

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ANTONIO HIDERALDO MEDEIROS DO CARMO

TÓPICOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO  
EXEMPLIFICADORES E MOTIVADORES PARA A  
APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NAS ESCOLAS DE LAGO DO  
JUNCO (MA)

SÃO LUÍS - MA

2017

ANTONIO HIDERALDO MEDEIROS DO CARMO

TÓPICOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO EXEMPLIFICADORES E  
MOTIVADORES PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NAS ESCOLAS DE  
LAGO DO JUNCO (MA)

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva

São Luís - MA

2017

Carmo, Antonio Hideraldo Medeiros do.

Tópicos da História da Matemática como Exemplificadores e Motivadores para a Aprendizagem Matemática nas Escolas de Lago do Junco (MA)  
/ Antonio Hideraldo Medeiros do Carmo - 2017.

58 p.

Orientador(a): Giovane Ferreira Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís (MA), 2017.

1. História. 2. Matemática. 3. Metodologia. 4. Motivação. I. Silva, Giovane Ferreira. II. Título.

ANTONIO HIDERALDO MEDEIROS DO CARMO

TÓPICOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO EXEMPLIFICADORES E  
MOTIVADORES PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NAS ESCOLAS DE  
LAGO DO JUNCO (MA)

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 11 de outubro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva** - Orientador

UFMA

---

**Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo**

UFMA

---

**Profa. Dra. Vanessa Ribeiro Ramos**

UFMA

São Luís - MA

2017

Dedico este trabalho especialmente aos meus pais, Geraldo Rodrigues do Carmo e Maria Daura Alexandre de Medeiros do Carmo, que sempre me incentivaram a continuar estudando apesar das inúmeras dificuldades encontradas.

# Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus por ter me concedido sabedoria e força necessária para vencer todos os obstáculos e chegar a esse resultado final.

Aos meus pais, Geraldo e Daura pelo dom da vida, apoio e por me ensinarem a ser forte sempre.

Aos meus irmãos Hidenaldo e Hidenária que me ajudaram e torceram muito por mim.

À minha noiva, que com paciência soube entender e me ajudar em muitos momentos.

Aos demais familiares pela força e apoio nessa etapa da vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva, pela confiança, paciência e apoio na elaboração desta dissertação.

Às professoras Valdiane e Vanessa, membras da banca examinadora, pelas sugestões e correções.

Aos alunos do Centro de Ensino José Malaquias - Lago do Junco (MA), que se dedicaram na realização das atividades e nas exposições dos trabalhos.

Aos colegas de trabalho dos Centros de Ensino José Malaquias e Hosano Gomes Ferreira II - Lago dos Rodrigues (MA), pelo apoio e incentivo.

Aos amigos do PROFMAT, que juntos superamos dificuldades, ganhamos conhecimento e formamos uma família.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À Universidade Federal do Maranhão (UFMA) pela coordenação e oportunidade.

Aos meus colegas e amigos que nunca deixaram o desânimo tomar conta de mim, sempre incentivando e torcendo pelo meu sucesso.

Muito obrigado a todos!

*“Sem estudo não se pode ter ideal, senão fanatismo. O entusiasmo vidente dos homens que pensam não se confunde com a exaltada cegueira dos ignorantes”.*

Fundação ABC - São Paulo.

# Resumo

Este trabalho procurou fornecer ao público interessado no assunto, os elementos que permitam fazê-los refletir, e posteriormente decidir, de forma clara e segura, acerca da aplicação da História da Matemática como metodologia de ensino para a melhoria qualitativa da aprendizagem matemática, bem como a sua utilização para exemplificar sua aplicabilidade como ciência e estimular a motivação no processo de ensino e aprendizagem. A ligação entre a Matemática e a sua história permitiu a elaboração, organização, acompanhamento e análise de resultados por meio da aplicação de atividades e seminários. A questão orientadora era responder: “Quais os benefícios da História da Matemática nas aulas de matemática para a aprendizagem?”. Nessa pesquisa qualitativa foi utilizada a pesquisa-ação e realizada no Centro de Ensino José Malaquias - Ensino Médio, com alunos regularmente matriculados do terceiro ano do período matutino. A análise das informações obtidas permitiu verificar que a utilização de episódios históricos matemáticos, apresentados e descritos conforme indicados neste trabalho, apresentaram novas possibilidades de motivação, de exemplificação da importância desta ciência e de situações reais que visam a interação e a socialização do conhecimento entre os discentes. Os resultados indicaram um elo motivacional entre o ensino de matemática e sua história, facilitando o entendimento da importância desta ciência para sociedade atual, o que contribuiu para a compreensão de novos conteúdos e da melhoria na qualidade da aprendizagem.

Palavras-chave: Matemática. História da Matemática. Metodologia. Motivação.



# Abstract

This work sought to provide the public interested in the subject, the elements that allow them to reflect and to decide, in a clear and safe way, about the application of the History of the Mathematics as teaching methodology for the qualitative improvement of mathematical learning. As well as its use to exemplify its applicability as a science and to stimulate the motivation in the teaching and learning process. The connection between Mathematics and its history allowed the elaboration, organization, monitoring and analysis of results through the application of activities and seminars. The guiding question was to answer: “What are the benefits of the History of Mathematics in the math lessons for learning?”. In this qualitative research, the action research what was carried out at the José Malaquias High School, with students enrolled in the third grade of the morning period. The analysis of the information obtained allowed to verify that the use of historical mathematical episodes, presented and described as indicated in this work, presented new possibilities of motivation, of exemplification of the importance of this science and real situations that aim at the interaction and the socialization of knowledge among the students. The results indicated a motivational link between the teaching of mathematics and its history, facilitating the understanding of the importance of this science to current society, which contributed to the understanding of new contents and the improvement in the quality of learning.

Keywords: Mathematics. History of Mathematics. Methodology. Motivation.

# Lista de Figuras

3.1	Figura 1 . . . . .	17
3.2	Figura 2 . . . . .	21
3.3	Figura 3 . . . . .	21
3.4	Figura 4 . . . . .	22
3.5	Figura 5 . . . . .	23
3.6	Figura 6 . . . . .	24
4.1	Premiação OBMEP - Material Didático . . . . .	41
4.2	Primeira Atividade . . . . .	42
4.3	Seminário - Gauss . . . . .	45
4.4	Seminário - Pitágoras . . . . .	46
4.5	Seminário - Pitágoras . . . . .	46
4.6	Seminário - Descartes. . . . .	46
4.7	Seminário - Símbolos Matemáticos . . . . .	47
4.8	Seminário - O Zero . . . . .	48
4.9	Seminário - Fermat . . . . .	48
4.10	Seminário - Maria Gaetana Agnesi . . . . .	49
4.11	Seminário - Newton $\times$ Leibniz . . . . .	50
4.12	Ilustração - Desafio . . . . .	50
4.13	Seminário - Pascal . . . . .	50
4.14	Biografia . . . . .	50
4.15	Triângulo Aritmético . . . . .	51
4.16	A Pascalina . . . . .	51
4.17	Seminário - Sophie Germain . . . . .	51
4.18	Primo de Germain . . . . .	51
4.19	Seminário - Souzainha . . . . .	52

4.20 Tese de Doutorado . . . . .	52
4.21 Souzinha - Cauchy . . . . .	52
4.22 Biênio da Matemática . . . . .	52

# Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 A História da Matemática Como Metodologia de Ensino</b>	<b>7</b>
<b>3 Um Pouco de História nas Aulas de Matemática</b>	<b>16</b>
3.1 O número $\pi$ . . . . .	17
3.2 Geometria e o túnel da ilha de Samos . . . . .	20
3.3 Uma equação de Euler utilizada por Steinmetz . . . . .	25
3.4 O príncipe Gauss . . . . .	25
3.5 Quem foi Agnesi? . . . . .	30
3.6 Joaquim Gomes de Souza - O Souzinha . . . . .	32
3.7 Símbolos e notações matemáticas - breve histórico e curiosidades . . . . .	35
3.7.1 Símbolos e operações . . . . .	36
<b>4 Experiência, Observação e Análise</b>	<b>40</b>
4.1 Alunos do Centro de Ensino José Malaquias - Lago do Junco (MA) - Seminários . . . . .	44
4.1.1 Gauss . . . . .	45
4.1.2 Pitágoras: Mistérios e Contribuições . . . . .	45
4.1.3 Descartes . . . . .	46

	xiii
4.1.4	Símbolos Matemáticos - Breve Histórico . . . . . 47
4.1.5	O Zero . . . . . 47
4.1.6	Fermat . . . . . 48
4.1.7	Maria Gaetana Agnesi . . . . . 48
4.1.8	Newton $\times$ Leibniz . . . . . 49
4.1.9	Pascal . . . . . 50
4.1.10	Sophie Germain . . . . . 51
4.1.11	“Souzinha”, O Maior Matemático da História do Brasil . . . . . 51
4.2	Qualificação dos resultados . . . . . 53
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b> . . . . . <b>54</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . . <b>57</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O ensino de Matemática nas escolas é muito discutido e até criticado, tendo em vista o rendimento dos alunos nessa disciplina em contraste com a importância que a mesma ocupa na sociedade atual.

Em todos os níveis de ensino verificamos uma insatisfação quanto ao desenvolvimento dos alunos, principalmente em Matemática. Esta preocupação com o ensino da Matemática não é nova. Muitas reformas aconteceram e vêm acontecendo, visando a adequação do trabalho escolar às demandas sociais, sejam elas locais ou globais.

Reformulações curriculares e novas propostas pedagógicas se fazem presentes nos meios escolares, e os responsáveis pelo ensino têm se mostrado sensíveis a elas. Mas sua aplicação encontra várias dificuldades, além das habituais resistências à mudança.

Lima (2007) entende que com a evolução da sociedade e o desenvolvimento da própria Matemática existe a necessidade de aperfeiçoar e capacitar os professores, buscando adaptar o ensino às condições atuais, a fim de uma melhor preparação para gerações futuras.

Dessa forma, os educadores matemáticos diante da complexidade desta ciência e dos resultados demonstrados pelos discentes precisam buscar novas metodologias para melhoria da qualidade do ensino de matemática, sendo a História da Matemática uma alternativa.

Uma razão é social: a escola não pode se distanciar da vida do aluno e o bom ensino de matemática é imprescindível para isso, uma vez que a vida em sociedade está inteiramente relacionada à aplicação de conhecimentos matemáticos e a sua evolução histórica como ciência. Outra razão é pedagógica: episódios de História da Matemática

auxiliam na aprendizagem e estimulam a motivação em aprender matemática.

Para Develay,

[...] aprender uma disciplina é encontrar seu sentido. É chegar a entender quais as questões que ela propõe a respeito do mundo, os seus métodos e teorias e como essa disciplina ajuda o ser humano a se compreender mais e compreender melhor o seu meio. (DEVELAY, 1996, p.10)

A Matemática juntamente com outras áreas do conhecimento auxilia a sociedade a pensar sobre a vida, olhando para o passado para entender o presente e direcionar o futuro. O domínio dessa ciência é fundamental para os padrões atuais, pois através do conhecimento matemático o homem potencializa, quantifica e transforma o mundo.

Na tentativa constante pela melhoria da educação matemática, existe a busca por eficientes metodologias de ensino que garantam a aprendizagem dos nossos discentes. Para isso, professores devem constantemente refletir sobre a sua prática docente, procurando soluções metodológicas com o intuito de direcionar seus alunos ao caminho da aprendizagem.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a democratização do ensino da Matemática deve ser o principal objetivo do trabalho docente, pois ela (a Matemática) deve estar ao alcance de todos. O aluno deve se servir do conhecimento em Matemática para compreender e transformar sua realidade. Para tanto, a atividade matemática escolar não deve ser “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas para a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno.

Historicamente, a partir do início do século XX, o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido mediante repetição, pela aplicação de testes: se ele repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia. Nessa época, o currículo ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria. É bem verdade que alguns desses alunos chegavam a compreender o que faziam. Conseguiram “pensar” sobre o que trabalhavam e isso os faziam especiais. A maioria, contudo, se esquecia do que havia memorizado

em pouco tempo. Além disso, havia uma grande seleção de matrículas para alunos, pois nem todos podiam ir para as escolas, que eram poucas.

Anos mais tarde, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender matemática com compreensão. Dessa forma, as tabuadas e seus treinos eram condenados. O aluno devia “entender” o que fazia. Mas, o professor falava, o aluno escutava e repetia, não participava da construção de seu conhecimento. O professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as ideias novas que queriam implementar. O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para atender algum conteúdo novo.

Entre 1960 e 1970, o ensino de matemática no Brasil e em outros países foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Esta reforma também deixava de lado as reformas anteriores, além de apresentar uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem sistemática universal, concisa e precisa. Entretanto, esta prática acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado.

Muitos questionavam se essa reforma estaria realmente voltada para a formação de um cidadão consciente, útil à sociedade em que vivia ou ainda se buscava verdadeiramente ensinar matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exigia mais conhecimento matemático. Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com a formalização distanciando-se das questões práticas.

A partir de 1980, o ensino de Matemática teve outro rumo e a resolução de problemas passou a ter destaque no trabalho em sala de aula. A publicação do NCTM - National Council of Teachers of Mathematics - *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*, dizia que resolver problemas deveria ser o foco da matemática escolar para os anos 80 e destacava que a Resolução de Problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas.

Em 1998, o Ministério da Educação entregou aos professores brasileiros os Parâmetros Curriculares Nacionais. Os PCNs foram elaborados com o objetivo de propor diretrizes e conteúdos que assegurem um padrão de qualidade aceitável para o ensino nas



escolas brasileiras, o que também influenciou no ensino da Matemática.

Recentemente, o Congresso Nacional por meio da lei ordinária 13.358/2016 instituiu os anos de 2017 e 2018 como o Biênio da Matemática Joaquim Gomes de Souza, no Brasil. Assim, durante esses dois anos, os eventos mais importantes do mundo da Matemática acontecerão aqui, objetivando colocar a matemática, a ciência e a tecnologia no foco da comunicação. Nesse período, o país sediou pela primeira vez a Olimpíada Internacional da Matemática (IMO 2017) e sediará o Congresso Internacional de Matemáticos (ICM 2018), o mais importante evento do mundo voltado à disciplina. Particularmente para o Maranhão, o Biênio da Matemática tem um significado especial, por ter como patrono o matemático maranhense Joaquim Gomes de Souza (Itapecuru-Mirim-MA (1829) - Londres (1864)), mais conhecido como Souzainha. O Biênio da Matemática constitui um movimento em prol da educação com o propósito de criar, produzir e trazer para o país múltiplas experiências, gerando novas descobertas e estimulando o aprendizado da Matemática de forma geral.

Como base no histórico e nas novas perspectivas educacionais, urge, então, reverter o quadro do ensino centrado em algoritmos, incompreensível para o aluno, para um ensino calcado em significados. Faz-se necessário um ensino baseado na participação ativa dos alunos, na capacidade desse aluno resolver problemas e no rompimento da prática que apenas enfatiza a linguagem formal.

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.3), “saber a história de uma ideia pode levar a um entendimento mais profundo, para nós e para nossos estudantes”.

Com o acentuado desenvolvimento da sociedade, ocupam lugar central a informação e o conhecimento. Transformações atingem em cheio as escolas e o trabalho dos pedagogos e professores, suscitando mudanças no seu papel. Não somente com a introdução de novas metodologias em sala de aula, mas diante de qualquer recurso didático, é necessário repensar a dinâmica em sala de aula bem como o papel do professor.

Nas situações escolares, muitas são as possibilidades de trabalho tendo como metodologia o uso de episódios históricos da Matemática.

