



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA  
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DÂNDARA LINHARES BATISTA BARBOSA

**O *SKETCHUP* COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO-APRENDIZAGEM  
DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

PORTO VELHO

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Fundação Universidade Federal de Rondônia  
Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

---

B238s Barbosa, Dândara.

O SketchUp como ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem de sólidos geométricos / Dândara Barbosa. – Porto Velho, RO, 2017.

94 f. : il.

Orientador(a): Prof.<sup>a</sup> Ma. Marizete Nink de Carvalho

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação  
Universidade Federal de Rondônia

1. SketchUp. 2. Sólidos geométricos. 3. Ensino-aprendizagem. I. Carvalho,  
Marizete Nink de. II. Título.

CDU 51:004.41

---

Bibliotecário(a) Ozelina do Carmo de Carvalho

CRB 11/486

DÂNDARA LINHARES BATISTA BARBOSA

O *SKETCHUP* COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE  
SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Trabalho de Conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Ma. Marizete Nink de Carvalho.

PORTO VELHO  
2017

**DÂNDARA LINHARES BATISTA BARBOSA**  
**O SKETCHUP COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE**  
**SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

Este Trabalho foi julgado e aprovado para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, Polo da Universidade Federal de Rondônia.

Porto Velho, 24 de novembro de 2017.

**Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva**

Coordenador no Polo da Universidade Federal de Rondônia do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UNIR

**COMISSÃO EXAMINADORA**

**Prof. Ma. Marizete Nink de Carvalho**

Orientadora/Presidente

PROFMAT/UNIR

**Prof. Dr. Flávio Batista Simão**

Membro Interno

PROFMAT/UNIR

**Prof. Dra. Maria das Graças Viana de Sousa**

Membro Externo

À Cindy Linhares Batista Barbosa, pois mesmo enfrentando as maiores adversidades, precisamos lembrar-nos sempre que a persistência, a vontade e o companheirismo nos tornam mais fortes.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Deus – Maior Matemático e Arquiteto, por ter me preenchido com a força que eu não encontrava mais.

Aos meus pais, Vivaldo da Silva Barbosa e Maria Gláucia Linhares Batista, por me ensinarem a persistir sempre.

Às minhas irmãs, Cindy Linhares Batista Barbosa e Erêndira Linhares Batista Barbosa, pelo apoio e paciência em mais esta etapa.

À Marcus Vinícius Oliveira Braga, pelo amor e companheirismo.

À orientadora, Prof. Ma. Marizete Nink de Carvalho, pelo suporte na construção deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT – UNIR: Dr. Marinaldo Felipe da Silva, Dr. Flávio Batista Simão, Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez e Me. Ronaldo Cavalcanti pelo ensino e aprendizado.

Aos membros da banca: Ma. Marizete Nink de Carvalho, Dr. Flávio Batista Simão e Dra. Maria das Graças Viana de Sousa.

Aos amigos e familiares, pela torcida.

## RESUMO

O avanço tecnológico é uma crescente realidade no cotidiano e o uso de instrumentos tecnológicos em casa e no trabalho já faz parte da rotina das pessoas. Nos últimos tempos, tem-se buscado alternativas de ensino que contribuam com a melhoria do processo ensino-aprendizagem nas escolas, com destaque para as Tecnologias de Informação e Comunicação e o uso de computadores como instrumento de ensino. Sabe-se que a disciplina de Matemática é uma das que mais são observadas dificuldades dos alunos e, portanto, quaisquer propostas de métodos de ensino podem (e devem) ser analisadas visando sempre o sucesso escolar. Este trabalho propõe o uso do *software SketchUp* como ferramenta de auxílio no ensino-aprendizagem de um ramo da Matemática: a Geometria Espacial. Para o desenvolvimento deste, foram analisadas as críticas e observações de autores (em sua maioria professores de Matemática) acerca do ensino de Geometria nas escolas. Pautando-se nestas observações, recomenda-se a utilização do *software* como metodologia interativa de ensino de sólidos geométricos, apresentando a construção detalhada dos principais sólidos no programa, com o objetivo de melhorar a visão espacial dos alunos e, por consequência, o rendimento na disciplina de Matemática.

**Palavras-chave:** *SketchUp*. Sólidos Geométricos. Ensino-Aprendizagem.

## ABSTRACT

Technological advancement is a growing reality in everyday life and the use of technological tools at home and at work is already part of people's routine. In recent times, we have sought educational alternatives that contribute to improving the teaching-learning process in schools, with emphasis on Information and Communication Technologies and the use of computers as a teaching tool. It is known that the discipline of Mathematics is one of the most observed difficulties of the students and, therefore, any proposals of teaching methods can (and should) be analyzed aiming always at school success. This work proposes the use of SketchUp software as a teaching aid tool for a branch of Mathematics: Spatial Geometry. For the development of this, we analyzed the criticisms and observations of authors (mostly Mathematics teachers) about the teaching of Geometry in schools. Based on these observations, it is recommended to use the software as an interactive methodology for teaching geometric solids, presenting the detailed construction of the main solids in the program, with the aim of improving students' spatial vision and, consequently, Mathematics discipline.

**Keywords:** SketchUp. Geometric Solids. Teaching-Learning.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 01: Habilidades e Competências que envolvem Geometria segundo o ENEM

**18**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Alunos nomeando os sólidos geométricos representados nas estruturas em papel	20
Figura 02: Interface do Geogebra	23
Figura 03: Construção de um cubo no <i>software</i> Construfig3d	24
Figura 04: Construção clássica de geometria com o Cábri-Géomètre	24
Figura 05: Icosaedro no programa <i>Poly</i>	25
Figura 06: Indicação de instalação do <i>software</i> <i>SketchUp</i>	27
Figura 07: Procedimento para inicialização do <i>software</i> <i>SketchUp</i>	28
Figura 08: Procedimento para inicialização do <i>software</i> <i>SketchUp</i>	28
Figura 09: <i>Interface</i> de trabalho do <i>software</i> <i>SketchUp</i>	28
Figura 10: Elementos da <i>Interface</i> de trabalho do <i>software</i> <i>SketchUp</i>	29
Figura 11: Elementos dos poliedros	31
Figura 12: Tetraedro	32
Figura 13: Apótema e altura no tetraedro	33
Figura 14: Demonstração do 1º passo de construção do tetraedro	34
Figura 15: Demonstração do 2º passo de construção do tetraedro	34
Figura 16: Demonstração do 3º passo de construção do tetraedro	35
Figura 17: Demonstração do 4º passo de construção do tetraedro	35
Figura 18: Demonstração do 5º passo de construção do tetraedro	35
Figura 19: Demonstração do 6º passo de construção do tetraedro	36
Figura 20: Demonstração do 7º passo de construção do tetraedro	36
Figura 21: Hexaedro	37
Figura 22: Diagonais do hexaedro	37
Figura 23: Demonstração do 1º passo de construção do hexaedro	38
Figura 24: Demonstração do 2º passo de construção do hexaedro	39
Figura 25: Octaedro	39
Figura 26: Demonstração do 1º passo de construção do octaedro	40
Figura 27: Demonstração do 2º passo de construção do octaedro	41
Figura 28: Demonstração do 3º passo de construção do octaedro	41
Figura 29: Demonstração do 4º passo de construção do octaedro	42
Figura 30: Demonstração do 5º passo de construção do octaedro	42
Figura 31: Demonstração do 6º passo de construção do octaedro	42
Figura 32: Demonstração do 7º passo de construção do octaedro	43
Figura 33: Demonstração do 8º passo de construção do octaedro	43
Figura 34: Dodecaedro	44
Figura 35: Demonstração do 1º passo de construção do dodecaedro	45
Figura 36: Demonstração do 3º passo de construção do dodecaedro (parte 01)	45
Figura 37: Demonstração do 3º passo de construção do dodecaedro (parte 02)	46
Figura 38: Demonstração do 4º passo de construção do dodecaedro	46
Figura 39: Demonstração do 5º passo de construção do dodecaedro	47
Figura 40: Demonstração do 6º passo de construção do dodecaedro	47
Figura 41: Icosaedro	48
Figura 42: Demonstração do 1º passo de construção do icosaedro	49
Figura 43: Demonstração do 2º passo de construção do icosaedro	49
Figura 44: Demonstração do 3º passo de construção do icosaedro	50
Figura 45: Demonstração do 4º passo de construção do icosaedro	50
Figura 46: Demonstração do 5º passo de construção do icosaedro	51

Figura 47: Demonstração do 6º passo de construção do icosaedro	51
Figura 48: Elementos do prisma	52
Figura 49: Tipos de prismas	53
Figura 50: Demonstração do 1º passo de construção de prismas	54
Figura 51: Demonstração do 2º passo de construção de prismas	54
Figura 52: Elementos da pirâmide	55
Figura 53: Tipos de pirâmides	56
Figura 54: Apótemas, raio e altura da pirâmide	56
Figura 55: Demonstração do 1º passo de construção de pirâmides	58
Figura 56: Demonstração do 2º passo de construção de pirâmides	58
Figura 57: Demonstração do 3º passo de construção de pirâmides (parte 01)	58
Figura 58: Demonstração do 3º passo de construção de pirâmides (parte 02)	59
Figura 59: Elementos do tronco de pirâmide	60
Figura 60: Demonstração do 1º passo de construção de troncos de pirâmide	61
Figura 61: Demonstração do 2º passo de construção de troncos de pirâmide	62
Figura 62: Demonstração do 3º passo de construção de troncos de pirâmide	62
Figura 63: Demonstração do 4º passo de construção de troncos de pirâmide	62
Figura 64: Demonstração do 5º passo de construção de troncos de pirâmide	63
Figura 65: Demonstração do 6º passo de construção de troncos de pirâmide	63
Figura 66: Elementos do cilindro	64
Figura 67: Demonstração do 1º passo de construção de cilindro	66
Figura 68: Demonstração do 2º passo de construção de cilindro	66
Figura 69: Elementos de cone	67
Figura 70: Demonstração do 1º passo de construção de cone	68
Figura 71: Demonstração do 2º passo de construção de cone	69
Figura 72: Demonstração do 3º passo de construção de cone	69
Figura 73: Demonstração do 4º passo de construção de cone	70
Figura 74: Elementos do tronco de cone	71
Figura 75: Demonstração do 1º passo de construção de tronco de cone	72
Figura 76: Demonstração do 2º passo de construção de tronco de cone	72
Figura 77: Demonstração do 3º passo de construção de tronco de cone	72
Figura 78: Demonstração do 4º passo de construção de tronco de cone	73
Figura 79: Demonstração do 5º passo de construção de tronco de cone	73
Figura 80: Demonstração do 6º passo de construção de tronco de cone	73
Figura 81: Elementos da esfera	74
Figura 82: Fuso esférico e cunha esférica	74
Figura 83: Demonstração do 1º passo de construção de esfera	75
Figura 84: Demonstração do 2º passo de construção de esfera (parte 01)	75
Figura 85: Demonstração do 2º passo de construção de esfera (parte 02)	76
Figura 86: Demonstração do 3º passo de construção de esfera	76

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2.</b>	<b>O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL</b>	<b>17</b>
<b>2.1.</b>	<b>Os livros didáticos</b>	<b>19</b>
2.1.1.	Como o material apresenta a geometria espacial e os sólidos geométricos	19
2.1.2	Como os exercícios trabalham com as imagens dos sólidos	20
<b>2.2</b>	<b>Quais as dificuldades do aluno em visualizar os sólidos geométricos?</b>	<b>20</b>
<b>3.</b>	<b>O USO DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NAS ESCOLAS</b>	<b>22</b>
<b>3.1.</b>	<b>As tecnologias nas aulas de matemática</b>	<b>22</b>
<b>3.2.</b>	<b>As tecnologias no ensino da geometria</b>	<b>23</b>
<b>4.</b>	<b>CONHECENDO O SOFTWARE SKETCHUP</b>	<b>26</b>
<b>4.1.</b>	<b>Como obter o programa</b>	<b>27</b>
<b>4.2.</b>	<b>Interface do <i>software</i></b>	<b>29</b>
<b>4.3.</b>	<b>Principais comandos</b>	<b>30</b>
<b>5.</b>	<b>SKETCHUP COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS</b>	<b>31</b>
<b>5.1.</b>	<b>Poliedros</b>	<b>31</b>
5.1.1.	Poliedros de Platão	32
5.1.1.1.	Tetraedro	32
5.1.1.1.1.	Elementos do tetraedro	32
5.1.1.1.2.	Área da base	33
5.1.1.1.3.	Área total	33
5.1.1.1.4.	Volume	33
5.1.1.1.5.	Construindo um tetraedro no <i>SketchUp</i>	33
5.1.1.2.	Hexaedro	37
5.1.1.2.1.	Elementos do hexaedro	37
5.1.1.2.2.	Área da base	37
5.1.1.2.3.	Área total	38
5.1.1.2.4.	Volume	38
5.1.1.2.5.	Construindo um hexaedro no <i>SketchUp</i>	38
5.1.1.3.	Octaedro	39
5.1.1.3.1.	Elementos do octaedro	39
5.1.1.3.2.	Área da face	40
5.1.1.3.3.	Área total	40
5.1.1.3.4.	Volume	40
5.1.1.3.5.	Construindo um octaedro no <i>SketchUp</i>	40
5.1.1.4.	Dodecaedro	44
5.1.1.4.1.	Elementos do dodecaedro	44
5.1.1.4.2.	Área da face	44
5.1.1.4.3.	Área total	44
5.1.1.4.4.	Volume	45
5.1.1.4.5.	Construindo um dodecaedro no <i>SketchUp</i>	45
5.1.1.5.	Icosaedro	47
5.1.1.5.1.	Elementos do icosaedro	48
5.1.1.5.2.	Área da face	48

5.1.1.5.3.	Área total	48
5.1.1.5.4.	Volume	48
5.1.1.5.5.	Construindo um icosaedro no <i>SketchUp</i>	49
5.1.2.	Prismas	52
5.1.2.1.	Elementos do prisma	52
5.1.2.2.	Tipos de prismas	52
5.1.2.3.	Área da base	53
5.1.2.4.	Área lateral	53
5.1.2.5.	Área total	53
5.1.2.6.	Volume	53
5.1.2.7.	Construindo um prisma no <i>SketchUp</i>	54
5.1.3.	Pirâmide	55
5.1.3.1.	Elementos de pirâmide	55
5.1.3.2.	Tipos de pirâmides	55
5.1.3.3.	Área da base	57
5.1.3.4.	Área lateral	57
5.1.3.5.	Área total	57
5.1.3.6.	Volume	57
5.1.3.7.	Construindo uma pirâmide no <i>SketchUp</i>	57
5.1.4.	Tronco de pirâmide	59
5.1.4.1.	Elementos do tronco de pirâmide	60
5.1.4.2.	Área da base	60
5.1.4.3.	Área lateral	60
5.1.4.4.	Área total	61
5.1.4.5.	Volume	61
5.1.4.6.	Construindo um tronco de pirâmide no <i>SketchUp</i>	61
<b>5.2.</b>	<b>Cilindros Circulares</b>	<b>64</b>
5.2.1.	Elementos do cilindro	64
5.2.2.	Tipos de cilindro	64
5.2.3.	Área da base	65
5.2.4.	Área lateral	65
5.2.5.	Área total	65
5.2.6.	Volume	65
5.2.7.	Construindo um cilindro no <i>SketchUp</i>	65
<b>5.3.</b>	<b>Cones Circulares</b>	<b>66</b>
5.3.1.	Elementos do cone	67
5.3.2.	Área da base	67
5.3.3.	Área lateral	67
5.3.4.	Área total	68
5.3.5.	Volume	68
5.3.6.	Construindo um cone no <i>SketchUp</i>	68
<b>5.4.</b>	<b>Troncos de Cone</b>	<b>70</b>
5.4.1.	Elementos do tronco de cone	70
5.4.2.	Área da base	71
5.4.3.	Área lateral	71
5.4.4.	Área total	71
5.4.5.	Volume	71
5.4.6.	Construindo um tronco de cone no <i>SketchUp</i>	72
<b>5.5.</b>	<b>Esfera</b>	<b>74</b>

5.5.1.	Elementos da esfera	74
5.5.2.	Área da superfície esférica	75
5.5.3.	Volume	75
5.5.4.	Construindo uma esfera no <i>SketchUp</i>	75
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE</b>	<b>82</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Ao ingressar em um programa de Mestrado Profissional em Matemática, o aluno passa por disciplinas de diversos segmentos, como Aritmética, Álgebra, Cálculo, Geometria, entre outros. Os mestrandos (que, em sua maioria, também são professores, no entanto do ensino básico) acabam por muitas vezes identificando em si dificuldades e particularidades que antes não percebiam no seu próprio estudo de Matemática. O programa PROFMAT desperta no aluno (aluno-professor) o desejo de desenvolver melhorias no ramo em que trabalha, utilizando-se de suas próprias vivências para empregar propostas que permeiam suas práticas de ensino. Sendo assim, é comum ver dissertações e textos feitos por esses mestrandos cujos objetivos sempre circundam uma temática principal: melhorar o ensino-aprendizagem de Matemática nas escolas do ensino básico brasileiro.

O principal desafio do professor de Matemática no ensino básico é despertar no aluno o interesse e o entendimento da disciplina, no qual o aluno consiga desenvolver, compreender e discernir o concreto do abstrato, o real do imaginário, os conceitos e aplicações. Ao ensinar Geometria no ensino básico, o professor identifica alguns empecilhos que dificultam o entendimento do aluno, tais como: não conseguem diferenciar o desenho de uma figura plana e de um sólido, não identificam e tampouco estabelecem uma relação entre os elementos geométricos.

Como saída para melhorar o processo de ensino-aprendizagem de Geometria, os professores buscam alternativas além do ensino tradicional, comumente chamado “pincel e quadro branco”. São exemplos destas: situações-problema, uso de jogos e do lúdico, aplicações na Engenharia e na Física, construções manuais, uso no cotidiano e construções através das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs). A principal contribuição das TICs no ensino de Geometria são os *softwares* de Geometria Dinâmica, que permitem a construção e visualização de figuras e sólidos geométricos pelo próprio aluno com assistência de um computador e suporte do professor.

“Sabemos que muitos elementos e propriedades inerentes a Geometria Espacial deixam de ser compreendidos em função da abordagem desse conteúdo basear-se em representações estáticas, como aquelas usadas em livros didáticos. Essa deficiência da Geometria Espacial vem sendo gradativamente superada, à medida

que *softwares* de Geometria Dinâmica são desenvolvidos e incorporados à prática de sala de aula.” (RICHT, TOMKELSKI e RICHT, 2008, apud MACHADO e TONINI, 2011, p. 2).

O presente trabalho apresenta o uso do *software SketchUp* como ferramenta de auxílio para professores e alunos do ensino básico, no que concerne ao processo de ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos. A justificativa do trabalho está pautada na seguinte sistematização: aproveitar o interesse dos alunos em recursos tecnológicos e utilizar o programa como ferramenta para sanar as dificuldades dos mesmos em visualizar os sólidos geométricos e fazer correlações entre Geometria Plana e Espacial. Sendo assim, o texto encontra-se estruturado em quatro sessões.

Na sessão 2 são vistos alguns aspectos relacionados ao ensino de Geometria espacial, elencando a utilização dos livros didáticos, as percepções dos alunos e as principais dificuldades observadas na visualização dos sólidos. A sessão 3 apresenta o uso das TICs nas escolas e como as TICs podem ser bem aproveitadas no processo ensino-aprendizagem de Geometria. Já na sessão 4 tem-se uma apresentação do *software SketchUp*, objeto do trabalho.

Na sessão 5 encontra-se o auge do trabalho. Nela, o usuário (professor-leitor ou aluno-leitor) é orientado, passo-a-passo, em como utilizar o programa na construção dos principais sólidos geométricos. Além disso, os conceitos matemáticos de Geometria Plana são correlacionados de acordo com a apresentação dos conceitos de Geometria Espacial.

Este trabalho mostra uma alternativa para melhorar a visualização dos sólidos geométricos através do programa *SketchUp*, propiciando a construção do sólido pelo próprio aluno e oportunizando ao mesmo realizar suas próprias relações e descobertas no ramo da Geometria, não apenas memorizando fórmulas, mas também sabendo identificar e relacionar figuras e sólidos, com suas características e peculiaridades, nos diferentes espaços e formas.

## 2. O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

A Matemática é uma ciência que até os dias atuais traz questionamentos relacionados aos seus conceitos e aplicações. É universal. Todas as invenções, todos os acontecimentos econômicos, naturais, políticos, e tudo que existe ou possa existir, está relacionado diretamente com alguma característica desta ciência: valores, geometria, exatidão, forma, medida, cálculo, problema, entre outros conceitos. Em virtude disto, é essencial que as pessoas tenham domínio sobre os conhecimentos básicos de Matemática.

Ubiratan D'Ambrósio (1994) afirma que a matemática é vista como a “essência da racionalidade”. É por este motivo que as escolas reservam uma disciplina contínua para ensinar em todos os países e em todas as séries e graus, o mesmo conhecimento matemático. Todos, em tese, aprendem Matemática da mesma maneira e, por consequência desta generalização, muitas vezes professores são questionados por seus alunos com perguntas que se resumem em qual o propósito em se aprender Matemática.

Os alunos enxergam a Matemática como uma disciplina irreal que envolve números e símbolos distantes de um conceito concreto, “*um ensino que apresenta uma ciência compartimentada, segmentada, pronta, acabada, imutável*” (NETO, PACHECO, 1998, p. 6 – 7). No caso da Geometria Espacial o aluno precisa não apenas memorizar métodos e fórmulas, mas também perceber a localização de um objeto em três dimensões para compreender o conteúdo abordado.

A geometria é o segmento da Matemática que trata do espaço e de objetos no espaço. Nela, os alunos podem visualizar e até mesmo criar objetos, com suas diferentes formas e medições, promovendo o entendimento concreto do conteúdo. Com isso, facilita-se o processo de ensino-aprendizagem, uma vez que o próprio aluno viu o objeto e seus elementos, possibilitando sua própria construção de conceitos e aplicações.

Para Galvéz (2001), a Geometria na escola não é ensinada com o intuito de desenvolver no aluno a percepção do espaço, acarretando em um ensino arcaico resumido em decorar símbolos, fórmulas e propriedades que reduz a aprendizagem da Geometria a um saber cultural. Parra (2001) afirma que o saber cultural não é suficiente para que a pessoa utilize seu conhecimento para resolver um problema. O

método de resolução de problemas no ensino da Geometria é eficaz pois exige do aluno responsabilidade e estratégias para solucionar uma questão. Ocorre que, muitas vezes pela falta de percepção espacial, o aluno não consegue descobrir qual o problema que deve ser solucionado, travando seu raciocínio antes do escopo da resolução.

Segundo Costa, Bermejo e Moraes (2009) é preciso analisar a percepção e abstração dos conceitos geométricos por parte dos alunos e como estes fazem a relação entre conceito, fórmula e visão da realidade no estudo de Geometria Espacial.

(...) um indivíduo que consegue compreender as condições necessárias e suficientes para afirmar algo, é capaz de construir demonstrações e fazer distinções, como usar o postulado LAL (lado, ângulo, lado) para provar afirmações sobre os triângulos, todavia poderá não entender por que é necessário postular a condição LAL. (COSTA, BERMEJO e MORAES, 2009, p. 2)

Os autores relatam ainda suas observações acerca da realidade do ensino da Geometria Espacial na sala de aula, onde notaram que os alunos não conseguem fazer relações entre figuras e sólidos geométricos, memorizando somente fórmulas, mas não conseguindo identificar conceitos e elementos para sua aplicação.

O Ministério da Educação (MEC, 2014) ao propor a Matriz de Referência para a conclusão da educação básica através do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), elenca no item Geometria as seguintes habilidades e competências expressas no Quadro 01:

**Quadro 01:** Habilidades e Competências que envolvem Geometria segundo o ENEM

Habilidades	Competências
- Identificar características de figuras planas ou espaciais;	- Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;  - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;	
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.	

