Universidade Federal do Tocantins
Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor
Mestrado Profissional em Matemática

Benino Sebastião da Silva

A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções

Arraias

2017

Universidade Federal do Tocantins
Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor
Mestrado Profissional em Matemática

Benino Sebastião da Silva

A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - área de Concentração: Matemática.

Universidade Federal do Tocantins - UFT

Arraias

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita

Arraias

2017

Universidade Federal do Tocantins
Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor
Mestrado Profissional em Matemática

Benino Sebastião da Silva*

A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em, 06 de julho de 2017

BANCA EXAMINADORA

Robson M. de Mesquita

Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita (Orientador)

Prof. Dr.Marcelo de Paula
Universidade Federeal do Oeste da Bahia(UFOB)

Keidna Cristiane O. Souza

Prof.Dra. Keidna Cristiane Oliveira de Souza
Universidade Federal do Tocantins(UFT)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586a Silva, Benino Sebastião da.

A Abordagem Geométrica no Tratamento das Funções. / Benino Sebastião da Silva. – Arraias, TO, 2017.

72 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

Orientador: Professor doutor Robson Martins de Mesquita

1. Funções. 2. Ensino Médio. 3. Abordagem Geométrica. 4. Ensino. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dedico esta dissertação à minha família que compreendeu a minha ausência, abrindo mão de encontros e momentos de lazer, por acreditar em mim.
Aos meus três filhos, que sempre enxergaram o estudo como forma de crescimento profissional e intelectual.
À minha esposa, quem mais sacrificou-se para que eu pudesse ter êxito nesse projeto.

Obrigado!

Agradecimentos

Meus agradecimentos à Sociedade Brasileira de Matemática-SBM por ofertar o programa de mestrado, à CAPES por fomentar a minha participação no programa e ao Departamento de Matemática da UFT- Campus Arraias por acreditar e disponibilizar o programa.

Ao meu orientador, Professor Doutor Robson Martins de Mesquita, pelas orientações, pelas aulas do curso e, principalmente, por acreditar neste projeto.

Ao Professor Doutor Eudes Antonio da Costa, coordenador local do PROFMAT, e aos demais professores pelos conhecimentos transmitidos. Aos colegas de turma, pelo companheirismo e apoio nas horas de aflição e , sobretudo, ao André, parceiro nas cansativas viagens aos sábados.

"A ideia de olhar para as funções como pontos de um espaço e, consequentemente, adoptar a linguagem geométrica em problemas de Análise é, para mim, a origem de uma tremenda quantidade de coisas bem sucedidas."

(Elon Lages Lima(CARVALHO, 2001))

Resumo

Este trabalho propõe investigar o significado da abordagem geométrica para o estudo das funções, e certificar-se de como ela pode contribuir para a aquisição de competências em outras áreas do conhecimento. Para tanto foram realizadas entrevistas com professores de outras áreas do conhecimento, além da aplicação de atividades a uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. Dos professores foram ouvidos relatos de como os gráficos de funções se apresentam em suas disciplinas, a habilidade dos alunos em lidar com esses gráficos e de como seria possível sanar possíveis dificuldades. Aos alunos foram aplicadas atividades que constam nos livros didáticos de outras disciplinas, a saber, Física, Química, Geografia, Biologia e Sociologia, com as devidas adaptações aos estudo do conceito de função. O que nos permitiu avaliar a compreensão e assimilação dos conteúdos. Os resultados nos leva a ressaltar a importância da abordagem geométrica das funções, não só no estudo da Matemática, como também, na relação dessa com outras disciplinas.

Palavras-chave: Funções. Interdisciplinaridade. Abordagem Geométrica.

Abstract

This work proposes to investigate the meaning of the geometric approach for the study of the functions, and to make sure how it can contribute to the acquisition of competences in Other areas of knowledge. For that purpose, an interview was conducted with teachers from other areas of knowledge, besides the application of activities to a class of the first year of High School. From the teachers were heard reports of how the function graphs present themselves in their disciplines,the students' ability to give you these graphs, and how you could remedy possible difficulties. Activities were applied to students Which are included in textbooks of other disciplines, namely Physics, Chemistry, Geography, Biology and Sociology, with appropriate adaptations to the study of the concepts of functions.The results lead us to emphasize the importance of the geometric approach of functions, not only in the study of Mathematics, but also in the relation of this with other disciplines.

Keywords: functions. interdisciplinarity. geometric approach.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio
$PCNEM_+$	Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio Mais
UE	Unidade de Ensino
UFT	Universidade Federal do Tocantins

Sumário

Introdução

O estudo das funções é de suma importância para a formação do aluno do Ensino Médio. Por meio desse conceito é possível compreender fenômenos relacionados com os mais variados ramos do Conhecimento, dos quais podemos citar a Física, a Química, a Biologia, as Engenharias, a Economia, a Estatística, entre tantos. Nossa intenção com esse trabalho e a de fazer uma abordagem que forneça um sentido no estudo de algumas funções estabelecendo algumas conexões entre as propriedades das funções e seus significados, em aplicações em outras áreas do conhecimento.

Uma abordagem geométrica no tratamento das funções, por si só não justifica as proposições e teoremas que fundamentam as propriedades que norteiam o estudos das mesmas, no entanto, ela é capaz de proporcionar uma compreensão mais tangível de suas definições e interpretações.

O ensino das funções, e da Matemática em geral, se dá por meio de muito simbolismo, o que pode distanciar o aluno do conteúdo apresentado. De acordo com Ávila,

> A Matemática, em particular, depende muito de sua linguagem e simbolismo específicos. Mas é também a linguagem e o simbolismo próprios da Matemática que a fazem tão inacessível, principalmente ao leigo, mesmo ao "leigo erudito". Assim, podemos dizer, em certo sentido, que a linguagem e o simbolismo da Matemática são um "mal necessário".(ÁVILA, 2010b, p.1)

Concordando com Ávila não se pode desprezar de forma alguma essa característica da Matemática no ensino das funções, pelo contrário, a linguagem e o simbolismo são responsáveis pela construção da álgebra como ela é hoje em dia. No entanto, isso não nos impossibilita de buscar alternativas de apresentar conteúdos que minimizem o excesso de formalismo. Pois, ainda de acordo com Ávila,

> É importante observar que linguagem não motiva ninguém, idéias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que lhe satisfaça ou aguce a curiosidade. O mesmo é verdade no caso dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento de sua ciência. Eles estavam sempre interessados nas idéias e nos métodos e técnicas delas resultantes. Foram introduzindo linguagem e simbolismo por necessidade prática. O mesmo devemos fazer no ensino: só introduzir esses elementos quando eles se fizerem necessários para auxiliar no aprendizado de coisas verdadeiramente relevantes. (ÁVILA, 2010b, p.1)

A princípio, nosso intuito não é desprezar a maneira formal de tratar as funções, e sim fazer com que o aluno construa o conceito e as propriedades gerais das funções reais, para ter condições de lidar com a abordagem simbólica e abstrata. Nesse sentido, buscamos inicialmente, não classificar as funções, conforme recomendação da Sociedade Brasileira de Matemática–SBM em sua contribuição para discussão do currículo de Matemática para o Ensino Médio,

> O estudo de funções reais não deve ter como eixo central a separação nas chamadas "classes de funções elementares". Ao contrário, recomenda-se que, inicialmente, seja apresentada uma gama diversificada de funções reais simples (sem que sejam estabelecidas classificações a priori) e que sejam exploradas propriedades qualitativas dessas funções (tais como crescimento, extremos locais e absolutos, variação absoluta e variação média), por meio da articulação entre representações algébricas, numéricas e gráficas e, em especial, com suporte de recursos digitais.(SBM, 2015, p.9)

Outro aspecto importante em relação as funções é que seu estudo não pode estar desassociado de outros ramos do conhecimento, tais como a Física, e Biologia e a Química, entre outros. É de suma importância que o aluno de posse de um gráfico , seja na aula de Física, Biologia ou de Química, seja capaz de analisar o comportamento da função correspondente, mesmo sem saber a lei que rege o fenômeno ao qual está relacionada.

Desse modo a Matemática não pode se desvencilhar das outras áreas do conhecimento, e conforme Doclus em seu artigo na RPM número 20,

> Do ponto de vista pedagógico, a Matemática não pode isolar-se, sob pena de se tornar sem interesse para o estudante, mormente quando a orientação dirige-se para a técnica, como era o nosso caso. O estudante é mais atraído pelos frutos da Matemática do que pela sua estética. A Matemática é uma linguagem, e isolá-la das outras ciências é como ter o domínio de um idioma e não ter nada para dizer. Sem motivação, o estudante assimilará a Matemática a um simples quebra-cabeça, ou então a considerará apenas como uma modalidade de ginastica mental.(DOCLUS, 2000, p.1)

Ainda em relação à Matemática e outras áreas do conhecimento os PCNs discorrem que,

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações.(BRASIL, 2000, p.9)

Da mesma forma esses argumentos, em particular, são válidos para as funções, uma vez que nas áreas do conhecimento citadas as funções estão presentes em sua maioria, para não dizer em todas.

Outra situação em relação as funções é que parte de problemas propostos, por exemplo no ENEM ou em outras avaliações em larga escala, que se resolve apenas analisando um gráfico, seja em questões de Matemática ou de outras disciplinas. Com uma abordagem geométrica no tratamento das funções é possível proporcionar ao estudante uma maneira de observar essas situações sem usos de fórmulas e ainda interagir a Matemática com os mais variados assuntos de forma o que pode tornar a Matemática acessível a todos.

Essa foi a motivação, e é sob essa perspectiva que vamos desenvolver esse trabalho. Que tem como objetivo principal investigar o impacto da abordagem geométrica no estudo das funções, e certificar-se de como ela pode contribuir para a aquisição de competências em outras áreas do conhecimento. Para tanto, ele se apresenta em seis capítulos.

O primeiro capítulo refere-se a conceitos e características gerais das funções, sem classificá-las em famílias. Para construí-lo nos reportamos a (ÁVILA, 2010a),(LIMA, 1992) e, sobretudo, a (NETO; CAMINHA, 2015), cujas obras foram de grande contribuição. Os quais, para o leitor que desejar se aprofundar no assunto, recomendamos a leitura.

No capítulo seguinte, fazemos uma abordagem geométrica das funções, que assim como no capítulo anterior, aportamos as funções de maneira geral, sem classificações.

No terceiro capítulo fomos buscar como os conhecimentos sobre funções e, especialmente, a abordagem geométrica dessas, apresentam-se em outras áreas do conhecimento e apresentamos alguns exemplos.

O quarto e quinto capítulos versam sobre os procedimentos e aplicação da pesquisa, respectivamente. No quarto relatamos a metodologia e no quinto a aplicação da pesquisa.

Por fim, no sexto e último capítulo concluímos nosso trabalho com as considerações que achamos pertinentes quanto aos resultados deste trabalho.

1 Conceitos Preliminares

1.1 Definição de Função

Dados X e Y subconjuntos não vazios, contidos nos reais. Sem rigor formal, f será uma função de X em Y se f for uma regra que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$. Pode-se utilizar diagramas para que se possa visualizar de forma mais concreta uma função $f : X \to Y$ como na Figura 1, onde cada $x \in X$ se relaciona com um único $y \in Y$.

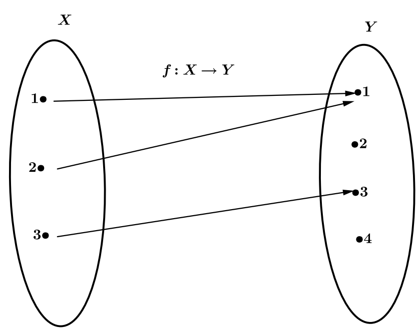


Figura 1 – Exemplo de função $f : X \to Y$

No exemplo da Figura 1 temos que:

- a função f transforma cada elemento de X em um único elemento de Y;
- cada $y \in Y$ associado a $x \in X$ pela função f, denota-se $y = f(x)$, é denominado de imagem de x. Assim, $1 \in Y$ é imagem de $1,2 \in X$, enquanto que $3 \in Y$ é imagem de $3 \in X$, ou ainda $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 3$;
- existe elemento de Y que é imagem de mais de um elemento de X.
- existe elemento de y que não é imagem de nenhum elemento de X. 2 e 4 pertencentes a Y não são imagem de nenhum elemento de X.

Os diagramas das Figuras 2 e 3 não representam funções, uma vez que no diagrama da Figura 2 existem elementos de X que não possuem imagem em Y . -2 e -1 não possuem imagem em Y. Enquanto que no diagrama da Figura 3 existe elemento de X que possui mais de uma imagem em Y. 2 tem como imagem 1 e 4.

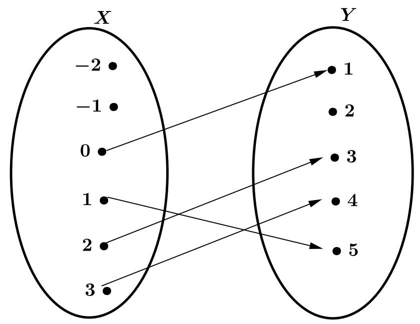


Figura 2 – Existe elemento de X que não possui imagem em Y

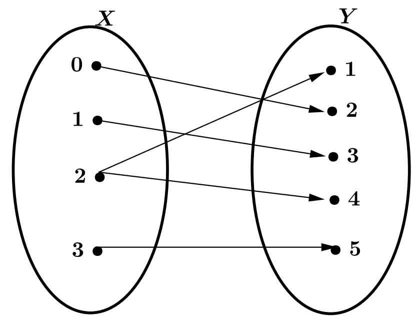


Figura 3 – Existe elemento de X que possui mais de uma imagem em Y

Uma função é um caso particular de uma relação entre dois conjuntos o qual definimos a seguir.

Definição 1 .
Dados os conjuntos não vazios X e Y, uma relação de X em Y é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$, i.e., R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x,y), com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de X em X , diremos simplesmente que R é uma relação em X.

Exemplo 1 .
Dados $X = \{0,3\}$ e $Y = \{2,3,4\}$, o conjunto $R = \{(x,y) \in X \times Y; x < y\}$ é a relação de X em Y dada por $R = \{(0,2),(0,3),(0,4),(3,4)\}$; de fato, esses são os únicos pares ordenados (x,y), com $x \in X$ e $y \in Y$ que satisfazem a condição $x < y$.

Note que no Exemplo 1 foi prescrita uma condição específica para fazer a relação R entre os conjuntos X e Y, sendo ela $x < y$. Outras especificações podem ser criadas tomando um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, em que os pares ordenados (x, y) que satisfazem a especificação prescrita serão os elementos da relação R e x e y são relacionados por R.

Assim, se R é uma relação de X em Y, então $R \subset X \times Y$ e $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \notin R$. Quando $(x, y) \in R$ dizemos que xRy e quando $(x, y) \notin R$ diz-se que x não relaciona com y. Na forma simbólica temos,

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

No caso do exemplo 1 temos que $X \times Y = \{(0,2), (0,3), (0,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ e $R = \{(0,2), (0,3), (0,4), (3,4)\}$, onde $R \subset X \times Y$. Assim, $0R2, 0R3, 0R4, 3R4$, 3 não relaciona com 2 e 3 não relaciona com 3, pois 3 > 2 e 3 = 3.