Roque e Carvalho (2012) entendem que o progresso da Matemática está intrinsecamente ligado aos problemas históricos. Sendo um dos objetivos da História da Matemática apresentar esses problemas, muitas vezes escondidos no modo em que os resultados foram formalizados. Além de utilizar a História da Matemática como instrumento de motivação

para a aprendizagem, é possível refletir e tomar partido de como tais problemas surgiram e foram solucionados.

A História da Matemática, em especial, servirá como peça fundamental na construção do conhecimento matemático, como instrumento de descoberta, de formação de conceitos e principalmente de estímulo motivacional para o processo de aprendizagem dos alunos em Matemática. Além disso, fortalece o trabalho em equipe e de pesquisa, proporcionando saberes da importância dessa ciência, das suas aplicações e das inúmeras contribuições que gerações e gerações de matemáticos deixaram na construção de um mundo moderno e tecnológico.

A História da Matemática como metodologia de ensino aliada a uma proposta pedagógica bem executada pelo professor, mostrará, dentre outras coisas, a origem de muitos conceitos matemáticos que são imprescindíveis para a aprendizagem e que estabelecerão conexões necessárias na demonstração da importância da Matemática e do porquê estudá-la.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa,

Para aprender bem matemática em qualquer nível, é preciso entender as questões relevantes antes que você possa esperar que as respostas façam sentido. Entender uma questão, muitas vezes, depende de saber a história da ideia. De onde veio? Por que é ou era importante? Quem queria a resposta e por que a queria? Cada etapa no desenvolvimento da Matemática é construída com base naquilo que veio antes. Cada pessoa que contribui é alguém com um passado e um ponto de vista. Como e por que pensaram no que faziam muitas vezes são um ingrediente crítico para se entender sua contribuição. (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p.1)

Muitos estudantes têm uma curiosidade natural sobre de onde vieram as coisas. Com o auxílio da História da Matemática, essa curiosidade pode levá-los a entender os processos matemáticos que eles precisam conhecer. Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.1) salientam que: “aprender sobre matemática é como começar a conhecer outra pessoa. Quanto mais você sabe de seu passado, melhor pode entendê-la e interagir com ela, agora e no futuro”.

Tomando como ponto de partida um contexto histórico motivador ou concreto, tornamos o ensino de matemática: dinâmico, mais próximo dos anseios dos estudantes,

longe das abstrações e dos factóides que passam a errônea impressão de que a Matemática é difícil e pra poucos.

Vale ressaltar que, o mundo se desenvolveu e continua a se desenvolver no mesmo passo em que a ciência e a Matemática se desenvolvem. O papel da História da Matemática é exibir este desenvolvimento, muitas vezes oculto entre formalizações no ensino de matemática nas salas de aulas.

Segundo Ávila,

Desde os primórdios da civilização, o homem, como “ser pensante”, sempre quis entender o mundo em que vive. Será que a Terra é plana? Como se suporta? Como são seus limites últimos? A abóboda celeste é uma fronteira última, com as estrelas nela incrustadas? E o que são essas estrelas? Por que e como alguns corpos celestes - os planetas - se deslocam erraticamente? O que existe para além dessa abóboda? Como explicar os movimentos do Sol e da Lua? A matéria é indefinidamente divisível ou constituída de “átomos” indivisíveis? Ou cada tipo de matéria é formada de alguns elementos básicos, como terra, água, fogo e ar?. (ÁVILA, 2010, p.6)

Muitas perguntas sobre a utilidade e importância da Matemática na vida do aluno são feitas frequentemente nas salas de aulas. E a própria evolução histórica dessa ciência é resposta pra muitas delas.

Inserir a História da Matemática como metodologia de ensino é dar sentido a muitos conhecimentos matemáticos que os alunos consideram como abstratos, difíceis e longe do cotidiano. Sua prática em sala de aula faz com que os alunos compreendam e conectem-se a uma rede de significados e de relações com outras ideias que podem ser matemáticas ou não.

Dessa forma, fazer o uso adequado de episódios da história da matemática nas escolas é de grande importância para o ensino da Matemática, sendo um elo facilitador no processo de ensino e aprendizagem.

Considerando estes aspectos, pretende-se neste trabalho mostrar a importância da História da Matemática como metodologia de ensino, fator exemplificador da aplicação matemática e elemento motivacional no caminho qualitativo da aprendizagem.

## Capítulo 2

# A História da Matemática Como Metodologia de Ensino

Acompanhamos na sociedade brasileira uma série de transformações de caráter econômico, político e social. A escola, em sua função social, também vem sofrendo exigências e transformações a fim de acompanhar o dinamismo e a evolução tecnológica cada vez mais predominante, que atinge não só o Brasil, mas o mundo. Tanto é que se fez necessária, recentemente, a criação de um novo ensino médio para atender aos novos anseios da sociedade brasileira. Vale ressaltar que a educação no Brasil vem apresentando ligeira melhora em seus índices educacionais, mas apesar dos vários esforços e investimentos nesse sentido, ainda estamos distantes dos patamares ideais. Um dos fatores preocupantes e que contribui para estes números, não tão satisfatórios, é o ensino de Matemática.

Lima (2007) enfatiza que,

É de conhecimento geral a onda que se iniciou na década de 60, chamada “Matemática Moderna”. Motivada pelo justificado desejo de se adaptar o ensino da Matemática aos padrões utilizados pelos matemáticos do século 20 (ou pelo menos por um grande número deles), foi proposta uma reformulação radical dos currículos, com ênfase nos métodos abstratos e gerais. As consequências desse movimento em nosso país foram desastrosas, em que pese o fato de que algumas das práticas propostas eram realmente aconselháveis. [...] Nossa imitação da Matemática Moderna resultou em abandono da Geometria e dos cálculos numéricos, substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudo-formalismo vazio e desligado da realidade. (LIMA, 2007, p.149 - 150)

Isto explica um pouco, o fracasso dos alunos em Matemática ao longo desse período, pois na maioria das vezes os conteúdos desta disciplina são tratados como desvinculados de qualquer realidade. Não se percebe a importância de se ter um processo de ensino centrado em significados para o aluno em que ele é o sujeito de sua aprendizagem. A escola deve ser um espaço de formação e informação, em que a aprendizagem de conteúdos deve necessariamente favorecer a formação de um aluno capaz de se inserir e agir na sociedade.

Segundo Lima,

Não é fácil mudar a mentalidade dos professores habituados a esse tipo de atitude, nem provê-los do conhecimento necessário para que possam orientar suas aulas num sentido mais objetivo e condizente com a importância da Matemática na vida moderna. (LIMA, 2007, p.150)

Aprender e ensinar, especialmente matemática, deve significar construir e interagir. Não é a aprendizagem matemática que deve se ajustar ao ensino, mas sim o ensino que deve potencializar a aprendizagem matemática.

Muitos são os casos em que o ensino de Matemática apresenta um desempenho inferior ao das demais disciplinas do currículo normal da educação básica. Por isso, é necessário reverter esse ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno, pois é possível identificar certo consenso sobre o fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, permitindo resolver problemas da vida cotidiana, auxiliando no mundo do trabalho e funcionando como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas da atividade humana.

Neto (2006, p.7) destaca que, “a Matemática foi criada e vem sendo desenvolvida pelo homem em função de necessidades sociais”.

No que se refere à Matemática, a impressão que dá é que tudo já foi criado e estabelecido como num passe de mágica. Infelizmente, vários fatores apontam pra isso, como a falta de: uma melhor preparação por parte dos professores, recursos materiais e tecnológicos, uma grade curricular com enfoque na história das ciências, contextualização e aplicação dos conteúdos.

Para Lima (2007, p.147), “a Matemática tem sido comparada a um jogo, como o xadrez, no qual, mediante a utilização de regras fixas, parte-se de uma posição inicial para chegar a conclusões determinadas”.

Na verdade, a Matemática é muito mais que isso. Os conhecimentos matemáticos não surgiram prontos, acabados ou sistematizados com teorias e teoremas de aplicações imediatas, mas através de assimilações de conhecimentos passados de geração a geração, na necessidade imediata ou não de resolver problemas concretos ou abstrações de caráter matemático. Ao longo do tempo, a necessidade e a curiosidade de resolver estas situações-problemas foram preponderantes para o desenvolvimento desta ciência.

Miguel e Miorim (2011) apontam para a importância da história no processo de aprendizagem de matemática e como um estímulo à não-alienação do seu ensino. Para eles “a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno, não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido” (p.52), levando erroneamente os estudantes a perceberem essa ciência como uma coleção arbitrária de objetos sem conexão e sentido.

A História nas aulas de matemática freia o uso constante de teorias, teoremas, cálculos e mais cálculos que tornam as aulas, muitas das vezes, enfadonhas, entediantes ou desconectadas daquilo que o aluno espera da Matemática. Uma abordagem histórica aliada à eterna e inerente curiosidade dos discentes facilita a significação, a identidade e o interesse em aprender matemática, encontrando assim o equilíbrio necessário para uma boa aula. Ao passo que, conhecendo os aspectos históricos que a matemática nos oferece, a percebemos como parte de uma herança cultural importantíssima e conectada com diversas áreas do conhecimento.

Pereira (2002) entende que a História da Matemática ameniza esse status de disciplina exata que a Matemática possui, mostrando que os conteúdos estão a se desenvolver e podem vir acrescidos de novos elementos, o que pode contribuir para a formação de alunos críticos em relação à construção do conhecimento humano, conscientes das condicionantes sociais e históricas para a evolução desses conteúdos.

Desta forma, a História da Matemática deve ser desenvolvida como estratégia de abordagem, exemplificação e motivação para o ensino de conteúdos matemáticos, reiterando assim, sua importância para o reconhecimento da Matemática como elemento cultural.

Neto destaca que,

É muito comum escutarmos em sala de aula o aluno perguntar: “De onde veio isso?”. Conhecer a história da disciplina que está sendo estudada resolve essa importante questão. Mas estudar não só as descobertas, curiosidades, datas e biografias. É preciso conhecer a gênese, o desenvolvimento e a significação do conhecimento. É preciso caracterizar o que é o conhecimento, como ele se forma e como é instrumento de poder. E isso é muito importante também para o professor. (NETO, 2006, p.7)

Diante disso, propõe-se o ensino de tópicos da História da Matemática como elo de estímulo à motivação dos discentes ao processo de aprendizagem matemática. Tendo, esses tópicos, um papel importantíssimo na contextualização e aplicação dos conteúdos matemáticos, despertando no aluno o interesse geral, através do conhecimento do passado.

Nos últimos anos, a História da Matemática vem ganhando status relevante na Educação Matemática como área de investigação e conhecimento científico. A História da Matemática serve para professores e alunos, devido à relação que estabelece com a cultura dos povos, demonstra que a Matemática pode também ser vista como uma parte dos costumes, valores e crenças dentro de um processo evolutivo de um povo, como aconteceu com os babilônios, egípcios e hindus que desenvolveram os conceitos matemáticos a partir das necessidades próprias de seus contextos sócio históricos, D’Ambrosio(1996).

O professor precisa ter o cuidado de não usá-la apenas como um conteúdo de memorização, e sim como peça chave de um conjunto de evolução acerca da própria matemática e do mundo moderno. A curiosidade natural em conhecer a origem dos assuntos de que se gosta é intrínseco do ser humano. Da mesma forma em que o saber matemática está, inteiramente, ligado à motivação e interesse dos alunos por essa ciência. Dessa forma, a escola tem um papel primordial em estabelecer e concretizar este elo, pois é aqui onde despertamos interesse em aprendermos muitos temas em várias áreas e disciplinas, estabelecendo muitas das vezes conexões interdisciplinares.

Segundo Ávila (2010), todo professor de matemática já teve a experiência de ser questionado por seus alunos sobre a importância da Matemática e sua aplicação. Normalmente, o professor tem dificuldade em apresentar uma resposta ou explicação satisfatória para tais questionamentos. É bem verdade que questionamentos desse gênero não são simples de se resolver ou de se apresentar uma resposta breve. Então como responder a este tipo de questionamento? As justificativas comumente mencionadas pelos professores

para o ensino da Matemática são as de que a Matemática é necessária em atividades práticas do cotidiano e é importante porque desenvolve o raciocínio lógico.

Mas isso nem sempre é bem assimilado pelos discentes que o questionam. Muitos professores sentem-se desconfortáveis ao tentar responder a esses questionamentos e, ao permitir que os alunos o percebam, acabam reforçando, a ideia de que aquilo não deve servir pra muita coisa útil. É uma pena porque, na realidade, a Matemática está em quase todo lugar, seja de forma direta ou indireta, principalmente camuflada através da tecnologia: nas comunicações instantâneas em imagem e voz; nos aviões sofisticados, rápidos e confiáveis que transportam anualmente centenas de milhões de pessoas entre os mais diversos países; nas naves espaciais que vasculham o Sistema Solar e, mesmo chegando a seus limites, ainda continuam a nos transmitir importantes informações; nos computadores atuais que realizam bilhões de operações por segundo e fazem em poucos instantes cálculos que, ainda há poucas décadas, demandariam anos de trabalho de equipes inteiras de matemáticos; nas gigantescas obras de engenharia como pontes, arranha-céus, estruturas, hidroelétricas e túneis espalhados pelo mundo promovendo a geração de riquezas e trazendo conforto às pessoas; nas centenas de milhares de componentes eletrônicos que são compactados em chips de dimensões milimétricas que passam a exercer funções vitais em máquinas eletroeletrônicas de todas as naturezas; nos equipamentos de eletrônica médica que fornecem desde informações prosaicas como o sexo dos nascituros até meios pelos quais podem ser diagnosticados precocemente e sanados diversos problemas de saúde, entre outras coisas.

Os alunos que perguntam onde a Matemática é aplicada ou pra que ela serve e muitos dos professores que os ensinam já nasceram desfrutando das maravilhas que a tecnologia nos propõe e, principalmente, desconhecem como era, por exemplo, viver nos anos 1950, para citar uma década não muito distante da que vivemos. Tendem, então, a não se surpreender com as facilidades à disposição da sociedade moderna e raramente param por alguns instantes para se perguntar de que maneira esse mundo tecnológico foi construído. Muitos, por sinal, só percebem a presença da luz elétrica quando, paradoxalmente, ela falta.

Na verdade, todo esse aparato tecnológico foi construído porque o homem, por meio da Matemática, acumulou ao longo dos séculos vastos conhecimentos sobre o mundo físico e, com isso, conseguiu, parcialmente, dominá-lo e colocá-lo a seu serviço. Tecnologia,



em poucas palavras, é o uso das propriedades do mundo físico dentro de objetivos estabelecidos pelo homem. Para nossa suprema felicidade, tais propriedades são desvendáveis e tratáveis por meio da Matemática, pois, como já haviam percebido os pitagóricos no século VI a.C. e foi explicitamente enunciado por Galileu Galilei no século XVII, o livro do Universo está escrito na linguagem da Matemática.

Explicar isso, de maneira tão genérica, aos discentes da educação básica não é tarefa fácil. Uma vez que, em geral, eles ainda não têm maturidade suficiente para compreendê-lo. No entanto, o uso da História da Matemática como metodologia de ensino, além de tornar as aulas mais interessantes e dinâmicas, abrirá vários caminhos para exemplificações sobre o desenvolvimento dessa ciência e conseqüentemente da humanidade, despertando no aluno o desejo individual e/ou coletivo por respostas através do conhecimento, não só matemático mas também interdisciplinar.

O saber histórico matemático traz ao ambiente de aprendizagem uma visão mais clara e crítica sobre os conteúdos em questão, proporcionando reflexões diversas da utilidade da matemática ao longo do tempo e nos dias atuais. Conhecer uma passagem histórica atrelada a um conteúdo em destaque, desperta no aluno o interesse e a percepção de que a Matemática é uma ciência em constante desenvolvimento, como peça fundamental no desenvolvimento lógico-cognitivo, que foi sendo moldada, muitas das vezes, através de erros e acertos a partir de problemas em situações diversas.

