Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Modelagem e Sequências Numéricas

Fábio Barbosa de Oliveira

Teresina - 2013

Fábio Barbosa de Oliveira

Dissertação de Mestrado:

Modelagem e Sequências Numéricas

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castelo Branco

048m Oliveira, Fábio Barbosa de.

Modelagem e sequências numéricas./Fábio Barbosa de Oliveira. – Teresina: 2013

41f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite.

1. Matemática. 2. Modelagem. 3. Sequências Numéricas. 4. Recorrências. I. Título.

CDD 510

Dedico este trabalho a Raimundo Nonato , meu pai. Maria do Espírito Santo, minha mãe, Fabrícia, Maria Teresa, minhas irmãs, Eliane, minha esposa, Filipe Esdras, meu filho, pelo carinho, compreensão e palavras de incentivo principalmente nos momentos difíceis ..

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Senhor Jesus Cristo por ser a minha fonte de inspiração para o desenvolvimento como ser humano.

Agradeço à minha esposa, Eliane Barbosa, pela compreensão a mim dispensada durante estes dois anos à qual estive “ausente”, principalmente no que diz respeito ao acompanhamento de nosso filho, Filipe Esdras Barbosa, cujo nascimento se deu pelo início do mestrado.

Agradeço aos meus pais por todo o empenho dispensado para minha formação, seja no ensino médio, seja no ensino superior (curso de licenciatura).

Agradeço aos “irmãos em Cristo” por dedicarem momentos de oração durante todo este período tão importante na minha vida

Agradeço aos professores do mestrado, pela paciência, dedicação, e pela forma de conduzir nossa formação e principalmente pelo ambiente de harmonia e amizade.

Agradeço aos amigos de PROFMAT , em especial aos alunos Alberto Cunha, Aliprecídio José pelo incentivo dado. E aos professores Jefferson Leite, Paulo Alexandre, Juscelino, Humberto.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*O coração do entendido adquire conhecimento; e o ouvido dos sábios busca conhecimento.*".

Provérbio 18:15.

RESUMO

A modelagem em matemática tem alcançado novos rumos devido aos novos campos de pesquisa e trabalho. Muitos pesquisadores-professores tem desempenhado um importante papel para sua divulgação e expansão, principalmente com a criação de centros de pesquisa. Devido a sua importância, faz necessário conhecer um pouco de sua história no Brasil e como também de seus precursores, como se dá o seu planejamento e aplicação. O conhecimento prévio de alguns conteúdos como progressão aritmética, progressão geométrica e recorrências são importantes para o desenvolvimento de uma pesquisa em modelagem matemática, a qual poderá ser aplicada na visualização de problemas como financiamento de carros, da casa própria ou simples planejamento familiar.

PALAVRA-CHAVE: Modelagem Matemática, recorrências, progressões, equações de diferenças.

ABSTRACT

The mathematical modeling has reached new directions due to new fields of research and work. Many researchers- teachers have played an important role in its dissemination and expansion, especially with the creation of research centers. Because of its importance, it is necessary to know a little of its history in Brazil and as well as their precursors, gives its planning and implementation. The previous knowledge of some content such as arithmetic, geometric progression and recurrences are important for the development of research in mathematical modeling, which can be applied in view of problems such as car financing, home ownership or simple family planning.

KEYWORDS: Mathematical Modeling, recurrences, progressions, difference equations

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Histórico

Atualmente tem-se repensado o ensino de matemática em sala de aula deixando de ser uma mera disposição de conteúdos e passando-se a uma aula mais prática. Devido a essa preocupação tem surgido diversos grupos de estudos (pesquisas) na área. Esses grupos têm utilizado modelos matemáticos que tornam a aula do caderno e do livro em algo que os alunos possam observar, examinar e formular um conceito transformando numa expressão matemática.

Alguns grupos de professores-pesquisadores, por uma necessidade de mostrar na prática qual o comportamento de determinada expressão, resolveram deixar suas aulas diferentes. Para tal teriam que usar um meio diferente do que apenas tomar um livro, um caderno, um lápis e um professor mostrando no quadro negro como utilizar uma fórmula que muitas vezes não tem sentido algum para o aluno. A modelagem matemática começou a se desenvolver com mais especificidade a partir da década de 1970. A princípio o seu desenvolvimento se deu como uma forma de ajudar alunos a verem uma aplicabilidade de conceitos aprendidos em sala de aula na prática.

Conforme Biembergut (2009, p. 12) o professor Aristides Camargo Barreto, da PUC do Rio de Janeiro, foi um dos precursores da introdução da Modelagem Matemática em salas de aula de cálculo diferencial e Integral nas décadas de 1970 e 1980. Segundo o professor Dr. Dionísio Burak [1] UEPG - Ponta Grossa - PR, a modelagem matemática no Brasil começou a ser trabalhada na década de 80 na universidade estadual de Campinas - UNICAMP - com um grupo de professores, em Biomatemática, coordenados pelo professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi [2] - IMECC. E segundo Biembergut (2009, p.12), tem -se que o professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi e seus orientandos consolidaram a difusão da Modelagem Matemática no país.

Mas, o que é a modelagem matemática? Diante de tal pergunta, primeiro precisamos responder o que é um modelo matemático? segundo Bassanezi (2012), "modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado". Segundo Biembengut (2011), "a modelagem matemática é um método no qual se ensina o conteúdo matemático a partir da descrição, formulação e resolução de situações problemas de alguma área do conhecimento de interesse do aluno." A Modelagem Matemática deve ser livre e espontânea surgindo a partir de uma necessidade do homem em querer compreender os acontecimentos que o cercaram.

1.2 Procedimentos para resolução em modelagem

Segundo o Bassanezi (2012), "a modelagem é um processo dinâmico para se obter modelos, sendo caracterizada por etapas que se complementam." Ainda segundo o Bassanezi (2012) essas etapas seriam:

1. **Experimentação**

   "A obtenção de dados experimentais ou empíricos são fundamentais para a compreensão do problema e ajudam na sua estruturação, formulação e modificações eventuais dos modelos." A obtenção dos dados são realizadas por pesquisadores de determinada área. No entanto, na era educacional não necessariamente será um especialista a obter os dados, pois os mesmos podem ser encontrado facilmente na internet.

[1] Dionísio Burak é licenciado em Matemática pela Faculdade Estadual de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava, hoje Universidade Estadual do Centro Oeste - UNICENTRO. Fez pós-graduação lato-sensu em Cálculo Avançado em 1976 pela FAFIG. Em 1983 fez especialização em Ensino de Matemática pela Unesp - Rio Claro. É Mestre em Ensino da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos da Educação pela UNESP - Rio Claro, em 1987. Dr. em Educação pela Unicamp- SP em 1992.

[2] Dr. Rodney Carlos Bassanezi Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1965), mestrado em pela Universidade Estadual de Campinas (1971) e doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1977)

2. **Abstração**

   "O processo de seleção das variáveis essenciais responsáveis pela evolução do fenômeno estudado." Nesta etapa do processo são formuladas as hipóteses e "leis" que deverão ser testadas na validação do modelo.

3. **Formulação do Modelo**

   "O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem usual por uma linguagem matemática". Podemos observar o exemplo abaixo desta terceira etapa. Assim, a *variação de uma população* pode ser traduzida por:

   $\frac{dP}{dt}$: derivada de $P(t)$ em relação ao tempo (variação contínua)em que $P(t)$ é a população no tempo t.

   ou

   $P(t_2) - P(t_1)$: diferença da população em tempos distintos (variação discreta)

   ou

   $\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t1}$: variação média de uma população

   Se tivermos como hipótese que a *variação populacional é proporcional à população*, usando a formulação da variação continua, temos:

   $$\frac{dP}{dt} = aP$$

   Neste etapa passa-se a uma matematização do modelo o que será de suma importância nos passos que seguem.

4. **Resolução**

   "A resolução de um modelo depende da sua complexidade, podendo ser uma resolução analítica ou numérica."

5. **Validação**

   "Validar um modelo matemático significa comparar a solução obtida com dados reais." Ou seja, precisamos verificar se o modelo em questão é válido fazendo uma confrontação dos resultados obtidos com os dados reais.

6. **Modificação**

   Em alguns casos é necessário fazer modificações no modelo, seja acrescentando novas variáveis ou modificando a lei de formação.

7. **Aplicação**

   "A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; emfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças."

Temos assim que, em uma modelagem, não é suficiente apenas os passos citados acima, mas se faz necessário ter uma aplicabilidade para o modelo encontrado.

Já Biembengut(2004) defende que o processo de transformar uma situação problema real em modelo matemático está dividido em três etapas com suas subetapas:

1. **"Integração"**

   Reconhecimento da situação-problema;

   Familiarização com o assunto a ser modelado.