Dentre as relações entre dois conjuntos não vazios a mais importante é a função.

Definição 2 .
Dados os conjuntos não vazios X e Y, uma relação f de X em Y é uma função se a seguinte condição for satisfeita:

$$\forall x \in X, \exists \text{ um único } y \in Y; xfy.$$

Da mesma forma que fizemos antes, escreve-se $f : X \to Y$ para designar que f é uma função de X em Y e $f(x) = y$ para denotar que o par $(x, y) \in X \times Y$ é relacionado por f, ou seja, satisfaz xfy.

Na pratica, a definição de função mais adotada na literatura e que adotaremos de agora em diante é a que se segue.

Definição 3 .
*Chama-se função a toda correspondência f que atribui a cada valor de uma variável x em seu **domínio** X (também chamado de domínio da função) um e um só valor de uma variável y em um certo conjunto Y(chamado de **contradomínio** da função).*

Se $f : X \to Y$ é uma função, x é chamada de variável independente, que por vezes é também chamada de argumento da função, e y é a variável dependente.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2 .
Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x$, temos que:

- *A função associa cada $x \in \mathbb{R}$ com o seu dobro $2x$;*
- *Cada $x \in \mathbb{R}$ associa-se com um único outro real $f(x) = y = 2x$;*
- $f(-1) = -2, f(2) = 4, f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$, *etc.*

Quando uma função $f : X \to Y$ com $X, Y \subset \mathbb{R}$ é definida por uma fórmula ela também pode ser representada da seguinte forma

$$f : X \to Y$$

$$x \to f(x).$$

Assim a função do exemplo 2 também pode ser representada como

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to 2x.$$

Exemplo 3 .
Seja f uma função $f : P \to S$ em que P é o conjunto de pessoas $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, e S o conjunto dos tipos sanguíneos $S = \{A_+, A_-, B_+, B_-, AB_+, AB_-, O_+, O_-\}$.

De fato f é uma função, cada elemento $p \in P$ está relacionado com um único elemento pertencente a S (uma pessoa só pode ter um tipo de sangue) e todo elemento p_n tem um tipo sanguíneo. No entanto, não é possível definir uma fórmula para $f(p_n)$.

Ao trabalharmos com função, além de dar a regra que faz corresponder cada x com um único y, é fundamental deixar claro o domínio que caracteriza a função.

O domínio de uma função f, denotado por **Dom(f)** ou **Dm(f)**, quando não explicitado deveremos compreender como o maior domínio possível em que as operações que definem a expressão $f(x)$ tenha sentido.

Exemplo 4 .
Considerando f uma função real definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ vamos encontrar seu domínio maximal $X \subset \mathbb{R}$.

Note que para que a expressão $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ tenha sentido $\sqrt{x-1}$ e $\sqrt{3-x}$ terão que ter sentido, ou seja:

- $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1;$
- $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3.$

Assim, $Dom(f) = X = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 3\}$.

Uma observação interessante se deve fazer em relação a função $g(x) : \sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}$. Para definir seu domínio devemos considerar que, para que a expressão $\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}$ tenha sentido, devemos ter $\frac{x-1}{3-x} \geq 0$ e não mais numerador e denominador em separado. Para $\frac{x-1}{3-x} \geq 0$ temos duas condições:

a) $x-1 \geq 0$ e $3-x > 0$
$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
$3-x > 0 \Rightarrow x < 3$,
logo $1 \leq x < 3$;

b) $x-1 \leq 0$ e $3-x < 0$
$x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$
$3-x < 0 \Rightarrow x > 3$,
de modo que $x \leq 1$ e $x > 3$

Assim, $Dom(g) = X = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 3 \text{ ou } x \leq 1 \text{ ou } x > 3\}$.

A propósito, não podemos dizer que $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = g(x)$ uma vez que elas estão definidas em domínios distintos, de acordo com a definição a seguir.

Definição 4 .
Duas funções $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ são iguais se $X = W, Y = Z$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Duas funções f e g são iguais se apresentarem o mesmo domínio , mesmos contradomínio e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ de seu domínio.

Quando duas funções f e g são iguais dizemos que $f = g$, caso contrario escrevemos $f \neq g$ e dizemos que f e g são funções diferentes ou distintas.

Quanto ao contradomínio de uma função $f : X \to Y$ vale salientar que Y geralmente não coincide com o conjunto formado pelas imagens dos elementos de X. Como podemos notar no seguinte exemplo.

Exemplo 5 *Dada a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$. Seu contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ mas, nem todo elemento do contradomínio está associado a um elemento x do seu domínio, de modo que o conjunto imagem de f é um subconjunto próprio do contradomínio.*

De modo geral, define-se o **conjunto imagem**, ou **imagem**, de uma função $f : X \to Y$ como o conjunto $Im(f)$, em que seus elementos são as imagens $f(x) \in Y$ dos elementos $x \in X$:

$$Im(f) = \{f(x) \in Y; x \in X\}.$$

Onde, $Im(f) \subset Y$ podendo ocorrer $Im(f) = Y$.

Em se tratando de funções reais de variável real podemos construir novas funções a partir de funções dadas, utilizando as operações aritméticas do contradomínio $\mathbb{R}$ das mesmas. Ou seja, dados um número $c \in \mathbb{R}$ e um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ e sendo $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções reais de variáveis reais e de mesmo domínio, define-se as funções $f+g, f \cdot g$ e $c \cdot f : X \to \mathbb{R}$

pondo:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in X$.

  Devemos observar que o sinal de adição nessa igualdade tem significados diferentes, uma fez que no primeiro membro ele faz a definição da função $f+g$, enquanto que no segundo membro ele representa a adição dos números reais $f(x)$ e $g(x)$. A função $(f+g)(x)$ é denominada função **soma** das funções f e g.

- $(f \cdot g) = f(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in X$.

  Uma observação semelhante a que fizemos na adição deve ser feita em relação ao produto, em $f \cdot g$ significa a definição da função **produto** das funções f e g enquanto que $f(x) \cdot g(x)$ significa o produto dos reais $f(x)$ e $g(x)$.

- $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$, para todo $x \in X$.

  Este caso pode ser tratado como um caso particular do anterior, basta tomar g como uma função constante igual a c, ficando $f \cdot g = c \cdot f$, ou ainda, $(f \cdot g)(x) = c.f$.

  Ainda para g uma função constante igual a c podemos denotar $f+g$ como $f+c$, de modo que
  $$(f+g)(x) = f(x) + c,$$
  para todo $x \in X$.Para ilustrar as operações com funções vejamos um exemplo,

Exemplo 6 .
Sejam f e g as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = x-1$,temos

- $(f+g)(x) = \dfrac{x+1}{x-1} + (x-1) = \dfrac{(x+1)+(x-1)^2}{x-1} = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$, *para* $x \neq 1$,
- $(fg)(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \cdot (x-1) = x+1$, *para* $x \neq 1$,
- $(\sqrt{2}f)(x) = \sqrt{2} \cdot \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{2}(x+1)}{x-1}$,*para* $x \neq 1$.

Abordaremos agora dois exemplos de importantes tipos de funções, sendo elas a função constante e a função identidade.

Exemplo 7 .
Dados os conjuntos não vazios X e fixado um elemento $c \in Y$, a função constante c de X em Y é a função $f : X \to Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

Podemos notar que todo $x \in X$ está associado a um mesmo $y \in Y$, $f(x) = y = c$. No entanto, as condições necessárias para que seja uma função estão satisfeitas, todo $x \in X$ associa-se a um único $y \in Y$.

Em símbolos a função fica definida como

$$f : X \to Y$$

$$x \to c$$

.

Exemplo 8 .
Dado um conjunto não vazio X, a função identidade de X, denotada por $Id_x : X \to X$, é a função dada por $Id(x) = x$, para todo $x \in X$.

Note que dados $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$, com $n \in \mathbb{N}$, pela definição da função Id_x temos que $Id(x_1) = x_1, Id(x_2) = x_2, Id(x_3) = x_3, \ldots, Id(x_n) = x_n$. Assim, todo elemento $x_n \in X$ relaciona com um único elemento $x_n \in X$, de modo que Id_x realmente é uma função.

A função Id_x pode ser definida em símbolos como

$$Id_x : X \to X$$

$$x \to x$$

1.2 Função Injetiva, Função Sobrejetiva e Função Bijetiva

Na discussão de definição de função e da definição do conjunto imagem de uma função podemos abstrair que nem sempre o conjunto imagem de uma função$f : X \to Y$ $(Im(f))$ é igual ao contradomínio Y de f e ainda que um elemento $y \in Y$ pode ser imagem de mais de um $x \in X$ de seu domínio. As funções em que sua imagem não coincide com o contradomínio, aquelas em que a imagem coincide com o contradomínio mas que um elemento do contradomínio é imagem de mais de um elemento do domínio e as funções em que a imagem coincide com o contradomínio e cada elemento do contradomínio é imagem de apenas um elemento do domínio são nomeadas conforme a seguinte definição.

Definição 5 .
Uma função $f : X \to Y$ é dita:

a) ***Injetora****, ou* ***injetiva****, ou uma* ***injeção****, se, para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$;*

b) ***Sobrejetora****, ou* ***sobrejetiva*** *ou uma* ***sobrejeção****, se, sua imagem for igual ao seu contradomínio Y,i.e., se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$ tal que $y = f(x)$.*

c) ***Bijetora****, ou* ***bijetiva****, ou uma* ***bijeção****, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

Verificar se uma função é injetora equivale verificar que dados $x_1, x_2 \to X$, se, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Enquanto que para verificar se uma função é sobrejetora deve-se verificar que para cada $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ que satisfaça $f(x) = y$.

Retornemos ao exemplo em $f : P \to S$ em que P é um grupo de pessoas $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, e S é o conjunto dos tipos sanguíneos $S = \{A_+, A_-, B_+, B_-, AB_+, AB_-, O_+, O_-\}$, vamos considerar que:

- P é composto por um grupo de cinco pessoas $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, cada uma com um tipo sanguíneo. Note que a função $f : P \to S$ é uma injeção uma vez que elementos distintos de relaciona com elementos distintos de S e que f não é sobrejetiva pois, exite elementos de S que não é imagem de nenhum elemento de P;

- P é composto de dez pessoas $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{10}\}$, em que oito delas possuem tipos de sangue diferentes. Note que f não é injetiva uma vez que existem elementos de P que possuem a mesma imagem, não satisfazendo a implicação $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. f é uma sobrejeção já que todo elemento de S é imagem de pelo menos um elemento de P.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 9 .
Seja f a função $f : C \to IP$, onde $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, é o conjunto de todos os computadores em uso e $IP = \{IP_1, IP_2, IP_3, \ldots, IP_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, é o conjunto dos IP(Internet Protocol) disponibilizados até então. O IP é uma identificação única que cada computador recebe para navegar em uma rede, que funciona como um endereço.

Neste caso estamos diante de uma bijeção, uma vez que cada computador c_n está associado a seu único IP_n, satisfazendo $f(p_1) = f(p_2) \Rightarrow p_1 = p_2$. Todo IP disponibilizado até então, associa-se a um elemento do domínio de f,satisfazendo que para todo $IP_n \in IP$ existe um $p_n \in P$ em que $f(p_n) = IP_n$.

1.3 Composição de Funções

Dada uma função real $f : X \to Y$ definida por uma fórmula dizemos que $y \in Y$ é a variável dependente enquanto que $x \in X$ é definido como a variável independente, ou argumento da função, podendo ser um número real, uma expressão ou mesmo uma função, como no exemplo seguinte:

Exemplo 10 .
Seja f a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, temos:

a) $f(2) = 2^2 = 4$;

b) $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$;

c) $f(3+h) = (3+h)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times h + h^2 = 9 + 6h + h^2$;

d) seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = x+2$,*temos:* $f(g(x)) = g(x)^2 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

Quando usamos uma uma função como argumento de outra iremos obter uma terceira função a qual será denominada **função composta**, conforme a seguinte definição.

Definição 6 .
Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a função composta de f e g, nessa ordem, é a função $gof : X \to Z$, definida, para todo $x \in X$, por

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

.

Para que a função gof tenha sentido basta que a imagem $f(x)$ da função f esteja contida no domínio Y de g, mais precisamente, o contradomínio de f tem que ser igual ao domínio de g. A aplicação gof é o mesmo que aplicar f e depois g, nessa ordem.

Vejamos os exemplos.

Exemplo 11 .
Considere as funções reais$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 2x^2 + 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$,vamos determinar:

a) gof

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2f(x)^2+1} = \frac{1}{2(2x^2+1)^2+1} = \frac{1}{2(4x^4+4x^2+1)+1} =$$

$$\frac{1}{8x^4+8x+2+1} = \frac{1}{8x^4+8x^2+3};$$

b) fog

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 2g(x)^2 + 1 = 2(\frac{1}{2x^2+1}^2) + 1 = 2(\frac{1}{4x^4+4x^2+1+1} + 1 =$$

$$\frac{2}{4x^4+4x^2+1} + 1 = \frac{2+(4x^4+4x^2+1)}{4x^4+4x^2+1} = \frac{4x^4+4x^2+3}{4x^4+4x^2+1};$$

c) fof

$$(fof)(x) = f(f(x)) = 2f(x)^2 + 1 = 2(2x^2+1)^2 + 1 = 2(4x^4+4x^2+1) + 1 =$$

$$8x^4 + 8x^2 + 2 + 1 = 8x^4 + 8x^2 + 3.$$

Exemplo 12 .
Sejam f e g funções reais de uma variável real, tais que $f(x) = 2x+7$ e $(fog)(x) = x^2 - 2x + 3$. Encontre a expressão que define a função g.

$$x^2 - 2x + 3 = (f(g(x)) = 2(g(x)) + 7 \Rightarrow 2g(x) + 7 = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2.$$

Para verificar o comportamento das funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras recorreremos a proposição a seguir.

Proposição 1 .
Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções dadas. Então:

a) $g \circ f$ injetora $\Rightarrow$ f injetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

b) $g \circ f$ sobrejetora $\Rightarrow$ g sobrejetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

c) g, f injetoras $\Rightarrow$ $g \circ f$ injetora.

d) g, f sobrejetoras $\Rightarrow$ $g \circ f$ sobrejetora.

e) g, f bijetoras $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijetora.

PROVA.

a) Supondo que $g \circ f$ seja injetora. Então, para x_1 e x_2 em X, temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$$

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

de modo que f também é injetora.

Agora, dadas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x+1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3$. Temos que f é injetiva e no entanto, $g \circ f$ não é injetiva.

b)Supondo que $g \circ f$seja sobrejetora. Então, para $z \in Z$, a sobrejetividade de $g \circ f$ garante a existência de pelo menos um $x \in X$ de modo que $z = (g \circ f)(x)$. Logo $z = g(f(x))$, assim g também é sobrejetora.

