de s é $\overrightarrow{\eta} = (4,-3)$. Pelo visto acima, temos que o ponto de t

$$P(x_p, y_p) = \left(4 \mp \frac{2}{5} \cdot 4, 5 \mp \frac{2}{5} \cdot (-3)\right).$$

Logo $P\left(\frac{12}{5}, \frac{31}{5}\right)$ ou $P\left(\frac{28}{5}, \frac{19}{5}\right)$, substituindo as coordenadas na equação da circunferência obtemos $P\left(\frac{12}{5}, \frac{31}{5}\right)$. ◇

4.2.2 Posição relativa entre duas circunferências

Sejam c_1 uma circunferência de centro C_1 e raio r_1 e c_2 uma circunferência de centro C_2 e raio r_2. Sendo $\overrightarrow{C_1C_2}$ um representante do vetor $\overrightarrow{w}$, podemos classificar a posição relativa das duas circunferências comparando a norma $\|\overrightarrow{w}\|$ que é igual à distância entre os centros e os valores $|r_1 - r_2|$ e $r_1 + r_2$.

$$\begin{cases} c_1 \text{ e } c_2 & \text{são secantes, se } |r_1 - r_2| < \|\overrightarrow{w}\| < r_1 + r_2. \\ c_1 \text{ e } c_2 & \text{são tangentes exteriores, se } \|\overrightarrow{w}\| = r_1 + r_2. \\ c_1 \text{ e } c_2 & \text{são tangentes interiores, se } \|\overrightarrow{w}\| = |r_1 - r_2|. \\ c_2 \text{ e } c_2 & \text{são disjuntas exteriores, se } \|\overrightarrow{w}\| > r_1 + r_2. \\ c_2 \text{ e } c_2 & \text{são disjuntas interiores, se } \|\overrightarrow{w}\| < |r_1 - r_2|. \end{cases}.$$

1. Secantes.

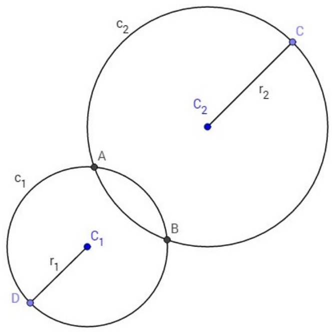

Figura 49 – Circunferências secantes

2. Tangentes exteriores e tangentes interiores.

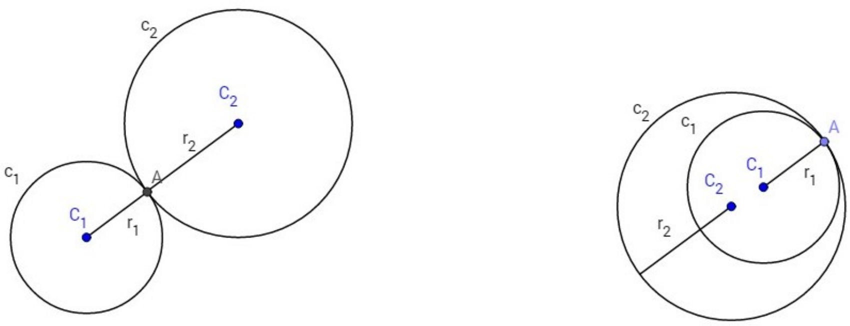

Figura 50 – Circunferências tangentes interiores

3. Disjuntas exteriores e disjuntas interiores.

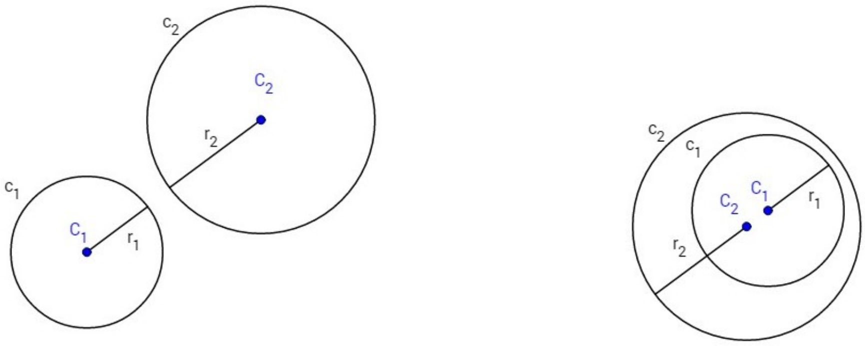

Figura 51 – Circunferências disjuntas interiores

4. Um caso especial de circunferências disjuntas interiores é quando $\|\overrightarrow{w}\| = 0$, diz-se que as circunferências são concêntricas.