2. **"Matematização"**

   Formalização do problema;

   Resolução do problema em termos do modelo.

3. **"Modelo Matemático"**

   Interpretação da solução;

   Validação do modelo.

Com o que foi exposto acima podemos responder a seguinte pergunta: Por que fazer modelagem matemática?

Segundo Jean Carlos Silveira[3] e João Luiz Domingues Ribas[4] são seis os benefícios de trabalharmos com Modelagem Matemático:

1. Motivação dos alunos e do próprio professor;

[3] Jean Carlos Silveira é acadêmico do 5º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa

[4] João Luiz Domingues Ribas é Mestre em Educação, Professor do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino da Universidade Estadual de Ponta Grossa, atua nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia

2. Facilitação da aprendizagem. O conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto;

3. Preparação para futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento, devido a interatividade do conteúdo matemático com outras disciplinas;

4. Desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo;

5. Desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade;

6. Compreensão do papel sócio-cultural da matemática, tornando-a assim, mais importante.

1.3 Aplicação da modelagem

A Modelagem Matemática 'consiste' em tomar situações do cotidiano dos alunos e dar um sentido prático, ou seja, sair do abstrato de sala de aula e delinear uma aplicabilidade de equações e fórmulas sem sentido em algo prazeroso, levando os alunos a olhar para uma expressão e para que possam verificar se esta tem algum sentido e poder aplicá-la.

A Modelagem Matemática pode ser usada tanto no ensino fundamental como no ensino médio. Entretanto, ainda Segundo Silveira e Ribas (2004)

> A Modelagem Matemática não deve ser usada como uma única metodologia de ensino, o professor no exercício das suas atividades, deve sempre procurar a melhor metodologia de ensino de matemática, como por exemplo: jogos, brincadeiras, a história da matemática, metodologia dos três momentos, resolução de problemas, emfim usar todos os seus recursos para obter o melhor resultado possível no ensino de matemática.
> Disponível em http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/

A modelagem Matemática não deve ser utilizada apenas para justificar o conteúdo a qual vamos ministrar, mas como uma ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem mostrando ao aluno o motivo pelo qual deve-se aprender matemática e também da importância da formação como cidadão responsável e participativo na região a qual este aluno esta inserido.

Na nova conjuntura sócio-econômica a qual o Brasil passa tem-se disponibilizado muito material para pesquisa nas universidades e institutos federais, principalmente devido ao aumento de cursos médios profissionalizantes. Estes cursos profissionalizantes tentam aliar os conceitos expressos nos livros com a prática a ser desenvolvida por este aluno tornando-o capaz de realizar determinadas tarefas mediante os conceitos aprendidos.

Diante do que foi exposto acima, o atual programa do ensino poderá se utilizar da Modelagem Matemática. Podemos citar a professora Ms. Elaine Ferruzzi - IFPR que foi bem sucedida com sua turma de eletrônica do IFPR que veio a ministrar todo o programa do curso utilizando Modelagem Matemática.

Já como avaliação é aconselhável se utilizar de relatórios levando em conta o grau de desenvolvimento do aluno como também a sua evolução neste desenvolvimento.

Lembramos que o processo da Modelagem Matemática não busca eliminar a aula conteudista e sim, dar um sentido prático àquilo que se deseje estudar. Desta maneira, salientamos que a Modelagem Matemática busca auxiliar o processo de ensino-aprendizagem tornando as aulas mais agradáveis e ao mesmo tempo práticas.

Nos capítulos seguintes faremos uma exposição de assuntos necessários ao desenvolvimento de aulas trabalhando modelagem matemática.

CAPÍTULO 2

SEQUÊNCIAS

Na primeira secção deste capítulo traremos uma definição simples sobre sequências. Na segunda secção definiremos as sequências numéricas. Em seguida, na terceira e quarta secção, respectivamente, exploraremos as definições de progressões aritmética e geométrica com algumas aplicabilidades no que tange ao cotidiano como taxas equivalentes.

Ainda será dada uma explicação de como encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica.

2.1 Sequências

Definição 1. *Uma **sequência** ou sucessão (x_n) de números reais é um conjunto ordenado onde para cada $i \in \mathbb{N}^*$ se associa um número x_i. A esta sequência representaremos por:*

$$(x_1; x_2; x_3; \cdots; x_n; \cdots).$$

Desta forma, tem-se que uma sequência é uma função de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$ em $\mathbb{R}$ onde $(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \cdots$.

Uma sequência pode ser finita (se apresenta último termo) ou infinita (se não apresenta último termo, ou seja, quando não houver especificações ou ainda quando indicada por reticências).

Podemos denotar uma sequência de três maneiras básicas:

1. Por fórmula de recorrência

   Neste caso, identifica-se um dos termos (geralmente o primeiro) e um outro para se calcular cada termo (x_n) a partir do seu antecedente (x_{n-1})

   Exemplo 1. *Seja a sequência finita* f *de cinco termos onde*

   $$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{p+1} = x_p - 2 \end{cases}$$

   Os seus cinco termos seriam expressos por:
   $p = 1 \to x_{1+1} = x_1 - 2 = 5 - 2 = 3$, logo $x_2 = 3$
   $p = 2 \to x_{2+1} = x_2 - 2 = 3 - 2 = 1$, logo $x_2 = 1$
   $p = 3 \to x_{3+1} = x_3 - 2 = 1 - 2 = -1$, logo $x_2 = -1$
   $p = 4 \to x_{4+1} = x_4 - 2 = -1 - 2 = -3$, logo $x_2 = -3$
   E a sequência é $(5, 3, 1, -1, -3)$.

2. Por fórmula que expressa cada termo em função de sua posição

   Tem-se um fórmula que expressa o valor de cada termo a partir da posição que ocupa na sequência.

   Exemplo 2. *Dada a fórmula* $x_n = 2n + 1$ *determine os quatro primeiros termos*

   Os seus quatro termos seriam dados por:
   $n = 1 \to x_1 = 2.1 + 1 = 2 + 1 = 3$, logo $x_1 = 3$
   $n = 2 \to x_1 = 2.2 + 1 = 4 + 1 = 5$, logo $x_1 = 5$
   $n = 3 \to x_1 = 2.3 + 1 = 6 + 1 = 7$, logo $x_1 = 7$
   $n = 4 \to x_1 = 2.4 + 1 = 8 + 1 = 9$, logo $x_1 = 9$
   Portanto, a sequência é $(3, 5, 7, 9)$.

3. Por propriedade dos termos

   Neste caso, tem-se uma propriedade a qual determinará os termos da sequência.

   Exemplo 3. *Ao citar a seguinte propriedade: os números pares naturais maiores que 5 e menores que 10, estaríamos representando os elementos:* $\{6, 8\}$.

Antes de começarmos nosso estudo, esboçaremos algumas definições[1] importantes.

[1] As definições citadas nesta secção foram retiradas do material da disciplina de cálculo ministrada no curso de pós-graduação - PROMAT-2011

2.2 Sequências Numéricas

Definição 2 (Sequências Numéricas)**.** *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que a cada número natural* n *associa um número real* $x_n = x(n)$*, chamado de n-ésimo termo da sequência.*

Exemplo 4. *Expresse os termos das sequências abaixo:*

a) $\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \cdots\right)$

b) $\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \frac{28}{27}, \cdots\right)$

c) $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right)$

Definição 3 (Sequência Limitada)**.** *Uma sequência* x_n *será limitada, se existe* $c > 0$ *tal que* $|x_n| < c$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição 4 (Sequência Decrescente)**.** *Uma sequência* x_n *será dita* DECRESCENTE *se* $x_{n+1} < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que a sequência é* NÃO CRESCENTE*, se* $x_{n+1} \leqslant x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição 5 (Sequência Crescente)**.** *Uma sequência* x_n *será dita* CRESCENTE *se* $x_{n+1} > x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que a sequência é* NÃO DECRESCENTE*, se* $x_{n+1} \geqslant x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Obs 1 (Sequência Monótonas)**.** *As sequências crescentes, não crescentes, decrescentes, não decrescentes são chamadas monótonas.*

Exemplo 5. *Tomando os exemplos acima citados observaremos que:*

a) A sequência é monótona crescente, pois tomando $x_n = \frac{2n-1}{n}$ tem-se que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. E ela também é limitada tendo $x_n \in (1, 2)$,pois $a_n = 2 - \frac{1}{2}$.

b) A sequência é monótona decrescente, pois tomando $x_n = 1 + \frac{1}{3^n}$ tem-se que $x_{n+1} < a_n$. E ela também é limitada tendo $x_n \in (1, 2)$.