Para a segunda parte tomemos as funções $g(x) = x + 1$ e $f(x) = x^2 - 3$. No caso, g é sobrejetora e $g \circ f$ não é.

c) Supondo que f e g são injetoras, e dados x_1 e $x_2 \in X$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Aplicando as injetividades de g e f, temos que

$$g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

de maneira que $g \circ f$ também é injetora.

d) Suponha que f e g são sobrejetoras. Então, para $z \in Z$, a sobrejetividade de g garante que existe $y \in Y$ tal que $z = g(y)$. Enquanto que, a sobrejetividade de f garante a existência de $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Assim, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

de modo que $g \circ f$ também é sobrejetora.

e) De c) e d) concluímos que
g e f bijetoras $\Rightarrow$ g e f injetoras e sobrejetoras $\Rightarrow$ $g \circ f$ injetora e sobrejetora $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijetora.

1.4 Inversão de Funções

Na definição de função vimos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leva cada elemento $x \in X$ a um elemento $y \in Y$. Como visto no Exemplo 2 em que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ associa cada número real ao seu dobro.

No caso da função do Exemplo 2 seria possível definir uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que relaciona elemento do contradomínio de f ao elemento do domínio, sendo ela $g(x) = \dfrac{x}{2}$, vejamos que $f(x) = 2x$ transforma o elemento 3 em 6, $f(3) = 2 \times 3 = 6$, enquanto que a função g transforma o elemento 6 de seu domínio em 3, $g(6) = \dfrac{6}{2} = 3$.

O que acontece com a função do exemplo 2 só é possível devido a sua bijetividade, de fato se f não fosse injetiva teríamos elementos do contradomínio que seria imagem de mais de um elemento do domínio, tornando inviável a construção da função g uma vez que elementos do domínio de g teria mais de uma imagem. Por outro lado se f não fosse sobrejetiva existiriam elementos do seu contradomínio que não seriam imagem de nenhum elemento do seu domínio e elementos do domínio de g não possuiriam imagem, não caracterizando uma função.

Sendo $f : X \to Y$ uma bijeção os elementos de X e Y estão em correspondência biunívoca, ou seja, cada $x \in X$ corresponde com um único $y \in Y$ por meio de f,e vice-versa. Podemos assim, obter uma função $g : Y \to X$, exigindo que

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x,$$

conforme a seguinte definição.

Definição 7 .
Seja $f : X \to Y$ uma bijeção dada. A ***função inversa*** *de f é a função $g : Y \to X$ tal que para todo $x \in X$ e $y \in Y$, temos*

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

A inversa de uma bijeção $f : X \to Y$ é denotada por f^{-1}.

Para calcular a inversa de uma função bijetiva $f : X \to Y$ devemos analisar que, fixado $y \in Y$, como $f^{-1}(y) = x$ se , e só se, $f(x) = y$, então para encontrar $f^{-1}(y) = x$ basta resolvermos, para todo $x \in X$, a equação $f(x) = y$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 13 .
Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 5$. Verifique sua bijetividade e encontre sua inversa g.

Temos que

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 5 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{3}.$$

Estes cálculos mostram que para todo $y \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$; portanto f é sobrejetiva (pois x existe) e injetiva(pois x único), logo, f é bijetiva.

Pela definição de f^{-1} exige-se que $x = f^{-1}(y)$, de modo que $f(x) = y = 3x - 5$, ou seja, $y = 3x - 5 \Leftrightarrow y = 3f^{-1}(y) - 5 \Leftrightarrow 3f^{-1}(y) = y + 5 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+5}{3} \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{x+5}{3}$.

Exemplo 14 .
Dada a função $f : \mathbb{R} - 1 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Determine sua inversa g.

Pondo $x = f^{-1}(y)$, temos:

$f(x) = y = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{f^{-1}(y)+1}$, *ou seja,* $y = \dfrac{1}{f^{-1}(y)+1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) + 1 = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{y} \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

1.5 Paridade de Funções

Dada uma função $f : X \to Y$ ela pode ser uma função par, uma função ímpar, ou uma função nem par nem ímpar. A fim de verificar a paridade de uma função vejamos as definições a seguir.

Definição 8 .
*Uma função $f : [-a,a] \to Y$, $a > 0$ é uma **função par** quando dado $x \in [-a,a]$, $f(x) = f(-x)$.*

Por definição, a função par transforma qualquer elemento x do domínio e o oposto desse elemento x a um mesmo y de seu contradomínio.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 15 .
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é par.

Vejamos que dados $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $f(x_0) = x_0^2$ e $f(-x_0) = (-x_0)^2 = x_0^2$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Logo f é par.

Exemplo 16 .
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^{2k}$, com $k \in \mathbb{Z}$ é par.

De fato dado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que, $f(x) = x^{2k}$ e $f(-x_0) = (-x_0)^{2k} = x^{2k}$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Logo f é par.

Exemplo 17 .
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = cos(x)$ é par.

Por definição, $cos(x) = cos(-x)$, assim $f(x) = cos(x)$ e $f(-x) = cos(-x) = cos(x)$, de modo que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo f é par.

Definição 9 *Uma função $f : [-b,b] \to Y$, $b > 0$ é uma **função ímpar** quando dado $x \in [-b,b]$, $f(x) = -f(-x)$.*

Exemplo 18 .
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ é ímpar.

Temos que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(-x_0) = -ax_0$ e $f(x) = ax_0 = -f(-x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí f é ímpar.

Exemplo 19 .
A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^{2k+1}$, com $k\in\mathbb{Z}$, é ímpar.

Dado $x_0\in\mathbb{R}$, $f(-x_0)=(-x_0)^{2k+1}=(-x_0)^{2k}\times(-x_0)=-(x_0^{2k+1})$ e $f(x_0)=x_0^{2k+1}=-f(-x)$, qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$. Logo f é ímpar.

Exemplo 20 *A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=sen(x)$, é ímpar.*

Por definição, $sen(-x)=-sen(x)$, assim $f(-x)=sen(-x)=-sen(-x)$, de modo que $f(x)=-f(-x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Logo f é ímpar.

Vejamos agora um exemplo de uma função nem par e nem ímpar.

Exemplo 21 .
A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x$ não é par nem ímpar.

De fato, dado $x\in\mathbb{R}$, então $f(x)=e^x$, $f(-x)=e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$. Note que a condição $f(x)=f(-x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ não é verdadeira, pois,

$$f(x)=f(-x)\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow e^x\cdot e^x=1\Leftrightarrow(e^x)^2=1\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0.$$

De modo que a condição so vale para $x=0$. Daí f não é par.

Ainda, se

$$f(x)=-f(-x)\Leftrightarrow -f(x)=f(-x)\Leftrightarrow -e^x=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow -e^x\cdot e^x=1\Leftrightarrow -e^{2x}=1.$$

O que é um absurdo, pois $-e^{2x}<0$ e $1>0$. Logo f não é ímpar.

Daí concluímos que f não é par nem ímpar.

Vamos agora verificar a paridade da função $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Para f temos que

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

e

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x),$$

de modo que f é par.

para g temos

$$g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

e

$$g(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^x}{2}=-g(x),$$

assim g é ímpar.

Observe que, $f(x)+g(x)$=

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=e^x,$$

e e^x *é a soma de uma função par com uma função ímpar.*

De modo geral, podemos escrever qualquer função como a soma de uma função par e uma função ímpar.

PROVA.

Sejam f*,* g *e* h *funções reais, tais que,* $f(x)=g(x)+h(x)$*, sendo* g *uma função par e* h *uma função ímpar. Temos que:*

$$f(x)=g(x)+h(x)\Rightarrow g(x)=f(x)-h(x)$$

e

$$f(-x)=g(-x)+h(-x)\Rightarrow g(x)=f(-x)-h(-x)\Rightarrow g(x)=f(-x)+h(x)$$

.

Somando $g(x)=f(x)-h(x)$ *com* $g(x)=f(-x)+h(x)$*, vamos obter:*

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(-x).$$

Logo h é ímpar.

Também temos:

$$f(x)=g(x)+h(x)\Rightarrow h(x)=f(x)-g(x)$$

e

$$h(-x)=f(x)-g(-x)\Rightarrow -h(-x)=-f(-x)+g(x)\Rightarrow h(x)=-f(-x)+g(x)$$

Somando $h(x)=f(x)-g(x)$ *com* $h(x)=-f(-x)+g(x)$ *vamos obter*

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(-x).$$

Logo g é par.

1.6 Monotonicidade de Funções

Quando estamos analisando o comportamento de uma função é de suma importância verificar os intervalos de crescimento e decrescimento da mesma. Para tanto faz-se necessário os conceitos da seguinte definição.

Definição 10 .
Seja f uma, função real de variável real, $f : J \to \mathbb{R}$, J intervalo, é:

a) ***Crescente*** *em I, $I \subset J$, se, para todo $x_1 < x_2 \in I$, tivermos*

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ou ainda

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

b) ***Decrescente*** *em I, $I \subset J$, se, para todo $x_1 < x_2 \in I$, tivermos*

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ou então

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

c) ***Não-decrescente*** *em I, $I \subset J$, se, para todo $x_1 < x_2 \in I$, tivermos*

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

d) ***Não-crescente*** *em I, $I \subset J$, se, para todo $x_1 < x_2 \in I$, tivermos*

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Em cada um dos casos acima, a função é dita monótona.

Exemplo 22 .
Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$, vamos verificar sua monotonicidade.

Vejamos que dados $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$, temos que $f(x_1) = ax_1$ e $f(x_2) = ax_2$, de modo que

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$, então f será crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.

O resultado do exemplo anterior estende-se à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$.

De fato,

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$, *então* f *será crescente se* $a > 0$ *e decrescente se* $a < 0$.

Exemplo 23 .
Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$,*com* a, b *e* $c \in \mathbb{R}$, *vamos verificar os intervalos de monotonicidade da função.*

Para tal função, temos:

a) *Se* $a > 0$, *então* f *é decrescente em* $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ *e crescente em* $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

- *Para* $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, *temos*

  $$f(x_2)-f(x_1) = (ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c) = ax_2^2+bx_2+c-ax_1^2-bx_1-c$$

  $$= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) > 0,$$

  pois, $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$ *e* $(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) > 0$. *Assim,* f *é crescente em* $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ *quando* $a > 0$.

- *para* $x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a}$,*temos*

  $$f(x_2)-f(x_1) = (ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c) = ax_2^2+bx_2+c-ax_1^2-bx_1-c$$

  $$= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) < 0,$$

  pois, $x_2 > x_1 \leq -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$ *e* $(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) < 0$. *Assim,* f *é decrescente em* $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ *quando* $a > 0$.

b) *Se* $a < 0$, *então* f *é crescente em* $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ *e decrescente em* $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

- *Para* $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$,*temos*

  $$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) < 0$$

  ,*uma vez que* $x_2 - x_1 > 0$ *e* $(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) > 0$. *Assim* f *é decrescente em* $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ *quando* $a < 0$.

- *Para* $x_1 > x_2 \leq -\dfrac{b}{2a}$*,temos*

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) > 0$$

,uma vez que $x_2 - x_1 > 0$ *e* $(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}) < 0$*. Assim* f *é crescente em* $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ *quando* $a < 0$*.*

Pode-se notar que a função quadrática decresce em um intervalo e é crescente em outro, fato que não é exclusivo dessa função. Em sua maioria, as funções apresentam oscilações, em alguns intervalos são crescentes e em outros decrescentes, ou, mesmo, constante.

Tanto na função quadrática como em outras, existem limitações em sua imagem, o que leva a seguinte definção.

Definição 11 .
Sejam $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função dada. Dizemos que:*

- $y_0 \in \mathbb{R}$ *é o* ***valor mínimo*** *de* f *em* I *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

  a) $f(x) \geq y_0, \forall x \in dom(f)$

  b) $y_0 \in Im(f)$*.*

- $y_0 \in \mathbb{R}$ *é o* ***valor máximo*** *de* f *em* I *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

  a) $f(x) \leq y_0, \forall x \in dom(f)$

  b) $y_0 \in Im(f)$*.*

A condição a), tanto no primeiro caso como no outro, sozinha não garante que $y_0 \in \mathbb{R}$ seja o valor mínimo ou máximo de f. Tomemos como exemplos as funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2$. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que:

- Em $f(x) = x^2$, $f(x) > -1$, entretanto -1 não é o valor mínimo de f;

- Em $f(x) = -x^2$, $f(x) < 1$, mas 1 não é o valor máximo de f.

O uso de desigualdades, por vezes, é bem útil para obter máximos ou mínimos de uma função. Como no exemplo a seguir.

Exemplo 24 .
Dada a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$*. Vamos verificar se* f *possui um ponto de máximo ou de mínimo, no intervalo em que está definida.*

Temos que

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{1} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Com $f(1) = 2$*, assim* f *tem um valor mínimo igual a 2.*

No caso do exemplo acima foi usada a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

2 A Abordagem Geométrica das Funções

Neste capítulo iremos tratar de uma abordagem geométrica para as funções.

2.1 Definição de Função

Dados os conjuntos X e Y pertencentes aos reais dizemos que F :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quando todo $x \in X$ relaciona com um único $y \in Y$.

Em um sistema cartesiano OXY, onde O é a origem do sistema, traçando um feixe de retas paralelas ao eixo OY pode-se identificar se um determinado gráfico representa ou não uma função como veremos nos exemplos a seguir.

Na Figura 4 podemos notar que qualquer reta r_i com i $\in \mathbb{R}$ intersecta a curva em um único ponto, ou seja, todo x $\in X$ relaciona com um único y $\in Y$. Assim o gráfico representa uma função.

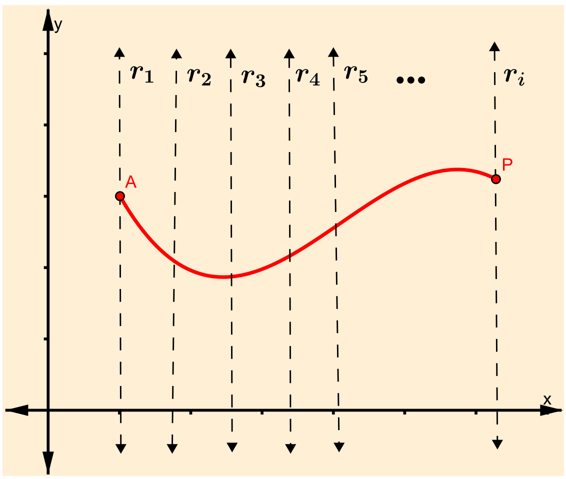


Figura 4 – Gráfico de uma função

Da mesma forma analisando o gráfico da Figura 5 verifica-se que existem retas r_i com i $\in \mathbb{R}$ que intersectam a curva em mais de um ponto, ou seja, existem valores de x que relacionam com mais de um valor de y. Logo o gráfico não representa uma função.