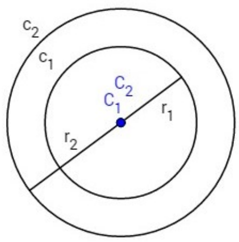

Figura 52 – Circunferências concêntricas

Exemplo 4.2.6 Determina posição relativa entre as circunferências c_1 e c_2 cujas equações reduzidas são conhecidas.

(i) $c_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ *e* $c_2 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1.$

(ii) $c_1 : (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$ *e* $c_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$

(iii) $c_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ *e* $c_2 : (x-6)^2 + (y-4)^2 = 3.$

(iv) $c_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ *e* $c_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4.$

(v) $c : 1(x-3)^2 + (y-1)^2 = 6$ *e* $c_1 : (x-6)^2 + (y-5)^2 = 1.$

Resolução (i) $C_1(2,1)$, $C_2(3,2)$, $r_1 = 4$ e $r_2 = 1$. Temos

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|(1,1)\| = \sqrt{2} < |r_1 - r_2|.$$

Como $0 < \sqrt{2} < |r_1 - r_2| = 3$, segue que c_1 e c_2 são disjuntas interiores.

(ii) $C_1(4,1)$, $C_2(1,1)$, $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$. Temos

$$\|\overrightarrow{w} = \|(-3,0)\| = 3.$$

Como $3 > r_1 + r_2$, segue que c_1 e c_2 são disjuntas exteriores.

(iii) $C_1(2,1)$, $C_2(6,4)$, $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Temos

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|(4,3)\| = \sqrt{25} = 5 = r_1 + r_2.$$

Logo, c_1 e c_2 são tangentes exteriores.

(iv) $C_1(2,1)$, $C_2(2,1)$, $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Neste caso, c_1 e c_2 são concêntricas, pois

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|(0,0)\| = 0.$$

(v) $C_1(3,1)$, $C_2(6,5)$, $r_1 = 6$ e $r_2 = 1$. Temos

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|(3,4)\| = 5 = |r_1 - r_2|.$$

Portanto, c_1 e c_2 são tangentes interiores. $\diamond$

Exemplo 4.2.7 Determinemos, em cada caso, a posição relativa entre duas circunferências c_1 e c_2 de raios r_1 e r_2, respectivamente, sabendo-se que d é a distância entre seus centros.

(i) $r_1 = 4$, $r_2 = 1$ *e* $d = 3$. *(ii)* $r_1 = 3$, $r_2 = 4$ *e* $d = 7$.

Resolução (i) $d = r_1 - r_2$, logo c_1 e c_2 são tangentes interiores.

(ii) $d = r_1 + r_2$, logo c_1 e c_2 são tangentes exteriores. $\diamond$

5 Conclusão

Neste trabalho foi sugerido um Plano de ensino para a Geometria Analítica. Como visto, o desenvolvimento permite uma apresentação rápida e clara dos conteúdos, além de possibilitar ao aluno expressar seu raciocínio lógico sem grandes dificuldades. Além disto, o tratamento auxiliará o entendimento de futuras disciplinas do Ensino Superior, como Álgebra Linear, Mecânica, etc.

No Ensino Médio a Geometria Analítica é geralmente abordada de uma forma que não deixa clara a relação entre a álgebra e a geometria. Além disso, os elementos presentes nos objetos matemáticos ficam mais evidentes, como o vetor normal, por exemplo, cujas coordenadas aparecem como coeficientes na equação normal da reta. Tornando muito mais natural a compreensão da Geometria Analítica.

REFERÊNCIAS

1 ANDRADE, P.F.A. **Álgebra Linear no** R^n. Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Cariri, 2016. Nenhuma citação no texto.

2 AVRITZER, Dan. **Geometria Analítica e Álgebra Linear: Uma visão geométrica**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, 2009. Nenhuma citação no texto.

3 LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**. vol.3. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. Nenhuma citação no texto.

4 STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo **Geometria Analítica**. MAKRON Books Editora Ltda. Nenhuma citação no texto.

5 STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo **Álgebra Linear**.2. ed. Editora Pearson. Nenhuma citação no texto.

6 VENTURI, Jacir J. **Álgebra vetorial e geometria analítica**. 9. ed. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado. Nenhuma citação no texto.