Segundo Santos (2009, p.19), “é importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças”.

Levar o conhecimento matemático como foi historicamente produzido faz com que nossos alunos estabeleçam uma conexão e uma análise mais evidente dessa ciência.

Muitos dos nossos docentes, não utilizam a História da Matemática em suas aulas e a impressão que dá é que eles estão longe de responder aos questionamentos dos nossos alunos quanto ao “Pra que serve a Matemática?”. E, Infelizmente, quando utilizam, muitos desses professores cometem o frequente erro de usá-la apenas como ilustração, alienada a nome de famosos matemáticos e datas ou a fatos puramente isolados. Criar, na sala de aula, um clima de contato entre alunos e fatos do passado é uma dinâmica interessante na construção e motivação do aprender matemático. Pois, as raízes matemáticas interagem intrinsecamente com as da História da Humanidade, sendo uma janela inquestionável para

a contextualização dos conteúdos.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), como representante da comunidade acadêmica da área de matemática, tem se dedicado ao compromisso de contribuir para promover a melhoria do ensino de matemática na escola básica. Nesse sentido, tem investido na elaboração e divulgação de textos destinados à formação do professor, criou e mantém o Programa Nacional de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, conduziu a criação da Associação Nacional dos Professores de Matemática (ANPMAT), apoiando suas iniciativas, como os Simpósios de Formação do Professor de Matemática, regionais e nacional, além de promover encontros nacionais tais como a Bienal de Matemática.

Destacamos aqui a importância da disciplina História da Matemática nos cursos de licenciatura em matemática assim como a disciplina eletiva Tópicos de História da Matemática que compõe a grade curricular do PROFMAT. Estas disciplinas dão uma visão geral da história do desenvolvimento dos principais conceitos matemáticos, bem como dos matemáticos responsáveis por esse desenvolvimento, proporcionando assim uma relação da história do desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico inserido no contexto sócio-cultural com a própria Matemática. Além disso, explica como surgiram os problemas que deram origem ao desenvolvimento dos principais conceitos matemáticos, destacando os principais nomes da história da Matemática e suas contribuições. Sendo assim, essas disciplinas são imprescindíveis para boa formação do professor, pois darão o domínio necessário para sua atuação profissional, o que será inteiramente relevante para sua docência e para a aprendizagem matemática dos alunos.

Dessa forma, a abordagem histórica dos conteúdos em sala de aula auxiliará, pedagogicamente, no alcance de objetivos pré-estabelecidos, levando o aluno a: perceber todo o entorno desta ciência como construção humana, compreender os motivos pelos quais devemos estudar matemática, entender a sua importância no mundo social e suas interações com outras ciências. No mesmo instante em que nossos discentes perceberem isto, se tornarão mais interessados e estimulados a irem além do mundo real, buscando informações e estabelecendo comparações entre mecanismos matemáticos do passado e do presente, chegando a conclusões satisfatórias de que a matemática ensinada na sala de aula realmente tem um propósito real e verdadeiro.

Nossos alunos reagem positivamente com aquilo que satisfazem seus desejos e apontam para uma utilidade; Constroem seus valores e laços de conhecimento através daquilo

que acham útil, e é exatamente aí, onde mais uma vez, a História da Matemática tem um importantíssimo papel fornecendo contextos que mostrem as aplicações desta ciência nas atividades humanas.

Estabelecer um caminho didático-pedagógico para aquilo que se propõe aqui requer um estudo detalhado e um planejamento daquilo que se deseja ensinar ou alcançar. De forma que, se o objetivo inicial for motivacional, então devemos selecionar episódios da história da matemática como estimuladores dessa motivação, onde, não necessariamente, o episódio selecionado esteja atrelado ao conteúdo do período. Apresentar algo diferente e inovar através de recursos didáticos são técnicas essenciais para uma boa aula, principalmente, se estiverem associadas a aspectos sociais do cotidiano do aluno.

Fazer um paralelo do ensino da matemática de hoje com a de tempos atrás também ajuda a ilustrar a sua evolução e, principalmente, fomentar a motivação no aluno em aprender através do que é prático. Assim, ele entenderá que muitas pessoas tiveram dificuldades em solucionar determinados problemas que hoje têm soluções triviais. E, isso o ajudará na motivação e superação de suas próprias dificuldades com a matemática ao passo que chegará a vibrar com a resolução individual de um problema matemático que se apresentava impossível de resolver. Superar tais dificuldades, por parte dos alunos, atrelada a orientação e indicação da progressão dos mesmos pelo professor os ajudará a verem suas próprias evoluções, despertando ainda mais a motivação em progredir e aprender matemática.

Apesar das inúmeras vantagens que a História da Matemática como metodologia de ensino trás para sala de aula, deve-se ter um cuidado especial na sua apresentação e exemplificação. Ela deverá estar acompanhada de um bom planejamento de ensino e de recursos educacionais próprios que lhes dêem o suporte necessário para sua aplicação, levando em conta possíveis dificuldades, a fim de garantir um melhor caminho de aprendizagem objetivando a ampliação e o domínio do conhecimento em matemática.

O pensamento errôneo de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada é, no mínimo, uma visão fantasiosa e irreal do que ela é, além de descartar sua evolução e utilidade. Conhecer o cenário histórico, ou parte dele, acerca dos conteúdos ministrados é uma maneira pura e concreta de perceber as dificuldades e prever possíveis erros nas soluções de problemas. Sabe-se que gerações e gerações de matemáticos levaram séculos para formular e/ou demonstrar teoremas, então não devemos cobrar inicialmente que

nossos alunos os façam e os compreendam, em sua totalidade, em algumas aulas. É preciso ter calma, pois o conhecimento se conquista passo a passo e sua assimilação nem sempre é imediata. Por isso, a História da Matemática em sala de aula deve ser encarada como algo capaz de abrir horizontes, fazendo com que nossos alunos compreendam a matemática como peça fundamental na construção do conhecimento e de um mundo moderno e que foi desenvolvida ao longo do tempo com a participação efetiva de diferentes civilizações.

Com base no que foi enfatizado, aliado a uma boa preparação por parte dos professores e com suporte necessário, a História da Matemática como metodologia de ensino estimulará a motivação à aprendizagem de nossos alunos, tornando-os aptos: a aprenderem matemática; a permanecerem na escola, contribuindo, desta forma, para a redução do abandono escolar; a não repetência e principalmente a quebrarem o estigma de disciplina difícil que a Matemática ostenta.

Sendo assim, a História da Matemática configura-se como um bom caminho, mas não o único, ao qual o professor pode torná-lo mais próxima possível da realidade dos alunos e longe das habituais abstrações. Sua presença nas aulas de matemática terá papel exemplificador e motivador, possibilitando um entendimento melhor da Matemática como ciência, importância e aplicabilidade. No entanto, este assunto não se encerra em si mesmo. Cada situação em sala de aula trará novos desafios e cabe ao professor usar bem seus recursos. Enfim, cabe a ele utilizar a História da Matemática como metodologia de ensino da maneira que julgar mais apropriada, levando sempre em conta, e, como objetivo central, o aprendizado matemático dos discentes.

## Capítulo 3

# Um Pouco de História nas Aulas de Matemática

Uma boa abordagem histórica dos conteúdos, aliada à inerente curiosidade dos estudantes facilita a significação e desmistificação da matemática, apresentando-a como uma ciência em constante evolução, ora com erros, outra com acertos, e, sem verdades absolutas. Uma vez inserido nesse contexto, o aluno se sentirá seguro para entender o que é matemática e pra que serve ou serviram os conteúdos explorados ao longo da sua vida escolar.

Descobrir a origem dos conteúdos que lhe dão vontade de aprender é uma curiosidade natural que se apresenta em cada um de nós. No ambiente escolar, aprende-se e há interesse por vários temas, nas mais diversas disciplinas. No entanto, no que se refere aos conhecimentos matemáticos passa-se a errônea impressão de que não há nada mais para se descobrir e/ou inventar, e, principalmente, que muitos daqueles conteúdos estudados não servem pra muita coisa. Por essas e outras, ouvimos frequentemente as seguintes perguntas: “Quem inventou a Matemática? e Pra que serve isso?”.

Conta-se que Euclides, cerca de 300 a.C., enfrentou a célebre questão quando um aluno perguntou-lhe “afinal, o que é que se ganha ao aprender a Geometria?”. Em resposta, Euclides teria pedido ao seu escravo que desse ao estudante uma moeda de ouro, “porque ele precisa ganhar com aquilo que aprende”. Infelizmente, a resposta do gênio grego não se aplica nos dias de hoje. Em primeiro lugar porque não haveria moedas suficientes e, principalmente, porque os nossos jovens querem, sim, ganhar com aquilo que aprendem e têm o direito de querê-lo, (Revista do Professor de Matemática - RPM, 63, 2007, p.1).

Para que os conteúdos matemáticos ministrados nas escolas não passem a errônea ideia de que a Matemática sempre foi assim e de que não tem utilidade prática, utilizaremos o ensino adequado de tópicos da história da matemática para mudar tais concepções.

Difícil hoje é encontrar áreas da atividade humana onde a Matemática ou, pelo menos, seu raciocínio lógico-dedutivo não tenha, em maior ou menor grau, alguma participação efetiva. Pensando nisso, elencaremos aqui, passagens da história da matemática que servirão para exemplificar sua importância e dos matemáticos para o desenvolvimento social e/ou tecnológico ao longo do tempo. Tais passagens, ajudarão a nortear e motivar nossos discentes para um aprender matemático mais consistente e prazeroso.

### 3.1 O número $\pi$

O número que chamamos  $\pi$  (pronunciado “pi”) tem uma história longa e variada. O símbolo não representava originalmente um número; ele é simplesmente a letra grega que corresponde a nossa letra  $p$ . Mas o número que agora designa era bem conhecido dos gregos antigos. Há muito tempo, eles e outros antes reconheceram que os círculos tinham uma propriedade especial e útil: a circunferência de qualquer círculo dividida por seu diâmetro é sempre o mesmo número. Se concordarmos em chamar esse número de  $\pi$ , então esse fato prático se traduz na fórmula  $C = \pi d$ .

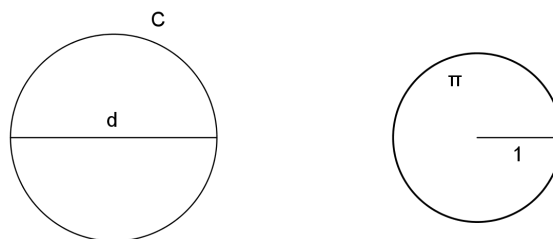


Figura 3.1: Figura 1

Em outras palavras, a razão entre comprimento da circunferência e o seu diâmetro é sempre a mesma. Pensamos nisso como uma *constante* - um número que permanece o mesmo independentemente de como os outros números na situação variem. Os estudiosos dos tempos antigos também sabiam que essa mesma razão constante aparecia em outra propriedade básica dos círculos: a área do círculo é sempre aquela constante vezes o quadrado do raio. Isto é,  $A = \pi r^2$ . Em particular, se um círculo tiver raio de 1 unidade

(polegadas, pés, metro, milha, ano-luz, ou qualquer outra coisa), então a área dentro do círculo é exatamente igual a  $\pi$  unidades.

Em razão de a forma do círculo ser tão importante para tantas coisas que nós humanos fazemos e usamos, de rodas e engrenagens a relógios, foguetes e telescópios, a constante nessas duas fórmulas é um número que vale a pena conhecer. De um ponto de vista histórico, a palavra preocupante e fascinante aqui é “exatamente”. Encontrar o valor de  $\pi$  tem sido um mistério no qual pessoas de muitas civilizações diferentes trabalharam e se intrigaram por centenas de anos. Eis alguns exemplos:

1650 a.C. – O papiro de Rhind, do Egito Antigo, ofereceu um procedimento para calcular a área de um círculo que usava a constante  $4 \left(\frac{8}{9}\right)^2$ .

240 a.C. – Arquimedes mostrou que ele está entre  $3\frac{10}{71}$  e  $3\frac{10}{70} = 3\frac{1}{7}$ . Mais tarde, Heron popularizou o uso de  $3\frac{1}{7}$  em muitos contextos práticos.

150 d.C. – Ptolomeu, um astrônomo grego, usou  $\frac{377}{120}$  para o  $\pi$ , enquanto, o sábio chinês Zu Chongzhi (c. 480) e o matemático hindu Aryabhata (c. 530) usaram, respectivamente,  $\frac{355}{113}$  e  $\frac{62832}{20000}$  para ele. Percebemos que os valores para o  $\pi$  continuaram, ao longo do tempo, sendo cada vez mais próximos do que temos hoje. Fato que se constata quando por volta de 1600 foi calculado a ele um valor decimal com 35 casas.

1706 – William Jones, um matemático britânico, foi o primeiro a usar uma letra grega  $\pi$  como o nome desse número. O símbolo foi adotado pelo grande matemático suíço Leonhard Euler em suas publicações das décadas de 1730 e 1740 e, pelo final do século, ela se tornara o nome comum dessa constante.

1873 – William Shanks da Inglaterra, levou mais de 15 anos para calcular, à mão, um valor decimal de  $\pi$  com 607 casas decimais. Os algarismos após o 527º estão incorretos e ninguém havia notado o erro por quase um século.

1949 – John von Neumann usou o computador ENIAC do governo norte-americano para calcular  $\pi$  com 2035 casas decimais em pouco mais de 70 horas.

1987 – O professor Yasumasa Kanada, da Universidade de Tóquio, calculou  $\pi$  com 134.217.000 casas decimais em um supercomputador NEC SX-2.

1991 – Gregory e David Chudnovsky calcularam  $\pi$  com 2.260.321.336 casas decimais em 250 horas usando um supercomputador construído em casa, em seu apartamento na cidade de Nova York. Essa quantidade de algarismos impressa em uma única linha de fonte usual de jornal se estenderia de Nova York a Hollywood, na Califórnia.

1999 — O time do professor Kanada calculou  $\pi$  com 206.158.430.000 casas decimais. Esse número é 90 vezes mais longo do que aquele encontrado pelos Chudnovsky. Com uma linha de fonte comum, ele se estenderia por mais de 250 mil milhas - longo o suficiente para atingir a Lua.

Entretanto, vale ressaltar que nenhum desses resultados é o valor exato de  $\pi$ . Por volta de 1765, um matemático alemão chamado Johann Lambert demonstrou que  $\pi$  é um *número irracional*; isto é, não pode ser expresso exatamente como uma fração ordinária (ou seja, razão entre dois números inteiros). Entre outras coisas, isso significa que nenhuma expressão decimal, não importa quão longe se estenda, jamais será *exatamente* igual a  $\pi$ . Mas podemos encontrar decimais tão próximos quanto quisermos se estivermos dispostos a ter paciência e a trabalhar bastante. Na realidade, umas poucas casas decimais são suficientemente boas para quase todos os propósitos práticos. O mesmo é verdade para muitas das aproximações que eram usadas antes mesmo de os decimais serem inventados. Mas, por que as pessoas se preocupam em calcular  $\pi$  com milhares ou milhões ou bilhões de casas decimais? Existe algum valor possível em gastar todo esse tempo e esforço? Há várias questões sobre números irracionais que ainda não podemos responder. Podemos demonstrar que sua expansão decimal é infinita e que não repete nenhuma sequência finita de algarismos sem interrupção de um certo ponto para frente. Mas existe algum padrão sutil nessa sequência de algarismos? Todos os dez algarismos aparecem com igual frequência ou alguns ocorrem com maior frequência do que outros? Alguma sequência de algarismos aparece de alguma forma previsível?