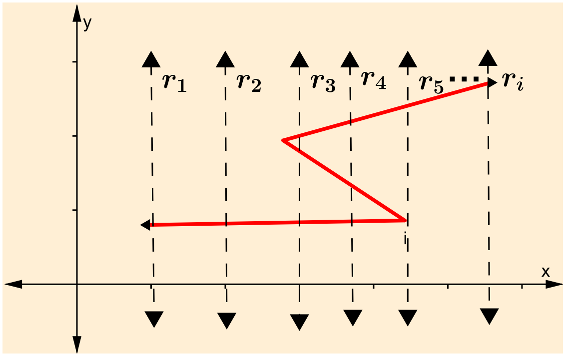


Figura 5 – Gráfico que não representa uma função

Fazendo a mesma análise com o gráfico da Figura 6 podemos notar que a reta representa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

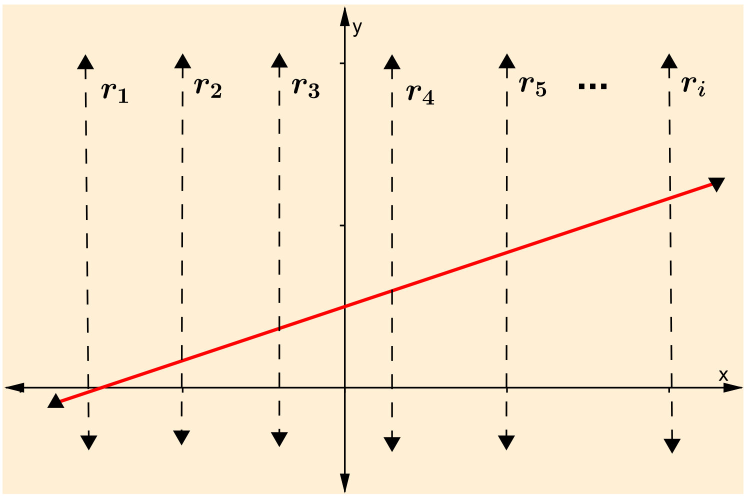


Figura 6 – Função da qual o gráfico é uma reta

A parábola também representa uma função dos reais aos reais como pode-se notar na Figura 7.

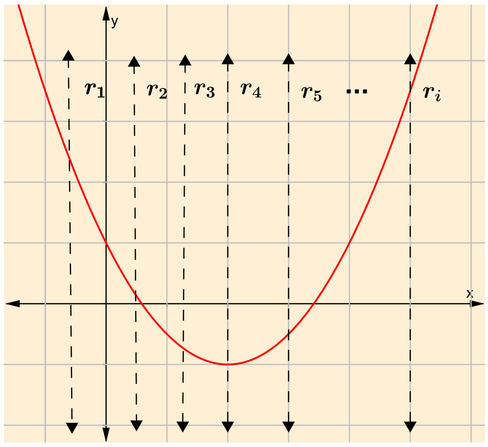


Figura 7 – Função cujo gráfico é uma parábola

O gráfico da Figura 8 não representa uma função dos reais aos reais, ou seja, o gráfico não é de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

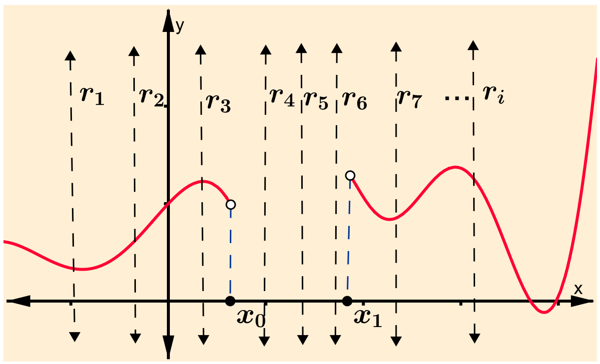


Figura 8 – Gráfico que não representa uma função

Observando a Figura 8 pode-se notar que existem retas r_i, com $i \in \mathbb{R}$, que não cortam a curva em nenhum ponto, logo, se for tomado como domínio os números reais o gráfico não representa uma função. Mas se pode definir um domínio em que o gráfico representará uma função, a saber:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; x < x_0\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x > x_1\}.$$

Daí a importância da definição do domínio de uma função.

2.2 Funções Injetivas, Funções Sobrejetivas e Funções Bijetivas

Sejam I_1 e I_2 intervalos, a função $f : I_1 \to I_2$ é dita **injetora** (ou **injetiva**) quando dados x_1 e x_2 pertencentes a I_1 implica em $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja,

$$x_1 \neq x_2 \in I_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

.

O que pode ser observado por meio de retas paralelas ao eixo OX.

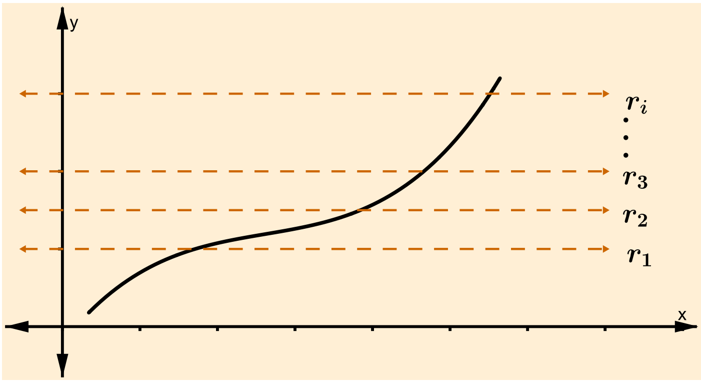


Figura 9 – Gráfico de uma função injetiva (não-decrescente)

Qualquer reta r_i, com $i \in \mathbb{R}$, intersecta a função em um único ponto, ou seja, todo $f(x_i)$ é imagem de um único x_i e a função é injetiva.

Enquanto que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$, não é injetiva. Como podemos analisar no gráfico da Figura10.

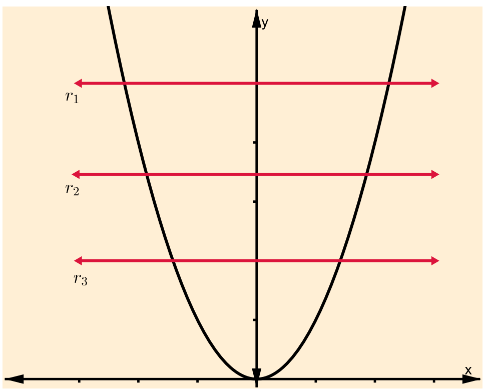


Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = x^2$

Podemos observar que existem retas r_i paralelas ao eixo OX que cortam o gráfico da função em mais de um ponto. Logo existem $y \in \mathbb{R}$ que é imagem de mais de um $x \in \mathbb{R}$. Assim, f não é injetiva.

Por outro lado, podemos verificar que todo elemento $y \in \mathbb{R}_+$ é imagem de pelo menos um elemento $x \in \mathbb{R}$, caracterizando a função como **sobrejetora**(ou **sobrejetiva**). Ou seja, uma função $f : A \to B$ é dita sobrejetora(ou sobrejetiva), se somente se, o conjunto imagem de f for igual ao seu contradomínio.

Agora vejamos o exemplo a seguir,

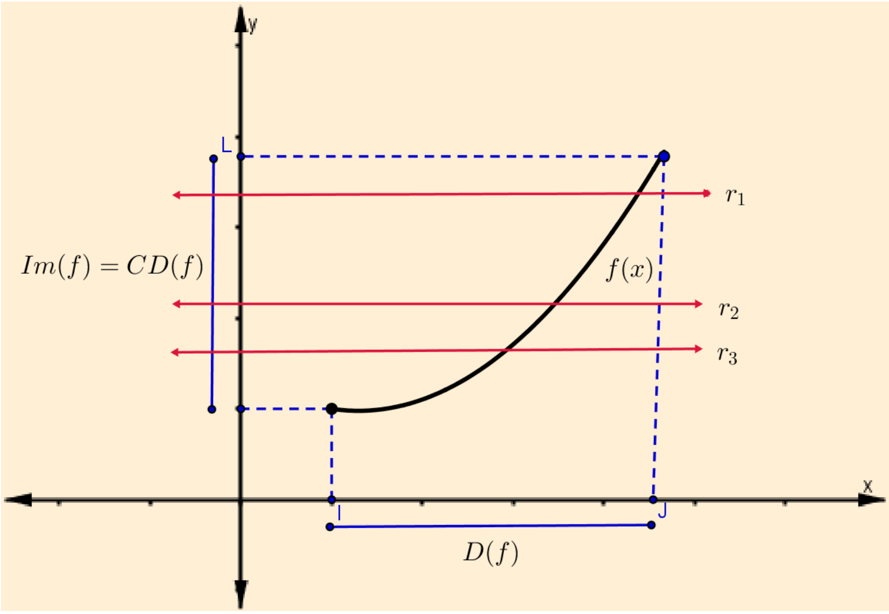


Figura 11 – Gráfico de uma função sobrejetora

Note que qualquer reta r_i paralela ao eixo OX corta o gráfico de f em um único ponto, ou seja, dados x_1 e $x_2 \in Dm(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou ainda, todo $f(x)$ é imagem de um único elemento $x \in Dm(f)$. Assim f é injetora.

Podemos notar ainda que todo $y \in CD(f)$ é imagem de pelo menos um elemento $x \in Dm(f)$, isto é, $Im(f) = CD(f)$. Assim f é sobrejetora.

Como f é injetora e também sobrejetora ele fica definida como **bijetora**(ou **bijetiva**).

2.3 Domínio e Imagem de Uma Função

Para determinar o domínio e a imagem de uma função, cujo gráfico está representado no plano cartesiano, vamos tomar retas paralelas ao eixo OY para definir o domínio e retas paralelas ao eixo OX para a imagem, fazendo suas projeções sobre os eixos, como se pode verificar na figura 6:

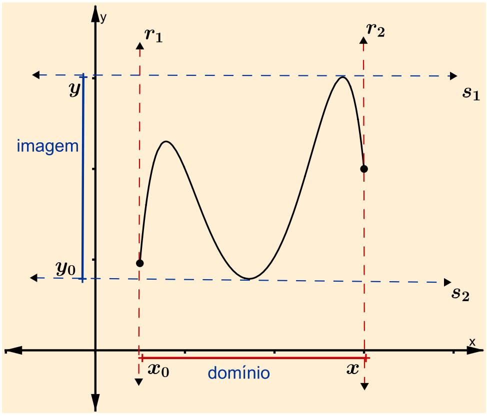


Figura 12 – Domínio e imagem de uma função

Assim, o domínio da função corresponde ao intervalo $[x_0, x]$ com $x \in \mathbb{R}$, enquanto que a imagem da função corresponde ao intervalo $[y_O, y]$ com $y \in \mathbb{R}$ e a função fica definida como f : $[x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$.

O domínio da função pode estar definido pela união de dois intervalos como se pode notar no gráfico da Figura 13 :

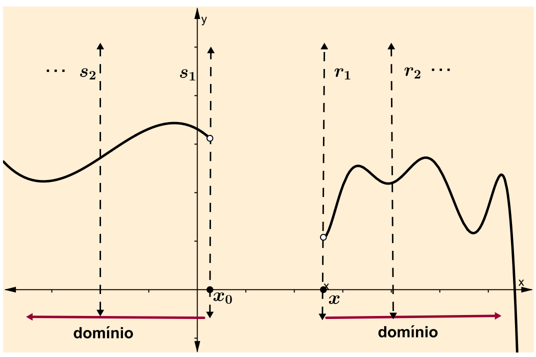


Figura 13 – Função da qual o domínio é a união de intervalos

Desse modo o domínio da função fica definido pela união de dois intervalos sendo Dm(f) =]-∞,x_0[$\cup$]x,+∞[, com $x \in \mathbb{R}$. Neste caso a função pode ser definida como f:]-∞,x_0[$\cup$]x,+∞[$\rightarrow \mathbb{R}$.

O intervalo que define o domínio de uma função pode ser o conjunto dos números reais conforme o gráfico da Figura 14 .

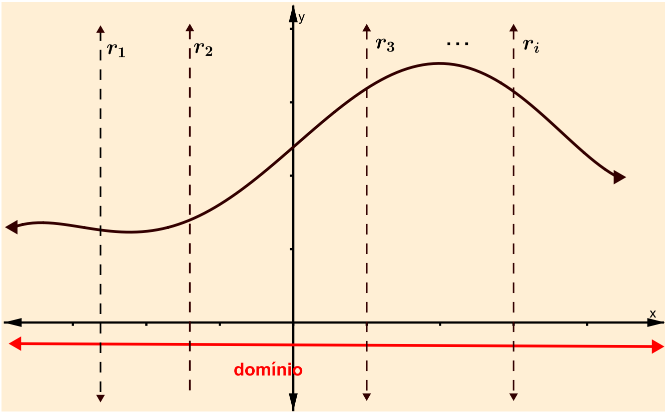


Figura 14 – Função em que $Dm(f) = \mathbb{R}$

De modo que o domínio da função é o conjunto dos números reais e a função fica definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Quanto a imagem de uma função ela pode ser um único número, ou seja, seu gráfico é uma única reta r paralela ao eixo OX que pode ser traçada cortando o eixo OY em um único ponto, conforme a Figura 15.

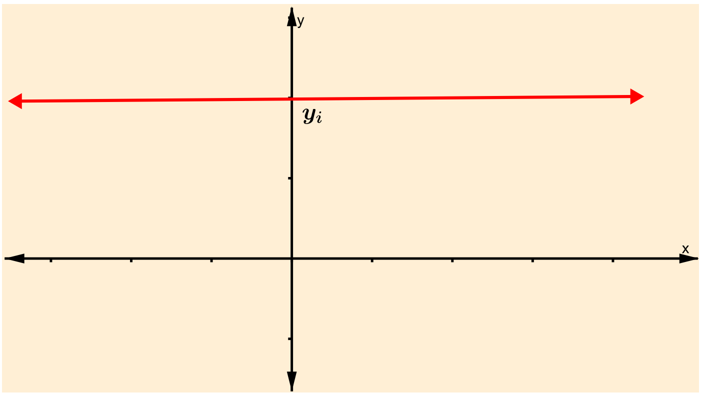


Figura 15 – Gráfico da função constante

A Figura 16 mostra que a imagem pode ser definida pela união de dois ou mais intervalos.

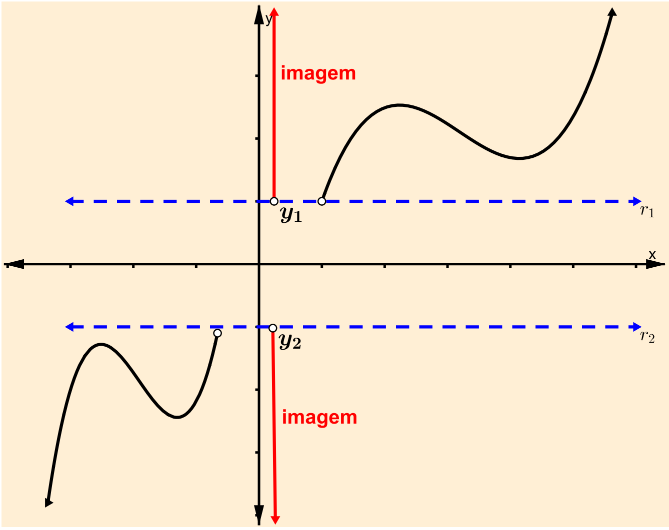


Figura 16 – Função cuja imagem é a união de dois intervalos

Na Figura 16 a imagem da função estão definida na união de dois intervalos sendo $I =]-\infty, y_1[\cup]y_2, +\infty[$, enquanto que na Figura 17, que representa a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \lceil x \rceil$, em que $f(x)$ é igual ao menor inteiro maior que x, a imagem está definida como a união de todos os pontos i com $i \in \mathbb{Z}$.

