



Universidade Federal do ABC



PROFMAT

HUGO DANIEL FULONE

**DESMISTIFICANDO A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE
FIBONACCI**

Santo André, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

HUGO DANIEL FULONE

**DESMISTIFICANDO A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE
FIBONACCI**

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero

Dissertação de mestrado apresentada ao
Centro de Matemática, Computação e Cognição
para obtenção do título de Mestre pelo Programa
de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (PROFMAT)

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO HUGO DANIEL FULONE
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANA CAROLINA BOERO.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Fulone, Hugo Daniel
Desmistificando a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci /
Hugo Daniel Fulone. — 2017.

138 fls. : il.

Orientadora: Ana Carolina Boero

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2017.

1. Razão Áurea. 2. Sequência de Fibonacci. I. Boero, Ana
Carolina. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 11 de SETEMBRO de 2017.

Assinatura do autor: Hugo Daniel Zulone

Assinatura do orientador: Paulo



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

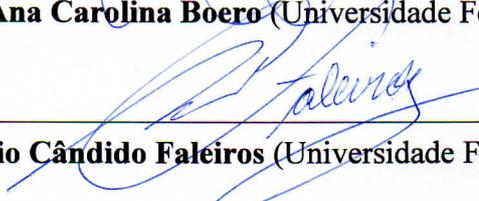
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

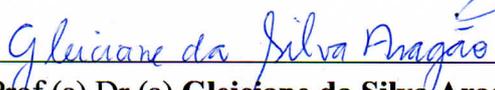
Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Hugo Daniel Fulone, realizada em 31 de julho de 2017:



Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Presidente



Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente



Dedico este trabalho aos meus familiares e alunos.

AGRADECIMENTOS

Tantos momentos importantes ao longo da vida contribuíram para alcançar mais esse objetivo. Alguns marcaram muito, seja pela sua extrema relevância para transpor dificuldades ou pela fraternidade sutilmente demonstrada pelos mais variados gestos.

Não posso deixar de agradecer aos meus familiares e professores, fundamentais para minha formação.

Aproveitar e agradecer uma ajuda, ainda na adolescência, feita por Luciara Tarini de Souza que muito contribuiu para facilidade atual em digitação.

Aos professores Marcelo Mello Fernandes e Fabricio Cardoso Maimone por compartilharem a experiência e disposição em auxiliarem durante o período inicial do curso.

Ao amigo Professor Agenor pelos diversos momentos de apoio.

Ao Professor Doutor Michel Spira pela gentileza demonstrada quando entrei em contato e o fornecimento de seu artigo que muito contribuiu para desenvolver esse trabalho.

A Professora Carolina Lisboa por todo empenho dado a revisão e correção.

A Professora Doutora Ana Carolina Boero por toda ajuda e ensinamentos que transcendem a Matemática.

“Saber como pensar torna a pessoa muito mais capaz do que aquele que apenas sabe o que deve pensar.”

Neil deGrasse Tyson

RESUMO

A Razão Áurea possui uma longa história e atualmente é muito mistificada. Nesse trabalho, são apresentadas relações matemáticas e propriedades da Razão Áurea e da Sequência de Fibonacci, sendo constatado que se tratam apenas de casos particulares que podem ser obtidos através de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea de onde surge um conjunto de números irracionais com características semelhantes. Foram mostradas, ainda, possibilidades de atividades que de fato contemplam a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci e os cuidados necessários com informações equivocadas e manipuladas.

Palavras-chave: Razão Áurea, Sequência de Fibonacci

ABSTRACT

The Golden Ratio has a long story and currently it's very mystified. In this paper, mathematical relations and properties of the Golden Ratio and the Fibonacci Sequence are introduced, stating that they are only particular cases, which can be obtained through a second homogeneous order linear recurrence from where comes a set of irrational numbers with similar characteristics. We explained, as well, possibilities of activities that actually contemplate the Golden Ratio and the Fibonacci Sequence, and the necessary cares with wrong and manipulated information.

Keywords: Golden Ratio, Fibonacci Sequence

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	1
1 RAZÃO ÁUREA	3
1.1 Contexto histórico	3
1.2 Definição	7
1.3 Irrracionalidade de Φ	10
1.4 A Razão Áurea na Geometria	12
1.4.1 Pentágono regular e o pentagrama	12
1.4.2 Triângulo Áureo	16
1.4.3 Retângulo Áureo	17
1.4.4 Espiral Áurea	18
1.4.5 Ângulo Áureo	21
1.5 Formas variadas de representação	22
1.5.1 Raízes quadradas sucessivas	22
1.5.2 Frações contínuas	23
2 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	25
2.1 Fibonacci e a sequência numérica	25
2.2 Fórmula de Binet	28
2.3 Primeiras propriedades dos números de Fibonacci	31
2.4 Representação através de uma matriz	34
2.5 Propriedades aritméticas dos números de Fibonacci	36
2.6 Fibonacci e o triângulo aritmético	39
3 GENERALIZAÇÕES DE Φ E DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	49
3.1 Fórmula de Binet generalizada	49
3.1.1 Limite da razão entre termos consecutivos da SFG	51
3.2 Relações elementares envolvendo Φ_p	51
3.2.1 Raízes quadradas sucessivas	53
3.2.2 Frações contínuas	54
3.3 Outras fórmulas relacionando Φ_p à SFG	56

3.3.1	Identidade de Cassini Generalizada	57
3.3.2	Identidade de Catalan Generalizada	58
3.4	Retângulo Áureo Generalizado	59
3.5	Polígonos regulares de $2n + 1$ lados	61
4	APLICAÇÕES DIVERSAS	65
4.1	Triângulo retângulo e as médias: aritmética, geométrica e harmônica	65
4.2	Triângulo de Kepler	67
4.3	Paradoxo do quebra-cabeça	69
4.4	Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência	71
4.5	Triângulo inscrito em um retângulo	72
4.5.1	Quando o triângulo será isósceles?	74
4.6	Circuito com infinitos resistores	77
4.7	Problemas com sequências recursivas	81
4.7.1	Crescimento de planta - OBMEP	82
4.7.2	Criação de gado	84
4.8	Problemas de contagem	86
4.8.1	Colorir	86
4.8.2	Refração de luz	88
4.8.3	Subir uma escada	90
4.9	Dobraduras	91
4.9.1	Razão Áurea	91
4.9.2	Pentágono regular	94
5	EQUÍVOCOS SOBRE A RAZÃO ÁUREA	97
5.1	Considerações iniciais	97
5.2	Construções	100
5.2.1	Antigo Egito	100
5.2.2	Partenon	104
5.2.3	Edifício da ONU	105
5.3	Obras de artes	106
5.3.1	Leonardo da Vinci	107
5.3.2	Georges Seurat	110
5.3.3	Mondrian	111
5.4	Natureza	112
5.5	Corpo humano e Nazismo	115
5.6	Livros do PNL D 2017	117

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	129
A	RECORRÊNCIAS LINEARES	133
	Bibliografia	137

INTRODUÇÃO

A palavra “matemática” tem sua origem na palavra grega *mathiké*, sendo que “*máthema*” tem entre seus significados compreensão, explicação, conhecimento e ciência, e “*thiké*”, arte. Podemos dizer, então, que a Matemática é a arte da compreensão e da explicação.

Fazer uso dessa ciência classificada como exata para compreender fenômenos da natureza e tudo o que nos circunda está intimamente ligado à essência da origem de seu nome. Por esse motivo, a escolha do assunto para a dissertação inicialmente se deu instigada pelas curiosidades comentadas em relação ao número irracional $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, com representação decimal 1,61803398874989484820 . . . , cujos atributos, em alguns momentos relacionados à Sequência de Fibonacci contemplariam diversas áreas, justificando a expressão usada por alguns de seus entusiastas, *Assinatura de Deus*.

Para representar tal número ao longo deste trabalho, será utilizada a letra grega Φ (lê-se, “fi”) e os termos *Número de Ouro*, *Extrema e Média Razão*, *Proporção Áurea*, *Razão Áurea*, *Proporção Divina*, *Razão Dourada*, entre outros.

Essa variação na forma de se referir ao Número de Ouro é apenas um indicativo de sua longa história e de como ela é carregada de misticismo. Desse modo, evidencia-se a relevância desse trabalho para professores e estudantes de graduação em Matemática especialmente, uma vez que todo o misticismo que envolve a Razão Áurea pode não interferir nas relações matemáticas em si, mas compromete significativamente sua real compreensão.

O trabalho está organizado em seis capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo, procurou-se desenvolver o contexto histórico acerca da Razão Áurea, bem como apresentar a definição e suas propriedades, a demonstração de sua irracionalidade, a presença em diversas situações geométricas e formas variadas de sua representação.

O segundo capítulo inicia-se com uma breve biografia de Fibonacci e o motivo de ter seu nome associado à sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, Em seguida, além de mostrar como o Número de Ouro possui relação com tais termos, serão demonstradas diversas propriedades e indicadas algumas relações curiosas com o triângulo aritmético.

O terceiro capítulo desse trabalho se dedicou a mostrar que tanto a Razão Áurea quanto a Sequência de Fibonacci, e várias de suas propriedades e relações, inclusive geométricas, tratam-se na realidade de casos particulares que podem ser obtidos através de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, tendo o apêndice como apoio para tratar sobre as recorrências.

O quarto capítulo teve como objetivo mostrar possibilidades de aplicações onde surge a Razão Áurea e/ou a Sequência de Fibonacci, muitas das vezes em situações inesperadas, podendo servir de suporte para professores elaborarem atividades sobre o assunto.

Já o quinto capítulo se propôs a desconstruir informações amplamente divulgadas sobre a presença da Razão Áurea em construções, obras de artes, natureza e o corpo humano, mas que podem ser refutadas quando analisadas de forma mais criteriosa. Inclusive, tendo ao final uma visão sobre uma coleção de livros didáticos e sua abordagem sobre o tema.

E, para finalizar, no sexto capítulo são realizadas considerações finais, procurando mostrar pontos importantes do trabalho e gerar uma reflexão sobre o assunto tratado, além de sugestões de estudo aos que se sentirem motivados.

RAZÃO ÁUREA

O desenvolvimento da Matemática está atrelado ao da sociedade. Os números desempenham funções sociais e em cada cultura podem possuir significados envolvendo conhecimentos baseados no senso comum, não necessariamente comprovados cientificamente. Abordaremos um desses números, a *Razão Áurea*, também chamado de *Número de Ouro* entre outras denominações ganhas ao longo de sua extensa e, em alguns momentos, incerta história. Para tal, nos basearemos nos livros [2], [3], [13], [14] e [20] e nos artigos [21] e [22].

1.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Provavelmente o interesse pela Razão Áurea foi despertado por sua relação com o pentagrama (vide Subseção 1.4.1), figura muito representada pelos mais variados motivos em diversas civilizações. Alguns dos pentagramas mais antigos encontrados vêm da Mesopotâmia e datam do quarto milênio a.E.C.¹, além de formas de pentagrama descobertas em escavações em Uruk e tabuleta de argila de 3200 a.E.C. com a imagem do polígono que, para os sumérios, significava “as regiões do universo”, entre outros lugares do antigo Oriente Médio também com representações dele. Temos, ainda, artefatos egípcios com a presença da estrela de cinco pontas, como exemplo uma jarra de aproximadamente 3100 a.E.C. encontrada em Naqadá, perto de Tebas, onde os hieróglifos indicavam as estrelas noturnas ou significavam o “submundo” quando circunscritos por uma circunferência.

¹ Assim como no livro [20], optamos por usar “antes da Era Comum” (a.E.C.) no lugar de “antes de Cristo” (a.C) com o intuito de neutralizar conotações religiosas.

Para o nosso objetivo, não basta saber se essas civilizações possuíam pentagramas ou pentágonos como algo místico ou simbólico, e sim se estavam cientes de suas propriedades geométricas, em especial da Razão Áurea.

Apesar de estudos de tabuletas cuneiformes do segundo milênio a.E.C. descobertas em 1936 em Susa, no Irã, indicarem que os babilônios conheciam uma fórmula para determinar a área (aproximada) de um pentágono, não há indícios matemáticos de que conhecessem de fato a Razão Áurea, ao menos não nos documentos encontrados até hoje. Entretanto, alguns textos publicados no século XX já tentaram, por meio de manipulações numéricas subjetivas, mostrar o contrário, como o livro de Michael Schneider, *Um guia destinado a iniciantes para construir o universo*, ou o artigo publicado em 1976 no *The Fibonacci Quarterly* da analista de arte Helene Hedian.

Ainda antes da Era Comum, mas num período mais recente, destaca-se a matemática da Grécia Antiga, carente de documentos confiáveis para estabelecer conexão com a de outras culturas, como a mesopotâmica e egípcia, que contrário ao que aparenta em diversos relatos, importante mesmo antes dos pitagóricos. No século V a.E.C., o pensamento geométrico e técnico já estava presente e muitas das soluções para problemas geométricos e comparação de grandezas eram dadas por eles através de razões.

Existem, ao menos, três versões sobre a descoberta da incomensurabilidade. Talvez a menos conhecida esteja no contexto da aritmética baseada no resultado atribuído a Euclides, e que Aristóteles se refere, no final do século IV a.E.C., a um raciocínio por absurdo que se o lado e o diâmetro são comensuráveis um em relação ao outro, poderia se deduzir que números ímpares são iguais aos pares. Já outra, muito propagada, afirma ter surgido, por volta de 430 à 410 a.E.C., com o problema de usar o lado do quadrado para medir sua diagonal através de um procedimento de *antifairese*², mas há também os que apontam o uso do teorema “de Pitágoras” (vale lembrar que os chineses já conheciam o teorema mas não concluíram a irracionalidade do lado do triângulo). Temos ainda, a possibilidade relacionada ao estudo das diagonais do pentágono regular que dão origem ao pentagrama (ver Figura 2), figura inclusive utilizada pelos pitagóricos como símbolo para representar sua fraternidade. No entanto, há historiadores que também discordam dessa conjectura baseada no artigo de Von Fritz, publicado em 1945, *The discovery of incommensurability by Hippasos of Metaponto*, por considerarem necessários fatos geométricos só conhecidos após *Os Elementos* de Euclides.

² Palavra de origem grega cujo significado é “subtração recíproca”, atualmente um procedimento algébrico semelhante é o conhecido como “algoritmo de Euclides”.

Apesar de toda essa incerteza, boa parte do trabalho que possibilitou a definição e a compreensão da Razão Áurea ocorreu antes e durante a abertura da Academia de Platão em 386 a.E.C., com forte influência dos estudos de Theaetetus (cerca de 417 a 369 a.E.C.). Faz-se importante destacar as pesquisas dos historiadores Burkert e Knorr, que indicam a ausência de relatos de uma crise causada pela descoberta da incomensurabilidade entre os matemáticos gregos, inclusive entre os pitagóricos como é amplamente divulgado em histórias e anedotas, provavelmente consolidadas por trabalhos da primeira metade do século XX, como do historiador P. Tannery e o influente artigo *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik* (“A crise dos fundamentos da matemática grega”), de Hasse e Scholz.