c) A sequência é monótona crescente, pois tomando $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}$ tem-se que $x_{n+1} > x_n$. E ela também é limitada tendo $x_n \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Definição 6 (Limite de uma Sequência)**.** ***Sequência Convergente*** *Sejam x_n uma sequência de números reais e l um número real. Dizemos que x_n* ***converge*** *para l, ou seja, é convergente, e se escreve $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, quando para qualquer intervalo aberto I contendo l (por "menor´´ que ele seja) é possível encontrar um natural $n_0 \geqslant 1$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$.*

Podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $n_0 \geqslant 1$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

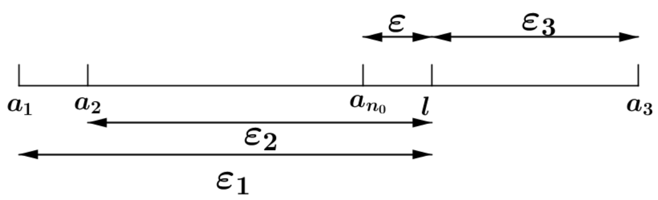

Figura 2.1: Sequência Limitada

Exemplo 6. *Baseado na sequência $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$ calcular a raiz quadrada aproximada de 2.*

Solução:

$$\begin{aligned}
x_1 = 1 \to x_2 &= 1 + \frac{1}{2} = 1,5 \\
x_2 = 1,5 \to x_3 &= 1 + \frac{1}{2,5} = \frac{35}{25} = 1,4 \\
x_3 = 1,4 \to x_4 &= 1 + \frac{1}{2,4} = \frac{34}{24} = 1,46\ldots \\
x_4 = 1,46\ldots \to x_5 &= 1 + \frac{1}{1+\frac{34}{24}} = \frac{82}{58} = 1,41379\ldots
\end{aligned}$$

ou poderíamos resolver tomando a definição de limite de um sequência convergente onde $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = l$. Desta maneira teríamos que a sequência $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$ poderia ser escrita por

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1+x_n}\right)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} l &= 1 + \frac{1}{1+l} \\ l - 1 &= \frac{1}{1+l} \\ l^2 - 1 &= 1 \\ l^2 &= 2 \end{aligned}$$

e, portanto, o valor de $l = \sqrt{2}$

Com relação ao exemplo acima, se a expressão fosse escrita da forma $x_{n+1} = 1+\dfrac{p-1}{1+x_n}$, o que aconteceria?

Trataremos agora de sequências já conhecidas e que são trabalhadas no ensino médio: Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

2.3 Progressão Aritmética

Uma determinada sequência expressa uma **Progressão Aritmética** quando a diferença entre um termo e o termo anterior é constante. A esta constante chamaremos de **razão** representada pela letra **r**.

2.3.1 Fórmula do termo Geral de uma Progressão Aritmética

Tomando a progressão aritmética $(a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n)$, tem-se que cada termo consequente é encontrado pelo termo anterior adicionado a razão **r**. Assim,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2.r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2.r + r = a_1 + 3.r \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1).r \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemplo 7. *O cometa Halley[2] visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por*

[2]O cometa Halley é um cometa brilhante de período intermediário que retorna às regiões interiores do Sistema Solar a cada 76 anos, aproximadamente. Sua órbita em torno do Sol está na direção oposta à dos

aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Solução: Primeiro a de se observar que o cometa Halley ao passar pela Terra a cada 76 anos nos determina uma progressão aritmética de razão 76, a qual tomaremos com um valor negativo, pois precisamos regressar até o nascimento de Cristo. Assim, a progressão seria determinado por $(1986, 1910, 1834, \cdots)$. Para determinar quantas vezes o cometa passou pela Terra desde o nascimento de Cristo temos que $a_n > 0$. Desta maneira, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= 1986 + (n-1).(-76) \\ a_n &= 1986 + 76 - 76.n \\ a_n &= 2062 - 76.n \end{aligned} \tag{2.2}$$

como $a_n > 0$ tem-se que $n > \dfrac{2062}{76} \to n > 27,13\ldots$. Portanto, temos que os termos positivos desta progressão seriam os primeiros 27 termos, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{27}$. Desta maneira, o cometa Halley passou pela terra 27 vezes desde o nascimento de Cristo.
Já o ano a qual ele passou será encontrado substituindo 27 na expressão 2.2.

$$a_{27} = 2062 - 76.27$$

$$a_{27} = 2062 - 2052$$

$$a_{27} = 10$$

Portanto, a primeira vez que o cometa Halley passou pela Terra na era cristã foi no ano 10.

2.3.2 Gráfico de uma Progressão Aritmética

Pelo exemplo acima observa-se que uma **Progressão Aritmética** é uma função onde para cada $i \epsilon \mathbb{N}^*$ se associa um $a_i \epsilon \mathbb{R}$, ou seja, $(1, a_1), (2, a_2), \cdots, (n, a_n)$. O gráfico dessa função é uma sequência de pontos colineares no plano.

planetas e tem uma distância de periélio de 0,59 unidades astronômicas; no afélio, sua órbita estende-se além da órbita de Netuno. Foi o primeiro cometa a ser reconhecido como periódico, descoberta feita por Edmond Halley em 1696.

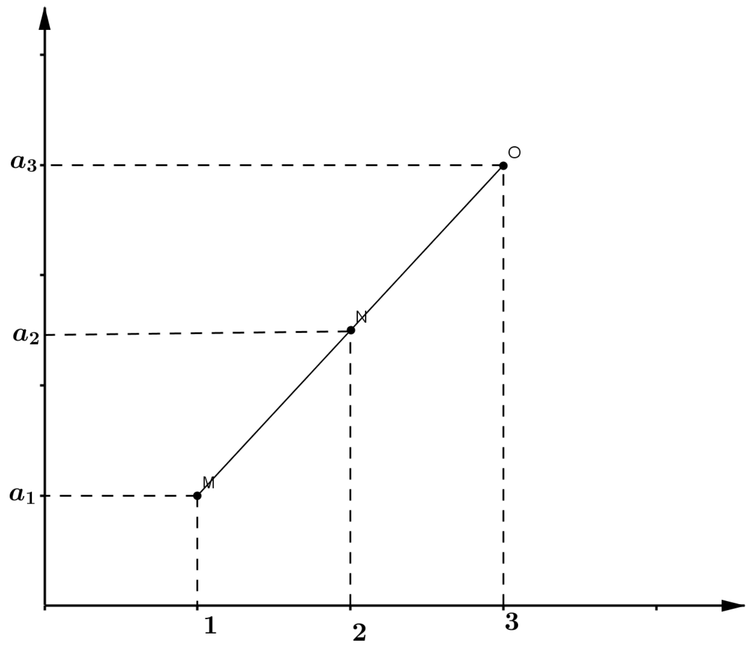

Figura 2.2: Função polinomial (Progressão Aritmética)

Obs 2. *Com relação ao gráfico da função polinomial do* 1^0 *que é representado pela reta passando pelo conjunto de pontos* $\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots\}$*. Já o gráfico com relação a Progressão Aritmética, é dado apenas pelos pontos* $\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots\}$

Exemplo 8. *Um bem, cujo valor hoje é de* R\$8.000, 00*, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de* R\$2.000, 00*. Supondo constante a desvalorização anual, qual será o valor do bem daqui a 3 anos?*

Solução: Como o bem sofre uma desvalorização constante observa-se que os seus valores ano após ano se comportam como uma progressão aritmética de valor inicial $a_1 =$ R\$8.000 (valor sem desvalorização) e valor final $a_5 =$ R\$2.000 (corresponde à desvalorização após o quarto ano). Tomando a expressão (2.1) e substituindo os valores de a_1 e a_5, a razão r será de

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1).r \\ 8000 + 4r &= 2000 \\ 4r &= -6000 \\ r &= -1500 \end{aligned}$$

Para encontrar o valor do bem após uma depreciação de três anos (a_4), basta substituir os valor de $r = -1500$ na expressão (2.1) a qual encontraremos:

$$a_4 = 8000 + 3.(-1500)$$
$$a_4 = 8000 - 4500$$

Portanto, após três anos de depreciação o valor do bem será de R\$4.500,00.

2.3.3 Soma dos termos de uma Progressão Aritmética

Ainda com relação as progressões aritméticas uma propriedade importante é a soma dos seus termos a qual é dada uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ obtém-se que a soma dos termos será dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \tag{2.3}$$

Prova: Seja a soma dos termos S_n é dado por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

ou ainda

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Temos desta forma que:

$$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

Tomando a expressão 2.1, tem-se que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

Desta maneira, todas as somas são iguais à primeira $(a_1 + a_n)$, como temos n parênteses, encontraremos:

$$2.S_n = (a_1 + a_n).n$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Na expressão 2.3 substituindo a_n por $a_1 + (n-1).r$ teremos:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_1 + n.r - r}{2}\right).n = \left(\frac{2a_1 + n.r - r}{2}\right).n$$
$$S_n = a_1.r + \frac{n^2.r}{2} - \frac{n.r}{2}$$
$$S_n = \frac{n^2.r}{2} + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right).n$$

Se $r \neq 0$ tem-se que S_n é um polinômio do segundo grau à qual poderá ser reescrito como segue:

$S_n = an^2 + bn$, onde $\frac{r}{2} = a$ e $a_1 - \frac{r}{2} = b$, ou seja, $r = 2a$ e $a_1 = a + b$.

