PROFMAT

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

UM ENFOQUE CONSTRUTIVISTA DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES E SUAS APLICAÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DE VAN HIELE

Macapá
2017

BENEDITO HERONIZIO PIMENTEL GÓES

UM ENFOQUE CONSTRUTIVISTA DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES E SUAS APLICAÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DE VAN HIELE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT no Polo da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional

Orientadora: Drª. Simone de Almeida Delphim Leal

Macapá

2017

Góes, Benedito Heronízio Pimentel

UM ENFOQUE CONSTRUTIVISTA DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES E SUAS APLICAÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DE VAN HIELE. Benedito Heronízio Pimentel Góes – Macapá: UNIFAP/PROFMAT, 2017.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Sociedade Brasileira de Matemática – SBM; Fundação Universidade Federal do Amapá – UNIFAP.

Orientação: Prof.ª Drª. Simone de Almeida Delphim Leal.

II. Fundação Universidade Federal do Amapá.

FOLHA DE APROVAÇÃO

UM ENFOQUE CONSTRUTIVISTA DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES E SUAS APLICAÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DE VAN HIELE

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal (Orientadora)

Profº. Dr. Erasmo Senger (UNIFAP)

Profº. Me Hilton Bruno Pereira Viana (IFAP)

DATA: ____/____/____

MÉDIA FINAL: ________

Macapá

2017

Inicialmente é a Deus, quem dedico à execução deste trabalho, pois com seu auxílio tive forças para chegar ao final dessa jornada.

À minha família, pessoas que através da sua presença, seus sorrisos, seus abraços, suas palavras, apoio, compreensão, amor e amizade, dão sentido a minha vida e tornaram mais fácil e prazeroso vencer este desafio.

AGRADECIMENTOS

A Paula Colares, minha esposa, que sempre acreditou em mim e me incentivou a vencer as adversidades, lutar e seguir em frente na concretização de mais essa etapa em minha vida.

Aos meus filhos, José Arthur e Maria Ritha, sempre em meus pensamentos, fornecendo o estímulo necessário para que eu pudesse continuar lutando e vencendo os obstáculos.

Aos meus pais, Manoel e Fátima, e meus irmãos pelos incentivos e orações em favor da minha vida durante o desenvolvimento desse trabalho.

A minha orientadora Prof.ª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal, pela paciência e apoio, que de maneira direta e indireta fez parte de minha formação. Suas sugestões e opiniões contribuíram significativamente para a concretização deste trabalho.

“Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu estás comigo; a tua vara e o teu cajado me consolam”.

Salmos 23:4.

RESUMO

Este trabalho busca verificar quais são as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos de 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, nas atividades que abrangem os conceitos de retas paralelas e perpendiculares e suas aplicações em situações-problema que envolvam o Teorema de Tales e os ângulos formados pela interseção de paralelas com uma transversal. Por meio de uma abordagem construtivista, pretende-se direcionar e orientar o aluno para uma análise gradativa e interpretativa das ações tomadas para o entendimento e a resolução de situações-problemas que envolvam esses conteúdos. Para tanto, buscou-se olhar o conceito de retas paralelas e perpendiculares sob a perspectiva da teoria de Van Hiele, cuja aprendizagem, sobretudo em geometria, se dá em níveis de compreensão, cabendo ao professor o papel de atuar apenas nos momentos em que o aluno se encontra apto, ou não, a progredir de nível, condição que a teoria de Van Hiele chama de fase de aprendizagem. Utilizando papel A4, régua e transferidor, o aluno por meio de dobraduras e medições irão conceber os conceitos de retas paralelas, retas perpendiculares, Teorema de Tales e os ângulos formados pela interseção de duas paralelas com uma transversal.

Palavras-chaves: Retas paralelas – Retas perpendiculares – Construtivismo - Teoria de Van Hiele

ABSTRACT

This work seeks to verify which are the learning difficulties presented by elementary school students (9th grade) in activities that cover the concepts of parallel and perpendicular lines and their applications in problem situations involving the Theorem of Tales and the Angles formed by the intersection of parallels with a transverse one. Through a constructivist approach, it is intended to direct and guide the student to a gradual and interpretative analysis of the actions taken to understand and solve situations-problems involving these contents. In order to do so, we sought to look at the concept of parallel and perpendicular lines from the perspective of Van Hiele's theory, whose learning, especially in geometry, occurs at levels of comprehension, and it is the role of the teacher to act only at moments when Student is able, or not, to progress level, a condition that Van Hiele's theory calls the learning phase. Using A4 paper, ruler and protractor, the student by means of folds and measurements will conceive the concepts of parallel straight lines, perpendicular lines, Tales theorem and the angles formed by the intersection of two parallel with a transversal.

Keywords: Parallel reefs - Perpendicular perches - Constructivism - Van Hiele theory

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De um modo geral, sabe-se que a sociedade mundial está em contínuas transformações culturais, sociais e econômicas, haja vista que todos os dias surgem novas tendências e com a mesma rapidez que surgem elas também desaparecem. Estas constantes transformações fazem com que os indivíduos se capacitem para conviver e dominar as novas informações que aparecem quase que diariamente. Logo, o contexto escolar também precisa se reformular, sem que se perca alguns aspectos que são de extrema relevância para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem.

Como parte significativa desse processo, ora de reformulação, ora de reforço de identidade, “A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar” (PCNs, 1998, pág. 19).

Em âmbito matemático, a educação hoje tem outros valores, outros conceitos. Antes o aluno só precisava aprender as fórmulas e regras que o professor repassava, agora ele tem que aprender antes de tudo a importância de deter tais informações e para que assim possa construir o seu conhecimento.

No entanto, ao longo da história da Educação existiram alguns modos de conceber o ensino, maneiras ou técnicas de repassar o saber matemático. Tais modos de ensino podem ser encaixados no que, segundo Martins (2008) pode ser denominado de Tendências. Logo, a cada nova Tendência que surgia, existia a preocupação pela redução das reprovações, relacionar ensino e o cotidiano dos alunos, e outras se preocupavam ainda com a boa formação de cidadãos.

No entanto, nas concepções relacionadas ao surgimento das tendências, entende-se que em todas elas o conceito de ensino se modifica com determinações que podem ser políticas, socioculturais e com as transformações dos valores da sociedade.

Atualmente, cada professor constrói com uma ou mais tendências o seu modo de ensino, o seu ideário pedagógico, e sempre com pressupostos de reflexão da sua prática de ensinar, nos valores e na finalidade do ensino matemático, na relação que se estabelece entre professor e aluno e principalmente da visão que tem da sociedade que o rege.

Nessa perspectiva, para Fiorentini (2005, pág. 05) as categorias descritivas das tendências são:

> [...] a concepção de matemática; a crença de como se dá o processo de obtenção/produção/descoberta do conhecimento matemático; as finalidades e os valores atribuídos ao ensino da matemática; a concepção de ensino; a concepção de aprendizagem; a cosmovisão subjacente; a relação professor aluno e sobretudo, a perspectiva de estudo/pesquisa com vistas à melhoria do ensino da matemática.

No entanto, levando em consideração que a intenção de verificar as aplicações de retas paralelas e perpendiculares no teorema de tales e ângulos formados pela interseção de um feixe de paralelas por uma transversal sob o ponto de vista da Teoria de Van Hiele que baseia-se no enfoque construtivista ´faz-se necessário uma abordagem a tendência construtivista, que por sua vez faz parte da metodologia utilizada no ensino da Matemática.

A Tendência Construtivista nasceu a partir das ideias de Piaget, mesmo não sendo construída por ele, esta tendência pedagógica influencia positivamente as inovações do ensino, ela defende maior entendimento dos conteúdos matemáticos, tomou lugar do ensino mecanizado e memorização dos procedimentos.

Esta tendência é fortemente ligada ao ensino pelo uso de materiais concretos, e a construção do conhecimento pelo aluno. Segundo Freitag (2002) “o pensamento não tem fronteiras: que ele se constrói se desconstrói, se reconstrói”. No construtivismo, a matemática é uma construção humana, é mais importante o desenvolvimento, o processo do que a resposta. A matemática é dita como construção do conhecimento, leva a desenvolver o pensamento lógico.

Entretanto, nesta tendência o erro cometido pelo aluno é motivo de investigação por parte do professor, ele deve descobrir os motivos que levaram o aluno a cometer o erro e não a simples correção da resposta. Desse modo, o conhecimento é construído a partir da pesquisa pelo próprio aluno.

Segundo Lobo e Bayer (2004) um dos temas bastante discutido em seminários e congressos é o estudo da Geometria nos currículos de Matemática. Existe uma grande preocupação entre professores e matemáticos em relação ao ensino deste conteúdo. A busca de novas formas e práticas pedagógicas para se resgatar o ensino de Geometria com qualidade tem sido destaque em trabalhos de pesquisadores em todo o mundo.

O ensino e a aprendizagem da geometria por um longo tempo ficaram em segundo plano nos currículos de matemática das escolas brasileiras, estando ausente ou pelo menos quase ausente.

No entanto, de acordo com Lorenzato (2006) existem duas razões principais para isso: muitos professores não tinham os conhecimentos necessários para ensinar geometria e a exagerada valorização que se atribuía aos livros didáticos, que muitas vezes, traziam esses conteúdos como um conjunto de fórmulas e definições que eram apresentados em seus capítulos finais, aumentando a possibilidade deles não serem estudados devido à falta de tempo. O autor ainda explicita que os cursos de formação dos professores não abordavam os conteúdos geométricos e, por isso, eles não possuíam conhecimentos sobre a geometria, que era colocada como um complemento no currículo desses cursos.

Por outro lado, para Pavanello (2003), o abandono do ensino da geometria nas salas de aula pode ser explicado devido ao contexto histórico-político do problema. A autora afirma que apesar do abandono da geometria no ensino ser uma tendência geral, era um problema mais evidente no ensino público que foi agravado após a promulgação da Lei 5692/71 (BRASIL, 1971), que permitiu ao professor elaborar seu programa de acordo com a necessidade de seus alunos.

Todavia, essa liberdade concedida pela lei possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação ou a colocavam no final do ano letivo, usando a falta de tempo como pretexto para não abordá-la. A partir do exposto, surgem alguns questionamentos, dentre os quais: Como está o ensino de geometria no contexto atual? O que vem sendo pesquisado sobre geometria?

Desse modo, um dos pontos que culminou para a escolha em desenvolver a presente pesquisa parte do pressuposto que o ensino da geometria tem sofrido muitas vicissitudes nos últimos decénios, tanto a nível elementar como superior, e não apenas em Portugal. O resultado final de tais vicissitudes tem sido, genericamente, o despreparo de docentes e discentes para as coisas da geometria e a criação de um grande espaço vazio ou "terra de ninguém" onde pululam as mais variadas teorias sobre os conteúdos e os métodos mais adequados para colmatar as grandes falhas na formação geométrica que todos ou quase todos, entretanto, reconhecem como graves e a necessitar de reparação urgente (FIORENTINI, 2007).

No que se refere a estrutura, o trabalho inicia realizando uma abordagem acerca dos elementos históricos perpassando pela Geometria, os elementos de Euclides, além da evolução do conceitos geométrico até chegar ao entendimento abarcado em âmbito atual.

Posteriormente, expõe-se o processo de ensino e aprendizagem da geometria, realizando uma abordagem nos Parâmetros Curriculares Nacionais, na Base Nacional Curricular Comum, cujo foco será os anos finais da educação básica, para desse modo, adentrar no entendimento acerca do conceito de retas paralelas e perpendiculares, enfatizando a visão do professor sobre axiomas de incidência e teorema do ângulo interno alternado.

Sequencialmente, adentra-se no campo da metodologia, enfatizando a teoria de Van Hiele e o percurso escolhido para os procedimentos, em função de chegar na exposição dos resultados análises na realização da oficina na escola campo.

2 CONTEXTUALIZANDO

2.1 HISTÓRICO

Em vias históricas, a geometria está presente de diversas formas e em variadas situações cotidianas, seja na natureza, nos objetos de uso comum, nas artes, nas brincadeiras infantis, nos jogos, nas construções, dentre outros. Ela faz parte da vida do ser humano desde a antiguidade, sendo um dos ramos mais antigos da matemática que estuda o espaço e as formas que podem ocupá-lo.

Masseto (2004) e Braz (2009) relatam que a matemática surgiu das necessidades básicas, em especial da necessidade econômica de contabilizar diversos tipos de objetos. De forma semelhante, a origem da geometria deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medir), que está intimamente ligada à necessidade de melhorar o sistema de arrecadação de impostos de áreas rurais como descrito por Heródoto:

> Disseram-me ainda os sacerdotes que Sesóstris realizou a partilha das terras, concedendo a cada Egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à posição restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia (HERÓDOTO, s/a p. 116).

Os gregos, ao contrário dos egípcios, apreciavam a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seus interesses teóricos, desejando compreender a matéria por ela mesma, e não em termos de sua utilidade. Aos gregos não bastou apenas o critério empírico, procuraram encontrar demonstrações dedutivas e rigorosas das leis acerca do espaço, que governam aplicações práticas da Geometria (GREEMBERG, 1980).

Em tempos regressados, a geometria era uma ciência empírica, uma coletânea de regras práticas para obter resultados aproximados. Os babilônicos, entre 2000 e 1600 a.C., consideravam o valor de π (razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência) como sendo igual a 3, valor este que também se encontra mencionado em escritos chineses antigos e é utilizado por arquitetos romanos, apesar de alguns povos como os judeus e os egípcios conhecerem aproximações melhores, como $22/7$ e $(16/9)^2$ (EVES, 1997)

Os geômetras egípcios acertavam, por vezes, no resultado correto, como no caso do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, outras vezes erravam grosseiramente, como na área de um quadrilátero convexo arbitrário, calculada como se fora um retângulo [produto das semissomas das medidas dos lados opostos, que corresponde à fórmula $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

Os babilônicos eram mais avançados que os egípcios em aritmética e álgebra e conheciam bem o famoso *Teorema de Pitágoras*, cuja primeira demonstração é atribuída aos pitagóricos muitos séculos mais tarde, e o seu recíproco que narrava: "Para qualquer triângulo com lados l, m, e r, se $l^2 + m^2 = r^2$, então o ângulo entre l e m mede 90°" (Demonstração de Euclides no livro Os Elementos).

Por outro lado, usando palavras: “Se num triângulo o quadrado em um dos lados for igual à soma dos quadrados construídos sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo é um ângulo reto” (Demonstração de Euclides no livro Os Elementos).

Mas é sem dúvida com os geômetras gregos, começando com Tales de Mileto (624-547 a.C.), que a geometria é estabelecida como teoria dedutiva. A intuição, a descoberta empírica e a experimentação têm o seu lugar, mas é o raciocínio dedutivo, a demonstração ou dedução a partir de hipóteses conhecidas ou admitidas que por sua vez estabelecem a denominada veracidade das proposições geométricas.

O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos, foi o primeiro a quem é atribuída a dedução na matemática. Há cinco proposições geométricas para as quais ele escreveu demonstrações dedutivas, embora suas demonstrações não tenham sobrevivido. Pitágoras (582 - 496 a.C.) da Jônia, e mais tarde, na Itália, em seguida, colonizada por gregos, pode ter sido um aluno de Tales, e viajou pela Babilônia e Egito.

O teorema que leva seu nome pode não ter sido sua descoberta, mas ele foi provavelmente um dos primeiros a dar uma prova dedutiva dele. Ele reuniu um grupo de estudantes em torno dele, para estudar matemática, música e filosofia, e, juntos, eles descobriram mais do que os alunos do ensino médio aprendem hoje em seus cursos de geometria. Além disso, eles fizeram a descoberta profunda de comprimentos incomensuráveis e números irracionais, cuja primeira descoberta é geralmente atribuída a Hipaso de Metaponto (PÉTIN, 2004).

O poder dos números são elementos essenciais da crença pitagórica na racionalidade do universo, mas, admitindo apenas inteiros (positivos) e suas razões ou, como se diz modernamente, números racionais (positivos), tal descoberta pôs em causa os fundamentos filosóficos da escola e determinou o seu encerramento. Como diz o historiador Próclo (410; 485): "É sabido que o homem que primeiro tornou pública a teoria dos irracionais pereceu num naufrágio, para que o inexprimível e inimaginável nunca fosse revelado".

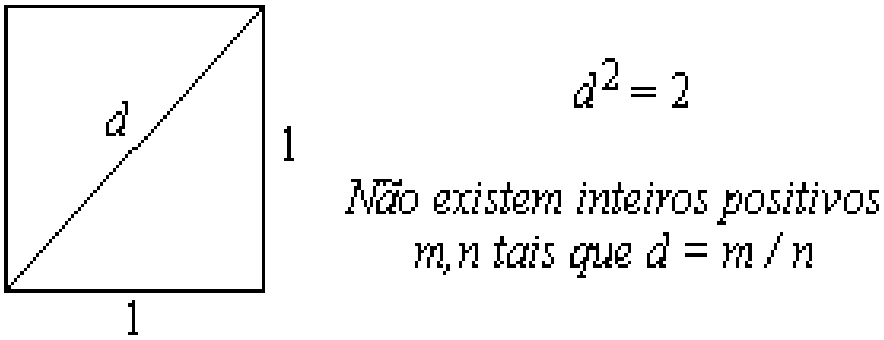
Entretanto, não existem documentos matemáticos de produção pitagórica, nem é possível saber-se exatamente a quem atribuir a origem das descobertas matemáticas dos pitagóricos na aritmética e na geometria, mas o essencial das suas contribuições geométricas consta nos *Elementos* de Hipócrates de Quios por volta de 400 a.C., também perdido para a historiografia mas sistematizado nos Livros I a IV dos *Elementos* de Euclides um século mais tarde (BOYER, 1996).

A aritmética dos pitagóricos, por seu turno, está descrita no livro VII do famoso tratado de Euclides, enquanto o livro V contempla uma resolução do problema dos incomensuráveis com uma nova teoria das proporções atribuída a Eudóxio de Cnido (c. 408; 355). Eudóxio é um dos maiores matemáticos da antiguidade, juntamente com Arquimedes, e um dos expoentes da Academia fundada por Platão (c. 429; 347 a.C.) em Atenas no ano de 387 a.C. (BOYER, 1996).

Na *República*, Platão expõe a sua concepção da matemática como uma atividade mental mais valiosa do que mil olhos, pois só através dela pode a verdade ser apreendida. Os sentidos só percepcionam sombras de coisas reais (alegoria da caverna). Para corrigir os erros dos sentidos, somente o pensamento dialético, exercitado através do estudo da matemática.

Como exemplo pertinente de aplicação do método socrático, percursor do método indireto (*reductio ad absurdum*) Platão citava a famosa demonstração de incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o lado (que, modernamente, se exprime pela irracionalidade).

Figura 1 - Demonstração de incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o lado



Fonte: https://www.google.com.br/search=Demonstra+incomensurabilidade/

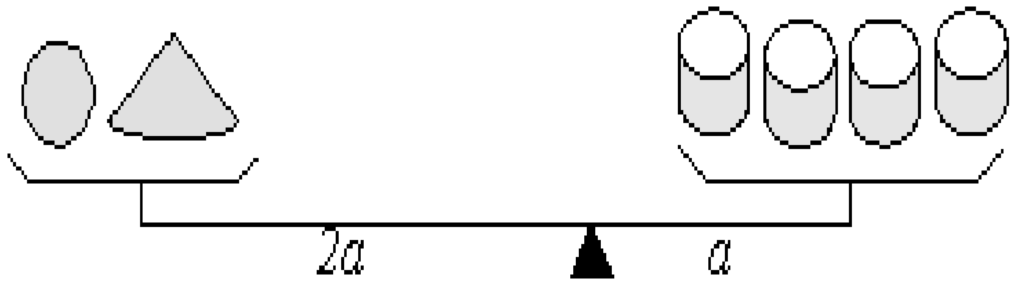
A pertinência deste exemplo consiste na observação de que a referida incomensurabilidade nunca poderia ser descoberta a partir de observações ou medições experimentais, as quais estão sempre sujeitas a um erro maior ou menor. A matemática, portanto, é um produto do puro pensamento discursivo – as suas verdades são estabelecidas pelo raciocínio dedutivo e não pela verificação experimental. Isto não quer dizer, obviamente, que as noções e teorias matemáticas não sejam motivadas por, ou tenham aplicações em coisas práticas, mas apenas que estes aspectos são em algum sentido estranhos aos requisitos e critérios matemáticos intrínsecos (MEDEIROS, 2011).

Esta concepção é exemplarmente desenvolvida pelo discípulo da escola platónica, Euclides de Alexandria (c. 323;285 a.C.), no tratado *Elementos*, em treze volumes ou livros publicados por volta de 300 a.C. Euclides baseia-se nos seus predecessores gregos: os pitagóricos, nos livros I–IV, VII e IX, Arquitas no livro VIII, Eudóxio nos livros V, VI e XII e Taeteto nos livros X e XIII. Mas Euclides não se limita a expor as teorias destes mestres. No que respeita à geometria, Euclides organiza as matérias de um modo sistemático a partir de primeiros princípios e definições, procedendo ao desenvolvimento por via dedutiva. Inaugura assim, de maneira brilhante que domina o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado *método axiomático*. (OLIVEIRA, 1998).

Arquimedes de Siracusa (c. 287; 212) é o segundo grande matemático da chamada primeira escola de Alexandria. Os seus escritos são em regra concisos, mas plenos de originalidade. A sua obra prima é o tratado *Da esfera e do cilindro* contendo, entre outros, o célebre resultado de que a razão entre as áreas da superfície de uma esfera e de um cilindro no qual a esfera está inscrita é igual a $\frac{2}{3}$, e é também igual à razão entre os respectivos volumes. (OLIVEIRA, 1998).