O primeiro registro explícito, na época chamado de *Extrema e Média Razão*, acontece na obra *Os Elementos*, de Euclides, um tratado composto por treze livros cuja versão original, publicada por volta de 300 a.E.C., não chegou até os dias atuais, restando apenas traduções tardias. Entre as mais antigas, está um fragmento, dos anos 100 da Era Comum, encontrado entre diversos papiros em Oxyrhynque, no Egito. Sobre a vida de seu autor pouco se sabe, nem mesmo a data e o local exato de seu nascimento, apesar de muitos afirmarem, sem comprovação, ser em Alexandria enquanto outros, equivocadamente, dizem ser em Megara. Euclides deve ter estudado ou tido contato com a Academia de Platão e escrito quase uma dúzia de livros, porém apenas cinco deles sobreviveram ao tempo e sua morte aconteceu aproximadamente na mesma época do nascimento de Arquimedes, na segunda década do século III a.E.C..

Os Elementos, apesar de não ser a primeira de sua época, foi uma obra extremamente didática. Nela, Euclides parece reunir conhecimentos de sua época sem a pretensão de obter créditos por eles, mas se preocupando em apresentar uma sequência lógica e pedagógica. Os livros da coleção de I a VI são de Geometria Plana, os de VII a X de Teoria dos Números e fundamentos da Aritmética (destes, até o IX são atribuídos aos pitagóricos e seriam os mais antigos) e os de XI a XIII de Geometria Sólida Tridimensional. Além disso, os livros I a IV possuem construções e provas através de congruência e cálculo de áreas, evitando o uso de razões e proporções e indicando que devem ter sido escritos após a descoberta da incomensurabilidade por requerer em um tipo novo de teoria que veio a se concretizar nos livros V e VI. Em diversos momentos, a *Extrema e Média Razão* aparece neste conjunto de livros, de uma forma indireta relacionada à área no livro II, para a construção do pentágono no IV e do icosaedro no XIII e uma clara definição relativa à proporção no VI.

Por volta do século II a.E.C., o livro “*Suplemento*” de *Os Elementos* (às vezes chamado de livro XIV) atribuído a Hipsicles de Alexandria e possivelmente contendo teoremas de Apolônio de Perga (cerca de 262 a 190 a.E.C.), seguindo passos de Euclides, mostra um importante teorema sobre dodecaedro e icosaedro circunscritos por uma mesma esfera. Sendo esse um exemplo do que os matemáticos gregos dessa época produziram como resultados geométricos novos onde a Razão Áurea é utilizada. Posteriormente, apenas Hero (século I), Ptolomeu (século II) e Pappus (século IV), voltam a apresentar estudos envolvendo a Razão Áurea em suas obras - em *Metrica*, existem aproximações para obter as áreas do pentágono e do dodecaedro e volumes de dodecaedro e icosaedro. Já em *Almagesto* e no *Guia para Geografia*, há uma tábula trigonométrica incluindo ângulos de 36° , 72° e 108° (ângulos que aparecem no pentágono) e finalmente, em *Coleção (Sinagoge)* um novo método para construção do dodecaedro e icosaedro, além de comparações entre os volumes dos sólidos platônicos.

Desse período até praticamente o fim da Idade Média, com a biblioteca de Alexandria destruída após uma série de ataques e até mesmo com o fim da Academia de Platão em 529 da E.C., boa parte das fontes científicas passam a se concentrar na Índia e no mundo árabe. Neste contexto, os matemáticos árabes Al-Khwārizmī e Abu Kamil Shuja, do século IX, e Abu'l-Wafa, do século X, contribuíram, respectivamente, com uma solução para resolver um problema que se assemelhava à equação que define a Razão Áurea, porém é controverso afirmar que ele estava ciente dessa relação. O livro *Sobre o pentágono e o decágono* que continha em partes dos cálculos de áreas e comprimentos o uso da Razão Áurea e influenciou Fibonacci (cerca 1170-1240) em alguns de seus trabalhos em meados dos séculos XII e XIII. E a obra *Um livro sobre as construções geométricas que são necessárias a um artesão*, em que são apresentados métodos interessantes para a construção de pentágono e do decágono, além de como fazer polígonos regulares inscritos.

Apesar das importantes contribuições dadas por Fibonacci (que serão abordadas no Capítulo 2), o movimento Renascentista dos séculos XIV a XVI também serviu de inspiração para que os entusiastas da Razão Áurea dos séculos seguintes a relacionassem a obras de arte e fenômenos naturais. Colaborou para isso a publicação, em 1509, dos três volumes de *Divina proportione* de Luca Pacioli (1445-1517). Apesar de questionável a originalidade de seu trabalho, é inegável que ele despertou um novo interesse pelo assunto. Aliás, no primeiro volume ele justifica a necessidade do uso de um novo termo, *Proporção Divina*.

A relação criada pelo novo nome entre a matemática, a teologia e a filosofia mostra um pouco do misticismo que envolve esse assunto até os dias atuais. O astrônomo Johannes Kepler (1571-1630), em muitos de seus estudos, procurava buscar uma teoria reducionista para explicar tudo, sendo para ele a Proporção Divina intimamente relacionada com a criação do universo. Suas investigações sobre a Razão Áurea contemplaram, além da astronomia e geometria, incluindo sobre ladrilhamento, a observação no arranjo de pétalas de flores os números de Fibonacci. Atualmente, esse estudo é conhecido na Botânica por *phyllotaxis*, do grego “arranjo de folhas”, sendo no século XIX foi criada uma regra geral para os quocientes filotáticos e os números de Fibonacci.

Entre os vários pontos marcantes do período mais recente, como a grande quantidade de trabalhos acadêmicos publicados no final do século XIX e o uso do termo *Seção Áurea* ter sido usado pela primeira vez por Martin Ohm em 1835, no livro *Die Reine Elementar Mathematik*, é também pertinente destacar a busca por um sistema padronizado aplicável na arquitetura e na mecânica chamado “Modulor” (baseado em razões racionais assim como o sistema Vitruviano apesar de muitos relacionarem com a Razão Áurea), pelo arquiteto e pintor suíço-francês Le Corbusier (Charles-Édouard Jeanneret, 1887-1965); e a descoberta, em 1974, de Roger Penrose (nascido em 1931), sobre ladrilhagens de simetria quártupla.

1.2 DEFINIÇÃO

Após contextualizar historicamente a Razão Áurea, vamos defini-la utilizando uma linguagem atual, tomando como referência os livros [2] e [3] e os artigos [21] e [22].

Conforme comentado na Seção 1.1, no Livro II de *Os Elementos*, onde é feito um estudo de áreas através da decomposição de figuras e sem uso de fórmulas, a Razão Áurea aparece de forma implícita, mais especificamente na Proposição 11, cujo enunciado é o seguinte:

Dada uma linha reta, deseja-se cortá-la de modo que a área do retângulo cuja medida dos lados é igual ao todo e a um dos segmentos seja igual à área do quadrado de lado igual à medida do segmento remanescente.

Consideremos a linha reta como sendo o segmento AB (ver Figura 1). Sobre ele, vamos construir o quadrado $ABCD$ e encontrar o ponto médio M do lado AD para, com a medida do segmento MB , determinar o ponto E sobre a reta suporte do lado

AD . Usando a medida \overline{AE} constrói-se o quadrado $AEFG$, sendo o ponto G o local procurado para o corte.

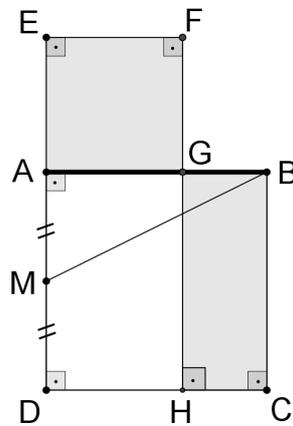


Figura 1: Segmento AB dividido em Extrema e Média Razão.

Sendo $a = \overline{AG}$ e $b = \overline{GB}$, expressamos a igualdade entre a área do quadrado $AEFG$ e a do retângulo $BCHG$ por

$$a^2 = b(a + b). \quad (1.1)$$

Devemos descobrir a posição do ponto G independentemente do comprimento do segmento AB , ou seja, estamos interessados em descobrir a razão $\frac{a}{b}$ em que G divide AB . Dividindo ambos membros de (1.1) por ab e em seguida multiplicando por $\frac{a}{b}$ obtemos, respectivamente,

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a} \quad (1.2)$$

e

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1. \quad (1.3)$$

Apesar de Euclides não propor como solução ao problema do Livro II, se considerarmos a definição explícita feita no Livro VI, chamada de *Extrema e Média Razão*, iremos obter a proporção (1.2), ou seja, o todo $(a + b)$ está para a maior parte (a) assim como a maior parte (a) está para a menor parte (b) .

Usando x para representar a razão $\frac{a}{b}$, reescrevemos a equação (1.3) como

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (1.4)$$

Definição 1.1. A *Razão Áurea* ou *Número de Ouro* é a raiz positiva da equação (1.4), cujas raízes são $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ — simbolizadas neste trabalho, respectivamente, por Φ e ϕ .

É fácil encontrar fontes colocando certas propriedades da Razão Áurea como algo extraordinário, quando na realidade estão diretamente relacionadas à sua definição. Por exemplo³:

- Para encontrar o quadrado do Número de Ouro basta adicionar um ao seu valor:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (1.5)$$

- O inverso do Número de Ouro, simbolizado aqui por ϕ , é obtido subtraindo um de seu valor:

$$\phi = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \quad (1.6)$$

Antes de seguirmos para a próxima seção, é importante retomarmos a Figura 1 para destacar como surge o valor da Razão Áurea durante sua construção. Ao conectar o vértice B ao ponto médio M do lado AD do quadrado $ABCD$, fazemos aparecer o número irracional $\sqrt{5}$, como podemos verificar usando o Teorema de “Pitágoras” no triângulo retângulo ABM :

$$\begin{aligned} \overline{MB}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 \\ &= (a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\overline{MB} = \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b).$$

Note que independentemente do tamanho do segmento AB , teremos o número $\frac{\sqrt{5}}{2}$, bastando adicionar metade do valor do segmento inicial para obter a Razão Áurea ou

³ Obviamente o mesmo vale para a raiz negativa.

subtrair a mesma quantidade para obter o seu inverso. Em outras palavras, temos $\overline{DE} = \Phi \cdot (a + b)$ e $\overline{AG} = \phi \cdot (a + b)$, pois

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \overline{DM} + \overline{ME} \\ &= \frac{1}{2}(a + b) + \frac{\sqrt{5}}{2}(a + b) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(a + b)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \overline{ME} - \overline{AM} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a + b) \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}(a + b).\end{aligned}$$

Vamos aproveitar e comprovar a igualdade entre as áreas do quadrado $AEFG$ e do retângulo $BCHG$. Sendo o valor de \overline{GB} dado por

$$\begin{aligned}\overline{GB} &= \overline{AB} - \overline{AG} \\ &= (a + b) - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}(a + b) \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(a + b)\end{aligned}$$

obtemos

$$\overline{AG}^2 = \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}(a + b) \right]^2 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}(a + b)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(a + b) \cdot (a + b) = \overline{GB} \cdot \overline{AB}.$$

1.3 IRRACIONALIDADE DE Φ

Como o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é fechado em relação às quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), para mostrar que Φ é irracional basta verificar a irracionalidade de $\sqrt{5}$.

Lema 1.2. *Seja m um número inteiro. Se m^2 é múltiplo de 5, então m é múltiplo de 5.*

Demonstração. Mostraremos que se o inteiro m não é múltiplo de 5, então m^2 também não o será. Se m não é múltiplo de 5, haverá $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 < r < 5$ tais que

$$m = 5q + r.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$\begin{aligned} m^2 &= 25q^2 + 10qr + r^2 \\ &= 5 \cdot (5q^2 + 2qr) + r^2 \end{aligned}$$

Analisando as possibilidades para r , concluímos que r^2 não terá fator 5, pois se

- $r = 1$, temos $1^2 = 1$;
- $r = 2$, temos $2^2 = 4$;
- $r = 3$, temos $3^2 = 9$;
- $r = 4$, temos $4^2 = 16$.

Logo m^2 não pode ser múltiplo de 5. □

Proposição 1.3. *$\sqrt{5}$ é irracional.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $\sqrt{5}$ seja um número racional. Assim, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$ tais que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$.

Elevando ao quadrado e desenvolvendo, obtemos

$$a^2 = 5b^2. \tag{1.7}$$

Pela igualdade (1.7), a^2 é múltiplo de 5. Logo, pelo Lema 1.2, a também o será e podemos, portanto, escrevê-lo como $5k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na igualdade e desenvolvendo:

$$(5k)^2 = 5b^2.$$

Logo,

$$5k^2 = b^2.$$

Concluimos que b^2 também é múltiplo de 5 e, conseqüentemente, b também o é. Mas isso é impossível, já que, por hipótese, $\frac{a}{b}$ é irredutível. Portanto, $\sqrt{5}$ é irracional. \square

1.4 A RAZÃO ÁUREA NA GEOMETRIA

Algumas figuras geométricas possuem naturalmente a Razão Áurea, como no caso do pentagrama formado pelas diagonais do pentágono regular, ou devido a algum critério específico em sua construção, sendo em alguns destes casos titulados por um nome especial como veremos a seguir. Para tratar esse assunto, usaremos o livro [13] e os artigos [12], [16], [21] e [22].

1.4.1 *Pentágono regular e o pentagrama*

O pentagrama, figura tida como símbolo de fraternidade pelos pitagóricos, pode ser obtido pelas diagonais de um pentágono regular.

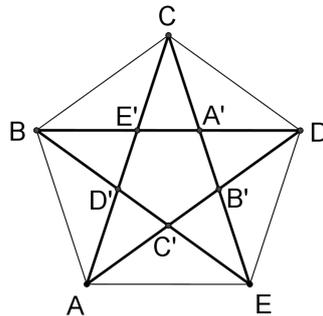


Figura 2: Pentagrama formado pelas diagonais de um pentágono regular.

Considere o pentágono regular $ABCDE$ de lado l e diagonal d . O ponto D' será a intersecção das diagonais AC e BE , conforme Figura 2. Como a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por $(n - 2) \cdot 180^\circ$, temos que cada ângulo interno do pentágono regular mede 108° . Devemos nos atentar ao fato de que os triângulos ABC , EAB e CDE são congruentes e isósceles, o que nos permite extrair algumas informações (ver Figura 3):

- Nos triângulos ABC e EAB , os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{EAB} medem 108° cada um e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, teremos $\widehat{CAB} = \widehat{BCA} = \widehat{ABE} = \widehat{BEA} = 36^\circ$.
- $\widehat{BD'A} = 108^\circ$, pois $\widehat{ABD'} = \widehat{ABE}$, $\widehat{CAB} = \widehat{D'AB}$ e $\widehat{ABD'} + \widehat{D'AB} + \widehat{BD'A} = 180^\circ$.
- $\widehat{CD'B} = 72^\circ$, pois é suplementar de $\widehat{BD'A}$.
- $\widehat{D'BC} = 72^\circ$, pois $\widehat{BCD'} = \widehat{BCA}$ e $\widehat{CD'B} + \widehat{BCD'} + \widehat{D'BC} = 180^\circ$ por serem a soma dos ângulos internos do triângulo BCD' .
- $\widehat{ACE} = 36^\circ$, pois $\widehat{BCA} + \widehat{ACE} + \widehat{ECD} = 108^\circ$ e como o triângulo ACE é isósceles temos $\widehat{EAC} = \widehat{CEA} = 72^\circ$.

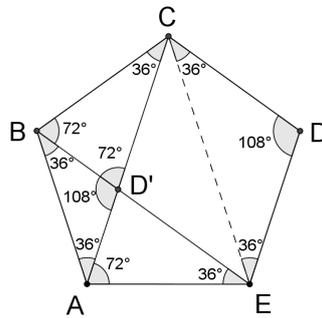


Figura 3: Alguns dos ângulos formados no pentágono regular.