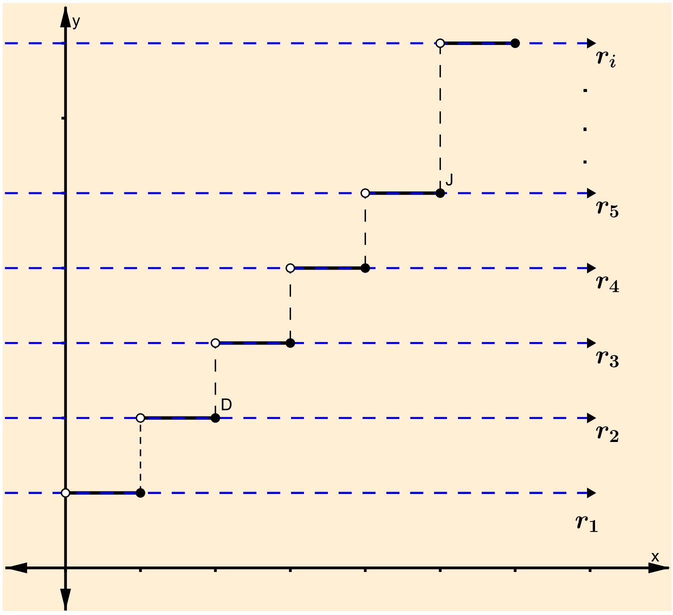


Figura 17 – Gráfico da função escada

Por fim, o segmento que representa a imagem de uma função pode ser o conjunto dos números reais como pode ser notado na Figura 18.

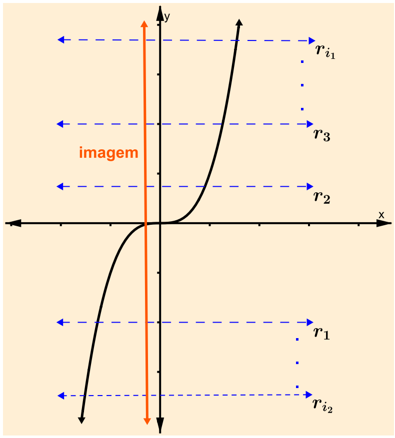


Figura 18 – Função em que $Im(f) = \mathbb{R}$

2.4 Valor Numérico e Raízes de Uma Função

Em diversas situações é preciso interpretar gráficos a fim de compreender o comportamento de certos fenômenos, essa análise passa pelo valor numérico das funções.

Dada uma certa função f : $I \to \mathbb{R}$, com I pertencente aos reais, todo $x \in I$ relaciona com um único $y \in \mathbb{R}$, como y_0 é a imagem de x_0 diremos que y_0 é o valor numérico da função no ponto x_0. Vejamos o exemplo,

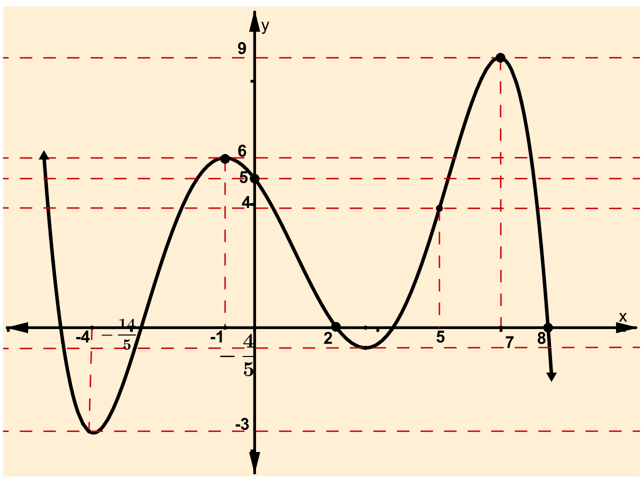


Figura 19 – Gráfico de uma função polinomial

No gráfico da Figura 19 é possível observar que 9 é a imagem de 7, ou seja, o valor numérico da função quando $x = 7$ é 9; quando $x = -1$ a função tem valor numérico igual a 6 pois, 6 é a imagem de -1; para $x = 2$ a função assume o valor zero; em $x = 8$ a função tem valor zero e quando $x = 5$ seu valor é 5.

As raízes de uma função são os pontos em que ela assume o valor zero, ou seja, os pontos em que a função se anula. No caso da Figura 19 podemos dizer que $-\frac{14}{5}$, 2 e 8 são raízes da função pois, são pontos em que a função se nula.

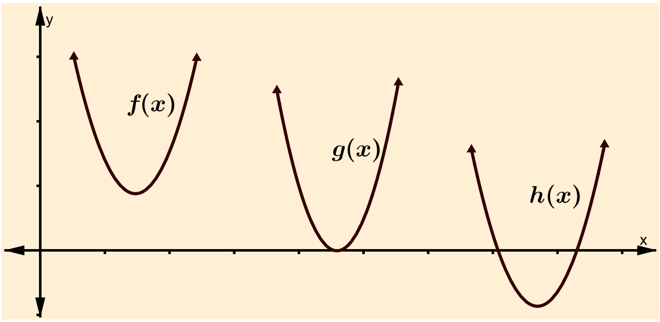


Figura 20 – Gráfico das funções $f(x)$, g(x) e h(x)

Quando a função não se anula diz-se que a função não possui raízes reais,como é o caso de $f(x)$, enquanto que $g(x)$ possui uma única raiz e $h(x)$ possui duas raízes, como representado na Figura 20.

3 A Abordagem Geométrica e Outras áreas do Conhecimento

Vejamos agora alguns exemplos da presença da abordagem geométrica das funções em outras áreas do conhecimento.

3.1 Física

Exemplo 25 .

Para exemplificar a utilização da grandeza física velocidade, vamos admitir que, durante o estudo de determinado movimento, tenhamos obtido os dados mostrados a seguir:

t(s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
s(m)	0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	16,0	16,0

A tabela acima mostra o espaço s do móvel em cada correspondente instante de tempo t.
uma maneira bastante eficiente de analisar um movimento é por meio de um gráfico. Como vimos no capítulo anterior, os gráficos apresentam de maneira concisa um grande número de informações.
Para o movimento em estudo, vamos obter o gráfico do espaço s do móvel em função de tempo t, utilizando os dados da tabela. Isso é feito colocando, no eixo das abscissas(eixo X), a variável t, e no eixo das ordenadas(eixo y), a variável s. Daí localizamos cada ponto por meio de suas coordenadas(os dados obtidos na tabela), e traçamos uma curva que melhor se ajuste a esses pontos. O resultado é mostrado na figura abaixo.

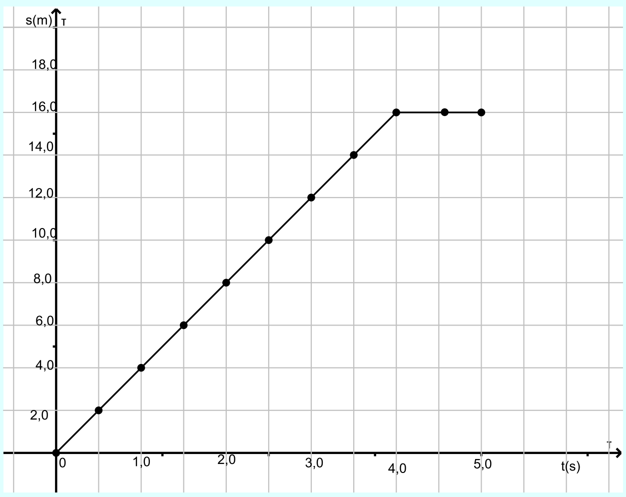


Figura 21 – Fonte:(TORRES et al., 2014)

No exemplo o autor usa a abordagem geométrica para representar o fenômeno estudado.

Devido a sua proximidade com a Matemática, dentre as outras áreas do conhecimento, a Física é de longe a que mais aplica os conhecimentos de funções, o que pode ser notado em (TORRES et al., 2014). A abordagem geométrica está presente, principalmente, na unidade em que o autor trata de cinemática.

Exemplo 26 .

A velocidade escalar média de um ciclista, nos primeiros 50 segundos de seu movimento, varia com o tempo como mostra o gráfico.

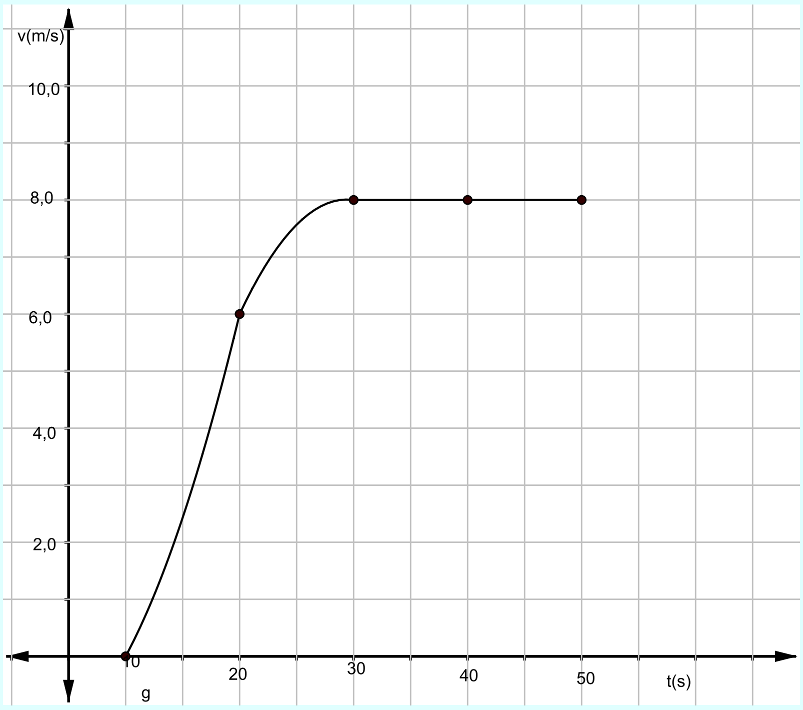


Figura 22 – Fonte: (TORRES et al., 2014)

Com base no gráfico, determine a aceleração escalar média do ciclista nos intervalos de:

a) *10s a 20s;*

b) *20s a 30s;*

c) *30s a 50s.*

No exemplo da Figura 22 acima o autor usa o gráfico para ilustrar a variação da velocidade escalar média em função de tempo, onde o leitor precisa fazer a leitura do gráfico para que tenha sucesso no exercício proposto.

Para a solução o leitor poderá aplicar a taxa de variação média em cada intervalo determinado.

Se A é a aceleração média . Para o item a) temos,

$$A = \frac{f(20) - f(10)}{20 - 10} = \frac{6 - 0}{20 - 10} = \frac{6}{10} = 0,6m/s^2.$$

Para o item b),

$$A = \frac{f(30) - f(20)}{30 - 20} = \frac{8 - 6}{30 - 20} = \frac{2}{10} = 0,2m/s^2.$$

E para o c),

$$A = \frac{f(50) - f(30)}{50 - 30} = \frac{8 - 8}{50 - 30} = \frac{0}{10} = 0m/s^2.$$

3.2 Química

No livro de Química do primeiro ano,(ANTUNES et al., 2013), os gráficos se fazem presentes em todos conteúdos abordados.

No exemplo a seguir o autor usa o gráfico como recurso visual para apresentar o conteúdo, que no caso, o leitor deve apresentar conhecimentos quanto a monotonicidade das funções para que possa compreender o fenômeno ao qual está relacionado.

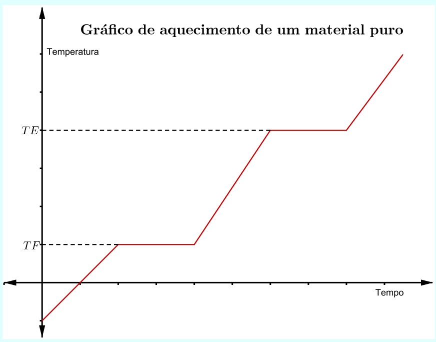
Exemplo 27 .

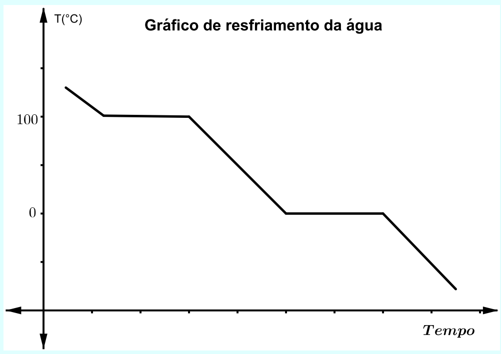
Curva de Aquecimento de Outros Materiais

O estudo do aquecimento de diversos materiais levou à constatação de que apenas materiais puros, isto é, formados por um único constituinte, apresentam temperaturas constantes durante a fusão e a ebulição. Os gráficos abaixo demonstram o aspecto geral das curvas de aquecimento dos materiais puros. Os valores TF e TE são específicos de cada material e podem ser utilizados para identificá-los. Observe os exemplos a seguir.

Material	*TF(C) ao nível do mar*	*TE (C) ao nível do mar*
Oxigênio	*-223,0*	*-183,0*
Etanol	*-114,0*	*78,0*
Acetona	*-95,0*	*56,0*
Mercúrio	*-39,0*	*357,0*
Alumínio	*660,0*	*2519,0*

é importante observar que a temperatura de fusão de um material puro é a mesma de solidificação. Da mesma forma, as temperaturas de ebulição e liquefação são iguais para uma mesmo material puro, dependendo se ocorre aquecimento ou resfriamento do sistema. Observe o gráfico de resfriamento da água apresentado.





Ao analisar o livro didático de Química do primeiro ano percebemos que nas litas de exercícios propostas pelo autor sempre aparece um exercício no qual a sua resolução depende do conhecimento de gráficos de funções, como no exemplo 24.

Exemplo 28 .
Uma amostra de material, inicialmente liquido, foi submetida a resfriamento ao nível do mar. O gráfico da temperatura em função de tempo está representado abaixo.

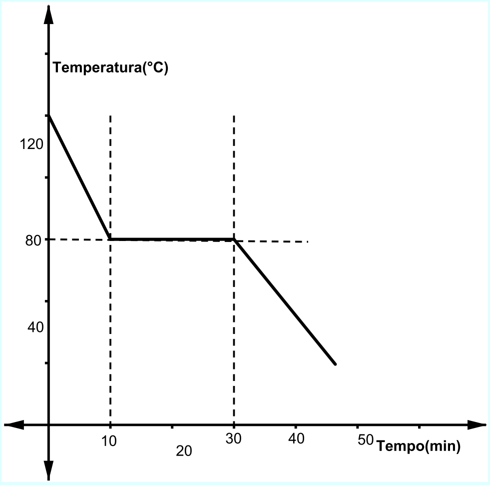


Figura 23 – fonte:

a) *Durante quanto tempo essa amostra permanece só no estado líquido?*

b) *Qual é a sua temperatura de solidificação?*

Resolução:

Para o item a) basta verificar em que intervalo $[x_1, x_2]$ a função é constante e fazer $x_2 - x_1 = 30 - 10 = 20\text{min}$.