Em algumas sequências não conseguimos identificar uma progressão aritmética entre os seus termos $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$. No entanto, quando tomamos as diferenças entre seus termos consecutivos percebemos que os mesmos formam uma progressão aritmética.

Vamos definir para as sequências deste tipo o operador $\triangle$ a qual será chamado de **operador de diferença** onde:

$$\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$$

Desta maneira, quando se tem que as diferenças $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ formam uma progressão aritmética não-estacionária a chamaremos de **progressão aritmética de segunda ordem**.

Observação: Além das progressões de segunda ordem podem existir as progressões aritméticas de terceira, quarta, ... ordem).

Tomando a sequência $a_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois ao tomarmos $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ formaremos a sequência $b_n = (2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ que é uma progressão aritmética de não estacionária.

Exemplo 9. ***(PROFMAT-2011)*** *Considere a sequência $(a_n)_{n \geqslant 1}$ definida como indi-*

cado abaixo:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2 + 3$$
$$a_3 = 4 + 5 + 6$$
$$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$$
$$\ldots$$

a) *O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?*

b) *Calcule a_{10}.*

c) *Forneça uma expressão geral para o termo a_n.*

Solução:

a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos $a_1, ..., a_{n-1}$, isto é, $1+2+...+n-1$ mais um, isto é, é igual a $\frac{1}{2}n.(n-1)+1$. O último inteiro é esse número mais $n-1$. Portanto, para $n = 10$, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

b) a_{10} é a soma de uma progressão aritmética de 10 termos, sendo o primeiro igual a 46 e o último igual a 55. Então

$$a_{10} = \frac{(46 + 55).10}{2} = 101.5 = 505$$

c) No caso de a_n, trata-se da soma de uma progressão aritmética de n termos, sendo o primeiro igual $\frac{1}{2}n.(n-1)+1$ e o último igual $\frac{1}{2}n.(n-1)+1+(n-1)$, ou seja, $\frac{1}{2}n.(n-1)+n$, como visto em (a). Então

$$a_n = \frac{\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right] + \left[\frac{1}{2}n(n-1)+n\right]}{2}.n = \frac{(n-1)n^2 + (n+1)n}{2} = \frac{n^3+n}{2}$$

Exemplo 10. ***(PROFMAT - 2011)*** *A sequência $0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, \ldots$ é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o* *primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.*

a) Qual é o centésimo termo dessa sequência?

b) Qual é a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência?

c) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

Solução:

a) Chamemos de $a_1, a_2, a_3, \cdots$ os termos dessa sequência. A sequência dos termos com índices ímpares $a_1, a_3, a_5, \cdots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 0 e passo (ou razão) 7. A sequência dos termos com índices pares $a_2, a_4, a_6, \cdots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e passo 7. O centésimo termo é o 50^0 da sequência dos pares. Então $a_{100} = 3 + (50 - 1).7 = 3 + 343 = 346$.

b) Há maneiras diferentes de se fazer isso. Podemos agrupar a soma assim:

$$(a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) + ... + (a_{50} + a_{51})$$

Veja que de a_1 para a_2 há um acréscimo de 3 e de a_{99} para a_{100} também. Então os dois primeiros termos são iguais. Do segundo para o terceiro há um aumento e um decréscimo de 4, logo o terceiro termo é igual ao segundo. E assim por diante. Então todos os termos entre parênteses são iguais ao primeiro, que vale $0 + 346 = 346$. Como são 50 termos, a soma dá $50.346 = 17300$.

Outro jeito de fazer é somar separadamente as sequências com índices ímpares e pares. No segundo caso (pares), são 50 termos da progressão aritmética de razão 7 começando em 3 e terminando em 346. A soma dessa progressão dá

$$50.\frac{3 + 346}{2} = 25.349 = 8725.$$

No primeiro caso (ímpares), são 50 termos, mas todos 3 unidades menores do que os termos da série par. Então a soma desses é 8725 subtraído de $50.3 = 150$, isto é, dá 8575. Juntando as duas, ficamos com 17300. Obs. Essa segunda soma também sairia da mesma forma como a outra, pois a PA tem primeiro termo igual a 0, último termo igual a 343, totalizando 50 termos, logo soma

$$50.\frac{0+343}{2} = 25.343 = 8575.$$

c) Observe primeiro que se n é ímpar então a_n é múltiplo de 7, e se n é par então $a_n - 3$ é múltiplo de 7 (de fato, valem as recíprocas, mas não precisaremos disso).

Como nem $2000 = 7.285 + 5$ nem $1997 = 7.285 + 2$ são múltiplos de 7, então 2000 não pode ser um a_n nem para n par nem para n ímpar.

2.4 Progressão Geométrica

Definição 7. *Uma sequência expressa uma* ***Progressão Geométrica*** *quando o quociente entre um termo e o termo anterior é constante. A esta constante chamaremos de* ***razão*** *da progressão geométrica representada pela letra* ***q****.*

Ou ainda, uma Progressão Geométrica é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento (ou decrescimento) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

As progressões geométricas podem modelar fenômenos como o aumento de um capital aplicado a uma taxa anual prefixada. As Progressões Geométricas também podem modelar o crescimento de uma população a uma taxa anual fixa ou, ainda, o decaimento da radiação emitida por um material radioativo.

Assim, as Progressões Geométricas aparecem muito frequentemente não só nas aplicações, mas também, em vários contextos matemáticos e por isso, certamente, são muito mais interessantes do que as progressões aritméticas.

2.4.1 Fórmula do Termo Geral da Progressão Geométrica

Tomando a progressão geométrica $(a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n)$, tem-se que cada termo consequente é encontrado pelo termo anterior multiplicado pela razão **q**. Assim,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_2.q = a_1.r.r = a_1.q^2 \\ a_4 &= a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1.q^{n-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Exemplo 11. *Se tomarmos a sequência* $(1, 2, 4, 8, 16, \cdots)$ *é um exemplo de progressão geométrica cuja razão será igual a* $q = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = \cdots = 2.$

Com relação ao exemplo anterior observa-ser que cada termo é igual ao termo anterior multiplicado por $1 + i$ onde i é a taxa de crescimento.

Exemplo 12. *A população de um país é hoje igual a* P_0 *e cresce* 2% *ao ano. Qual será a população daqui a n anos?*

Solução: Como a população cresce 2% ao ano tem-se que:

$$\begin{aligned} &P_1 = P_0 + 2\% de P_0 = P_0.(1 + 0,02) = P_0.1,02 \\ &P_2 = P_1 + 2\% de P_1 = P_1.(1 + 0,02) = P_1.1,02 = P_0.1,02.1,02 = P_0.1,02^2 \\ &\ \vdots \\ &P_n = P_{n-1} + 2\% de P_{n-1} = P_{n-1}.(1 + 0,02) = P_{n-1}.1,02 = P_0.1,02^{n-1}.1,02 \\ &P_n = P_0.1,02^n \end{aligned}$$

Portanto, a população daqui a n anos é de $P_n = 1,02^n.P_0$.

Referente a taxa de crescimento de uma progressão, o comportamento do gráfico é muito interessante de ser observado.