Com isso, podemos concluir que os triângulos BCD' e $BD'A$ são isósceles de bases BD' e AB , respectivamente. Então $\overline{CD'} = \overline{BC} = l$, e considerando $\overline{BD'} = \overline{AD'} = \frac{l}{x}$, temos

$$d = l + \frac{l}{x} = l \left(1 + \frac{1}{x} \right). \quad (1.8)$$

Como os triângulos ACE e BCD' são semelhantes,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

ou seja

$$\frac{l}{\frac{l}{x}} = \frac{d}{l}$$

e, portanto,

$$d = lx. \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9) segue que

$$lx = l \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

e, portanto,

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Obtemos novamente (1.4) e, conseqüentemente, descobrimos o envolvimento do Número de Ouro com o lado do pentágono regular para obter o valor da diagonal, dada por $d = l\Phi$. Além disso, as diagonais se cruzam em Extrema e Média Razão, uma vez que $\overline{AD'} = \frac{l}{\Phi} = l\phi$. Conforme podemos ver na Figura 2, o ponto C' é a intersecção das diagonais AD e BE . Dada a semelhança entre os triângulos ACE e $C'AD'$ (facilmente pode-se conferir pelo caso AA), temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{C'D'}}$$

e, portanto

$$\frac{l \cdot \Phi}{\frac{l}{\Phi}} = \frac{l}{\overline{C'D'}}$$

Logo,

$$\overline{C'D'} = \frac{l}{\Phi^2}.$$

Ou seja, fazendo as razões entre os segmentos formados pelos pontos de intersecção das diagonais, sempre obteremos a Razão Áurea:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ED'}} = \frac{\overline{ED'}}{\overline{EC'}} = \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D'}} \\ \frac{l \cdot \Phi}{\frac{l}{\Phi}} = \frac{l}{\frac{l}{\Phi}} = \frac{\Phi}{\frac{1}{\Phi}} = \Phi$$

Repare que os pontos de intersecção A' , B' , C' , D' e E' formam um novo pentágono regular que, por sua vez, terá novamente a Proporção Áurea envolvida nas medidas das diagonais, processo que poderá ser repetido indefinidamente, formando um fractal⁴ (ver Figura 4).

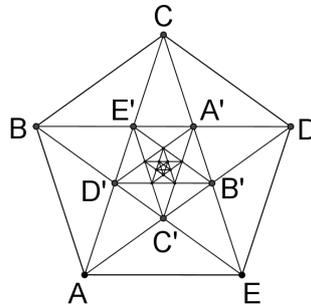


Figura 4: Fractal, pentagrama sendo gerado pelas diagonais do pentágono regular.

Podemos obter o valor de $\sin 18^\circ$ baseado na Razão Áurea. Seja M o ponto médio de BD' . Os triângulos BCM e $D'CM$ são congruentes, sendo $\widehat{BCM} = \widehat{D'CM} = 18^\circ$, $\widehat{CMB} = \widehat{D'MC} = 90^\circ$ e $\overline{BM} = \frac{l}{2\Phi}$ (ver Figura 5). Como seno é dado pela razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, temos

$$\sin 18^\circ = \frac{l}{2\Phi} = \frac{1}{2\Phi}.$$

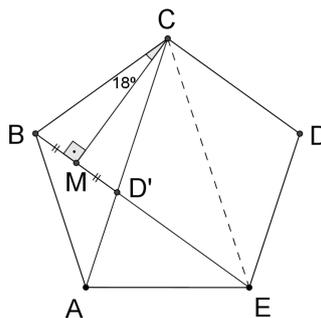


Figura 5: Pentágono regular.

⁴ Num fractal, a ampliação de uma parte da imagem dá origem a figura inicial, ou seja, ele mantém um padrão de auto-similaridade.

1.4.2 *Triângulo Áureo*

Na obra de Euclides, mas especificamente no Livro IV, há a construção de um triângulo isósceles cuja medida dos ângulos da base é o dobro da medida do ângulo oposto a ela. Tal figura possui ligação direta com a Razão Áurea, além de aparecer em outras situações geométricas envolvendo este número.

Seendo α a medida do ângulo menor, teremos $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$ e , portanto, $\alpha = 36^\circ$. Assim, cada ângulo da base medirá 72° . Com essa condição, seja ABC um triângulo isósceles de base AC e, ainda, o ponto D sobre BC , tal que o segmento AD seja a bissetriz de \widehat{BAC} (ver Figura 6).

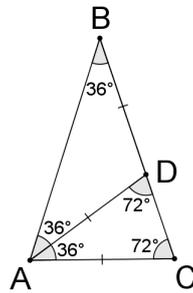


Figura 6: Triângulo Áureo.

Os triângulos ABC e CAD são semelhantes pelo caso AA (ver Figura 6). Logo,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}. \quad (1.10)$$

Como os triângulos CAD e BDA são isósceles, temos $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, permitindo reescrever (1.10) da seguinte forma:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}. \quad (1.11)$$

A equação (1.11) nos remete a (1.2), ou seja, o ponto D divide o lado BC em Extrema e Média Razão. Além disso, como $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$, temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \Phi$ e $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\Phi} = \phi$.

Então, o triângulo ABC (assim, como CAD) possui a razão Φ entre o lado e a base, sendo conhecido como *Triângulo Áureo*. Já o triângulo BDA , de razão inversa, é chamado de *Gnômon Áureo*.

1.4.3 Retângulo Áureo

O retângulo que possui seus lados na Proporção Áurea, isto é, tal que a razão entre o lado maior e o menor é Φ , recebe o nome de *Retângulo Áureo*. Conforme explicado na Seção 1.2, o segmento formado pelo vértice de um quadrado com o ponto médio de um de seus lados que não contém o vértice escolhido inicialmente é um passo simples e importante na obtenção da Razão Áurea.

Portanto, usaremos novamente tal artifício para construir um Retângulo Áureo. Dado um quadrado $ABCD$ qualquer, basta determinar o ponto médio M de um de seus lados, por exemplo de AB , e usando um compasso com centro em M , transferir a medida do segmento MC para a reta suporte do lado AB , determinando assim o ponto E , e finalizar delimitando o retângulo $AEFD$. Repare que haverá duas possibilidades para o ponto E , as quais serão denotadas por E_1 e E_2 (ver Figura 7), sendo o valor de $\overline{AE_1}$ igual a $\Phi \cdot \overline{AB}$ (por termos adicionado metade do segmento AB ao valor de MC) enquanto $\overline{AE_2}$ vale $\phi \cdot \overline{AB}$ (por termos subtraído metade do segmento AB ao valor de MC).

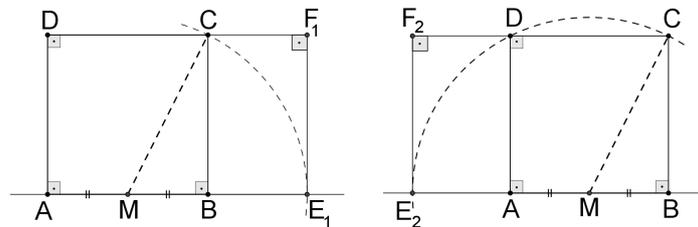


Figura 7: Construção do Retângulo Áureo.

Lembrando que $\overline{AB} = \overline{AD}$, por serem lados do quadrado $ABCD$, temos tanto o retângulo AE_1F_1D quanto o AE_2F_2D como sendo áureos, pois a razão entre o lado maior e menor é Φ . De fato,

$$\frac{\overline{AE_1}}{\overline{AD}} = \frac{\Phi \overline{AB}}{\overline{AB}} = \Phi$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE_2}} = \frac{\overline{AB}}{\phi \overline{AB}} = \frac{1}{\phi} = \Phi.$$

Ainda em tempo, vale observar a congruência entre os retângulos BE_1F_1C e AE_2F_2D . Um fato para muitos fascinante: dado o retângulo áureo AE_1F_1D , ao se retirar dele o quadrado $ABCD$ teremos como figura remanescente um outro Retângulo Áureo, BE_1F_1C , podendo se repetir indefinidamente a retirada do quadrado de lado igual ao menor lado do retângulo que sempre sobrar um retângulo tendo como razão de seus lados o valor de Φ .

1.4.4 Espiral Áurea

Tanto o Triângulo Áureo quanto o Retângulo Áureo apresentados, respectivamente, nas subseções 1.4.2 e 1.4.3, possuem ligação com uma espiral logarítmica⁵. Apresentaremos a seguir o caso para o retângulo.

Dado um Retângulo Áureo $ABCD$ de lado menor AD , determina-se o quadrado $ADEF$, com E e F sobre os lados CD e AB , respectivamente (ver Figura 8). Como o retângulo resultante $BCEF$ também é áureo, repete-se o processo, achando o quadrado $CEGH$ para dar origem ao retângulo $BFGH$, similar ao inicial. Tal procedimento pode ser repetido *ad infinitum*, produzindo Retângulos Áureos cada vez menores com seus lados reduzidos por um fator Φ . O Retângulo Áureo é o único retângulo com a propriedade de ao se retirar um quadrado obter um retângulo proporcional ao anterior. A intersecção dos segmentos BD e CF ficou conhecida como o “Olho de Deus”, nome sugerido pelo matemático Clifford A. Pickover, e indica o ponto onde a série de retângulos converge, podendo ser encontrado pela intersecção de duas diagonais de quaisquer Retângulos Áureos consecutivos, conforme demonstraremos a seguir.

⁵ Falaremos mais sobre espirais logarítmicas no Capítulo 5, mas se caso desejar aprofundar o assunto, o livro [15] e o artigo [21] podem ser interessantes para iniciar os estudos.

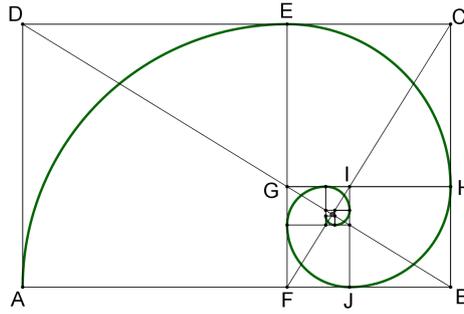


Figura 8: Espiral Áurea no Retângulo Áureo e o “Olho de Deus”.

Vamos considerar três Retângulos Áureos consecutivos, $ABCD$, $BCEF$ e $BFGH$, representados no sistema de eixos cartesianos com A na origem, logo teremos $B(k\Phi; 0)$, $C(k\Phi; k)$, $D(0; k)$, $E(k; k)$, $F(k; 0)$ e $G(k; 2k - k\Phi)$. Para determinar o valor da ordenada y_G do ponto G , fizemos $\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF} = k \cdot (\Phi - 1) = k\phi$, e como $\overline{BF} = \overline{EC} = \overline{EG}$, concluímos $y_G = \overline{EF} - \overline{EG} = k \cdot (2 - \Phi)$. Precisamos mostrar que as retas suportes r_1 , r_2 e r_3 , respectivamente, das diagonais BD , CF e BG , são tais que $r_1 \cap r_2 = r_2 \cap r_3$.

Sendo m_1 , m_2 e m_3 os coeficientes angulares de r_1 , r_2 e r_3 , respectivamente, então

$$m_1 = \frac{-k}{k\Phi} = -\frac{1}{\Phi} = -\phi,$$

$$m_2 = \frac{k}{k\Phi - k} = \frac{1}{\Phi - 1} = \frac{1}{\phi}$$

e

$$m_3 = \frac{-(2k - k\Phi)}{k\Phi - k} = -\frac{2 - \Phi}{\Phi - 1}. \quad (1.12)$$

Usando a propriedade (1.5), podemos simplificar (1.12) da seguinte forma:

$$-\frac{2 - \Phi}{\Phi - 1} = -\frac{2 - \Phi}{\Phi - (\Phi^2 - \Phi)} = -\frac{2 - \Phi}{\Phi \cdot (2 - \Phi)} = -\frac{1}{\Phi} = -\phi.$$

Como os coeficientes angulares m_1 e m_3 são iguais, as retas r_1 e r_3 são paralelas, mas ambas possuem o ponto B em comum, e portanto são paralelas coincidentes. Já a reta r_2 é concorrente às retas r_1 e r_3 por ter coeficiente angular diferente. Determinaremos, então, a equação das retas concorrentes para, em seguida, determinar o ponto de interseção O :

$$r_1 : y - k = -\frac{1}{\Phi}x$$

e

$$r_2 : y = \frac{1}{\Phi - 1}(x - k).$$

Igualando r_1 e r_2 , encontraremos a abscissa do ponto de intersecção O :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Phi}x + k &= \frac{1}{\Phi - 1}(x - k) \Leftrightarrow \\ -\Phi x + x + k\Phi^2 - k\Phi &= \Phi x - k\Phi \Leftrightarrow \\ x &= \frac{k\Phi^2}{2\Phi - 1}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado na equação da reta r_1 , chegamos ao valor da ordenada:

$$y = -\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{k\Phi^2}{2\Phi - 1} + k = \frac{k(\Phi - 1)}{2\Phi - 1}.$$

Portanto, as coordenadas do “Olho de Deus” são dadas por $O \left(\frac{k\Phi^2}{2\Phi - 1}; \frac{k(\Phi - 1)}{2\Phi - 1} \right)$.

A Espiral Áurea pode ser obtida pelo lugar geométrico que o vértice A percorre para coincidir com o vértice E quando o retângulo $ABCD$ tiver um movimento simultâneo de rotação e contração dado por um fator Φ^{-1} , com centro no “Olho de Deus”, para sobrepor o retângulo $ECBF$. Em seguida, continuando o movimento, passar pelos vértices H e J , sobrepondo, respectivamente, os retângulos $HBFG$ e $JFGI$, e assim sucessivamente para os demais retângulos da série.

Usando coordenadas polares, cuja origem (pólo) será o ponto O e raio inicial $\overline{OA} = c$, poderemos descrever a posição do ponto A e das sucessivas transformações em E , H e J por

$$A = (c, 0), E = \left(c\Phi^{-1}, -\frac{\pi}{2} \right), H = \left(c\Phi^{-2}, -\frac{2\pi}{2} \right) \text{ e } J = \left(c\Phi^{-3}, -\frac{3\pi}{2} \right).$$

De modo geral, as transformações do ponto A em E , H , J e demais vértices dos retângulos da sequência são

$$r = c\Phi^{-t}, \theta = -\frac{t\pi}{2}, t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Fazendo t assumir qualquer valor real, todos esses pontos descreverão a espiral logarítmica de equação

$$r = c\Phi^{\frac{2\theta}{\pi}}.$$

1.4.5 Ângulo Áureo

Considere o segmento AB dividido em Extrema e Média Razão pelo ponto G . Ao usar as medidas \overline{AG} e \overline{BG} para serem dois arcos que formarão uma circunferência de centro O e comprimento \overline{AB} como na Figura 9, teremos o ângulo $B\hat{O}G \cong 137,5^\circ$, conhecido como *Ângulo Áureo*.