Para b) basta verificar o valor da função no intervalo do item a), ou seja 80C.

3.3 Biologia

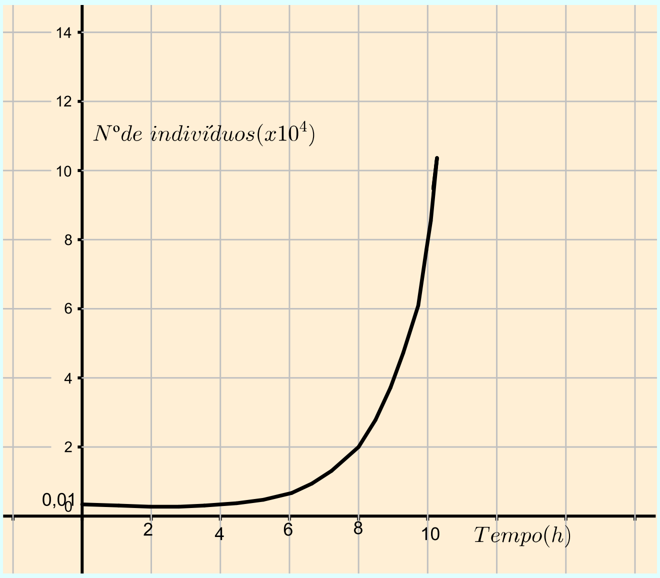
No seu livro de biologia do primeiro(AMABIS; MARTHO, 2013) usa gráficos tanto na apresentação dos conteúdos, como nos exercícios. O que pode ser notado nos exemplos a seguir.

Exemplo 29 .

Crescimento Populacional

Em princípio toda população tem potencial para crescer. Se a mortalidade fosse zero, uma única bactéria, reproduzindo-se a cada 20 minutos, produziria descendência suficiente para cobrir a Terra em apenas 36 horas! Um único paramécio poderia gerar, em apenas alguns dias , uma massa de indivíduos correspondente a 10 mil vezes a massa planetária. Um único casal de pássaros e seus descendentes, chocando de 5 a 6 ovos por ano, produziria 10 milhões de descendentes em 15 anos. Essa capacidade teórica de crescimento de uma população biológica denomina-se ***taxa de crescimento intrínseco****, ou* ***potencial biótico****.*

Gráfico que mostra a taxa de crescimento intrínseco para uma população de microrganismos com índice zero, no período considerado, e que duplica a cada hora. Gráficos com curva semelhante são esperados para qualquer população biológica. Esse tipo de curva é característico de um crescimento em progressão geométrica, em que, a intervalos iguais de tempo, o número de indivúduos da população dobra.



Tempo(h)	NC de indivíduos
0	100
1	200
2	400
3	800
4	1600
5	3200
6	6400
7	12800
8	25600
9	51200
10	102400

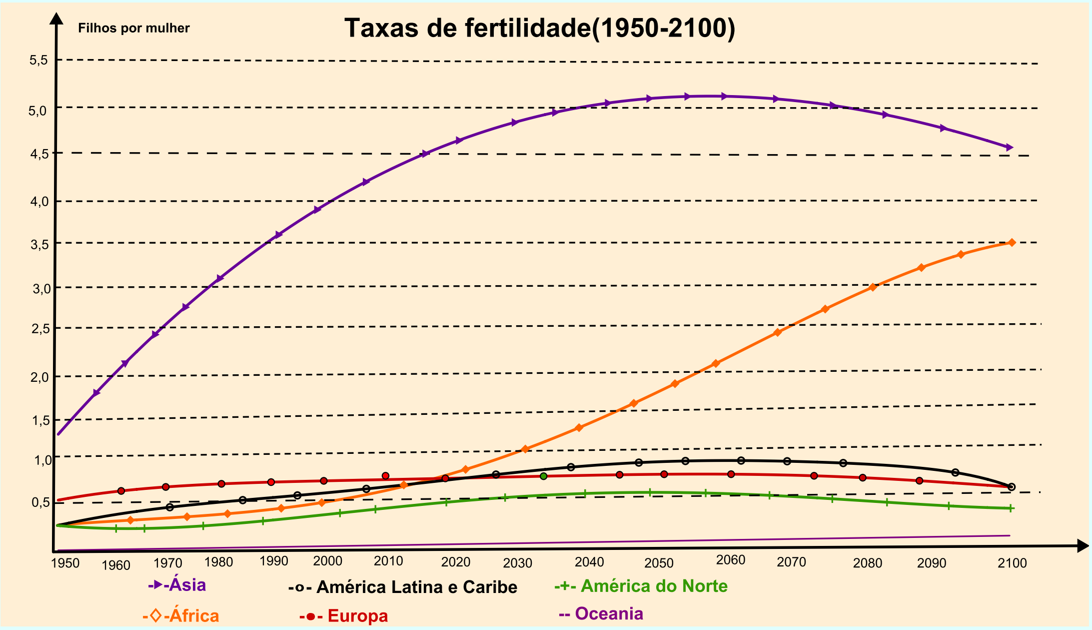
Para abordar o crescimento populacional, o autor faz a construção de um gráfico que representando uma população que duplica com o tempo, exigindo do leitor um conhecimento prévio de como é construído o esboço do gráfico de uma função.

3.4 Ciências Humanas

Nos livros do eixo de Ciências Humanas e Suas Tecnologias, notamos a presença de vários gráficos, cuja interpretação requer o conhecimento do comportamento de funções, como pode ser observado no exemplo seguinte extraído do trabalho (MAGNOLI, 2013).

Exemplo 30 .

Observe o gráfico seguinte, baseado na variante média de projeções demográficas da ONU.



a) *Compare e explique as trajetórias demográficas da Europa e da África.*

b) *Tomando como referência essas trajetórias, explique o conceito de transição demográfica.*

Tanto no item a) como no b), para dar uma resposta coerente aos questionamentos, o aluno precisa ter a habilidade de interpretar os gráficos das funções, observando a tendência de crescimento e decrescimento das mesmas.

Analisando os exemplos dados, podemos concluir que a abordagem geométrica das funções é aplicada para representar o comportamento de determinados fenômenos químicos, físicos, biológicos ou sociais. O uso dessa abordagem se dá como ilustração, quando introduzidos conteúdos e, sobretudo, na forma de exercícios.

4 Metodologia

4.1 Local e Sujeitos da Pesquisa

O Centro de Ensino Médio 02 de Planaltina-CEM-02, Unidade de Ensino-UE em que a pesquisa foi realizada, está localizado em uma cidade satélite do Distrito federal, no setor educacional, regão central da cidade de Planaltina. A UE atende somente alunos do Ensino Médio, em três turnos, sendo que a pesquisa foi realizada no turno da noite.

Participaram da pesquisa professores de Física, Química, Biologia, Geografia e Sociologia. Sendo identificados como professor de Física-(PF), professor de Química-(PQ), professor de Biologia-(PB), professor de Geografia-(PG) e professor de Sociologia-(PS), e os alunos de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio (1^0D) composta por 40 alunos matriculados, os quais chamaremos de (A_d).

Embora a turma seja do ensino médio regular, em sua maioria são alunos que apresentam defasagem de idade/série. Dos 40 alunos matriculados temos 15 alunos assíduos e o restante apresenta um grande número de faltas, de modo que, por aula a média de presentes gira em torno de 24 alunos.

Em um diagnóstico realizado durantes as atividades em sala de aula pôde-se notar que a turma em sua maioria, mostrou-se apática e descrente quanto o aprendizado de Matemática. Porém, os alunos presentes realizam as atividades propostas.

4.2 Coleta de Dados

A coleta de dados se deu em dois momentos, primeiro na aplicação de um questionário direcionado aos professores de outras áreas do conhecimento, com o qual colhemos informações a repeito da abordagem geométrica em Física, Química, Biologia, Geografia e Sociologia.

Em um segundo momento a coleta se deu na aplicação de atividades para os alunos, quando analisamos a postura dos mesmos diante de tais atividades.

4.2.1 Descrição da Coleta de Dados

Os instrumentos de coleta de dados devem fornecer subsídios para que os objetivos da pesquisa sejam contemplados. Aos professores será realizada uma entrevista constando de 10 perguntas pertinentes ao tema abordado. O objetivo de tal entrevista é verificar o quanto o ensino de Matemática, e sobretudo a abordagem geométrica, está presente em outras áreas do conhecimento, servindo como aporte a essas disciplinas.

Aos alunos foram aplicadas atividades com as quais podemos analisar o seu domínio na interpretação de gráficos para a resolução de questões de Matemática e de outras áreas do conhecimento, bem como a receptividade dos mesmos quanto a esse tipo de abordagem.

4.2.2 Cronograma de Aplicações dos Instrumentos de Coleta de Dados

O Quadro 1 expõe o cronograma das atividades a serem desenvolvidas.

Quadro 1-Cronograma de Atividades

Período	**Atividade a ser desenvolvida**
28 e 31 de março/2017	Aplicação do questionário aos professores
Abril /2017	Realização das atividades com os alunos
Maio/2017	Conclusão e finalização da pesquisa

5 Aplicação e Análise dos Dados

5.1 Questionário Aos Professores

Comecemos nossa análise pelas respostas de cada uma das perguntas do questionário aplicado aos professores. As respostas às perguntas do questionário foram dispostas em tabelas, de forma que fosse possível a análise em separado de cada uma.

A pergunta 1 "A quanto tempo o senhor(a) atua como professor", serviu para identificar o tempo de docência dos professores entrevistados. As respostas constam na Tabela 1.

Professor	**Resposta**
PF	2 anos
PQ	3 anos
PB	8 anos
PG	15 anos
PS	3 anos

Tabela 1 – Resposta à pergunta 1

Os professores PF, PQ e PS não são professores que estão a muito tempo em sala de aula, enquanto que PB e PG já se encontram com um tempo a considerar. No entanto, esse fato não prejudica a pesquisa, uma vez que, mesmo o que tem dois anos de sala de aula, já vivenciou as situações possíveis para que tenha percepção quanto ao assunto abordado.

A pergunta 2 "Qual a sua disciplina de atuação"não nos cabe avaliação, uma vez que serviu apenas para indicar a disciplina do professor que respondeu ao questionário.

Vejamos então as respostas a pergunta 3 "Na abordagem de conteúdos de sua disciplina existe a necessidade de conhecimentos matemáticos para a compreensão dos mesmos". Com a qual procuramos identificar a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento. As respostas estão na Tabela 2

Professor	Resposta
PF	"Sem conhecimentos matemáticos não existiria a Física, ela é a Matemática aplicada a fenômenos da natureza. Para explicar e compreender esses fenômenos é preciso ter conhecimento matemático"
PQ	"Sim, esse conhecimento é necessário para a compreensão de conteúdos de Química. O aluno precisa ter conhecimentos matemáticos para ter um bom desempenho na matéria."
PB	"Para estudar Biologia tem que ter conhecimento matemático, conteúdos de biologia requer esse conhecimento."
PG	"Sem dúvida, na Geografia precisamos lhe dar com dados matemáticos, interpretando gráficos, principalmente."
PS	"Não muito, mas há a necessidade em alguns momentos em que o aluno tem que saber fazer a leitura de gráficos e compreender dados estatísticos."

Tabela 2 – Resposta a Pergunta 3

Pelas respostas dadas a pergunta 3 podemos concluir que em umas disciplinas, como era de se esperar, a Matemática se faz mais presente que em outras. Os professores de Física e Química foram mais contundentes em suas respostas, deixando mais evidente a relação entre entre a Matemática e as referidas disciplinas.

No entanto, a Matemática se faz presente em todas as disciplinas pesquisadas, o que requer do aluno conhecimentos matemáticos para a melhor compreensão do que lhe está sendo ensinado.

As respostas a pergunta "Se existe, em que momento"foram organizadas na Tabela 3, e tem como proposito aferir o quanto a Matemática está presente em outras disciplinas.

Professor	Resposta
PF	"Em todo momento, em todos os conteúdos."
PQ	"Não dá para dissociar a Matemática da Química, em todos os momentos
PB	"No primeiro ano ela aparece quando estamos estudando população, onde temos que interpretar gráficos."
PG	"A todo momento temos que interpretar gráficos e tabelas, acho que em quase todos os conteúdos."
PS	"Na análise de dados e gráficos."

Tabela 3 – Resposta à Pergunta 4

As respostas da pergunta 4 vem reforçar e pontuar a nossa análise a respeito da questão anterior. Em algumas disciplinas a Matemática se faz mais presente que em outras. Pelas respostas dos professores PF, PQ e PG o conhecimento matemático é fundamental em qualquer conteúdo que o professor venha ministrar, enquanto que nas duas outras disciplinas se aplica em conteúdos mais pontuais.

Na questão 5 os professores responderam a pergunta "O conhecimento sobre funções é importante em sua disciplina"cujas respostas podem ser conferidas na Tabela 4. A pergunta busca identificar o uso de funções em outras áreas do conhecimento.

Professor	Resposta
PF	"Importante. Os conteúdos de Física, principalmente os do primeiro ano, onde se estuda mecânica, sempre é calculada uma grandeza em função de outra. Na verdade, o tempo todo fazemos aplicações de funções nos conceitos da Física."
PQ	"Na Química fazemos muitas relações entre grandezas, o domínio do conhecimento de funções é importante para fazer essas relações."
PB	"Sim, apesar de não fazermos muitas aplicações, quando fazemos é importante que o aluno tenha esse conhecimento."
PG	"Fenômenos estudados em Geografia sempre são ilustrados com tabelas e gráficos. O conhecimento de função é importante para que o aluno possa interpretar esses fenômenos."
PS	"Sim, na leitura de gráficos esse conhecimento é importante."

Tabela 4 – Resposta à Pergunta 5

Diante das respostas dadas a pergunta 5, fica evidenciada a importância do estudo das funções e do domínio desse conteúdo, por parte dos alunos, em outras áreas do conhecimento. Pode-se abstrair que esse conteúdo tem uma grande contribuição na rotina de estudo do discente, uma vez que está permeado nos conceitos das disciplinas pesquisadas.

A pergunta 6 "O senhor(a) propõe aos alunos atividades que envolve a interpretação de gráfico de funções", consiste em apurar se em outras disciplinas os professores usam funções em suas atividades de sala de aula. As respostas estão dispostas na Tabela 5.

Professor	**Resposta**
PF	"Sempre, as listas de exercícios são recheadas de gráficos de funções."
PQ	"Muitos exercícios que passo ou do livro didático têm gráficos de funções."
PB	"Não muito, mas vários exercícios do livro didático tem gráficos de funções."
PG	"Embora os alunos tenham dificuldades não tem como fugir. Grande parte dos exercícios do livro têm gráficos."
PS	"Não com frequência, de vez em quando aparece um gráfico nas atividades"

Tabela 5 – Resposta à pergunta 6

Os entrevistados propõem atividades que envolve o conhecimento de funções aos seus alunos, percebe-se que os livros didáticos adotados pela unidade de ensino dão essa possibilidade.