Em um importante documento escrito, na forma de uma carta dirigida a Eratóstenes (bibliotecário no Museu de Alexandria) recuperado num antiquário em 1887, publicado em 1906 por Heiberg e conhecido por *O Método*, Arquimedes descreve como descobria os seus resultados. Os argumentos que utilizava – decomposição de superfícies e sólidos em faixas ou fatias infinitesimais e sua colocação judiciosa nos pratos de uma alavanca interfixa, entre outros – são percursores das técnicas sofisticadas do cálculo integral moderno. Em um desses argumentos, sendo conhecidos o volume do cone e do cilindro de bases circulares, Arquimedes equilibra uma esfera e um cone circular (com altura e raio da base iguais ao diâmetro da esfera) com quatro cilindros circulares (também com altura igual ao diâmetro da esfera e raio da base igual ao raio da esfera) para deduzir a fórmula do volume da esfera $\left(V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3\right)$.

Figura 2 - Demonstração do volume da esfera



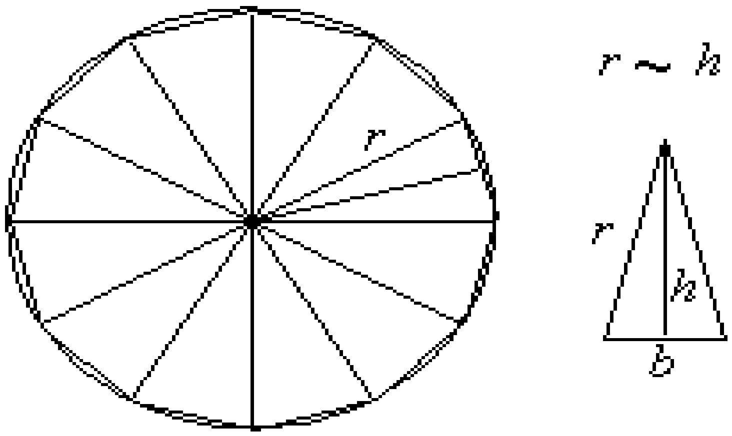
Fonte: http://www.prof2000.pt/users/amma/af33/trt1/geo10_p33-39.htm

Todavia, Arquimedes não confia no rigor justificativo dessas técnicas, por isso, ao publicar os seus resultados, fá-los acompanhar de demonstrações no estilo euclidiano clássico, usualmente pelo método de exaustão e compressão (uma dupla redução ao absurdo).

Um exemplo de uma heurística infinitesimal (utilizada por Kepler no séc. XVII) para descobrir a relação entre a área (A) e o perímetro (P) de um círculo de raio r é a seguinte. Imagine-se um polígono regular inscrito na circunferência do círculo com um número muito grande de lados, e tirem-se raios do centro da circunferência para os vértices, formando um número igual de pequenos triângulos cujas bases são os lados do polígono.

Se o número de lados for infinitamente grande, cada lado é infinitamente pequeno, o polígono confunde-se com a circunferência e a altura de cada triângulo confunde-se (é infinitamente próxima de) com o raio r da circunferência. Assim, a área de cada triângulo é praticamente igual a: $\frac{1}{2} \times (base) \times (altura) = \frac{1}{2} \times (base) \times r$, a área da região poligonal é a soma das áreas de todos estes triângulos e confunde-se com a área do círculo.

Figura 3: Demonstração da relação entre área e perímetro



Fonte: http://www.prof2000.pt/users/amma/af33/trt1/geo10_p33-39.htm

Ora, somando todas as áreas triangulares, a soma das bases dá o perímetro P da circunferência, donde $A = \frac{1}{2} \times P \times r$. O resultado está correto.

O terceiro expoente da primeira escola de Alexandria é Apolónio de Perga (c. 262–190), um quarto de século mais novo do que Arquimedes. Apolónio estudou e permaneceu em Alexandria, tendo sido cognominado "O Grande Geômetra" pelo seu tratado *Cônicas*, a última obra prima da matemática grega em oitos volumes, dos quais apenas o último chegou até nós. Em outro trabalho, *Tangências*, discute o seguinte problema, que ficou célebre: dadas três figuras planas, cada uma das quais é um ponto, uma reta ou uma circunferência, determinar as circunferências tangentes às três figuras dadas. (OLIVEIRA, 1998)

O autor acima ainda relata que no período áureo da matemática grega declina a partir do terceiro século a.C., particularmente após a morte de Ptolemeu III em 221 a.C. e a agitação política e social que culmina com a destruição parcial do museu/biblioteca de Alexandria. Nos três séculos seguintes são apenas dignos de menção pelas suas contribuições matemáticas Hiparco de Niceia (c. 180–125 a.C.), astrónomo e fundador da trigonometria, por necessidade de ofício, e o geômetra Menelau de Alexandria, já no final do primeiro século da era cristã.

No século II desta época são de mencionar o astrônomo Claudio Ptolomeu, cujas obras *Almageste* e *Geografia* dominam os estudos astronômicos durante muitos séculos. Entre 250 e 350 assiste-se a um ressurgimento dos estudos matemáticos em Alexandria, com Herão, matemático, físico e comentador dos *Elementos*, Diofanto, autor da *Aritmética*, e Papo, outro comentador de Euclides e historiador da geometria. Mencionem-se ainda Teão (c. 364), editor dos *Elementos*, a sua bela e desventurada filha Hipácia (370-415), comentadora dos trabalhos de Apolónio, Ptolemeu e Diofanto, vítima do fanatismo cristão inflamado por Cirilo, patriarca de Alexandria e, finalmente, Próclo (410-485) que estudou em Alexandria, mas mudou para Atenas, tornando-se diretor da Academia. (OLIVEIRA, 1998)

O seu comentário ao livro I dos *Elementos* contém valiosa informação sobre a história da geometria pré-euclidiana. O último diretor da Academia ateniense foi Damasco que, com o seu discípulo Simplício, conseguiu fugir para Bagdade quando o imperador Justiniano encerrou aquela instituição em 529, alegadamente por motivo do ensino pagão e perverso que aí se ministrava. Esse ano marcou o início da Idade das Trevas. (OLIVEIRA, 1998)

2.1.1 Os elementos de Euclides

Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos (GARBI, 2006, p.49). Sobre esta obra de Euclides, afirma Eves (1994, pág. 167): “... nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu maior influência no pensamento científico”.

Segundo Boyer (1996) os Elementos constituem o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar que já fora escrito, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável.

Segundo Próclo (410-485), os gregos antigos definiam os "elementos" de um estudo dedutivo como os teoremas-mestre, de uso geral e amplo no assunto.

Euclides, no livro Os Elementos, tomou como base cinco axiomas e cinco postulados geométricos e tentou deduzir todas as suas quatrocentos e sessenta e cinco proposições dessas dez afirmações. Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio.

Os Elementos de Euclides constituem um acordo matemático e geométrico versando de 13 livros escrito por volta de 300 a.C. Ele conglomera uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. Os treze livros cobrem a geometria euclidiana e a versão grega antiga da teoria dos números elementar. Euclides pretendia reunir três grandes descobertas do seu tempo: a teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teeteto (diálogo platônico sobre a natureza do conhecimento) e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão. Os seis primeiros livros tratam sobre a geometria plana elementar, apresentados da seguinte maneira segundo textos extraídos das obras de Boyer (1996) e Eves (1997).

Os treze volumes de Os Elementos estão distribuídos em 465 proposições, sendo os seis primeiros volumes abordando a geometria plana, onde os quatro primeiros trazem o conhecimento vindo seguramente do período jônico, em especial da escola Pitagórica, distribuídos da seguinte maneira:

Livro 1 - triângulos, retas paralelas e o teorema de Pitágoras.

Livro 2 - álgebra geométrica.

Livro 3 – trata do círculo e circunferência.

Livro 4 - polígonos regulares inscritos e circunscritos.

Livro 5 - é um estudo geométrico das proporções, derivado dos ensinamentos de Eudoxo de Cnido (390 a.C. - 338 a.C.), astrônomo, matemático e filósofo.

Livro 6 - lida com proporções, similaridades entre polígonos. A origem deste conteúdo é ignorada.

Na sequência os três livros seguintes versam da teoria dos números, e vieram provavelmente da escola Pitagórica.

Livro 7 – traz divisibilidade, números primos, algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum.

Livro 8 - proporções da teoria dos números e sequencias geométricas.

Livro 9 – aplica os resultados dos dois livros anteriores; traz também a soma de uma série geométrica, e a construção de números pares perfeitos.

O próximo destaca os irracionais, isto é, comprimentos de segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado.

Livro 10 – dedicado aos comprimentos de segmentos de reta incomensuráveis (irracionais) com um segmento de reta dado. São conhecimentos atribuídos a Teeteto de Atenas (c. 417 a.C.-369 a.C.).

Finalmente, os três últimos capítulos tratam da geometria espacial de geometria sólida.

Livro 11 – construções no espaço e paralelepípedos, conhecimentos do período jônico.

Livro 12 – “Método de Exaustão”, prismas, cones e esferas, conhecimentos atribuídos a Eudoxo de Cnido.

Livro 13 - lida com os poliedros regulares, da teoria de Teeteto de Atenas.

Essa obra, como a conhecemos, é resultado de muitas alterações ao longo dos séculos, devido às transcrições manuais, traduções e algumas introduções propositais, como a de Theon de Alexandria, que:

> [...] não satisfeito com a versão transmitida por quase 700 anos, em uma linguagem mais clara, inseriu passos às demonstrações, acrescentou demonstrações alternativas e inseriu alguns teoremas secundários totalmente novos (Os Elementos - 300 a.C.).

O quinto postulado do livro I, é o mais famoso dos postulados de Euclides e aquele que tem dado as maiores e melhores discussões entre os matemáticos. Este postulado descreve que:

> É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos” (Os Elementos - 300 a.C.)

Por outro lado, Próclo (410-485) criticou este postulado nos seguintes termos:

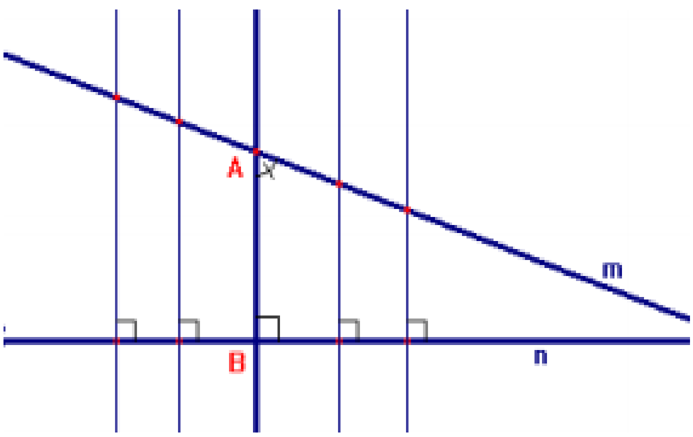
> Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu, em certo livro, se propôs resolver... A asserção de que duas linhas retas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível, mas não necessária. [...]. É claro, portanto, que devemos procurar uma demonstração do presente teorema, e que este é estranho ao carácter especial dos postulados.

Este postulado foi bastante questionado, pois o próprio Euclides e muitos dos seus sucessores tentaram demonstrar esta proposição a partir de outros axiomas da geometria, sempre sem sucesso. Esta incoerência foi durante séculos o escândalo da geometria e o desespero dos geômetras. Muitos tentaram demonstrar o quinto postulado, mas a maior parte das tentativas ou admitiam fatos equivalentes a ele ou faziam uso de afirmações que não podiam ser demonstradas pelos quatros outros postulados.

A primeira tentativa de demonstração de que há conhecimento é de Ptolomeu de Alexandria (90-168), que viveu na época de Euclides, escreveu um livro que apresentava uma prova do quinto postulado, mas essa tinha um erro, pois assumia que paralelismo acarreta na congruência de duas figuras. O principal argumento de Ptolomeu era que se uma reta intercepta uma segunda reta, também interceptará todas as retas paralelas a esta segunda. Essa afirmação é válida apenas na Geometria Euclidiana.

Outro exemplo de uma tentativa frustrada de contornar o quinto postulado de Euclides é feita por Nasir Eddin All Tusin (1201-1274), astrônomo, matemático persa e editor de uma versão dos Elementos para o árabe, Nasir supôs, sem demonstração, o seguinte axioma para deduzir o quinto postulado: sejam m e n duas retas, A um ponto de m e B um ponto de n, tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m. Então as perpendiculares baixadas de m à reta n, do lado do ângulo agudo, são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB.

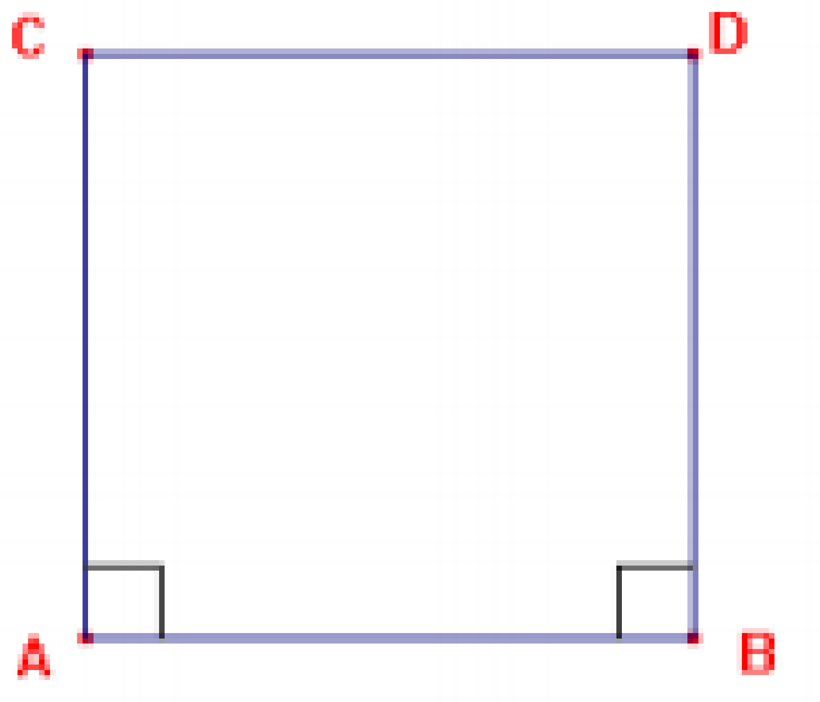
Figura 4 - Axioma de Nasir



Fonte: http://www.mat.ufmg.br/monografiasPdf/Monografia_FernandaMartins.pdf

Em sua demonstração, Nasir usou uma figura que ficou muito conhecida pelo nome de outro matemático. Ele considerou um quadrilátero em que os ângulos da base eram retos e os lados AC é congruente ao lado BD.

Figura 5 - Quadrilátero usado por Nasir

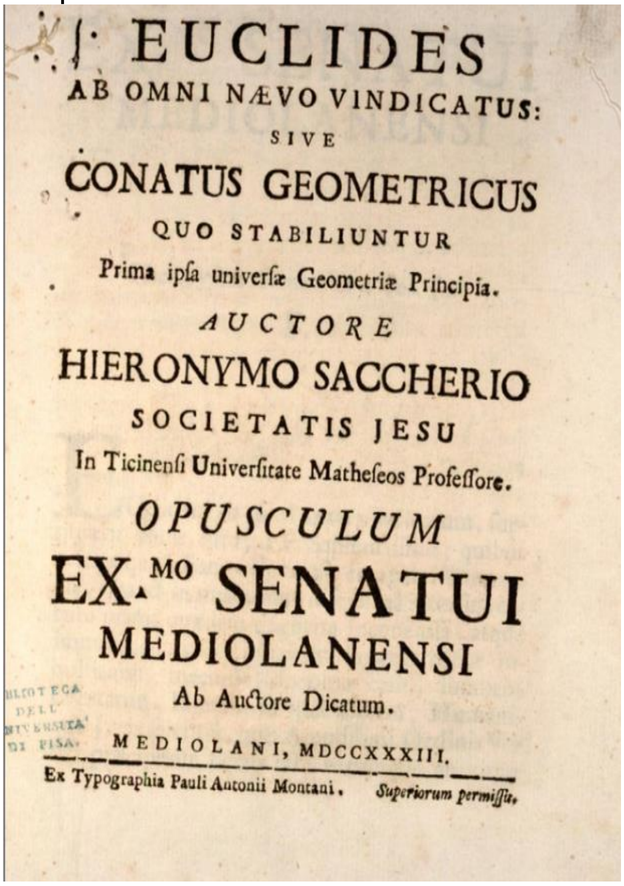


Fonte: http://www.mat.ufmg.br/monografiasPdf/Monografia_FernandaMartins.pdf

A descoberta do modo como calcular o comprimento de uma circunferência e a área de um círculo também foi devido a problemas práticos, como, por exemplo, construções que requeriam paredes curvas. Segundo Bráz (2009) Nasir conclui que a figura é um retângulo, provando que os ângulos C e D são retos. Traçando a diagonal, dividiu o retângulo em dois triângulos, provando a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é 180º, o que é equivalente ao quinto postulado.

O padre jesuíta G. Saccheri (1667-1733) foi talvez o primeiro a ensaiar uma abordagem inteiramente nova. No seu último livro EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATUS (Euclides liberto de todos os erros) tentou utilizar a técnica de redução ao absurdo, admitindo a negação do postulado do paralelismo de Euclides com vista a obter algum absurdo ou contradição. Sem o saber Saccheri tinha descoberto a geometria não-euclidiana.

Figura 6 - Contracapa do livro EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATUS


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiſſu.

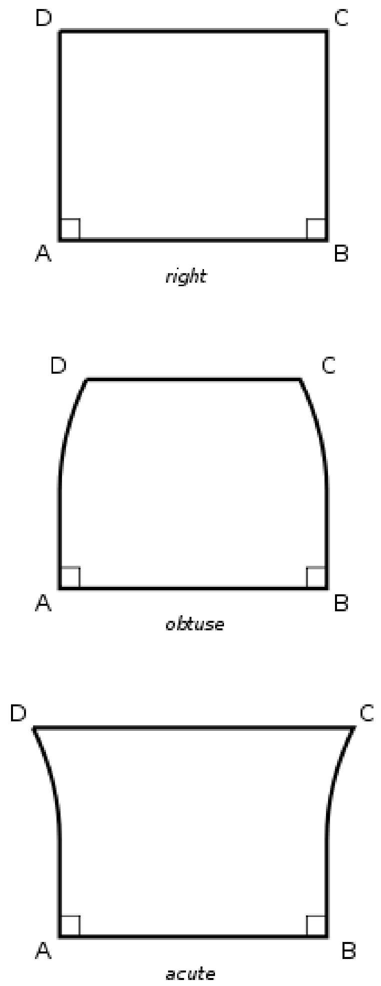
Fonte: http://mathematica.sns.it/opere/263/

Ainda segundos os estudos de Bráz (2009) Saccheri achou interessante o método da prova por redução ao absurdo ao ler os Elementos de Euclides. Todavia, esse método consiste em assumir como hipótese que a proposição a ser demonstrada é falsa. Se durante a demonstração ocorrer alguma contradição, isso implica que a proposição é verdadeira.

Para usar o método descrito acima, Saccheri fez uso de seu conhecimento de Lógica, já que antes de ser professor na Universidade de Paiva, lecionou Filosofia na Universidade de Turim, tendo publicado um tratado de Lógica em 1697 chamado Lógica Demonstrativa, que usava o método de Euclides no tratamento da lógica formal.

Diante do âmbito exposto, vale apena destacar que a figura essencial em seu trabalho é chamada de quadrilátero de Saccheri, que consiste em um quadrilátero ABCD em que os ângulos da base, ângulo A e ângulo B, são retos e o lado AC é congruente ao lado BD.

Figura 7 - Quadrilátero de Saccheri



Fonte: https://www.google.com.br/search=Quadrilatero+de+Saccheri=lnms&tbm

O objetivo era saber se os ângulos C e D eram retos, agudos ou obtusos, sendo esses casos conhecidos por hipótese do ângulo reto, hipótese do ângulo agudo e hipótese do ângulo obtuso, respectivamente. Seu trabalho consistia em três passos:

I. Provar que os ângulos C e D são congruentes;

II. Provar que o quinto postulado equivale com a hipótese do ângulo reto e

III. Provar que o fato dos ângulos C e D serem agudos ou obtusos entra em contradição com uma das 28 primeiras proposições dos Elementos de Euclides.

Para Barbosa (2008, p. 26):

> Se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, simplesmente porque não havia contradição para ser encontrada, a descoberta da Geometria não euclidiana teria ocorrido quase um século antes. Seu trabalho é admirável e, retirados o final e alguns pequenos

> defeitos, o resto é uma prova inequivocada de que Saccheri possuiu grande intuição geométrica e profundo conhecimento de lógica.

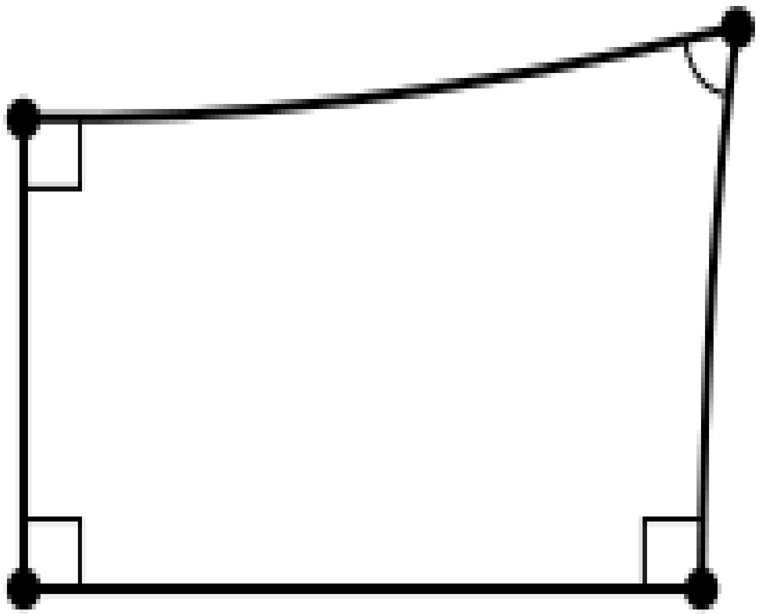
Em seu trabalho, Saccheri mostrou possuir um grande conhecimento em lógica e percepção geométrica, mas mesmo com todos os resultados obtidos, não acreditou na existência de uma nova geometria, devido até a influência religiosa da época. Johann Heinrich Lambert (1728-1777) deu continuidade ao trabalho de Saccheri na tentativa de também encontrar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo e chamou a atenção para a teoria das paralelas, tendo seu trabalho escrito em 1766 e publicado, após sua morte, por G. Bernoulli e C.F. Hindenburg. Lambert considerou um quadrilátero com três ângulos retos e supôs três hipóteses para o quarto ângulo:

I. Hipótese do ângulo reto, equivalente ao quinto postulado de Euclides;

II. Hipótese do ângulo obtuso e

III. Hipótese do ângulo agudo.

Figura 8 - Quadrilátero de Lambert



Fonte: http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/GH/Ativ_08.htm

Como Saccheri, Lambert eliminou a hipótese do ângulo obtuso assumindo que a reta é ilimitada. Todavia, também não chegou em contradição ao tentar demonstrar a hipótese do ângulo agudo, obtendo proposições inusitadas. Entre elas destaca-se a área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos. Essa diferença, conhecida como deficiência do triângulo, tem um papel muito importante na Geometria Hiperbólica e seu valor é igual a zero na Geometria Euclidiana, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º (DO CARMO, 1987).