Fonte: Matriz de Referência ENEM - INEP

Nesta perspectiva, os educadores devem buscar recursos didáticos e métodos de ensino que ajudem a esclarecer e associar logicamente a função dos conteúdos matemáticos e suas aplicações, fomentando a construção do conhecimento matemático pelo aluno e ampliando sua visualização do espaço.

## 2.1. Os livros didáticos

O intuito deste tópico é analisar a abordagem de diversos autores no que concerne ao ensino de Geometria Espacial, objetivando reconhecer em cada um deles como é trabalhada a construção e visualização dos sólidos geométricos. Desta forma, quatro livros, descritos por L1, L2, L3 e L4 de grupos de autores diferentes foram listados e observados:

L1: *Matemática – Ciência e Aplicações*. Volume 02 dos autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Editora Saraiva. 2010.

L2: *Matemática Paiva*. Volume 02. Autor Manoel Paiva. Editora Moderna. 2013.

L3: *Conexões com a Matemática*. Volume 02. Editora responsável Juliane Matsubara (vários autores). Editora Moderna. 2010.

L4: *Matemática – Ciência, Linguagem e Tecnologia*. Volume 02. Autor Jackson Ribeiro. Editora Scipione. 2012.

### 2.1.1. Como o material didático apresenta a Geometria Espacial e os sólidos geométricos

Todos os livros analisados apresentam a mesma linha de construção do pensamento geométrico: poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Após uma análise dos livros citados, pode-se perceber que apenas o L3 apresenta um capítulo de introdução à Geometria Espacial, contendo posições relativas, projeções ortogonais e diedros. Os demais livros já começam falando de poliedros, trazendo algumas imagens coloridas de sólidos, com destaque para L1, L3 e L4 que também trazem a foto de pirâmides no Egito, com a finalidade de ilustrar a aplicação do conteúdo abordado. Os livros seguem comentando a Relação de Euler e os

Poliedros de Platão, seguidos de prismas e pirâmides, sempre mencionando seus elementos e cálculos de área e volume. Para o entendimento do cálculo de área e volume, os livros L2 e L3 trazem a planificação dos sólidos concluindo que o aluno já tenha conhecimento prévio de Geometria Plana.

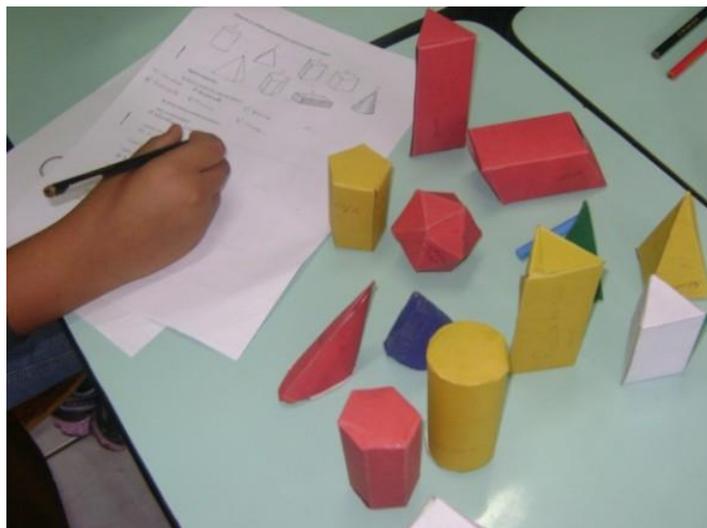
### 2.1.2. Como os exercícios trabalham as imagens dos sólidos

Em todos os livros, durante toda a abordagem do conteúdo, encontra-se muitas figuras de representação em 2D dos sólidos 3D. No entanto, em cerca de 75% dos exercícios as figuras não aparecem, cabendo ao aluno interpretar o exercício e desenhar o sólido. Vale ressaltar que a maioria dos exercícios trabalha com cubos e paralelepípedos. O livro que mais apresenta exercícios é L3, no entanto o que mais apresenta situações-problema é o L2, ajudando o aluno a desenvolver uma competência exigida no ENEM.

## 2.2. Quais as dificuldades do aluno em visualizar os sólidos geométricos?

Quando os alunos estudam Geometria no Ensino Fundamental, alguns professores aproveitam as sugestões de livros didáticos de fazer a construção dos sólidos por meio de recortes, dobraduras e colagens de papel (figura 01).

**Figura 01:** Alunos nomeando os sólidos geométricos representados nas estruturas em papel.



*Fonte: PIBID – UNIFRA*

Esse tipo de atividade, feita pelos próprios alunos, ajuda a melhorar sua percepção espacial e identificar partes e características dos sólidos geométricos,

como por exemplo arestas, vértices e faces. Depois disso, os alunos não têm mais contato com este conteúdo, voltando a estudar Geometria Espacial apenas no 2º Ano do Ensino Médio, de forma mais aprofundada os principais sólidos. Neste momento percebem-se as dificuldades do aluno:

- Não consegue desenhar o sólido;
- Mesmo com o sólido representado em figuras 2D, não consegue identificar elementos no desenho (ex.: diagonais, apótemas, arestas, bases);
- Não consegue estabelecer uma relação entre os elementos do sólido em questão e o desenvolvimento de um raciocínio;
- Não sabe associar os elementos do sólido com as fórmulas existentes;
- Não consegue distinguir área e volume;
- Não sabe a diferença tampouco a conversão entre as unidades de medida (principalmente metro, centímetro e milímetro).

### 3. O USO DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NAS ESCOLAS

É inegável o avanço tecnológico ocorrido nos últimos anos: diariamente vê-se notícias de lançamentos de novos e modernos aparelhos na área da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC). A sociedade está inserida neste meio tecnológico e para as crianças e adolescentes nascidos a partir dos anos 2000 já é comum o uso de computadores e *smartphones* dentro de casa. É a era tecnológica, informatizada, virtual e digital e as escolas precisam acompanhar esse desenvolvimento, adotando o uso das TICs de forma a ajudar no processo ensino-aprendizagem.

Em contrapartida, a escola apenas ter computadores não quer dizer que a escola usa os computadores. Barboza (2013), diz que “*é preciso lembrar que o ato de disponibilizar estes recursos nas escolas é necessária, mas não suficiente, para chegar-se à tão sonhada inovação no ensino*”. Portanto, é preciso incentivo à utilização das TICs por parte dos gestores de forma que influenciem os educadores à usarem novos métodos de ensino além do tradicional “pincel e quadro branco”.

#### 3.1. As tecnologias nas aulas de Matemática

Segundo Barboza (2013), o professor de Matemática ao utilizar as TICs como forma de ensino, deve assumir o papel de mediador do processo de interação entre o aluno e o recurso tecnológico trabalhado, dando espaço para os alunos fazerem suas próprias construções e “descobertas”, servindo como suporte no desenvolvimento dos alunos nas aulas de Matemática. No ambiente informatizado, o aluno pode ter seu próprio tempo na construção de conceitos ao explorar o *software* trabalhado e comentar com seus colegas sobre o assunto exposto na aula.

Souza (2014), cita que trabalhar com computador nas aulas de matemática ajuda a desenvolver habilidades e competências no aluno, “*uma vez que o uso do computador pode levar o aluno a aprender com seus erros, interagir com seus colegas, bem como comparar e trocar informações a respeito do que vem sendo trabalhado*”.

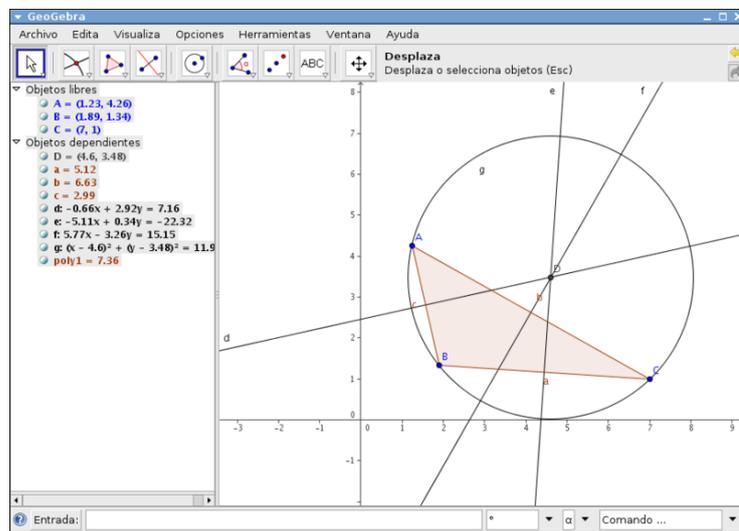
No ramo da Matemática encontram-se vários *softwares* que auxiliam no processo ensino-aprendizagem de diversos conteúdos, a exemplo: Conjuntos, Funções (afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas), gráficos de Funções, Geometria Plana e Geometria Espacial.

### 3.2. As tecnologias no ensino da Geometria

Segundo Silva e Penteadó (2009) os *softwares* de Geometria Dinâmica são aqueles que permitem o aluno construir e manipular objetos através do *mouse* do computador. Ao utilizar um *software* de geometria, o aluno passa a construir seu próprio conhecimento acerca do sólido estudado, identificando seus elementos e fazendo suas correlações com outros conteúdos da Geometria Espacial ou até mesmo Geometria Plana. A vantagem de um *software* deste ramo é que caso o aluno não consiga identificar os elementos em uma primeira situação, o mesmo pode rotacionar, mover, ou espelhar o objeto com a finalidade de melhorar sua visualização espacial. Com o propósito de tornar o processo ensino-aprendizagem mais dinâmico com relação à Geometria Espacial, pode-se elencar alguns *softwares* usados no ensino de Geometria:

a) *Geogebra*: é um *software* de Geometria que possibilita a construção de objetos em duas ou três dimensões, além de também trabalhar com a parte algébrica e expressar analiticamente retas e curvas.

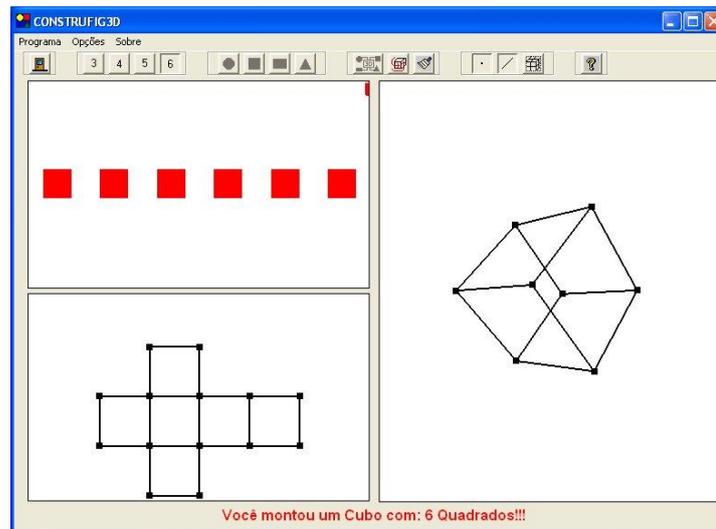
Figura 02: Interface do Geogebra



Fonte: WikiCommon

b) *Construfig3d*: é um *software* de Geometria Gráfica, no qual a construção de um sólido tridimensional dá-se a partir de um desenho bidimensional.

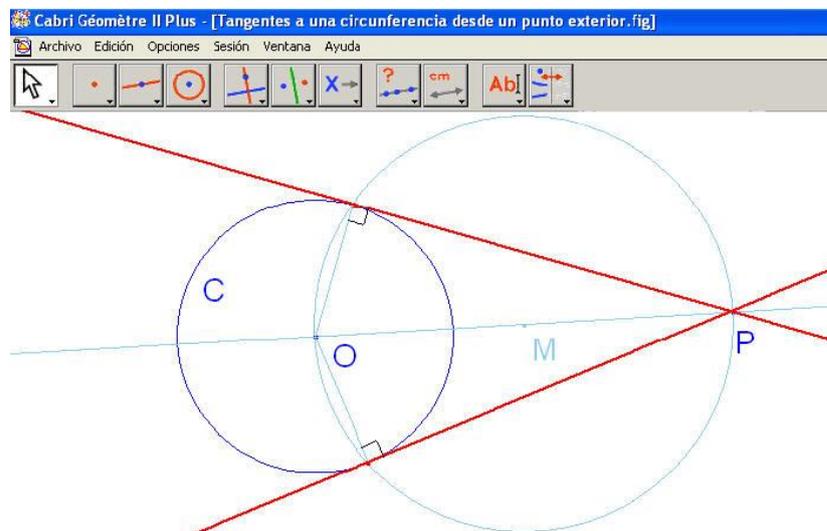
**Figura 03:** Construção de um cubo no *software* Construfig3d.



Fonte: *Construfig3d 1.1*

c) *Cabri-Géomètre*: é um *software* de Geometria Plana e Analítica que permite construir as figuras usando régua e compasso eletrônicos. Nele, as figuras construídas podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhe haviam sido distribuídas.

**Figura 04:** Construção clássica de geometria com o *Cabri-Géomètre*



Fonte: Departamento de Matemática Aplicada – Universidade Politécnica de Madrid

d) *Poly*: é um *software* de Geometria Espacial que permite a exploração de poliedros, trabalhando desde a sua construção, planificação, movimentação e

rotação, auxiliando na melhor visualização do sólido. Além disso, é possível salvar o sólido como um *gif* animado.

**Figura 05:** Icosaedro no programa *Poly*.



Fonte: *Blogspot Grupo Gauss*

#### 4. CONHECENDO O SOFTWARE SKETCHUP

O *SketchUp* é um programa da *Google* criado inicialmente para assessorar um outro *software* desta empresa, o *Google Earth*, auxiliando com a criação de cenários e paisagens em três dimensões. Com a instalação do *software SketchUp* ficou mais fácil de criar modelos de casas, prédios, monumentos, ruas e calçadas em representação digital.

Este recurso do programa chamou a atenção de engenheiros e arquitetos como sendo uma das soluções para melhorar a visualização de seus projetos e atualmente o *software* é utilizado por arquitetos, engenheiros, *designers*, desenvolvedores de jogos, técnicos e entre outros trabalhadores da construção civil. O programa permite fazer representações em 2D ou 3D, dependendo da escolha de quem o utiliza: a partir da criação da forma em 2D, é possível obter a forma em 3D.

O programa é amplamente utilizado por professores de nível superior da área de arquitetura e engenharia para auxiliar na Geometria Descritiva e posteriormente, executar maquetes eletrônicas. Segundo Araújo (2014, apud SOUZA, NASCIMENTO e BENUTTI), mesmo que a principal função dele não faça parte da didática nas aulas do nível básico, o *software* pode ser utilizado para o desenvolvimento da percepção e da visão espacial dos alunos devido a sua facilidade no manuseio das ferramentas.

Atualmente, o programa encontra-se na versão *SketchUp* 2017, disponível nas versões *make* e *pro*, com a diferença que a versão *pro* permite a importação de modelos no formato *.dwg* (arquivos criados no *software AutoCAD*). O programa pode ser obtido pelo próprio *site* da *Google* e em português, o que facilita a sua utilização. Além da fácil instalação e utilização, o *software* é ágil na modelagem de objetos e os comando básicos são fáceis de aprender e memorizar. Souza, Nascimento e Benutti (2014) destacaram as principais vantagens do *SketchUp* no ensino da Geometria:

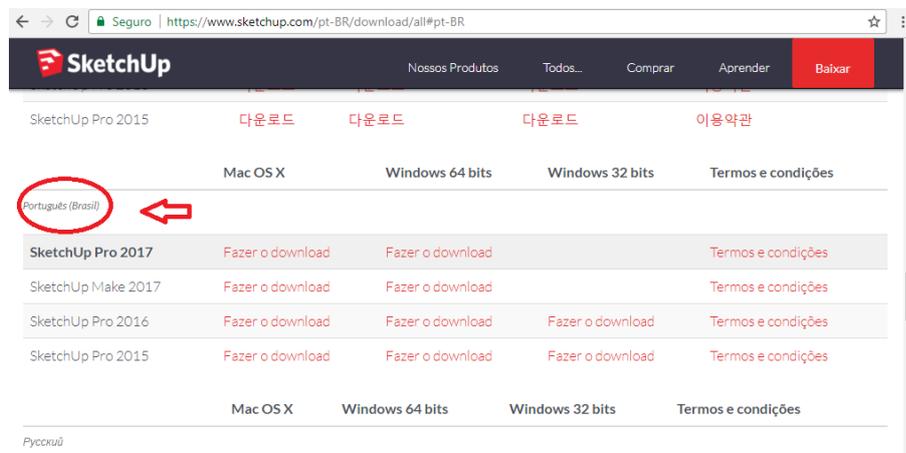
- *Software* gratuito, fácil e rápido de instalar;
- *Interface* e ferramentas intuitivas;
- Idioma compatível;
- Atua diretamente no ambiente 3D;
- Movimentação instantânea dos modelos;

- Versátil e dinâmico;
- Rápido e fácil de modelar;
- Não necessita de curso específico;

#### 4.1. Como obter o programa

Para efetuar o *download* do *SketchUp* em um computador, o usuário pode consultar diretamente o *site* de instalação do *Google SketchUp* (<https://www.sketchup.com/pt-BR/download/all#pt-BR>) ou simplesmente digitar “*Download SketchUp*” na barra de pesquisas do *site* da *Google*. Ao entrar no *site*, este apresenta as opções disponíveis para *download*, de acordo com o modelo do computador e o idioma (inglês, espanhol, alemão, chinês, português, entre outros). Deve-se procurar a melhor versão e idioma para o usuário.

**Figura 06:** Indicação de instalação do *software SketchUp*



Fonte: Acervo pessoal.

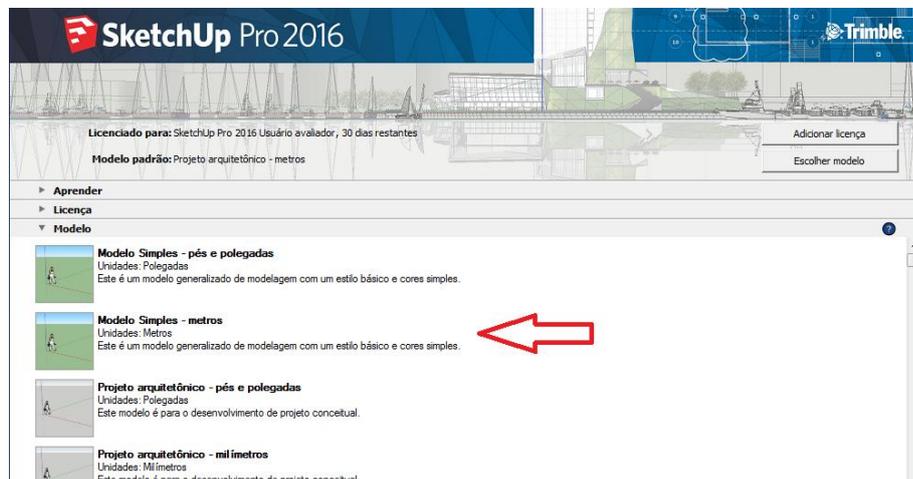
Após seguir os procedimentos de instalação, o *software* estará disponível para uso no computador e o ícone de atalho para o programa já estará na área de trabalho. Ao clicar para abrir o programa, haverá uma janela para adicionar licença ou escolher modelo. Ao escolher qual o modelo será trabalhado, entre eles, arquitetura, engenharia, marcenaria, *design*, entre outros, recomenda-se a escolha “Modelo Simples – metros”. Após a escolha do modelo a ser utilizado, o programa abre sua *interface* para ser trabalhada.

**Figura 07:** Procedimento para inicialização do software SketchUp



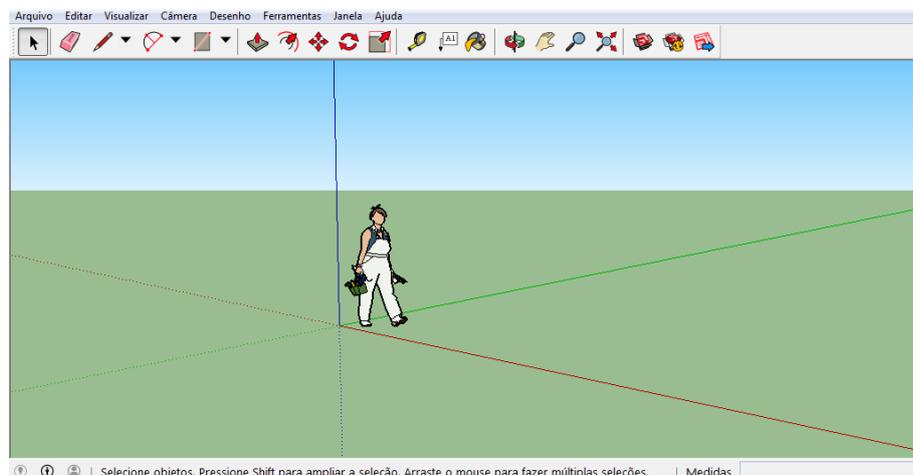
Fonte: Acervo pessoal.

**Figura 08:** Procedimento para inicialização do software SketchUp



Fonte: Acervo pessoal

**Figura 09:** Interface de trabalho do software SketchUp



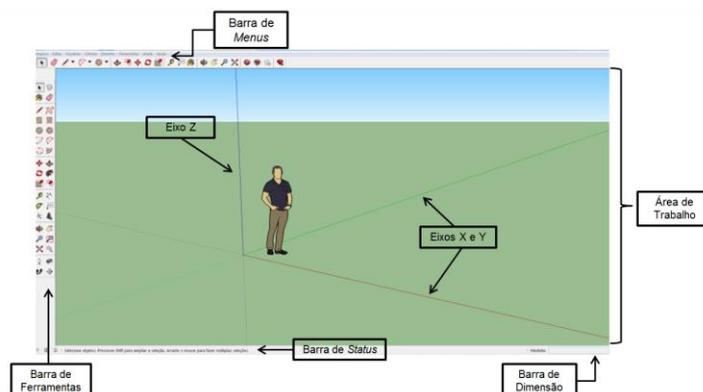
Fonte: Acervo pessoal.

## 4.2. Interface do software

A interface do *SketchUp* é simples, prática e intuitiva. A barra de ferramentas pode ser personalizada e posicionada conforme opção do usuário. Ao visualizar a interface de trabalho do programa, pode-se identificar alguns elementos:

- Barra de Menus: nela encontram-se as opções de ferramentas de edição, de visualização, de desenho, além das opções de gerenciamento de arquivos (criar novo arquivo, copiar, colar, salvar, imprimir). Para inserir mais itens na barra de ferramentas, procura-se o ícone Visualizar > Ferramentas > Conjunto Grande de Ferramentas;
- Barra de ferramentas: local onde são inseridas as principais ferramentas e os principais comandos para criação de modelos e desenhos, como por exemplo: linha, círculo e polígonos. Ainda na barra de ferramentas encontramos os comandos de edição, medição e criação de volumes;
- Barra de *status*: funciona como uma barra de comandos, que guia o usuário sobre o comando que está ativo e quais os passos para a conclusão do mesmo;
- Barra de dimensão: local onde o usuário pode digitar o tamanho da linha, do objeto ou do espaço que deseja obter.
- Área de trabalho: área onde o usuário desenvolverá o desenho em duas ou três dimensões. Nela estão os eixos X, Y e Z, ortogonais entre si, que auxiliam na construção e edição dos desenhos.

**Figura 10:** Elementos da Interface de trabalho do software *SketchUp*

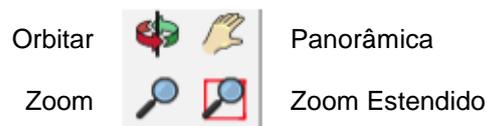


Fonte: Acervo pessoal.