Poder-se-ia tomar a observação concernentes as progressões aritméticas com relação ao gráfico. Já que os pontos da progressão $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots$

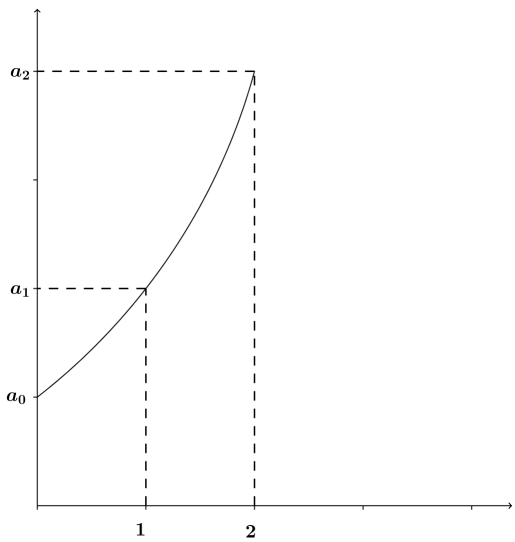

Figura 2.3: Função exponencial (progressão Geométrica)

2.4.2 Taxas Equivalentes

Uma aplicabilidade das progressões geométricas são as taxas equivalentes. Seja I a taxa de crescimento relativa a um período de tempo T e, i a taxa de crescimento relativamente ao período t com $T = n.t$ tem-se desta maneira que:

$$1 + I = (1 + i)^n \tag{2.5}$$

Prova: Tomando inicialmente um valor inicial, C_0, de uma certa grandeza. Sejam um

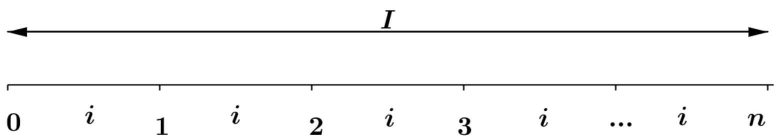

Figura 2.4: Taxas Equivalentes

período de tempo T com taxa I será gerado um valor $C_0.(1 + I)^1$. Já com relação aos n períodos de tempo t com taxa i será gerado um valor $C_0.(1 + i)^n$. Desta maneira, $C_0.(1 + I)^1 = C_0.(1 + i)^n$ e, portanto

$$1 + I = (1 + i)^n$$

Exemplo 13. *Se a população de um país cresce* 2% *ao ano, quanto crescerá em 25 anos?*

Solução: Tomando $i = 2\% = 0,02$ e $n = 25$. Substituindo os valores de i e n na expressão 2.5, tem-se que o valor de I será dado por:

$$1 + I = (1 + 0,02)^{25} \Rightarrow 1 + I = 1,02^{25} \Rightarrow 1 + I \cong 1,6406 \Rightarrow I \cong 0,6406$$

Sendo, assim, o crescimento após 25 anos será de aproximadamente 64, 06%.

Exemplo 14. *Uma bomba de vácuo retira, em cada sucção, 2% do gás existente em certo recipiente. Depois de 50 sucções, quanto restará do gás inicialmente existente?*

Solução: o valor de $i = -2\% = -0,02$ e $n = 50$. Desta maneira, tomando a expressão 2.5 obtemos

$$\begin{aligned} 1 + I &= (1 - 0,02)^{50} \\ I &\cong 0,3642 - 1 \\ I &\cong -0,6358 \end{aligned}$$

Portanto, a quantidade de gás diminuirá de aproximadamente 63, 58% restando, assim, 36, 42% do gás inicialmente existente.

2.4.3 Soma dos termos de uma Progressão Geométrica Finita

Seja a progressão geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ com razão q. A soma dos n primeiros termos dessa sequência será dado por

$$S_n = a_1.\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \tag{2.6}$$

Prova: Seja a soma dos termos da progressão geométrica dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Tomando a expressão 2.4 temos que:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1.q + a_.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-1} \\ S_n &= a_1.(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \end{aligned}$$

Na teoria dos produtos notáveis é dado que:

$$x_n - 1 = (x-1).(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Portanto,

$$S_n = a_1.\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Exemplo 15. *Diz a lenda que o inventor do xadrez*[3] *pediu como recompensa* 1 *grão de trigo pela primeira casa,* 2 *grãos pela segunda,* 4 *pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas. Qual o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo?*

Solução: O número de grãos pedidos pelo inventor do jogo seria dado pela soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, \ldots$. Utilizando a expressão 2.6 seria dado por:

$$S_{64} = 1.\frac{2^{64} - 1}{2 - 1}$$
$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

Feito o cálculo desse número encontramos 18.446.744.073.709.551.615.

2.4.4 Soma dos termos de uma Progressão Geométrica "Infinita"

No caso de $0 < q < 1$, a expressão 2.6 que representa a soma dos termos de uma progressão geométrica diminui muito quando o termo em n cresce. Assim, quando $n \to \infty$ chamaremos a progressão geométrica de "infinita" cuja soma dos termos será dada por

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \tag{2.7}$$

[3]Xadrez é um jogo de tabuleiro de natureza recreativa e competitiva para dois jogadores, sendo também conhecido como Xadrez Ocidental ou Xadrez Internacional para distingui-lo dos seus predecessores e de outras variantes da atualidade. A forma atual do jogo surgiu no Sudoeste da Europa na segunda metade do século XV, durante o Renascimento, depois de ter evoluído de suas antigas origens persas e indianas.

Prova: Tomando a expressão 2.6 quando $n \to \infty$ podemos escrever que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1.\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right)$$

Como $n \to \infty$ tem-se que $q^n \to 0$. E assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1.\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) = \frac{-a_1}{q-1}$$

Logo,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Exemplo 16. *Determinar a geratriz da dízima periódica*[4] $0,14141414\ldots$.

Solução: Seja $x = 0,14141414\ldots$ poderá ser escrito por $x = 0,14 + 0,0014 + 0,000014 + 0,00000014 + \cdots$, ou ainda, $x = \frac{14}{100} + \frac{14}{10000} + \frac{14}{1000000} + \cdots$. Temos, desta maneira, que a soma em questão corresponde a uma soma de uma progressão geométrica com razão $0 < q = \frac{1}{100} < 1$ com primeiro termo $a_1 = \frac{14}{100}$, a qual terá por soma:

$$x = S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{14}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{14}{99}$$

Uma outra maneira de responder esta questão seria tomar $x_n = 0,14141414\ldots 14$. Multiplique os dois membros da igualdade por 100, a qual determinará $100.x_n = 14,141414\ldots 14$. Observe que em $x_n = 0,14141414\ldots 14$ tem-se n termos 14. Já em $100.x_n = 14,141414\ldots 14$ tem-se $n-1$. Assim,

$$\begin{aligned} 100.x_n &= 14 + 0,141414\ldots 14 \\ 100.x_n &= 14 + x_{n-1} \\ 100.x_n - x_{n-1} &= 14 \end{aligned} \tag{2.8}$$

[4]Uma dízima periódica é um número que quando escrito no sistema decimal apresenta uma série infinita de algarismos decimais que, a partir de um certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição e chamados de período.

Pelas definições vistas na secção 2.2 podemos escrever $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} x_{n-1} = L$ e substituindo na expressão 2.8 vamos encontrar:

$$
\begin{aligned}
100.L - L &= 14 \\
99.L &= 14 \\
L &= \frac{14}{99}
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 3

RECORRÊNCIAS

Neste capítulo tratar-se-á das recorrências de primeira e segunda ordem. Será definido o que são as sequências de recorrências na secção 3.1. Logo em seguida iniciamos a secção refente a sequência de Fibonacci com suas várias aplicações na natureza assim como a "proporção áurea" ou número de ouro a qual é expresso a partir de quocientes dos valores consecutivos da sequência de Fibonacci. Em seguida, na secção 3.3 será tratado das recorrências de primeira ordem com sua aplicabilidade, principalmente no âmbito escolar de ensino médio com os assuntos de progressão aritmética, progressão geométrica e fatorial. Já com relação as recorrências de segunda ordem na secção 3.4 será dada prioridade a resolução da sequência de Fibonacci através das recorrências de segunda ordem.

3.1 Sequências de Recorrências

Definição 8. *A toda sequência de* (a_n) *de números reais* $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ *onde um termo depende de seu antecessor será chamado de* ***equações de recorrências*** *ou simplesmente de* ***sequências recorrentes****.*

Uma equação de recorrência pode representar várias sequências. Observando a recorrência a seguir $x_{n+1} = 2.x_n + 1$ pode-se gerar a sequência $(-1, 1, 3, \cdots)$, ou ainda, $(3, 5, 7, \cdots)$. Em equações de recorrências faz necessário nomear um dos termos para que se possa identificar a sequência.

Exemplo 17. *Tomando a expressão de recorrência* $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ *com* $x_0 = 1$ *e* $x_1 = 2$ *teríamos como termos da sequência os seguintes termos:*

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + x_0 = 2 + 1 = 3 \\ x_3 &= x_2 + x_1 = 3 + 2 = 5 \\ x_4 &= x_3 + x_2 = 5 + 3 = 8 \\ x_5 &= x_4 + x_3 = 8 + 5 = 13 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo a sequência teria como termos $(1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots)$. No entanto, se os termos x_0 e x_1 forem diferentes dos expressos anteriormente será gerado uma nova sequência.

3.2 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci[1] é dada pelos termos $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$ onde cada termo é determinada a partir de dois termos anteriores, ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_0 = F_1 = 1$. A qual vai ser resolvida na secção 3.4 referente as recorrências lineares de segunda ordem.

Uma curiosidade sobre a sequência de Fibonacci é que os termos da sequência estabelecem a chamada “proporção áurea”, a qual é usada na arte, na arquitetura e no design por ser considerada agradável aos olhos, cujo valor é de $1,618$ onde quanto mais se avança na sequência de Fibonacci, mais a divisão entre um termo e seu antecessor se aproxima desse número. A “proporção áurea” Também é chamada de: razão áurea, razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão, divisão de extrema razão.