Lambert observou que a hipótese do ângulo obtuso vale para triângulos esféricos e que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário. Suas observações seriam posteriormente comprovadas pelos matemáticos Riemann e Lobachewsky.

Adrien Marie Legendre (1752 - 1833) foi um grande matemático francês, tendo inúmeras pesquisas em matemática pura e aplicada. Também foi um autêntico professor que se dedicava à educação básica. Escreveu um livro, Elementos de Geometria, largamente utilizado por estudantes, já que o estilo de suas demonstrações era mais simples e acessível. Seu livro também foi muito utilizado no Brasil, alcançando mais de 25 edições.

Legendre publicou várias demonstrações do quinto postulado, mas todas erradas. Seu trabalho era dividido em três hipóteses:

I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º (equivalente ao quinto postulado);

II. A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º e

III. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º.

A comprovação do item I foi facilmente feita e Legendre eliminou a possibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser maior do que 180º, pois encontrou contradição. Porém, as várias demonstrações fornecidas por Legendre de que a soma dos ângulos internos de um triângulo não pode ser menor do que 180º estavam incorretas.

Os três matemáticos (Saccheri, Lambert e Legendre) não conseguiram eliminar a hipótese do ângulo agudo simplesmente porque não existe contradição nem equívoco nessa hipótese. Eles não perceberam que se negassem o quinto postulado teria surgido uma nova geometria.

2.2 EVOLUÇÃO

Ainda no início do século XIX, determinados matemáticos buscavam uma demonstração do quinto postulado de Euclides, mas todas as tentativas foram fracassadas. Apesar disso, todos esses trabalhos e buscas por um resultado serviram como guia para outros matemáticos na descoberta de uma nova geometria. Assim, é válido ressaltar a colaboração de todos aqueles que procuraram uma prova, pois, de certa maneira, eles acenderam o caminho para o árduo trabalho de se construir outras geometrias.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) foi considerado o maior matemático de sua época e contribuiu muito para o desenvolvimento da nova geometria. Na verdade, ele foi o primeiro a designar a nova geometria como não Euclidiana. Desse modo, muitos dos resultados da nova Geometria obtido por Gauss deu-se graças as suas anotações e correspondências que trocava com alguns matemáticos da época, como o trecho da carta escrita por Gauss a F.A. Taurinus, em Göttingem, em 8 de novembro de 1824:

> ... a hipótese que a soma dos ângulos é menor que 180º leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. [...] Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contêm nada de impossível. [...] Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós). (BARBOSA, 2002).

Inicialmente, Gauss tentou provar o quinto postulado usando o método redução ao absurdo, como fizera antes Saccheri e Lambert. Mas na segunda década do século XIX, Gauss começou a deduzir uma nova geometria, formulando ideias e teoremas.

Gauss provou que a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado numa superfície de curvatura negativa constante é proporcional a área do triângulo. Esse trabalho coincidia com o trabalho de Lambert e indicava a existência de uma geometria onde não era válido o postulado das paralelas.

Wolfgang Boylai (1775-1856) era húngaro, foi amigo de Gauss e trocava com ele correspondências sobre a teoria das paralelas. Ambos estavam empenhados na busca por uma demonstração do quinto postulado. W. Boylai apresentou seu trabalho a Gauss, em 1804, esperando ter resolvido o problema, mas Gauss logo identificou erro em sua prova. Quatro anos depois Gauss recebeu uma prova suplementando a demonstração anterior, mas não respondeu comentando o trabalho. Wolfgang colocou suas ideias no livro de dois volumes Tentamen (1832).

Johann Boylai (1802-1860) filho de Wolfgang Boylai, mostrou interesse pela matemática ainda jovem, tendo se dedicado ao estudo da teoria das paralelas, contrariando seu pai, que o aconselhou a não seguir tal caminho. Por carta, seu pai fez um pedido:

> Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de saúde, paz de espírito e felicidade na vida!". Johann gastou muito tempo tentando demonstrar o quinto postulado (BRAZ, 2009).

Em 1820, Johann resolveu negar o quinto postulado de Euclides e resultados interessantes começaram a aparecer. Ele acreditou na possibilidade da existência de uma geometria geral, na qual a geometria euclidiana seria um caso particular.

Ao negar o quinto postulado, existia duas possibilidades:

I. Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta.

II. Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

Porém, é consequência dos primeiros postulados a existência de retas paralelas, eliminando, assim, a hipótese I.

Aceitando a sugestão de seu pai, Johann Boylai publicou um apêndice do Tentamen em 1832, apresentando suas ideias e descobertas. Gauss recebeu uma cópia do Apêndice e ficou surpreso com a genialidade do filho de seu amigo. Segue um trecho de sua resposta a Wolfgang Boylai:

> Se eu começasse com a afirmação de que não ouso louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria; mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados dos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo (BARBOSA, 2002).

Johann ficou desapontado por saber que outro fizera, antes dele, as mesmas descobertas. Durante sua vida não publicou mais nada, porém dedicou-se ao estudo de extensões de suas ideias em espaços tridimensionais e também na comparação de sua geometria não euclidiana com a trigonometria esférica conhecida na época. (BARBOSA, 2002.)

Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) era russo e formou-se na Universidade de Kasan em 1813 e logo tornou-se instrutor, sendo que aos 21 anos de idade tornou-se membro do corpo docente dessa Universidade. Aos 35 anos foi nomeado reitor e é considerado o maior matemático russo de seu tempo. Publicou suas conclusões sobre a geometria não Euclidiana dois anos antes do Apêndice de J. Boylai.

Em 1826, fez uma conferência ao Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kasan em que se negava o quinto postulado. Lobachewsky afirmava que pôr um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela e submeteu um artigo pela Academia de Ciências de S. Petersburgo que inicialmente foi rejeitado.

Em 1829, publicou memórias de suas aulas expondo toda sua teoria das paralelas, seu último livro foi publicado em francês, época em que estava cego. Na verdade, Lobachewsky, Gauss e J. Boylai desenvolveram a geometria não Euclidiana ao mesmo tempo, mas Lobachewsky foi o primeiro a comunicar suas descobertas e não temeu o impacto que seu trabalho poderia causar na teoria Kantiana.

O reconhecimento de seu trabalho veio apenas após sua morte. Em 1871, Klein deu o nome de Geometria Hiperbólica a nova geometria desenvolvida por esses três matemáticos. Grandes matemáticos continuaram o estudo da Geometria não Euclidiana, como Beltrami, Poincaré, Klein e Riemann, desenvolvendo o assunto e aplicando em outras áreas da matemática. (BARBOSA, 2003)

A independência do postulado das paralelas trouxe uma nova visão sobre a geometria e como Gauss havia previsto, a aceitação dessas novas ideias seria lenta. Em 1868, Beltrami provou definitivamente que não era possível provar o quinto postulado, mostrando que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto a geometria euclidiana. Sendo assim, não poderia haver contradição. (BELTRAMI, 1868).

Entretanto a notação formulada por Playfair do quinto postulado de Euclides fala: “Duas retas que se cortam não podem ser ambas paralelas a uma mesma reta”. Atualmente este é mais conhecido como: “Por um ponto fora de uma reta passa uma, e somente uma, reta paralela à primeira reta dada”. (BICUDO, 2009)

2.2.1 Atualidade

Em âmbito atual independentemente dos conteúdos programáticos dos *Guia*s elementares ou superiores, de acordo com os estudos de Ávila (2011, p. 78) é certo, porém, que uma preparação adequada dos docentes passa por um estudo da(s) geometria(s) que contemple, pelo menos, os seguintes aspectos:

> **1)** um pouco de História da Geometria e da sua relação com outras áreas matemáticas, nomeadamente a Álgebra elementar, desde as origens heurísticas (egípcios e babilónicos), passando pelo desenvolvimento e sistematização durante o período helenístico (axiomática de Euclides) e cobrindo, a traços largos, desenvolvimentos posteriores (o problema das paralelas) até ao descobrimento das geometrias não-euclidianas no século XIX; **2)** o estudo, relativamente desenvolvido, de alguma apresentação moderna (axiomática) dos fundamentos da geometria euclidiana e, possivelmente, de elementos de alguma ou algumas geometrias não euclidianas, hiperbólica, esférica, projetiva. Em particular, é imprescindível o conhecimento dos resultados básicos sobre o papel do axioma de paralelismo (na versão de Playfair, para a geometria plana: *para toda a reta r e ponto P não em r, existe uma única paralela a r passando por P*), a congruência e a semelhança de triângulos e sobre circunferências e tangentes, ângulos inscritos, áreas e volumes elementares, etc., que são instrumentais nas aplicações e na resolução de inúmeros e variados problemas, bem como um pouco de geometria sólida; **3)** o conhecimento funcional de estruturas geométricas concretas como as chamadas (modelos de) geometrias finitas e, muito particularmente, do plano e do espaço euclidianos, sob o ponto de vista analítico (isto é, da geometria analítica em tais espaços); **4)** o conhecimento das transformações geométricas e seus grupos, no plano e no espaço euclidianos, suas propriedades, pontos e retas invariantes e classificação.

Todavia, deve-se ter em conta que a maioria dos atuais e futuros docentes de matemática não tiveram *Guia*s formativos que cobrissem todos os tópicos anteriores ou, sequer, uma percentagem significativa de tais tópicos, e não é certamente de esperar que os adquiram por excepcional intuição a partir dos fragmentos dispersos que podem consultar nos manuais escolares. Daí a necessidade imperiosa de investir algum esforço na aprendizagem autodidata através de algumas leituras bem escolhidas.

Este Guia vai um pouco na sensibilização para essas faltas, sobretudo, nesta parte, no sentido de encaminhar o leitor interessado para algumas visitas guiadas a manuais e outros elementos de estudo criteriosamente escolhidos nos quais encontrará, para além das matérias científicas pertinentes, elementos de natureza lúdica, aplicações interessantes, e inúmeros problemas de diferentes graus de dificuldade para utilizar na sala de aula, na certeza de que a Geometria é a seara das mais ricas e gostosas colheitas.

Os estudos de Martins (2008) revelam estudos sobre a evolução da Geometria, porém de maneira crítica, haja vista que, segundo a autora, o conteúdo de Geometria está geralmente no final do livro didático e isso prejudica a aprendizagem por não existir a correlação com a Álgebra. E também, o tempo das aulas de Matemática não é suficiente para chegar aos conteúdos do final do livro, onde se encontra a Geometria.

Candido (2009) corrobora com Martins afirmando que ainda há pouca importância nos currículos de cursos de formação de professores, pois a geometria possui uma fragilíssima posição, quando aparece. Sendo assim:

> Como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico. Até mesmo nos cursos de Licenciatura os alunos apresentam grande dificuldade na compreensão e demonstração dos processos geométricos, não sabem usar e nem representar os conceitos básicos (CÂNDIDO, 2009, p. 123).

Nesse sentido, a geometria é colocada como um complemento e de modo fortemente fragmentado, por assunto ou por série. A geometria é para ser trabalhada junto com a aritmética e a álgebra não como algo que não faz sentido com os demais conteúdos.

A ausência do material concreto, do experimental no ensino da Geometria é um dos principais motivos da falta de entendimento da disciplina por parte dos alunos. É preciso oferecer situações onde eles visualizem, comparem e desenhem formas, é o momento de dobrar, recortar, moldar, deformar, montar, fazer sombras. Pode parecer um passatempo, mas é uma etapa de fundamental importância para a aprendizagem das formas geométricas. A ideia de conhecimento tem ligação com a de significado, pois conhecer é cada vez mais, entender o significado, e o processo de atribuições de significados depende das experiências de vida de cada um (D’AMBRÓSIO, 2001).

Nessa linha, a aprendizagem se constitui por um processo de construção de significados e reelaboração dos conhecimentos. As atribuições desses significados ainda seguem um processo que difere de cada pessoa. A partir disso, o próximo capítulo do presente trabalha objetiva realizar uma abordagem sobre as concepções que cercam o ensino e a aprendizagem da Geometria, uma vez que, no contexto da construção do conhecimento é necessário oferecer ao aluno curiosidades e desafios para que com isso cada um possa encontrar seu próprio caminho para o significado e o conhecimento. Essas situações devem ter a maior proximidade entre o cotidiano e o aluno.

3 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

3.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNS) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

A geometria é um ramo da matemática que analisa as formas planas e especiais, com as suas características, ela está alheia ou quase alheia na sala de aula devido ao despreparo de alguns professores para ensinar tal disciplina, por falta de materiais didáticos pedagógicos e quando é ensinado, torna-se de difícil compreensão e até mesmo sem significado para aprender, contribuindo assim para o interesse do aluno.

Entretanto, segundo Perez (2011) os Parâmetros Curriculares nas séries iniciais, propõem mudanças de enfoque aos conteúdos curriculares, pois os mesmos são abordados muitas vezes de maneira equivocada, não sendo tratados como objeto de ensino, que necessitam de intervenções direta do professor para serem de fato aprendidos. O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas a própria matemática, mais voltada para à teoria do que a prática.

Em 1997, a Secretaria de Ensino Fundamental do Ministério de Educação, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN –, publicou os eixos norteadores dos conteúdos a serem trabalhados em todo o território nacional, no Ensino Fundamental. No que diz respeito à Matemática, a Geometria apresenta-se distribuída, ao longo de todo o Ensino Fundamental, em dois grandes blocos denominados “Espaço e Forma” e “Grandezas e Medidas”.

No bloco “Espaço e Forma”, tem-se como um dos objetivos para as séries iniciais a exploração do espaço, ou seja, o posicionamento da criança em seu ambiente, a comparação de objetos e a construção, a exploração e a representação de figuras geométricas. No bloco “Grandezas e Medidas”, um dos objetivos propostos é a compreensão de medida, das unidades de medidas e seu uso (BRASIL, 1997).

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) destaquem a importância de se resgatar o trabalho com geometria no Ensino Fundamental, a maioria dos professores não sabe claramente o que fazer. Os PCNs (1998) enfatizam a importância da geometria no quarto ciclo (7ª e 8ª série) e da importância da construção de situações-problema que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas.

Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. “A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos”. (BRASIL, 1998, p.86)

A exemplo do que fora exposto, quando se privilegiam as noções de “ponto, reta e plano” como referência inicial para o ensino de geometria, é muito importante que se leve em conta o conhecimento prévio do aluno na construção de significados que geralmente são desconsiderados.

> Uma vez que a criança reconheça a permanência dos objetos ela pode pensar neles e referir-se a eles mesmo em sua ausência. Ela também torna-se capaz de reconhecer as similaridades entre determinados objetos – por exemplo o fato de que todas as xícaras (apesar de diferenças em tamanho e cor) pertencem a mesma classe (GARDNER, 1994, p.101).

Os conceitos geométricos são fundamentais no currículo de matemática, principalmente no ensino fundamental (ciclo 1), pois permite ao aluno compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Explorando objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, levando o aluno a estabelecer conexões concretas entre a matemática e as outras áreas do conhecimento.

> A experimentação facilita que o aluno levante hipóteses, procure alternativas, tome novos caminhos, tire dúvidas e constate o que é verdadeiro, válido, correto ou solução. Experimentar é valorizar o processo de construção do saber em vez do resultado dele, pois na formação do aluno, mais importante que conhecer é saber como encontrá-la. Enfim, experimentar é investigar (LORENZATO, 2006, pág. 72).

Nesta fase, a geometria é trabalhada com atividades que levam o aluno a estabelecer diferentes pontos de vista, que são necessários a coordenação espacial e noções de direção, sentido, distância e ângulos essenciais à construção do pensamento geométrico.

No segundo ciclo do ensino fundamental, o aprofundamento do ensino da geometria dar-se-á por meio de atividades que possibilitem a utilização de malhas, diagramas, tabelas e mapas, com atividades interdisciplinares como por exemplo na geografia, na astronomia, em educação física, em ciências e artes. Sendo assim:

> A produção do conhecimento com autonomia, com criatividade, com criticidade e espírito investigativo provoca a interpretação do conhecimento e não apenas a sua aceitação. Portanto, na prática pedagógica o professor deve propor projetos que provoquem um estudo sistemático, uma investigação orientada, para ultrapassar a visão de que o aluno é produto e objeto, e torná-lo sujeito e produto do próprio conhecimento (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2006, pág. 87).

Os PCN’s apenas mostram uma direção para a seleção dos conteúdos a serem desenvolvidos nas salas de aula, ou seja, deixa a responsabilidade de escolha dos conteúdos para as secretárias de educação que fazem a organização da matriz curricular que poderá ser ou não seguida na sua totalidade pelos professores nas escolas. Dessa maneira, segundo os PCN’s os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática, pois por meio deles o aluno deve ser capaz de compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive.

> Com essa visão enfatiza-se ter prazer em descobrir, em investigar, em ter curiosidade, em construir e reconstruir o conhecimento. Aprender a conhecer implica aprender a aprender, compreendendo a aprendizagem como um processo que nunca está acabada (MORAN, MASETTO, BEHRENS, 2006, pág. 79).

O próprio documento redigido em 1996, ou seja, à 21 anos já demonstrava a preocupação com o ensino da geometria, pois a mesma tinha pouco destaque nas aulas de matemática, onde por muitas vezes tinha o seu ensino confundido com o ensino de medidas.

Os conteúdos desenvolvidos nos 3º e 4º ciclos devem desenvolver no aluno o domínio das materializações (o espaço físico, ele próprio), o domínio das figuras geométricas (a geometria, concebida como modelização desse espaço físico) e o domínio das representações gráficas (os sistemas de representação plana das figuras espaciais) (DANTE, 2012).

É fundamental que os alunos tenham atividades que explorem a composição e decomposição de figuras, o que facilitaria a compreensão de conteúdos como por exemplo: Área e perímetro de figuras planas, soma dos ângulos internos, determinação do número de diagonais, simetrias e etc. Posto isso:

> Inicialmente, o ambiente geométrico possibilita ao aprendiz desenvolver suas impressões sobre a estrutura matemática, necessitando basear-se em um ambiente real para interagir. Já em um estágio mais avançado, esse ambiente geométrico adquire um significado mais amplo, não precisando de um ambiente real (concreto) que o fundamente. O aprendiz já compreendeu e produziu um significado que, partindo de um número reduzido de axiomas, postulados e definições, pode constituir, por via dedutiva, um conjunto de apropriações geométricas (FAINGUELERNT, 1999, p. 51).

As aplicações dessas atividades são fundamentais para que o professor construa junto com seus alunos um caminho concreto que os leve a compreender os conceitos e aplicações do objeto de estudo. Por outro lado, no ensino médio o estudo de temas geométricos possibilita a exploração de interessantes aspectos históricos, como sabemos a geometria é um dos ramos mais antigos da matemática, que se desenvolveu em função das necessidades humanas.

O estudo da matemática no ensino médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém, a matemática não deve possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, onde o aluno seja capaz de perceber que a definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos, tem a função de construir novos conceitos e resoluções de situações-problema.

> A produção do conhecimento com autonomia, com criatividade, com criticidade e espírito investigativo provoca a interpretação do conhecimento e não apenas a sua aceitação. Portanto, na prática pedagógica o professor deve propor projetos que provoquem um estudo sistemático, uma investigação orientada, para ultrapassar a visão de que o aluno é produto e objeto, e torná-lo sujeito e produto do próprio conhecimento (MORAN, MASETTO, BEHRENS, 2006, pág. 87).

Assim, pode-se afirmar que o ensino da geometria deve ser mais do que memorizar fórmulas, e que a aquisição do conhecimento geométrico deve estar vinculada ao domínio do pensamento geométrico. Partindo disso, mesmo ainda deixado um pouco de lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais prezam no sentido de que a prática pedagógica possa realmente ocorrer, torna-se necessário um ensino de geometria (assim como de toda a Matemática) que permita alunos liberdade dê expressão, descoberta, iniciativa, originalidade e crítica, onde a criatividade não seja sufocada, ignorada. E o principal construtor desse ambiente, em sala de aula, é sem dúvida, o professor, que não poderá esquecer-se de que cada criança é um indivíduo com qualidades únicas, com ideias e valores próprios.

3.2 CONSIDERAÇÕES SOBREA A BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM (BNCC): os anos finais da educação básica

É necessário que o aluno ao final da educação básica tenha o conhecimento matemático bem definido em todas as suas áreas (aritmética, álgebra, geometria, estatística, probabilidade e trigonometria) pelo fato das suas grandes aplicações na sociedade contemporânea, e pelas suas potencialidades na formação de um cidadão mais crítico e ciente de suas responsabilidades sociais.

> ... a matemática, em sentido amplo, permite uma análise crítica sobre seu papel na melhoria da qualidade de vida, abordando inúmeras interpretações sobre o que representa a ciência para o bem-estar do ser humano (D'AMBROSIO, 2004).

O estudo da matemática não se restringe apenas a matematização dos fenômenos determinísticos, ela cria e sistematiza sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico.