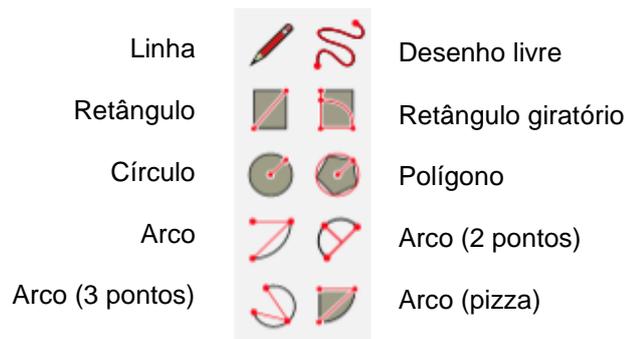
### 4.3. Principais comandos

O intuito deste tópico é apresentar os principais comandos utilizados no programa no que concerne ao auxílio no desenho bidimensional e tridimensional, objetivando reconhecer em cada um deles como é trabalhada a construção dos objetos na área de trabalho. Estes comandos são agrupados em:

- a) Comandos de visualização: zoom, panorâmica, orbitar.



- b) Comandos de criação: linha, retângulo, polígono, círculo, arco.



- c) Comandos de edição: rotacionar, mover/copiar, empurrar/puxar, escala, equidistância, siga-me.



- d) Comandos de medição: transferidor, fita métrica, dimensões.



## 5. SKECTHUP COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

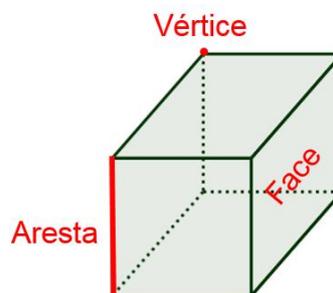
Ao longo desta seção será desenvolvido um material para auxílio no ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos utilizando o *software SketchUp* como recurso didático. Assim, o educador pode ajudar o educando a esclarecer e associar logicamente os conceitos matemáticos e suas aplicações no âmbito da Geometria Espacial. Para cada sólido será apresentado seu conceito, seus componentes, uma figura representativa, área, volume e sua construção no *SketchUp*. Ressalta-se aqui que há diversas formas de se fazer um mesmo sólido no programa SketchUp, apresentando somente uma das maneiras de realizar a construção do mesmo. Caso haja dúvidas sobre a função ou utilização de determinado comando para a construção do sólido, o **APÊNDICE** poderá ser consultado.

### 5.1. Poliedros

A palavra “poliedro”, de origem grega, é formada por *poli*, que significa “várias” e *edro*, que significa “face”. Cada face do poliedro é um polígono: um poliedro costuma ser nomeado de acordo com seu número de faces. Seu nome é composto de um elemento de origem grega (*tetra*, por exemplo, significa quatro), acrescido do termo *edro*. Assim, tetraedro significa “poliedro de 4 faces”.

Os poliedros são sólidos geométricos formados por três elementos: vértices, arestas e faces.

**Figura 11:** Elementos dos poliedros.



Fonte: Acervo pessoal

Os elementos dos poliedros mantêm entre si uma relação numérica denominada Relação de Euler, a qual relaciona o número de vértices (V), de arestas (A) e de faces (F) de qualquer poliedro convexo:

$$V + F = A + 2$$

### 5.1.1. Poliedros de Platão

Os Poliedros de Platão atendem às seguintes condições:

- i) São convexos, ou seja, satisfazem a Relação de Euler;
- ii) Todas as faces têm o mesmo número inteiro  $n$  de arestas;
- iii) Em todos os vértices concorre o mesmo número  $k$  de arestas.

Quando suas faces são polígonos regulares e congruentes, estes são chamados de Poliedros Regulares. São cinco os Poliedros de Platão Regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

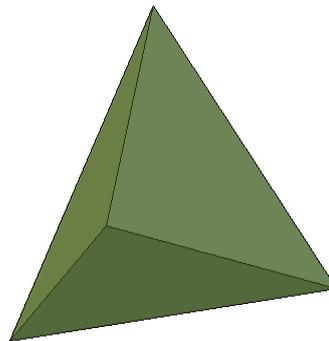
#### 5.1.1.1. Tetraedro

O tetraedro é um Poliedro de Platão com 4 faces.

##### 5.1.1.1.1. Elementos do tetraedro

Os elementos que compõem o tetraedro são: 4 faces triangulares (triângulos equiláteros), 6 arestas e 4 vértices.

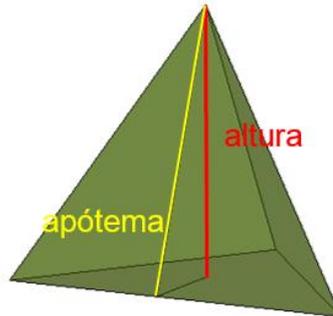
**Figura 12:** Tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

É possível ainda, a critério do usuário, reconhecer que o tetraedro é uma pirâmide e identificar mais elementos como altura e apótema. Através de relações métricas nos triângulos equilátero e retângulo, o usuário consegue obter sua altura ( $h$ ) e apótema ( $ap$ ):  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ;  $ap = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , onde “a” é a medida da aresta do poliedro.

**Figura 13:** Apótema e altura no tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

#### 5.1.1.1.2. Área da base

Uma das faces do tetraedro é também sua base. Como a base do poliedro é um triângulo equilátero de aresta “a”, sua área da base ( $S_b$ ) pode ser obtida pela fórmula:

$$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

#### 5.1.1.1.3. Área total

Como o poliedro possui 4 faces triangulares iguais, sua área total ( $S_t$ ) é quatro vezes a sua área da base ( $S_b$ ):

$$S_t = 4S_b = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

#### 5.1.1.1.4. Volume

O volume ( $Vol$ ) de um tetraedro, por ser uma pirâmide, pode ser definido como:

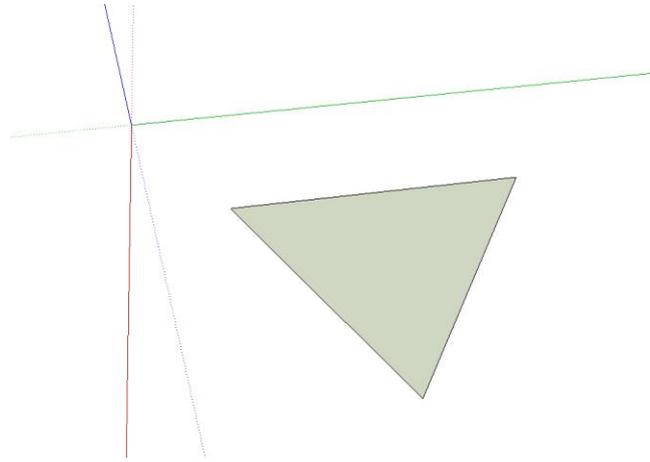
$$Vol = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

#### 5.1.1.1.5. Construindo um tetraedro no SketchUp

Para construir um tetraedro no *SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

1) Fazer um triângulo equilátero com a opção “polígonos”. Este triângulo será uma das faces do tetraedro:

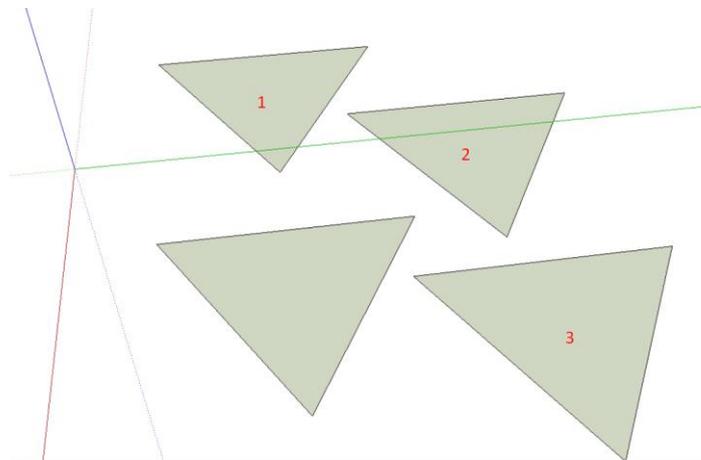
**Figura 14:** Demonstração do 1º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

2) Com o botão direito do mouse, criar componente do triângulo equilátero do passo 01. Em seguida, efetuar três cópias do triângulo para formarem as demais faces do tetraedro:

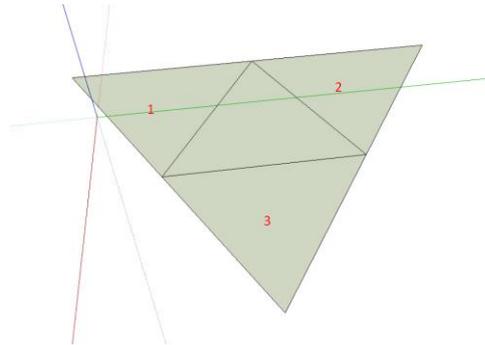
**Figura 15:** Demonstração do 2º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

3) Com o auxílio dos comandos mover e rotacionar, organizar as faces 1, 2 e 3 lado a lado, de forma que cada face tenha uma aresta coincidente com uma aresta da primeira face:

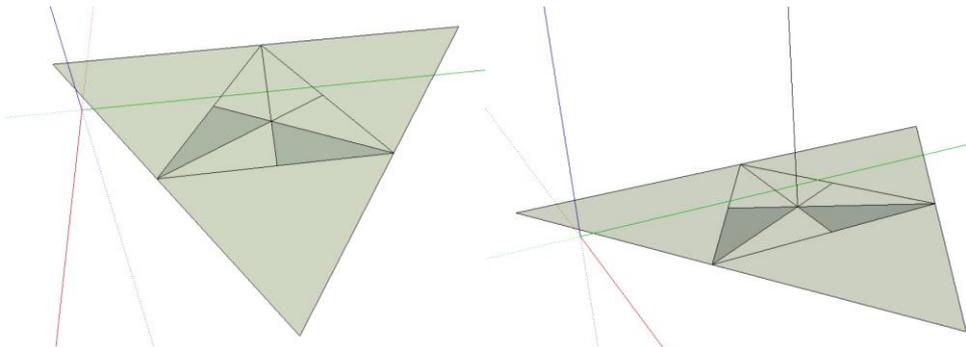
**Figura 16:** Demonstração do 3º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

4) Na face central, traçar as alturas relativas ao lado e achar seu ortocentro. Sobre o ortocentro da face central, traçar um segmento de reta paralelo ao Eixo Z (azul):

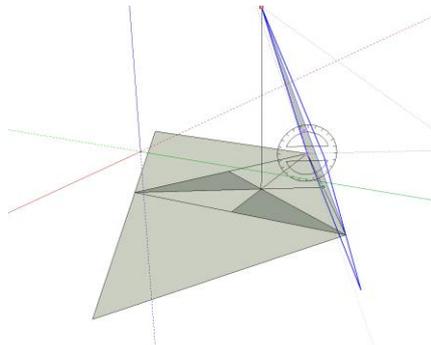
**Figura 17:** Demonstração do 4º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

5) Com o comando rotacionar suspenso, selecionar uma das faces e rotacionar de forma que seu vértice esteja sobre o segmento de reta do passo anterior:

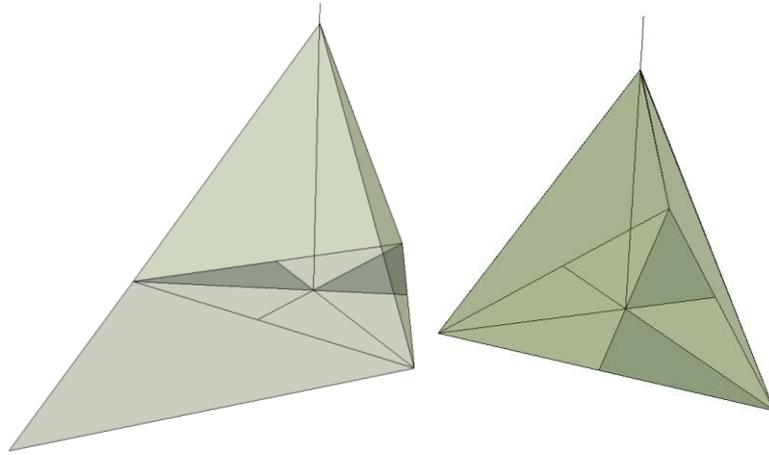
**Figura 18:** Demonstração do 5º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 6) Repetir o processo com as demais faces:

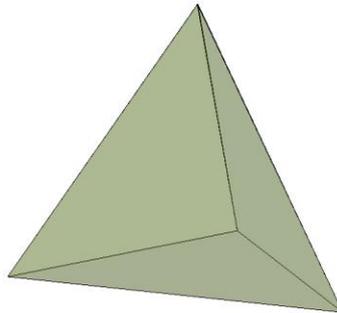
**Figura 19:** Demonstração do 6º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 7) A critério do usuário, apagar as linhas auxiliares na construção do sólido:

**Figura 20:** Demonstração do 7º passo de construção do tetraedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O tetraedro está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces do sólido são triângulos equiláteros;
- A altura do sólido é a perpendicular sobre o ortocentro do triângulo base;
- O apótema do sólido é a altura do triângulo base;
- O tetraedro é uma pirâmide regular de base triangular.

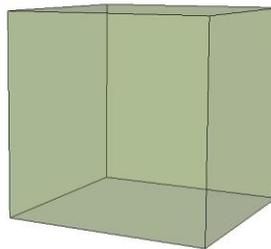
### 5.1.1.2. Hexaedro

O hexaedro é um poliedro de Platão com 6 faces, comumente conhecido por cubo.

#### 5.1.1.2.1. Elementos do hexaedro

Os elementos que compõem o hexaedro são: 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices.

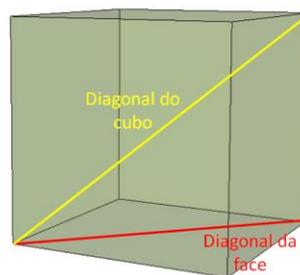
**Figura 21:** Hexaedro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

É possível ainda, a critério do usuário, identificar mais elementos do hexaedro, que são de fundamental importância no entendimento de aplicações geométricas no cubo: diagonal da face ( $D_f$ ) e diagonal do cubo ( $D_c$ ), onde aplicando propriedades da Geometria Plana e Teorema de Pitágoras, temos:  $D_f = a\sqrt{2}$  e  $D_c = a\sqrt{3}$ , onde “a” corresponde à aresta do cubo.

**Figura 22:** Diagonais do hexaedro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

#### 5.1.1.2.2. Área da base

Como a base de um hexaedro é uma de suas faces quadradas, sua área da base ( $S_b$ ) será a mesma área de um quadrado, ou seja,

$$S_b = a^2.$$

#### 5.1.1.2.3. Área total

Como o poliedro possui 6 faces quadradas iguais, sua área total ( $St$ ) é seis vezes a sua área da base ( $Sb$ ):

$$St = 6Sb = 6a^2$$

#### 5.1.1.2.4. Volume

Neste tópico, o usuário deve identificar que a aresta e a altura do hexaedro são coincidentes, ou seja,  $a = h$ . O volume ( $Vol$ ) de um hexaedro, por ser um prisma, pode ser calculado como:

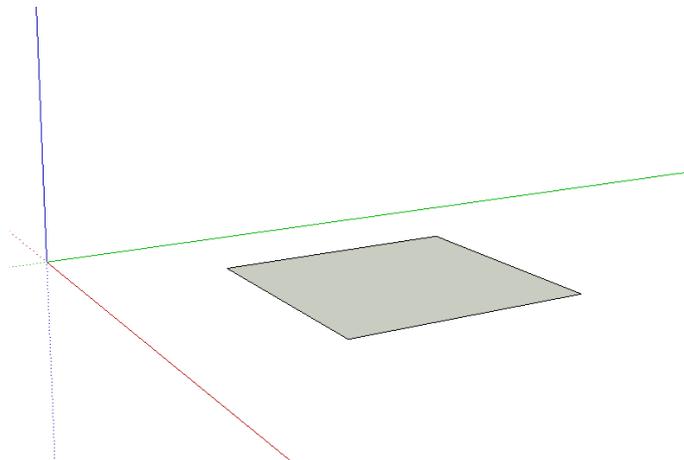
$$Vol = Sb \cdot h = a^2 \cdot a = a^3$$

#### 5.1.1.2.5. Construindo um hexaedro no *SketchUp*

Para construir um hexaedro no *SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

1) Fazer um quadrado. Pode escolher, a critério do usuário, fazer pelo comando “lápiz” ou pelo comando “polígonos”. Este quadrado será a face de base do hexaedro:

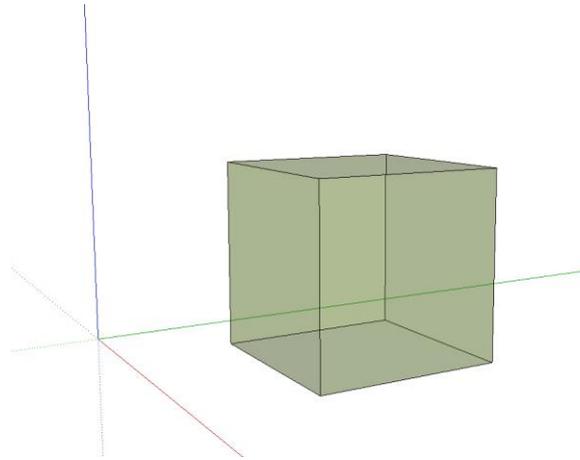
**Figura 23:** Demonstração do 1º passo de construção do hexaedro.



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software *SketchUp*).

2) Com o comando “empurrar/puxar”, subir a altura do cubo na mesma medida do lado do quadrado do passo 01:

**Figura 24:** Demonstração do 2º passo de construção do hexaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O Hexaedro está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces do sólido são quadrados;
- Cada vértice é um triedro;
- A diagonal da face e a diagonal do sólido são diferentes.

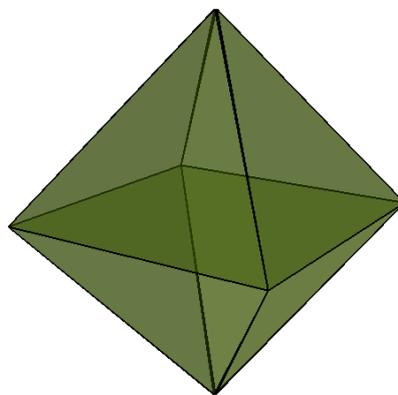
#### 5.1.1.3. Octaedro

O octaedro é um Poliedro de Platão com 8 faces.

##### 5.1.1.3.1. Elementos do Octaedro

Os elementos que compõem o octaedro são: 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices.

**Figura 25:** Octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

#### 5.1.1.3.2. Área da face

Como a face do poliedro é um triângulo equilátero de aresta “a”, sua área da face (Sf) pode ser obtida pela fórmula:

$$Sf = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

#### 5.1.1.3.3. Área total

Como o poliedro possui 8 faces triangulares iguais, sua área total (St) é oito vezes a sua área da face (Sf), ou seja:

$$St = 8Sf = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$$

#### 5.1.1.3.4. Volume

Para calcular o volume de um octaedro, é importante perceber que trata-se de duas pirâmides de base quadrangular, adjacentes e opostas pela base. Através de relações métricas e trigonométricas, obtém-se que o volume de uma pirâmide regular de base quadrangular, com arestas laterais e arestas da base de mesma medida, é  $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ . Dessa forma, o volume (Vol) do octaedro pode ser calculado como:

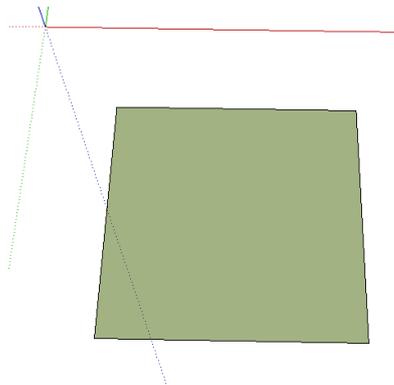
$$Vol = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$$

#### 5.1.1.3.5. Construindo um Octaedro no *SketchUp*

Para construir um octaedro no *SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

- 1) Fazer um quadrado com a ferramenta “lápiz”:

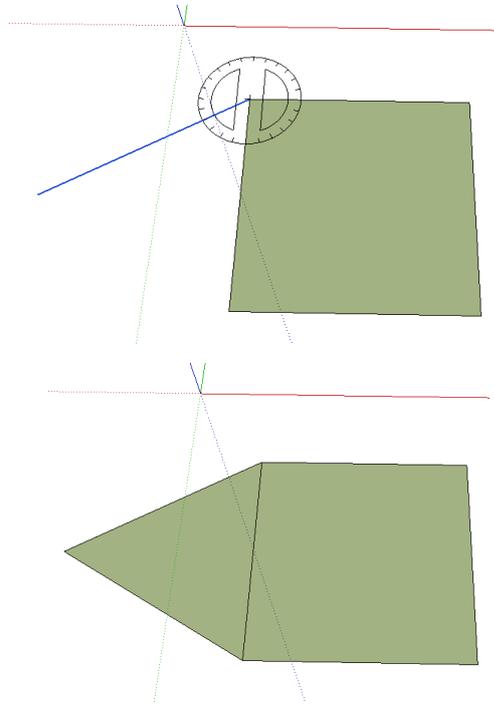
**Figura 26:** Demonstração do 1º passo de construção do octaedro.



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software *SketchUp*).

2) Com o comando “rotacionar” suspenso, escolher um lado do quadrado, copiar e rotacionar o lado  $60^\circ$  para cada lado, formando um triângulo equilátero adjacente ao quadrado. Este triângulo será uma das faces do octaedro:

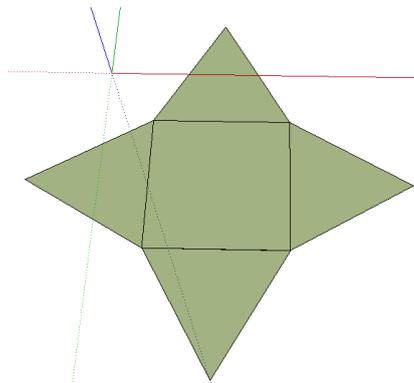
**Figura 27:** Demonstração do 2º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

3) Criar grupo do triângulo equilátero formado no passo 02 e copiar para os demais lados do quadrado:

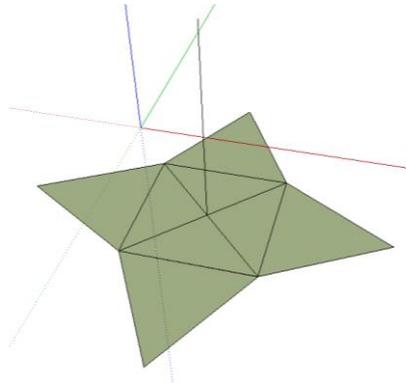
**Figura 28:** Demonstração do 3º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

4) Traçar as diagonais do quadrado, achando seu centro. Sobre o centro, fazer um segmento de reta paralelo ao eixo Z (azul):

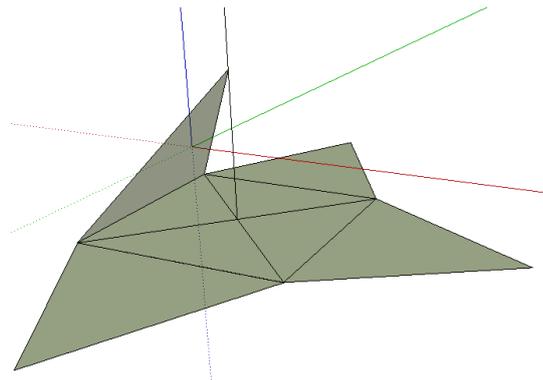
**Figura 29:** Demonstração do 4º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 5) Com o comando rotacionar sustentado, selecionar um dos triângulos e rotacionar de forma que seu vértice esteja sobre o segmento de reta do passo anterior:

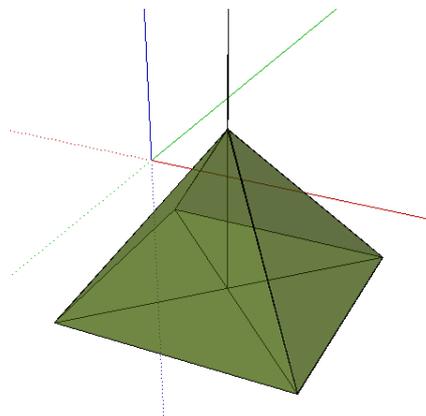
**Figura 30:** Demonstração do 5º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 6) Repetir o processo com as demais faces:

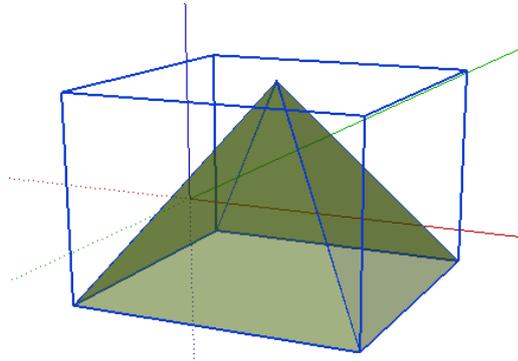
**Figura 31:** Demonstração do 6º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 7) A critério do usuário, apagar as linhas auxiliares e criar grupo do sólido:

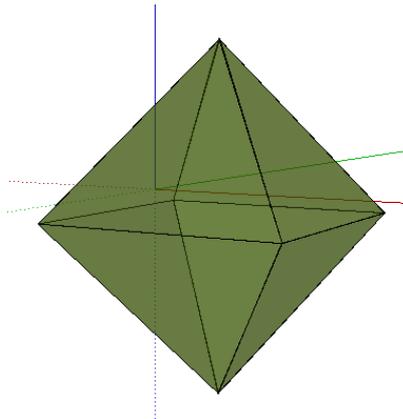
**Figura 32:** Demonstração do 7º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 8) Com o auxílio dos comandos mover e rotacionar, criar uma cópia do grupo do sólido, rotacionar e encaixar na parte inferior do primeiro sólido:

**Figura 33:** Demonstração do 8º passo de construção do octaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O octaedro está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces do sólido são triângulos equiláteros;
- O sólido pode ser obtido pelo rebatimento de uma pirâmide de base quadrangular;
- Por dois dos seus 6 vértices concorrem 4 arestas;
- Os vértices pelos quais concorrem 3 arestas, formam um quadrado;
- O sólido possui três diagonais, as quais: duas são diagonais do quadrado e uma é a altura do tetraedro;
- As três diagonais do sólido são perpendiculares entre si no mesmo ponto.