Não sabemos ainda nem mesmo decidir quais questões valem a pena. Às vezes, um ponto aparentemente insignificante abre o caminho para percepções novas e mais amplas. E, além disso, existem as questões sobre o software e o hardware que estão sendo usados para gerar essas imensas sequências de algarismos: como podemos tornar seus recursos maiores, mais rápidos, e sua precisão mais confiável? Um problema como o de gerar os algarismos de  $\pi$  fornece um terreno de testes para melhoria tecnológica.

Apesar disso, a explicação mais honesta para tal persistência é a simples curiosidade humana pelo desconhecido. Virtualmente, qualquer problema sem uma solução fácil vai atrair pelo menos algumas pessoas para persegui-lo, às vezes obsessivamente. A história tanto do progresso quanto da insensatez da raça humana é pontuada de conquistas e fracassos de tais pessoas. Não saber de antemão quais questões levarão para qual lado



adiciona um fator de risco que as torna mais convidativas. Na matemática, assim como, por exemplo, em qualquer esporte, superar os desafios do não tentado e do desconhecido é sua própria recompensa.

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781$   
 $64062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253$   
 $59408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933$   
 $44612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726$   
 $02491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113$   
 $30530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611$   
 $79310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244$   
 $06566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748$   
 $18467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901$   
 $22495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981$   
 $3629774771309960518707211349999983729780499510597317328160963185950244594$   
 $55346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381$   
 $42061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778$   
 $05321712268066130019278766111959092164201989...$

As primeiras mil casas decimais de  $\pi$

## 3.2 Geometria e o túnel da ilha de Samos

A ilha de Samos, que ainda pertence à Grécia, fica a menos de 2 quilômetros da costa da Turquia. Há 2500 anos, toda aquela região era habitada por gregos. Samos passou à História por ser a terra natal de Pitágoras. Mas, vamos falar aqui de um outro personagem que nem ao menos era matemático. Seu nome era Eupalinos e, nos dias atuais, seria chamado de engenheiro. Ele será focalizado aqui por ter sabido usar, com bastante sucesso, um fato elementar de Geometria Plana para resolver um problema de Engenharia e assim contribuir para o bem-estar de uma comunidade.

O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido por dois motivos: fornece um tópico interessante para ilustrar nossas aulas e mostra como o conhecimento matemático, mesmo quando de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico.

O teorema de Geometria usado por Eupalinos foi o seguinte:

**Teorema 3.2.1.** *Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, então seus ângulos agudos são congruentes.*

Na figura a seguir, se  $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ , então,  $\angle ab = \angle a'b'$  e  $\angle ac = \angle a'c'$ .

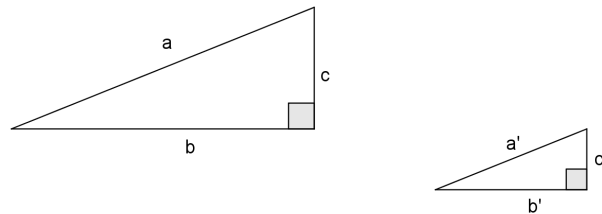


Figura 3.2: Figura 2

Este é um caso particular de semelhança de triângulos do qual os triângulos dados têm um ângulo reto compreendido entre lados proporcionais. Para sermos mais exatos, Eupalinos não usou precisamente o teorema acima e sim sua consequência imediata, que enunciaremos a seguir:

**Corolário 3.2.1.** *Sejam  $abc$  e  $a'b'c'$  triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos  $b$  e  $c'$  são perpendiculares e, além disso, tem-se  $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ , então as hipotenusas  $a$  e  $a'$  estão em linha reta.*

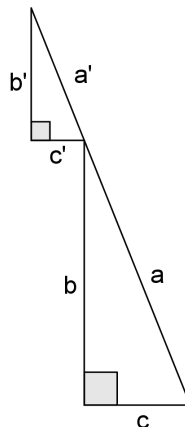


Figura 3.3: Figura 3

A afirmação acima decorre imediatamente da anterior pois a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

Retomemos então a nossa história. Samos, 530 a.C., o poderoso tirano Polícrates se preocupava com o abastecimento de água da cidade. Havia fontes abundantes na ilha, mas ficavam do outro lado do monte Castro; o acesso a elas era muito difícil para os habitantes da cidade. Decidiu-se então abrir um túnel. A melhor entrada e a mais conveniente saída do túnel foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, que chamaremos de A e B, respectivamente.

Cavar a montanha não seria árduo, pois a rocha era calcárea e não faltavam operários experientes. O problema era achar um modo de sair do ponto A e, cavando, chegar ao ponto B sem se perder no caminho. Eupalinos, encarregado de estudar a questão, surpreendeu a todos com uma solução simples e prática. Além disso, anunciou que reduziria o tempo de trabalho à metade propondo que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar simultaneamente nos pontos A e B, encontrando-se as duas turmas no meio do túnel.

Em 1882, arqueólogos alemães, escavando a ilha de Samos, o encontraram. Ele tem um quilômetro de extensão, sua seção transversal é um quadrado com 2 metros de lado, com uma vala funda para os canos d'água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos.

Mas, como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de A e B, traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha?

Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte, A é o ponto de entrada e B é a saída do túnel.

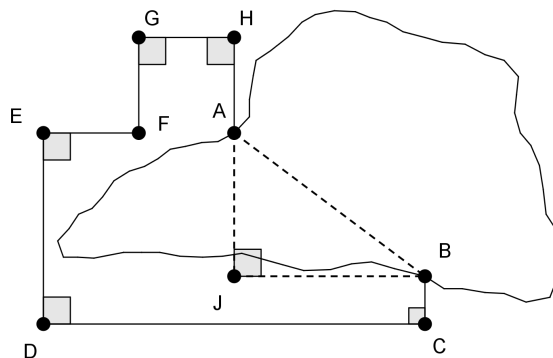


Figura 3.4: Figura 4

A partir do ponto B fixa-se uma direção arbitrária BC e, caminhando ao longo de uma poligonal BCDEFGHA, na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto A, tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha. (Não é difícil imaginar um instrumento ótico rudimentar que permita dar com precisão esses giros de 90 graus.)

Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos AJ e JB do triângulo retângulo AJB no qual AB é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada. Calcula-se, então, a razão  $r = \frac{AJ}{JB}$ . A partir dos pontos A e B, constróem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão  $r$  entre os catetos do triângulo AJB (Figura 3.5):

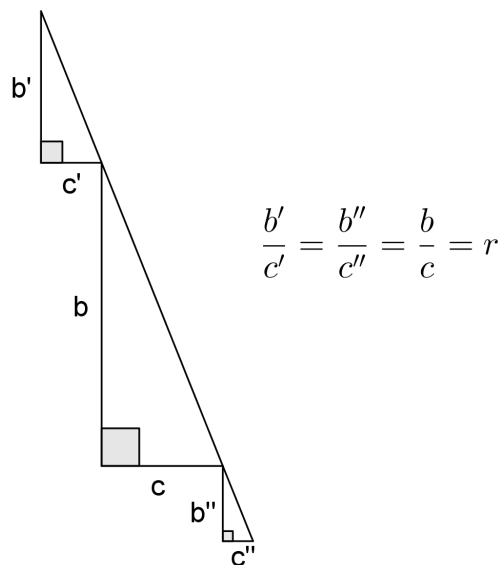


Figura 3.5: Figura 5

Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos A e B, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos. Isso resolve o problema se os pontos A e B estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

Em geral, A e B não estão no mesmo nível. No caso em questão, é obviamente desejável que B seja mais baixo e sem dúvida levou-se isto em conta na sua escolha

como ponto de saída. Mas é fácil calcular  $d =$  diferença de nível entre A e B. Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal BCDEFGHA, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte. Tendo  $d$ , consideramos o triângulo retângulo AMB, no qual o cateto AM é vertical e tem comprimento  $d$ . O comprimento da hipotenusa AB se determina pelo teorema de Pitágoras ( a partir dos catetos do triângulo AJB). A razão  $\frac{AM}{AB} = s$  diz como se deve controlar a inclinação da escavação: cada vez que andarmos uma unidade de comprimento ao longo do túnel, o nível deve baixar  $s$  unidades.

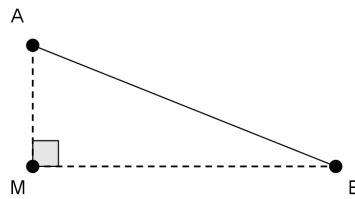


Figura 3.6: Figura 6

O mais notável desse raciocínio teórico é que ele foi posto em prática e funcionou. O túnel sob o monte Castro lá está, para quem quiser ver, na majestade dos seus dois mil e quinhentos anos de idade.

Honestamente, devemos esclarecer que as duas extremidades das escavações não se encontraram exatamente no mesmo ponto. Isto seria esperar demais da precisão dos instrumentos então existentes. Houve um erro de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Desvio insignificante, convenhamos. Além disso, esse erro tem dois aspectos interessantes. Em primeiro lugar, constitui uma prova de que o túnel foi realmente cavado em duas frentes. Em segundo lugar, a ponta que começou em B chegou mais baixa do que a que começou em A, o que permitiu formar uma pequena e leve cachoeira, sem interromper o fluxo de água de A para B. Isto nos deixa quase certos de que esse erro na vertical está ligado ao cuidado dos construtores em não deixar as pontas se encontrarem com a saída mais alta do que a entrada, o que causaria um problema desagradável.

Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, alguns deles ainda hoje existentes, dentre os quais expõe sobre um instrumento de agrimensura (dioptra) que descreve o processo que expusemos acima.

### 3.3 Uma equação de Euler utilizada por Steinmetz

No final dos anos 1800 a energia elétrica em corrente alternada, que abastece nossas residências e as empresas pelo mundo afora, passou a ter condições de sair dos laboratórios para ser oferecida ao público. Mas, assim que as primeiras redes começaram a ser estendidas nos EUA, os engenheiros depararam-se com problemas técnicos que não eram capazes de elucidar. Thomas Alva Edison, que inventara a lâmpada elétrica em 1879 e criara sua empresa de eletricidade, ficou tão perplexo diante daqueles problemas que chegou a pensar em abandonar as correntes alternadas e apenas trabalhar com correntes contínuas, como de início, mas isso também implicava enormes dificuldades tecnológicas à época.

As coisas encontravam-se nesse impasse quando, em 1889, um pobre imigrante alemão chamado Karl Steinmetz desembarcou no porto de Nova York e apresentou-se aos oficiais do departamento de imigração. Steinmetz padecia de graves deficiências físicas, sendo corcunda e anão, e aqueles oficiais informaram-no de que, pela legislação americana, ele não poderia ser aceito. Steinmetz argumentou que sua profissão era intelectual e que suas deficiências não o impediam de exercê-la perfeitamente: ele era matemático. Contrariando as regras escritas, Steinmetz foi aceito e, pouco depois, conseguiu um emprego na General Electric. Ali, ficou sabendo das dificuldades dos engenheiros com os cálculos envolvendo as correntes alternadas e decidiu ajudá-los. Não tardou muito e ele constatou que os problemas que desafiavam os engenheiros poderiam ser facilmente resolvidos por meio dos chamados números complexos, mais especificamente pela utilização da fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , descoberta por ele no século XVIII e que, aparentemente, não tinha nenhuma utilidade prática.

A história de Steinmetz é uma das mais belas da Matemática Aplicada e, literalmente, todas as pessoas que utilizam energia elétrica no mundo devem muito àquele singular matemático alemão.

### 3.4 O príncipe Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é unanimemente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos e sua obra, além de cobrir praticamente todos os ramos da Matemática, estende-se à Astronomia, Física e Geodésia. De família humilde, nasceu na Alemanha (em Brunswick), onde passou toda sua vida. Era um menino prodígio, com ha-

bilidades impressionantes tanto em aritmética quanto para o aprendizado de línguas. Seu talento foi reconhecido pelo Duque de Brunswick que custeou seus estudos na universidade de Göttingen de 1795 a 1798.

Gauss apresentou inúmeras contribuições. Dentre suas teses, podemos destacar a demonstração do “Teorema Fundamental da Álgebra”, provando que toda equação polinomial  $f(x) = 0$  tem pelo menos uma raiz real ou imaginária e para isso baseou-se em considerações de caráter geométricos. Em 1801, lançou duas importantes publicações: **Disquisitiones Arithmeticae** (Pesquisas Aritméticas), um livro texto sobre a teoria algébrica dos números e um artigo com a “redescoberta” do asteróide Ceres, utilizando o método de tratamento para erros em observações chamado Método dos Mínimos Quadrados, indispensável para as medições geodésicas.

Disquisitiones Arithmeticae é o principal responsável pelo desenvolvimento e notação da Teoria dos Números, nele apresenta-se a notação  $a \equiv b \pmod{m}$ , para relação de congruência, que é uma relação de equivalência importantíssima na resolução de muitos problemas matemáticos e que tem a seguinte definição.

**Definição 3.4.1.** *Seja  $m$  um número natural. Diremos que dois números inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$  se os restos da divisão euclidiana por  $m$  são iguais. Quando os inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$ , escreve-se  $a \equiv b \pmod{m}$ .*

**Proposição 3.4.1.** *Suponha que  $a, b, m \in \mathbb{Z}$ , com  $m > 1$ . Tem-se que  $a \equiv b \pmod{m}$  se, e somente se,  $m \mid b - a$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a = mq + r$ , com  $0 \leq r < m$  e  $b = mq' + r'$ , com  $0 \leq r' < m$ , as divisões euclidianas de  $a$  e  $b$  por  $m$ , respectivamente. Logo,

$$b - a = m(q' - q) + (r' - r).$$

Portanto,  $a \equiv b \pmod{m}$  se, e somente se,  $r = r'$ , o que em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que  $m \mid b - a$ , já que  $|r - r'| < m$ .  $\square$

Por vezes, Gauss Descreveu a Matemática como sendo a rainha das Ciências e a Aritmética como a rainha da Matemática. Deve-se a Gauss, também, a representação gráfica dos números complexos pensado nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano.

O dia 29 de março de 1796 foi crucial na vida de Gauss. Faltavam poucos dias para o seu 19º aniversário e ele estava prestes a ingressar na Universidade de Göttingen, sem saber ainda se a sua escolha seria a Filologia ou a Matemática. Nesse célebre dia, o jovem Gauss encontrou uma bela solução para um velho problema de Geometria. Após essa espetacular façanha ficou tão entusiasmado que renunciou à sua possível intenção de ser filologista e resolveu dedicar sua vida à Matemática e suas aplicações. Mas qual foi o problema resolvido por Gauss naquela ocasião?

Durante mais de 2000 anos o problema de dividir uma circunferência em  $n$  partes iguais, usando somente régua e compasso, permaneceu como foi deixado pelos gregos. Vamos dar uma ideia do problema: Se uma circunferência é dividida em  $n$  partes iguais, unidos os sucessivos pontos de divisão de cordas, obtemos um polígono regular de  $n$  lados. Sabemos que é fácil construir, somente com régua e compasso, um polígono regular de  $2n$  lados a partir de um polígono regular de  $n$  lados. Os gregos sabiam construir um polígono regular de 3 lados e também um polígono regular de 5 lados. Além disso, provaram que se um polígono regular de  $n$  lados e outro de  $m$  lados, com  $m$  e  $n$  primos entre si, podem ser construídos (com régua e compasso), então pode-se construir um polígono regular de  $mn$  lados. Resumindo, os gregos sabiam construir, com régua e compasso, um polígono regular de  $n$  lados, se  $n$  fosse um número natural da forma:

$$n = 2^m \cdot 3^r \cdot 5^s \quad m \geq 0, r \text{ e } s \text{ inteiros iguais a } 0 \text{ ou } 1.$$

O passo seguinte era construir, com os instrumentos citados, polígonos regulares de 7, 9, 11 e 13 lados e, embora o problema tenha sido feito estudado por grandes matemáticos como Fermat e Euler, nenhum progresso fora feito. Não chegaram a encontrar um método, porque tais construções são impossíveis, como foi provado por aquele garoto alemão que estava dividido entre a Matemática e a Filologia.