É fundamental que o aluno no final da educação fundamental tenha competência e habilidade para desenvolver estratégias de resolução consolidadas por axiomas e postulados inerentes aos conteúdos desenvolvidos nessa etapa do processo ensino-aprendizagem, por se tratar de uma ciência hipotético-dedutiva. É nosso papel como educador e formador desse aprendizado considerar o papel heurístico das diversas experimentações desenvolvidas nessa etapa.

A educação matemática precisa ser compreendida como:

> Uma educação global que leve o aluno a trabalhar em harmonia e compreensão, a desenvolver padrões de comportamento positivo, criatividade, cooperação, responsabilidade e preocupação com o destino das outras pessoas. Uma educação que respeite os direitos humanos, que favoreça a compreensão mútua e a solução pacífica dos conflitos. (MORAES, 1997).

O letramento matemático é uma ferramenta indispensável para a definição das habilidades e competências de raciocinar, representar, construir, comunicar e argumentar matematicamente as situações-problema, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimulando a investigação e tornando o aprendizado mais prazeroso.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem, são fundamentais no desenvolvimento das competências necessárias ao aluno para desenvolver o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação matemática.

Segundo a Base Nacional Curricular Comum, a matemática conta com diferentes campos que devem articular entre si, construindo um conjunto de ideias. Nesse trabalho o nosso objeto de estudo é a geometria.

A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos fundamentais na resolução de problemas do cotidiano e também de diferentes áreas do conhecimento. O estudo do desenho geométrico proporciona ao aluno no seu desenvolvimento lógico – dedutivo e também favorece o crescimento da criatividade. Logo, de acordo com Jacques Bernoulli (s/a) “A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida”.

Os conteúdos desenvolvidos nessa unidade temática devem desenvolver no aluno, as habilidades e competências necessárias a construção do pensamento geométrico. Diante do exposto, observa-se que o estudo das retas paralelas e perpendicularidade é muito relevante, pois seus conceitos são bastante utilizados em áreas como a arquitetura e urbanismo, engenharias, geografia, geologia e em diversas situações do cotidiano.

3.3 RETAS PARALELAS E RETAS PERPENDICULARES

Inicialmente, ressalta-se o fato de este ser um tópico dedicado àqueles que pretendem elaborar suas aulas de modo planejado e com uma base sólida relacionada ao conteúdo retas paralelas e retas perpendiculares, sendo este elaborado pelo autor da presente pesquisa, completamente baseado em sua experiência docente.

Muitos foram os matemáticos que tentaram provar o quinto postulado do livro I dos Elementos de Euclides, porém, quando alguém pensava que tinha "provado" logo se descobria que a "demonstração" apenas trocava o enunciado original por outro equivalente. Desse modo, o quinto postulado de Euclides ou axioma das paralelas afirma que “Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m”.

Barbosa (2006) demonstra esse axioma pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, que afirma se duas retas m e n são cortadas por uma reta transversal t formando um par de ângulos interiores alternados congruentes, então as duas retas são paralelas. Nessa linha, segue a demonstração:

3.3.1 Axiomas de Incidência:

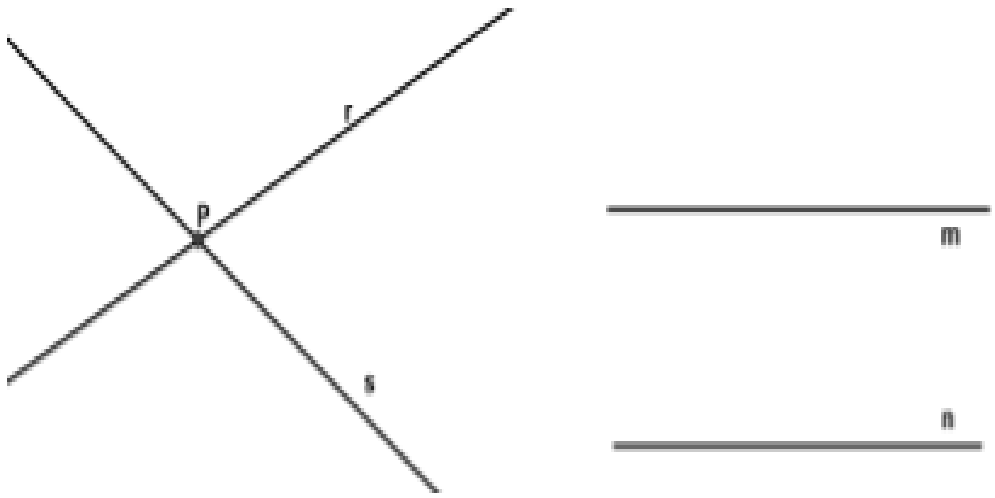
Axioma de Incidência 1: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Axioma de Incidência 2: Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.

Axioma de Incidência 3: Existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa pelos três pontos.

Definição 1 - Duas retas intersectam-se quando elas possuem um ponto em comum, se elas não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas paralelas.

Figura 9 - r e s se intersectam no ponto P e m e n são paralelas



Fonte: ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf

Proposição 1 - Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.

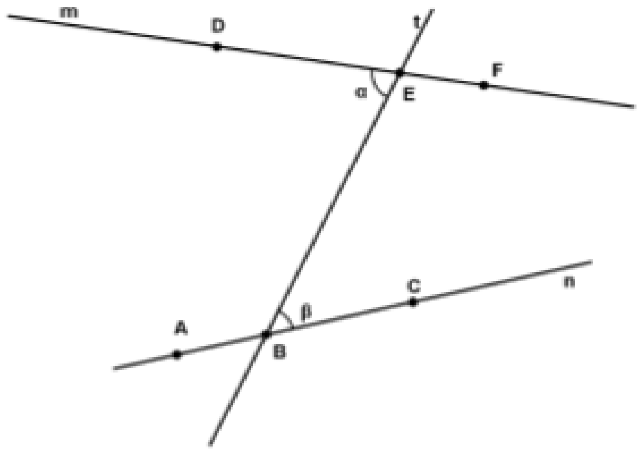
Sejam m e n duas retas distintas. Se m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum então, pelo Axioma de Incidência 1, m e n coincidem, que é uma contradição com o fato que m e n são retas distintas. Logo, m e n ou possuem um ponto em comum ou nenhum.

Portanto, está proposição afirma que se duas retas não são paralelas, então elas têm um ponto em comum.

3.3.2 Teorema do Ângulo Interno Alternado

Seja t uma reta transversal a duas retas m e n, com t interceptando m em E e n em B. Escolha pontos D e F em m tais que D∗E∗F, e pontos A e C em n tais que A e D estejam no mesmo lado de t e A $*$ B $*$ C. Os ângulos $D\hat{E}B,\ F\hat{E}B, A\hat{B}E\ e\ C\hat{B}E$ são chamados ângulos interiores. Os pares de ângulos ($A\hat{B}E$, $F\hat{E}B$) e ($D\hat{E}B$, $C\hat{B}E$) são chamados de pares de ângulos interiores alternados.

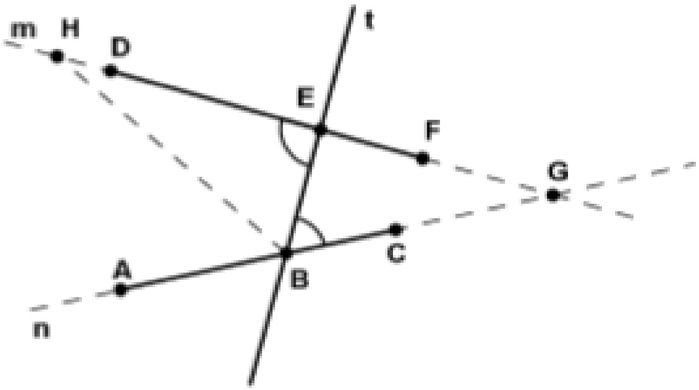
Figura 10 – α e β são ângulos internos alternados



Fonte: ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf

Suponha que m ∩ n = {G} e $D\hat{E}B = C\hat{B}E$. Podemos supor que G está no mesmo lado de F e C (ver figura). Existe um ponto H na semirreta S_{ED}, tal que HE = BG. Considere os triângulos HEB e GBE. Como HE = BG (por construção), EB = BE (lado comum) e $H\hat{E}B = C\hat{B}E$ (Ângulos Internos Alternados), pelo caso de congruência L.L.A. $\Delta HEB =\ \Delta GBE$.

Figura 11 – Interseção de m e n no ponto g



Fonte: ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf

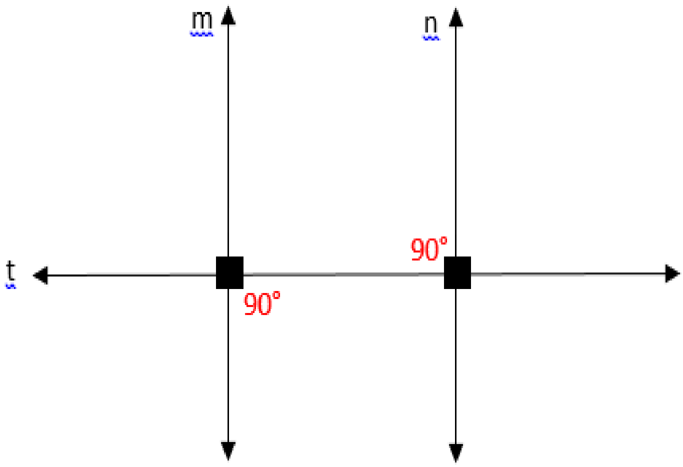
Em particular, $G\hat{E}B = H\hat{B}E$. Mas como $G\hat{E}B$ é o suplementar de $H\hat{E}B$, segue que os ângulos $H\hat{B}E\ e\ G\hat{B}E$ são suplementares. Isto implica que S_{BH} e S_{BG} são semirretas opostas. Como S_{BA} é oposta a S_{BG}, segue que S_{BA} = S_{BH}. Portanto H pertence a m ∩ n. Contradizendo a Proposição 1 que afirma que "Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto". Logo, m e n são paralelas.

Este teorema também exibe duas importantes consequências para as retas perpendiculares, apresentada pelos seguintes corolários.

Corolário 1 - Duas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

Demonstração: Se m e n são retas distintas perpendiculares a uma reta t, então os ângulos interiores alternados são retos, portanto, congruentes. Logo, o Teorema do Ângulo Interior Alternado implica o resultado.

Figura 12 – Retas m e r perpendiculares a reta t

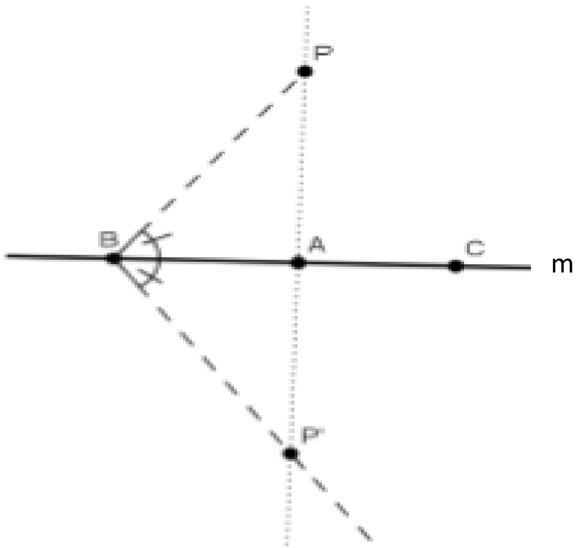


Fonte: Acervo do autor

Corolário 2 - Dada uma reta m e um ponto P fora dela, existe uma única reta l perpendicular a m passando por P.

Demonstração (Existência) – Tome dois pontos distintos em m, B e C. Se PB é perpendicular, terminou a construção. Caso contrário, no semi-plano oposto ao que contém P, trace uma semirreta com origem em B formando com S_{BC} um ângulo congruente com $P\hat{B}C$ (por construção). Nesta semirreta, tome um ponto P' tal que P'B = PB (por construção). Considere os triângulos ABP e ABP', onde A é o ponto de interseção de PP' com m. Pelo Caso de Congruência de Triângulos LAL, segue que ABP = ABP' (Por quê?) Como $P\hat{A}B$ e $P'\hat{A}B$ são congruentes e suplementares, segue que PP' é perpendicular a m.

Figura 13 – Perpendicularidade entre PP' e m



Fonte: ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf

(Unicidade) Suponha que existam duas retas perpendiculares a m passando por P. Pelo Teorema do ângulo interno alternado, as retas coincidem, já que todos os ângulos internos são retos.

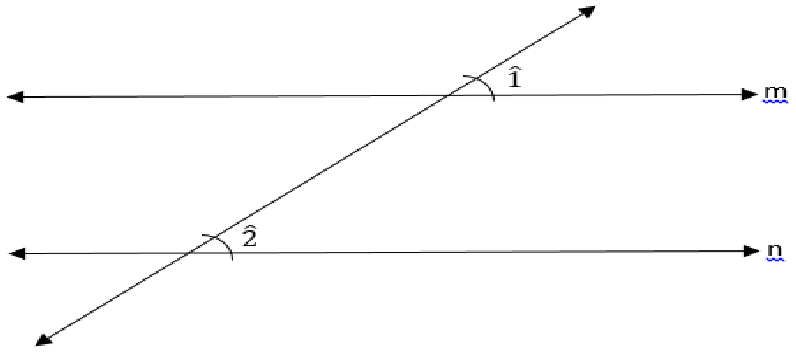
O ponto A da demonstração anterior é chamado de pé da perpendicular baixada de P a m.

Vale destacar também a abordagem feita pelo professor Elon Lages Lima (*in memoriam*) no livro A Matemática do Ensino Médio – SBM (2006) que muito contribui para a formação do pesquisador, na qual explanou que "duas retas concorrentes são perpendiculares quando se encontram formado quatro ângulos iguais", essa abordagem feita pelo professor e encontrada quase que na integra nos livros didáticos dos ensinos fundamental e médio.

O axioma das paralelas também é utilizando quando determinamos os ângulos formados pela interseção entre paralelas e transversais. Podemos partir da seguinte proposição.

Proposição – Sejam m, n, $\hat{1}$ e $\hat{2}$ como na figura. Se $\hat{1} = \hat{2}$, então as retas m e n são paralelas.

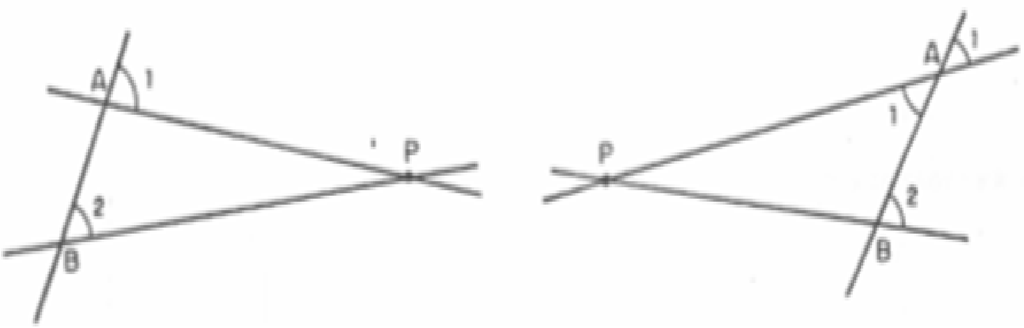
Figura 14 – Interseção entre paralelas e transversal



Fonte: Acervo do autor

Prova: De fato, se m intercepta n em algum ponto P, como indicado na figura abaixo, formar-se-ia um ΔABP. Neste triângulo $\hat{1}$ é ângulo externo e $\hat{2}$ é ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{1}$, ou vice-versa. Assim, pelo teorema do ângulo externo teremos $\hat{1} \neq \hat{2}$ o que contradiz nossa hipótese. Portanto m e n não se interceptam.

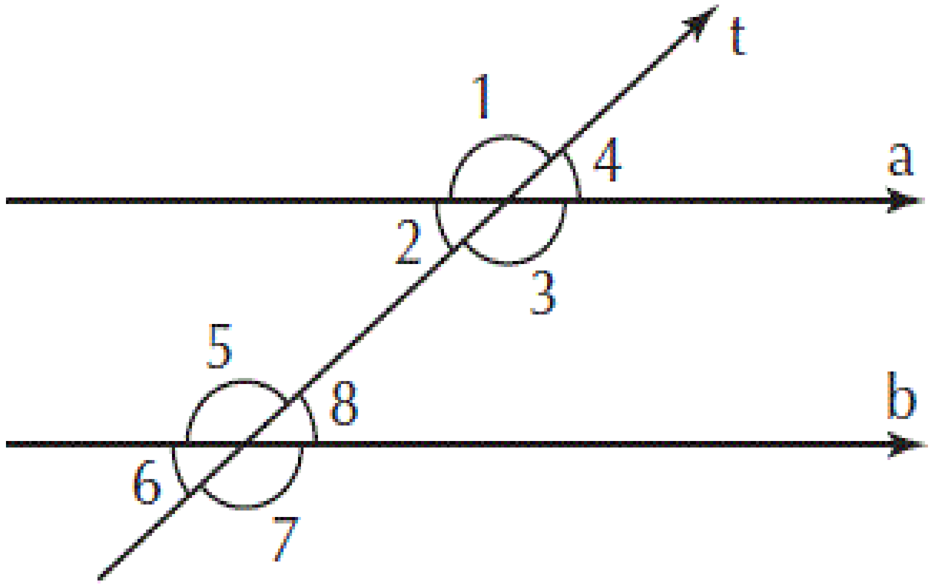
Figura 15 – Interseção de paralelas no ponto P



Fonte: Matemática Euclidiana Plana – 1985

Quando duas retas são cortadas por uma transversal formam-se oito ângulos como indicados na figura abaixo. Quatro deles são correspondentes aos outros quatro, a saber: $\hat{1} \leftrightarrow \hat{5}$, $\hat{2} \leftrightarrow \hat{6}$, $\hat{3} \leftrightarrow \hat{7}$ e $\hat{4} \leftrightarrow \hat{8}$.

Figura 16 – Ângulos formados pela interseção de paralelas com uma transversal



Fonte: http://blogengenhariarodrigo.br/2014/08/geometria-plana-angulos.html

Observe que os ângulos $\hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{7}$, $\hat{6} = \hat{8}$ por serem opostos pelo vértice. Como consequência, se $\hat{1} = \hat{5}$, então todos os outros pares de ângulos correspondentes serão iguais. Além disso, teremos $\hat{2} + \hat{5} = 180°$. Inversamente, se $\hat{5} + \hat{2} = 180°$ então $\hat{1} = \hat{5}$. Dessa forma a proposição pode ser reescrita de duas maneiras distintas.

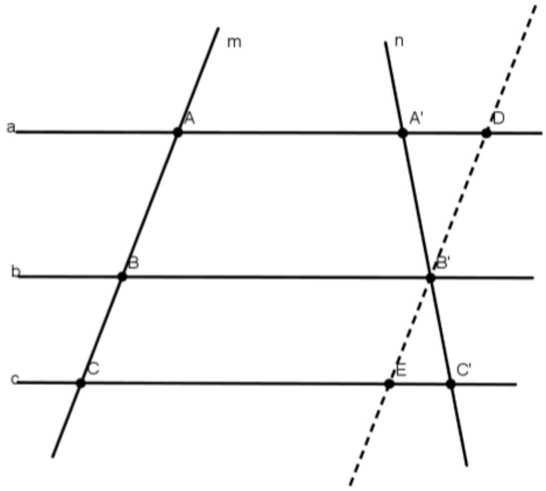
Proposição A – Se, ao cortamos duas retas com uma transversal, obtivermos $\hat{2} + \hat{5} = 180°$ então as retas são paralelas.

Proposição B – Se, ao cortamos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes são iguais, então as retas são paralelas.

A próxima proposição será muito útil para o estudo de semelhança de triângulos e é tradicionalmente atribuída a Tales de Mileto, matemático grego que viveu por volta dos anos 624 - 546 a.C.

Proposição – Sejam a, b e c retas paralelas e m e n duas transversais. Suponha que m e n intersectam a, b e c nos pontos A, B e C e nos pontos A’,B’ e C’, respectivamente. Se A∗B∗C, então A’∗B’∗C’. Se AB = BC então A’B’ = B’C’.

Figura 17 – Feixe de retas paralelas intersectados por duas transversais



Fonte: ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf

Demonstração – Suponha que A∗B∗C. Neste caso, A e C estão em semi-planos opostos relativamente à reta b. Como AA’ não intercepta b, já que os pontos A e A’ pertencem a reta a que é paralela à reta b, segue que A e A’ estão no mesmo semi-plano determinado por b. Do mesmo modo, concluímos que C e C’ estão no mesmo semi-plano. Portanto, A’ e C’ estão em semi-planos distintos relativamente a b. Logo, b intercepta A’C’ implicando A’∗B’∗C’. Suponha agora que AB = BC. Trace pelo ponto B’ uma paralela a m. Esta paralela corta a e c em pontos D e E, respectivamente. Como ADB’B e BB’EC são paralelogramos, segue que DB’ = AB e B’E = BC. Além disso, temos do Teorema do Ângulo Interno Alternado que $B'\hat{D}A' = B'\hat{E}C'$. Como AB = BC, por hipótese, e A$'\hat{B}D = E\widehat{B'}C'$ por serem opostos pelo vértice, segue que A’B’D = C’B’E. Assim, A’B’ = C’B’.

É fato que esse tipo de abordagem dificilmente seria proposta aos alunos de 8ª série (9° ano), mas é importante e relevante que o professor ao planejar sua aula faça um resgate histórico e mostre a seus alunos a importância do axioma das paralelas, haja vista que os livros didáticos apresentam esses conceitos de forma muito direta, ficando a cargo do professor verificar a melhor forma de transmitir aos seus alunos esses conceitos, que na maioria das vezes são feitas pela forma tradicional, deixando a construção do conhecimento professor-aluno de lado.