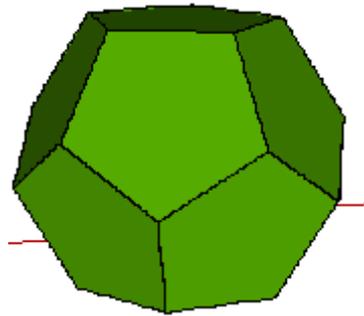
#### 5.1.1.4. Dodecaedro

O dodecaedro é um Poliedro de Platão com 12 faces.

##### 5.1.1.4.1. Elementos do dodecaedro

Os elementos que compõem o dodecaedro são: 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices.

**Figura 34:** Dodecaedro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

##### 5.1.1.4.2. Área da face

Como as faces do dodecaedro são pentagonais, a área de uma de suas faces é a área do pentágono. A área de um pentágono pode ser calculada como  $5 \cdot \frac{l}{2} \cdot ap$ , onde “l” é o lado do pentágono e “ap” é seu apótema. Através de relações trigonométricas, temos que  $ap = \frac{l \cdot tg(54^\circ)}{2}$ . Sendo assim, tomando o lado do pentágono como a aresta (a) do dodecaedro, a área da face (Sf) do dodecaedro é:

$$Sf = \frac{5a^2 \cdot tg(54^\circ)}{4}$$

##### 5.1.1.4.3. Área total

A área total (St) do dodecaedro, por ter 12 faces pentagonais, pode ser calculada como:

$$St = 12Sf = 12 \cdot \frac{5a^2 \cdot tg(54^\circ)}{4} = 15a^2 \cdot tg(54^\circ)$$

Segundo Doraci Gabriel, a área do dodecaedro pode ser calculada como:

$$St = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

#### 5.1.1.4.4. Volume

Doraci Gabriel em seus estudos sobre sólidos platônicos, deduziu a fórmula para calcular o volume (Vol) do dodecaedro como:

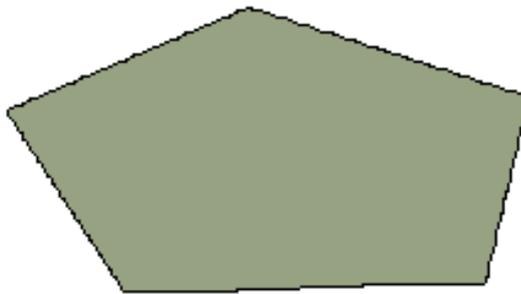
$$Vol = \frac{(15 + 7\sqrt{5})a^3}{4}$$

#### 5.1.1.4.5. Construindo um dodecaedro no *SketchUp*

Para construir um dodecaedro no *SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

- 1) Fazer um pentágono com a ferramenta “polígonos”:

**Figura 35:** Demonstração do 1º passo de construção do dodecaedro.

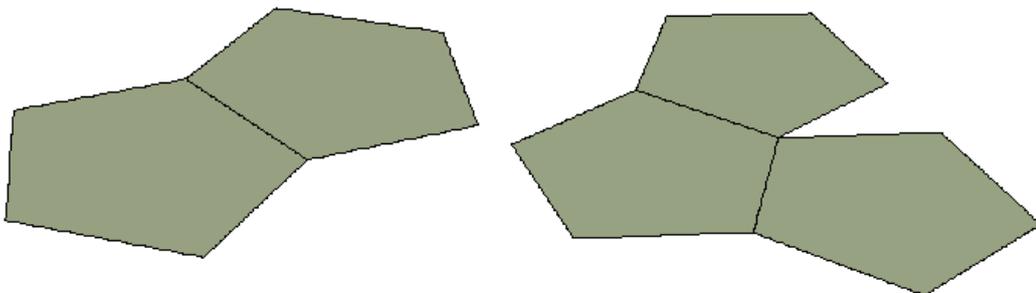


*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 2) Com o comando copiar, fazer cópia do pentágono e criar componente da cópia efetuada;

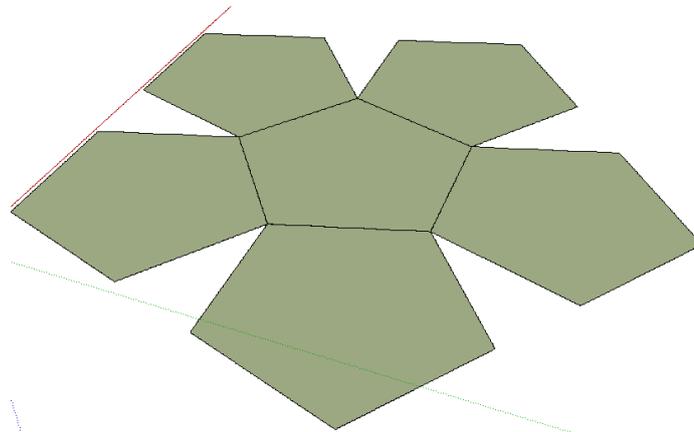
- 3) Copiar o componente quatro vezes, de forma que cada lado do primeiro pentágono seja adjacente com um lado de outro pentágono:

**Figura 36:** Demonstração do 3º passo de construção do dodecaedro (parte 01).



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

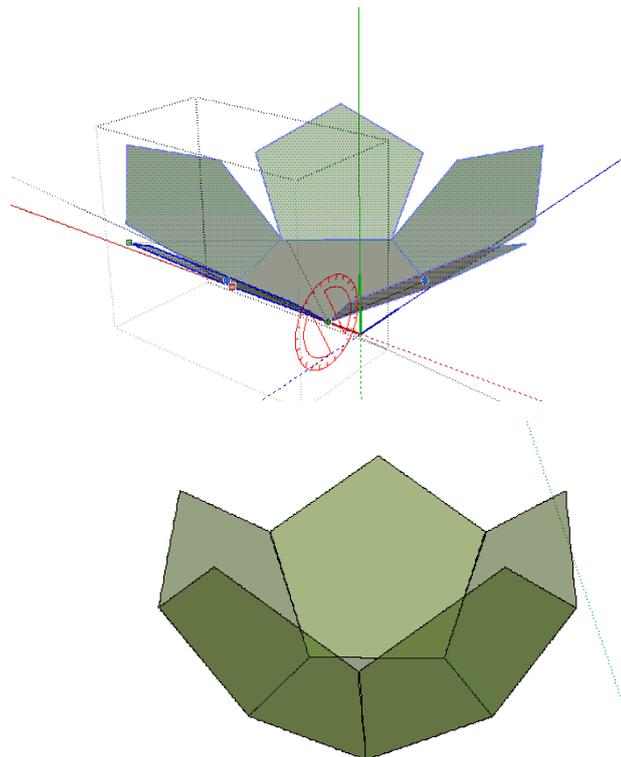
**Figura 37:** Demonstração do 3º passo de construção do dodecaedro (parte 02).



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

4) Com o comando “rotacionar suspenso”, selecionar o primeiro componente de pentágono e efetuar a rotação do mesmo até que todos os pentágonos tenham suas arestas laterais adjacentes também:

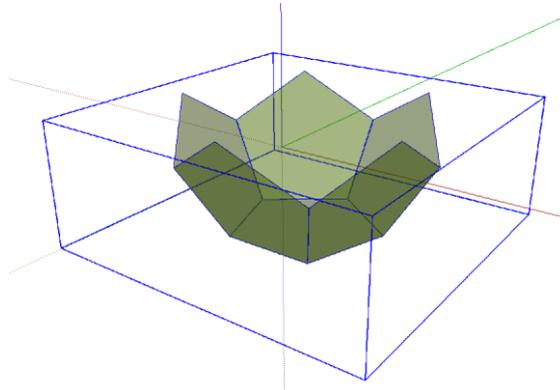
**Figura 38:** Demonstração do 4º passo de construção do dodecaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 5) Transformar o objeto feito em grupo:

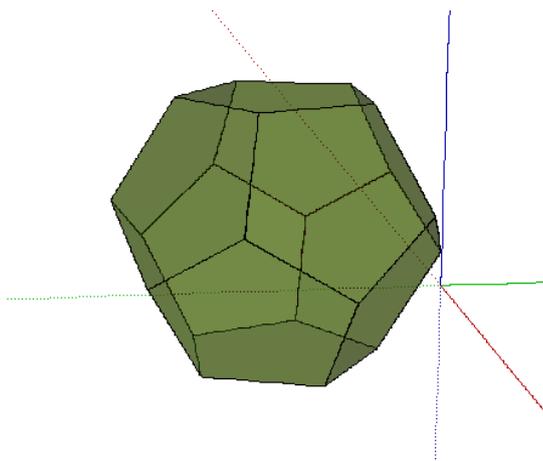
**Figura 39:** Demonstração do 5º passo de construção do dodecaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 6) Com o auxílio dos comandos mover e rotacionar, copiar o objeto formado, rotacioná-lo e movê-lo até que se encaixe perfeitamente no objeto original:

**Figura 40:** Demonstração do 6º passo de construção do dodecaedro.



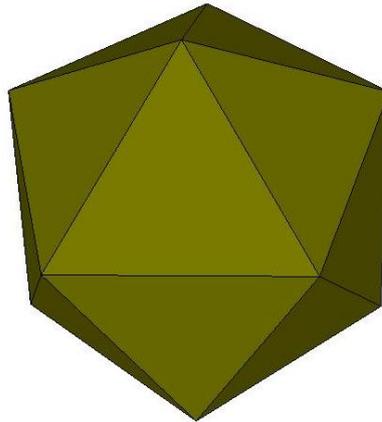
*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O dodecaedro está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces do sólido são pentágonos regulares;
- Por cada vértice do sólido concorrem três arestas não perpendiculares;

#### 5.1.1.5. Icosaedro

O icosaedro é um Poliedro de Platão com 20 faces.

**Figura 41:** Icosaedro.

*Fonte: Acervo pessoal.*

#### 5.1.1.5.1. Elementos do icosaedro

Os elementos que compõem o icosaedro são: 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices.

#### 5.1.1.5.2. Área da face

Como as faces do icosaedro são triângulos equiláteros iguais cujos lados são arestas do poliedro, a área da face ( $S_f$ ) pode ser calculada como sendo:

$$S_f = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

#### 5.1.1.5.3. Área total

A área total ( $S_t$ ) do icosaedro, por ter 20 faces triangulares, pode ser calculada como 20 vezes a sua área da face ( $S_f$ ), ou seja,

$$S_t = 20S_f = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$$

#### 5.1.1.5.4. Volume

Segundo Doraci Gabriel, o volume ( $Vol$ ) do icosaedro pode ser dado pela expressão:

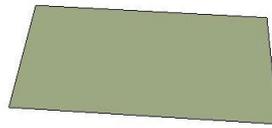
$$Vol = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}$$

#### 5.1.1.5.5. Construindo um icosaedro no *SketchUp*

Para a construção do icosaedro utilizando o *software SketchUp*, é importante que o usuário tenha conhecimento sobre a Proporção Áurea<sup>1</sup> e Sequência de Fibonacci<sup>2</sup>, mesmo que não seja muito aprofundado, uma vez que a construção do sólido torna-se mais fácil quando se tem entendimento sobre o Número de Ouro. Para construir um icosaedro no *SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

- 1) Fazer um retângulo áureo<sup>3</sup> com o comando “retângulo”:

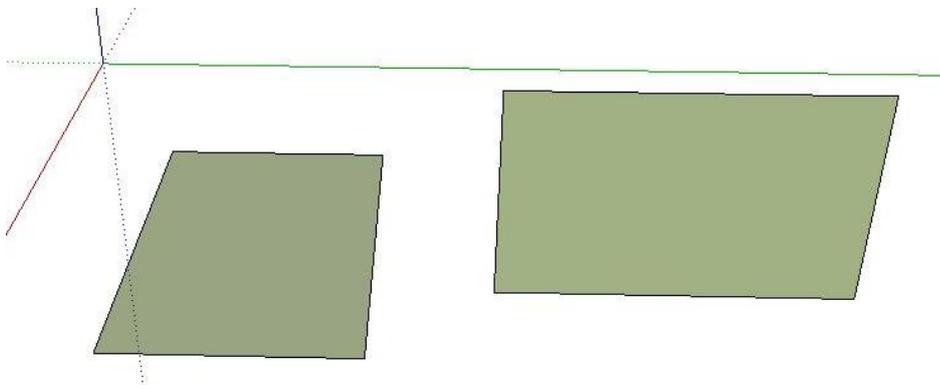
**Figura 42:** Demonstração do 1º passo de construção do icosaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 2) Com o auxílio dos comandos “mover” e “rotacionar”, copiar o primeiro retângulo feito e efetuar uma rotação no eixo verde de 90°:

**Figura 43:** Demonstração do 2º passo de construção do icosaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

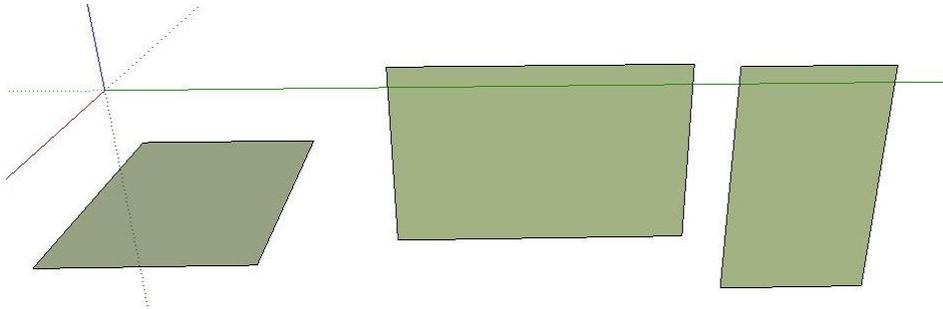
<sup>1</sup> Proporção Áurea é uma constante algébrica irracional obtida pela média e extrema razão de um segmento, originando o número  $\phi = 1,6180339887\dots$ , também conhecido como Número de Ouro.

<sup>2</sup> Sequência de Fibonacci ( $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ), formada pelos números (1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...) está diretamente ligada com a Proporção Áurea, uma vez que a razão entre um número ( $\geq 5$ ) e seu antecessor é bem próxima ao Número de Ouro.

<sup>3</sup> Retângulo áureo é um retângulo cujos lados são números ( $\geq 5$ ) sucessivos da Sequência de Fibonacci.

- 3) Efetuar mais uma cópia do primeiro retângulo e rotacioná-lo no eixo azul 90°:

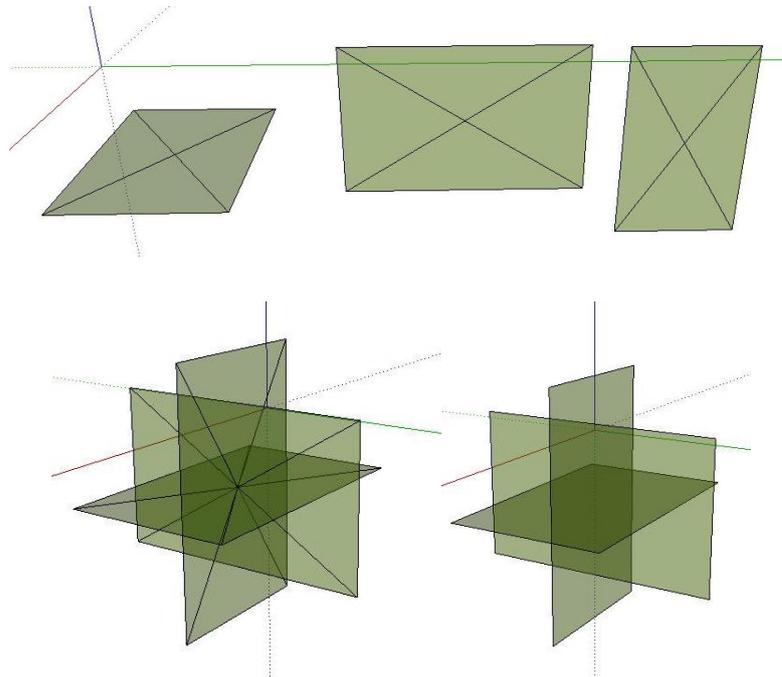
**Figura 44:** Demonstração do 3º passo de construção do icosaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 4) Traçar com a ferramenta “lápis” as diagonais dos retângulos. Mover os segundo e terceiro retângulos de forma que seus centros coincidam no mesmo ponto. Em seguida, apagar as linhas diagonais utilizadas para este passo:

**Figura 45:** Demonstração do 4º passo de construção do icosaedro.

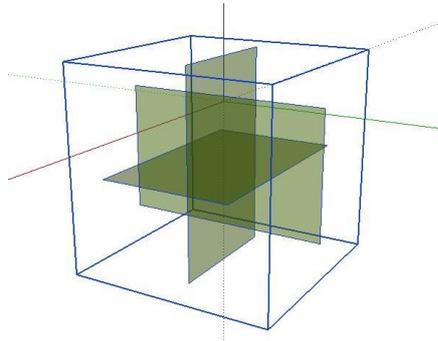


*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O objeto formado tem 12 vértices e é composto por três retângulos perpendiculares entre si.

5) Transformar o objeto em grupo:

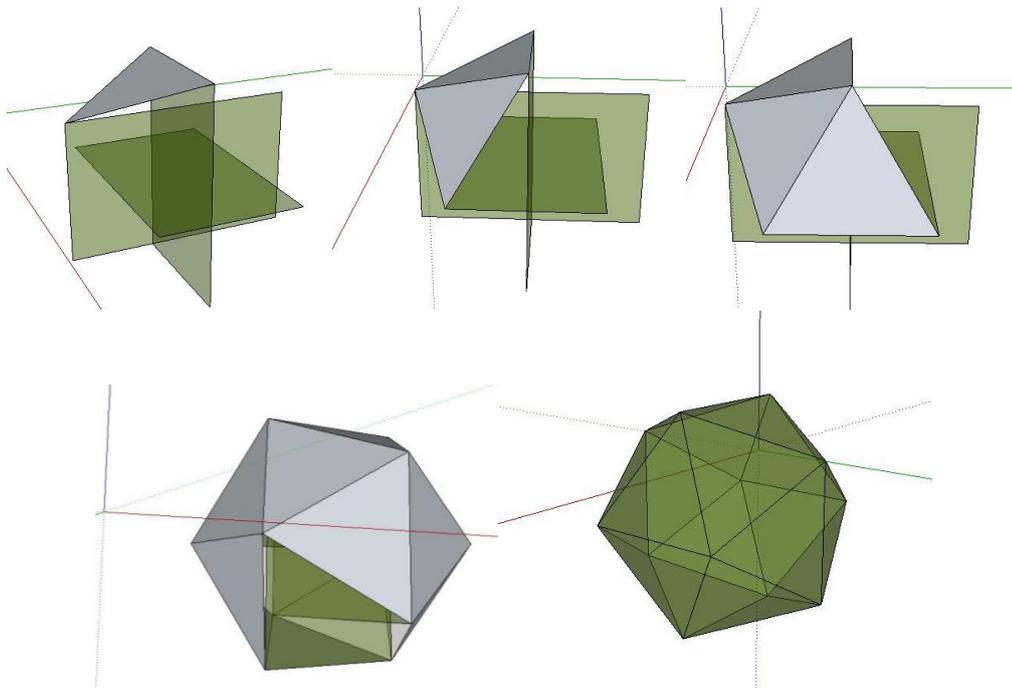
**Figura 46:** Demonstração do 5º passo de construção do icosaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

6) Com a ferramenta “lápis”, unir todos os 12 vértices, criando as faces do icosaedro:

**Figura 47:** Demonstração do 6º passo de construção do icosaedro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

A critério do usuário, apagar o grupo de retângulos e demais linhas auxiliares para construção do sólido. O icosaedro está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces do sólido são triângulos regulares;

- Os vértices do sólido coincidem com os vértices dos três retângulos áureos utilizados para sua construção;
- Por cada vértice do sólido concorrem cinco arestas não perpendiculares;

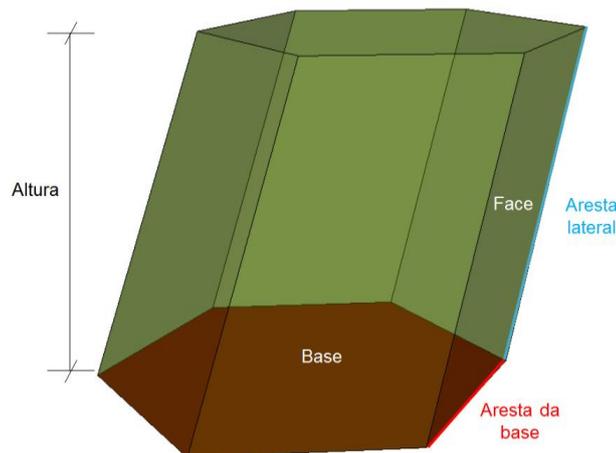
### 5.1.2. Prismas

Chama-se prisma o poliedro que possui um par de faces paralelas e congruentes, e pelo menos três faces paralelogrâmicas (lados paralelos dois a dois).

#### 5.1.2.1. Elementos do prisma

Um prisma possui os seguintes elementos: base, face, aresta da base, aresta lateral e altura.

**Figura 48:** Elementos do prisma.

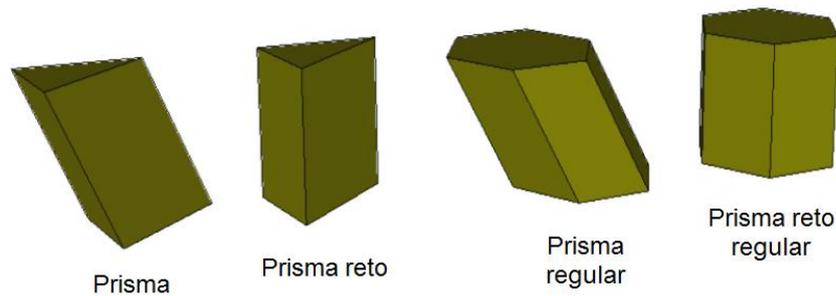


Fonte: Acervo pessoal.