Gauss provou o seguinte:

Um polígono regular de  $n$  lados é construtível se, e somente se,  $n$  é um número natural da forma

$$n = 2^s \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r,$$

com  $s$  inteiro não negativo, e cada  $p_i$  primo de Fermat, isto é,

$$p_i = 2^{2^{k_i}} + 1,$$

com  $k_i$  inteiro não negativo,  $p_i \neq p_j$  para  $i \neq j$ .



Assim ficou provado pela primeira vez que um polígono regular de 17 lados é construtível com régua e compasso, pois  $17 = 2^{2^2} + 1$ . Por sinal, como curiosidade histórica, podemos assinalar que Fermat (1601-1665) conjecturou que todo número da forma  $2^{2^k} + 1$ , com  $k$  inteiro não negativo, é primo. De fato, para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , obtemos, respectivamente, 3, 5, 17, 257, 65537, que são primos; mas Euler (1707-1783) provou que  $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$  (5º número de Fermat) não era primo.

Gauss, em 1807, foi nomeado professor e diretor do observatório astronômico de Göttingen. Era perfeccionista, metódico e circunspeto, um perfeito contra-exemplo para o tradicional estereótipo do gênio matemático. Ele, sempre lembrou com singular orgulho a grande proeza daquele 29 de março. Uma medida do apreço por sua descoberta matemática é o seu pedido de que se gravasse em seu túmulo um polígono regular de 17 lados. Após sua morte foi erigida, em Göttingen, uma estátua de Gauss em bronze e, como homenagem muito apropriada, seu pedestal tem a forma de um polígono regular de 17 lados.

De fato, muitas histórias testemunham a extraordinária precocidade do matemático Gauss. Uma das favoritas e mais conhecida refere-se a um episódio ocorrido quando ele tinha menos de dez anos de idade e frequentava o terceiro ano do ensino fundamental de uma escola onde medo e humilhação eram os principais ingredientes pedagógicos.

Na aula de Aritmética o professor pediu aos alunos que calculassem o valor da soma.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Uma excelente questão, sem dúvida, para aliviar o mestre de suas funções pelo resto da aula e manter bem alto o ideal pedagógico da escola.

Imediatamente após o problema ter sido proposto, Gauss escreveu o número 5050 em sua pequena lousa e a depositou, como era costume na época, sobre a mesa do professor. Durante o resto da aula, enquanto seus colegas trabalhavam, o pequeno Gauss foi, por diversas vezes, contemplado com o sarcástico olhar de seu mestre.

Ao fazer a correção, o estupefato Büttner - era esse o nome do professor - constatou que a única resposta correta era a de Gauss, que deu a seguinte justificativa para seu cálculo: a soma de 1 com 100, de 2 com 99, de 3 com 98, de 4 com 97, e assim por diante,

até a soma de 50 com 51 é sempre o mesmo número 101.

Veja:

$$1 + 100 = 101,$$

$$2 + 99 = 101,$$

$$3 + 98 = 101,$$

$$4 + 97 = 101,$$

.

.

.

$$47 + 54 = 101,$$

$$48 + 53 = 101,$$

$$49 + 52 = 101,$$

$$50 + 51 = 101.$$

Ora, na soma desejada, este número aparece 50 vezes. Portanto, o resultado desejado é  $101 \times 50 = 5050$ . E esta multiplicação Gauss pôde fazê-la em poucos segundos.

Foi uma dura lição, mas o severo Büttner soube redimir-se, presenteando Gauss com o melhor livro de Aritmética que possuía e mudando totalmente sua atitude para com ele.

A observação feita por Gauss, de que é constante a soma dos termos equidistantes dos extremos da sequência dos números de 1 a 100, continua válida para qualquer progressão aritmética. Baseado nessa mesma ideia, podemos calcular a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

**Teorema 3.4.1.** *A soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética representada por  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  é igual a  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ .*

*Demonstração.* Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  uma progressão aritmética de razão  $r$ :

Como  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_1$

Chamando  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 & + \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases} \\
 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\
 2S_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}} \\
 S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2}
 \end{aligned}$$

□

### 3.5 Quem foi Agnesi?

Maria Gaetana Agnesi, nasceu em 16 de maio de 1718 na cidade de Milão. Desde criança já manifestava conhecimentos que iam muito além de sua idade, tornando-se algum tempo depois a primeira mulher da história do Ocidente a ser considerada matemática. Garota precoce e inteligente, teve uma educação preparada por seu pai, professor de Matemática da Universidade de Bolonha. Ele, gostava de apresentá-la em reuniões que organizava, onde se encontravam acadêmicos, cientistas e intelectuais renomados. Aos nove anos de idade, Agnesi teve sua primeira publicação, mas ainda não era de sua autoria, uma vez que era a tradução para o latim de um texto desenvolvido por um de seus tutores. Além de fazer essa tradução, proferiu um texto que tratava da inserção das mulheres na educação superior, em uma reunião acadêmica, com pessoas muito mais velhas (obviamente) e influentes do que ela à época defendendo que as artes liberais - dependentes da inteligência - não eram impróprias para o sexo feminino. Aos onze anos, falava latim e grego perfeitamente, além de hebraico, francês, alemão e espanhol, e, por isso, a cognominavam de “*O Oráculo das Sete Línguas*”.

Agnesi conhecia a Matemática moderna de sua época, além de ter se dedicado ao estudo das ciências humanas, com enfoque na filosofia e linguística, e também à música, mas sua grande paixão foi mesmo a Matemática. Tanto que há registros de que, aos 14

anos de idade, Agnesi já resolvia grandes problemas de geometria. Estudou os trabalhos de Newton, Leibniz, Euler, dos irmãos Bernoulli, de Fermat e de Descartes, além de ser versada em Física e em vários outros ramos da ciência. Mesmo com tamanha genialidade matemática, ela quase abandonou tudo para se tornar freira pelo simples fato de não gostar de se expor. Mas, como seu pai não aceitou essa decisão, ela optou por ter uma vida mais simples e discreta, sem grandes aparições.

Aos 20 anos ela publicou um tratado escrito em latim, *Propositiones Philosophicae*, no qual inseriu várias de suas teses, e, defendeu mais uma vez a educação superior para as mulheres. Agnesi passaria, também, mais de dez anos de sua vida dedicados ao estudo da Matemática e escreveria sua obra magna, *Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventú Italiana* (Instituições Analíticas para o uso da Juventude Italiana). Esse foi um dos primeiros textos de Cálculo escrito de forma didática, sendo utilizado nas escolas da Itália e também traduzido para o inglês. A obra consiste em quatro grandes volumes que abordam tópicos de Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo e Equações Diferenciais. Nesta obra, Agnesi abordou a equação  $xy = \frac{a^3}{ax^2 + x^2}$ , que resulta em uma curva que ficou conhecida como “bruxa de Agnesi”. Apesar de o gráfico não lembrar em nada uma bruxa, a bruxa de Agnesi ganhou grande repercussão apesar de tratar-se apenas de um erro de tradução. Agnesi utilizou o termo “*versiera*” para nomear a curva, mas o tradutor do livro confundiu “*la versiera*” com “*l’aversiera*”, que realmente significa “*a bruxa*”. Os volumes desta obra, publicados em 1748, somam mais de 1000 páginas.

A notoriedade de Agnesi espalhou-se rapidamente já que suas produções tiveram grande aceitação e prestígio pela sociedade intelectual. Vale ressaltar também que ela desenvolveu seu trabalho enquanto Newton (um dos grandes responsáveis pelo cálculo diferencial e integral) ainda estava vivo, dando ainda mais relevância à sua genialidade. Embora não aceita na academia francesa, por ser mulher, a Academia Bolonhesa de Ciência a aceitou como membra, e, em 1749, o papa Benedito XIV conferiu-lhe uma medalha de ouro e uma grinalda de flores de ouro com pedras preciosas pela publicação de seu livro e a indicou como professora de matemática e filosofia natural da Universidade de Bolonha, cátedra que nunca chegou a assumir, pois, além de ter optado por uma vida reservada, em 1752, após a morte de seu pai, ela abandonou a Ciência e assumiu uma vida religiosa, dedicando-se também à caridade. Neste período, ficou encarregada da direção do hospital da sua cidade, onde dedicou-se inteiramente, doando toda a sua fortuna e

pedindo doações da sociedade para seus doentes.

Infelizmente, Agnesi que muitos nem imaginam ser uma mulher, ficou conhecida apenas por uma curva de terceiro grau que leva seu nome. Faleceu em Milão, no dia 9 de janeiro de 1799 eternizando-se ilustremente na ciência e sublimemente na virtude.

### 3.6 Joaquim Gomes de Souza - O Souzinha

Matemático, astrônomo, filósofo e parlamentar brasileiro nascido na Fazenda Conceição, cidade de Itapecuru Mirim em 1829, Província do Maranhão. Foi pioneiro dos estudos matemáticos no Brasil e que apesar da morte precoce, aos 35 anos, deixou uma obra impressionante a qual o credencia como o mais importante matemático da história científica do Brasil.

Filho de Antônia de Brito Gomes de Souza e do Major Inácio José de Souza, foi apelidado quando garoto de “Souzinha”. Naquela época, sua família prosperava com o cultivo do algodão e a província do Maranhão se encontrava em um período de notável progresso econômico, o que permitia que muitos senhores tivessem o luxo de ter seus filhos estudando na Europa, em Pernambuco ou no Rio de Janeiro, de onde retornavam doutores e bacharéis em filosofia, leis, matemática e medicina.

A pedido de seus pais, Souzinha foi para Pernambuco em 1841 para se juntar ao irmão mais velho que cursava Direito em Olinda com o intuito de seguir o mesmo caminho acadêmico. Porém, no ano seguinte, com a morte de seu irmão José Gomes de Souza, Souzinha volta ao Maranhão, desta vez para a capital São Luís, cidade onde residiam seus pais.

Em 1843, os pais de Joaquim decidem que ele deveria ser militar. Souzinha então partiu para o Rio de Janeiro, ingressando, aos 14 anos, na Escola Real Militar, como Cadete do 1º Batalhão de Artilharia. Mas, pela falta de vocação para carreira com as armas e pela saúde muito frágil pediu permissão para trancar sua matrícula. Se não fosse a intervenção de Tiago José Salgado, parente da família, para mantê-lo no Rio de Janeiro, provavelmente Souzinha teria retornado ao Maranhão para ajudar seu pai nas tarefas da fazenda.

A busca constante pelo conhecimento, fez com que em março de 1844, ingressasse na Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro, quando o intuito de investigar as ciências físico-

químicas e naturais, o fez se aprofundar e sentir-se motivado pelos estudos matemáticos.

Em 1847, concluiu o terceiro ano do curso de medicina e renovou sua matrícula na Escola Militar. Depois de muita insistência, conseguiu autorização da direção da Escola para realizar os exames de todas as disciplinas que faltavam para concluir seu curso. Muitos professores e os próprios colegas não acreditavam que ele obteria aprovação. Onde, já se mostrava íntimo das equações trigonométricas, das séries, derivadas e integrais. Alheio a tais opiniões, Souza galgou êxito e se dedicou na elaboração de sua tese.

No ano de 1848, deu início à defesa de sua tese de doutorado: “Dissertação Sobre o Modo de Indagar novos Astros sem o Auxílio das Observações Diretas”. Nela, ele se propôs a indagar a possibilidade de existência de algum astro a partir, unicamente, da perturbação por ele causada no comportamento de outro astro já conhecido. Um método bastante utilizado atualmente pela Astronomia, dispensando auxílio de aparelhos ópticos.

Assim, aos dezenove anos de idade, defendeu sua tese em 14 de outubro do mesmo ano. Conseguindo dessa forma o almejado título de Doutor em Ciências Matemáticas e se tornando o primeiro aluno da Escola Militar a obtê-lo.

Após esse feito e com o objetivo de recuperar a saúde fragilizada, regressou à sua terra (Fazenda Conceição). Todavia alí, não abateu-se e com obstinação procurou aprender Economia Política, Línguas (alemão e italiano) e Direito Constitucional.

Em julho de 1849, retornou ao Rio de Janeiro para ser Professor da Escola Real Militar. Efetou pesquisas sobre os métodos gerais de integração, sobre a teoria dos sons e propagação nos meios elétricos. Seus trabalhos eram impressos na própria Escola Militar e alguns foram publicados na revista literária Guanabara, dentre os quais: Resolução das Equações Numéricas e Exposição Sucinta de um Método de Integrar Equações Diferenciais Parciais por Integrais Definidas.

A paixão pelas ciências matemáticas motivou Gomes de Souza a viajar em 1854 para a Europa, onde teve a oportunidade de visitar os principais centros de pesquisa do mundo. Souza se deparava com sua primeira viagem de estudos e escolheu inicialmente Londres como cidade para apresentar seus trabalhos à Royal Society of London, uma das mais antigas instituições acadêmicas do planeta.

Posteriormente, viajou à Paris, onde passou a assistir aos diversos cursos de Matemática na Sorbonne, quando estabelece contatos com diversos matemáticos franceses. Frequentou as aulas de Cauchy, considerado como o maior matemático de seu tempo.

Conta-se que em determinada aula, Cauchy apresentou uma equação não integralizável. “Souzinha”, franzino e desajeitado, timidamente se levantou e perguntou: - Dá licença?. O auditório que acompanhava atentamente as palavras de Cauchy, passou a observar o nosso “Souzinha”, que pediu o giz e demonstrou onde, por duas vezes, o sábio Cauchy se enganara, sendo levado a concluir erroneamente pela não integralização. Impressionado, Cauchy cumprimentou o jovem brasileiro, de quem veio a se tornar então um grande amigo.

Logo após, se matricula na Faculdade de Medicina de Paris, onde obteve o grau de Doutor em 1856, apresentando, logo mais, seus trabalhos matemáticos na Académie des Sciences de Paris.

Numa visita à Alemanha, encontrou Antônio Gonçalves Dias (1823-1864), poeta romancista maranhense, com quem debateu suas ideias sobre a antologia poética que estava organizando e seria publicada anos mais tarde.

Não bastasse mais um título, assistiu a publicação desta obra, em Leipzig, Alemanha. Sua *Anthologie Universelle, Choix des Meilleurs Poésies Lyriques de Diveres Nations dans lês Langues Originales*, Leipzig, F.A. Brocklins, refletia o espírito ansioso de Gomes de Souza pela cultura. Continha cerca de 950 páginas e apresentava uma aprimorada seleção dos mais celebrados trechos das poesias líricas e pequenos fragmentos de poemas épicos de vários povos, nas suas línguas próprias. Dentre elas: alemão, dinamarquês, espanhol, francês, grego, inglês, italiano, latim, polonês, português, russo e sueco. Além de entregar a obra intitulada “*Recueil de mémoires d’Analyse e Physique Mathematiques*”, que reunia todos seus trabalhos e falava sobre sua interpretação da Filosofia Geral das Matemáticas.

Quando ainda naquele país, no apogeu de sua produção científica, Gomes de Souza recebe a notícia que havia sido eleito para representar a província do Maranhão no Parlamento Brasileiro e que deveria retornar imediatamente ao Brasil. Antes disso, seguiu para a Inglaterra e se casou com Rosa Edith, filha de um pastor anglicano. Deixou sua esposa de 18 anos na Inglaterra para tomar posse como deputado, onde veio a buscá-la no ano seguinte.