4 METODOLOGIA

4.1 TEORIA DE VAN HIELE

O modelo de Van Hiele para o pensamento geométrico foi criado por Pierre Van Hiele e sua esposa Dieke Van Hiele-Geoldof, tendo em vista as dificuldades expostas por seus alunos do curso secundário na Holanda. Essa dissertação foi fundamentada em uma forma de abordagem do ensino de matemática através dos Níveis desenvolvido por Pierre M. van Hiele, formado em Matemática e Ciências Naturais, em sua tese de doutorado, na mesma área, defendida em 04 de julho de 1957 na Universidade de Utrecht, Holanda, sob a orientação do Professor Hans Freudenthal. Nesse mesmo período, sua esposa Dieke van Hiele-Geldof obteve seu doutorado sob a orientação de Langeveld, com experimentações realizadas no desenvolvimento da teoria descrita por seu esposo (GEMERT, 2015).

Segundo Crowley (1994) as teses de Van Hiele têm como embasamento a teoria de que o desenvolvimento mental está ligado às mudanças cognitivas dos alunos e às experiências educacionais. Não obstante, podemos notar na teoria de Van Hiele algumas influências, sejam estas do cognitivismo construtivista de Piaget ou do construtivismo sociocultural de Vygotsky.

A teoria de Van Hiele é um modelo educacional que esclarece o procedimento que o aluno deve assumir em cada etapa da aprendizagem, este permite compreender diferentes níveis de aprendizagem geométrica ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico representados pela pirâmide abaixo.

Figura 18 – Pirâmide dos Níveis de Van Hiele

Fonte: https://www.google.com.br/search/piramide+dos+Niveis+de+Van+Hiele

O modelo recomenda que enquanto os alunos aprendem geometria, eles avancem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, onde cada nível é caracterizado por relação entre objetos de estudo e linguagem, ou seja, o aluno deverá passar por cada nível para construir os conceitos de retas paralelas e perpendiculares, e aplicá-los na demonstração e resolução de problemas dos conteúdos: Teorema de Tales e ângulos formados por paralelas interceptada por transversais.

Esse procedimento metodológico proposto por Van Hiele pode ser exemplificado pelo quadro de atividades que apresenta todos os níveis indicados por essa teoria.

Figura 19 – Descrição dos níveis de Van-Hiele

Nível de Van Hiele	Características	Exemplo
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: NASSER, LOPES (1996, p. 12).

Assim, de acordo com o quadro acima, entende-se que o Modelo de Van Hiele leva o aluno a partir do nível da visualização de um ser geométrico, seguido do nível da análise, prosseguindo pelo nível da dedução formal e, finalmente atingindo o nível do rigor da conceituação, tem a capacidade de entender e relacionar conceitos geométricos abstratos.

No entanto, para ser alcançando os níveis propostos pela Teoria de Van Hiele, o professor tem um papel fundamental como intermediador, provocador e instigador das situações de aprendizagem de seus alunos, levando-os a encontrarem um nível de compreensão mais fácil, para isso de acordo com o proposto pela Teoria de Van Hiele, destaca-se cinco fases de aprendizagem, sendo estas: fase do questionamento, fase da orientação dirigida, fase da explicação, fase da orientação livre e fase da integração. (OLIVEIRA; MENDONÇA, 2015)

A fase um refere-se ao questionamento. Nesta fase o professor e o aluno devem estabelecer um diálogo versando sobre o material a ser estudado neste nível. Deve ser feita observações, levantamento de questões, e o vocabulário especifico no nível a ser introduzido. É fundamental que o professor perceba quais são os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto a ser desenvolvido, definindo assim a direção a ser seguida.

A segunda fase corresponde a orientação direta, sendo esta fundamental pois o professor coloca seus alunos em situações para explorar e investigar o assunto por meios de materiais ordenados cuidadosamente numa sequência de grau de dificuldade crescente. Neste momento cada atividade deve estar voltada para que os alunos deem respostas específicas de forma que possam perceber por si mesmos, as propriedades, conceitos e definições que o professor quer atingir.

A terceira fase é denominada explicação. De acordo com a experiência vivida nas fases anteriores os alunos expõem as experiências ao professor de maneira oral ou escrita, fazendo uso do vocabulário específico definido anteriormente, ou seja, o professor deve atuar como um “observador”, corrigindo a linguagem do aluno quando necessário.

É o momento de diálogo entre professor e alunos, no intuito de chegarem a um comum acordo com relação ao tema estudado. Nesta fase não se introduzem conceitos novos, há somente a troca de experiências.

A fase quatro é a fase da orientação livre, sendo que, nesta o professor vai comprovar por meio de problemas dados aos alunos com um grau de dificuldade maior que os desenvolvidos na fase 2 de maneira que os alunos possam ter várias maneiras de resolução. Os problemas nessa fase não devem ser só uma aplicação dos exercícios anteriores, mas devem sim ter grau de complexidade maior fazendo com que os alunos utilizem o conhecimento anterior.

Nesta fase o professor deve intervier o mínimo possível, deixando a cargo dos alunos a tarefa de formalizar o conceito. Para Van Hiele só sabemos se houve compreensão quando ao aluno é colocada uma nova situação e este consegue resolver o novo problema.

A quinta e última fase é chamada integração. Nesta fase o professor “observador” da fase 3 passa a ser o mediador, pois o seu papel é o de auxiliar o aluno no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem, entretanto, introduzir ideias novas ou discordantes. Deste modo, os alunos dispõem de um novo rol de informações mentais, bem mais extensa e diversificada em relação as que possuíam anteriormente, para que possam adquirir um novo nível de compreensão.

Ao final desta quinta fase, espera-se que o aluno deve ter alcançado um novo nível de pensamento, estando apto a repetir as fases de aprendizagem dos níveis seguintes.

4.2 PERCURSO

O presente trabalho tem como um de seus focos a inter-relação entre a aprendizagem e o desenvolvimento humano. Nesse caso, o desenvolvimento, pode ser entendido de acordo com os pressupostos de Vygotsky, (2007, p. 56), uma vez o autor descrever que “o desenvolvimento, se dá não em círculo, mas em espiral, passando em um mesmo ponto a cada nova revolução, enquanto avança para um nível superior”.

A partir disso, este estudo caracteriza-se por ser investigativo de delineamento qualitativo, estilo de pesquisa que vem, cada vez mais, se destacando em pesquisas da área educacional, uma vez não se prender a dados estatísticos, apresenta um foco de interesse mais amplo de análise, pois parte do contato direto do pesquisador com o ato investigativo, assim “[...] o pesquisador estabelece a compreensão do fenômeno estudado sob a perspectiva dos investigados na situação em questão, de onde se extrai a interpretação dos fenômenos" (GIL, 1998, p. 34).

O delineamento qualitativo foi o selecionado por melhor adequar-se ao objetivo proposto. Deste modo, alguns aspectos são considerados, uma vez que, as ideias de Cassel e Symon (1994) discorrem que nesse tipo de pesquisa, além dos dados serem coletados preferencialmente nos contextos em que os fenômenos são construídos, suas análises devem ser desenvolvidas, de preferência, no decorrer do processo de levantamento, posto isso, entende-se que a interação entre pesquisador e objeto é fundamental, razão pela qual se exige o aperfeiçoamento, principalmente em técnicas comunicacionais.

Definindo-se o delineamento, o procedimento de análise organizacional parte das concepções acerca da Teoria de Van Hiele, que como fora exposto anteriormente, apesar de ser um modelo hierárquico poderá ajudar o professor na sua prática pedagógica. O modelo será usado para orientar a formação, e avaliar as habilidades do aluno.

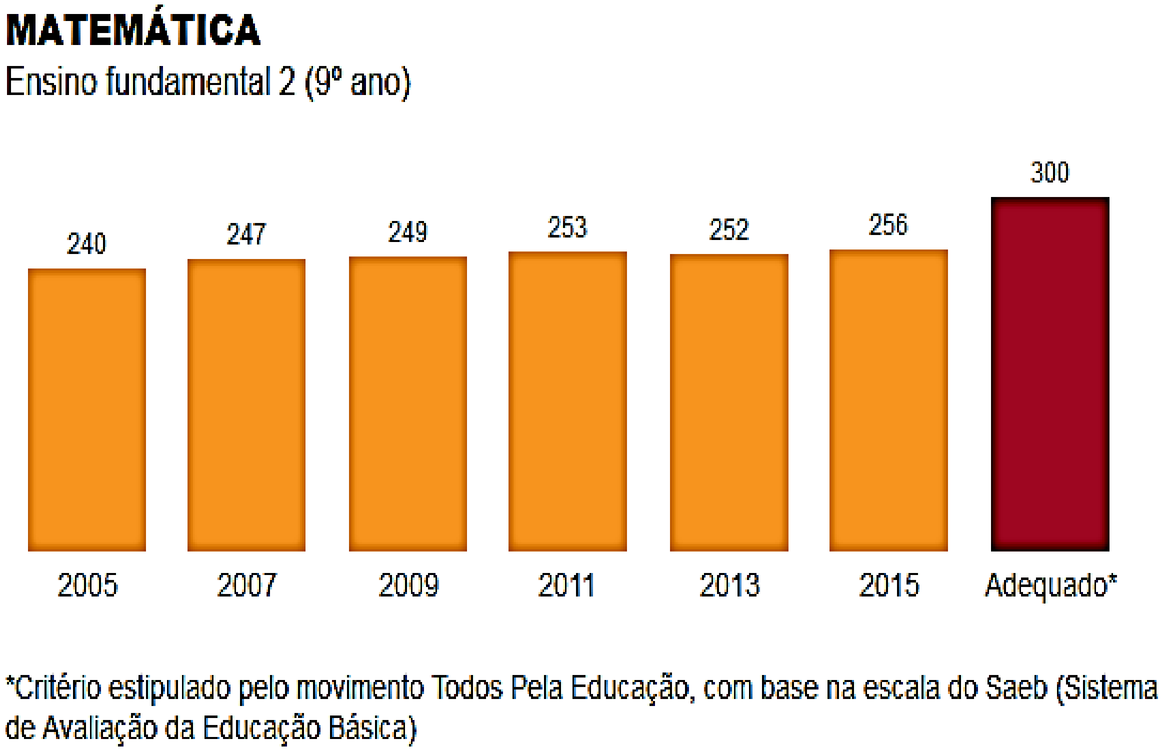
No âmbito do desenvolvimento da pesquisa em questão, o embasamento na Teoria de Van Hiele aponta as lacunas de aprendizagem que o aluno tem e assim o professor poderá organizar-se criativamente na sua prática pedagógica para facilitar a aprendizagem deste aluno, em prol de estabelecer estratégias metodológicas que favoreça a resolução de problema e a interdisciplinaridade numa visão não linear.

No entanto, com o objetivo de melhor subsidiar a justificativa de utilizar a Teoria de Van Hiele na pesquisa apresenta-se uma breve contextualização acerca do ensino de matemática na atualidade. Apesar da reconhecida importância da Matemática no contexto da formação geral dos indivíduos, avaliações nacionais e internacionais sobre educação têm mostrado a situação caótica do ensino brasileiro, principalmente com relação a matemática.

O número de alunos brasileiros na faixa de 15 anos que estava abaixo do nível de conhecimentos básicos caiu 18% entre 2003 e 2012. Os dados são de um estudo da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) considera que, para alcançar o primeiro nível, os alunos têm que mostrar competências básicas como efetuar uma simples operação de adição.

Segundo o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) 67,1% dos alunos brasileiros com 15 e 16 anos (faixa etária analisada no estudo) estão abaixo do nível 2 em matemática, com baixa performance na disciplina. Porém, ao analisar o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) observa-se que nos anos finais do Ensino Fundamental houve uma pequena reação em relação a estagnação vista nos anos de 2011 e 2013, como mostra o gráfico abaixo.

Figura 20 – Avaliação do desempenho do ensino fundamental 2016



Fonte: http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2016/desempenho-do-ensino-medio-em-matematica-e-o-pior-desde-2005.shtml

As provas do Enem procuram dar o mesmo peso para essas três áreas, entretanto, dentro de cada eixo, existem temas que ocorrem com maior frequência nas avaliações. Considerando que as questões de Geometria podem ser mais difíceis – pois, muitas vezes, chegam a envolver cálculo e álgebra, além dos próprios conceitos referentes às figuras geométricas, separamos algumas questões e os principais tópicos de Geometria presentes nas provas anteriores do exame.

Estudos realizados pelo Sistema Ari de Sá (SAS), com o objetivo de identificar todos os assuntos já abordados e seus índices percentuais demonstram que mais de 50% das questões apresentadas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2009 a 2016 são baseadas em conteúdos ensinados no Ensino Fundamental, em que foi observado que a geometria é a que apresenta o maior número de questões segundo a tabela abaixo.

Figura 21 – Distribuição dos assuntos por área de conhecimento / matemática

Matemática (provas de 2009 a 2016)		
Assunto	**Questões**	**%**
Geometria	189	26,3%
Aritmética	92	12,8%
Escala, razão e proporção	87	12,1%
Funções	65	9%
Porcentagem	60	8,3%
Gráficos e tabelas	60	8,3%
Estatística	49	6,8%
Probabilidade	42	5,9%
Equações elementares	19	2,6%
Sequências	18	2,5%
Análise combinatória	16	2,2%
Números inteiros e reais	12	1,7%
Trigonometria	8	1,1%
Notação científica	2	0,3%
Matriz	1	0,1%

Fonte: http://guiadoestudante.abril.com.br/enem/raio-x-do-enem-os-conteudos-que-mais-caem-na-prova-desde-2009/2016

Nos dias atuais o ensino da matemática passa por constantes modificações metodológicas, com o surgimento e ressurgimento de práticas pedagógicas que tem como objetivo facilitar e aprimorar o processo de ensino-aprendizagem. Este trabalho apresenta-se como um suporte para a elaboração de uma proposta pedagógica para as aulas de matemática, mais precisamente em geometria no estudo das retas paralelas e perpendiculares, sendo também uma proposta de inclusão principalmente de alunos com deficiências visuais.

Nessa perspectiva, Bruner (1978, p.12) afirma que:

> O pensamento intuitivo, o treinamento dos palpites, é um aspecto muito desprezado e essencial do pensamento produtivo, não apenas nas disciplinas acadêmicas formais, como na vida quotidiana. A adivinhação sagaz, a hipótese fértil, o salto arrojado para uma conclusão tentativa - essa

> é a moeda mais valiosa do pensador em ação, qualquer que seja o seu campo. Poderá levar a criança em idade escolar a conquistar esse dom?

A partir do apresentado levantam-se alguns questionamentos: Quais as metodologias que podem favorecer o ensino da geometria do conteúdo retas paralelas e perpendiculares? O que fazer para incluir alunos portadores de deficiência visual no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo (alunos cegos e de baixa visão)?

Sobre a situação que pode abarcar essa série de questionamentos Barbosa (2003, p.19) discorre que:

> Buscar os recursos mais adequados para trabalhar com alunos portadores de deficiência visual é tarefa que exige do professor enxergar além da deficiência, lembrando que há peculiaridades no desenvolvimento de todas as crianças, tendo elas deficiência ou não. A criatividade foi e continua sendo um elemento indispensável para o homem superar problemas e desafios gerados pelo seu ambiente físico e social. É encarada como uma construção do indivíduo em suas interações com as propriedades do objeto. O trabalho voltado para a criatividade auxilia muito o processo ensino-aprendizagem de Geometria.

O professor não precisa mudar seus procedimentos quando tem um aluno deficiente visual em sua sala de aula, mas apenas intensificar o uso de materiais palpáveis, para ajudar na abstração dos conceitos. Assim ao se criar recursos especiais para o aprendizado de alunos com necessidades especiais, toda a classe se beneficia, pois facilita a compreensão de todos no que está sendo transmitido.

> Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, sem preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. Portanto, o professor passa ao próximo àquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento. (D’AMBRÓSIO, 2012, p. 77).

Nesse sentido, como recursos para suprir essas lacunas de aprendizagem, neste trabalho são apresentadas e discutidas ações práticas desenvolvidas a partir da Teoria de Van Hiele (NASSER; SANT’ANNA, 2010), que auxilia na identificação de competências e no direcionamento durante a aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento geométrico a níveis mais elevados de compreensão.

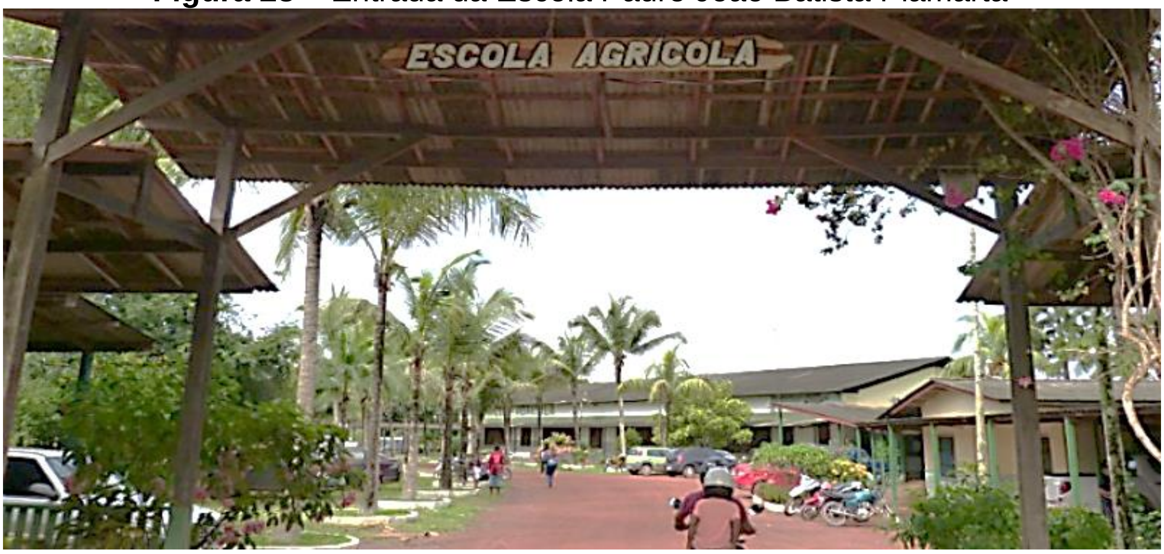
A ideia de implementar estratégias didáticas diversificadas confere ao ensino subsídios que atraem a atenção e a motivação dos alunos. Apenas atividades de lousa e livro não são suficientes para a apreensão da atenção e despertar pelo saber. É imprescindível que os materiais didáticos aplicados ao ensino sejam selecionados, adaptados e criados de acordo com cada contexto em que será inserido, e conforme os objetivos previamente estabelecidos.

No que se refere ao local escolhido para a elaboração e aplicação deste trabalho o mesmo corresponde a Escola Estadual de Tempo Integral Padre João Batista Piamarta, localizada na Rodovia Duca Serra, 1753, Km 06, Distrito do Coração, onde são desempenhadas atividades de cunho socioassistencial e educacional.

Figura 22 – Ramal da Escola Padre João Batista Piamarta

Fonte: http://katiusciamiranda.blogspot.com.br/

Figura 23 – Entrada da Escola Padre João Batista Piamarta



Fonte: http://mzportal.com.br/?p=26686

A criação dessa instituição deu-se em razão da iniciativa do Padre Luís Brusadelli, observador do grande problema social econômico, em particular o educacional no município de Santana. Por meio desta iniciativa, atualmente, a instituição tem estrutura suficiente para amenizar parte desta problemática, cujas principais vítimas são os menos favorecidos economicamente.

A escola funciona em dois turnos, matutino e vespertino, e atende alunos do 1º ao 9º ano do ensino fundamental, todas as salas possuem ventiladores, quadros brancos e. Além disso, o quadro de docentes é formado somente por professores concursados não existindo nenhum tipo de déficit nesta área, o que possibilita o bom atendimento de todos os alunos, no que se refere a todas as disciplinas, durante o ano letivo.

A pesquisa será realizada com os alunos da 8ª série (9° ano) e os seus respectivos professores, por meio da aplicação de questionários. Todavia, alguns fatores podem ser levados em consideração para o sucesso da pesquisa subsidiada por questionário. No caso da pesquisa em questão, aspectos como o bom senso e experiência do pesquisador foram levados em conta, sendo que, seguiu-se uma sequência de etapas lógicas, que de acordo com Aaker (2001) melhor elucidam a busca por respostas concretas acerca do tema estudado, as quais se descreve abaixo:

1ª etapa – Planejar o que vai ser mensurado: inicialmente, buscou-se evidenciar e relacionar os objetivos da pesquisa, para que desse modo, pudesse ser elaborado o assunto de cada questão, a fim de determinar o que vai ser perguntado sobre o assunto da pesquisa, uma vez que, aulas experimentais são cada vez mais frequentes nas escolas da educação básica, logo, falar sobre o ensino de Geometria é adentrar em um campo muito extenso de conteúdos e que já seguem uma linha conceitual.

2ª etapa – Formular as perguntas para obter as informações necessárias: nesta etapa, o objetivo foi dar forma ao questionário determinando o formato do conteúdo de cada pergunta e adquirir dos entrevistados informações pertinentes do processo de aprendizagem, interesse pelo assunto, capacidade de incentivo e continuidade, assim como perceber se existe uma melhoria da aprendizagem dos conceitos básicos de matemática no momento de ensino de Geometria.

3ª etapa – Definir o texto e a ordem das perguntas: a partir desta etapa o aspecto visual do questionário também passou a ser levado em consideração, pois uma entrevista em que os participantes se sintam relaxados e motivados a responder adquirisse informações privilegiadas das ocorrências dentro do momento de ensino e determinou-se como as questões foram redigidas, avaliando cada uma delas em termos de facilidade de compreensão, conhecimentos e habilidades exigidos, além da disposição dos respondentes.

4ª etapa – Testar o questionário, utilizando uma pequena amostra, em relação a omissões e ambiguidade: a partir das etapas anteriores a intenção foi a organização final. Buscou-se dispor as questões em uma ordem adequada e agrupá-las de acordo com cada subtópico para obter um único questionário, ou seja, um grupo de perguntas que elucidassem o proposto pelo trabalho. Por fim, o questionário foi lido por inteiro para verificar o sentido, e a possibilidade de mensurar, o que estava previsto pelos objetivos propostos.