#### 5.1.2.2. Tipos de prismas

Os prismas podem ser classificados em três grupos:

- Prisma reto: é aquele cuja aresta lateral é perpendicular à base. Neste tipo de prisma as faces laterais são retangulares e a aresta lateral coincide com a altura do prisma ( $al = h$ ).
- Prisma oblíquo: é aquele cuja aresta lateral é oblíqua à base.
- Prisma regular: é aquele cuja base é um polígono regular.

**Figura 49:** Tipos de prismas.

*Fonte: Acervo pessoal.*

Neste trabalho serão apresentados alguns prismas retos regulares.

#### 5.1.2.3. Área da base

A área da base de um prisma depende da sua natureza, ou seja, um prisma hexagonal terá um hexágono como base, assim como um pentagonal terá um pentágono como base e assim para os demais prismas retos regulares. Logo, a sua área da base ( $S_b$ ) será dada pela área do polígono que é base do prisma.

#### 5.1.2.4. Área lateral

Como em um prisma reto regular a sua face é um retângulo, sua área lateral ( $S_l$ ) será a mesma área do retângulo de base “ $ab$ ”, correspondente a uma aresta da base e altura “ $al$ ”, correspondente à aresta lateral. Logo,

$$S_l = b \cdot h = ab \cdot al$$

#### 5.1.2.5. Área total

Consideremos um prisma reto regular de base poligonal com “ $n$ ” lados. Sua área total ( $S_t$ ) corresponde à  $n$  vezes a área lateral ( $S_l$ ) acrescida de 2 vezes a área da base ( $S_b$ ). Portanto:

$$S_t = 2S_b + nS_l$$

#### 5.1.2.6. Volume

O volume ( $Vol$ ) de um prisma reto regular é igual ao produto da área da base ( $S_b$ ) pela medida da altura, ou aresta lateral.

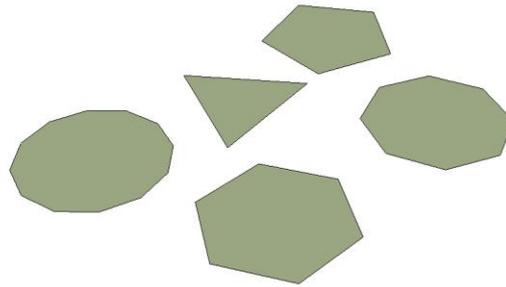
$$Vol = S_b \cdot al$$

### 5.1.2.7. Construindo um prisma no *SketchUp*

Para a construção de um prisma usando o *software SketchUp*, recomenda-se seguir os seguintes passos:

1) Com o comando polígonos, fazer os polígonos que serão base do prisma. Neste item, podem ser testados triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos, decágonos, entre outros polígonos:

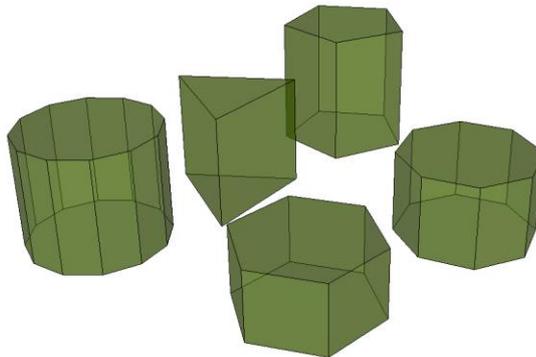
**Figura 50:** Demonstração do 1º passo de construção de prismas.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

2) Com o comando “empurrar/puxar”, selecionar a face do polígono e compor a altura do prisma:

**Figura 51:** Demonstração do 2º passo de construção de prismas.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O prisma está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- Em um prisma reto regular, a aresta lateral corresponde à altura do mesmo;
- Por cada vértice do sólido concorrem três arestas não perpendiculares, sendo duas arestas da base e uma aresta lateral;

- O número de faces do prisma sempre será igual ao número de lados do polígono base.

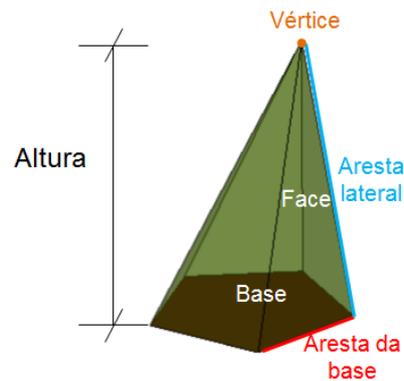
### 5.1.3. Pirâmides

Chama-se pirâmide o poliedro formado por todos os segmentos de retas cujas extremidades são um ponto V e os vértices de um polígono convexo.

#### 5.1.3.1. Elementos da pirâmide

Os elementos que compõem uma pirâmide são: base, vértice, faces, arestas da base, arestas laterais e altura.

**Figura 52:** Elementos da pirâmide.

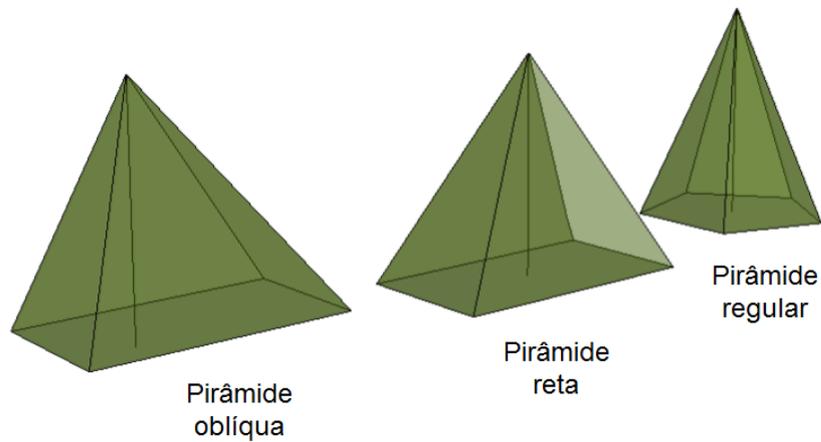


*Fonte: Acervo pessoal.*

#### 5.1.3.2. Tipos de pirâmide

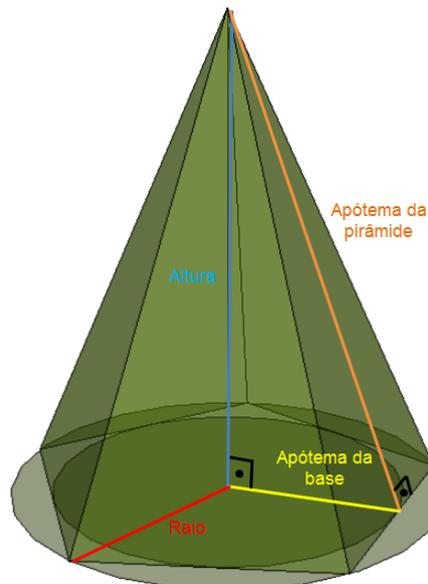
As pirâmides podem ser classificadas segundo a sua natureza, ou seja, uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, entre outras, se a sua base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, entre outros. As pirâmides ainda podem ser do tipo:

- Pirâmide reta: é aquela cuja projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base;
- Pirâmide oblíqua: é aquela cuja projeção ortogonal do vértice não coincide com o centro da base.
- Pirâmide regular: é uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular.

**Figura 53:** Tipos de pirâmides.

*Fonte: Acervo pessoal.*

Em uma pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Destacam-se aqui três elementos de uma pirâmide regular: apótema da pirâmide ( $ap$ ), apótema da base ( $ab$ ) e raio da base ( $r$ ). Estes elementos, aliados com conceitos da Geometria Plana, ajudam a entender a organização e as propriedades das pirâmides regulares na Geometria Espacial.

**Figura 54:** Apótemas, raio e altura da pirâmide.

*Fonte: Acervo pessoal.*

Neste trabalho serão apresentadas algumas pirâmides regulares.

#### 5.1.3.3. Área da base

A base de uma pirâmide depende de sua natureza. Logo, a sua área da base ( $S_b$ ) será dada pela área do polígono que é base da pirâmide.

#### 5.1.3.4. Área lateral

Como a face de uma pirâmide regular é um triângulo isósceles, sua área da face ( $S_f$ ) será dada pela área do triângulo isósceles:  $S_f = \frac{ab.ap}{2}$ , onde  $ab$  é a aresta da base e  $ap$  é o apótema da pirâmide. A área lateral ( $S_l$ ) dependerá do polígono da base:

$$S_l = nS_f = n \cdot \frac{ab.ap}{2},$$

onde “n” indica o número de arestas do polígono da base.

#### 5.1.3.5. Área total

A área total ( $S_t$ ) de uma pirâmide regular é a soma de sua área da base com sua área lateral. Ou seja:

$$S_t = S_b + S_l$$

#### 5.1.3.6. Volume

O volume ( $Vol$ ) de uma pirâmide é dado pela expressão:

$$Vol = \frac{S_b.h}{3},$$

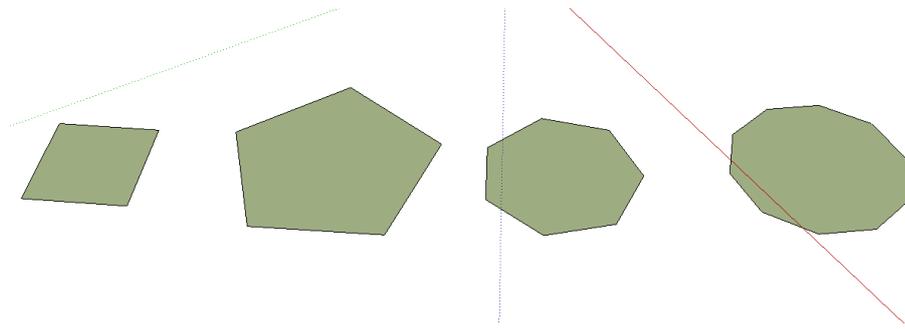
onde “h” é a altura da pirâmide.

#### 5.1.3.7. Construindo uma pirâmide no *SketchUp*

Para a construção de uma pirâmide regular no *SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

1) Com a ferramenta polígonos, desenhar um polígono de “n” faces à critério do usuário. Este polígono será a base da pirâmide. Neste item, podem ser testados triângulos, quadrados, pentágonos, decágonos, entre outros polígonos.

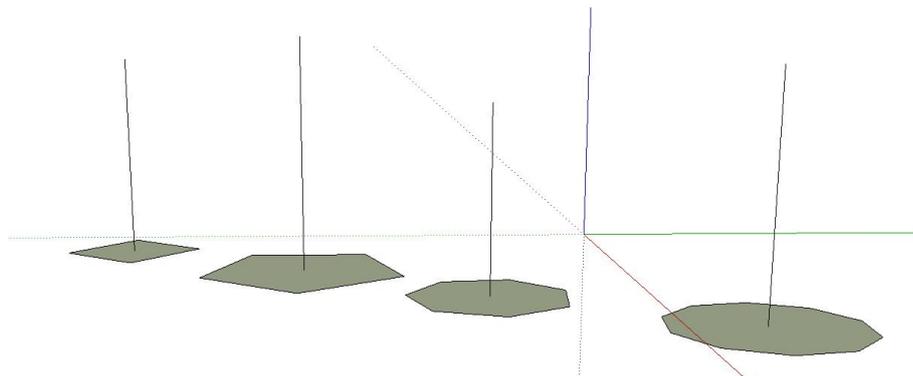
**Figura 55:** Demonstração do 1º passo de construção de pirâmides.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

2) Com a ferramenta lápis, identificar o centro do polígono e traçar um segmento de reta paralelo ao eixo Z (azul). O usuário pode arrastar o cursor do mouse à altura desejada ou digitar na barra de dimensão a medida do segmento de reta.

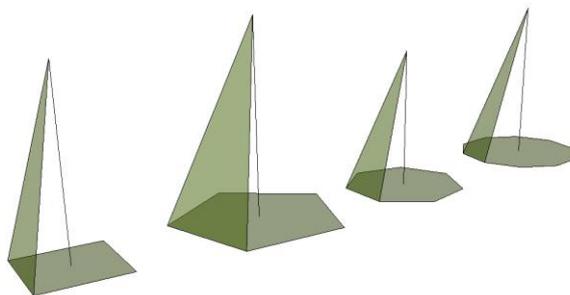
**Figura 56:** Demonstração do 2º passo de construção de pirâmides.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

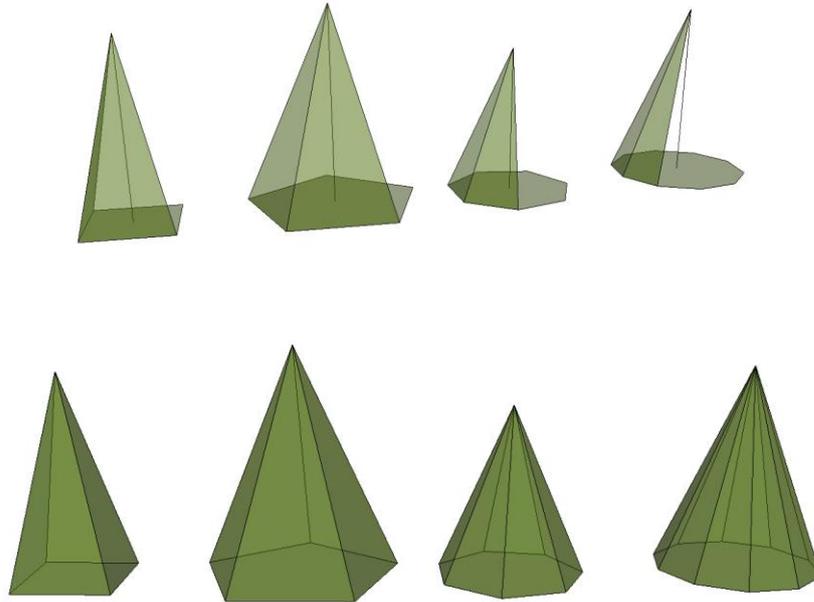
3) Ainda com a ferramenta lápis, traçar segmentos de reta unindo o vértice do polígono base com o vértice da pirâmide, criando as faces da pirâmide.

**Figura 57:** Demonstração do 3º passo de construção de pirâmides (parte 01).



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

**Figura 58:** Demonstração do 3º passo de construção de pirâmides (parte 02).



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

A pirâmide está pronta. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces são sempre triangulares;
- No caso de uma pirâmide regular, as faces são triângulos isósceles;
- Em uma pirâmide regular, o segmento que passa pelo vértice da pirâmide perpendicularmente à sua base, passa exatamente sobre o centro do polígono base;
  - O centro do polígono da base é também centro das circunferências inscrita e circunscrita à base da pirâmide;
  - O número de faces da pirâmide sempre será igual ao número de lados do polígono base.

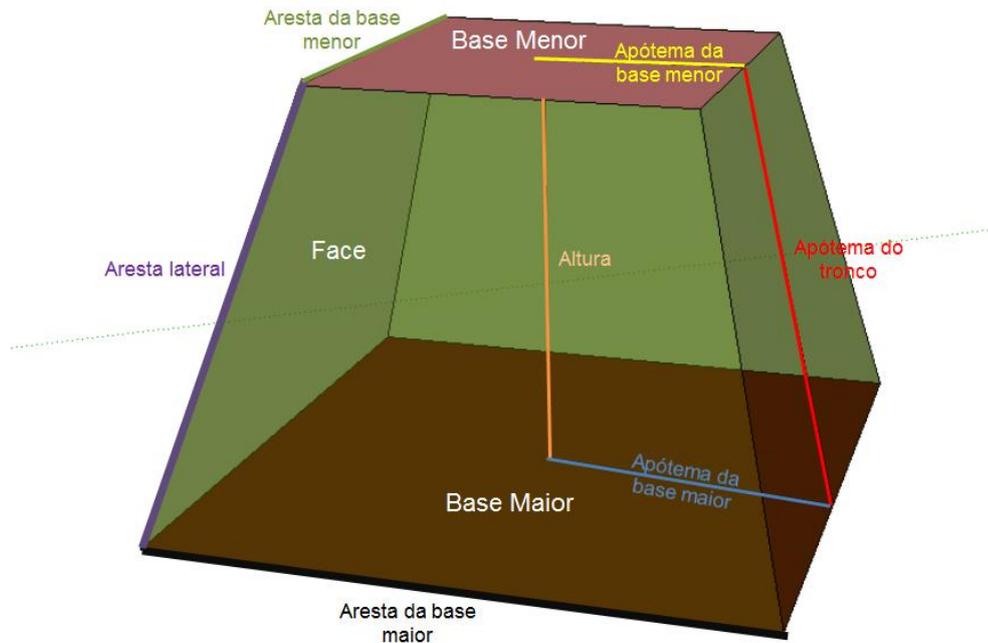
#### 5.1.4. Tronco de pirâmide

O tronco de pirâmide é um poliedro obtido através da secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base. Nesta sessão será trabalhado tronco de pirâmide regular.

#### 5.1.4.1. Elementos do tronco de pirâmide

Os elementos que compõem um tronco de pirâmide regular são: base maior, base menor, aresta maior, aresta menor, faces laterais, aresta lateral, altura do tronco, apótema da base maior, apótema da base menor e apótema do tronco.

**Figura 59:** Elementos do tronco de pirâmide.



*Fonte: Acervo pessoal.*

#### 5.1.4.2. Área da base

A base de um tronco de pirâmide depende de sua natureza. Logo, a sua área da base, tanto base maior quanto base menor, será dada pela área do polígono que é base do tronco de pirâmide. Denomina-se  $S_B$  a área da base maior e  $S_b$  a área da base menor.

#### 5.1.4.3. Área lateral

Em um tronco de pirâmide reto regular, as faces laterais são trapezoidais isósceles congruentes. Logo, a área de uma face ( $S_f$ ) pode ser calculada como a área de um trapézio isósceles:

$$S_f = \frac{(B + b) \cdot at}{2}$$

onde “B” é a aresta da base maior, “b” corresponde à aresta da base menor e “at” é o apótema do tronco.

A área lateral (Sl) de um tronco pode ser calculada como n vezes a área da face, uma vez que um tronco cuja base seja um polígono de n arestas, terá n faces. Desta forma, a área lateral de um tronco de pirâmide regular é:

$$Sl = n \cdot Sf = \frac{n \cdot (B + b) \cdot at}{2}$$

#### 5.1.4.4. Área total

A área total (St) de um tronco de pirâmide regular é a soma de sua área da base maior, com área da base menor e sua área lateral. Ou seja:

$$St = SB + Sb + Sl$$

#### 5.1.4.5. Volume

O volume (Vol) de um tronco de pirâmide regular é dado pela expressão

$$Vol = \frac{h[SB + Sb + \sqrt{SB \cdot Sb}]}{3}$$

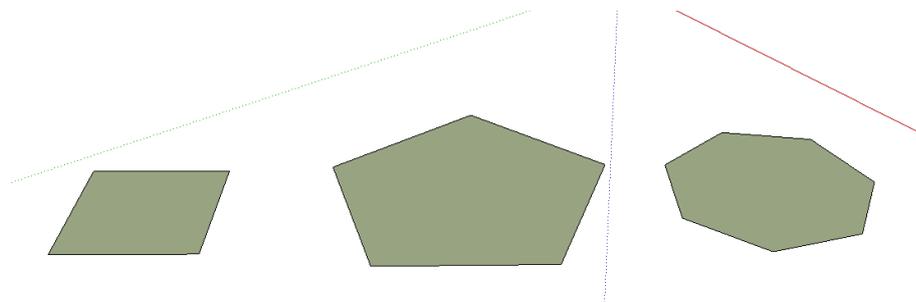
onde “h” é a altura do tronco de pirâmide.

#### 5.1.4.6. Construindo um tronco de pirâmide no *SketchUp*

Para a construção de um tronco de pirâmide regular utilizando o *software SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

1) Com o comando polígonos, criar polígonos regulares. Neste caso, o usuário pode testar polígonos de diferentes números de lados para obter diversas naturezas dos troncos de pirâmide. Estes polígonos serão a base maior dos troncos.

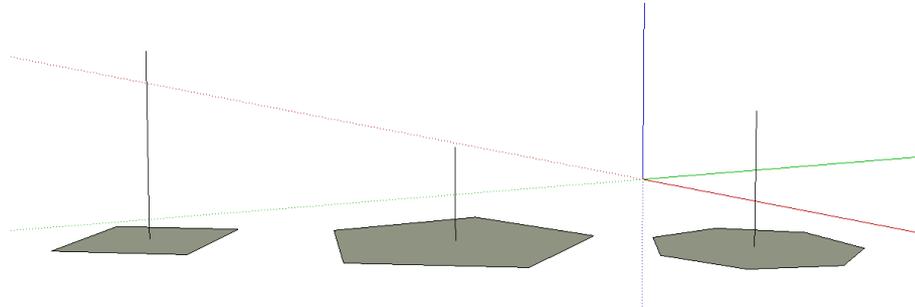
**Figura 60:** Demonstração do 1º passo de construção de troncos de pirâmide.



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).

2) Com a ferramenta “lápis”, traçar sobre o centro dos polígonos, segmentos de retas paralelos ao eixo Z (azul), de forma que sejam a altura dos troncos de pirâmide.

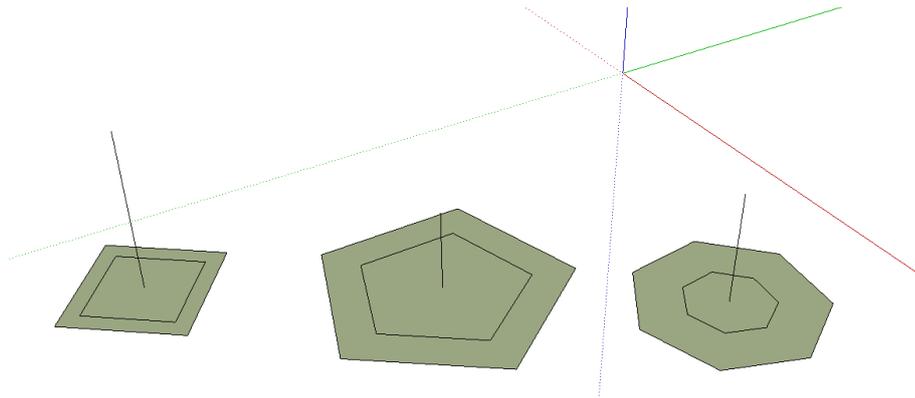
**Figura 61:** Demonstração do 2º passo de construção de troncos de pirâmide.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

3) Com o auxílio do comando “equidistância”, fazer um polígono menor e concêntrico com o polígono já existente.

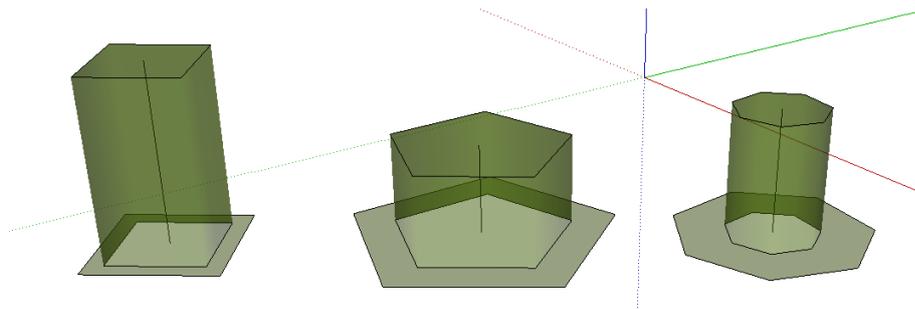
**Figura 62:** Demonstração do 3º passo de construção de troncos de pirâmide.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

4) Com o comando “empurrar/puxar”, prolongar o polígono de forma que alcance a altura da linha feita no passo 02.