Mesmo como político, ocupa o cargo de professor catedrático da disciplina de Cálculo Diferencial Integral. Das suas intervenções parlamentares, uma das mais interessantes ocorreu em 1860, quando discursou sobre a reforma das escolas militares. No mesmo ano,

no Maranhão, sua esposa Rosa morre por causas desconhecidas, alegando os médicos doença típica dos trópicos. Dois anos mais tarde morre também seu filho, com o mesmo laudo.

A partir daí e abalado emocionalmente, Souzinha tem sua saúde já frágil e comprometida. Em março de 1864, apresentando melhoras, viajou para a Inglaterra com objetivo de se tratar. Mas a tuberculose viria destruir rapidamente, em pleno apogeu, uma das mais brilhantes e excepcionais mentes da ciência no Brasil. Ao falecer, em primeiro de junho de 1864, Joaquim Gomes de Souza, deixou além das obras em vida, um trabalho sobre “Ciências Naturais, Sociais e Filosóficas”, o qual só faltava a introdução e a revisão.

O excepcional esforço de autodidatismo, vivenciado nas circunstâncias mais adversas da vida, torna Joaquim Gomes de Souza não somente o primeiro nome notável da Matemática no Brasil, mas talvez, o maior representante das Ciências Exatas desse país pelo seu pioneirismo. Seu espírito foi ousado e lutou com insistência por reconhecimento científico na Europa. A complexidade de seus domínios demonstrou o que seus curtos 35 anos de existência terrena foram capazes de produzir na busca incessante dos mais variados ramos do conhecimento. Uma figura de respeito que merece um estudo aprofundado de suas obras e contribuições para a humanidade, principalmente para o Brasil.

Pode-se afirmar que Souzinha foi o primeiro nome da Matemática no Brasil e o maior até hoje. Seu espírito reveste-se de uma complexidade e uma universalidade sem par, percorrendo numa verdadeira ânsia de saber nos mais variados ramos da cultura.

Vale ressaltar que os anos de 2017 e 2018 foram instituídos, no Brasil, como o Biênio da Matemática Joaquim Gomes de Souza em sua justíssima homenagem.

### **3.7 Símbolos e notações matemáticas - breve histórico e curiosidades**

Desde os tempos remotos, o Homem vem desenvolvendo e aperfeiçoando várias formas de linguagens para representar não só os sons provenientes da língua mas também números e expressões de caráter matemático. A implementação de alguns símbolos matemáticos usados hoje em dia foi acontecendo gradativamente e naturalmente ao longo de décadas ou séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. Até o século XVI, expressões matemáticas eram escritas de forma excessivamente verbal ou retórica. Por exemplo, em



1951, Viète, para representar a equação  $5A^2 + 9A - 5 = 0$ , escrevia em bom latim:

*5 in A quad et 9 in A planu minus 5 aequatur 0.*

A partir do século XVI a linguagem simbólica matemática ganhou um grande impulso. Muito dessa evolução se deu graças ao prestígio de seus criadores (muito deles, matemáticos), uma vez que, muitos desses símbolos tiveram aceitação imediata. Como exemplo desses últimos podemos citar alguns símbolos criados por Leonhard Euler (1707-1783):

$f(x)$ , para indicar “função de  $x$ ”;

$\Sigma$ , “somatória”(o símbolo é a letra maiúscula grega, *sigma*, que corresponde ao nosso S);

$i$ , “unidade imaginária”, representada também por  $\sqrt{-1}$ ;

$e$ , base dos logaritmos neperianos, igual a 2,718...;

A letra  $\pi$  (= 3,141592...), embora usada por William Jones em 1706, teve o seu emprego consagrado por Euler.

### 3.7.1 Símbolos e operações

#### Símbolos + e –

Como sabemos, a Matemática é repleta de símbolos com significados e funções das mais variadas denotações e atribuições. Um dos aspectos interessante é saber que a maioria deles possui uma história ou uma explicação razoável para seu surgimento e utilização nos dias atuais. O sinal de adição (+), por exemplo, não era utilizado em operações algébricas como se pensava e sim para representar o excesso em operações comerciais, ou seja, tinha caráter estritamente financeiro. Tanto é que a utilização regular do sinal de + (mais) aparece na Aritmética Comercial de João Widman d’Eger publicada em Leipzig em 1489. Antes desta data utilizava-se a letra P, que era a abreviatura da palavra “plus”.

Uma explicação razoável para o surgimento do símbolo +, é que, até então, a adição de dois números, por exemplo  $3 + 2$ , era representada por  $3 \text{ et } 2$ . Com o passar dos anos a conjunção latina *et* (significa “e” em latim) foi sincopada para *t*, da qual se originou, no fim do século XV, o sinal +. Segundo historiadores, foi o matemático alemão Michael Stifel quem primeiro utilizou o sinal de + para indicar adições algébricas. Antes de empregar esse símbolo, Stifel usava *et* para seus cálculos e com o passar do tempo a

letra *e* foi removida, passando a representar as tais adições apenas com a letra *t* que com o passar do tempo tomou a forma de  $+$ .

Já a palavra subtração deriva do latim “*minus*” que quer dizer *menos* em português. Assim como aconteceu com o símbolo de adição, o símbolo de subtração também foi representado de forma abreviada. Utilizava-se, à época, a letra M, que era a abreviatura da palavra “*minus*”.

O símbolo  $-$  apareceu pela primeira vez em 1481, em um manuscrito alemão. Na forma impressa, apareceu pela primeira vez em 1498. Há várias hipóteses sobre o seu surgimento, porém, nenhuma confirmada quanto à sua origem. Sabemos que os símbolos positivo e negativo somente passaram a ter uso geral na Inglaterra depois que foram usados por Robert Recorde em 1557.

### **Símbolo $\times$**

O primeiro uso do símbolo  $\times$  para indicar multiplicação deve-se ao matemático inglês William Oughtred (1574 - 1660) em seu livro de álgebra “*Clavis Mathematicae*”(1631), traduzido como “*Chave para a Matemática*” que introduzia, além deste, muitos outros símbolos.

Leibniz, em 1698, incomodado pela possível confusão entre  $\times$  e  $x$ , introduziu o ponto levantado como símbolo alternativo para multiplicação. Tornou-se de uso generalizado na Europa no século XVIII, e, ainda hoje, é um modo comum de simbolizar a multiplicação, como por exemplo,  $5 \cdot 8$  significa 5 vezes 8. Vale ressaltar também que as calculadoras modernas e alguns programas de computadores usam um asterisco para representarem a multiplicação: 5 vezes 8 é inserido como  $5 * 8$ . Essa notação muito moderna foi usada por breve tempo na Alemanha no século XVII, depois desapareceu da aritmética até voltar com a era eletrônica.

### **Símbolo $\div$**

Sinais para divisão são também muito diversos. Escrevemos 5 dividido por 8 como  $5 \div 8$ , ou  $5/8$ , ou  $\frac{5}{8}$ , ou mesmo como a razão  $5 : 8$ . O uso de  $\div$  para divisão deve-se principalmente a um livro de álgebra suíço do século XVII, *Teutsche Algebra* de Johann Rahn. Esse livro não foi muito popular na Europa continental, mas em 1668 uma tradução para o inglês foi bem recebida na Inglaterra. Alguns importantes matemáticos ingleses começaram a

usar sua notação para a divisão. Dessa maneira, o símbolo se tornou o preferido para denotar divisão na Grã-Bretanha, nos Estados Unidos e em outros países em que o inglês era a língua dominante, mas não na maior parte da Europa. Os autores europeus em geral seguiram a orientação de Leibniz, que (em 1684) adotou o sinal de dois pontos para indicar divisão. Essa diferença persistiu até o século XX. Em 1923, a Mathematical Association of América recomendou que ambas as notações fossem abandonadas em favor da notação fracional, mas a recomendação pouco fez para eliminar da aritmética qualquer uma das duas. Ainda continuamos a escrever expressões diversas de divisão como, por exemplo, 3:4::6:8, entre outras.

### **Símbolo =**

O símbolo de igualdade nem sempre foi representado pelos traços paralelos a que tanto estamos acostumados. No século XVI, François Viète foi o primeiro a usar a palavra *aequalis*, e mais tarde o sinal  $\sim$ , para denotar a igualdade. No entanto, foi o matemático inglês Robert Recorde que inventou o sinal  $=$  e o apresentou pela primeira vez, ao público geral, no seu livro *The Whetstone of Witte* em 1557.

A ideia de Robert Recorde para este símbolo surgiu em seu gabinete de trabalho. Iluminado pela luz de uma vela, ele estava debruçado sobre uma folha repleta de números e letras, com uma pena na mão. Tomando uma decisão, mergulhou a pena no tinteiro e desenhou um tracinho horizontal, e, bem acima, desenhou um segundo traço do mesmo comprimento, rigorosamente paralelo. Colocou a pena sobre a mesa, pegou a folha e ergueu-a esticando bem os braços. Ficou satisfeito com o sinal que havia criado. E com razão, visto que diante dele estava o que se tornaria o mais célebre sinal da matemática, o de igualdade. Pouco depois, quando o sinal já circulava no mundo dos matemáticos, interrogaram Recorde sobre o porquê da escolha. Ele justificava:

“Se escolhi um par de paralelas, é porque elas são duas linhas gêmeas, e nada é mais semelhante que dois gêmeos”.

### **Símbolos < e >**

Os sinais que referenciam relação de grandezas distintas como *menor que* e *maior que* foram introduzidos pelo renomado matemático algebrista e astrônomo inglês Thomas Harriot (1560 - 1621) em (1631 - numa publicação) com o significado atual. Fundador

da escola inglesa de álgebra, Thomas Harriot, teve seus trabalhos desenvolvidos entre o final do século XVI e início do século XVII, algumas décadas depois da introdução e aceitação do sinal gráfico de igualdade em substituição ao texto escrito. Já os símbolos  $\leq$  e  $\geq$  foram introduzidos mais tarde, em 1734, pelo cientista francês e filho de matemático, Pierre Bouger (1698 - 1758).

### Símbolo $\sqrt{\quad}$

Extrair a raiz quadrada de um número  $N$  significa encontrar o número que, multiplicado por si mesmo, resulta em  $N$ . Este conceito foi criado por matemáticos árabes. Eles imaginavam um número, por exemplo, 9, e diziam que ele havia crescido de uma “raiz quadrada” com área igual a 9. Era preciso, então, “extrair a raiz” e perceber que cada lado do quadrado mede 3. A ideia foi adotada por matemáticos europeus no fim da Idade Média, quando, ao traduzirem livros árabes, encontraram tal conceito e passaram a aplicá-lo.

Para simbolizar a raiz, os europeus optaram pela letra  $r$  minúscula, por ser a primeira letra da palavra *radix* (que significa raiz em latim). Acreditamos que o símbolo atual tenha surgido de uma mudança nessa abreviação do  $r$  manuscrito, que passou a sobrepor o número que estava depois dele.

Ele apareceu impresso, pela primeira vez, em 1525 no livro *Die Coss* (1525) do matemático alemão Christoff Rudolff (1499 - 1545), mas sua adoção geral só ocorreu no século seguinte. A vantagem do símbolo usado por Rudolff seria a possibilidade de, estendendo-se o travessão, indicar o número do qual se quer determinar a raiz quadrada, evitando, assim, o duplo entendimento. Com a evolução do uso da operação, convencionou-se a colocação de um índice sobrescrito à esquerda do símbolo para indicar raiz cúbica, raiz quarta etc.

Muitos outros símbolos foram usados de tempos em tempos em aritmética escrita ou impressa, mas que agora estão virtualmente (e felizmente) esquecidos. Notação clara e sem ambiguidade tem sido há tempos reconhecida como ingrediente valioso no progresso de ideias matemáticas. Nas palavras de William Oughtred em 1647, a apresentação simbólica da matemática “nem cansa a memória com multiplicidade de palavras, nem carrega a fantasia ao comparar e pôr as coisas juntas, mas apresenta claramente todo o curso e processo de cada operação”.

# Capítulo 4

## Experiência, Observação e Análise

Ensinar matemática em qualquer nível, especialmente na educação básica, consiste, entre outros fatores, mediar e auxiliar os estudantes a entenderem questões e formas de pensamento que ligam os detalhes da aprendizagem. A atenção dada a tais questões e formas é primordial para a aprendizagem. E, quando bem executada marcará um melhor aproveitamento desta disciplina.

Para Ávila (2010, p.6), “o ensino da Matemática é justificado, em larga medida, pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exhibe, proporcionando ao educando excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais”.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (2017), a apropriação do conhecimento matemático é necessária para todos os discentes da Educação Básica, pois o saber matemático possui grande aplicação social contemporânea. Isso implica o desenvolvimento de uma maneira de raciocinar, que demanda estabelecer conexões entre os eixos da Matemática e entre essa e outras áreas do saber.

Partindo dessas orientações e através de experiências docentes vividas no Centro de Ensino José Malaquias, escola estadual de ensino médio localizada na cidade Lago do Junco (MA), percebeu-se que muitos estudantes estavam longe de uma realidade satisfatória quanto à aprendizagem real e qualitativa da Matemática.

Lago do Junco é uma cidade localizada no interior do estado do Maranhão, na Mesorregião Centro Maranhense e Microrregião Médio Mearim, estando a 316 km da capital São Luís. Possui uma população estimada em 10602 habitantes (IBGE/2015), numa área de 328,525 km<sup>2</sup> e apresenta baixo IDH-M de 0,581 (PNUD/2010). É conhecido regionalmente como grande exportador de óleo de babaçu através da agroindústria do

extrativismo.

Quanto a educação matemática nesta cidade, o nível de aprendizado qualitativo está aquém do esperado. Principalmente no ensino médio, onde muitos alunos ingressam com deficiências no seu aprendizado. Muitas turmas de ensino médio apresentam discrepância no nível de aprendizado de cada aluno, o que torna o manejo didático por parte do professor ainda mais delicado. Chama atenção o fato de a maioria desses alunos não compreenderem as ideias básicas de muitas operações matemáticas como, por exemplo: números inteiros, frações, potências, raízes e divisão, levando os professores a procurarem meios alternativos a fim de superarem tais deficiências. Compreende-se também as dificuldades extra-escolares enfrentadas por muitos discentes do ensino médio, uma vez que boa parte é oriunda do campo, o que dificulta o acompanhamento de atividades escolares.

A Educação juncoense, assim como a de outras cidades da Microrregião do Médio Mearim, apresenta várias dificuldades para realizar a melhoria do ensino e obter uma aprendizagem de qualidade, principalmente no que tange a Matemática. Muitas escolas, por exemplo, não apresentam biblioteca adequada para estudos e o acervo matemático está aquém de uma realidade promissora. Vale ressaltar, que boa parte do acervo matemático do Centro de Ensino José Malaquias vem de conquistas através da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, onde pequenos grupos de alunos da cidade de Lago do Junco conseguem êxito. Na OBMEP 2016, por exemplo, a escola foi agraciada com três menções honrosas e uma medalha de bronze.



Figura 4.1: Premiação OBMEP - Material Didático

Nas escolas da região, muitos são os desafios encontrados para garantir os padrões mínimos na qualidade do ensino. A escola, Centro de Ensino José Malaquias, visa constantemente superar os problemas de aprendizagem dos alunos, buscando garantir um

ensino que atenda as expectativas e os anseios dos estudantes em cada disciplina. Vários são os esforços realizados pela equipe escolar, na busca de resolver esses problemas de aprendizagem que atingem não só a Matemática mas outras disciplinas também.

Sabe-se que a aprendizagem só será possível na medida que a Escola proporcione um ambiente que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e aplicar ideias. Dessa forma, o aluno será atraído a participar das atividades propostas e consequentemente da construção do seu conhecimento.