Portanto, em relação ao questionário, este foi composto por um total de 16 perguntas, sendo 8 destinadas aos professores e 22 perguntadas para os alunos com algumas perguntas semelhantes entre as categorias. É nesse âmbito que adentra-se na composição da amostra desta pesquisa.

A escola possui duas turmas de 8ª série (9° ano) que desenvolve suas aulas no período da tarde, sendo que a turma 821 apresenta 20 alunos e a turma 822 apresenta 19 alunos.

Os alunos na faixa etária de 14 a 17 anos foram informados e posteriormente convidados a participar da pesquisa mediante a apresentação de uma carta convite, onde solicita a participação de maneira colaborativa, por parte do aluno, e a devida autorização do responsável, dentre as informações contidas, está a garantia do anonimato dos alunos participantes.

Todavia, além da livre participação dos mesmos, que os isentam da obrigatoriedade, sendo-lhes facultada a participação, sem prejuízo algum, pois o objetivo era atingir a todos de forma produtiva e satisfatória, seja, no diálogo em sala de aula, nas dúvidas ou nas observações que surgiram durante a realização das atividades. Ressalta-se que esta condição adotada aos participantes da pesquisa associam-se as considerações de Lakatos e Marconi (2010) quando destacam que o consentimento livre e esclarecido dos indivíduos-alvo e a proteção a grupos vulneráveis e aos legalmente incapazes (autonomia). Neste sentido, a pesquisa envolvendo seres humanos deverá sempre tratá-lo em sua dignidade, respeitá-lo em sua autonomia e defendê-lo em sua vulnerabilidade;

Figura 24 – Modelo de Carta Convite

CARTA CONVITE

Prezados Pais

Venho por meio dessa, convidar o(a) aluno(a) ______________________ para participar da pesquisa em nível de Mestrado, realizado com os alunos(as) da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Tempo Integral Padre João Batista Piamarta no município de Macapá – AP, cujo título é: *"Um enfoque construtivista de Retas paralelas e perpendiculares e suas aplicações no Teorema de Tales e Ângulos formados pela interseção de um feixe de paralelas por uma transversal sob o ponto de vista da Teoria de Van Hiele"*.

Objetivos da pesquisa

"Considerar os níveis da Teoria de Van Hiele como um fator eficaz no planejamento, na implementação e na avaliação das atividades para o processo de ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana, sobretudo do estudo de retas paralelas e perpendiculares e suas aplicações no Teorema de Tales e Ângulos formados pela interseção de um feixe de paralelas por uma transversal, usando como elemento motivador a demonstração desses conceitos por meio dos seguintes matérias: Papel A4, régua, transferidor, lápis e borracha".

Da participação

I - O aluno(a) participará da pesquisa como colaborador, de maneira absolutamente voluntária.

II - Ao aluno será facultado responder a perguntas e poderá desistir de participar do projeto, a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

• III - A participação acontecerá por meio de um questionário, participação de oficinas e realização de atividades propostas.

Para ser preenchido pelo responsável:

Eu, ____ autorizo o aluno(a) a participar do projeto de pesquisa.

____

Assinatura do responsável

Para ser preenchido pelo aluno:

Eu, ____ concordo em participar do projeto de pesquisa na condição de colaborador e de forma voluntária.

____

Assinatura do aluno

Macapá – AP, ______ de _________________________de 2017

Fonte: Pesquisa Campo 2017

Outra etapa de extrema relevância desta pesquisa foi a realização de oficinas para a aplicação da metodologia desenvolvida segundo as fases de construção do conhecimento geométrico proposto pelo Modelo de Van Hiele, sendo que ao final de cada oficina os alunos foram submetidos a uma lista de exercícios para que fossem tabulados os resultados. As oficinas seguirão algumas etapas por assim descritas:

1ª etapa: A primeira etapa foi aplicada aos alunos e abordou a definição de retas paralelas e perpendiculares, por meio de simples dobraduras em uma folha de papel A4, régua e transferidor.

2ª etapa: Na segunda etapa da oficina os alunos demonstraram por construção a proporcionalidade do Teorema de Tales, sendo utilizando como material metodológico folha de papel A4 e régua.

3ª etapa: A terceira etapa abordou as propriedades dos ângulos formados pela interseção de um feixe de retas paralelas com uma reta transversal, nessa oficina foi utilizada folha de papel A4 e transferidor.

Desse modo, abordagem qualitativa da pesquisa se consolida ainda pelo estudo de caso, proposto nas turmas específicas, onde foram analisadas as hipóteses e avaliado o uso do método de Van Hiele conexo ao ensino do conteúdo paralelismo e perpendicularidade. O estudo de caso assumiu uma perspectiva etnográfica aplicada à educação, pois buscou investigar e interpretar reações, atitudes e comportamentos como um todo, frente ao trabalho da metodologia avaliada neste trabalho.

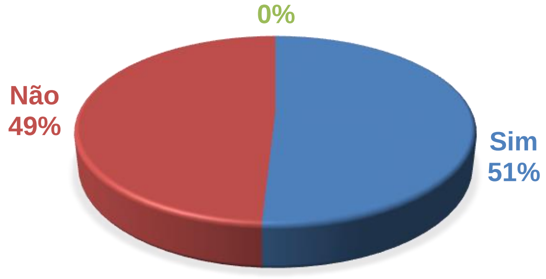
Com base nos dados expostos, adentra-se na análise dos resultados, com a qual foi possível observar diferentes modelos de interação entre fatores identificados como essenciais para o sucesso de tais iniciativas. Com isso, busca-se assinalar condições que contribuem ou inibem o desenvolvimento de retas paralelas e perpendiculares e suas aplicações no teorema de tales e ângulos formados pela interseção de um feixe de paralelas por uma transversal sob o ponto de vista da Teoria de Van Hiele.

5 RESULTADOS E ANÁLISES

5.1 DADOS DO QUESTIONÁRIO

O Questionário teve como finalidade identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre Geometria, como as noções de ponto, reta e plano, retas paralelas e perpendiculares, dos instrumentos básicos de construção régua, compasso e transferidor, avaliação da Matemática como disciplina, auto avaliação em Matemática e o nível de interesse pelas aulas de Matemática.

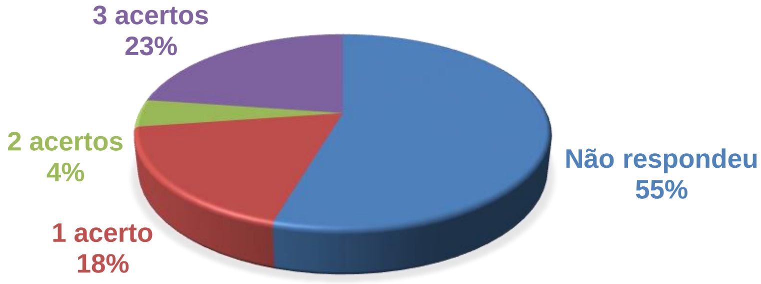
Gráfico 1 – Geometria básica: ponto, reta, plano, retas paralelas e retas perpendiculares.



Fonte: Pesquisa Campo 2017

Este gráfico representa o conhecimento básico do aluno em geometria, foi avaliado se o aluno era capaz de identificar e esboçar: Ponto, reta, plano, retas paralelas e retas perpendiculares. A dificuldade mais apresentada foi em identificar e esboçar retas paralelas e perpendiculares.

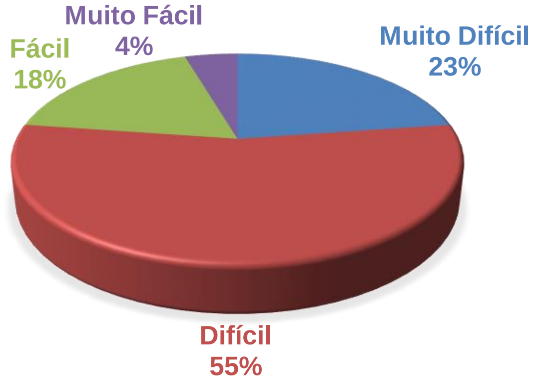
Gráfico 2 – Reconhecimento dos instrumentos geométricos: régua, transferidor e compasso



Fonte: Pesquisa Campo 2017

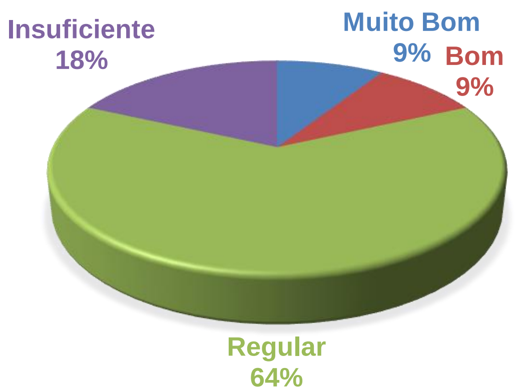
O gráfico 2 representa o reconhecimento e a utilização dos instrumentos geométricos, a régua representou 45% dos acertos, o compasso representou 27% dos acertos e o transferidor 23%o fato mais marcante deu-se pelo fato de 77% não conhecer o transferidor e a sua finalidade.

Gráfico 3 – Avaliação da Matemática como disciplina



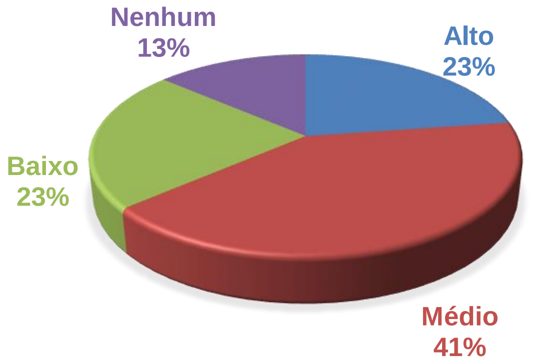
Fonte: Pesquisa Campo 2017

Gráfico 4 – Auto-avaliação em Matemática



Fonte: Pesquisa Campo 2017

Gráfico 5 – Nível de Interesse pela Matemática



Fonte: Pesquisa Campo 2017

Os gráficos 3, 4 e 5 estão relacionando as respostas dos alunos participantes, portanto os números fazem referência ao quantitativo de 22 alunos (10 alunos da turma 821 e 12 alunos da turma 822).

A partir dos dados coletados do questionário, se pode ter uma base de quais eram as dificuldades encontradas pelos alunos e, assim, definir qual postura seria adotada como referência para a elaboração das atividades propostas. Embora não seja possível identificar o aluno, as suas respostas motivaram a realização e a implementação das atividades, especialmente quanto a explicação sobre os instrumentos geométricos de construção (régua, transferidor e compasso).

5.2 REALIZAÇÃO DA OFICINA

Aula 1: Reconhecimento dos instrumentos de construção geométrica – (1h/a)

Após a análise dos resultados apresentados no questionário, começou-se a pôr em prática a pesquisa, a partir de uma aula explicativa dos instrumentos de construção geométrico, os conceitos e finalidades da régua, do compasso e do transferidor.

Figura 25 – Apresentação de conceitos e finalidades da régua, compasso e transferidor

Fonte: Pesquisa Campo 2017

Após a explicação dos instrumentos geométricos o professor passou a mediar o debate sobre onde poderíamos aplicar e a utilização desses instrumentos na sala de aula e no dia a dia.

Aula 2: Retas paralelas e perpendiculares – (2h/a)

Na segunda aula foi proposto aos alunos a realização de um exercício, **ATIVIDADE PROPOSTA 1** (ver anexo) onde foi cobrado o conhecimento prévio das posições relativas das retas, onde podemos definir a existência de uma linha tênue entre os níveis 0 e 1 de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Van Hiele, pois quando apresentamos duas retas paralelas e duas retas concorrentes, apresentamos o nível 0, nível do reconhecimento, porém, a partir do momento que diferenciamos retas paralelas e concorrentes, e em diferentes situações, estamos rompendo o nível 0 e atingindo o nível 2. Visto que não via-se mais o objeto de forma única, buscou-se alcançar a capacidade de realizar uma análise, que possibilita diferenciar as duas situações sob qualquer perspectiva.

Após a aplicação dessa atividade, o conteúdo retas paralelas e perpendiculares foi apresentado aos alunos através da construção dos conceitos por meio da utilização de uma folha de papel A4, régua e transferidor.

Figura 26 – Apresentação de conteúdo retas paralelas e perpendiculares

Fonte: Pesquisa Campo 2017

Sequencialmente, cada aluno recebeu uma folha de papel A4 e foi solicitado que fosse dobrado a folha duas vezes ao meio e depois quando abrissem a folha verifica-se a distância entre as retas obtidas, definindo-se assim de retas paralelas.

De maneira análoga os alunos receberam uma folha de papel A4 e foi solicitado que fosse dobrado ao meio, em seguida dobrariam de novo ao meio mas unindo-se os lados menores do retângulo obtido, pedi que ao abrir a folha fossem traçadas as retas obtidas e em seguida, eles medissem com o transferidor o ângulo formado pela interseção das mesmas. Dessa forma foi definido o conceito de retas perpendiculares.

Figura 27 – Definição do conceito de retas perpendiculares

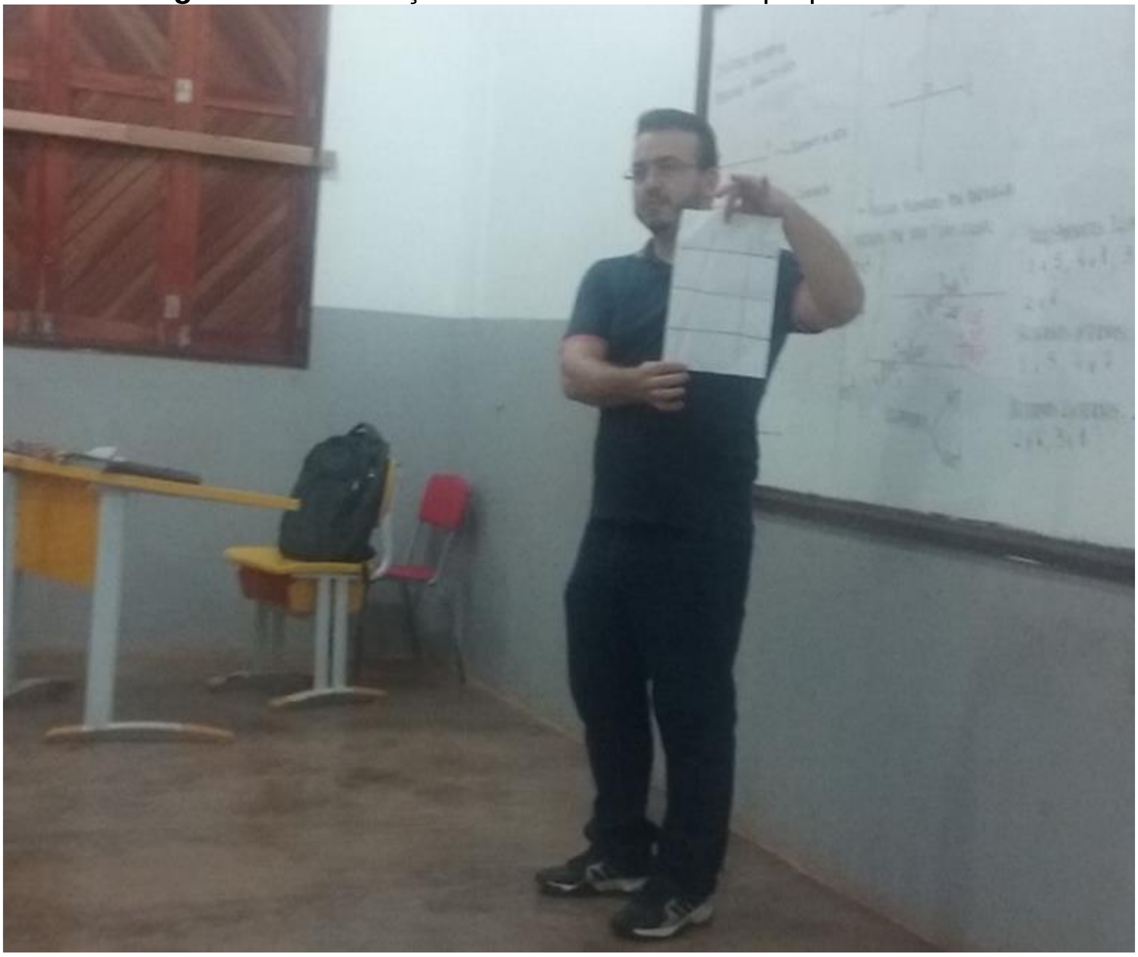
Fonte: Pesquisa Campo 2017

Aula 3: Aplicação da metodologia para o Teorema de Tales e dos ângulos formados pela interseção de paralelas com uma transversal – (2h/a)

Para a verificação da validade do Teorema de Tales foi solicitado aos alunos que dobrassem a folha de tal modo que as extremidades coincidissem três vezes para se obter um feixe de paralelas, ao abrir a folha os alunos traçaram as paralelas e foi solicitado para ser feito duas dobras para que fossem traçadas as transversais. Sendo verificado a proporcionalidade entre os segmentos.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Figura 28 – Definição do conceito de retas perpendiculares



Fonte: Pesquisa Campo 2017

A verificação da validade dos ângulos determinados pela interseção de retas paralelas por uma transversal também foi demonstrada pelo método proposto de dobraduras para se obter retas paralelas e transversal.

Figura 29 – Verificação da validade dos ângulos pelo método de dobraduras

Fonte: Pesquisa Campo 2017

Ao fazer a abertura das folhas os alunos puderam comprovar através do uso do transferidor a validade e os conceitos de ângulos alternos internos e externos, colaterais internos e externos, e correspondentes.

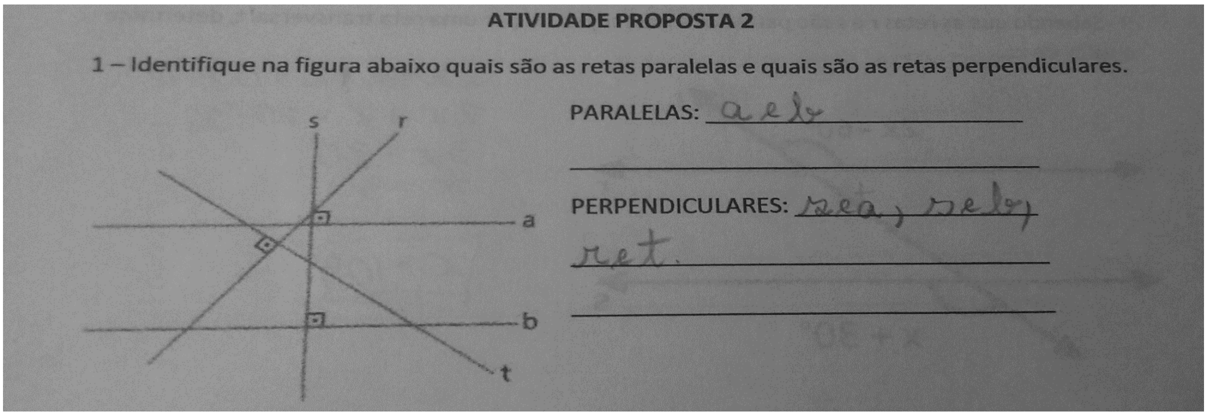
Figura 30 – Validade e os conceitos de ângulos

Fonte: Pesquisa Campo 2017

Aula 4: Resolução de Exercícios

Neste encontro, foi realizado um exercício, **ATIVIDADE PROPOSTA 2** (ver anexo) onde o principal objetivo foi avaliar se o procedimento metodológico aplicado iria satisfizer os níveis 2, 3 e 4 que são respectivamente da percepção, da dedução e do rigor, do pensamento geométrico proposto por Van Hiele.

Resolução dos alunos da atividade proposta 2

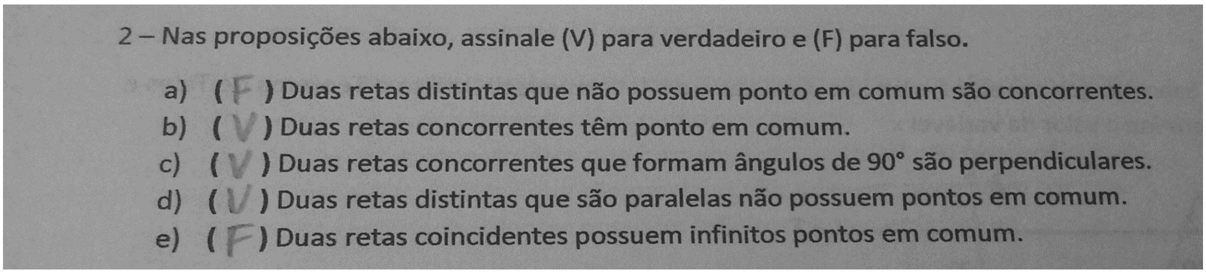

ATIVIDADE PROPOSTA 2

1 – Identifique na figura abaixo quais são as retas paralelas e quais são as retas perpendiculares.

PARALELAS: a e b

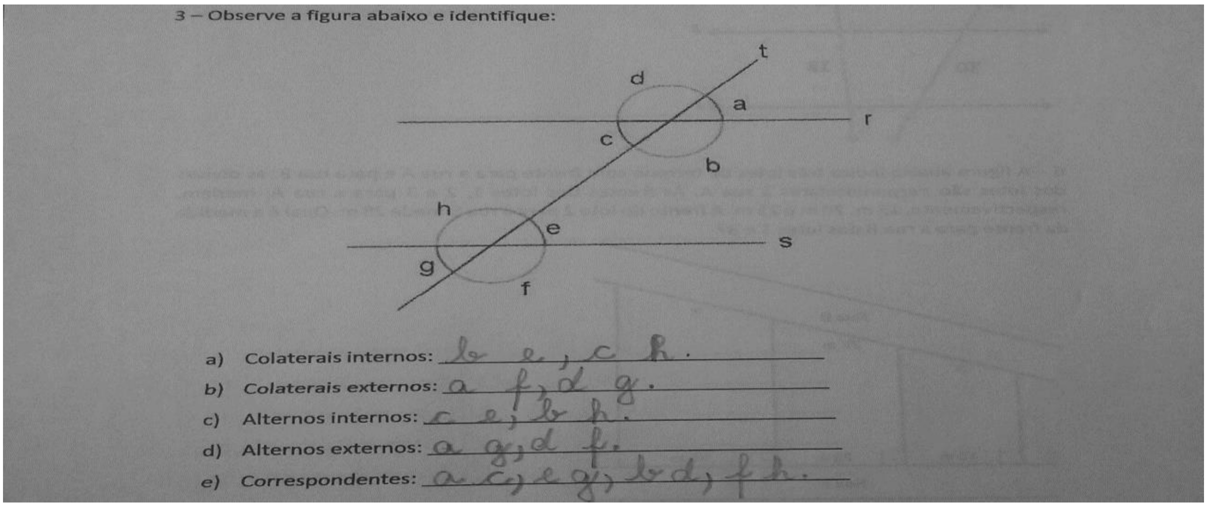
PERPENDICULARES: rea, reb, ret.