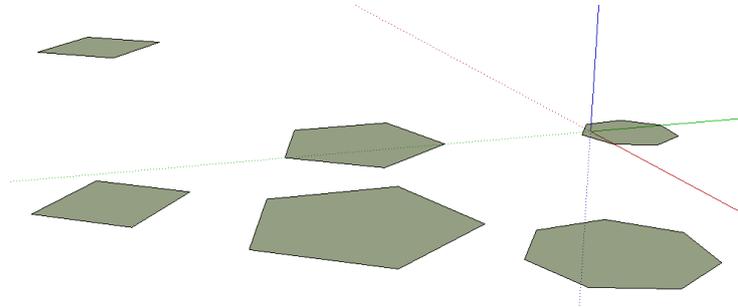
**Figura 63:** Demonstração do 4º passo de construção de troncos de pirâmide.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

5) Para melhor composição do sólido, apagar as linhas e polígonos auxiliares, de forma que restam apenas o polígono da base maior e o polígono da base menor.

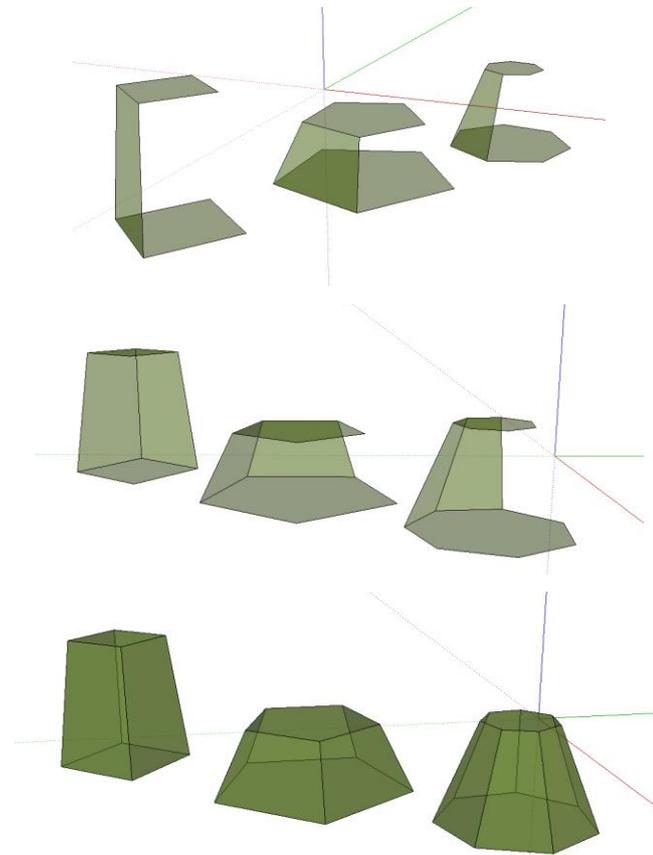
**Figura 64:** Demonstração do 5º passo de construção de troncos de pirâmide.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

6) Com o auxílio da ferramenta “lápiz”, criar as arestas laterais através da união dos vértices das bases maior e menor e, por consequência, obter as faces do tronco de pirâmide.

**Figura 65:** Demonstração do 6º passo de construção de troncos de pirâmide.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

Os troncos de pirâmide estão prontos. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- As faces são trapézios isósceles;
- As bases são paralelas;
- A reta que passa pelos centros das bases é perpendicular à ambas as bases do tronco;
- O número de faces do tronco de pirâmide sempre será igual ao número de lados do polígono base.

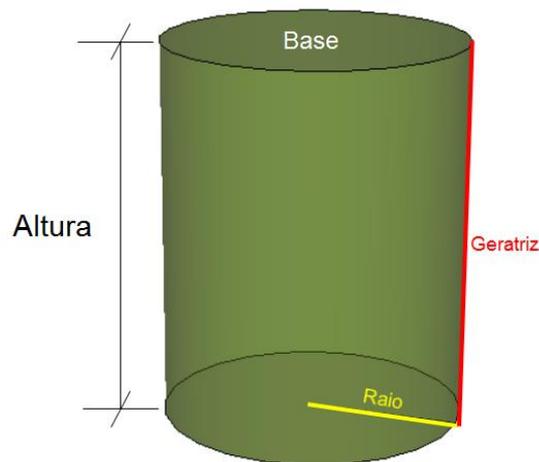
## 5.2. Cilindros Circulares

Cilindro é a reunião de segmentos congruentes e paralelos entre si, os quais têm suas extremidades em círculos paralelos e distintos.

### 5.2.1. Elementos do cilindro

Os elementos que compõem um cilindro são: bases circulares, geratrizes e raio da base.

**Figura 66:** Elementos do cilindro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

### 5.2.2. Tipos de cilindro

Os cilindros podem ser classificados de acordo com a posição das suas geratrizes:

a) Cilindro circular obluo: quando suas geratrizes são obluas ao plano da base;

b) Cilindro circular reto: quando suas geratrizes são perpendiculares ao plano da base. O cilindro circular reto  também denominado cilindro de revolução, pois pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contm um de seus lados.

Nesta sessão será trabalhado o cilindro circular reto.

### 5.2.3. rea da base

Como a base de um cilindro é um círculo, sua área da base ( $S_b$ ) será dada pela expressão que determina a área do círculo. Portanto,

$$S_b = \pi r^2$$

onde “ $r$ ”  o raio da base do cilindro.

### 5.2.4. rea lateral

Ao obter a planificação do cilindro, tem-se uma superfície lateral na forma de um retângulo de lados  $2\pi r$  e  $h$ , onde “ $h$ ”  a altura do cilindro. Portanto, a área lateral ( $S_l$ ) do cilindro pode ser expressa como a área do retângulo:

$$S_l = 2\pi r h$$

### 5.2.5. rea total

A rea total ( $S_t$ ) do cilindro é a soma de sua área lateral com as áreas das bases, ou seja:

$$S_t = S_l + 2S_b = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

### 5.2.6. Volume

O volume ( $Vol$ ) de um cilindro é expresso pelo produto da sua área da base por sua altura. Logo,

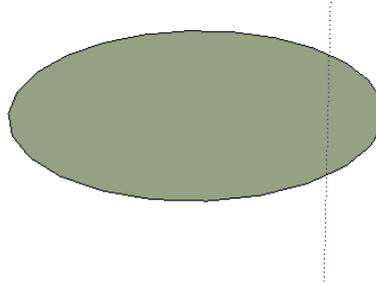
$$Vol = S_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

### 5.2.7. Construindo um cilindro no *SketchUp*

Para a construção de um cilindro circular reto usando o *software SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

- 1) Com o comando círculo, fazer o círculo que será a base do cilindro:

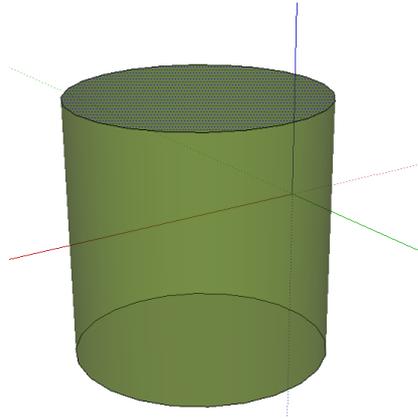
**Figura 67:** Demonstração do 1º passo de construção de cilindro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 2) Com o comando “empurrar/puxar”, selecionar a face do círculo base e compor a altura do cilindro.

**Figura 68:** Demonstração do 2º passo de construção de cilindro.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O cilindro está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- Em um cilindro circular reto, a sua geratriz corresponde à sua altura;
- Os raios das bases têm medidas iguais;
- Em um cilindro circular reto, sua seção meridiana corresponde à um retângulo;
- Quando a seção meridiana é um quadrado, o cilindro é chamado de “cilindro equilátero”, e sua geratriz corresponde ao diâmetro da base;

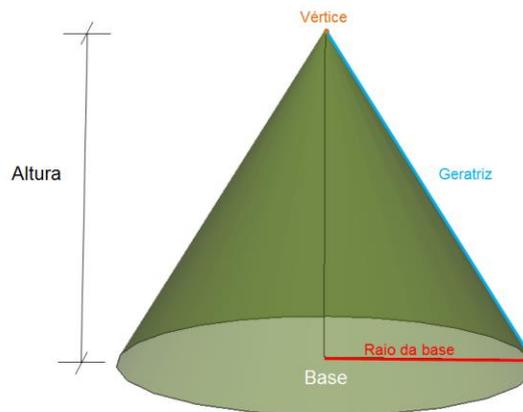
### 5.3. Cones Circulares

Cone é a reunião de todos os segmentos de reta com uma das extremidades em um vértice  $V$  e outra extremidade em um ponto  $P$  pertencente à um círculo base.

### 5.3.1. Elementos do cone

Os elementos que compõem um cone são: base, raio da base, geratriz, vértice e altura.

**Figura 69:** Elementos de cone.



*Fonte: Acervo pessoal.*

Além destes tem-se também o eixo do cone, que consiste na reta determinada pelo vértice e pelo centro da base.

### 5.3.2. Tipos de cone

Os cones podem ser classificados de acordo com a posição do seu eixo em relação à sua base:

- a) Cone circular oblíquo: é aquele cujo eixo é oblíquo ao plano da base;
- b) Cone circular reto: é aquele cujo eixo é perpendicular ao plano da base. Um cone circular reto é denominado cone de revolução, pois pode ser obtido pela rotação da superfície triangular de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Neste caso, este cateto é a altura do cone, o outro cateto é o raio da base e a hipotenusa corresponde à geratriz do cone.

Nesta sessão será trabalhado o cone circular reto.

### 5.3.3. Área da base

Como a base de um cone é um círculo, sua área da base ( $S_b$ ) será dada pela expressão que determina a área do círculo. Portanto,

$$S_b = \pi r^2$$

onde “r” é o raio da base do cone.

#### 5.3.4. Área lateral

Ao obter a planificação do cone, tem-se uma superfície lateral na forma de um setor circular cujo raio corresponde à geratriz do cone e arco com comprimento  $2\pi r$ , mesmo comprimento da base do cone. Através de relação proporcional existente entre a área do setor circular e o comprimento do setor circular, pode-se efetuar a seguinte formulação:

$$\frac{\text{comprimentodoarcodosetor}}{\text{comprimentodacircunferênciaderaio}g} = \frac{\text{áreadosetor}}{\text{áreadocírculo}}$$

$$\frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{Sl}{\pi g^2}$$

Portanto, a área lateral ( $Sl$ ) do cone pode ser expressa como:

$$Sl = \pi r g$$

#### 5.3.5. Área total

A área total ( $St$ ) do cone é a soma de sua área lateral com a área da base, ou seja:

$$St = Sl + Sb = \pi r^2 + \pi r g = \pi r(g + r)$$

#### 5.3.6. Volume

O volume ( $Vol$ ) de um cone é expresso pela terça parte do produto da sua área da base por sua altura. Logo,

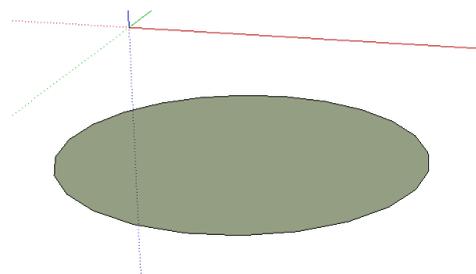
$$Vol = \frac{Sb \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

#### 5.3.7. Construindo um cone no *SketchUp*

Para a construção de um cone circular reto usando o *software SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

- 1) Com o comando círculo, fazer o círculo que será a base do cone:

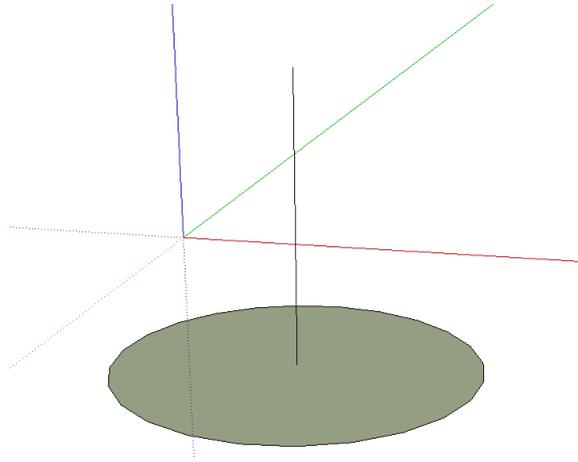
**Figura 70:** Demonstração do 1º passo de construção de cone.



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).

2) Sobre o centro do círculo, traçar um segmento de reta paralelo ao eixo Z (azul). Este segmento de reta será a altura do cone:

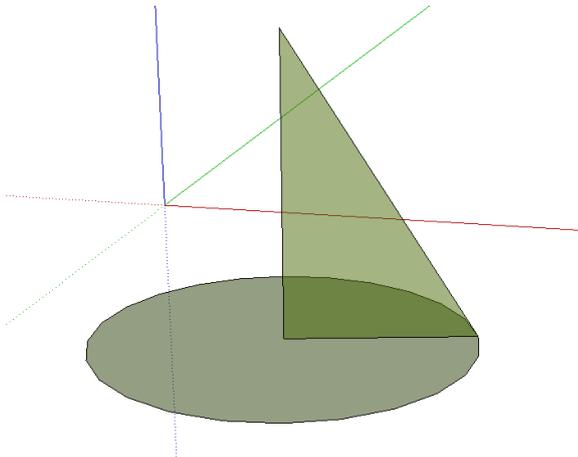
**Figura 71:** Demonstração do 2º passo de construção de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

3) Com a ferramenta lápis, traçar o raio da base a geratriz do cone, formando o triângulo retângulo que será utilizado para a construção do cone de revolução:

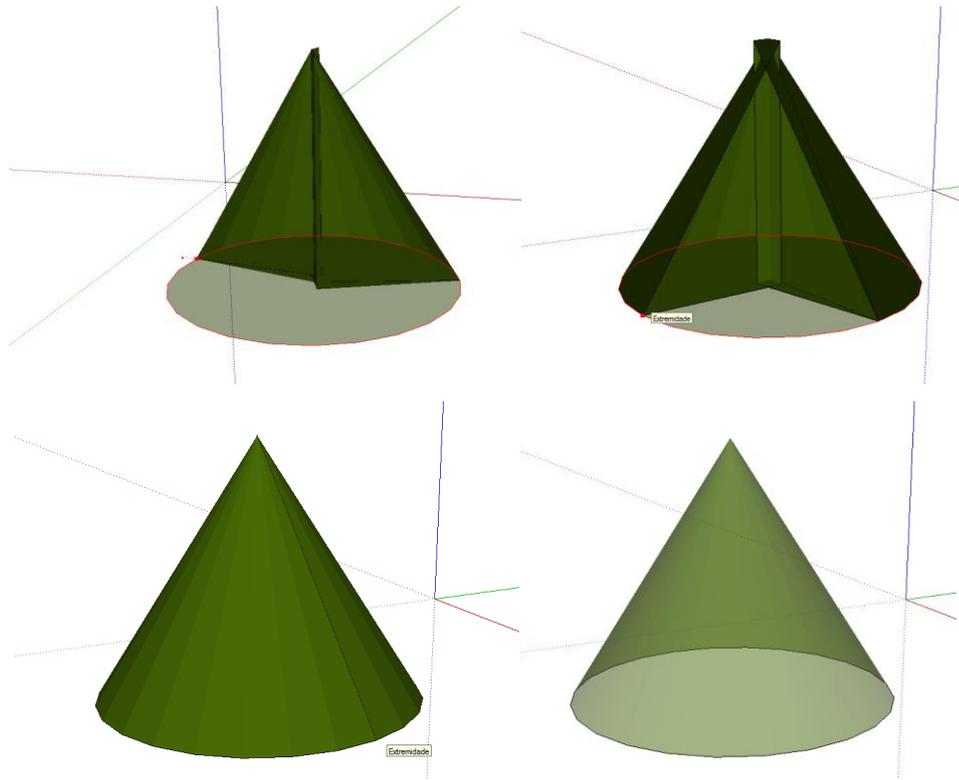
**Figura 72:** Demonstração do 3º passo de construção de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

4) Com auxílio da ferramenta “siga-me”, selecionar a área do triângulo retângulo e guiar a rotação do mesmo seguindo o comprimento do círculo:

**Figura 73:** Demonstração do 4º passo de construção de cone.



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).

O cone está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

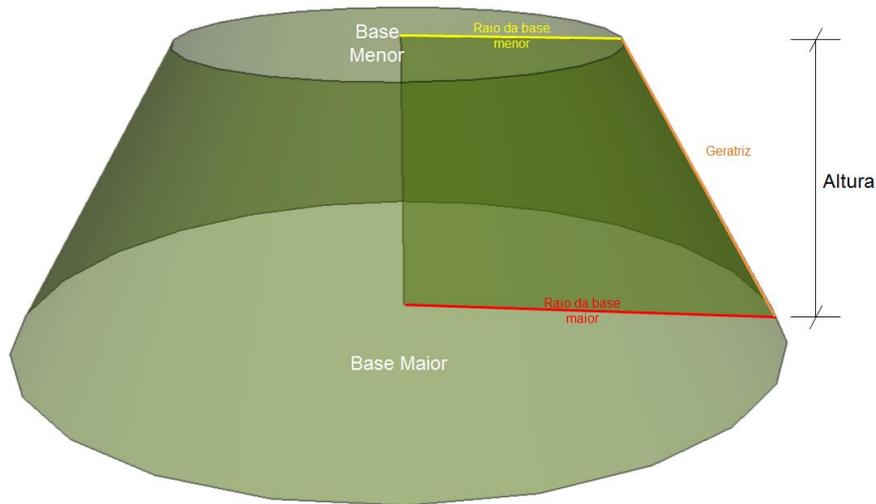
- Foram explorados, para esta construção, de um círculo como base e um triângulo retângulo como face de rotação;
- Diferentemente dos poliedros, este sólido não possui faces, apenas base e geratriz;

#### 5.4. Tronco de cone

O tronco de cone é obtido através da secção de um cone por um plano paralelo à base. Nesta sessão será trabalhado tronco de pirâmide regular.

##### 5.4.1. Elementos do tronco de cone

Os elementos que compõem um tronco de cone são: base maior, base menor, raio da base maior, raio da base menor, geratriz e altura.

**Figura 74:** Elementos do tronco de cone.

Fonte: Acervo pessoal.

#### 5.4.2. Área da base

As bases do tronco de um cone circular reto são círculos com raios  $R$  e  $r$ . Logo, a sua área da base, tanto base maior quanto base menor, será dada pela área do círculo que é base do tronco de cone. Denomina-se  $S_B$  a área da base maior e  $S_b$  a área da base menor. Logo,

$$S_b = \pi r^2 \text{ e } S_B = \pi R^2$$

#### 5.4.3. Área lateral

Sejam  $R$  e  $r$  os raios das bases maior e menor do tronco de cone, respectivamente. Sua área lateral ( $S_l$ ) pode ser expressa como:

$$S_l = \pi g(R + r)$$

#### 5.4.4. Área total

A área total ( $S_t$ ) de um tronco de cone é dada pela soma das suas áreas da base com sua área lateral. Ou seja,

$$S_t = S_l + S_B + S_b = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

#### 5.4.5. Volume

Seja "h" a altura do tronco de cone, o volume ( $Vol$ ) do tronco de cone reto é dado por:

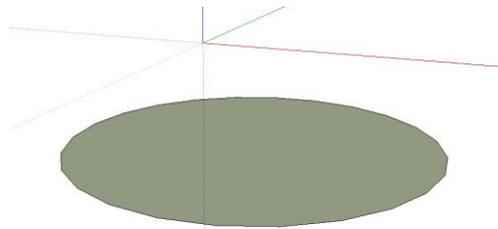
$$Vol = \frac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}$$

#### 5.4.6. Construindo um tronco de cone no *SketchUp*

Para a construção de um tronco de cone circular reto usando o *software SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

- 1) Com o comando círculo, fazer o círculo que será a base do cone:

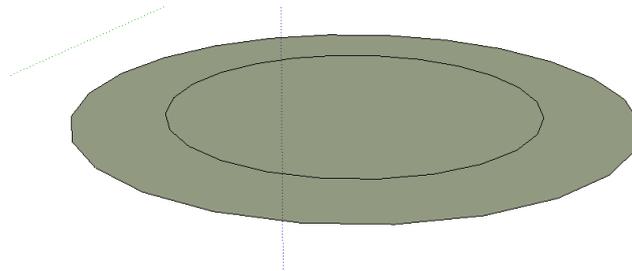
**Figura 75:** Demonstração do 1º passo de construção de tronco de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 2) Com o auxílio da ferramenta “equidistância”, traçar um círculo equidistante e concêntrico com o primeiro círculo:

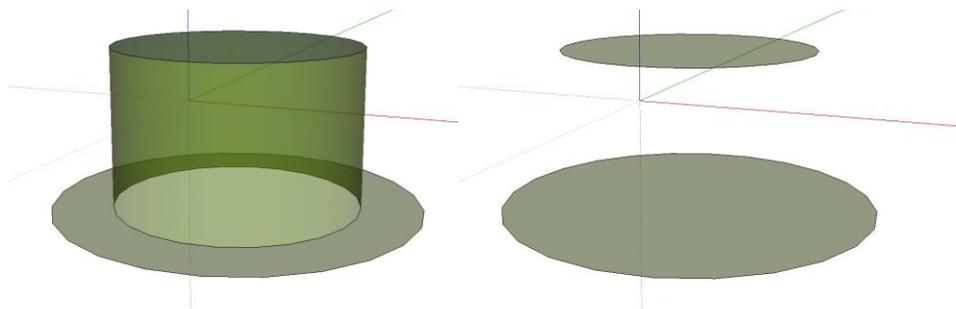
**Figura 76:** Demonstração do 2º passo de construção de tronco de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

- 3) Com o comando “empurrar/puxar”, prolongar o segundo círculo até a altura desejada. Em seguida, apagar a área cilíndrica criada, restando apenas os círculos base do tronco de cone:

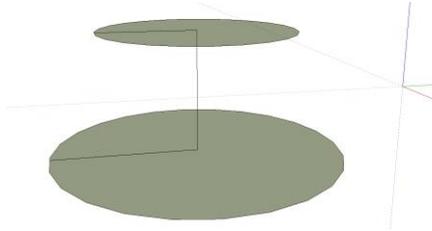
**Figura 77:** Demonstração do 3º passo de construção de tronco de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

4) Com a ferramenta lápis, sobre os centros dos círculos, traçar a altura e os raios das bases:

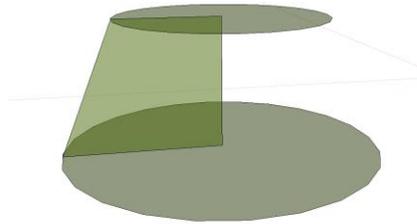
**Figura 78:** Demonstração do 4º passo de construção de tronco de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

5) Com o auxílio do comando lápis, traçar a geratriz do tronco de cone, formando assim o trapézio que será rotacionado com a finalidade de criar o tronco de cone:

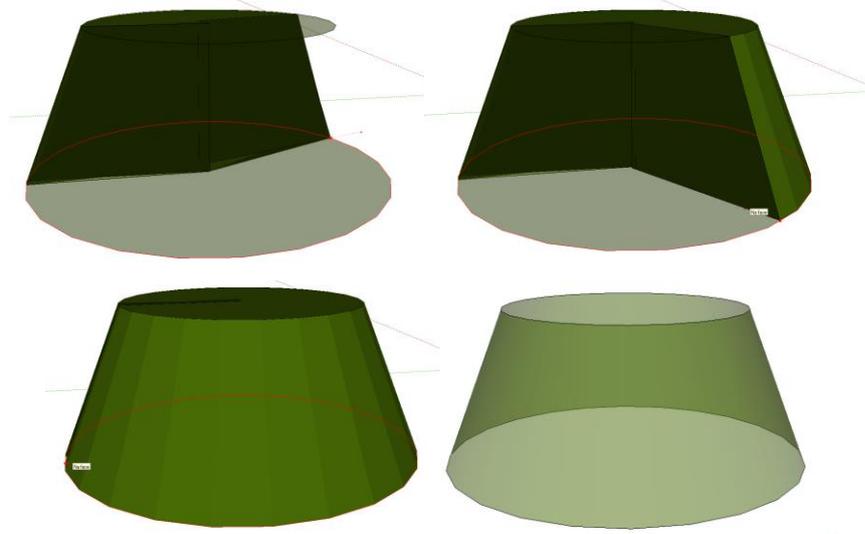
**Figura 79:** Demonstração do 5º passo de construção de tronco de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

6) Com auxílio da ferramenta “siga-me”, selecionar a área do trapézio e guiar a rotação do mesmo seguindo o comprimento do círculo:

**Figura 80:** Demonstração do 6º passo de construção de tronco de cone.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

O tronco de cone está pronto. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido:

- Foram explorados, para esta construção, um círculo como base e um trapézio retângulo como face de rotação;
- As bases são paralelas;
- A reta que passa pelos centros das bases é perpendicular à ambas as bases do tronco;

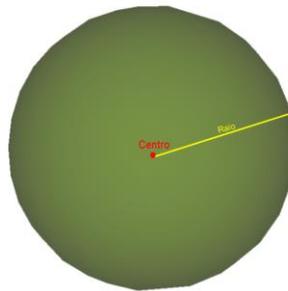
## 5.5. Esfera

A esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

### 5.5.1. Elementos da esfera

Os elementos que compõem a esfera são: centro e raio.