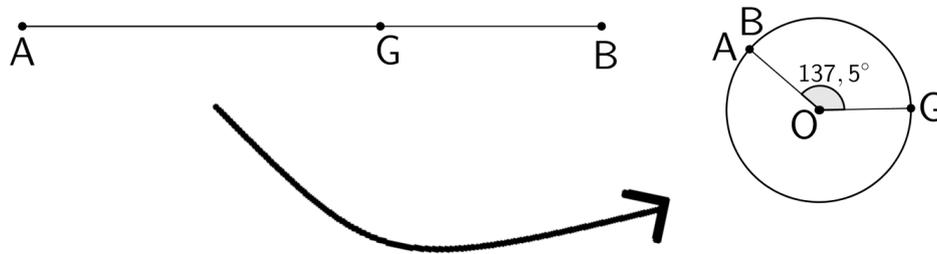


Figura 9: Segmento AB dividido em Extrema e Média Razão pelo ponto G dá origem à circunferência em que $B\hat{O}G$ é denominado *Ângulo Áureo*.

O motivo vem do fato do ângulo que divide uma volta completa em Razão Áurea equivaler a $\frac{360^\circ}{\Phi}$. E, note que pela construção realizada para obter a Figura 9, temos:

$$\frac{360^\circ}{A\hat{O}G} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}$$

e, como $\overline{AG} = \frac{\overline{AB}}{\Phi}$, então $A\hat{O}G = \frac{360^\circ}{\Phi}$, cujo valor aproximado é $222,492^\circ$. Mas como tal ângulo ultrapassa metade de uma volta completa, ou seja, é maior que 180° , devemos considerar o valor do ângulo replementar⁶ $B\hat{O}G$.

⁶ Dois ângulos são ditos *replementares* quando a soma de suas medidas resultar em 360° .

1.5 FORMAS VARIADAS DE REPRESENTAÇÃO

Conforme visto na Seção 1.2, da equação (1.4) surgem propriedades como (1.5) e (1.6). Utilizaremos o livro [13] e os artigos [21] e [22] para mostrar outras formas de representação do Número de Ouro.

1.5.1 Raízes quadradas sucessivas

Suponha ter que determinar o valor da expressão

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (1.13)$$

Iniciaremos igualando (1.13) a x e, elevando ambos membros ao quadrado, obtemos

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \quad (1.14)$$

Note que, no segundo membro, excluindo a primeira parcela (o número inteiro 1) temos as raízes quadradas sucessivas idênticas à expressão inicial (1.13). Logo, podemos reescrever (1.14) como $x^2 = 1 + x$. Portanto, a expressão infinita vale Φ .

Um outro modo de perceber essa ligação usando a equação (1.4) é, considerando apenas a raiz positiva, reescrevê-la como $x = \sqrt{1 + x}$ e usar um método de iteração para obter a solução. Consideremos então:

$$x_1 = \sqrt{1}; \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Realizando iterações sucessivas, teremos:

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{1 + \sqrt{1}} \\ x_3 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} \\ &\vdots \\ \Phi &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \end{aligned}$$

Analicamente, podemos provar a convergência. Vamos estimar a diferença entre Φ e x_{n+1} :

$$|\Phi - x_{n+1}| = \frac{|\Phi^2 - x_{n+1}^2|}{|\Phi + x_{n+1}|} = \frac{|\Phi^2 - 1 - x_n|}{|\Phi + x_{n+1}|} = \frac{|\Phi - x_n|}{|\Phi + x_{n+1}|} < \frac{|\Phi - x_n|}{\Phi}.$$

Usando repetidamente este fato, teremos

$$|\Phi - x_{n+1}| < \Phi^{-1} |\Phi - x_n| < \Phi^{-2} |\Phi - x_{n-1}| < \dots < \Phi^{-n} |\Phi - x_1|.$$

Sendo $\Phi > 1$, podemos concluir que a sequência (x_n) converge para a Razão Áurea.

Por fim, uma maneira de representar visualmente a convergência da sequência em questão para o Número de Ouro pode ser feita como na Figura 10 onde a interseção dos gráficos $y = x$ e $y = \sqrt{1+x}$ tem abscissa Φ . Começando com $x_1 = 1$, na curva $y = \sqrt{1+x}$, teremos o ponto P com ordenada $\sqrt{1+x_1} = x_2$, que por sua vez é a mesma abscissa do ponto Q , obtido com a interseção da linha horizontal que passa por P com a reta $y = x$, formando o segmento PQ . Fazendo as sucessivas iterações, é possível perceber não só que irá convergir para Razão Áurea como poderia ter sido dado qualquer valor positivo para x_1 e o resultado final seria o mesmo.

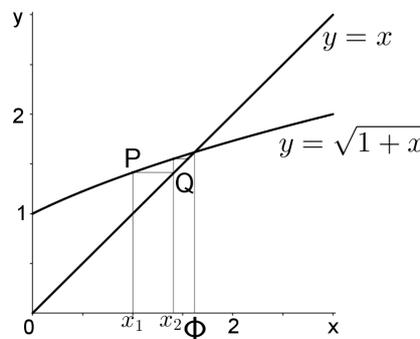


Figura 10: A sequência $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$.

1.5.2 Frações contínuas

De modo semelhante ao realizado na subseção anterior, pode-se mostrar a relação da propriedade (1.6) com a representação de Φ através de frações contínuas.

Considerando Φ a raiz positiva da equação $x = 1 + \frac{1}{x}$, definiremos:

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Realizando iterações sucessivas, teremos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + \frac{1}{1} \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \\ &\vdots \\ \Phi &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

Este fato pode ser visualizado na Figura 11 e comprovado analiticamente, uma vez que

$$|\Phi - x_{n+1}| = \left| \Phi - \left(1 + \frac{1}{x_n} \right) \right| = \left| \frac{x_n(\Phi - 1) - 1}{x_n} \right| = \left| \frac{x_n - \Phi}{\Phi x_n} \right| \leq \Phi^{-1} |x_n - \Phi|$$

o que nos permite concluir que

$$|\Phi - x_{n+1}| \leq \Phi^{-1} |x_n - \Phi| \leq \Phi^{-2} |x_{n-1} - \Phi| \leq \dots \leq \Phi^{-n} |x_1 - \Phi|.$$

Sendo $\Phi > 1$, teremos a convergência da sequência (x_n) para a Razão Áurea.

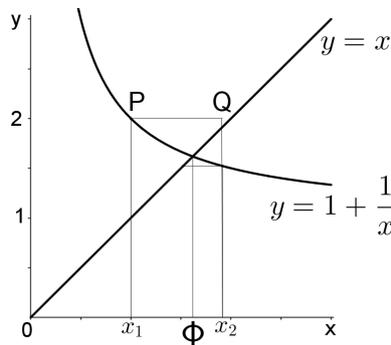


Figura 11: A sequência $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Para expor a relação entre a Razão Áurea e a sequência recursiva de segunda ordem conhecida como Sequência de Fibonacci, inicialmente será apresentado um pouco sobre a biografia de Fibonacci e como ao longo dos tempos se associou seu nome a sequência. Após comprovar a relação entre os termos dessa sequência e Φ , veremos algumas propriedades aritméticas relacionadas. Tomamos como referência para o desenvolvimento deste capítulo os livros [3], [6], [13], [20] e os artigos [1] e [21].

2.1 FIBONACCI E A SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Leonardo de Pisa nasceu por volta da década de 1170, atualmente mais conhecido por Fibonacci, do latim *filius* Bonacci, filho da família Bonacci, ou “filho da boa natureza”. Deve ter tido esse pseudônimo incorporado por uma nota de rodapé no livro *Histoire des Sciences Mathématique en Italie*, de 1838, do historiador de matemática Guillaume Libri ou pelos matemáticos italianos do fim do século XVIII, sendo que ele referia a si próprio, assim como outros o citavam, em alguns manuscritos e documentos, como Leonardo Bigollo Pisani, em que “Bigollo” significa nos dialetos toscano e veneziano, respectivamente, “viajante” ou “homem sem importância”.

Sua primeira formação em matemática se deu em Bugia, cidade da Argélia, provavelmente seguindo a vontade de seu pai Guglielmo del Bonacci, um importante comerciante do porto de Pisa e funcionário do governo. Aprofundou seu conhecimento posteriormente no Egito, Grécia, Síria, Sul da França e Sicília, na Itália.

Ao regressar a Pisa, publicou em 1202, o livro *Liber Abaci*, ou seja, “Livro de ábaco” (ou ainda, “Livro de cálculo”), reconhecido por defender a notação indo-arábica e o sistema posicional, além de ser um raro exemplo de livro de sua época com uso de

simbolismo árabe, como a notação para frações. Com os méritos deste livro, o imperador Frederico II, conhecido como “Stupor Mundi” (“Maravilha do Mundo”) devido a sua fama por patrocinar a matemática e as ciências, convidou Fibonacci, por volta de 1220, a resolver uma série de problemas considerados difíceis pelo matemático da corte Johannes de Palermo. Resolvido todos, mais tarde publicou *Flos (Flor)* e *Liber quadratorum* (Livro dos quadrados), onde descreveu alguns desses problemas.

Além destes livros e outros como *Di minor guisa*, sobre aritmética comercial e *Comentário ao livro X de ‘Os Elementos’*, de Euclides, Fibonacci teve importante contribuição em relação a Razão Áurea. Tal contribuição não se deve somente pelos problemas em que a usava conscientemente, ou como em seu livro de geometria, *Practica Geometriae* (Prática de Geometria) de 1223, onde ele apresenta novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, além de volumes do dodecaedro e do icosaedro [13], mas sua ligação é forte pela ampliação dada ao assunto principalmente por problemas em que a princípio não se tem qualquer relação com a Razão Áurea.

Sendo que seu nome chegou até os dias atuais principalmente pelo fato do matemático francês F. Edouard A. Lucas ter relacionado a um desses problemas, em sua coleção *Récreations mathématique (4 volumes)*, Gauthier-Villars, Paris (1891-1896), reeditado em 1960, o nome Fibonacci a um problema publicado no *Liber Abaci*:

Quantos casais de coelhos podem ser formados a partir de um único casal de recém-nascidos durante um ano, se cada par originar um novo casal a cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês de vida, e não ocorrerem mortes?¹

A solução deste problema gera uma interessante sequência numérica, motivo do nome dado a este capítulo. Faz-se importante ressaltar, entretanto, que existem registros sobre esta sequência na Índia antes da publicação do livro, no século XIII.

Chamaremos de F_n o número de casais de coelhos ao final do n -ésimo mês. Observando a Figura 12, vemos o início da sequência $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. É possível notar um padrão interessante: por exemplo, no 6º mês, temos à esquerda uma repetição da linha imediatamente acima enquanto os itens restantes à direita correspondem à do mês retrasado, ou seja, $F_6 = F_5 + F_4$. Além disso, como os coelhos levam dois meses para se tornarem férteis, percebemos que a quantidade de pares de coelhos jovens

¹ O problema original de Fibonacci inicia-se com um casal tendo um mês de idade.

num determinado mês corresponde ao número total de casais de dois meses anteriores (já que todos estes estarão maduros após esse tempo), enquanto a quantidade de pares de coelhos adultos corresponde à de casais do mês anterior. Sendo assim, ao final do n -ésimo mês, o número de casais de coelhos será dado pela recorrência linear de segunda ordem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (2.1)$$

com $n > 2$ e condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, denominada *Sequência de Fibonacci*.

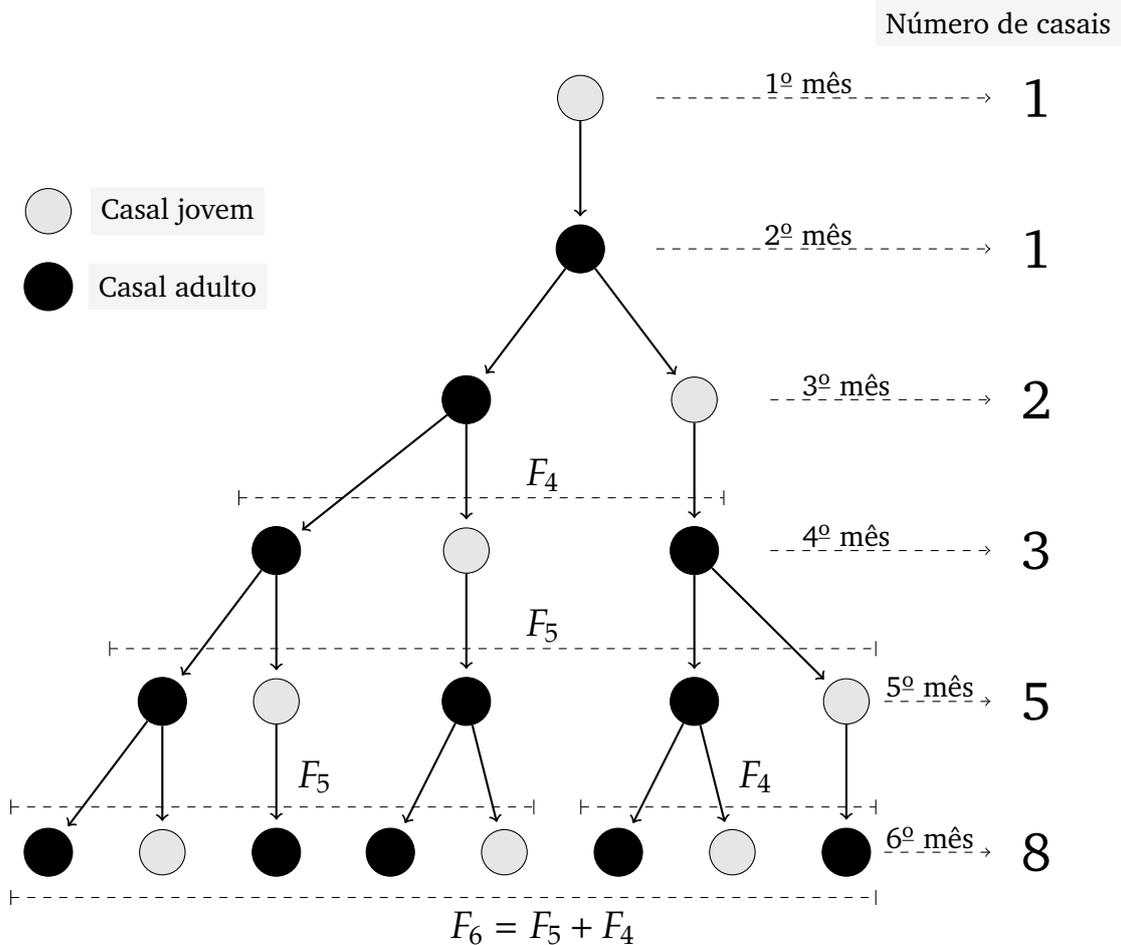


Figura 12: Árvore genealógica

Veremos na próxima seção uma estreita relação entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci.

2.2 FÓRMULA DE BINET

Lembremos da equação (1.4), $x^2 = x + 1$, cujas raízes são $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Temos, portanto,

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

e

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

Multiplicando ambos os lados das equações acima por Φ^n e φ^n ($n \geq 1$), respectivamente, teremos

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$$

e

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n.$$

Subtraindo da primeira equação a segunda e, em seguida, dividindo ambos membros por $\Phi - \varphi$, obtemos

$$\frac{\Phi^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\Phi - \varphi} = \frac{\Phi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\Phi - \varphi} + \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\Phi - \varphi}. \quad (2.2)$$

Considerando $u_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\Phi - \varphi}$, $n \geq 1$, podemos escrever a equação (2.2) como

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (2.3)$$

onde

$$u_1 = \frac{\Phi^1 - \varphi^1}{\Phi - \varphi} = 1$$

e

$$u_2 = \frac{\Phi^2 - \varphi^2}{\Phi - \varphi} = \frac{(\Phi + \varphi) \cdot (\Phi - \varphi)}{\Phi - \varphi} = 1.$$

Note que (2.3) é uma recorrência linear de segunda ordem com $u_1 = 1$ e $u_2 = 1$, assim como a Sequência de Fibonacci. Logo,

$$F_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\Phi - \varphi}. \quad (2.4)$$

Explicitando os valores de Φ e φ e colocando o denominador em evidência, podemos reescrever (2.4) da seguinte maneira:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (2.5)$$

Logo, cada termo da Sequência de Fibonacci pode ser determinado através do Número de Ouro pela relação (2.5), conhecida como *Fórmula de Binet* devido ao matemático francês Jacques Philipe Marie Binet (1786-1856)².