Abaixo alguns exemplos em que a sequência ou a espiral de Fibonacci aparece:

Concha do Caramujo Nautilus[2]

A proporção em que cresce o raio do interior da concha desta espécie de caramujo.

[1]Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa (11701250), italiano dito como o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helênica. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos árabes na Europa.

[2]Concha do caramujo Nautilus. Observação.: até hoje não se encontrou nenhum caramujo Nautilus que comprove essa afirmação amplamente difundida! (vide ”O número de Ouro”, Michel Spira, palestra OBMEP, 2006;

Este molusco bombeia gás para dentro de sua concha repleta de câmaras para poder regular a profundidade de sua flutuação. Na concha do caramujo vê-se que cada novo pedacinho é encontrado pela soma das dimensão dois antecessores.

Figura 3.1: Caramujo

Fonte: http://codigodacultura.wordpress.com/2010/04/30/a-sequencia-de-fibonacci

As Grandes Pirâmides

Mais um mistério: cada bloco é 1,618 vezes maior que o bloco do nível imediatamente acima. Em algumas, as câmaras internas têm comprimento 1,618 vezes maior que sua largura.

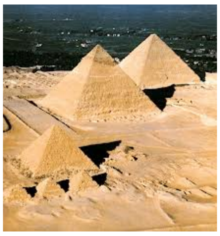

Figura 3.2: Grandes Pirâmides do Egito

http://garotadocee.blogspot.com.br/2012/01/o-que-e-sequencia-de-fibonacci.html

Cameleão

Ao se observar a contração do rabo do camaleão tem-se uma das representações mais perfeitas da espiral de Fibonacci.

Figura 3.3: Camaleão

http://garotadocee.blogspot.com.br/2012/01/o-que-e-sequencia-de-fibonacci.html

Partenon

Os gregos já conheciam a "proporção áurea", embora não a fórmula para defini-la. A largura e a altura da fachada deste templo do século V a.C. estão na proporção de 1 para 1,618 conforme vemos na figura ao lado.

Figura 3.4: Partenon

http://charlezine.com.br/sequencia-de-fibonacci/

Pinha

As sementes crescem e se organizam em duas espirais que lembram a sequência de Fibonacci: oito irradiando no sentido horário e 13 no anti-horário.

Figura 3.5: Pinha

http://vivendocomciencia.blogspot.com.br/2013/01/as-espirais-na-natureza-e-fibonacci.html

Girassol

Suas sementes preenchem o miolo dispostas em dois conjuntos de espirais: geralmente, 21 no sentido horário e 34 no anti-horário.

Figura 3.6: Girassol

http://garotadocee.blogspot.com.br/2012/01/o-que-e-sequencia-de-fibonacci.html

Artes

Leonardo da Vinci e Michelangelo enfatizaram em suas artes o número constante 1,6, aplicando-o em suas obras sendo uma das principais marcas do Renascimento. A Mona Lisa (figura ao lado), de Leonardo da Vinci, usa a razão na relação entre tronco e cabeça e entre elementos do rosto. Da Vinci observou a presença do número de ouro no corpo humano, realizando as seguintes medições:

Figura 3.7: Mona Lisa

http://charlezine.com.br/sequencia-de-fibonacci/

- Altura da pessoa dividida pela altura do umbigo em relação ao solo.
- Medida inteira da perna dividida pela altura do joelho até o solo.

- Medida do braço inteiro divida pelo tamanho do cotovelo até o dedo.

- Medida do dedo inteiro dividida pelo tamanho da dobra central até a ponta.

Devido as medições realizadas no corpo humano satisfazerem a constante do número de ouro, algumas clínicas de estéticas realizam cirurgias plásticas faciais em pacientes que desejam enquadrar suas medidas, visando à busca pela perfeição.

3.3 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Definição 9. *Uma recorrência é de primeira ordem quando um termo* x_{n+1} *depende do termo* x_n*, ou seja, uma recorrência de primeira ordem ocorre quando um termo consequente depende do seu termo antecedente. E será linear, quando a função formada pela mesma for do primeiro grau. Podemos afirmar que uma recorrência linear de primeira ordem pode ser expressa por*

$$x_{n+1} = \frac{a.x_n + b}{c}.$$

Observação: Quando $b = 0$ dizemos que a recorrência é homogênea.

Exemplo 18. *Recorrências lineares de primeira ordem no ensino médio.*

1. Números ímpares

   $x_{n+1} = x_n + 2$, $a = c = 1$ e $b = 2$

2. Progressões Aritméticas

   $x_n = x_{n-1} + r$; $a = c = 1$ e $b = r$

3. Progressão Geométrica

   $x_n = q.x_{n-1}$; $a = q, b = 0$ e $c = 1$

4. Fatorial

   $x_n = n.x_{n-1}$

5. Exponencial com expoente natural

   $x_n = x.x_{n-1}$

Passemos a resolver alguns exemplos.

Exemplo 19. *Resolver a recorrência* $x_{n+1} = x_n + 4$ *para* $x_1 = 2$.

Solução: Primeiramente, vamos resolver um caso geral onde $x_{n+1} = x_n + r$. Assim,

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + r \\
x_3 &= x_2 + r \\
x_4 &= x_3 + r \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + r
\end{aligned}$$

Fazendo uma soma telescópica teremos $x_n = x_1 + r.(n-1)$. Observando esta expressão concluímos que a recorrência $x_{n+1} = x_n + 4$ para $x_1 = 2$ será expressa por:

$$\begin{aligned}
x_n &= 2 + 4.(n-1) \\
x_n &= 2 + 4n - 4 \\
x_n &= 4n - 2
\end{aligned}$$

A expressão nos dará o termo geral de uma progressão aritmética.

Exemplo 20. *Resolver a equação* $x_{n+1} = 3.x_n$, *com* $x_1 = 2$.

Solução: Novamente observemos o caso geral para $x_n = q.x_{n-1}$.

$$\begin{aligned}
x_2 &= q.x_1 \\
x_3 &= q.x_2 \\
&\vdots \\
x_n &= q.x_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplicando os termos de cada membro encontraremos:

$$x_n.(x_{n-1}.\cdots.x_3.x_2) = q^{n-1}.x_1.(x_2.x_3.\cdots.x_{n-1})$$

Dividindo ambos os membros por $(x_{n-1}.\cdots.x_3.x_2)$, a expressão anterior será expresso por $x_n = q^{n-1}.x_1$.

Resolvendo a equação $x_{n+1} = 3.x_n$, com $x_1 = 2$ encontramos que:

$$x_n = 3^{n-1}.2$$
$$x_n = 2.3^{n-1}$$

Vamos resolver a equação $x_{n+1} = x_n + g(n)$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(1) \\ x_3 &= x_2 + g(2) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + g(n-1) \end{aligned}$$

Procedendo com uma soma telescópica obtemos

$$x_n = x_1 + g(1) + g(2) + \cdots + g(n-1)$$

ou ainda,

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$$

Exemplo 21. *Resolver a equação* $x_{n+1} = (n+1).x_n$, $x_1 = 1$.

Solução: Vejamos o desenvolvimento da recorrência:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2.x_1 \\ x_3 &= 3.x_2 \\ &\vdots \\ x_n &= n.x_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros, obtemos $x_2.x_3.\cdots.x_{n-1}.x_n = (2.3.4\cdots n).x_1.x_2.x_3.\cdots.x_{n-1}$ a qual poderá ser escrita por $x_n = (2.3.4\cdots n).x_1 = n!x_1$ e uma solução particular seria $x_n = n!$

Exemplo 22. ***(PROFMAT-2011) - Adaptado*** *Resolva a equação de recorrência* $a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n$.

Solução: Observa-se que a expressão $a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n$ pode ser escrita por $a_{n+1} = a_n + 3^n$, apenas simplificando-se a expressão. Resolvendo a recorrência

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3^1 \\ a_3 &= a_2 + 3^2 \\ a_4 &= a_3 + 3^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

Isto implica

$$a_n = a_1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = 1 + (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}),$$

em que a expressão entre parênteses é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (visto na secção 2.3) de termo inicial 1 e razão 3, que vale

$$\frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

Portanto

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

Exemplo 23. ***(PROFMAT-2011)*** *Seja* $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *sequência definida pela relação de recorrência* $x_{n+1} = 2.x_n + 1$, *com termo inicial* $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Encontre x_0 tal que a sequência seja constante e igual a um número real a.

b) Resolva a recorrência com a substituição $x_n = y_n + a$, em que a é valor encontrado em (a).