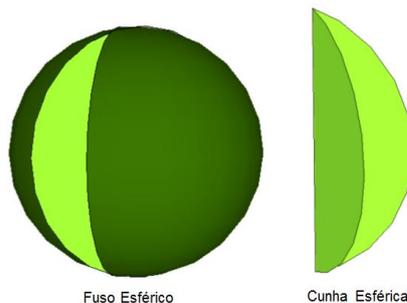
**Figura 81:** Elementos da esfera.



*Fonte: Acervo pessoal.*

Além destes, há duas partes da esfera, originadas de secções de sua superfície esférica ou de seu volume, que são comumente trabalhadas na Geometria Espacial: fuso esférico e cunha esférica.

**Figura 82:** Fuso esférico e cunha esférica.



*Fonte: Acervo pessoal.*

### 5.5.2. Área da superfície esférica

Seja “r” o raio da esfera. A área (S) da sua superfície é dada pela expressão:

$$S = 4\pi r^2$$

### 5.5.3. Volume

Seja “r” o raio da esfera. O seu volume (Vol) é dado pela expressão:

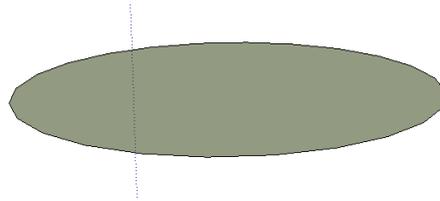
$$Vol = \frac{4\pi r^3}{3}$$

### 5.5.4. Construindo uma esfera no *SketchUp*

Para a construção de uma esfera usando o *software SketchUp*, recomenda-se acompanhar os seguintes passos:

1) Com o comando círculo, fazer o círculo que será círculo máximo da esfera:

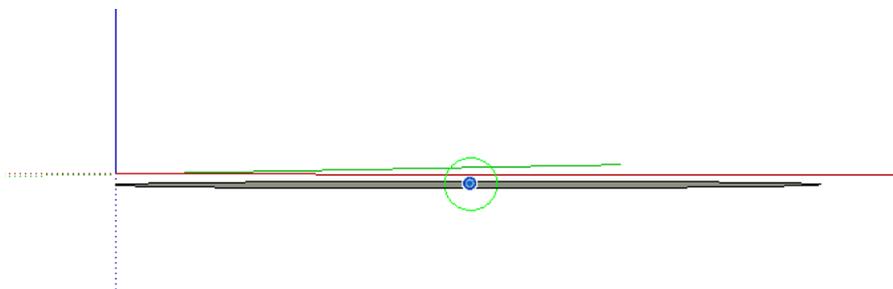
**Figura 83:** Demonstração do 1º passo de construção de esfera.



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).

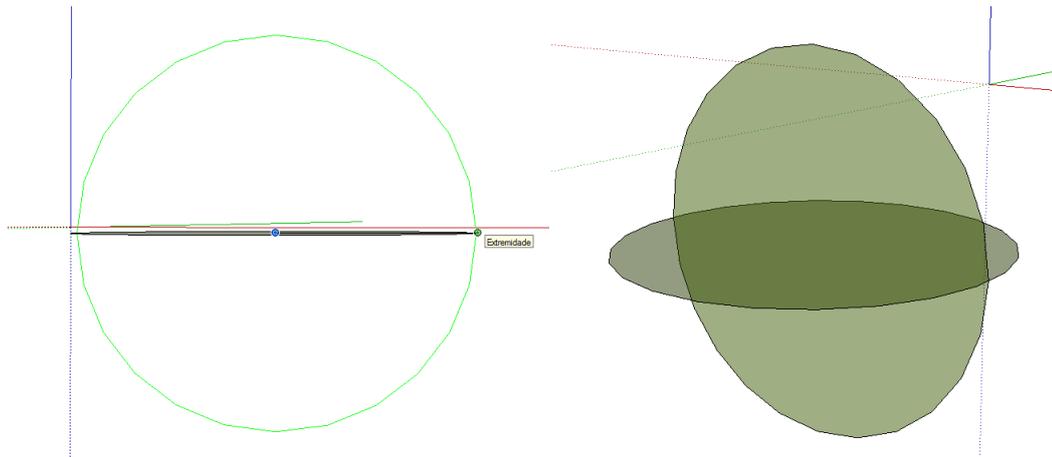
2) Com o comando círculo, traçar um segundo círculo que seja ortogonal ao primeiro círculo desenhado. Para facilitar a visão do usuário, recomenda-se girar a área de trabalho do *software* para visualizar os círculos concêntricos nos eixos X e Y (vermelho e verde):

**Figura 84:** Demonstração do 2º passo de construção de esfera (parte 01).



Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).

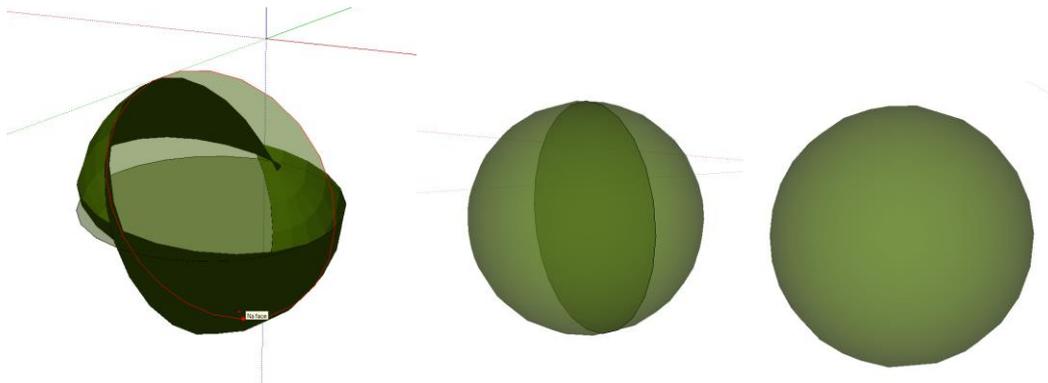
**Figura 85:** Demonstração do 2º passo de construção de esfera (parte 02).



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

3) Com auxílio da ferramenta “siga-me”, selecionar o segundo círculo e guiar a rotação do mesmo seguindo o comprimento do primeiro círculo:

**Figura 86:** Demonstração do 3º passo de construção de esfera.



*Fonte: Acervo pessoal (Print Screen do software SketchUp).*

A esfera está pronta. A partir desta construção, o usuário pode observar a aplicação dos conceitos da Geometria na constituição do sólido, tais como:

- Não há faces nem bases, utilizando-se apenas de círculos para sua construção;
- O primeiro círculo criado pode ser denominado círculo máximo, ou seja, divide a esfera em dois hemisférios iguais.

Desta forma, os principais sólidos geométricos foram construídos com o auxílio do *software SketchUp*.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a experiência de ensinar Desenho Técnico, disciplina na qual em sua ementa são primordiais o desenho geométrico e outras interfaces da Matemática como medidas e proporção, percebeu-se que uma das maiores dificuldades dos alunos era a falta de percepção espacial. As demonstrações de sólidos no Espaço de Coordenadas e o uso de perspectivas ajudou os alunos a assimilar melhor os conceitos de Geometria e espaço. Desta forma, concluiu-se que quando o aluno tem a experiência da construção do sólido, há maior absorção e entendimento dos conceitos geométricos.

Para atender as habilidades e competências citadas pela Matriz de Referência do ENEM, os educadores devem procurar métodos de ensino que permitam ao aluno esclarecer e associar logicamente a função dos conteúdos matemáticos e suas aplicações, fomentando a construção do conhecimento pelo mesmo. Quaisquer alternativas de melhorar o processo ensino-aprendizagem são válidas desde que sejam percebidas as mudanças e melhorias na assimilação de determinado conteúdo.

O professor é o principal intermediador junto ao aluno no processo ensino-aprendizagem e por isso, deve encontrar meios que facilitem a compreensão do conteúdo trabalhado. Com o avanço da Ciência e a facilidade do acesso às tecnologias, as TICs (Tecnologias de Informação e Comunicação) estão se tornando cada vez mais comuns nos ambientes de ensino, uma vez que a maioria dos alunos do nível básico já possuem conhecimento prévio de tecnologia (muitas vezes melhor que o próprio professor). Este fato pode ser um aliado no processo ensino-aprendizagem nas aulas de Geometria, com o uso dos *softwares* de geometria dinâmica, embora vale ressaltar que o uso de tecnologias não exime o professor de seu papel perante o ensino, e sim o auxilia no aprendizado dos seus alunos.

Sabe-se que promover a inovação no ensino de Matemática, aliada à evolução tecnológica e ao uso de computadores como dispositivos auxiliares, é uma das boas alternativas de melhorar o processo ensino-aprendizagem. No entanto, fornecer os computadores para os professores e alunos é necessária porém não suficiente para a realização de um ensino prático, interativo e construtivo. Há um conjunto de fatores que influenciam diretamente no sucesso (ou fracasso) da

utilização dos recursos tecnológicos, como por exemplo: computadores para todos os usuários, boa estrutura nos laboratórios de informática, implantação dos *softwares* corretos e participação ativa do professor. Esta participação do professor consiste em: o professor saber usar o *software* e o laboratório de informática, ter o material didático em concomitância com o conteúdo das aulas nos laboratórios, planejar as aulas e saber relacionar-se com o usuário (aluno), uma vez que a ambiência em uma sala de aula e um laboratório são diferentes.

Apesar dos empecilhos existentes na concretização de uma aula com o ambiente informatizado, nota-se entre os usuários que o utilizam, uma progressão significativa na assimilação do conteúdo e no comportamento dos próprios alunos neste ambiente: aulas dinâmicas e informatizadas aumentam o interesse do aluno em conhecer e dominar certo *software* trabalhado. Portanto, a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica é uma boa alternativa para o aprendizado de Geometria Espacial.

A proposta de utilizar o *software SketchUp* como recurso metodológico no aprendizado dos sólidos geométricos é uma boa escolha pois alia o conhecimento tecnológico do usuário com a sua própria prática em sala de aula (e fora dela também).

Construir sólidos com o *software SkecthUp* é uma tarefa fácil, interessante e divertida: o programa está em português, as ferramentas são intuitivas e facilmente manipuláveis, a modelagem pode ser em duas ou três dimensões e a construção do conhecimento é feita pelo próprio usuário. Além disso, o uso do programa melhora a percepção espacial do usuário, ajuda na interatividade e quebra o preconceito de que a Matemática se resume a fórmulas, números e símbolos.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, C. M. **Uma proposta de atividades sobre funções afins e quadráticas para educação de jovens e adultos com o uso do Software Graphmática**. Porto Velho. 2013.

CARVALHO, M. N. **As potencialidades do uso da lousa digital no ensino de matemática**. Porto Velho. 2014.

COSTA, A. C., BERMEJO, A. P. B., MORAES, M. S. F. **Análise do Ensino de Geometria Espacial**. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí. 2009.

D'AMBROSIO, U. **A Etnomatemática no processo de construção de uma escola indígena**. Brasília. 1994.

DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos De Matemática Elementar – geometria espacial: posição e métrica**. Atual Editora. 6ª ed. 2010.

GABRIEL, D. **Volume do dodecaedro e do icosaedro**. Disponível em: <https://www.doraci.com.br/downloads/matematica/dodecaedro.pdf>. Acesso em: 20 de setembro de 2017.

GÁLVEZ, G. **A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária**. In: PARRA, C.; SAIZ, I. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre, 2001.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. **Matemática – Ciência e Aplicações**. Volume 02. Editora Saraiva. 2010.

MACHADO, R. A. **O ensino de geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio**. Ouro Preto. 2010.

MACHADO, R. A., TONINI, A. M. **O uso do software SketchUp no ensino de prismas**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife. 2011.

MARTINS, E. B., ANDRADE, S. **Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial: uma aplicação da metodologia de resolução de problemas**. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

MATSUBARA, J. **Conexões com a Matemática**. Volume 02. Editora Moderna. 2010.

MEC. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília, 2014. Disponível em: [http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/downloads/2012/matriz\\_referencia\\_enem.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf). Acesso em: 10 de agosto de 2017.

MEDINA, M. N., BRAGA, M. **Frankenstein: a aproximação das ciências com alunos de ensino médio através do teatro**. VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Florianópolis. 2009.

NETO, J. M., PACHECO, D. **Pesquisas sobre ensino de Física do 2o. grau no Brasil**. In: NARDI, Roberto. Pesquisas em ensino de Física. São Paulo: Escrituras Editora, 1998.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. Volume 02. Editora Moderna. 2013.

RIBEIRO, J. **Matemática – Ciência, Linguagem e Tecnologia**. Volume 02. Editora Scipione. 2012.

SILVA, A. Q., SANTOS, T. S. **O uso do software Geogebra no ensino de geometria plana**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas. 2013.

SILVA, G. H. G., PENTEADO, M. G. **O trabalho com Geometria Dinâmica em uma perspectiva investigativa.** I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – SINTEC. Ponta Grossa. 2009.

SOUZA, L. A. **Uma proposta para o ensino da geometria espacial usando o Geogebra 3D.** 2014.

SOUZA, M. S., NASCIMENTO, R. A, BENUTTI, M. A. **O uso do SketchUp como ferramenta no ensino de geometria descritiva.** XI Seminário do Programa de Pós-Graduação em Desenho, Cultura e Interatividade. São Paulo. 2015.

## APÊNDICE – SketchUp Básico<sup>4</sup>

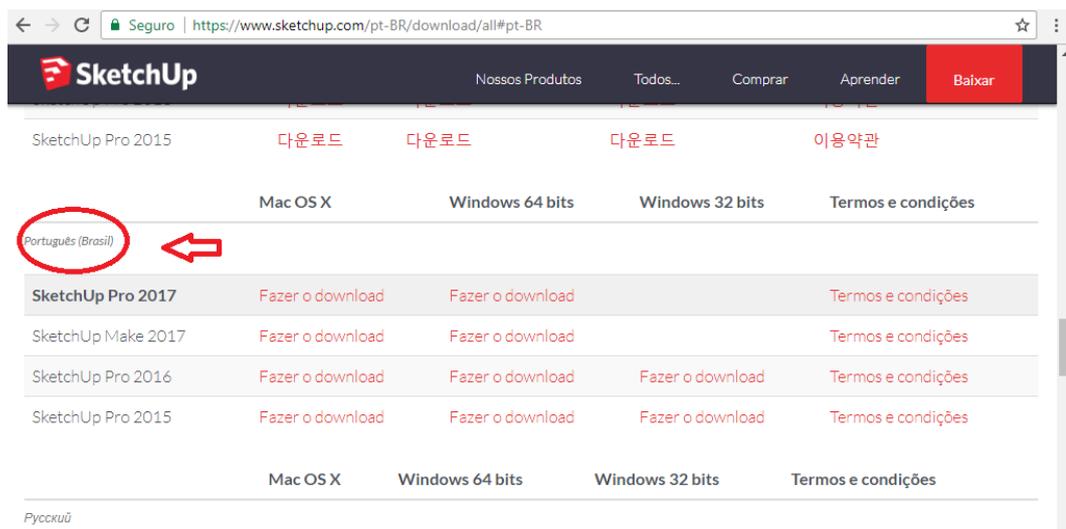
### 1. Introdução

O *SketchUp* é um programa da *Google* que permite fazer representações em 2D ou 3D, dependendo da escolha de quem o utiliza: a partir da criação da forma em 2D, é possível obter a forma em 3D. O *software* é uma poderosa ferramenta nos campos do *design* de interiores, da arquitetura, engenharia civil, engenharia geográfica, sendo amplamente utilizado na geração de projetos e maquetes eletrônicas.

Atualmente, o programa encontra-se na versão *SketchUp* 2017, podendo ser obtido pelo próprio site da *Google* e em português, o que facilita a sua utilização. Além da fácil instalação e utilização, o *software* é ágil na modelagem de objetos e os comando básicos são fáceis de aprender e memorizar.

Para efetuar o *download* do *SketchUp* em um computador, o usuário pode consultar diretamente o site de instalação do *Google SketchUp* (<https://www.sketchup.com/pt-BR/download/all#pt-BR>) ou simplesmente digitar “Download SketchUp” na barra de pesquisas do site da *Google*. Ao acessar o site, este apresenta as opções disponíveis para *download*, de acordo com o modelo do computador e o idioma (inglês, espanhol, alemão, chinês, português, entre outros). Deve-se procurar a melhor versão e idioma para o usuário.

**Figura 01:** Indicação de instalação do *software SketchUp*



Fonte: Acervo pessoal.

<sup>4</sup> Tutorial de iniciação ao *software SketchUp* como auxílio na dissertação “O *SketchUp* Como Ferramenta de Auxílio no Ensino-aprendizagem de Sólidos Geométricos”, elaborado pela mestrandia Dândara Linhares Batista Barbosa.

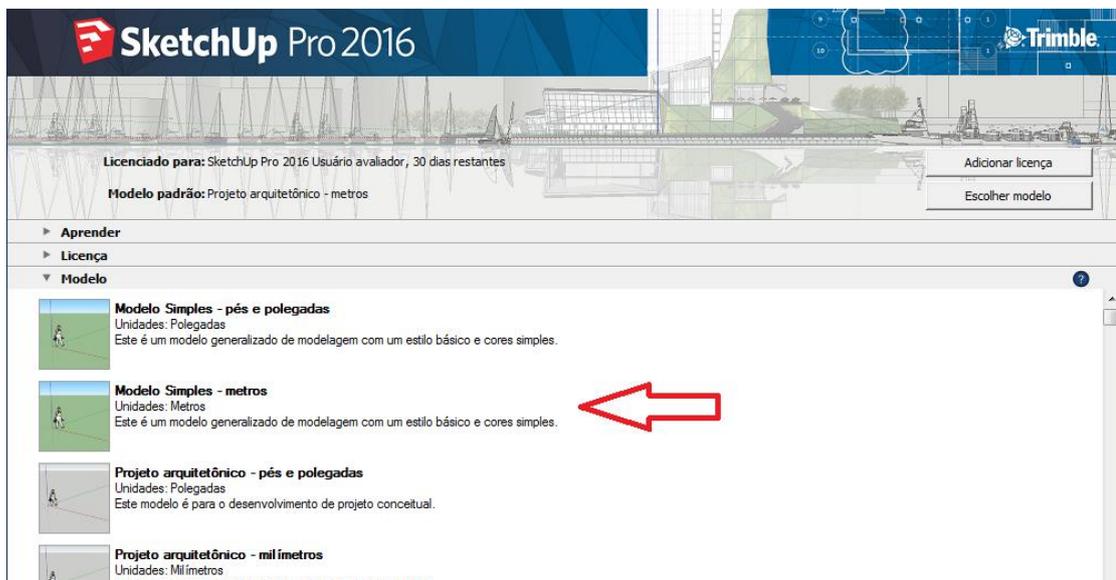
Após seguir os procedimentos de instalação, o *software* estará disponível para uso no computador e o ícone de atalho para o programa já estará na área de trabalho. Ao clicar para abrir o programa, haverá uma janela para adicionar licença ou escolher modelo. Ao escolher qual o modelo será trabalhado, entre eles, arquitetura, engenharia, marcenaria, *design*, entre outros, recomenda-se a escolha “Modelo Simples – metros”.

**Figura 02:** Procedimento para inicialização do *software SketchUp*



*Fonte: Acervo pessoal.*

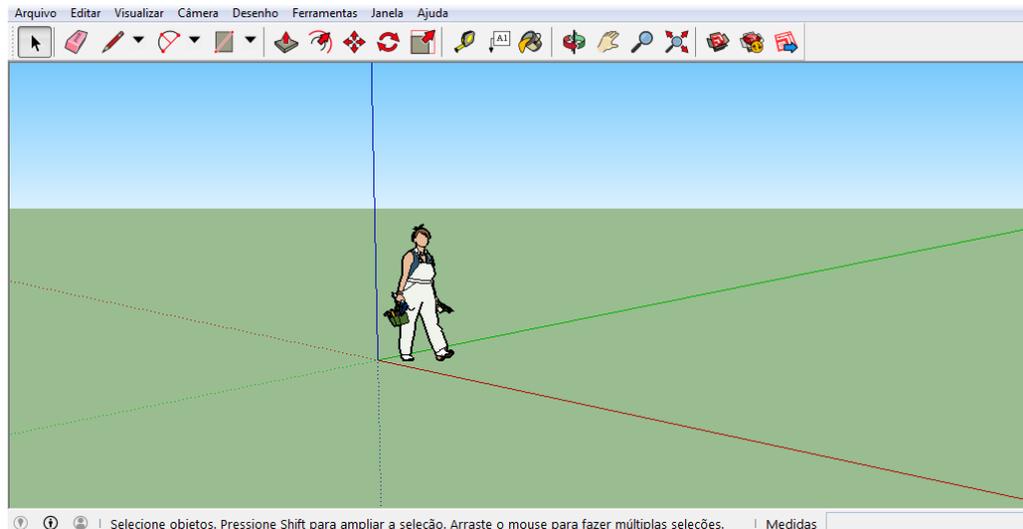
**Figura 03:** Procedimento para inicialização do *software SketchUp*



*Fonte: Acervo pessoal*

Após a escolha do modelo a ser utilizado, o programa abre sua *interface* para ser trabalhada.