É importante notar que, apesar de termos frações e raízes em (2.5), o resultado sempre será um número inteiro. Não há muita facilidade para se obter o n -ésimo termo da Sequência de Fibonacci para valores altos de n . No entanto, observando a Fórmula de Binet, podemos deduzir que

$$\left| F_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{2}$$

donde concluímos que F_n será o número inteiro mais próximo de $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Exemplo 2.1. $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{13} = 232,9991416$. Logo, $F_{13} = 233$.

Exemplo 2.2. $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{60} = 1548008755920,003$. Logo, $F_{60} = 1548008755920$.

As razões sucessivas de termos consecutivos da Sequência de Fibonacci tendem para o Número de Ouro, pois

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{\Phi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\Phi - \varphi}}{\frac{\Phi^n - \varphi^n}{\Phi - \varphi}} = \frac{\Phi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\Phi^n - \varphi^n}.$$

Dividindo numerador e denominador por Φ^n , obtemos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} - \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n}}{\frac{\Phi^n}{\Phi^n} - \frac{\varphi^n}{\varphi^n}} = \frac{\Phi - \varphi \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n}{1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n}.$$

² Porém provavelmente já conhecida no século XVIII pelos matemáticos Leonard Euler (1707-1783) e Abraham de Moivre (1667-1754)

Como $\left| \frac{\varphi}{\Phi} \right| < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi - \varphi \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n}{1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi - \varphi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^n} \\ &= \frac{\Phi - \varphi \cdot 0}{1 - 0} = \Phi. \end{aligned}$$

Um outro modo de obtermos a Fórmula de Binet se dá com o uso da intrigante generalização que faremos a seguir. Note que $\Phi^{n+2} = \Phi^n \Phi^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\Phi^2 = \Phi + 1$, podemos escrever

$$\Phi^{n+2} = \Phi^n(\Phi + 1) = \Phi^{n+1} + \Phi^n. \quad (2.6)$$

Usando a relação (2.6) e fazendo substituições sucessivas, obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1 = F_3\Phi + F_2 \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2 = F_4\Phi + F_3 \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3 = F_5\Phi + F_4 \\ \Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 = (5\Phi + 3) + (3\Phi + 2) = 8\Phi + 5 = F_6\Phi + F_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos uma associação direta entre as potências de Φ e os termos da Sequência de Fibonacci, conforme atesta o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Para cada $n \geq 2$ natural, temos*

$$\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução Finita (PIF).

De $\Phi^2 = \Phi + 1$ e do fato de $F_1 = F_2 = 1$, obtemos

$$F_2\Phi + F_1 = \Phi + 1 = \Phi^2.$$

Consideremos, então, verdadeira a relação (2.7) para um n qualquer e provemos sua validade para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\Phi^{n+1} &= \Phi^n \cdot \Phi \\
&= (F_n \Phi + F_{n-1}) \cdot \Phi \\
&= F_n \Phi^2 + F_{n-1} \Phi \\
&= F_n(\Phi + 1) + F_{n-1} \Phi \\
&= (F_n + F_{n-1}) \Phi + F_n \\
&= F_{n+1} \Phi + F_n.
\end{aligned}$$

Do PIF segue que $\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$ qualquer que seja $n \geq 2$ natural. □

De modo análogo, temos

$$\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1} \text{ qualquer que seja } n \geq 2 \text{ natural.} \quad (2.8)$$

Finalmente, subtraindo (2.8) de (2.7), obtemos novamente a Fórmula de Binet. De fato,

$$\Phi^n - \varphi^n = F_n \Phi + F_{n-1} - (F_n \varphi + F_{n-1}) = F_n(\Phi - \varphi)$$

e, portanto,

$$F_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\Phi - \varphi}.$$

2.3 PRIMEIRAS PROPRIEDADES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Nesta seção, baseada no artigo [21], abordaremos algumas identidades importantes. Optaremos por definir $F_0 = 0$ como o primeiro termo da Sequência de Fibonacci, sem perda de validade da Fórmula de Binet, por exemplo.

Para continuarmos, recordamos algumas identidades úteis:

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \Phi + 1, \quad \Phi^{-1} = \Phi - 1, \\
\Phi^n &= F_n \Phi + F_{n-1}, \\
\Phi + \varphi &= 1, \quad \Phi \varphi = -1, \quad \Phi - \varphi = \sqrt{5}.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Começaremos determinando a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Proposição 2.2. *Para cada $n \geq 1$ natural, temos $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.*

Demonstração.

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=0}^n F_k = \sum_{k=0}^n \frac{\Phi^k - \varphi^k}{\sqrt{5}}. \quad (2.10)$$

Como $\sum_{k=0}^n \Phi^k$ corresponde à soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica (PG) de razão Φ e primeiro termo igual a 1, temos

$$\sum_{k=0}^n \Phi^k = \frac{1 - \Phi^{n+1}}{1 - \Phi}.$$

Multiplicando o numerador e denominador por $1 + \Phi$ e lembrando que $\Phi^2 = \Phi + 1$, continuamos o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \Phi^{n+1}}{1 - \Phi} &= \frac{1 - \Phi^{n+1}}{1 - \Phi} \cdot \frac{1 + \Phi}{1 + \Phi} \\ &= \frac{1 + \Phi - \Phi^{n+1} - \Phi^{n+2}}{1 - \Phi^2} \\ &= \frac{\Phi^2 - \Phi(\Phi^n + \Phi^{n+1})}{1 - (\Phi + 1)} \\ &= \frac{-\Phi(\Phi^n + \Phi^{n+1} - \Phi)}{-\Phi}. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo a divisão e usando a relação (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \Phi^k &= \Phi^n + \Phi^{n+1} - \Phi \\ &= \Phi^{n+2} - \Phi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De modo análogo,

$$\sum_{k=0}^n \varphi^k = \frac{1 - \varphi^{n+1}}{1 - \varphi} = \varphi^{n+2} - \varphi. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10):

$$\begin{aligned}
F_1 + F_2 + \cdots + F_n &= \sum_{k=0}^n F_k = \frac{\Phi^{n+2} - \varphi^{n+2} - (\Phi - \varphi)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\Phi^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\Phi - \varphi}{\sqrt{5}} \\
&= F_{n+2} - 1.
\end{aligned}$$

□

Uma possibilidade para professores apresentarem tal propriedade da sequência de maneira a intrigar os alunos pode ser dada com um truque de soma relâmpago. Pede-se para um aluno escrever uma longa linha com números começando com 1, 1 e continuar usando a definição da Sequência de Fibonacci. Em seguida, risca-se entre dois números quaisquer da sequência, com exceção dos dois últimos. O resultado da soma de todos os números à esquerda do risco será dado pelo segundo número à direita da parte riscada menos um.

Exemplo 2.3. Dada a sequência

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ||610, 987, 1597, 2584, 4181, ...

temos que a soma dos termos até 377 é igual a 986.

Utilizando o PIF, conseguimos derivar as identidades a seguir:

$$\begin{aligned}
F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} &= F_{2n}, \\
F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} &= F_{2n+1} - 1, \\
F_1 - F_2 + F_3 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n &= (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1, \\
F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 &= F_n F_{n+1}, \\
F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n-1} F_{2n} &= F_{2n}^2, \\
F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_{2n+1}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Como exemplo, faremos a demonstração de (2.13).

Proposição 2.3. Para cada $n \geq 1$ natural, vale $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Demonstração. Para $n = 1$, a igualdade está correta, pois

$$F_1^2 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2.$$

Supondo (2.13) válida para n , provaremos sua validade para $n + 1$.

De

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

obtemos

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2}. \end{aligned}$$

Do PIF segue que $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ qualquer que seja $n \geq 1$ natural. \square

2.4 REPRESENTAÇÃO ATRAVÉS DE UMA MATRIZ

Podemos representar a recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ por meio do seguinte sistema:

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ F_n = F_n. \end{cases}$$

Sua forma matricial será

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.4. Sendo $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $n \geq 1$ um número natural, temos

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = F_n Q + F_{n-1} I. \quad (2.14)$$

Demonstração. Para $n = 1$ a relação (2.14) é verdadeira, pois

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}.$$

Vamos verificar se continua válida para $n + 1$, assumindo sua validade para n .

$$\begin{aligned}
 Q^{n+1} &= Q^n \cdot Q \\
 &= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Do PIF segue que $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ qualquer que seja $n \geq 1$. □

Calculando o determinante de ambos lados da relação (2.14), obtemos a *Identidade de Cassini*:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \quad (2.15)$$

Da Identidade de Cassini decorre que quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.

Proposição 2.5. *Quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração. Se F_n e F_{n+1} tivessem um fator comum diferente de 1, este também teria que ser fator de $(-1)^n$, de acordo com (2.15), o que é impossível. □

Usando propriedades de matrizes, temos também que

$$Q^{n+m} = Q^n Q^m, \text{ onde } n \text{ e } m \text{ são inteiros não negativos.}$$

Igualando os elementos inferiores esquerdos (ou seja, os elementos localizados na segunda linha e primeira coluna) de ambos os lados desta equação, encontramos a fórmula de adição para os números de Fibonacci:

Proposição 2.6. *Se m e n são números naturais e $n \geq 1$, então*

$$F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m. \quad (2.16)$$

Demonstração. Como

$$Q^{n+m} = \begin{bmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

$$Q^n Q^m = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m & F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} \\ F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m & F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1} \end{bmatrix}$$

e $Q^{n+m} = Q^n Q^m$, basta igualarmos os elementos inferiores esquerdos para obtermos $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$. \square

A equação (2.16) nos permite obter diversas propriedades dos números de Fibonacci. Por exemplo, fazendo $n = m$, obtemos

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \\ &= F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \end{aligned}$$

ou seja, a diferença entre quadrados dos números de Fibonacci supletentes também é um número de Fibonacci.

2.5 PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Mostraremos a seguir algumas propriedades aritméticas dos números de Fibonacci, baseadas no artigo [21].

Proposição 2.7. *Sejam $m, n \geq 1$ números naturais. Se n é divisível por m , então F_n é divisível por F_m .*

Demonstração. Como n é divisível por m e $m, n \geq 1$, podemos escrever $n = mk$ para algum $k \geq 1$ natural. Faremos a demonstração por indução em k . O caso $k = 1$ é trivial. Consideremos válido para um k qualquer e mostraremos sua validade para $k + 1$. Para tal, utilizaremos a fórmula de adição (2.16) obtida na Seção 2.4:

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk} F_{m+1} + F_{mk-1} F_m.$$

Por hipótese de indução, F_{mk} é divisível por F_m , logo, o último membro da equação é divisível por F_m e, portanto, $F_{m(k+1)}$ também é divisível por F_m .

Do PIF segue que se n é divisível por m , então F_n é divisível por F_m quaisquer que sejam $m, n \geq 1$ naturais. \square

Corolário 2.8. *Se n é um número natural composto diferente de 4, então F_n também é um número composto.*

Demonstração. Se $n \geq 6$ é composto, então n é divisível por algum $m < n$ com $m \neq 1$ e $m \neq 2$. Portanto, pela Proposição 2.7, F_n é divisível por F_m (e $F_m > 1$, neste caso). \square

A recíproca do Corolário 2.8 não é verdadeira. Como contraexemplo, temos:

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Proposição 2.9. Se m e n são inteiros positivos, então $\text{mdc}(F_m, F_n) = F_{\text{mdc}(m,n)}$.

Demonstração. Se $d = \text{mdc}(m, n)$, então d divide tanto m como n . Pela Proposição 2.7, F_d divide F_m e F_n . Temos que mostrar que F_d é o máximo divisor comum de F_m e F_n . Uma vez que $d = \text{mdc}(m, n)$, podemos usar o Teorema de Bézout³ para encontrar inteiros r e s tais que $d = mr + ns$. Por (2.16), podemos escrever

$$F_d = F_{mr+ns} = F_{mr}F_{ns+1} + F_{mr-1}F_{ns}.$$

Seja k um divisor de F_m e F_n . Como mr é divisível por m , F_m divide F_{mr} . Logo k divide F_{mr} e, conseqüentemente, dividirá $F_{mr}F_{ns+1}$. Analogamente para n , pode-se concluir que k dividirá $F_{mr-1}F_{ns}$. Isso mostra que qualquer divisor de F_m e F_n também deve dividir F_d . Portanto, F_d é o máximo divisor comum. \square

Exemplo 2.4. Se $m = 15$ e $n = 20$, então $\text{mdc}(F_{15}, F_{20}) = \text{mdc}(610, 6765) = 5$ e $F_{\text{mdc}(15,20)} = F_5 = 5$.

Proposição 2.10. Sejam $m, n \geq 1$ números naturais. Se F_n é divisível por F_m e $m \neq 2$, então n é divisível por m .

Demonstração. Se F_n é divisível por F_m , então $\text{mdc}(F_n, F_m) = F_m$. Pelo que vimos na Proposição 2.9, $\text{mdc}(F_n, F_m) = F_{\text{mdc}(n,m)}$. Assim, $F_{\text{mdc}(n,m)} = F_m$ e, portanto, $m = \text{mdc}(n, m)$, donde segue que n é divisível por m . \square

Exemplo 2.5. $F_{12} = 144$ é divisível por $F_6 = 8$, assim como 12 é divisível por 6.

Como a Proposição 2.10 é a recíproca da Proposição 2.7, obtemos o resultado a seguir.

³ O Teorema de Bézout garante, para inteiros positivos m e n , a existência de r e s inteiros tais que $\text{mdc}(m, n) = mr + ns$. Isto decorre do algoritmo de Euclides. Por exemplo, $\text{mdc}(42, 30) = 6 = 30 - 12 \cdot 2 = 30 - (42 - 30) \cdot 2 = 42 \cdot (-2) + 30 \cdot 3$. No interessante site <http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=55> é possível localizar a vídeo-aula *Relação de Bézout e aplicações*, além do aplicativo *Descobrimo Bézout* e lista de exercícios para estudo e aprofundamento.

Teorema 2.11. *Sejam m e n números naturais, $m > 2$ e $n \geq 1$. Vale: F_n é divisível por F_m se, e somente se, n é divisível por m .*

Fazendo $m = 3, 4, 5, 7$, obtemos as seguintes consequências do Teorema 2.11:

- F_n é divisível por 2 se, e somente se, n é divisível por 3.
- F_n é divisível por 3 se, e somente se, n é divisível por 4.
- F_n é divisível por 5 se, e somente se, n é divisível por 5.
- F_n é divisível por 13 se, e somente se, n é divisível por 7.