Solução:

a) Basta achar a tal que $2a + 1 = a$. Isto dá $a = -1$. Se $x_0 = a$ então $x_1 = 2.x_0 + 1 = 2a + 1 = a = x_0$, e, da mesma forma, $x_2 = x_1, x_3 = x_2, ..., x_{n+1} = x_n$ para qualquer $n \geqslant 0$, ou seja, a sequência é constante.

b) Com a substituição sugerida, $x_n = y_{n-1}$. Então $y_{n+1} - 1 = 2.(y_n - 1) + 1$, isto é, $y_{n+1} = 2.y_n$, com $y_0 = x_0 + 1$.

Então $y_n = 2^n.y_0 = 2^n.(x_0 + 1)$ e $x_n = y_n - 1 = -1 + 2^n(x_0 + 1)$.

3.4 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Definição 10. *Uma recorrência que expressa* x_{n+2} *em função de seus antecessores* x_{n+1} *e* x_n *será chamado de* ***recorrência de segunda ordem****. Será tratado o caso de recorrências homogêneo com coeficientes constantes onde:*

$$x_{n+2} + p.x_{x+1} + q.x_n = 0 \tag{3.1}$$

Para a resolução deste tipo de equação usa-se a equação característica onde a equação 3.1 será expressa por $r^2 + p.r + q = 0$ que possui solução única.

Por se tratar de uma equação quadrática tem-se que a equação 3.1 poderá ter até duas soluções y_n e z_n onde:

$$w_n = A.y_n + B.z_n \tag{3.2}$$

a qual também é solução da mesma recorrência.

Exemplo 24. *Resolver a recorrência* $x_{n+2} + 5x_{x+1} + 6x_n = 0$*,* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$*.*

Solução: Escreveremos a equação acima na sua forma característica que será expresso por $r^2 + 5r + 6 = 0$ cuja raízes são -2 e -3. Desta forma, a equação 3.2 será expresso por:

$$w_n = A.(-2)^n + B.(-3)^n \tag{3.3}$$

Para descobrir os valores de A e B, vamos utilizar $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Assim,

$$\begin{cases} A.(-2) + B.(-3) = 1 \\ A.(-2)^2 + B.(-3)^2 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos que $A = -\dfrac{5}{2}$ e $B = \dfrac{4}{3}$. Portanto, a equação 3.3 será expresso por

$$w_n = -\frac{5}{2}.(-2)^n + \frac{4}{3}.(-3)^n$$

3.5 Sequência de Fibonacci – $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Exemplo 25. *Resolver a equação de Fibonacci* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Solução: Primeiramente vamos escrever a equação de Fibonacci por sua equação característica $r^2 = r + 1$ que pode ser escrita como a equação quadrática $r^2 - r - 1 = 0$ a qual será resolvida a seguir:

$$
\begin{aligned}
r^2 - r - 1 &= 0 \\
\triangle &= 1 + 4 = 5 \\
r &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Temos desta forma que $y_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e $z_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e, portanto, a equação 3.2 será escrita como

$$
w_n = A.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3.4}
$$

Passamos agora a descobrir os valores de A e B.

Sabemos que $F_0 = F_1 = 1$. Desta forma,

$$
\begin{cases}
A.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\
A.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1
\end{cases}
$$

assim,

$$
\begin{cases}
A + B = 1 \\
A.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1
\end{cases}
$$

Ao multiplicarmos a primeira equação por $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ encontraremos:

$$
\begin{cases}
A.\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + B.\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\
A.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1
\end{cases}
$$

Ao somarmos as duas equações, encontraremos

$$\begin{aligned}
\mathsf{B}.\left(\frac{-2\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2}+1\\
-\sqrt{5}.\mathsf{B} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\
\mathsf{B} &= \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}\\
\mathsf{B} &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}
\end{aligned}$$

Para encontrar o valor de A, vamos substituir o valor de B na equação $\mathsf{A}+\mathsf{B}=1$. Desta maneira, temos que o valor de A será dado por $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$. Portanto, a equação 3.4 poderá ser escrita por:

$$w_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Em alguns problemas, as equações com variáveis discretas são mais apropriadas para resolver determinadas equações. Segundo Bassanezi (2012) "uma equação de diferença estabelece uma relação envolvendo valores de uma variável dependente para um conjunto discreto de valores com retardamento da variável independente".

Ainda segundo Bassanezi (2012), "a solução de uma equação de diferença é uma relação funcional que não envolve diferenças, definida para todos os números naturais $n \in \mathbb{N}$, e satisfazendo a equação de diferenças, isto é, transformando-a numa identidade".

Uma solução de uma equação de diferenças é obtida por um processo recursivo. No entanto, nem sempre é possível expressar uma solução geral de uma equação de diferenças quando a equação não é linear.

A forma geral linear de ordem $n - m$ é dado por:

$$y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + \cdots + a_m.y_{n-m} \tag{4.1}$$

ou simplesmente:

$$y_n = \sum_{k=1}^{m} a_k.y_{n-k} \tag{4.2}$$

com a_K constantes; $m < n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ e dadas $(n - m)$ condições iniciais.

4.1 Equações de Diferenças de Primeira Ordem

Definição 11. *Uma equação de diferenças é de primeira ordem quando* $(n - m) = 1$. *E podemos escrever sua expressão geral da forma abaixo:*

$$\begin{cases} y_n = \alpha . y_{n-1} \\ y_0 \ \textit{dado} \end{cases}$$

O processo recursivo fornecerá:

$$\begin{aligned} &y_1 = \alpha . y_0 \\ &y_2 = \alpha . y_1 = \alpha^2 . y_0 \\ &y_3 = \alpha . y_2 = \alpha^3 . y_0 \\ &\vdots \\ &y_n = \alpha . y_{n-1} = \alpha^n . y_0 \end{aligned}$$

Tendo como solução geral

$$y_n = y_0 . \alpha^n$$

Portanto, a equação de diferenças de 1ª ordem será escrita por:

$$\begin{cases} y_n = y_0 . \alpha^n \\ y_0 \ \text{dado} \end{cases}$$

Assim, dependendo do valor de y_0 temos que:

$$\begin{cases} O & se \quad y_0 = 0 \\ y_0 . \alpha^n & se \quad y_0 \neq 0 \end{cases}$$

Abaixo trataremos de alguns modelos matemáticos com equações de primeira ordem.

4.1.1 Crescimento Populacional

Segundo o modelo Malthusiano de crescimento populacional tem-se que: “a população cresce numa progressão geométrica enquanto que o alimento cresce segundo uma progressão aritmética". Sendo a população inicial representada por P_0 elementos, podemos traduzir matematicamente tal afirmação por:

$$\begin{aligned}
&P_1 = r.P_0\\
&P_2 = r.P_1 = r^2.P_0\\
&P_3 = r.P_2 = r^3.P_0\\
&\vdots\\
&P_n = r.P_{n-1} = r^n.P_0
\end{aligned}$$

tome r como a taxa de crescimento da população e 1 a unidade de tempo considerada. Também é observado que as diferença entre dois termos consecutivos representa uma equação linear de primeira ordem pois,

$$P_n - P_{n-1} = r.P_{n-1} - P_{n-1} = (r-1).P_{n-1} = \alpha.P_{n-1}$$

com tal expressão o modelo malthusiano poderá ser reescrito por: "A variação populacional é proporcional à população, em cada instante" e sua solução seria expresso por:

$$P_n = P_0.r^n$$

4.1.2 Orçamento Familiar

Tomando uma família com renda mensal R_n dado por um salário fixo R_0 adicionado ao rendimento da poupança P_n do mês anterior. Seja o consumo mensal C_n da família proporcional à sua renda mensal. Escrevamos uma fórmula geral que forneça os valores da renda, poupança e consumo da família em cada mês relativamente a um mês inicial onde se conheça os valores de C_0 e de P_0. Lembramos que neste caso a variável independe é o tempo, dado em meses.

Com base com o que foi escrito acima, temos:

♦ "A população do mês n é dada pela poupança do mês anterior $(n-1)$ mais a sobra do mês n", ou seja,

$$P_n = P_{n-1} + (R_n - C_n) \tag{4.3}$$

♦ "A renda do mês n é igual ao salário mais o rendimento da poupança do mês anterior", ou seja,

$$R_n = R_0 + r.P_{n-1} \tag{4.4}$$

♦ "O consumo do mês é proporcional à renda", isto é,

$$C_n = \alpha.R_n \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{4.5}$$

Substituindo as equações 4.3 e a 4.4 acima teremos:

$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1} + (R_n - \alpha.R_n)\\
P_n &= P_{n-1} + (1-\alpha).R_n\\
P_n &= P_{n-1} + (1-\alpha).[R_0 + r.P_{n-1}]\\
P_n &= P_{n-1} + (1-\alpha).r.P_{n-1} + (1-\alpha).R_0\\
P_n &= (1-\alpha.R_0) + [(1-\alpha).r + 1].P_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Tomando $b = (1-\alpha).R_0$ e $a = [(1-\alpha).r+1]$ na última equação podemos reescrevê-la da forma,

$$P_n = a.P_{n-1} + b.R_0$$

cuja solução será dada por:

$$P_n = \begin{cases} P_0 & se \quad \alpha = 1 \\ a^n.P_0 + \dfrac{a^n - 1}{a-1}.b & se \quad \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

Portanto

$$P_n = [(1-\alpha)r+1]^n P_0 + (1-\alpha)R_0 \frac{1-[(1-\alpha)r+1]^n}{1-[(1-\alpha)r+1]}$$

Observe que $\alpha = 1$ significa que o consumo mensal é igual à renda e, portanto, neste caso, a poupança não varia.