Dadas as situações descritas e as várias tentativas metodológicas na busca de uma melhor conexão entre ensino e aprendizagem, resolvi, verificar como estava o conhecimento dos alunos sobre uma importante área da Matemática, a História da Matemática.

O primeiro passo acerca deste trabalho foi aplicar uma atividade simples e de resolução trivial a 33 alunos de 2º ano e 20 alunos de 3º ano, ambos no turno matutino, no início do terceiro período do ano letivo de 2016.

Os alunos deveriam resolver os seguintes itens:

1. Cite o nome de 5 grandes matemáticos históricos;
2. Qual a relação de cada um, citado acima, com a História da Matemática?
3. Essas informações sobre os matemáticos foram adquiridas na escola ou fora dela?

C E JOSÉ MALAQUIAS  
DISCIPLINA: MATEMÁTICA  
ALUNO (A):

PROFESSOR: HIDERALDO MEDEIROS  
SÉRIE: 3º ANO

1ª VERIFICAÇÃO – 09/08/2016

**INSTRUÇÕES:**

- Não será permitido o uso de celulares ou qualquer tipo de aparelho similar assim como qualquer tipo de consulta;
- As citações poderão ser escritas a lápis, caneta azul ou preta;
- Não tente colar. Atente ao fato de que fazer isso, em geral, dá mais trabalho do que estudar.

1. Cite o nome de 5 grandes matemáticos históricos.
2. Qual a relação de cada um, citado acima, com a História da Matemática?
3. Essas informações sobre os matemáticos foram adquiridas na escola ou fora dela?

Figura 4.2: Primeira Atividade

Para surpresa geral e desespero de muitos discentes, os resultados foram muito

abaixo do esperado. Muitos dos alunos entregaram a atividade completamente sem resolução e outros tantos sem concluí-la totalmente. Para se ter uma ideia, aproximadamente 75% dos alunos citaram apenas Pitágoras e Bhaskara para o primeiro item da atividade. Constatamos, a partir deste diagnóstico preliminar e dos comentários por parte dos alunos, que os mesmos não tinham conhecimento sobre o passado matemático, e, principalmente, demonstraram real desconhecimento do poder que esta ciência tem em transformar o mundo.

Vale ressaltar que, em 2016, as consequências quanto a falta de aprendizagem dos alunos desta unidade de ensino foram desanimadoras. Tanto que, diante de tais fatos fez-se necessário repensar a proposta pedagógica da escola, focando essencialmente nas áreas críticas, entre elas, a Matemática.

Constatou-se que o ensino de matemática necessitava de um trabalho escolar diferenciado com o intuito de auxiliar esses alunos, e, futuramente outros também, na perspectiva de norteá-los para um aprender matemático consistente, motivador e conhecedor das maravilhas que a Matemática nos oferece.

Sentindo a necessidade de mudar essa realidade, que é inerente a muitas outras escolas também, sugerimos, no início do ano letivo de 2017, à equipe escolar do Centro de Ensino José Malaquias a implementação de um projeto voltado para esse problema. Onde o objetivo inicial seria aproximar os alunos da Matemática através de episódios históricos, buscando motivá-los e sanar eventuais deficiências no aprendizado matemático. Tivemos aceitação assim como dificuldades e resistências diversas, principalmente, no que tange a aplicação em sala de aula, uma vez que alguns professores se sentiam inseguros com a ideia. Apesar das dificuldades seguimos em frente e conseguimos resultados satisfatórios, e, no aspecto motivacional, o aprender matemático ganhou uma nova roupagem.

Um momento importante na prática dessa ideia foi a elaboração e construção de seminários, tendo como base episódios e fatos da História da Matemática. Neles, contamos com a participação efetiva dos alunos do terceiro ano matutino - ensino médio - do Centro de Ensino José Malaquias (CEJM). As pesquisas e apresentações marcaram um forte elo na socialização dos conhecimentos, possibilitando, entre outras coisas: conhecer a história da Matemática; perceber a evolução da Matemática como ciência; melhorar a autoestima através da motivação em aprender matemática e corrigir eventuais falhas/deficiências quanto ao aprendizado.



Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, pois no ensino da Matemática destacam-se dois aspectos básicos: relacionar observações do mundo real com representações e relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. O aluno deve falar e escrever sobre Matemática.

Os seminários foram caracterizados pela exposição oral, utilizando materiais de apoio adequados aos assuntos. Constituíram uma estratégia de ensino, aprendizagem e avaliação vantajosa, pois possibilitaram a transmissão verbal das informações pesquisadas de forma eficaz e contribuíram para a aprendizagem do ouvinte e do expositor.

No início, muitos alunos sentiram dificuldades em pesquisar bibliograficamente sobre matemáticos e episódios históricos. Recorrendo, na maioria das vezes, à Internet. Salientamos e direcionamos para uma pesquisa diversa e com fontes variadas, principalmente, bibliográfica. Para isso, os estudantes foram direcionados quanto a delimitação do tema, ao fornecimento bibliográfico e de fontes de pesquisa, esclarecidos quanto aos procedimentos apropriados de apresentação, à solicitação de relatório de pesquisa e registro de todos os alunos. Construiu-se a partir daí um estigma investigativo e pesquisador junto aos discentes. Muitos se sentiram contagiados em aprender a pesquisar de forma ampla, o que contribuiu também para a melhoria na aprendizagem em outras disciplinas do currículo.

Sabe-se que o seminário sempre se associa a outras estratégias, pois exige pesquisa, planejamento, registros, debate, organização das informações e visa desenvolver também a oralidade em público.

## **4.1 Alunos do Centro de Ensino José Malaquias - Lago do Junco (MA) - Seminários**

As realizações das pesquisas e apresentações dos seminários ocorreram de março a junho de 2017, durante os dois primeiros períodos avaliativos. Na ocasião, todos os alunos do terceiro ano matutino do CEJM participaram e concluíram suas atividades.

Neles, foram destacados e explanados vários temas, tais como: símbolos matemáticos, o zero, o número  $\pi$ , a Geometria, a Aritmética, Souza, Newton, Leibniz, Fermat, Agnesi, Descartes, Pitágoras, Gauss, Steinmetz, Pascal, Sophie Germain, Cavalieri, Tales,

entre outros, destacando sempre a importância histórica da Matemática, o que contribuiu positivamente para o alcance dos objetivos e execução do trabalho pedagógico.

### 4.1.1 Gauss

O ápice desta exposição se concentrou, evidentemente, no famoso episódio da soma dos naturais de 1 a 100. Afinal, é uma história bastante interessante onde, na maioria das vezes, os alunos encarnam o personagem do pequeno aluno Gauss que se mostra mais esperto que o seu professor. Trabalhar este episódio histórico em sala de aula desperta grande interesse no aluno em descobrir por conta própria fórmulas ou meios de resoluções mais práticos. Fazendo-os refletir que existem pessoas reais atrás da matemática e na criação das fórmulas encontradas por eles nos livros didáticos.



Figura 4.3: Seminário - Gauss

### 4.1.2 Pitágoras: Mistérios e Contribuições

Os alunos desenvolveram esta atividade expondo, em especial, as curiosidades acerca de Pitágoras e dos pitagóricos, mostrando suas contribuições matemáticas, a ideia musical e os mistérios da Escola Pitagórica. Utilizaram o momento para exemplificar a famosa regra de ouro, as construções históricas e a pintura renascentista com base no retângulo de ouro. Os demais alunos ouvintes, sentiram-se entusiasmados e demonstraram interesse em ir além do tema proposto. E, isso foi preponderante para o desenvolvimento do trabalho, uma vez que os objetivos em torno do conhecimento e da motivação em aprender mais e mais com a matemática tinham sido alcançados.



Figura 4.4: Seminário - Pitágoras

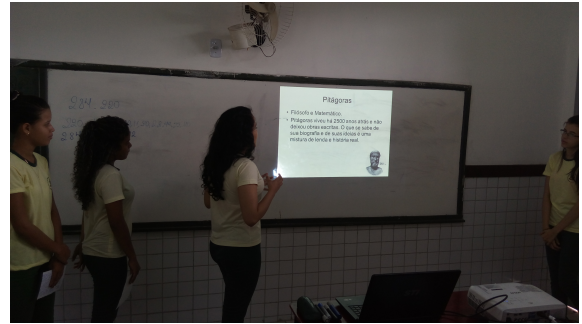


Figura 4.5: Seminário - Pitágoras

### 4.1.3 Descartes

“Penso, logo existo”. Esta é a frase mais famosa dita por Descartes. Se ele é mais conhecido como grande filósofo, então por que ele aparece na História da Matemática? Coube a outro grupo composto por quatro alunos do 3º ano do CEJM a incumbência de responder essa questão.

Uma das soluções que o grupo apresentou e que foi bastante positiva foi o fato de ele se apegar à Matemática com o intuito de descobrir a verdade sem ceticismo. Destacaram também a importância das coordenadas cartesianas, dando como exemplo de aplicação o sobe e desce nas bolsas de valores e sua leitura facilitada através de gráficos no plano cartesiano, culminando em ajuda didática para as aulas de Geometria Analítica e na construção de gráficos.

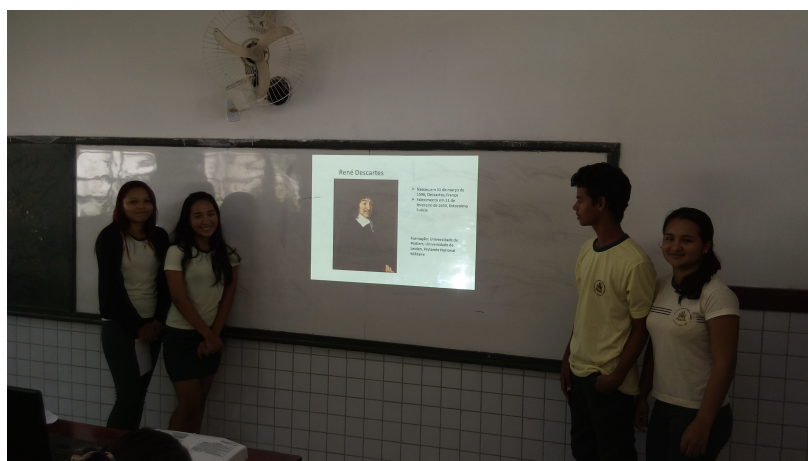


Figura 4.6: Seminário - Descartes.

#### 4.1.4 Símbolos Matemáticos - Breve Histórico

Em sala de aula, a apresentação de episódios históricos matemáticos fornecem uma visão ampla e de originalidade que rodeia esta ciência, mesmo que o conteúdo em destaque no período letivo não esteja inteiramente ligado com o episódio proposto. Apesar de importantes para a matemática atual, muitos símbolos nos foram repassados e os assimilamos de maneira direta sem nos preocuparmos sobre suas origens. O objetivo central deste tema, proposto em seminário, foi mostrar, em breve histórico, os principais e usuais símbolos matemáticos, suas necessidades históricas, assim como algumas curiosidades, dando ênfase ao aspecto de que muitos matemáticos agiram por uma razão e construíram trabalhos através de uma vasta colaboração entre gerações de outros matemáticos.



Figura 4.7: Seminário - Símbolos Matemáticos

#### 4.1.5 O Zero

Uma equipe de alunos do 3º ano do CEJM apresentou a evolução do zero, partindo das primeiras ideias, passando pela casa vazia, espaços em branco para enfim transforma-se em um símbolo na Índia.

Na ocasião, fizeram um paralelo entre o mundo antes do zero e o pós zero, mostrando dessa forma a sua importância para a Matemática. Por fim, aproveitaram para explicitar operações matemáticas que envolvem o zero, principalmente as divisões, eliminando assim possíveis deficiências de aprendizado.



Figura 4.8: Seminário - O Zero

#### 4.1.6 Fermat

Vários foram os legados deixados por essa apresentação que contribuíram de forma positiva para o aspecto motivacional da aprendizagem matemática. Dentre eles, destacaram-se: o fato de Fermat ter se tornado famoso não por conta de sua profissão e sim de seu hobby, e seu hobby era a Matemática, permitindo aos alunos pensarem que mesmo exercendo uma outra profissão podem e devem continuar a estudar Matemática; o enigmático e intitulado Último Teorema de Fermat e a realização do sonho de criança de Andrew Wiles.

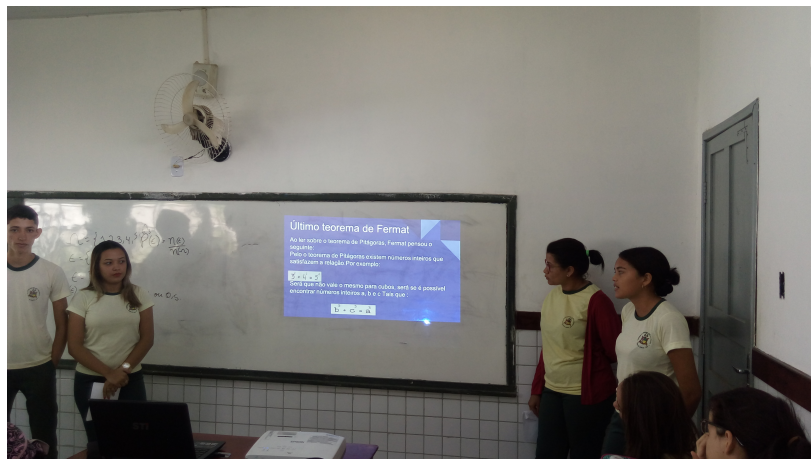


Figura 4.9: Seminário - Fermat

#### 4.1.7 Maria Gaetana Agnesi

A ideia centralizadora deste tema foi demonstrar aos discentes, e em especial as meninas, que a mulher tem o mesmo potencial do homem para aprender matemática. Tendo capa-

idades intelectuais que as permitem obter sucesso em qualquer área do conhecimento.

Sabemos que a identificação masculina desta disciplina é histórica e, no Brasil, se evidenciou com a introdução do ensino de matemática nas academias militares, antigamente frequentadas, predominantemente, por homens. Mas, ressaltamos que, atualmente, a mulher tem conseguido destaque em diversas áreas da sociedade, inclusive na matemática. O que reforça ainda mais o seu poder de superação entre as discriminações referentes ao gênero, possibilitando quebrar barreiras e buscar vãos mais altos.

A história de Agnesi contagiou positivamente as discentes, estimulando-as quanto à motivação em mostrar que também podem superar os desafios da aprendizagem matemática ou ir além do que haviam imaginado inicialmente.

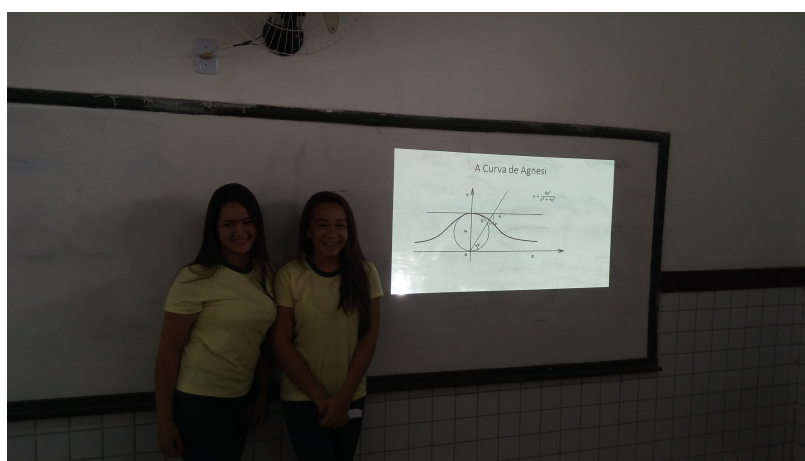


Figura 4.10: Seminário - Maria Gaetana Agnesi

#### 4.1.8 Newton $\times$ Leibniz

Quatro alunos do 3º ano do Centro de Ensino José Malaquias - CEJM apresentaram seu trabalho baseados no documentário Matemática e o Início da Civilização: O Mundo em Movimento, exibido na TV Escola. No qual destacaram um importante momento da batalha do Cálculo, que foi a carta de Johann Bernoulli aos matemáticos da época. Entre eles, Newton e Leibniz, que travaram o duelo mais acirrado da História da Matemática, sendo o desafio de Bernoulli o centro desse conflito.