Note que escolhemos valores de m para os quais F_m é primo. Se tomássemos $m = 6$ (e $F_6 = 8$), também é verdade que F_n é divisível por 8 se, e somente se, n é divisível por 6. No entanto, vale também que:

Proposição 2.12. *F_n é divisível por 4 se, e somente se, n é divisível por 6.*

Demonstração. Usando (2.16) para $n = m + (n - m)$, onde $m \leq n$, obtemos

$$F_n = F_{m+(n-m)} = F_m F_{(n-m)+1} + F_{m-1} F_{(n-m)}.$$

Fazendo $m = 6$ chegamos a

$$F_n = F_6 F_{n-5} + F_5 F_{n-6} = 8F_{n-5} + 5F_{n-6}.$$

Assim, F_n é divisível por 4 se, e somente se, F_{n-6} é divisível por 4. Iniciando em $F_0 = 0$ vemos que F_{6j} é divisível por 4, para $j = 1, 2, \dots$. Já $F_1 = 1$ não é divisível por 4, assim como todo F_{6j+1} , para $j = 1, 2, \dots$. Do mesmo modo, como $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$ não são divisíveis por 4, segue-se que $F_{6j+2}, F_{6j+3}, F_{6j+4}, F_{6j+5}$ não são divisíveis por 4. □

De modo semelhante, pode-se provar que:

- F_n é divisível por 7 se, e somente se, n é divisível por 8.
- F_n é divisível por 11 se, e somente se, n é divisível por 10.
- F_n é divisível por 6 se, e somente se, n é divisível por 12.
- F_n é divisível por 13 se, e somente se, n é divisível por 14.
- F_n é divisível por 10 se, e somente se, n é divisível por 15.

Encerraremos esta seção com uma demonstração da existência de infinitos números primos.

Teorema 2.13. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista apenas um número finito de números primos. Consideremos p_1, p_2, \dots, p_n como sendo todos os números primos e, ainda, $F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_n}$. Pela Proposição 2.9, estes números são primos entre si. Como há apenas n números primos, nenhum deles pode ter mais de um fator primo. Mas isso contradiz o fato de que $F_{19} = 4181 = 113 \cdot 37$. \square

2.6 FIBONACCI E O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Apesar das diversas relações e aplicações do triângulo aritmético, comumente chamado de triângulo de Pascal, atentaremos apenas em algumas mais essenciais a este trabalho, em especial à relação entre os números de Fibonacci e os coeficientes binomiais, mas não deixando de instigar a percepção de padrões ocultos nele. Para tal, utilizaremos como base os artigos [1] e [21] e os livros [3] e [6].

Existem fragmentos escritos em sânscrito por volta de 500 a.E.C. onde já indicam o conhecimento do triângulo aritmético, apesar de em alguns países darem o nome do poeta, matemático e astrônomo persa Omar Khayyam (cerca de 1050-1122) que em sua obra *Álgebra* cita ter descoberto e exposto num trabalho anterior uma regra para determinar potências de um binômio. Embora a comunicação entre Arábia e China nesse período tenha sido mínima, havia uma rota de seda da China à Pérsia, onde talvez possa ter havido trocas de informações, porém há necessidade de mais estudos em busca de evidências. O fato é que matemáticos chineses também já conheciam o triângulo aritmético pelo menos desde o século XIII, já que entre as contribuições de Yang Hui (1261-1275), os mais antigos quadrados mágicos chineses preservados de ordem maior que três, está a soma de séries e o triângulo aritmético, publicados em 1303 no livro *Espelho precioso* de Zhu Shijie (ver Figura 13) que trata sobre equações simultâneas e de grau até catorze. Ainda nesse período, a extração de raiz de um número pelos hindus, possivelmente com influências babilônicas e chinesas, seguia

um esquema “em galeão”⁴, que anos depois foi associado com o teorema binomial em forma do triângulo.

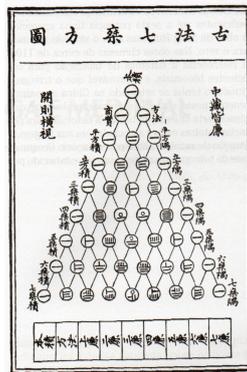


Figura 13: Intitulado “O diagrama do velho método dos sete quadrados multiplicativos”.

Nesta breve “linha do tempo”, devemos citar ainda os matemáticos alemães Peter Apian (ou Petrus Apianus, 1495-1552) e Michael Stifel (cerca de 1487-1567) pelas respectivas publicações *Rechnung* (1527) e *Arithmetica integra* (1544). A primeira versa sobre aritmética comercial e tem na página de rosto a primeira impressão do triângulo aritmético (ver Figura 14), enquanto a segunda é considerada a mais importante obra alemã sobre álgebra do século XVI e também contém o triângulo, ou seja, muito antes de Blaise Pascal (1623-1662) ter investigado as propriedades presentes nele.



Figura 14: Frontispício da aritmética de Petrus Apianus, de 1527, considerada a primeira impressão do triângulo aritmético.

4 Método de divisão provavelmente de origem hindu, conhecido pelo menos desde o século VI e que se difundiu pela Europa a partir do XVI, recebia essa denominação pelo fato do posicionamento dos números após o processo se assemelhar ao formato de uma embarcação com esse nome.

Devemos ter clareza que apesar de encontrarmos em diversas fontes o uso do nome de Pascal para se referir ao triângulo aritmético, não foi ele quem o descobriu, porém isso não deve tirar os méritos de seu trabalho que foi extraordinário, servindo até mesmo de inspiração para Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). A descoberta de como medir valores até então imensuráveis devido a incerteza de sua ocorrência num evento, como a chance de se obter uma determinada face de um dado após um certo número de lançamentos, como dividir de maneira justa uma aposta após um jogo ser interrompido, são exemplos de contribuições inovadoras na época e que deram origem a Teoria das Probabilidades. Em 1658, ele publica o livro *Traité dv triangle arithmetiqve* (ver Figura 15), que posteriormente faria com que relacionassem seu nome ao triângulo aritmético devido as diversas propriedades estudadas e apresentadas ali.

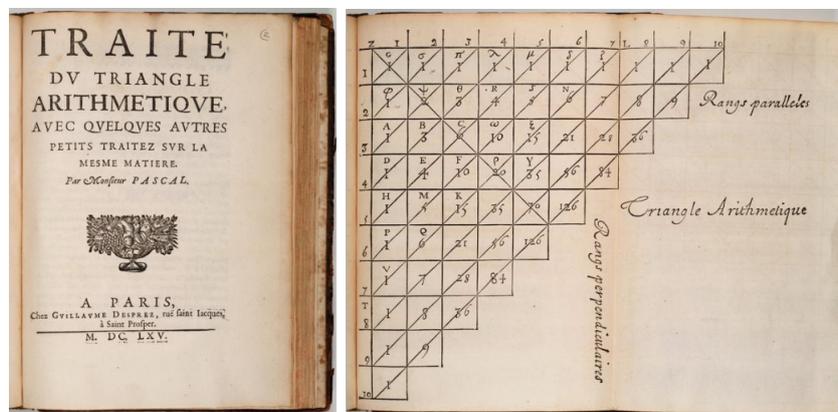


Figura 15: Capa e representação do Triângulo Aritmético no livro *Traité dv triangle arithmetiqve* de Blaise Pascal.

Para obtermos o triângulo aritmético, consideremos seus termos formados pelos números binomiais $\binom{n}{p}$, onde n representará o número da linha e p o da coluna referente à posição ocupada, sendo

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} & \text{se } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{se } p > n. \end{cases}$$

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

Figura 16: Números binomiais formando o triângulo aritmético.

Note que na linha n sempre temos $n + 1$ termos não nulos, sendo eles os coeficientes do Binômio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p, \text{ onde } n, p \in \mathbb{N} \text{ e } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.6. Considerando $n = 4$, temos os 5 elementos da quinta linha (linha 4, afinal a primeira linha do triângulo aritmético é a linha 0) como sendo os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$:

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b^1 + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot a^1b^3 + 1 \cdot b^4.$$

Observe que qualquer número que não esteja na primeira linha ou na primeira coluna será a soma de dois números da linha anterior: o que está logo acima e o anterior à esquerda. Este fato está ligado diretamente à *Relação de Stifel*, também chamada de relação de igualdade do triângulo aritmético:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \quad n, p \geq 1. \tag{2.17}$$

Exemplo 2.7. Você faz parte de um grupo de n pessoas dentre as quais serão escolhidas p para participarem de uma comissão. Temos:

Número de comissões com você	+	Número de comissões sem você	=	Número total de comissões
$\binom{n-1}{p-1}$	+	$\binom{n-1}{p}$	=	$\binom{n}{p}$

Dentre outras propriedades do triângulo aritmético, citamos:

- A soma dos elementos de uma linha resulta em potências de base dois, ou seja,

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

- A razão entre o termo de uma linha com o da sua direita é o mesmo que a razão entre o valor de sua coluna adicionado um com o valor da sua linha menos o da coluna, ou seja,

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}} = \frac{p+1}{n-p}.$$

- Os elementos da segunda coluna ($p = 1$, coluna 1) são os números naturais.
- Os elementos da terceira coluna ($p = 2$, coluna 2) são os números triangulares.⁵



Figura 17: Representação dos quatro primeiros números triangulares.

- Os elementos da quarta coluna ($p = 3$, coluna 3) são números tetraédricos.⁶

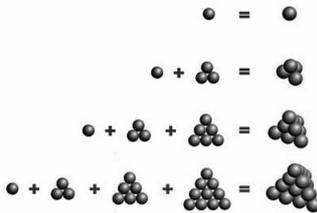


Figura 18: A junção de números triangulares resulta nos números tetraédricos.

- A soma de dois números consecutivos da terceira coluna é igual a um quadrado perfeito.

5 O número triangular T_n pode ser obtido pela soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de termo inicial e razão iguais a 1, sendo representado figurativamente através de um triângulo equilátero (ver Figura 17).

6 Um número tetraédrico pode ser representado por uma pirâmide de base triangular (tetraedro). Sendo T_n o n -ésimo número triangular, o n -ésimo número tetraédrico será obtido por $\sum_1^n T_n$ (ver Figura 18).

- Quando o elemento da segunda coluna for primo, todos os termos de sua linha, com exceção dos extremos 1, serão divisíveis por ele.
- Simetria: termos equidistantes aos extremos são iguais, ou seja, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- Considerando o valor posicional no sistema decimal, os elementos de cada linha formam potências de base onze:

$$\text{Linha 0} \longrightarrow 11^0 = 1$$

$$\text{Linha 1} \longrightarrow 11^1 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$\text{Linha 2} \longrightarrow 11^2 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$\text{Linha 3} \longrightarrow 11^3 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

- O dobro do termo $\binom{n}{n-2}$ adicionado a $\binom{n}{n-1}$ resulta no quadrado perfeito n^2 , como podemos verificar:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} &= 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot (n-n+2)!} + \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-n+1)!} \\ &= 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} + \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} \\ &= n \cdot (n-1) + n = n^2 - n + n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

- Ao dispor os elementos na forma de um triângulo equilátero e fazer a substituição dos números pares por 0 e dos ímpares por 1 (ou apagarmos eles), teremos um fractal⁷, o *Triângulo de Sierpinsky*. Padrões semelhantes ocorrem ao fazer isso com múltiplos de três, quatro, etc.

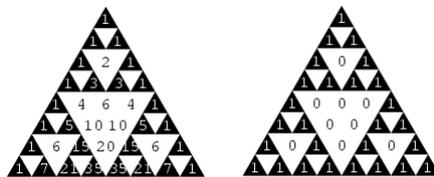


Figura 19: Relação do triângulo aritmético com o Triângulo de Sierpinsky.

⁷ Num fractal, a ampliação de uma parte da imagem dá origem à figura inicial, ou seja, ele mantém um padrão de auto-similaridade.

Muitas dessas propriedades podem ser provadas usando PIF, mas vamos focar nossos esforços no que nos motivou a iniciarmos esta seção, ou seja, no fato das somas dos elementos das diagonais ascendentes resultarem na Sequência de Fibonacci, como podemos ver na Figura 20.

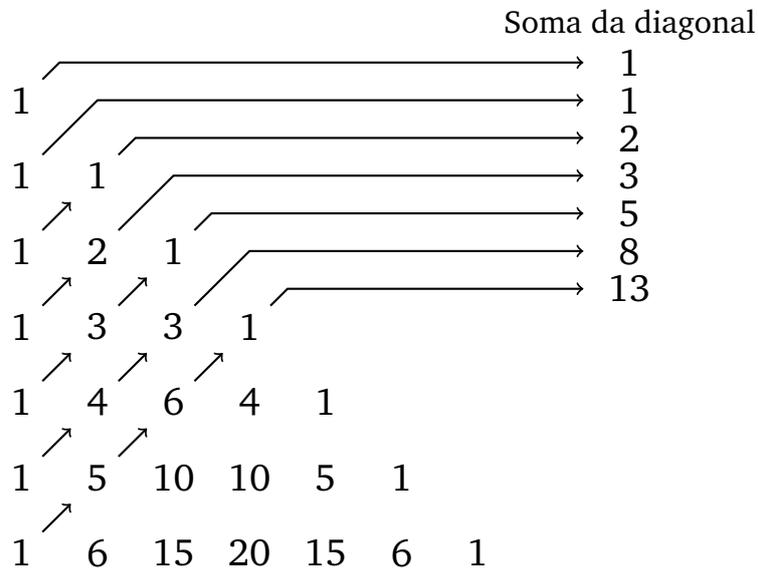


Figura 20: Triângulo aritmético e os números de Fibonacci.

Vamos analisar essa soma a fim de obter o padrão existente. Para facilitar, escrevemos os elementos na forma de número binomial:

$$\begin{aligned}
 \binom{0}{0} &= 1 = F_1 \\
 \binom{1}{0} &= 1 = F_2 \\
 \binom{2}{0} + \binom{1}{1} &= 1 + 1 = 2 = F_3 \\
 \binom{3}{0} + \binom{2}{1} &= 1 + 2 = 3 = F_4 \\
 \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} &= 1 + 3 + 1 = 5 = F_5 \\
 \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} &= 1 + 4 + 3 = 8 = F_6 \\
 \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} &= 1 + 5 + 6 + 1 = 13 = F_7 \\
 \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} &= 1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8
 \end{aligned}$$

O seguinte teorema, estabelecido por F. Edouard A. Lucas em 1876, mostra que o padrão observado acima é válido sempre.

Teorema 2.14 (Teorema de Lucas). *Para cada número natural n , temos*

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-j}{j},$$

onde j é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$.

Demonstração. Usaremos indução sobre n .

Como $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_3 = 2$, temos que a afirmação é verdadeira para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$. Vamos considerar válida para os n primeiros inteiros e mostrar que continua verdadeira para $n + 1$. Convém separarmos a demonstração em dois casos, pois quando n é par, o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$ é o próprio $\frac{n}{2}$. No entanto, se for ímpar, este será $\frac{n-1}{2}$.