A Tabela 6 traz as respostas a pergunta "A abordagem geométrica das funções colabora para a compreensão de conceitos em sua disciplina", com a qual pretendemos constatar a importância e relação dessa abordagem com outras disciplinas.

Professor	Resposta
PF	"É fundamental, em todos os conceitos abordados. Não vejo como dar aula de Física sem o recursos gráficos das funções. Como falar de velocidade escalar, por exemplo, sem apresentar um gráfico."
PQ	"Sem dúvida, um exemplo que pode ser citado é a curva de aquecimento de substâncias e misturas, sem a representação geométrica ficaria complicado para o aluno visualizar os processos."
PB	"Sem dúvida, por vezes temos que recorrer ao gráfico de uma função, que não tem uma regra definida, para explicar um fenômeno."
PG	"Existem fenômenos estudados em Geografia que não possuem um modelo matemático, que possa ser passado ao aluno. Para representar esses fenômenos a melhor opção é a representação geométrica."
PS	"Ajuda sim, os gráficos ilustram bem comportamentos sociais."

Tabela 6 – Resposta à pergunta 7

Constata-se que a abordagem geométrica das funções está presente e participa da concepção de conceitos nas disciplinas pesquisadas. Vale ressaltar as respostas de PB e PG, onde relatam situações em que um fenômeno representado por uma função, cuja regra, não é conveniente que seja passada para o aluno, deve se dar de forma geométrica.

Com a pergunta 8 "Os alunos dominam os conhecimentos da abordagem geométrica das funções", da qual as respostas estão na Tabela 7, procuramos identificar possíveis deficiências que os alunos poderiam apresentar.

Professor	Resposta
PF	"A maioria dos alunos, uns 80%, apresentam dificuldade de interpretar um gráfico, de identificá-lo como função. Talvez ainda não estudaram gráfico de funções, ou não conseguem associar."
PQ	"Eles apresentam dificuldade até mesmo de identificar as grandezas do gráfico,em sua maioria têm dificuldades."
PB	"Não, a maioria apresentam dificuldade."
PG	"Não, acho que eles não conseguem relacionar o gráfico com uma função."
PS	"Não, a maior parte tem dificuldade de fazer leitura de gráficos."

Tabela 7 – Resposta à pergunta 8

Pelas respostas atribuídas a pergunta 8 fica evidente a dificuldade dos alunos em fazer uma atividade, aparentemente fácil, de fazer a leitura de um gráfico. Os alunos não conseguem fazer uma relação de um gráfico e uma função, como responderam PF e PG.

A pergunta 9 tem a intenção de verificar como os professores percebem as dificuldades dos alunos,as respostas constam na Tabela 8.

Professor	Resposta
PF	"Nos exercícios e nas provas, a maioria não sabe o que fazer com o gráfico, ficam perdidos. Não conseguem definir o tipo de função."
PQ	"Quando um exercício tem um gráfico, os alunos, boa parte deles, não consegue abstrair as informações para que possa dar a resposta."
PB	"Na resolução de exercícios que contêm gráficos."
PG	"Muitas vezes é preciso explicar o gráfico para que os alunos consigam responder um exercício. A maioria deles não consegue fazer só."
PS	"Quando tem uma atividade que tem gráfico."

Tabela 8 – Resposta à pergunta 9

A dificuldade dos alunos, que não são todos, é perceptível nas atividades corriqueiras da sala de aula, como se pode notar nas respostas dos professores.

Por fim, os professores reponderam a pergunta 10 , que teve como objetivo averiguar se um trabalho interdisciplinar poderia sanar possíveis dificuldades levantadas pelos professores. As respostas das pergunta "Um trabalho interdisciplinar pode colaborar para sanar as dificuldades percebidas. Como."estão na Tabela 9.

Professor	Resposta
PF	"Sem dúvida, o aluno precisa relacionar os conteúdos de uma disciplina com os da outra. Isso pode ser feito abordando os conteúdos em concomitância"
PQ	"Com certeza iria ajudar, o aluno tem que fazer essa relação com as matérias."
PB	"Contribuíria sim, isso pode se dar com os professores fazendo conexões entre os conteúdos das disciplinas."
PG	"Seria o caminho. Os professores devem construir projetos interdisciplinares nesse sentido."
PS	"Sim, o grupo de professores deve conversar sobre essas dificuldades e montar projetos que possam saná-las."

Tabela 9 – Resposta à pergunta 10

Os professores concordam que um trabalho interdisciplinar pode sanar as dificuldades identificadas. Eles apontam que o desenvolvimento de projetos que possam fazer uma conexão entre as áreas do conhecimento pode contribuir para corrigir tais dificuldades.

5.2 Experência em Sala de Aula

Como apontado pelos professores o trabalho interdisciplinar pode contribuir para desenvolver a habilidade de fazer a leitura de gráficos de funções por parte dos discentes. Segundo os PCN_{+}, isso pode se dar na reunão de um grupo de disciplinas, por meio de um projeto ou, na inviabilidade do projeto, por meio de uma disciplina, onde o professor aborda temas globais dentro de um conteúdo que ele está trabalhando em sala de aula. A saber,

> ...a perspectiva de construir conteúdos educacionais com contexto e de maneira interdisciplinar, envolvendo uma ou mais áreas, não precisa necessariamente de uma reunão de disciplinas, mas pode ser realizada por uma mesma disciplina.(BRASIL, 2002)
>
> Sob essa perspectiva é que vamos desenvolver o trabalho com os alunos.

Diante dos resultados da pesquisa feita com os professores, propomos os alunos atividades que envolve a abordagem geométrica das funções. Primeiro com questões clássicas da Matemática, em que o aluno deve mostrar os conhecimentos de conceitos matemáticos das funções.

Em um segundo momento, questões constantes nos livros didáticos de outras disciplinas, para que o aluno possa fazer a conexo entre o estudo de funções e essas disciplinas, por intermédio da abordagem geométrica.

5.2.1 A Rotina na Sala de Aula

Antes da aplicação das atividades foi passado aos alunos o conceito de função, domínio, contradomínio, imagem, função injetora, função sobrejetora, função bijetora,zeros da função, monotonicidade das funções, composição de funções, inversão de funções, paridade de funções e continuidade de funções. Foram trabalhadas funções quaisquer, sem abordar as famílias de funções.

Em seguida foi trabalhada com os alunos a representação gráfica de funções. Com o objetivo de que o aluno se tornasse capaz de identificar uma função em seu gráfico, de analisar e abstrair as informações contidas nos mesmos. Neste Momento foi apresentado aos alunos a construção do gráfico de uma função, domínio, contradomínio, imagem, zeros da função, função injetora, função sobrejetora, função bijetora, monotonicidade, máximos e mínimos, paridade das funções, taxa de variação média de uma função, função inversa e a continuidade das funções.

5.2.2 Atividade 1

Com essa atividade procuramos avaliar a capacidade do aluno em identificar o gráfico de uma função. Na aula estavam presentes 25 alunos.

1. Analise os gráficos e responda:

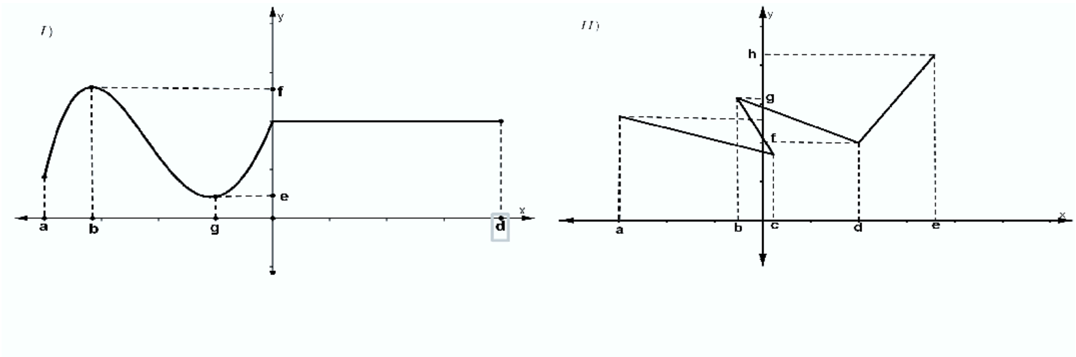


Figura 24 – Representação gráfica de função e não função

a) o gráfico $I)$ representa uma função $f : [a,d] \to \mathbb{R}$? Justifique.

b) o gráfico $II)$ representa uma função $f : [a,e] \to \mathbb{R}$? Justifique.

5.2.2.1 Análise da Atividade 1

22 alunos não apresentaram dificuldade em responder as indagações, apenas 3 alunos ficaram em dúvida. Quado questionados pelo professor "qual o conceito de função"eles conseguiram dar a resposta desejada. 13 alunos deram a resposta correta só visualizando o gráfico, os outros 12 traçaram retas paralelas ao eixo OY.

5.2.3 Atividade 2

A atividade tem o objetivo de avaliar a habilidade dos alunos de fazer a leitura do gráfico de uma função e identificar os aspectos exigidos em cada item da questão. Essa atividade foi apresentada na mesma aula da atividade-1.

1. Sabendo que o gráfico abaixo representa uma função, responda:

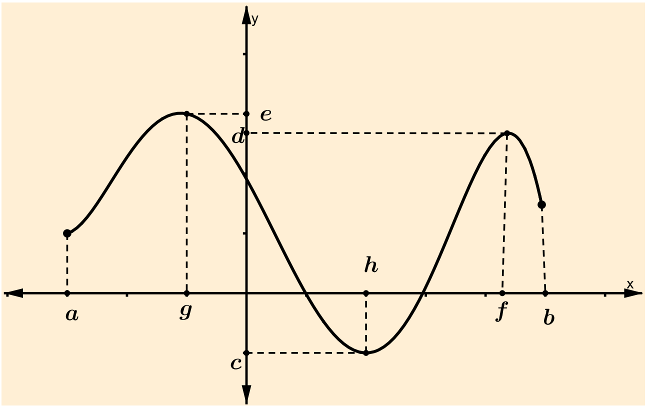


Figura 25 – Função polinomial

a) qual o domínio da função?
b) qual o conjunto imagem da função?
c) em quais intervalos a função é crescente?
d) em quais intervalos a função é decrescente?
e) a função possui zeros(raízes)? Quantos?
f) a função possui um valor máximo?
g) a função possui um um valor mínimo?
h) em que ponto a função possui um valor máximo?
i) em que ponto a função possui um valor mínimo?
j) a função é injetora?
k) a função é sobrejetora?
l) a função é bijetora?

5.2.3.1 Análise da Atividade 2

Nos itens a) , b),c) e d) todos os 25 alunos conseguiram identificar o domínio e a imagem da função, no entanto 11 alunos apresentaram dificuldade em registrar os intervalos.

No item e), 5 alunos questionaram o que seria o zero da função, com a explicação do professor eles conseguiram obter a resposta correta.

Quanto aos itens f), g), h) e i), os alunos não apresentaram maiores dificuldades em dar a resposta, 7 alunos, apesar de terem dado a resposta correta demonstraram insegurança perguntando se a resposta estava correta.

Nos últimos 3 itens 11 alunos apresentaram dificuldade em diferenciar os três conceitos , com o auxilio do professor e dos colegas eles 9 concluíram a atividade e 2 deixaram sem resposta. Para realizar a atividade os alunos traçaram retas paralelas ao eixo OX.

5.2.4 Atividade 3

Na aula em que a atividade foi realizada estavam presentes 23 alunos, dos quais 3 não havia realizado as duas atividades anteriores, por terem faltado a aula.

Os objetivos dessa atividade foram os mesmos da anterior, a intenção foi apresentar diferentes gráficos de funções para o aluno ir se familiarizando com os mesmos.

1. Responda as perguntas, sabendo gráfico abaixo representa uma função.

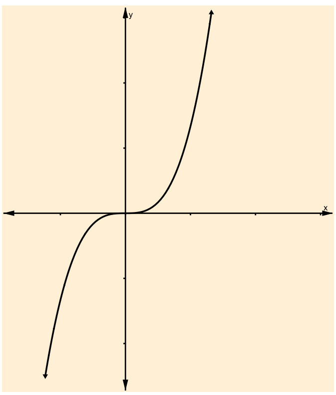


Figura 26 – Gráfico da função $f(x) = x^3$

a) qual o domínio da função?

b) qual a imagem da função?

c) em que intervalos a função é crescente?

d) a função possui um valor máximo? E mínimo?

e) a função é ímpar ou par?

5.2.4.1 Análise da atividade 3

Apenas os 3 alunos que haviam faltado a aula anterior tiveram dificuldades parecidas com as das atividades anteriores. Mas, realizaram a atividade com ajuda do professor.

5.2.5 Atividade 4

A atividade foi realizada na mesma aula da anterior.

A escolha do gráfico da função parte inteira se deu pelas peculiaridades da função, fazendo o aluno refletir sobre o conceito de função constante e função crescente e os zeros da função.

1. O gráfico abaixo representa a função parte inteira $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \lceil x \rceil$, onde x é o menor inteiro maior que x. Analisando seu gráfico, responda:

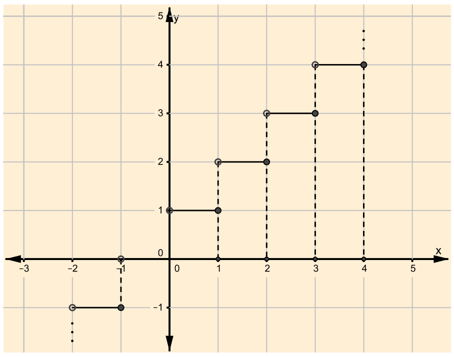


Figura 27 – Gráfico da função $f(x) = \lceil x \rceil$

   a) a função é injetora?

   b) a função é sobrejetora?

   c) a função é bijetora?

   d) quais são os zeros da função?

   e) a função é crescente ou constante?

5.2.5.1 Análise da atividade 4

Os alunos traçaram retas paralelas ao eixoOX e não apresentaram dificuldades em responder aos itens de a) a d).

Quanto aos itens c) e d), como era esperado, os alunos tiveram dúvidas, principalmente no item d).

As atividades a seguir são questões do ENEM, retiradas dos cadernos Ciências Humanas e Suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias, e dos livros didáticos adotados pela UE. As questões foram adaptadas para que fosse possível trabalhar os conhecimentos de funções sem abordar conceitos das outras áreas. O objetivo de tais atividades é o de fazer o aluno perceber a conexão entre funções e essas áreas.

5.2.6 Atividade 5

(ENEM-2016) O aquecimento de uma material por meio de irradiação em micro-ondas ocorre por causa da interação da onda eletromagnética com o dipolo elétrico da molécula. Um importante atributo do aquecimento por micro-ondas é a absorsoção direta de energia pelo material a ser aquecido. Assim esse aquecimento é seletivo, e dependerá, principalmente, da constante dielétrica e da frequência de relaxação do material. O gráfico mostra a taxa de aquecimento de cinco solventes sore aquecimento em micro-ondas.