A aluno identificou de maneira correta as retas paralelas e as retas perpendiculares.


2 – Nas proposições abaixo, assinale (V) para verdadeiro e (F) para falso.

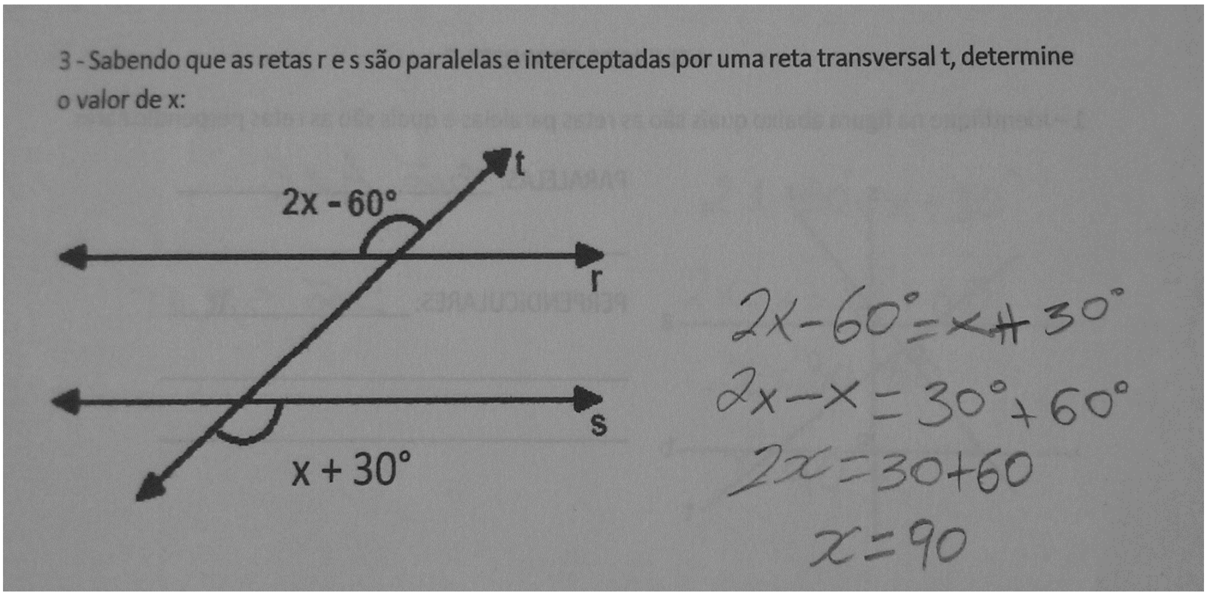
a) (F) Duas retas distintas que não possuem ponto em comum são concorrentes.
b) (V) Duas retas concorrentes têm ponto em comum.
c) (V) Duas retas concorrentes que formam ângulos de 90° são perpendiculares.
d) (V) Duas retas distintas que são paralelas não possuem pontos em comum.
e) (F) Duas retas coincidentes possuem infinitos pontos em comum.

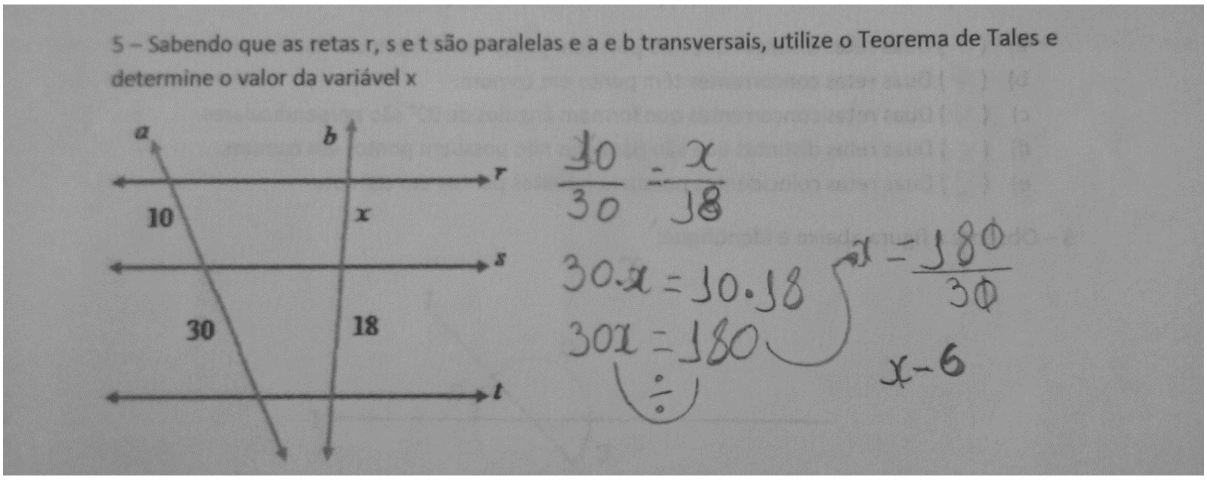
(O aluno errou a última proposição)


3 – Observe a figura abaixo e identifique:

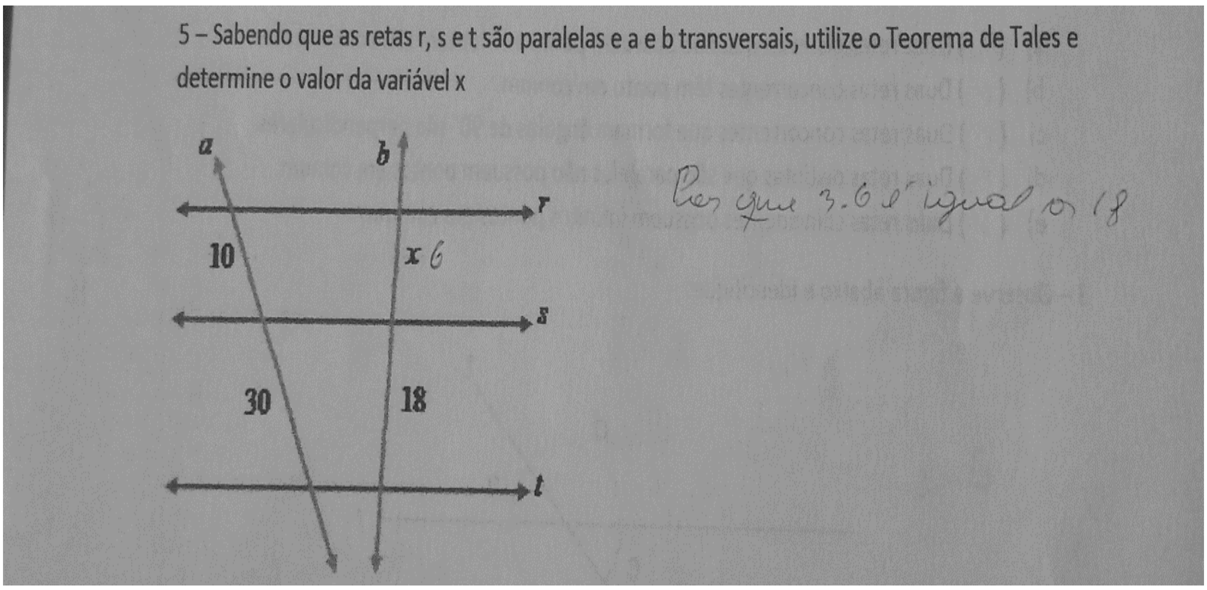
a) Colaterais internos: b e, c h.
b) Colaterais externos: a f, d g.
c) Alternos internos: c e, b h.
d) Alternos externos: a g, d f.
e) Correspondentes: a c, e g, b d, f h.

O aluno identificou de maneira corretas os ângulos.

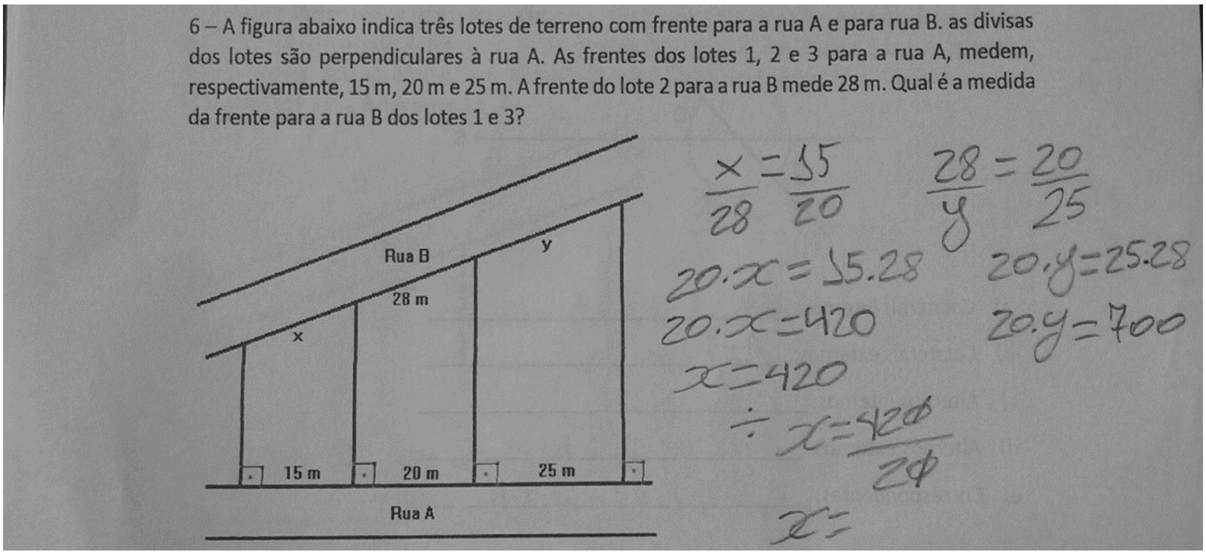




O aluno desenvolveu corretamente o Teorema de Tales, esqueceu do sinal de igual no resultado final



O aluno percebeu que a razão era 3


6 – A figura abaixo indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. as divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, 15 m, 20 m e 25 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?

O aluno não finalizou o cálculo, porém desenvolveu de maneira correta a proporção do Teorema de Tales

Após a correção, a compreensão do conteúdo retas paralelas e perpendiculares pelos alunos ficou comprovada quando notamos que o aluno atinge o nível 4 da teoria de Van Hiele, ao se tornar capaz de entender e realizar as compreensões lógicas formais do conteúdo, e aplicar as relações estabelecidas entre os ângulos formados pela interseção de paralelas com uma transversal, reconhecendo as diferentes possibilidades para a proporção estabelecida entre os segmentos pelo Teorema de Tales.

Entretanto, pode-se destacar duas perguntas que surgiram no momento da correção e do desenvolvimento das oficinas que permitiram realizar as análises supracitadas. Todavia, foi comum ouvir alguns posicionamentos dos alunos, tais como:

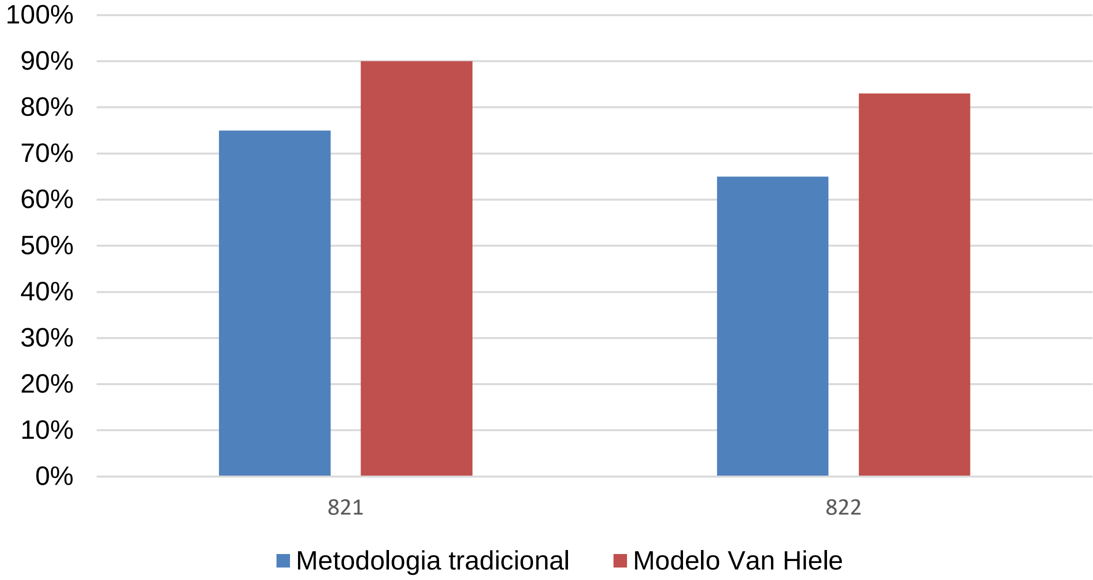
“... professor, porque nós não aprendemos assim antes?” (Aluno participante, 821).

“... professor, podemos aplicar essa técnica em triângulos parecidos?” (Aluno participante, 822)

A partir de agora apresenta-se os gráficos que demonstram a evolução dos alunos das turmas 821 e 822 após a aplicação da metodologia da construção do pensamento geométrico de Van Hiele.

As turmas já haviam trabalhado anteriormente pela metodologia tradicional com seu professor titular os conteúdos: Retas paralelas, retas perpendiculares, teorema de Tales e ângulos formados pela interseção de paralelas com uma transversal.

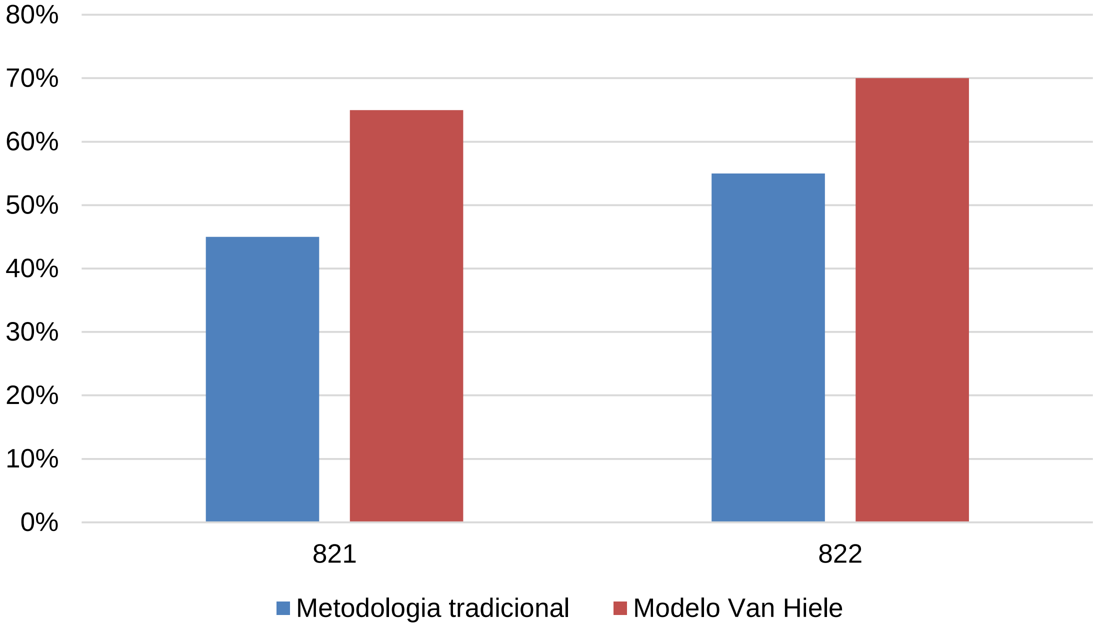
Gráfico 6 – Nível 0: Reconhecimento ou visualização



Fonte: Pesquisa Campo 2017

No Gráfico 6 verificou-se o reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global. (Primeira e segunda questões da atividade proposta 2).

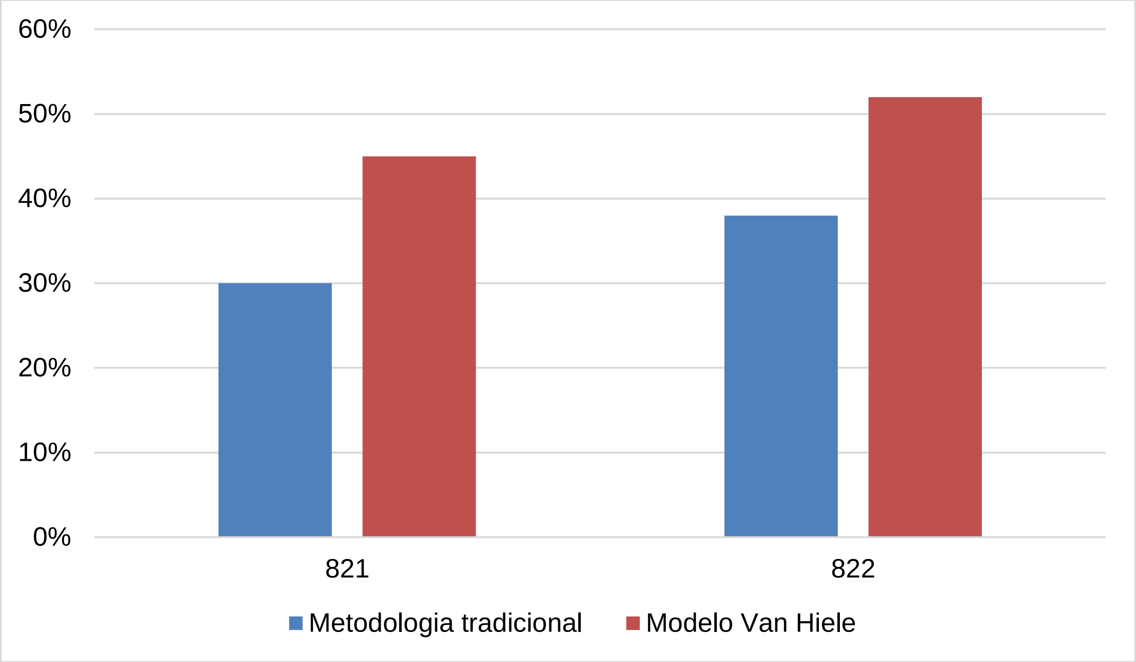
Gráfico 7 – Nível 1: Análise



Fonte: Pesquisa Campo 2017

O Gráfico 7 demonstra a análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas. (Terceira e quarta questões da atividade proposta 2).

Gráfico 8 – Níveis 2 e 3: Percepção e dedução



Fonte: Pesquisa Campo 2017

O Gráfico 8 demonstra a percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas. (Quarta, quinta e sexta questões da atividade proposta 2).

Ressalta-se que o nível 4, que trata do rigor, foi eliminado, em razão de ter sido considerado suficiente e relevante a utilização e a concentração nos quatro primeiros níveis de pensamento da Teoria de Van Hiele, por se tratar de turmas de 8ª série (9° ano) do Ensino Fundamental.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De um modo geral auxiliar o aluno na compreensão dos conceitos e na construção da aprendizagem é um dos mais importantes deveres do professor. Porém, existem muitos caminhos para essa tarefa, e não é fácil, pois o professor tem que cumprir esta missão com a grande diversidade cultural que existe entre seus alunos, desse modo, partiu-se do pressuposto que o aluno constrói o conhecimento por si só, com suas experiências matemáticas, mas sem o intermédio do professor isso ficará muito mais difícil.

Percebe-se que essa preocupação é crescente entre os profissionais da educação, que buscam novas formas de cativar os alunos para a aprendizagem. Nas análises realizadas, no decorrer da proposta, observou-se que os alunos apresentam conhecimentos geométricos defasados e principalmente, que não compreendem a sua relação com a realidade que os cerca. Assim, com a aplicação da proposta, perceberam-se mudanças significativas de interesse, participação e entendimento de conteúdos considerados problemáticos no ensino de matemática.

Em relação aos pontos negativos pôde-se perceber que os alunos possuem bastante dificuldade em operacionalizar, principalmente nas questões que trabalham o Teorema de Tales, teve que ser realizado uma revisão de divisão. As turmas apresentaram dificuldade em iniciar as atividades por não saber manusear transferidor, sendo assim, leva-se muito mais tempo para se preparar a aula.

No que concerne aos pontos positivos pôde-se observar que, depois de iniciada as atividades, os alunos participaram bastante, mostrando grande interesse pelo fato de construir uma definição por meio de uma folha de papel A4, régua e transferidor. A construção do aluno de retas paralelas e perpendiculares, fez com que o entendimento do conceito fosse melhor concebido.

Entretanto, o fácil entendimento pela construção dos alunos da proporcionalidade do Teorema de Tales. A visualização do aluno ao construir e identificar os ângulos formados pela interseção de retas paralelas e uma transversal. Desse modo, viu-se ainda que os alunos que não demonstraram interesse em aulas tradicionais se interessaram bastante pela aula com material concreto

Os estudos realizados para elaboração desse trabalho, sobre o Modelo do pensamento geométrico de Van Hiele, foram relevantes ao desenvolvimento intelectual e didático, pois por meio do resgate histórico dos grandes matemáticos em tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides, mostrou o quanto é válido o professor buscar metodologias para estimular seus alunos a construir o conhecimento, haja vista que como disseram NASSER e LOPES (1996, p. 8). “Dar ao professor elementos que possibilitem mudanças em sua atuação didática e onde o aluno seja agente da construção de seu conhecimento”

Durante todo o processo percebeu-se atitudes com os alunos sendo transformadas, em cada novo tópico abordado, pois percebia-se com mais clareza as possíveis causas do aluno não compreender o que estava sendo ensinado. Nessas ocasiões tive oportunidade de alterar meu procedimento, utilizando o Modelo Van Hiele, a fim de esclarecer suas dúvidas.