Se n for par, então

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n/2}{(n-2)/2} \right] + \\ &\quad + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots + \binom{(n-2)/2}{(n-2)/2} \right]. \end{aligned}$$

Agrupando as parcelas correspondentes às mesmas linhas, teremos

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0} \right] + \left[\binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1} \right] + \dots + \\ &\quad + \left[\binom{n/2}{(n-2)/2} + \binom{n/2}{(n-4)/2} \right] + \left[\binom{(n-2)/2}{(n-2)/2} \right]. \end{aligned}$$

Como todos os elementos da coluna zero e os que ocupam posição com valor da linha igual ao da coluna são iguais a um, podemos substituir $\binom{n-1}{0}$ por $\binom{n}{0}$ ($n > 1$) e $\binom{n-2/2}{(n-2)/2}$ por $\binom{n/2}{n/2}$. Para as parcelas agrupadas, vamos usar a Relação de Stifel (2.17), obtendo

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n/2}{n/2}.$$

De modo semelhante, vamos analisar o que ocorre se n é ímpar. Veja:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&= \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} \right] + \\
&\quad + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots + \binom{(n-3)/2}{(n-3)/2} \right].
\end{aligned}$$

Como n agora é ímpar, note a diferença ao juntar as parcelas (não haverá uma última parcela “isolada”). Após agrupar, teremos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&= \binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0} \right] + \left[\binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1} \right] + \dots + \\
&\quad + \left[\binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} + \binom{(n-3)/2}{(n-3)/2} \right].
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de $\binom{n-1}{0}$ por $\binom{n}{0}$ e usando a Relação de Stifel (2.17) para as parcelas agrupadas, obtemos

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2}.$$

concluindo assim a demonstração. □

GENERALIZAÇÕES DE Φ E DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Muitas das propriedades apresentadas nos dois capítulos anteriores costumam ser enaltecidas por aficionados pela Razão Áurea e pela Sequência de Fibonacci, porém é necessário elucidar se tais situações deveriam de fato ser consideradas tão especiais e exclusivas. Com o intuito de gerar essa reflexão, mostraremos como através de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea¹ se obtém relações e números com características semelhantes às de Φ , tendo sido usado os artigos [9] e [22] como inspiração e referência para todo o desenvolvimento deste capítulo e o livro [17] como apoio para tratar das recorrências.

3.1 FÓRMULA DE BINET GENERALIZADA

No Capítulo 2 foi mostrada a relação entre as raízes Φ e φ da equação (1.4) e a Sequência de Fibonacci através da Fórmula de Binet. Vamos verificar se esses vínculos continuam válidos para uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, assim como a exclusividade do surgimento da Razão Áurea em situações por muitos consideradas inusitadas.

Definição 3.1. Seja $p > 0$ um número real. Chamaremos de *Sequência de Fibonacci Generalizada* — e, por comodidade, usaremos a abreviação SFG — a sequência $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ com $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ e

$$G_{n+2} = pG_{n+1} + G_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Os primeiros termos da SFG para um número real $p > 0$ fixado são

¹ No Apêndice A é tratado sobre recorrências lineares de segunda ordem homogêneas.

$$0, 1, p, p^2 + 1, p^3 + 2p, p^4 + 3p^2 + 1, p^5 + 4p^3 + 3p, p^6 + 5p^4 + 6p^2 + 1, \dots$$

Vamos determinar a solução da recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes (3.1). Sua equação característica

$$x^2 - px - 1 = 0 \quad (3.2)$$

tem

$$\frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} \text{ e } \frac{p - \sqrt{p^2 + 4}}{2}$$

como raízes, as quais serão representadas, respectivamente, por Φ_p e φ_p .

Considerando os termos iniciais $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$ da SFG e usando o Teorema A.2, vamos encontrar as constantes c_1 e c_2 para determinar a solução da recorrência. Portanto, teremos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} c_1 \Phi_p^0 + c_2 \varphi_p^0 = 0 \\ c_1 \Phi_p^1 + c_2 \varphi_p^1 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \Phi_p + c_2 \varphi_p = 1 \end{cases}$$

donde obtemos

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4}} \text{ e } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + 4}}.$$

Logo a solução da SFG é dada por

$$G_n = \frac{\Phi_p^n - \varphi_p^n}{\Phi_p - \varphi_p} \quad (3.3)$$

que também pode ser representada por

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4}} \left[\left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{p - \sqrt{p^2 + 4}}{2} \right)^n \right] \quad (3.4)$$

Definição 3.2. Daremos o nome de *Fórmula de Binet Generalizada* à (3.4). Repare que fazendo $p = 1$ obtemos $\Phi_p = \Phi$ e $\varphi_p = \varphi$. Portanto, nos referiremos a Φ_p como o *Número de Ouro Generalizado* ou a *Razão Áurea Generalizada*.

3.1.1 Limite da razão entre termos consecutivos da SFG

Vamos usar a Fórmula de Binet Generalizada (3.3) para determinar a razão de um termo da SFG pelo seu antecessor. Inicialmente, teremos

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\frac{\Phi_p^{n+1} - \varphi_p^{n+1}}{\Phi_p - \varphi_p}}{\frac{\Phi_p^n - \varphi_p^n}{\Phi_p - \varphi_p}} = \frac{\Phi_p^{n+1} - \varphi_p^{n+1}}{\Phi_p^n - \varphi_p^n}.$$

Dividindo o numerador e denominador por Φ_p^n , obtemos

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\frac{\Phi_p^{n+1}}{\Phi_p^n} - \frac{\varphi_p^{n+1}}{\Phi_p^n}}{\frac{\Phi_p^n}{\Phi_p^n} - \frac{\varphi_p^n}{\Phi_p^n}} = \frac{\Phi_p - \varphi_p \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n}{1 - \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n}.$$

Como $\left|\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right| < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_p - \varphi_p \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n}{1 - \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_p - \varphi_p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_p}{\Phi_p}\right)^n} \\ &= \frac{\Phi_p - \varphi_p \cdot 0}{1 - 0} = \Phi_p. \end{aligned}$$

Repare que $p = 1$, implicará em $G_n = F_n \forall n \in \mathbb{N}$ e $\Phi_p = \Phi$. Portanto, este resultado generaliza o que apresentamos na Seção 2.2.

3.2 RELAÇÕES ELEMENTARES ENVOLVENDO Φ_p

Durante a resolução da SFG obtemos a equação (3.2). Observe que a equação (1.4) obtida no Capítulo 1 é apenas um caso específico de (3.2), quando $p = 1$. Dessa

forma, todas relações extraídas de (1.4) também são particularidades de expressões gerais conseguidas com (3.2).

A relação (1.5) pode ser comparada ao caso em que se substitui a raiz Φ_p na equação (3.2) e se isola o termo ao quadrado, chegando à igualdade a seguir:

$$\Phi_p^2 = p\Phi_p + 1. \quad (3.5)$$

Para obter o inverso ϕ_p de Φ_p , basta dividir a equação (3.5) por Φ_p e isolar o termo correspondente ao inverso, obtendo

$$\phi_p = \frac{1}{\Phi_p} = \Phi_p - p. \quad (3.6)$$

Note como (1.6) é uma particularidade da igualdade (3.6). Além disso, o inverso de Φ_p é o oposto de φ_p :

$$\frac{1}{\Phi_p} = \frac{2}{p + \sqrt{p^2 + 4}} = \frac{2(p - \sqrt{p^2 + 4})}{p^2 - p^2 - 4} = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} = -\varphi_p.$$

Se isolarmos p na igualdade (3.6), podemos concluir que $p = \Phi_p + \varphi_p$, pois

$$p = \Phi_p - \frac{1}{\Phi_p} = \Phi_p - (-\varphi_p) = \Phi_p + \varphi_p. \quad (3.7)$$

Como $-\varphi_p$ é o inverso de Φ_p , temos que o produto das raízes da equação (3.2) será igual a -1 , ou seja,

$$\Phi_p \cdot \varphi_p = -1. \quad (3.8)$$

Já a diferença entre as raízes Φ_p e φ_p é dada por

$$\Phi_p - \varphi_p = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} - \frac{p - \sqrt{p^2 + 4}}{2} = \sqrt{p^2 + 4}. \quad (3.9)$$

Com isso, podemos verificar que as três identidades em (2.9) também são particularidades, respectivamente, dos casos gerais (3.7), (3.8) e (3.9).

3.2.1 Raízes quadradas sucessivas

Ao extrair a raiz quadrada de ambos membros após ter substituído a raiz positiva Φ_p na equação (3.2) e isolado o termo Φ_p^2 , encontramos

$$\Phi_p = \sqrt{1 + p\Phi_p}. \quad (3.10)$$

Usando a relação (3.10) e fazendo consecutivas substituições do fator Φ_p localizado dentro do radical, obtemos a seguinte igualdade envolvendo raízes quadradas sucessivas:

$$\Phi_p = \sqrt{1 + p\sqrt{1 + p\sqrt{1 + p\sqrt{1 + \dots}}}}$$

De maneira mais formal, usando um método de iteração, vamos considerar a raiz positiva x da equação (3.2), a qual pode ser reescrita como $x = \sqrt{1 + px}$. Seja:

$$x_1 = \sqrt{1}; \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + px_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo sucessivas iterações, teremos:

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{1 + p\sqrt{1}} \\ x_3 &= \sqrt{1 + p\sqrt{1 + p\sqrt{1}}} \\ &\vdots \\ \Phi_p &= \sqrt{1 + p\sqrt{1 + p\sqrt{1 + p\sqrt{1 + \dots}}}} \end{aligned}$$

Para mostrar a convergência, vamos estimar a diferença entre Φ_p e x_{n+1} :

$$|\Phi_p - x_{n+1}| = \frac{|\Phi_p^2 - x_{n+1}^2|}{|\Phi_p + x_{n+1}|} = \frac{|\Phi_p^2 - 1 - px_n|}{|\Phi_p + x_{n+1}|} = \frac{|p\Phi_p - px_n|}{|\Phi_p + x_{n+1}|} < \frac{p|\Phi_p - x_n|}{\Phi_p}$$

Usando repetidamente este fato, teremos:

$$|\Phi_p - x_{n+1}| < \Phi_p^{-1} p |\Phi_p - x_n| < \Phi_p^{-2} p^2 |\Phi_p - x_{n-1}| < \dots < \Phi_p^{-n} p^n |\Phi_p - x_1|$$

Como $\Phi_p > p$, temos que $\frac{p}{\Phi_p} < 1$. Logo $\left(\frac{p}{\Phi_p}\right)^n$ tende a zero. Portanto, a sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para Φ_p .

Com isso, podemos conferir que com $p = 1$ obtemos um caso particular abordado na Subseção 1.5.1. A seguir, descobriremos que o mesmo ocorre para frações contínuas vista na Subseção 1.5.2.

3.2.2 Frações contínuas

Vamos mostrar a relação da igualdade (3.6) com a representação de Φ_p dada por frações contínuas.

Sendo Φ_p a raiz positiva da equação $x = p + \frac{1}{x}$, definiremos:

$$x_1 = p; \quad x_{n+1} = p + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com iterações sucessivas, vamos obter:

$$x_2 = p + \frac{1}{p}$$

$$x_3 = p + \frac{1}{p + \frac{1}{p}}$$

\vdots

$$\Phi_p = p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \ddots}}}$$

A convergência mostrada nesta última igualdade pode ser comprovada analiticamente:

$$\begin{aligned}
|\Phi_p - x_{n+1}| &= \left| \Phi_p - \left(p + \frac{1}{x_n} \right) \right| = \left| \frac{x_n (\Phi_p - p) - 1}{x_n} \right| \\
&= \left| \frac{x_n (\Phi_p^2 - p\Phi_p) - \Phi_p}{\Phi_p x_n} \right| = \left| \frac{x_n - \Phi_p}{\Phi_p x_n} \right| \\
&= \frac{1}{\Phi_p x_n} |x_n - \Phi_p| = \frac{1}{\Phi_p x_n} \left| p + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(\frac{1}{\Phi_p} + p \right) \right| \\
&= \frac{1}{\Phi_p x_n} \left| \frac{x_{n-1} - \Phi_p}{\Phi_p x_{n-1}} \right| = \frac{1}{\Phi_p^2 x_n x_{n-1}} |x_{n-1} - \Phi_p|.
\end{aligned}$$

Mas

$$x_n x_{n-1} = \left(p + \frac{1}{x_{n-1}} \right) x_{n-1} = p x_{n-1} + 1 \geq 1$$

e então

$$\Phi_p^2 x_n x_{n-1} \geq \Phi_p^2 \geq \Phi_p.$$

Portanto

$$|\Phi_p - x_{n+1}| \leq \frac{1}{\Phi_p^2} |x_{n-1} - \Phi_p|.$$

Se n é par, então

$$|\Phi_p - x_{n+1}| \leq \frac{1}{\Phi_p} |x_{n-1} - \Phi_p| \leq \frac{1}{\Phi_p^2} |x_{n-3} - \Phi_p| \leq \dots \leq \frac{1}{\Phi_p^{\frac{n}{2}}} |x_1 - \Phi_p|.$$

Se n é ímpar, então

$$|\Phi_p - x_{n+1}| \leq \frac{1}{\Phi_p} |x_{n-1} - \Phi_p| \leq \frac{1}{\Phi_p^2} |x_{n-3} - \Phi_p| \leq \dots \leq \frac{1}{\Phi_p^{\frac{n-1}{2}}} |x_2 - \Phi_p|.$$

Seja $M = \max \{ |x_2 - \Phi_p|, |x_1 - \Phi_p| \}$ e seja $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n+1}{2}$. Então, temos que

$$|\Phi_p - x_{n+1}| \leq \frac{1}{\Phi_p^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \cdot M.$$

Mas $\frac{1}{\Phi_p^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \cdot M$ tende a zero, pois M é constante e $\frac{1}{\Phi_p^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}}$ tende a zero. Portanto, como a diferença entre Φ_p e x_{n+1} tende a zero, a sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para Φ_p .

Podemos conferir que com $p = 1$ obtemos o caso particular abordado na Subseção 1.5.2.

3.3 OUTRAS FÓRMULAS RELACIONANDO Φ_p À SFG

Além da Fórmula de Binet Generalizada (3.4) que relaciona as raízes da equação (3.2) com os termos da SFG, vamos mostrar outras relações gerais que geralmente aparecem de forma específica para tratarmos apenas do Número de Ouro e da Sequência de Fibonacci, como

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1} \quad (3.11)$$

e

$$\Phi^n = \frac{F_{n-1} + \sqrt{5}F_n + F_{n+1}}{2}. \quad (3.12)$$

A relação (3.11) foi demonstrada na Proposição 2.1 e (3.12) é consequência dela, bastando substituir o valor de Φ e reescrever $F_n + F_{n-1}$ como sendo F_{n+1} .