Substituindo 4.7 nas equações 4.4 e 4.5, obteremos.

$$R_n = \begin{cases} R_0 + r.P_0 & se \quad \alpha = 1 \\ R_0 + r.P_0.a^n + r.b.\dfrac{a^n - 1}{a-1} & se \quad \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

$$C_n = \begin{cases} \alpha.[R_0 + r.P_0] & se \quad \alpha = 1 \\ \alpha[R_0 + r.P_0.a^n + r.b.\dfrac{a^n - 1}{a - 1}] & se \quad \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 26. *Qual a situação de uma família, depois de um ano, que tem* R\$1000, 00 *na poupança, um salário fixo de* R\$3000, 00 *e gasta* 80% *da renda mensal.*

Solução: Tomando os dados iniciais do problema temos que $R_0 = 3000$ e $P_0 = 1000$ e substituindo os valores em 4.7 obteremos:

$$P_{12} = 1000.a^{12} + \frac{a^{12} - 1}{a - 1}.b$$

Como $a = (1 - \alpha).r + 1 = (1 - 0,8).r + 1 = 0,2.r + 1$ e $b = 1 - 0,8 = 0,2$ temos que:

$$P_{12} = 1000.(0,2.r + 1)^{12} + \frac{(0,2.r + 1)^{12} - 1}{(0,2.r + 1) - 1}.600$$

Nesta situação o rendimento da poupança dependerá do valor de r.

4.1.3 Financiamento

Uma situação clássica ao qual podemos utilizar equações de diferenças seriam os financiamento, seja de veículos seja da casa própria.

Seja um dívida inicial (financiamento) D_0; A dívida D_n, depois de n meses da compra, será dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja:

$$D_n = D_{n-1} + r.D_{n-1} - P \tag{4.10}$$

ou simplesmente

$$D_n = (1 + r).D_{n-1} - P \tag{4.11}$$

Cuja solução será dada por:

$$D_n = (1 + r)^n.D_0 - P.\frac{1 - (1 + r)^n}{-r} \tag{4.12}$$

Para que haja a quitação da dívida é necessário que $D_n = 0$.

Exemplo 27. *Tomando um financiamento de um carro cujo valor é de* R\$29.528,00 *que deve ser pago em* 5 *anos, em parcelas fixas de* R\$798,00.

a) Qual a taxa de juro mensal pago?

b) Se a taxa de juro mensal fosse o mesmo da poupança, quanto se deveria pagar por mês para a quitação da dívida 5 anos?

c) Quanto se deve dar de entrada para que se tenha uma parcela fixa de R\$500,00 *com uma taxa de juro igual ao da poupança e pagando a dívida em 5 anos?*

solução:

a) Para responder a primeira pergunta temos que $D_0 = 29.528$ que será pago em $n = 60$ meses com parcela de $P = 798$. Assim, substituindo os valores na equação 4.12 teremos:

$$\begin{aligned}
D_{60} &= (1+r)^{60}.29526 - 798.\frac{1-(1+r)^{60}}{-r} \\
(1+r)^{60}.29526 &= 798.\frac{1-(1+r)^{60}}{-r} \\
37.(1+r)^{60} &= \frac{1-(1+r)^{60}}{-r} \\
37.r &= \frac{1-(1+r)^{60}}{-(1+r)^{60}}
\end{aligned}$$

Para resolver a equação acima utilizaremos o método da *bissecção*. Sejam $y = 37.r$ e $z = \dfrac{1-(1+r)^{60}}{-(1+r)^{60}}$, devemos encontrar r de tal forma que $y = z$.

$r = 0,01 \Rightarrow y = 0,37 < 0,449 = z$

$r = 0,02 \Rightarrow y = 0,74 > 0,695 = z$ (logo, a solução de $y = z$ está no intervalo $r \in (0,01; 0,02)$

$r = \dfrac{0,01+0,02}{2} = 0,015 \Rightarrow y = 0,555 < 0,5907 = z$

$r = \dfrac{0,02+0,015}{2} = 0,0175 \Rightarrow y = 0,6475 > 0,646 = z$

Portanto, a taxa de juro do financiamento foi de aproximadamente 1,7% ao mês.

b) Ao tomarmos uma taxa de juro mensal de 0,5% e substituindo na equação 4.12

teríamos:

$$
\begin{aligned}
(1+0,005)^{60}.29526 &= \mathsf{P}.\frac{1-(1+0,005)^{60}}{-0,005} \\
\mathsf{P} &= -\frac{147,63.1,005^{60}}{1-1,005^{60}} \\
\mathsf{P} &= 570,82
\end{aligned}
$$

Assim, o valor da prestação é de R\$570,82.

c) vamos tomar como prestação $\mathsf{P} = 500,00$. Para se saber o valor da entrada E, tem se que a dívida inicial será de $(\mathsf{D}_0 - \mathsf{E})$. Para resolver a terceira pergunta tomaremos a equação 4.12 substituindo os valore de $\mathsf{r} = 0,5\%$, $\mathsf{n} = 60$, $\mathsf{D}_0 = 29.526,00$ e $\mathsf{P} = 500,00$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(1+0,005)^{60}.(29526-\mathsf{E}) &= 500.\frac{1-(1+0,005)^{60}}{-0,005} \\
29526-\mathsf{E} &= 25862,78 \\
\mathsf{E} &= 3663,22
\end{aligned}
$$

Portanto, o valor da entrada seria de R\$3.663,22.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O campo da modelagem matemática com tratamento sequencial tem ganho mercado principalmente em situações cotidianas no ensino médio onde a interdisciplinaridade envolvendo situações da biologia, física, química, etc. Como também em outras áreas do conhecimento como engenharia, economia e tantas outras.

Neste estudo é dada uma base introdutória ao estudo das modelagens matemáticas como algumas aplicações a situações cotidianas e levar ao aluno de educação básica (ensino Médio) a ter um "gosto" com relação ao estudo da matemática.

A utilização de modelagem tem tornado o estudo da matemática mais prático, pois leva o aluno a interagir com os conteúdos ministrados, principalmente no que diz respeito a explicar fenômenos físicos demonstrando sua eficiência e utilidade, seja em sala de aula, seja nas situações do dia-a-dia. Desta forma, mesmo pessoas inexperientes na utilização da modelagem podem experimentar (aventurar-se) nesta nova "modalidade de ensino".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2006.

[2] BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias**: Um curso introdutório. Coleção BC&T. São Paulo: UFABC, 2012.

[3] BIEMBENGUT, M. S.; Hein, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

[4] BIEMBENGUT, M. S. **Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira**. In: XIII conferência Interamericana de Educação. PUCRS, 2011.

[5] BIEMBENGUT, M. S.; SCHMITT, A. L. F. **Mapeamento das Produções Acadêmicas de Modelagem Matemática no Ensino de Autores Brasileiros** In: IX Congresso Nacional de Educação. PUCPR, 2009.

[6] BIEMBENGUT, M. S. **Mapeamento da Modelagem Matemática no Ensino Brasileiro**. Relatório de Pesquisa - Conselho Nacional de Desenvolvimento Tecnológico Científico - CNPq, 2007.

[7] BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática e Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática**. 2ª ed. Blumenau: Edifurb, 2004.

[8] BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática**: Mapeamento das Ações Pedagógicas dos Educadores de Matemática. Tese de Pós - Doutorado, São Paulo, 2003.

[9] BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º graus**. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro - SP; 1990.

[10] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5a ed. São Paulo: Contexto, 2007.

[11] SILVEIRA, J. C.; RIBAS, J. L. D. **Discussões sobre Modelagem Matemática e o Ensino-aprendizagem**. 2004. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/> Acesso em 13 maio 2013.

[12] LIMA, E. L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio** Volume 2: Progressões. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] OLIVEIRA, K. I. M. **Iniciação à Matemática:** Um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro, 2010.

[14] PROFMAT. <htpp://www.profmat-sbm.org.br> Acesso em 13 maio 2013.