De fato, os Parâmetros Curriculares Nacional (PCN’s), estão fundamentados e estruturados em ciclos, e de acordo com a teoria de Van Hiele, que está dividida em níveis de compreensão, onde foi possível constatar que o processo de aprendizagem do aluno está relacionado ao grau de maturidade alcançado por ele em cada estágio da aprendizagem, à medida em que vão adquirindo novas habilidades e competências. Isso ficou claro, na prática das oficinas onde os alunos realizaram as atividades propostas de maneira correta, demonstrando que adquiriram as habilidades e competências necessárias para atingir a maturidade esperada para a compreensão do conceito de retas paralelas e perpendiculares, bem como suas aplicações no Teorema de Tales e no conceito dos ângulos formados pela intercessão de paralelas com uma transversal.

O objetivo da pesquisa foi alcançado, pois oportunizou ao educando uma aula dinâmica e prazerosa, sem “os famosos decorebas” de fórmulas e conceitos, o aluno teve a autonomia para construir o seu conhecimento por meios da utilização de matérias concretos.

Portanto, deve-se instigar a consciência crítica de cada um sobre a realidade que vivemos, revendo as nossas práticas docentes, pois somos seres em formação contínua, promovendo assim uma maior integração entre professor e aluno no processo de ensino aprendizagem. Com isso percebe-se que outros conteúdos merecem ser estudados contribuindo assim para a educação do país.

REFERÊNCIAS

AAKER, D. A.; KUMAR, V.; DAY, G. S. **Pesquisa de marketing**. São Paulo: Atlas, 2001.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. rev. e ampl. 4. Reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana, Coleção do Professor de Matemática**. SBM, 10° edição, Rio de Janeiro, 2006.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria hiperbólica**. Goiânia. Ed. Da UFG, 2002.

BARBOSA, P. M. **O estudo da Geometria**. IBC: Rio de Janeiro, 2003.

BELTRAMI, Eugenio. **Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di Mathematiche**.VI: 285–315, 1868.

BERNOULLI, Jacob. in Artigos de apoio Infopédia [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2017. [consult. 2017-08-22 18:13:00]. Disponível na Internet: https://www.infopedia.pt/apoio/artigos/$jacob-bernoulli. Acesso em: 22 ago 2017.

BICUDO, Maria A. V. **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: UNESP, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

__________. **História da Matemática**. 2. ed. Sào Paulo: Edgard Blücher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática / secretaria de educação fundamental. MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://www.cpt.com.br/pcn/pcn-parametroscurriculares-nacionais-do-1-ao-5-ano>. Acesso em: 22/01/2017.

__________. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / secretaria de educação fundamental. MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://www.cpt.com.br/pcn/pcn-parametros-curricularesnacionais-do-6-ao-9-ano>. Acesso em: 22/01/2017.

BRASIL. Senado Federal. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: nº 5692/71. Brasília, 1971.

BRAZ, Fernanda Martins. **História da Geometria Hiperbólica**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade de Minas Gerais. RS, 2009.

BRUNER, J. S. **O processo da Educação**. São Paulo, Nacional, 1978.

CÂNDIDO, Suzana Laino. **Formas num mundo de formas**. 4ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.

CASSEL, C. and SYMON, G. **Qualitative research in a work contexts**. In: CASSEL, C. and SYMON, G. (orgs.) Qualitative Methods in Organizational Research. London: Sage, 1994.

CROWLEY, Mary L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 10ª ed. Campinas: Papirus, 2012.

__________. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 8ª ed, Campinas: Papirus, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática: ensino fundamental.** Livro do professor. São Paulo: Ática, 2012.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 1997.

__________. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

FAINGUELENT, Estela K. Educação Matemática: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Medicas Sul, 1999.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos e ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké,** Campinas, nº. 04 ano 03. Novembro, 2005.

__________; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2007.

FREITAG, B. **Aspectos filosóficos e sócio-antropológicos do construtivismo pós-piagetiano** – I. In: GROSSI, E. P.; Bordin, J. (Orgs.). Construtivismo pós-piagetiano: uma novo paradigma sobre aprendizagem, Petrópolis: Vozes. 2002.

GARDNER, Howard. **Estruturas da mente**: a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.

GEMERT, S. la Bastide-van. All Positive Action Starts with Criticism: Hans freudenthal and the didactics of mathematics. Springer Netherlands, 2015.

GIL, ANTONIO CARLOS. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 1998.

GREENBERG, M. J. **Geometrias Euclidianas e não Euclidianas**, San Francisco: W. H. Freeman Company, 1980.

HERÓDOTO. **Coleção Grandes Filósofos da História**, São Paulo: Ediouro, S/A.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 6 ed., São Paulo: Atlas, 2010.

LOBO Joice da Silva; BAYER, Arno. **O ensino de geometria no ensino fundamental**. ACTA SCIENTIAE – v.6 – n.1 – jan./jun. 2004.

LORENZATO, Sérgio. Para aprender Matemática. Campinas: Autores Associados, 2006.

MARTINS, Leocadia Figueredo. **Motivando o ensino de geometria.** Dissertação de Mestrado: Universidade Extremo Sul Catarinense. Criciúma, 2008.

MASSETO, M. T. **Mediação pedagógica e o uso da tecnologia**. In: MORAN, J. M.; MASSETO, M. T.; BEHRENS, M. A. Novas tecnologias e mediação pedagógica. 8.ed. Campinas: Papirus, 2004.

MEDEIROS, Hudson Guedes de. **A importância da geometria na formação acadêmica do aluno**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Estadual de Paraíba, 2011.

MORAES, Maria Cândida. **O paradigma educacional emergente**. Campinas: Papirus, 1997.

MORAN, José Manoel; MASETTO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus, 2006.

NASSER, Lílian; LOPES, Maria Laura M. Leite. Geometria na da imagem e do movimento – Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 1996.

__________; SANTANA, Jordan. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele** – 3. ed. Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 2010.

OLIVEIRA, Francisco Erilson Freire de; MENDONÇA, Luciana de Oliveira Souza. **Os níveis de conhecimentos geométricos dos alunos de uma escola parceira do PIBID na perspectiva da Teoria de Van Hiele**. Conex. Ci. e Tecnol. Fortaleza/CE, v. 9, n. 4, p. 115 - 125, dez. 2015.

OLIVEIRA, S. C. Transformações geométricas em ponto cruz em oficina no laboratório de matemática com alunas do programa mulheres mil. **Gepem**, n. 64, jan./jun, 1998.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências**. In: Zetetiké, n.1, p. 07-17, Unicamp, mar. 2003.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Tese de doutorado – Faculdade de Educação– UNICAMP, 2011.

PÉTIN, Pierre. **O método da falsa posição na história e na educação matemática**. Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

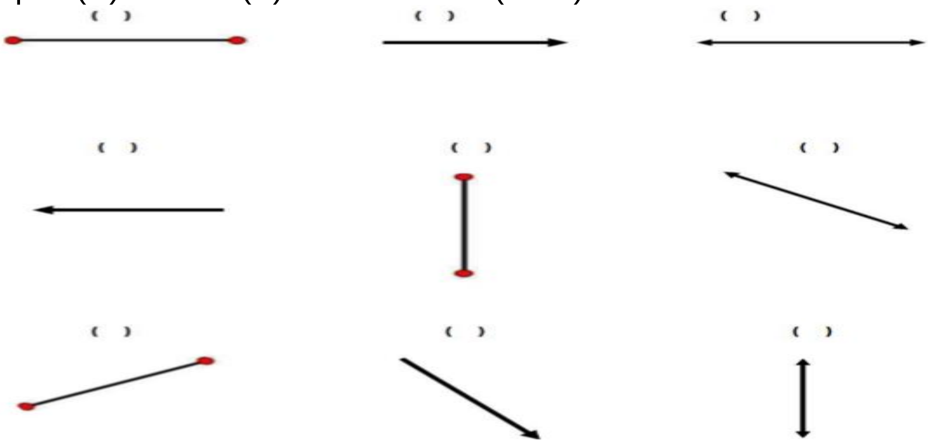
VAN HIELE, P.M. **Begrip e Inzicht. Muusses**: Purmerend, 1973.

VYGOTSKY, L. S. A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

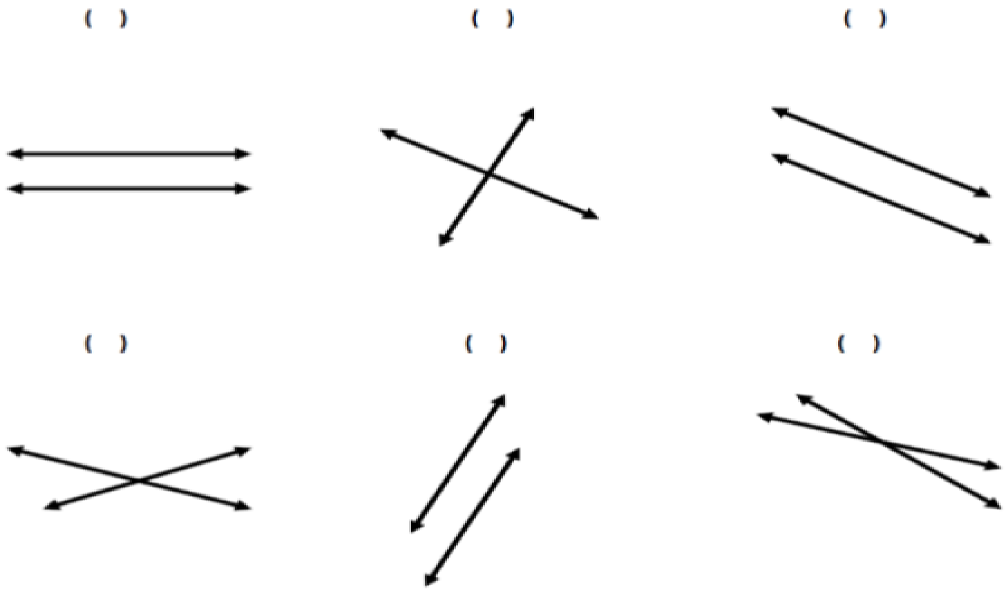
APÊNDICES

Apêndice 1 - ATIVIDADE PROPOSTA 1

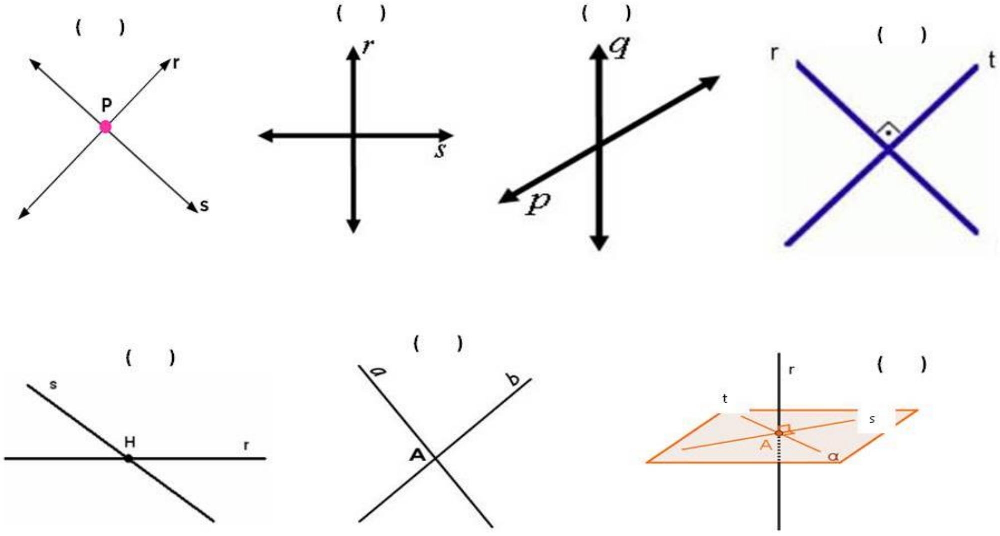
1 – Identifique: (R) RETA / (S) SEMI-RETA / (SGR) SEGMENTO DE RETA



2 - Indique as posições relativas entre as duas retas nas opções abaixo:
(P) PARALELAS / (C) CONCORRENTES

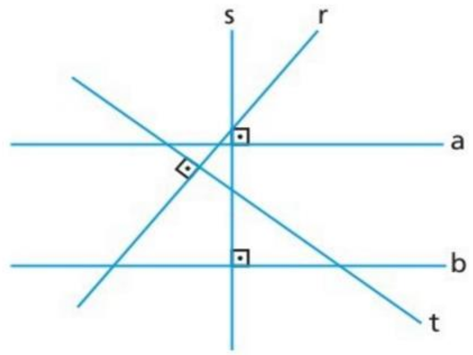


3 – Assinale apenas as retas que representam retas concorrentes perpendiculares.



Apêndice 2 - ATIVIDADE PROPOSTA 2

1 – Identifique na figura abaixo quais são as retas paralelas e quais são as retas perpendiculares.

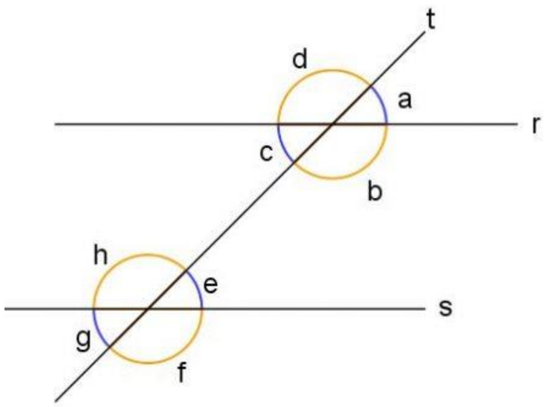


PARALELAS: ______________________________
____
PERPENDICULARES: ______________________
____
____

2 – Nas proposições abaixo, assinale (V) para verdadeiro e (F) para falso.

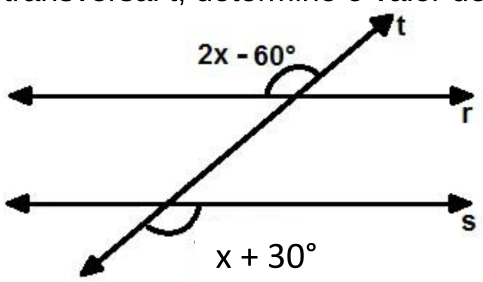
a) **( )** Duas retas distintas que não possuem ponto em comum são concorrentes.
b) **( )** Duas retas concorrentes têm ponto em comum.
c) **( )** Duas retas concorrentes que formam ângulos de 90° são perpendiculares.
d) **( )** Duas retas distintas que são paralelas não possuem pontos em comum.
e) **( )** Duas retas coincidentes possuem infinitos pontos em comum.

3 – Observe a figura abaixo e identifique:

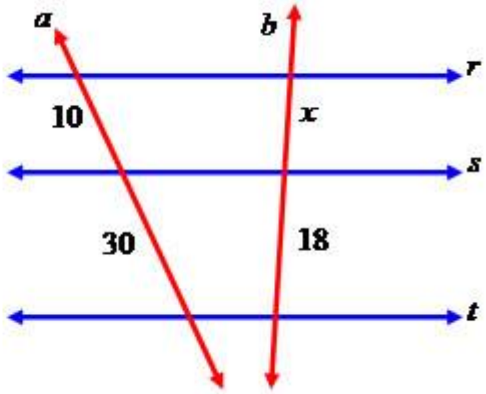


a) Colaterais internos: ____
b) Colaterais externos: ____
c) Alternos internos: ____
d) Alternos externos: ____
e) Correspondentes: ____

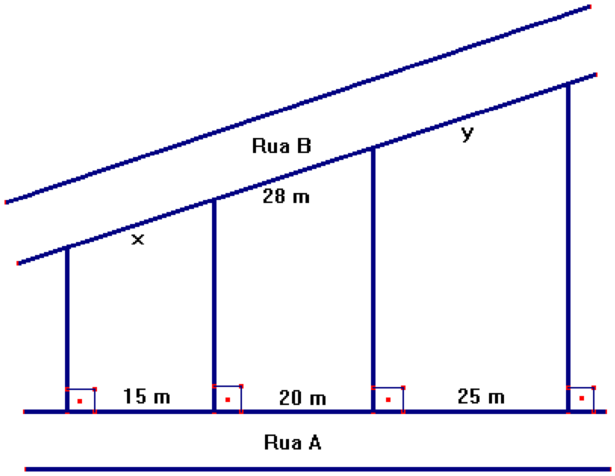
4 - Sabendo que as retas r e s são paralelas e interceptadas por uma reta transversal t, determine o valor de x:



5 – Sabendo que as retas r, s e t são paralelas e a e b transversais, utilize o Teorema de Tales e determine o valor da variável x



6 – A figura abaixo indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. as divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, 15 m, 20 m e 25 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?



Apêndice 3 – MODELO DO QUESTIONÁRIO PARA O DOCENTE

QUESTIONARÁRIO PARA O DOCENTE

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)
TEMA: **UM ENFOQUE CONSTRUTIVISTA DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES E SUAS APLICAÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DE VAN HIELE**.
Mestrando: Benedito Heronizio Pimentel Góes
Município de Macapá – AP
Escola onde leciona: ____
Professor: ______________________________________
Ano ou série escolar de suas turmas: (   ) 6ºano, (   ) 7ºano, (   ) 8ºano, (   ) 9ºano, (   ) 8ª série.

Venho por meio deste solicitar a colaboração desta coleta de informações sobre a aplicação de oficinas nas turmas de 8ª série (9º ano) 821 e 822 da Escola Estadual de Tempo Integral Padre João Batista Piamarta com o objetivo de avaliar diferentes metodologias aplicadas à geometria. Suas informações serão mantidas em sigilo e são de suma importância. Desde já agradeço a sua participação nessa pesquisa.

1 – Com que frequência você aborda cada área do conhecimento matemático:

Frequência	Números e Operações	Espaço e Forma	Grandezas e Medidas	Tratamento de Informação
Sempre				
Às vezes				
Raramente				
Nunca				

2 – Ao abordar Espaço e Forma com que frequência você utiliza as seguintes ferramentas:

Frequência	Quadro branco	Livro didático	Matérias concretos	Situações-problema
Sempre				
Às vezes				
Raramente				
Nunca				

Outros (   ) Quais: ____________________ Com que frequência: _____________

3 – Você já ouviu falar sobre o Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico?
(   ) Não
(   ) Sim

4 – Caso tenha respondido sim ao item 3, você costuma utiliza-lo ao ensinar geometria?
(   ) Não
(   ) Sim

5 – Como você faz uso de situações-problema ao ensinar geometria?
(   ) Ao ensinar o conteúdo
(   ) Em todo o processo de construção do conteúdo

(   ) Para finalizar o conteúdo
(   ) Não costumo utilizar
6 – Você faz uso de materiais concretos ao ensinar geometria?
(   ) Sim
(   ) Não
7 – Descreva como você ensinaria paralelismo, perpendicularidade, Teorema de Tales e ângulos formados pela interseção de um feixe de paralelas com uma transversal por meio de material concreto.
____
____
____
____
____
____
____
8 – Você gostaria de ter informações sobre diferentes metodologias aplicadas ao ensino da geometria?
(   ) Sim, por que?____
(   ) Não, por que?____

Apêndice 4 – MODELO DO QUESTIONÁRIO PARA O DISCENTE

QUESTIONARÁRIO PARA O DISCENTE

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)
Mestrando: Benedito Heronizio Pimentel Góes
Macapá – AP, ______ de ____________________ de 2017
Nome: ______________________________________ Série: _____ Turma: _____
Idade: ______

1 – Qual o seu nível de interesse pela Matemática?
(   ) Alto
(   ) Médio
(   ) Baixo
(   ) Nenhum

2 – Como você se auto avalia em Matemática?
(   ) Muito Bom
(   ) Bom
(   ) Regular
(   ) Insuficiente

3 – Como você avalia a Matemática como disciplina?
(   ) Muito Difícil
(   ) Difícil
(   ) Fácil
(   ) Muito Fácil
Justifique:
____
____

4 – Você gosta de Geometria?
(   ) Sim, por que? ____
(   ) Não, por que? ____

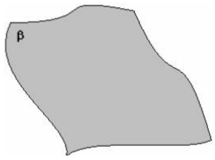
5 – Você avalia a Geometria como uma disciplina:
(   ) Muito Difícil
(   ) Difícil
(   ) Fácil
(   ) Muito Fácil

6 – Você conhece os componentes básicos da Geometria?
(   ) Sim
(   ) Não
Se sim, quais são?
____
____

7 – Desenhe o que se pede abaixo:

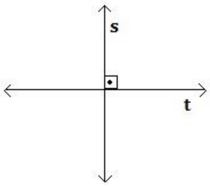
Ponto	Reta	Plano	Retas paralelas	Retas perpendiculares

8 – Relacione as colunas abaixo



(a) Ponto ( )

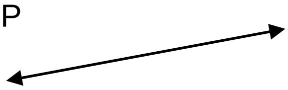
(b) Reta ( )



(c) Plano ( )

(d) Retas paralelas ( ) ● P

(e) Retas perpendiculares ( ) r

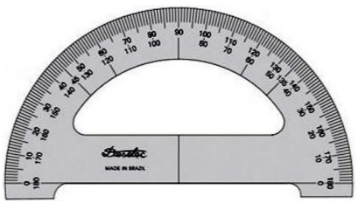


9 – Nomeie os instrumentos abaixo e explique em quais situações eles podem ser utilizados.

____

____

____



____

____

____

____

____

____