O desafio da carta de Bernoulli dizia o seguinte: Dados dois pontos A e B. Que curva faria um corpo se mover entre A e B usando a gravidade no tempo mais rápido?

O trabalho prendeu muito a atenção da plateia que queria descobrir o desfecho

da apresentação, observando e questionando quanto importância da Matemática para os matemáticos e não-matemáticos.

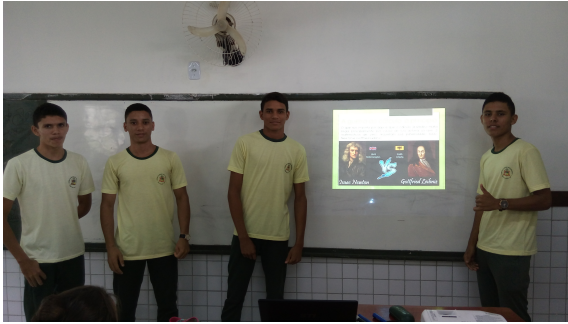


Figura 4.11: Seminário - Newton  $\times$  Leibniz

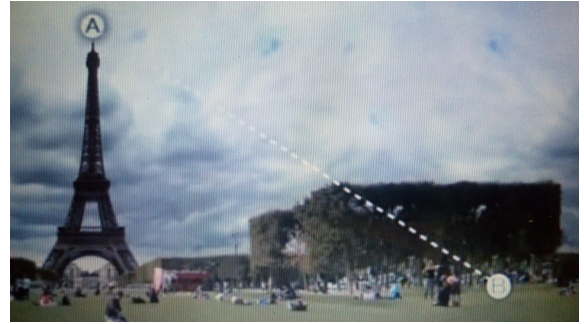


Figura 4.12: Ilustração - Desafio

### 4.1.9 Pascal

Segundo Boyer (1968), Pascal é uma das figuras mais importantes no desenvolvimento da Matemática, tanto que Leibniz mais tarde escreveu que foi ao ler a obra de Pascal que uma luz subitamente pairou sobre ele.

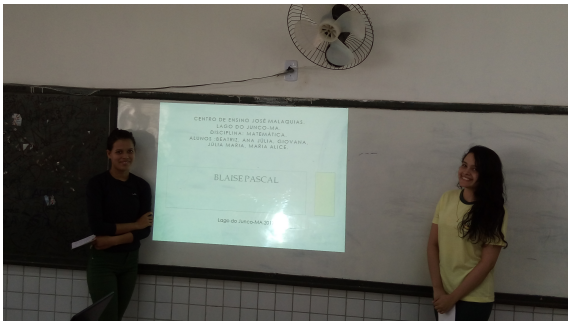


Figura 4.13: Seminário - Pascal



Figura 4.14: Biografia

Os pontos de maiores destaques na apresentação das cinco estudantes do CEJM para fins deste trabalho foram: as ideias de Pascal quanto ao triângulo aritmético, o que possibilitou no resgate de alguns conceitos matemáticos vistos no ano letivo anterior e a sua máquina de calcular, a Pascalina.

Quanto a Pascalina, máquina de somar inventada por Pascal em 1642, vários comentários foram feitos quanto a importância e aplicabilidade à época. Outro momento importante, na apresentação da equipe, foi a comparação paralela entre essa máquina e as calculadoras atuais, possibilitando exemplificar a evolução tecnológica através da Matemática.

Esse tema também gerou discussões saudáveis quanto aos momentos ideais de utilização ou não da calculadora em sala de aula, possibilitando comentar sobre um tópico bastante importante na aprendizagem matemática.

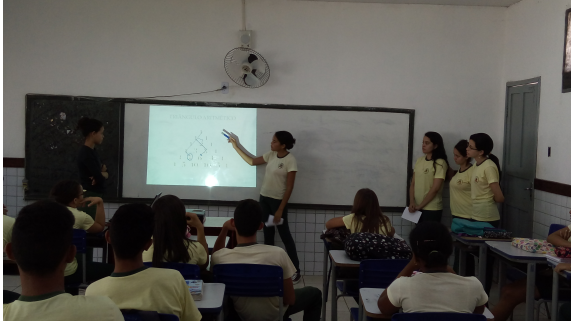


Figura 4.15: Triângulo Aritmético



Figura 4.16: A Pascalina

#### 4.1.10 Sophie Germain

Essa pesquisa e sua respectiva apresentação foi encorajada principalmente pelo aspecto positivo na apresentação sobre Agnesi. Aqui, veio à tona mais uma vez, o poder que a mulher tem e pode ter sobre as Ciências, em especial, sobre a Matemática. Além disso, abriu-se espaço para comentários diversos, inclusive sobre os números primos.



Figura 4.17: Seminário - Sophie Germain

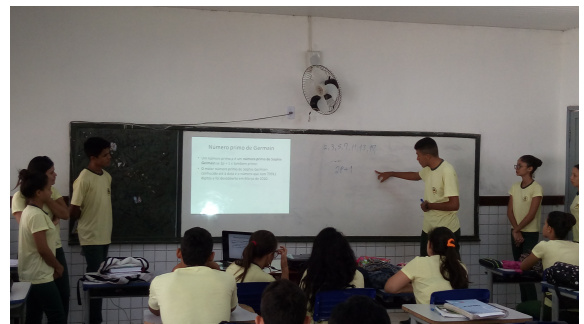


Figura 4.18: Primo de Germain

#### 4.1.11 “Souzinha”, O Maior Matemático da História do Brasil

Dentre todas as apresentações, esta foi a que mais prendeu a atenção e despertou interesse dos discentes pelo passado da Matemática. Muito se deu pelo fato de relatar a vida e obra de um ilustríssimo maranhense, até então desconhecido pelos estudantes, numa área tão seleta.





Figura 4.19: Seminário - Souzainha

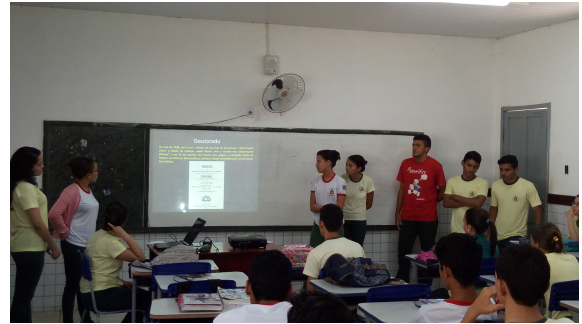


Figura 4.20: Tese de Doutorado

Os relatos e comentários feitos durante e depois da apresentação mostraram, entre outros aspectos, a imagem esquecida de um ícone e a fonte de inspiração para muitos outros estudantes, principalmente maranhenses.

Durante a pesquisa discente, que antecedeu a apresentação do seminário, uma série de entrevistas foram feitas a outros estudantes e professores da cidade de Lago do Junco acerca de Joaquim Gomes de Souza, o “Souzinha”. Todos os entrevistados, inclusive os professores, demonstraram total desconhecimento sobre esse célebre matemático maranhense. Isso, segundo os alunos, chamou bastante atenção.

Através deste seminário mostrou-se a importância das passagens históricas da Matemática para o conhecimento humano e o reconhecimento do trabalho desta figura histórica que nos deixou enormes contribuições.

Muitos alunos se sentiram orgulhosos em saber que o Maranhão tem em sua história um grande personagem da Matemática. Isso fez pairar o sentimento de que se deve comentar mais sobre Gomes de Souza nas aulas de matemática, estimulando dessa forma a motivação para a aprendizagem.



Figura 4.21: Souzainha - Cauchy



Figura 4.22: Biênio da Matemática

Por fim, o grupo salientou para a importância dos anos 2017 e 2018 para a Mate-

mática no Brasil. Uma vez que foram instituídos como Biênio da Matemática Joaquim Gomes de Souza em justíssima homenagem a Souzainha.

## 4.2 Qualificação dos resultados

A partir das exposições, verificou-se que o espírito investigativo presente nas ações dos estudantes melhorou qualitativamente. Proporcionando, entre outros fatores: desejo, entusiasmo, socialização e motivação na busca do conhecimento. Suas convicções acerca da matemática se tornaram mais convincentes, ao passo que a confiança nas suas argumentações se mostraram visíveis.

O uso desses episódios históricos trouxe ganhos enormes para o processo de aprendizagem matemática nesta unidade de ensino. Uma vez que os caminhos de sua exploração foram bastante diversificados. Podemos destacar que a motivação em repassar o que pesquisaram e aprenderam foi também um ponto marcante nesta etapa, permitindo a eles, muitas das vezes, uma identificação com o tema ou com uma grande figura histórica.

Houve uma melhora significativa no estudo da Matemática, permitindo afastar o estigma de disciplina difícil que a mesma detinha. Nesta mesma linha, ajudou a encorajar os discentes quanto às provas e avaliações de matemática, deixando-os mais relaxados e longe de qualquer pavor quanto ao agendamento de avaliações.

Recuperamos a autoestima de muitos alunos melhorando o índice quantitativo das médias do 3º ano do ensino médio desta unidade de ensino. No ano letivo de 2016, a referida série de ensino apresentou uma reprovação de 35% e atualmente está com mais de 90% de seus alunos acima da média aprovativa.

Os maiores ganhos foram qualitativos, onde conseguiu-se superar várias deficiências de aprendizado, despertando no aluno o poder de desenvolver suas potencialidades intelectuais, tornando as aulas de matemática ainda mais produtivas.

Partindo da ideia que as razões maiores para o ensino de matemática está intrinsecamente ligado à riqueza de diferentes métodos e criatividade de ambos os lados (professor e aluno), foi então plantada uma semente da qual esperamos mais, e melhores frutos.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

O ensino de matemática exige metodologias que conduzam o educando a adquirir autonomia, confiança e prazer em aprender os conteúdos ministrados. A busca por metodologias a fim de melhorar o processo de ensino e aprendizagem tem sido um grande desafio para educadores matemáticos.

Dessa forma, o presente trabalho sugeriu o uso de passagens históricas da Matemática com o intuito de exemplificar a importância desta ciência, além de criar um ambiente de motivação para a aprendizagem desta disciplina.

É comum nas aulas de matemática da educação básica, os alunos curiosamente perguntarem: “Quem inventou a Matemática?”. Partindo desta curiosidade dos discentes e que também já foi minha nos tempos de ensino fundamental, cheguei ao tema deste trabalho onde a sua aplicação contribuiu positivamente para a aprendizagem qualitativa dos educandos.

Mostramos aqui, que a História da Matemática como metodologia de ensino é um meio, que não se encerra em si mesmo, para auxiliar na resolução dos problemas de aprendizagem matemática que atingem não só a escola em destaque mas muitas outras escolas.

Com base nos resultados e nos benefícios vivenciados com a introdução da História da Matemática como metodologia de ensino no Centro de Ensino José Malaquias, levaremos a temática abordada nesta proposta para as demais escolas e eventos matemáticos a fim de melhorar a aprendizagem matemática.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a elaboração de sequências contemplando episódios ou problemas históricos motivadores são caminhos para a inserção

da História da Matemática nas aulas de matemática.

Discutir ou apresentar sua origem histórica são aspectos importantes para o conhecimento geral de qualquer ciência. No que se refere à Matemática, percebe-se que, na maioria das vezes, alguns alunos demonstram certa resistência a determinados conteúdos apresentados de forma abstrata ou distante da sua realidade, fortalecendo uma possível aversão à disciplina.

Este trabalho acenou para a importância de se ter uma escola que considere os aspectos históricos como herança cultural. A escola, enquanto instituição inserida na sociedade, não deve ficar à margem dos processos que se desenvolveram ao longo do tempo e da importância das ciências na vida dos discentes.

Dada a complexidade deste assunto, é preciso deixar claro que as questões levantadas e desenvolvidas aqui se direcionam no sentido de contribuir para a compreensão da importância de se pensar a Educação Matemática bem como o uso de novas metodologias que potencializem a aprendizagem dos alunos.

É importante salientar sobre os benefícios tecnológicos que a sociedade nos oferece são decorrentes da evolução científica e da Matemática. A escola deve considerar os avanços, discutindo e formulando situações que favoreçam o uso de metodologias com esse propósito. Dessa forma, o aluno poderá se tornar mais participativo no seu processo de aprendizagem, contribuindo assim para o seu desenvolvimento.

O uso da História da Matemática como metodologia de ensino não se encerra em “contar histórias”, é necessário discutir e formular situações que favoreçam o uso de episódios históricos enquanto metodologia de ensino para atividades que proporcionem ao aluno o debate, o pensar, a resolução de problemas, o desafio e a motivação em aprender matemática.

Fornecer uma moldura dos principais matemáticos e dos eventos importantes que formaram a Matemática que conhecemos atualmente, assim como a sua aplicação enquanto ciência transformadora, atrai cada vez mais o aluno para o campo do conhecimento e da superação das dificuldades de aprendizagem.

Por fim, espera-se que este trabalho venha a oferecer subsídios para considerar as possibilidades da História da Matemática enquanto metodologia de ensino na aula de Matemática, objetivando um trabalho mais apurado por parte do professor no desencadear do processo de ensino e na aprendizagem de seus alunos. Espera-se também, que a leitura

contribua não apenas para melhorar a prática pedagógica por parte dos professores, mas para enriquecer a cultura matemática, fomentando a busca criativa de alternativas para tornar o ensino da Matemática mais interessante, dinâmico e prazeroso.

## Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. S. de S. **Várias faces da matemática**: tópicos para licenciatura e leitura geral. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010. 203p.
- [2] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza Gomide, Helena Castro. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010. 279p.
- [3] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.
- [4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.
- [5] BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Blucher, 1991.
- [6] Coleção Explorando o Ensino. Matemática, volume 3. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2004.
- [7] D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática**. In: BICUDO, Maris Aparecida Viggiani (Ed.) Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, pg. 97 - 115, 1999.
- [8] DEVELAY, M. **Donner du sens à l'école**. Paris: ESF, 1996. p.10.
- [9] HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [10] <https://conhecimentoinfinito.wordpress.com/2010/10/29/souzinha-matematico/>.
- [11] LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. 3ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2007.

- [12] LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. 6ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [13] MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História da Matemática: propostas e desafios**. (Coleção tendências em educação matemática). 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- [14] MORGADO, A. C., WAGNER E., ZANI S. C. **Progressões e matemática financeira** 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- [15] NETO, E. R. **Didática da Matemática**. 11ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2006. 224p.
- [16] PEREIRA, L. H. F. **Teorema de Pitágoras - lembranças e desencontros na matemática**. Passo Fundo: UFP, 2002. Revista Construir Notícia. N°41 - ano 07, 2008. p03.
- [17] Revista Professor de Matemática 63 - RPM 63. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Rio de Janeiro, 2007.
- [18] RIBEIRO, Amanda Gonçalves. “Maria Gaetana Agnesi”; Brasil Escola. Disponível em <<http://brasilestola.uol.com.br/biografia/maria-gaetana-agnesi.htm>>. Acesso em 06 de julho de 2017.
- [19] ROQUE, T. CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [20] SANTOS, L. M. dos. **Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática**. Curitiba: Ibpx, 2009.
- [21] <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JoaGSouz.html>.