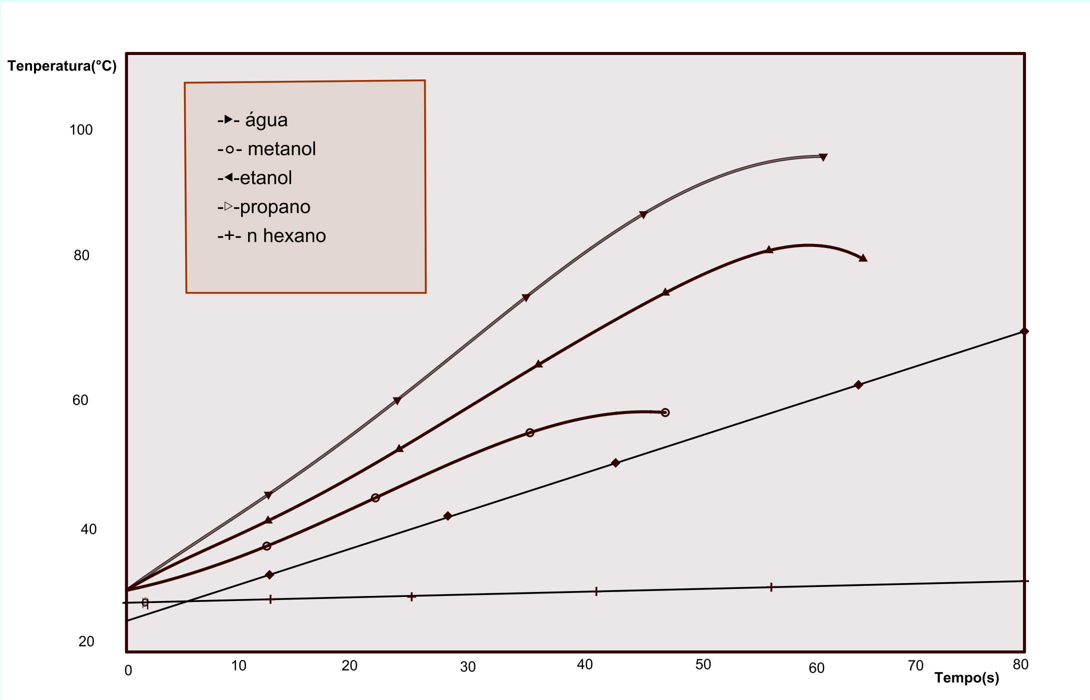


Figura 28 – Questão ENEM-2016 com adaptações

Foi explicado aos alunos que, provavelmente, pelos conhecimentos que eles possuíam sobre fórmulas químicas não era possível eles escolherem a alternativa correta mas, poderiam usar seus conhecimentos sobre funções para descobrir o nome do solvente.

1. Com relação a questão acima, responda:

   a) quais as variáveis do gráfico?

   b) qual a taxa de variação média de cada solvente no intervalo de 0s a 40s?

   c) qual solvente tem a taxa de variação de aquecimento mais próxima de zero?

5.2.6.1 Análise da Atividade 5

Os alunos não apresentaram dificuldades em chegar no nome do solvente e concordaram que se soubessem as fórmulas seria uma questão fácil.

5.2.7 Atividade 6

Com essa atividade tivemos a intenção de mostrar ao aluno que com seus conhecimentos sobre funções seria possível chegar a resposta correta da questão e ainda abstrair conhecimentos de outra disciplina.

(ENEM-2014) O gráfico apresenta a precipitação mensal acumulada no município de São Carlos, SP, ao longo do ano de 2008, contrastando com as médias mensais para o período de 1961 a 1990.

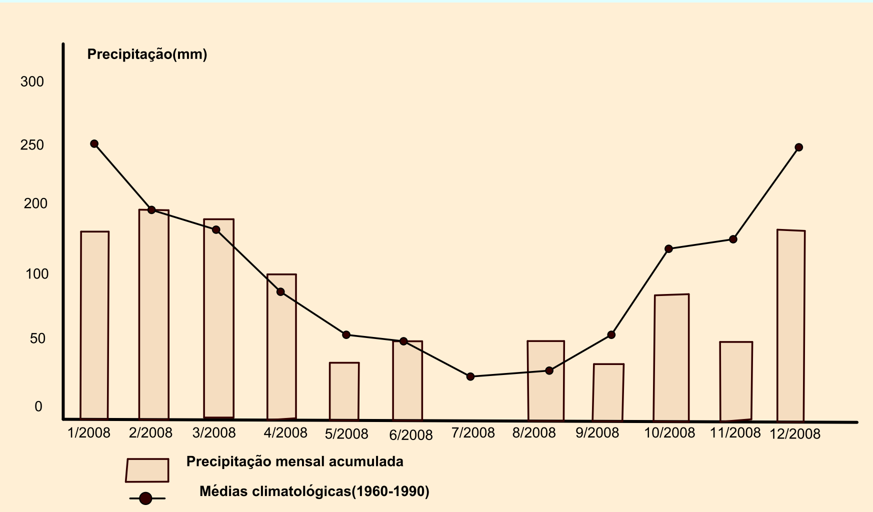


Figura 29 – Ciências Naturais ENEM-2014 com adaptações

Considerando-se que a concentração de poluentes tem se mantido constante desde 1961 e que e que o escoamento pluvial seja a principal fonte de poluição dos rios da região, seria de se esperar que o volume de poluentes nos rios durante a primavera(setembro a dezembro) de 2008 fosse

a) progressivamente menor a cada mês.

b) semelhante a média histórica no verão.

c) acima da média de verão para o mesmo ano.

d) abaixo da mídia de inverno para o mesmo ano.

e) menor que a média histórica para o período.

1. Com relação a questão da Figura 29, responda:

   a) o gráfico representa duas funções, quais?

   b) quais as variáveis do gráfico?

   c) em que intervalos a função das médias climatológicas é crescente?

   d) em que intervalos a função das médias climatológicas é decrescente?

   e) em que meses a precipitação mensal acumulada foi maior que a média climatológica?

   f) em que meses a precipitação mensal acumulada foi menor que a média climatológica?

   g) com a análise feita para responder as perguntas você seria capaz de dar a resposta correta a questão?

5.2.7.1 Análise da atividade 6

Na aula estavam presentes 24 alunos, a principio apenas 5 alunos perceberam que se tratava do gráfico de duas funções e que tinha que comparar os dois gráficos mas, a medida que iam respondendo os itens os outros alunos foram percebendo o fato.

Quanto ao item g), A_7 disse "Eu não sei o que é progressivamente menor". Houve uma discussão na aula e a questão do ENEM, de certo modo, foi respondida de forma coletiva.

5.2.8 Atividade 7

1. Com relação a questão do ENEM-2008, responda:

   a) qual o valor máximo da função? Qual o ano?

   b) qual o valor mínimo da função? Em que ano?

   c) existe algum intervalo em que a função é crescente?

   d) o valor da função em 1992 é maior ou menor que $20000Km^2$?

   e) o valor da função em 1993 é maior uo menor que $20000Km^2$?

   f) e em 1994?

(ENEM-2008) O gráfico abaixo mostra a área desmatada da amazônia, em Km^2, a cada ano, no peróodo de 1988 a 2008.

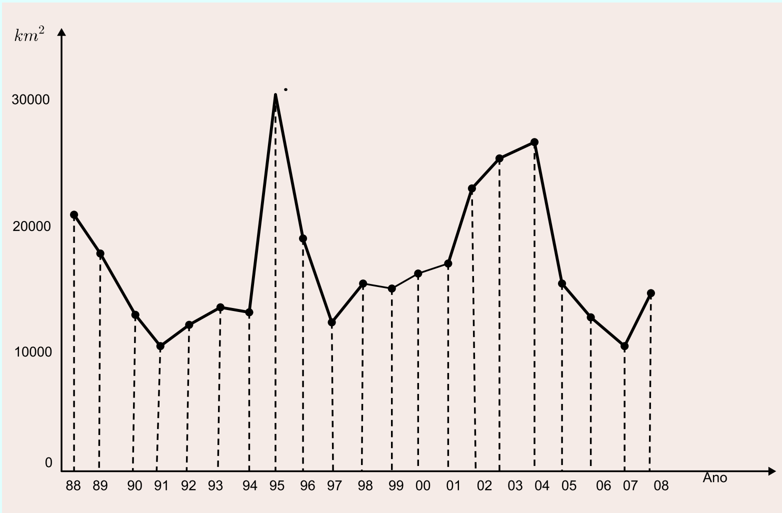


Figura 30 – Questão do ENEM-2008 com adaptações

As informações do gráfico mostram que
a) o maior desmatamento ocorreu em 2004.
b) a área desmatada foi menor em 1997 do que em 2007.
c) a área desmatada em cada ano manteve-se constante entre os anos de 1998 e 2001.
d) a área desmatada por ano foi maior entre 1995 e 1995 do que entre 1997 e 1998.
e) o total de área desmatada em 1992, 1993 e 1994 foi maior que 60000 Km^2.

Para a atividade proposta foi usada uma questão do ENEM-2008 onde procuramos analisar os conhecimentos de máximos e mínimos de uma função e o valor numérico da função em determinados pontos.

5.2.8.1 Análise da Atividade 7

A atividade foi aplicada na mesma aula da anterior e nenhum aluno apresentou dificuldade em dar as respostas corretas aos questionamentos do professor e de encontrar a alternativa certa da questão.

Embora seja uma atividade simples está bem contextualizada.

6 Considerações Finais

Esse trabalho foi desenvolvido na perspectiva de como a abordagem geométrica das funções pode auxiliar na compreensão do conceito de função, das propriedades gerais das mesmas e na relação dessa abordagem com outras áreas do conhecimento. Para tanto, procuramos apresentar exemplos variados de funções sem separá-las nas chamadas classes de funções.

O tratamento formal e com muito simbolismo, próprios da Matemática, são importantes para a construção de teoremas e proposições e, sobretudo, na organização das ideias e registros das mesmas. Entretanto, tal característica formal parece provocar confusões e,consequentemente, falta de interesse pelo assunto por parte do aluno, pelo que temos notado decorrer de 20 anos de sala de aula trabalhando funções no primeiro ano do Ensino Médio.

Ao entrevistar os professores de outras áreas do conhecimento ficou evidente a dificuldade, por parte dos alunos, em lidar com gráficos que representam funções. Também pôde ser notado que em outras áreas esta abordagem se faz presente e é imprescindível que o aluno tenha a capacidade de compreender que um gráfico estudado representa uma função. E mais ainda, que tenha a competência de fazer a leitura do mesmo.

Outro aspecto evidente nas entrevistas foi a necessidade de fazer com que o aluno seja capaz de fazer uma conexão do estudo de funções com estas áreas do conhecimento. Desse modo, a prática de um trabalho interdisciplinar mostrou-se adequado como recurso capaz de sanar as dificuldades percebidas e de fazer o aluno compreender que o estudo das funções está associado ao estudo de outras disciplinas.

Ao aplicar as atividades aos alunos podemos notar que, a principio, eles apresentaram uma certa resistência quanto às questões de outras disciplinas. No entanto, com o decorrer das atividades foi perceptível a sua satisfação em obter êxito na resolução das questões apresentadas.

Quanto a aplicação das atividades que tratavam somente dos conceitos matemáticos, a abordagem geométrica mostrou-se eficiente, proporcionando aos alunos a assimilação destes. Mesmo aqueles alunos que apresentavam dificuldades em compreender os conceitos formais mostraram-se capazes de aplicá-los, quando tratados geometricamente.

A abordagem geométrica das funções já vem sendo aplicada em diversas situações, principalmente, quando se trata do ensino de funções. Entretanto, a medida que lhe foi dada uma ênfase maior, associando-a com outras áreas do conhecimento, notamos que foi rompida a barreira que se forma quando o aluno cria aversão por uma determinada disciplina, sobretudo pelo aluno que apresenta pouca habilidade para lidar com a Matemática.

Assim, concluímos que a abordagem geométrica das funções torna o conteúdo mais palpável, favorecendo tanto no estudo da Matemática quanto de outas disciplinas. Por meio dela, o aluno consegue visualizar e compreender fenômenos, que se representados por meio de um texto ou de forma algébrica, ele não compreenderia.

Referências

AMABIS, J. M.; MARTHO, G. R. Biologia em contexto. *Do universo às células*, 2013. Citado na página 50.

ANTUNES, M. T. et al. Ser protagonista: química. *Edições SM Ltda,São Paulo*, 2013. Citado na página 48.

ÁVILA, G. *Introdução ao cálculo*. [S.l.: s.n.], 2010. v. 3. Citado na página 16.

ÁVILA, G. O ensino de matemática. *Revista do Professor de Matemática*, 2010. Citado na página 14.

BRASIL. *Parâmetros Currículares Nacionais Para o Ensino Médio*. MEC, 2000. Disponível em: <http://http://portal.mec.gov.br/acompanhamento-da-frequeencia-escolar/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Citado na página 15.

BRASIL. Parâmetros currículares nacionais para o ensino médio mais. MEC, 2002. Disponível em: <http://http://http://portal.mec.gov.br/acompanhamento-da-frequeencia-escolar/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Citado na página 61.

CARVALHO, F. Craveiro de. Entrevista com elon lages lima. *Gazeta de Matemática*, v. 140, p. 05, 2001. Citado na página 6.

DOCLUS, R. C. Cálculo do 2 grau. *Revista do Professor de Matemática*, 2000. Citado na página 15.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992. v. 1. Citado na página 16.

MAGNOLI, D. Geografia para o ensino médio: meio natural e espac0 geogafico. *São Paulo: Saraival*, 2013. Citado na página 52.

NETO, A. C. M.; CAMINHA, A. Fundamentos de cálculo. *Editora SBM, coleção PROFMAT, 1a edição*, 2015. Citado na página 16.

SBM. Contribuição da sbm para a discussão sobre currículo de matemática. SBM, 2015. Disponível em: <http://http://www.sbm.org.br/noticias/contribuicao-da-sbm-para-a-discussao-sobre-curriculo-de-matematical>. Citado na página 15.

TORRES, C. M. et al. livro física ciência e tecnologia. *Editora Moderna*, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 9, 46 e 47.

ANEXO A – Questionário Aos Professores

Este questionário faz parte da minha pesquisa para construção da dissertação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins- Câmpus Arraias, que tem como Título a "Abordagem Geométrica das Funções Numa Perspectiva Matemática e Interdisciplinar".

NOME____

1. A quanto tempo o senhor(a) atua como professor?________________________
2. Qual sua disciplina de atuação?____________________________________
3. Na abordagem dos conteúdos existe a necessidade de conhecimentos matemáticos para compreensão dos mesmos por parte dos alunos?________________________
4. Se existe, em que momentos?______________________________________
5. O conhecimento sobre funções é importante em sua disciplina?________________
6. A abordagem geométrica das funções colabora para a compreensão de conceitos em sua disciplina?____
7. Os alunos dominam os conhecimentos da abordagem geométrica das funções?_______
8. Se não dominam, como isso pôde ser percebido?__________________________
9. O senhor(a) propõe aos alunos atividades que envolve a interpretação de gráficos de funções?____
10. Um trabalho interdisciplinar pode contribuir para sanar as dificuldades percebidas? Como?