**Figura 04:** Interface de trabalho do software SketchUp



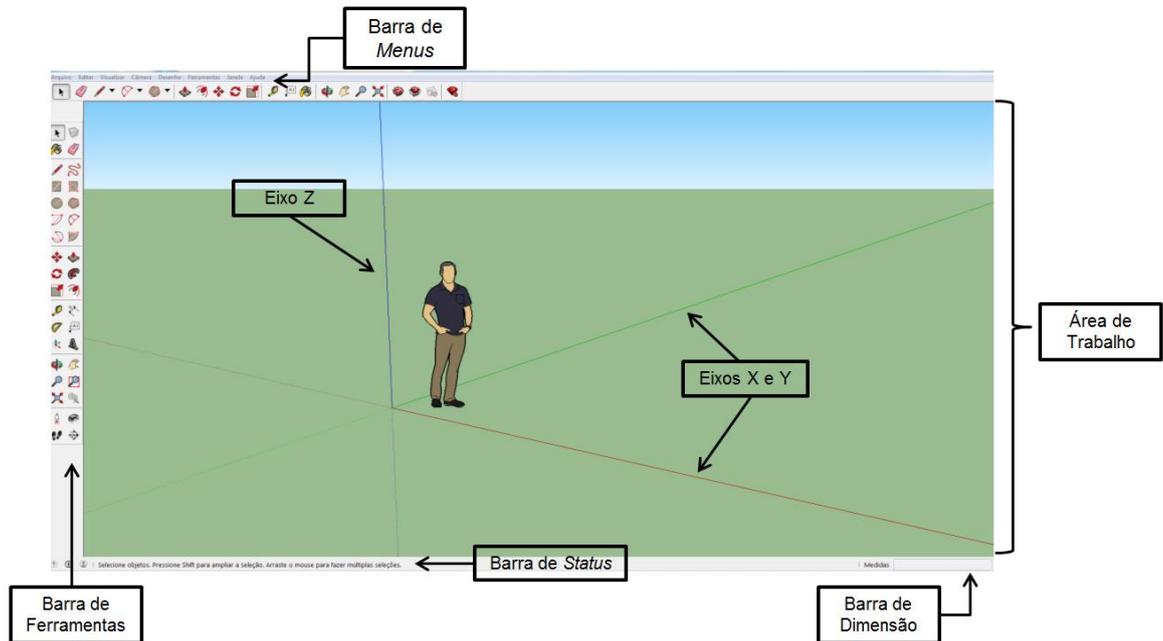
*Fonte: Acervo pessoal.*

## 2. Interface Gráfica

A interface do SketchUp é simples, prática e intuitiva. A barra de ferramentas pode ser personalizada e posicionada conforme opção do usuário. Ao visualizar a interface de trabalho do programa, pode-se identificar alguns elementos:

- Barra de Menus: nela encontram-se as opções de ferramentas de edição, de visualização, de desenho, além das opções de gerenciamento de arquivos (criar novo arquivo, copiar, colar, salvar, imprimir). Para inserir mais itens na barra de ferramentas, procura-se o ícone Visualizar > Ferramentas > Conjunto Grande de Ferramentas;
- Barra de ferramentas: local onde são inseridas as principais ferramentas e os principais comandos para criação de modelos e desenhos, como por exemplo: linha, círculo e polígonos. Ainda na barra de ferramentas encontramos os comandos de edição, medição e criação de volumes;
- Barra de *status*: funciona como uma barra de comandos, que guia o usuário sobre o comando que está ativo e quais os passos para a conclusão do mesmo;
- Barra de dimensão: local onde o usuário pode digitar o tamanho da linha, do objeto ou do espaço que deseja obter.
- Área de trabalho: área onde o usuário desenvolverá o desenho em duas ou três dimensões. Nela estão os eixos X, Y e Z, ortogonais entre si, que auxiliam na construção e edição dos desenhos.

**Figura 05:** Elementos da *Interface* de trabalho do *software SketchUp*



Fonte: Acervo pessoal.

### 3. Visualização Básica

Os comandos de visualização do *SketchUp* são: *zoom*, panorâmica, orbitar. Para ativá-los, basta dar um clique sobre seu ícone na área de trabalho:



Estes comandos também podem ser facilmente manuseados pelo usuário diretamente com o mouse, tornando o trabalho no *software* mais rápido e ágil:

- Zoom: para aproximar-se ou afastar-se do desenho na área de trabalho basta girar o botão *scroll* do mouse;
- Panorâmica: para movimentar-se lateralmente pela área de trabalho basta pressionar o botão *scroll* junto com botão esquerdo do *mouse*;
- Orbitar: para mudar o ângulo de visão de um objeto na área de trabalho basta pressionar o botão *scroll* do *mouse* e movimentar o *mouse*.

#### 4. Métodos de Seleção

Os comandos de seleção do *SketchUp* são: *select crossing* e *select window*. Para ativar o *select crossing*, basta abrir a janela de seleção da direita para a esquerda, selecionando assim todos os objetos interceptados pela janela de seleção. Para ativar o *select window*, basta abrir a janela de seleção da esquerda para a direita, selecionando apenas os objetos contidos inteiramente na janela de seleção.

Vale ressaltar que os objetos no *software* são constituídos de linhas, faces, componentes e grupos. Ao criar o hábito de usar os instrumentos *mouse* e teclado, o usuário pode utilizar-se dos mesmos para auxiliar nos comandos de seleção:

- a) Um clique sobre o objeto: seleciona o objeto;
- b) Um clique sobre o objeto + CTRL: seleciona todos os objetos adicionados um a um;
- c) Um clique sobre o objeto + SHIFT: seleciona todos os objetos adicionados ou removidos um a um;
- d) Dois cliques sobre o objeto: seleciona o objeto e todas as entidades conectadas exclusivamente à ele;
- e) Três cliques sobre o objeto: seleciona todos os objetos conectados uns aos outros.

#### 5. Comandos Para Desenho Básico

O intuito deste tópico é apresentar os principais comandos utilizados no programa no que concerne ao auxílio no desenho bidimensional e tridimensional, objetivando reconhecer em cada um deles como é trabalhada a construção dos objetos na área de trabalho. Os comandos básicos para criação de desenho são: linha, retângulo, círculo, polígono e arco:

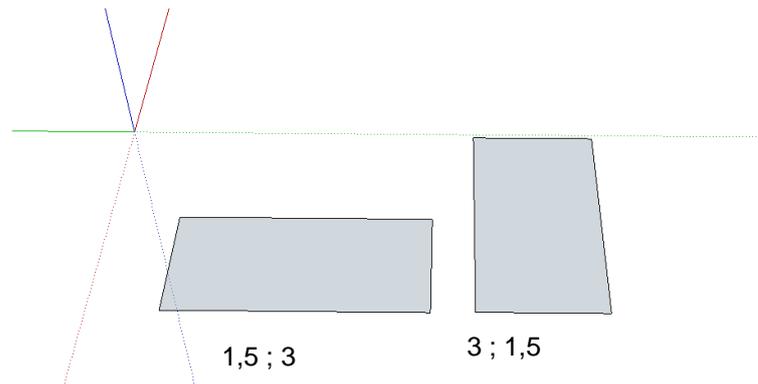
Linha		Desenho livre
Retângulo		Retângulo giratório
Círculo		Polígono
Arco		Arco (2 pontos)
Arco (3 pontos)		Arco (pizza)

Todos os comandos listados acima, para serem ativados, basta um clique sobre seu ícone e desenhá-lo na área de trabalho. Para uma maior precisão na dimensão do desenho,

recomenda-se utilizar a barra de dimensão, digitando as medidas necessárias. Algumas observações devem ser consideradas ao desenhar as seguintes figuras planas:

- Retângulo: ao desenhar um retângulo, para obter maior precisão, digitar na barra de dimensão as medidas da base e da altura do retângulo, separadas por “ponto e vírgula”. Exemplo:

**Figura 06:** exemplo de construção de retângulos com o *SketchUp*.



*Fonte: Acervo pessoal*

- Círculo: ao desenhar um círculo, para obter maior precisão, digitar na barra de dimensão a medida do raio do círculo;
- Polígono: antes de desenhar um polígono, deve-se digitar na barra de dimensão o número de lados do polígono e, em seguida, a medida do raio da circunferência circunscrita no mesmo.

## 6. Comandos Para Edição

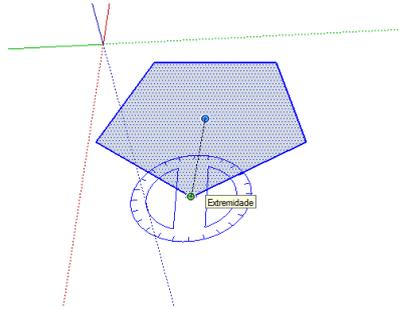
Os comandos de edição do *SketchUp* são: rotacionar, mover/copiar, empurrar/puxar, escala, equidistância e siga-me.

Mover/Copiar		Empurrar/Puxar
Rotacionar		Siga-me
Escala		Equidistância

Todos os comandos listados acima, para serem ativados, basta um clique sobre a face ou linha a ser editada e, em seguida, um clique sobre seu ícone. Algumas observações devem ser consideradas ao utilizar-se dos comandos de edição:

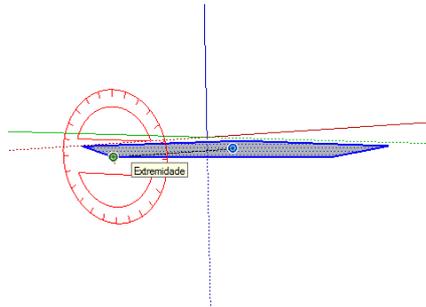
- Mover/Copiar: os comandos mover e copiar são ativados pelo mesmo ícone: com apenas um clique utiliza-se o comando mover e com um clique mais a tecla “Ctrl”, utiliza-se o comando copiar;
- Rotacionar: para rotacionar um objeto deve-se estar atento sobre qual eixo será feita a rotação. Exemplo:

**Figura 07:** Exemplo de rotação sobre o Eixo Azul.



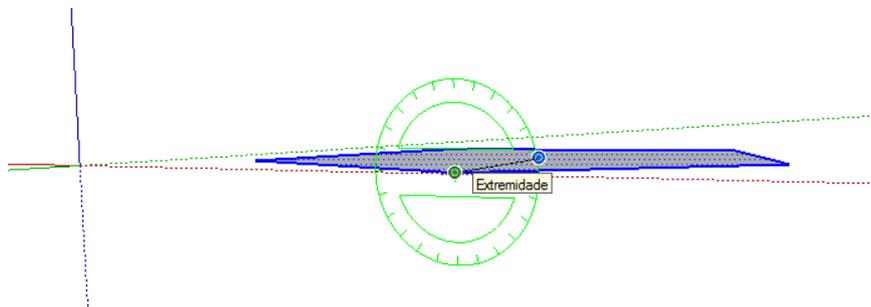
*Fonte: Acervo pessoal.*

**Figura 08:** Exemplo de rotação sobre o Eixo Vermelho.



*Fonte: Acervo pessoal.*

**Figura 09:** Exemplo de rotação sobre o Eixo Verde.



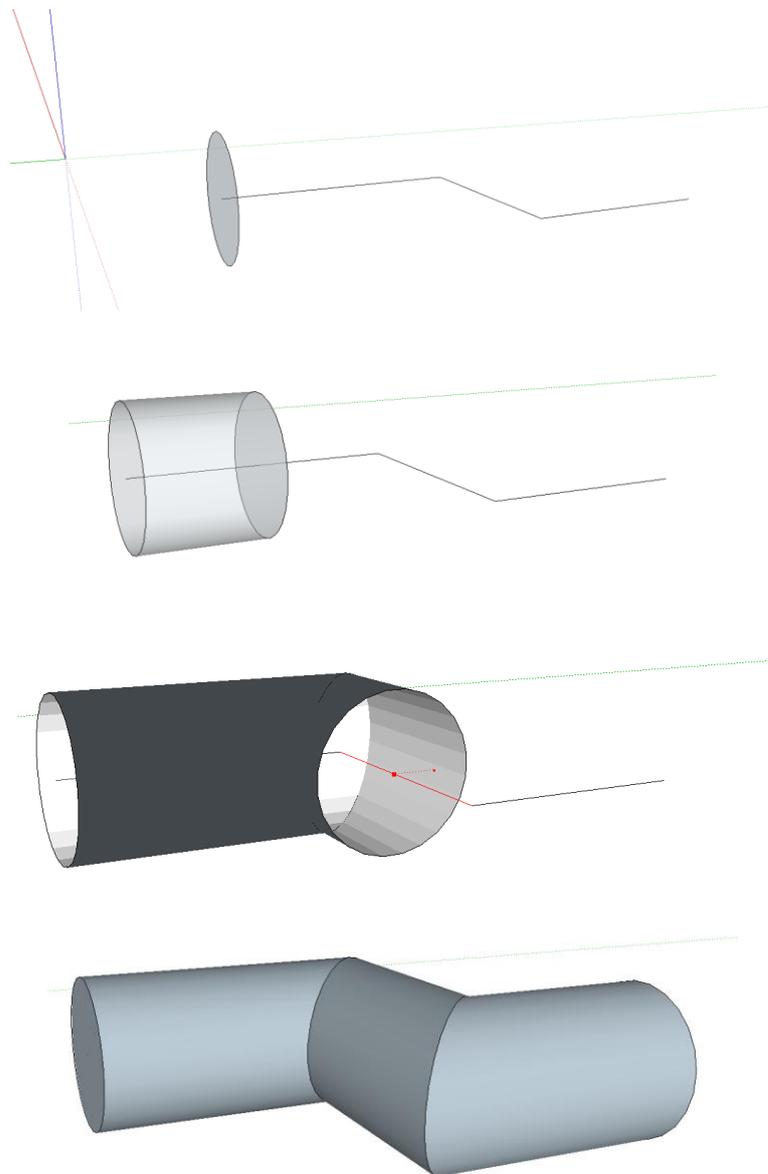
*Fonte: Acervo pessoal.*

Há uma opção do comando rotacionar, “rotacionar suspenido”, que consiste em fixar um primeiro ponto e com os segundo e terceiro ponto, criar um eixo de rotação. Esta opção

pode ser realizada ao manter o botão esquerdo do *mouse* pressionado na escolha dos dois primeiros pontos.

- Escala: o comando escala permite modificar o tamanho do objeto;
- Empurrar/Puxar: o comando empurrar/puxar permite criar sólidos através de faces;
- Equidistância: o comando equidistância permite criar linhas, arcos, polígonos, entre outras entidades, paralelos e a uma distância exata;
- Siga-me: o comando siga-me permite que um objeto tome outro formato ao percorrer um caminho pré-estabelecido:

**Figura 10:** Exemplo de utilização do comando siga-me do *SketchUp*.

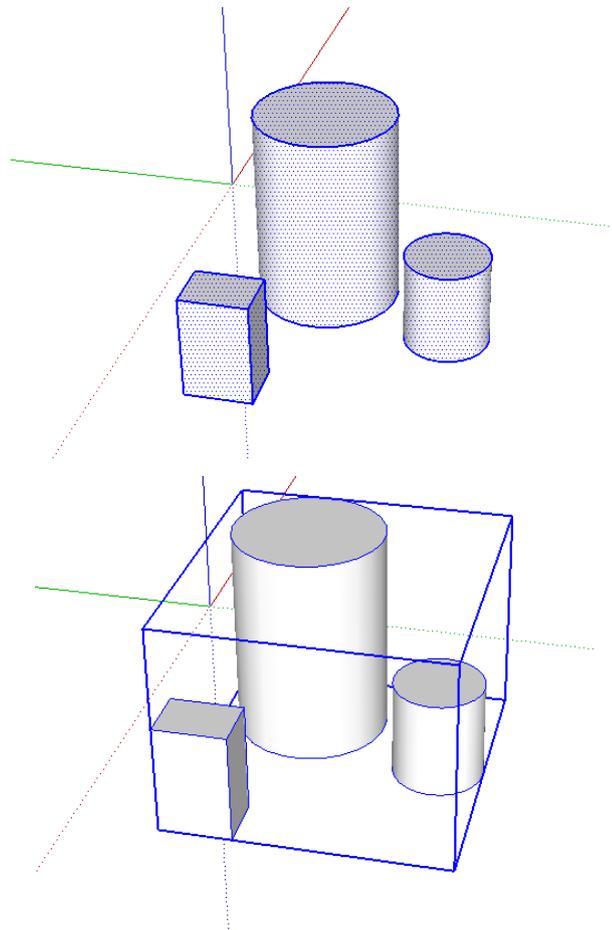


*Fonte: Acervo Pessoal.*

## 7. Criação de Componentes e Grupos

Um grupo é a união de objetos e entidades em uma só entidade, permitindo editar os objetos de uma só vez. Para criar um grupo, selecionam-se todas as entidades que deseja ter no grupo, clica-se com o botão direito do *mouse* e escolhe-se a opção “criar grupo”. Para editar um grupo, basta clicar sobre o mesmo com o botão direito do *mouse* e escolher a opção “editar grupo”.

**Figura 11:** Exemplo de transformação de entidades separadas em um grupo de entidades.



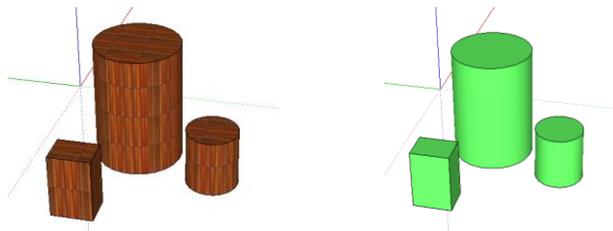
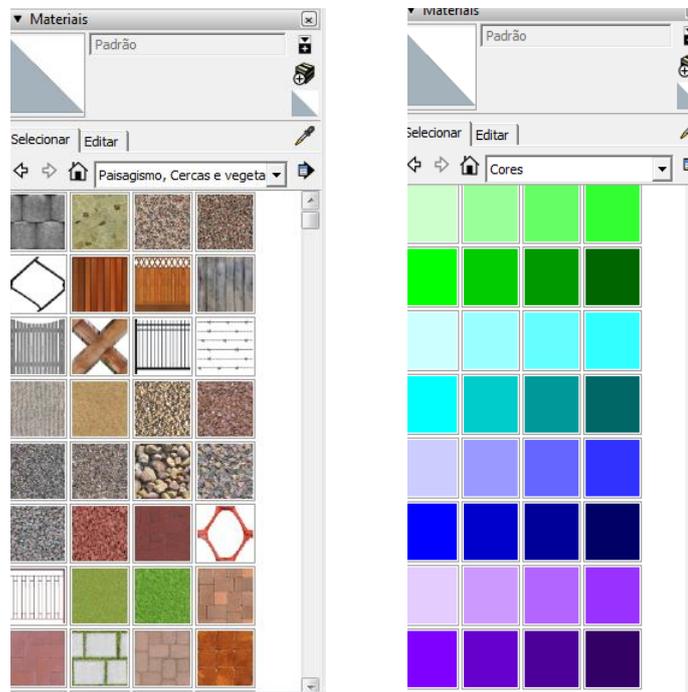
*Fonte: Acervo Pessoal.*

O componente é um tipo especial de grupo, com a diferença que, ao efetuar uma cópia de um grupo, o programa trata os dois grupos como sendo grupos diferentes. Quando se cria um componente, ao efetuar uma cópia, o programa trata os dois componentes como sendo grupos iguais. Ou seja, o que for editado em um componente, automaticamente será editado na(s) sua(s) cópia(s). Para criar um componente, selecionam-se todas as entidades que deseja ter no componente, clica-se com o botão direito do *mouse* e escolhe-se a opção “criar componente”.

## 8. Materiais

O *SketchUp* possui uma ferramenta de pintura que permite a aplicação de materiais no desenho. Ao clicar no ícone de pintura , o programa oferece uma variedade de materiais que podem ser utilizados à critério do usuário, entre eles: asfalto e concreto, azulejos, cores, estampas, madeiras, metal, entre outros.

**Figura 12:** Exemplo de aplicação de materiais.



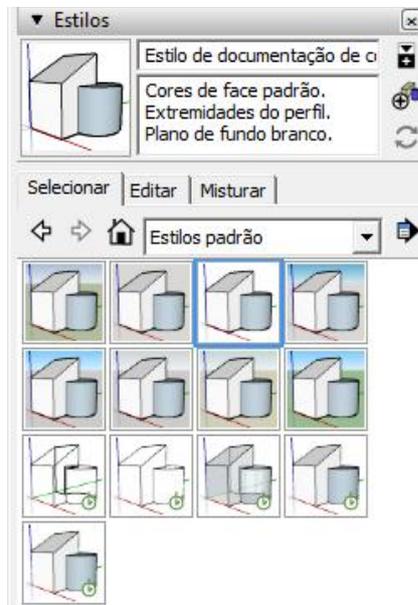
*Fonte: Acervo pessoal.*

## 9. Estilos

Alguns programas fornecem a caixa de estilos na lateral da área de trabalho, onde o usuário pode mudar o estilo do desenho sempre que desejar. Caso a caixa de estilos não esteja visível, basta o usuário clicar no ícone de pintura que o *SketchUp* disponibiliza a caixa

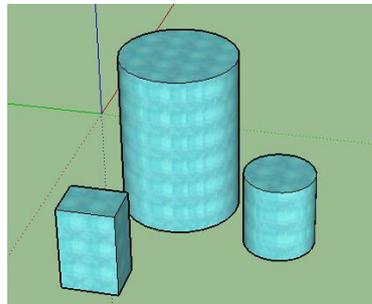
para utilização. Os estilos permitem modificar a forma de visualização do desenho, variando entre arestas à mão, estilos padrão e diversos, linhas retas, entre outros.

**Figura 13:** Caixa de Estilos



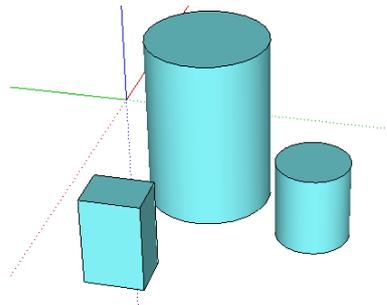
Fonte: Acervo Pessoal.

**Figura 14:** Exemplo de aplicação de estilos – estilo simples.



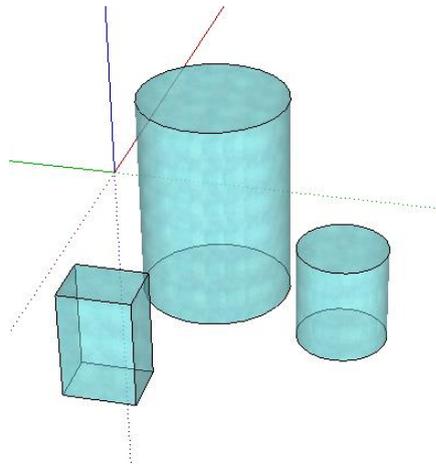
Fonte: Acervo pessoal.

**Figura 15:** Exemplo de aplicação de estilos – estilo sombreado.



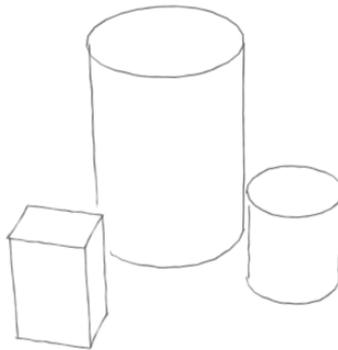
Fonte: Acervo pessoal.

**Figura 16:** Exemplo de aplicação de estilos – estilo raio -x.



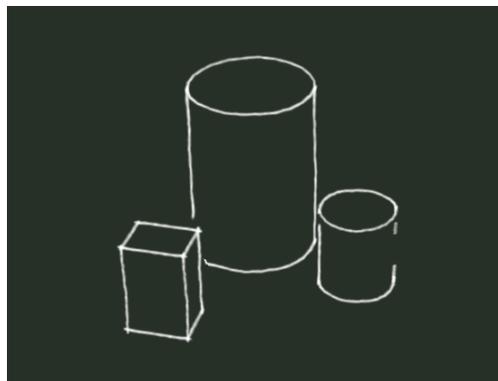
*Fonte: Acervo pessoal.*

**Figura 17:** Exemplo de aplicação de estilos – estilo à mão livre.



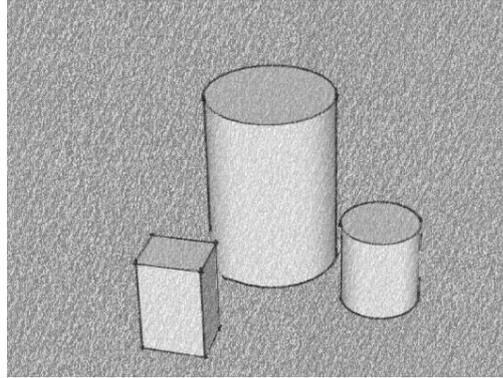
*Fonte: Acervo pessoal.*

**Figura 18:** Exemplo de aplicação de estilos – estilo giz no quadro negro.



*Fonte: Acervo pessoal.*

**Figura 19:** Exemplo de aplicação de estilos – estilo cursiva PSO.



*Fonte: Acervo pessoal.*

## 10. Métodos de Exclusão

A ferramenta utilizada para apagar objetos e entidades é a borracha . Com esta ferramenta é possível apagar alguns objetos rapidamente, apenas acionando o comando e clicando sobre o objeto que deseja apagar. No entanto, a borracha não apaga faces. Sendo assim, para apagar faces e demais objetos e entidade, pode-se usar também a tecla “delete” do teclado.