Mas intuito agora é mostrar que elas são apenas casos específicos de quando $p = 1$, então vamos demonstrar o caso geral iniciando com o resultado a seguir:

Proposição 3.3. Para $n \geq 1$ natural, temos

$$\Phi_p^n = G_n \Phi_p + G_{n-1}.$$

Demonstração. Usaremos o PIF. Utilizando a propriedade (3.5), conseguimos comprovar a igualdade para $n = 2$, pois

$$G_2 \Phi_p + G_1 = p \Phi_p + 1 = \Phi_p^2.$$

Vamos considerar verdadeira a relação para n e provar sua validade para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_p^{n+1} &= \Phi_p^n \cdot \Phi_p \\ &= (G_n \Phi_p + G_{n-1}) \cdot \Phi_p \\ &= G_n \Phi_p^2 + G_{n-1} \Phi_p \\ &= G_n (p \Phi_p + 1) + G_{n-1} \Phi_p \\ &= (p G_n + G_{n-1}) \Phi_p + G_n \\ &= G_{n+1} \Phi_p + G_n. \end{aligned}$$

Do PIF, segue que $\Phi_p^n = G_n \Phi_p + G_{n-1}$ para $n \geq 1$ natural. \square

Como consequência desse teorema, obtemos a relação a seguir:

$$\begin{aligned}
 \Phi_p^n &= G_n \Phi_p + G_{n-1} \\
 &= G_n \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} + G_{n-1} \\
 &= \frac{pG_n + \sqrt{p^2 + 4}G_n + 2G_{n-1}}{2} \\
 &= \frac{pG_n + G_{n-1} + \sqrt{p^2 + 4}G_n + G_{n-1}}{2} \\
 &= \frac{G_{n+1} + \sqrt{p^2 + 4}G_n + G_{n-1}}{2}.
 \end{aligned}$$

3.3.1 Identidade de Cassini Generalizada

No Capítulo 2, obtivemos a Identidade de Cassini (2.15) através do determinante de uma matriz. Aqui mostraremos sua versão generalizada:

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = (-1)^n. \quad (3.13)$$

Para esta demonstração utilizaremos a Fórmula de Binet Generalizada (3.4), obtendo:

$$G_{n+1}G_{n-1} = \frac{\Phi_p^{n+1} - \varphi_p^{n+1}}{\sqrt{p^2 + 4}} \cdot \frac{\Phi_p^{n-1} - \varphi_p^{n-1}}{\sqrt{p^2 + 4}} \quad (3.14)$$

e

$$G_n^2 = \left(\frac{\Phi_p^n - \varphi_p^n}{\sqrt{p^2 + 4}} \right)^2 = \frac{\Phi_p^{2n} - 2(-1)^n + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4}. \quad (3.15)$$

Agora, determinando a diferença entre (3.14) e (3.15), chegamos a

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = \frac{(-1)^n(\Phi_p - \varphi_p)^2}{p^2 + 4}.$$

Lembrando de (3.9), podemos simplificar e obter (3.13).

3.3.2 *Identidade de Catalan Generalizada*

Outra relação entre os termos da Sequência de Fibonacci (2.1) obtida usando a Fórmula de Binet (2.5) é a *Identidade de Catalan*:

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2$$

onde $n \geq 1$ e $r \leq n$ são números naturais.

Mostraremos a forma generalizada dessa identidade:

$$G_n^2 - G_{n-r}G_{n+r} = (-1)^{n-r}G_r^2$$

onde $n \geq 1$ e $r \leq n$.

Para sua comprovação, vamos usar a Fórmula de Binet Generalizada, obtendo

$$\begin{aligned} G_{n-r}G_{n+r} &= \frac{\Phi_p^{n-r} - \varphi_p^{n-r}}{\sqrt{p^2 + 4}} \cdot \frac{\Phi_p^{n+r} - \varphi_p^{n+r}}{\sqrt{p^2 + 4}} \\ &= \frac{\Phi_p^{2n} - \Phi_p^{n-r}\varphi_p^{n+r} - \varphi_p^{n-r}\Phi_p^{n+r} + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4}. \end{aligned}$$

Vamos utilizar o fato de $-\varphi_p$ ser o inverso de Φ_p e propriedades de potências para fatorar e deixar sua expressão de um modo mais conveniente. Vale ressaltar que, para n e r inteiros, vale a igualdade $(-1)^{n-r} = (-1)^{n+r}$. Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} G_{n-r}G_{n+r} &= \frac{\Phi_p^{2n} - \Phi_p^{n-r}\varphi_p^{n+r} - \varphi_p^{n-r}\Phi_p^{n+r} + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4} \\ &= \frac{\Phi_p^{2n} - \Phi_p^{n-r} \left(-\frac{1}{\Phi_p}\right)^{n+r} - \left(-\frac{1}{\Phi_p}\right)^{n-r} \Phi_p^{n+r} + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4} \\ &= \frac{\Phi_p^{2n} - (-1)^{n+r} \cdot \Phi_p^{n-r} \cdot \Phi_p^{-n-r} - (-1)^{n-r} \Phi_p^{-n+r} \cdot \Phi_p^{n+r} + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4} \\ &= \frac{\Phi_p^{2n} - (-1)^{n+r} \cdot \Phi_p^{-2r} - (-1)^{n-r} \Phi_p^{2r} + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4}. \end{aligned}$$

Então:

$$G_{n-r}G_{n+r} = \frac{\Phi_p^{2n} + \varphi_p^{2n} - (-1)^{n-r}[\Phi_p^{2r} + (-\varphi_p)^{2r}]}{p^2 + 4}.$$

Usando (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} G_n^2 - G_{n-r}G_{n+r} &= \frac{\Phi_p^{2n} - 2(-1)^n + \varphi_p^{2n}}{p^2 + 4} - \frac{\Phi_p^{2n} + \varphi_p^{2n} - (-1)^{n-r}[\Phi_p^{2r} + (-\varphi_p)^{2r}]}{p^2 + 4} \\ &= \frac{-2(-1)^n + (-1)^{n-r}[\Phi_p^{2r} + (-\varphi_p)^{2r}]}{p^2 + 4}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como $(\varphi_p)^{2r} = (-\varphi_p)^{2r}$, colocando $(-1)^{n-r}$ em evidência, teremos (3.16) como

$$G_n^2 - G_{n-r}G_{n+r} = (-1)^{n-r} \frac{[\Phi_p^{2r} - 2(-1)^r + \varphi_p^{2r}]}{p^2 + 4}.$$

Usando fatoração de produto notável para o numerador, vamos escrever toda a parte fracionária ao quadrado, ficando da seguinte forma:

$$G_n^2 - G_{n-r}G_{n+r} = (-1)^{n-r} \left(\frac{\Phi_p^r - \varphi_p^r}{\sqrt{p^2 + 4}} \right)^2.$$

Sendo a expressão interna aos parênteses correspondente a G_r^2 , concluímos a verificação.

3.4 RETÂNGULO ÁUREO GENERALIZADO

Os Números de Ouro Generalizados não se limitam às relações dadas por fórmulas com os termos da SFG. Situações envolvendo Φ na Geometria apresentadas no Capítulo 1, como o Retângulo Áureo, também são apenas casos específicos dessa “família” de números como veremos a seguir.

De modo semelhante à construção do Retângulo Áureo apresentado na Subseção 1.4.3, iniciaremos com um retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = p$ e $\overline{BC} = 1$, onde $p > 0$ é um número real qualquer, e obteremos um retângulo $Aefd$ tal que a razão entre o lado maior e o lado menor é Φ_p . Este retângulo será chamado de *Retângulo Áureo Generalizado*.

Vamos determinar o ponto médio M do lado AB e, com a medida do segmento MC , encontrar o ponto E sobre a reta suporte do lado AB tal que $\overline{ME} = \overline{MC}$ (vamos considerar o ponto à direita de B , conforme Figura 21).

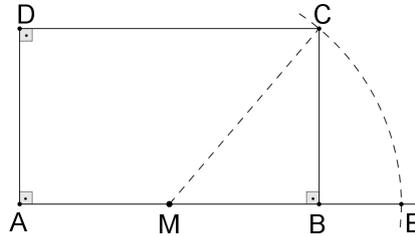


Figura 21: Construção do Retângulo Áureo Generalizado.

Usando Teorema de “Pitágoras” para determinar o valor do segmento MC , obtemos

$$\begin{aligned}\overline{MC}^2 &= \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1^2\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{2}.$$

Completando a Figura 21 com o ponto F para formar o retângulo $AEFD$ (ver Figura 22), podemos mostrar sua semelhança com o retângulo $BEFC$, pois

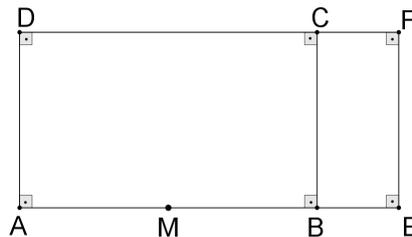


Figura 22: Retângulos Áureos Generalizados $AEFD$ e $BEFC$.

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \overline{AM} + \overline{MC} \\ &= \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{BE} &= \overline{MC} - \overline{MB} \\ &= \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{2} - \frac{p}{2} \\ &= \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \Phi_p$$

o que mostra que os retângulos $Aefd$ e $BEFC$ são semelhantes e Retângulos Áureos Generalizados.

Com isso, verificamos a relação dessa construção geométrica com os Números de Ouro Generalizados, afinal as raízes da equação (3.2), $x^2 - px - 1 = 0$, surgem naturalmente uma vez que a medida do segmento AE é Φ_p e do segmento BE é $-\varphi_p = \frac{1}{\Phi_p}$.

3.5 POLÍGONOS REGULARES DE $2n + 1$ LADOS

Provavelmente, o caso sobre o Retângulo Áureo Generalizado não tenha sido suficiente para convencer sobre a presença dos Números de Ouro Generalizados na Geometria em situações como as apresentadas no Capítulo 1, sendo aquelas casos específicos de quando $p = 1$. Trataremos então do que talvez seja considerado o ícone geométrico quando o assunto é Razão Áurea, por dar origem ao pentagrama com suas diagonais, o pentágono regular.

Considere um polígono regular $A_1A_2A_3 \dots A_{2n+1}$ de $2n + 1$ lados, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, ou seja, como n é um número inteiro maior ou igual a 2 estamos considerando

os polígonos regulares com quantidade de lados sendo um número ímpar maior ou igual a 5. Seja x a medida da diagonal maior e p a da segunda maior distância entre dois vértices desse polígono de lado unitário (ver Figura 23). Comprovaremos que $x - p = \frac{1}{x}$, ou seja, que a maior distância entre dois vértices desse polígono é Φ_p .

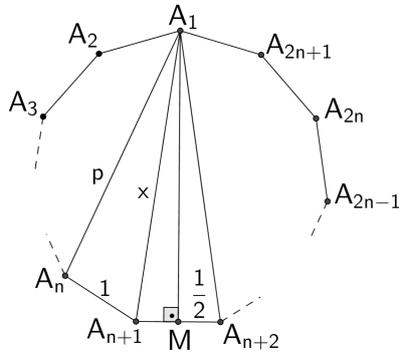


Figura 23: Duas maiores diagonais de medida x e p no polígono com $2n + 1$ lados.

Inicialmente vamos considerar, como na Figura 23, a mediatriz que passa pelo vértice A_1 do segmento $A_{n+1}A_{n+2}$ determinando o ponto médio M desse lado e o triângulo retângulo $A_1A_{n+1}M$ (note que o fato do polígono ter uma quantidade ímpar de lados garante que sempre haverá um vértice tal que a mediatriz do seu lado oposto o interceptará).

Como cada ângulo interno do polígono regular $A_1A_2A_3 \dots A_{2n+1}$ é dado por

$$\frac{(2n - 1)180^\circ}{2n + 1}$$

e $A_2\widehat{A_1}A_3 = A_3\widehat{A_1}A_4 = \dots = A_{2n}\widehat{A_1}A_{2n+1}$ (pois se o polígono for inscrito numa circunferência os vértices irão determinar arcos de mesma medida) temos

- $A_{n+1}\widehat{A_1}A_{n+2} = A_n\widehat{A_1}A_{n+1} = \frac{180^\circ}{2n + 1}$, pois o ângulo interno do vértice A_1 foi dividido em $2n - 1$ partes iguais.
- $A_1\widehat{A_{n+1}}A_{n+2} = A_1\widehat{A_{n+1}}M = A_1\widehat{A_{n+2}}A_{n+1} = \frac{n180^\circ}{2n + 1}$, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° e o triângulo $A_{n+1}A_1A_{n+2}$ é isósceles de base $A_{n+1}A_{n+2}$.
- $A_1\widehat{A_{n+1}}A_n = \frac{(n - 1)180^\circ}{2n + 1}$, pois $A_n\widehat{A_{n+1}}A_{n+2} - A_1\widehat{A_{n+1}}A_{n+2} = A_n\widehat{A_{n+1}}A_1$.
- $A_1\widehat{A_n}A_{n+1} = \frac{(n + 1)180^\circ}{2n + 1}$, pois $A_1\widehat{A_n}A_{n+1} + A_n\widehat{A_{n+1}}A_1 + A_{n+1}\widehat{A_1}A_n = 180^\circ$.

Vamos converter as medidas dos ângulos de grau para radiano e usando trigonometria no triângulo retângulo $A_1A_{n+1}M$, temos

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \cos(\widehat{A_1A_{n+1}M}) = \frac{1}{x}$$

e, portanto,

$$x = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)}. \quad (3.17)$$

Para determinar o valor de p , a segunda maior distância entre dois vértices do polígono em questão, usaremos a lei dos cossenos no triângulo $A_1A_nA_{n+1}$, obtendo

$$x^2 = 1 + p^2 - 2p \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right). \quad (3.18)$$

Como $\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$, podemos escrever (3.18) da seguinte forma:

$$x^2 = 1 + p^2 + 2p \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right). \quad (3.19)$$

De (3.17), temos $2 \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{x}$, logo (3.19) pode ser representada por

$$x^2 - p^2 = 1 + \frac{p}{x}.$$

Assim,

$$(x - p)(x + p) = \frac{x + p}{x}$$

e, portanto,

$$p = x - \frac{1}{x}. \quad (3.20)$$

Por curiosidade, para descobrir o valor de p basta substituir os valores de x e $\frac{1}{x}$ em (3.20) obtendo

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)} - 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) \\
 &= \frac{1 - 4 \cos^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)}{2 \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)}.
 \end{aligned}$$

Mas vamos destacar a igualdade (3.20), pois dela podemos fazer relação com (3.2), o que nos permite concluir que para qualquer polígono regular com um número ímpar, maior ou igual a cinco, de lados, o valor da maior diagonal x será dado por Φ_p , ou seja, pelo Número de Ouro Generalizado:

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}.$$

Não podemos deixar de notar, que no caso de um pentágono regular ($n = 2$), temos $p = 1$. Isto é, a segunda maior distância entre dois vértices é o comprimento do lado e o tamanho da diagonal é $\Phi_1 = \Phi$, que foi abordado na Subseção 1.4.1.

Ressaltamos, portanto, que a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci possuem, de fato, muitas características interessantes, mas não devemos superdimensionar isto como se fossem aspectos exclusivos que o tornam merecedores de terem propriedades enaltecidas a ponto de serem considerados “números sagrados” da Matemática.

APLICAÇÕES DIVERSAS

As situações apresentadas neste capítulo têm o intuito de fomentar ideias e despertar curiosidade sobre aplicações, propriedades ou situações em que, de fato, surgem a Razão Áurea e/ou a Sequência de Fibonacci e poderão servir de subsídio aos professores dos Ensinos Fundamental e Médio.

4.1 TRIÂNGULO RETÂNGULO E AS MÉDIAS: ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E HARMÔNICA

Baseando-nos no artigo [8], mostraremos a relação existente entre as médias aritmética, geométrica e harmônica com o triângulo retângulo.

Vamos considerar dois números reais positivos a e b e denotar as médias aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, por A , G e H , sendo elas definidas da seguinte maneira:

$$A = \frac{a+b}{2},$$
$$G = \sqrt{ab}$$

e

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Lembremos da desigualdade das médias:

$$A \geq G \geq H. \tag{4.1}$$

Por estarmos considerando as médias de apenas dois números, faremos a demonstração de (4.1) apenas para esse caso, sendo possível encontrar outras formas de demonstração, incluindo para o caso geral, no livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias* de Elon Lages Lima. Iniciaremos com a primeira parte da desigualdade, $A \geq G$, já que $G \geq H$ decorre disto.

$$\begin{aligned} A - G &= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como a diferença entre a média aritmética A e a geométrica G dos números reais positivos a e b é maior ou igual a zero, temos que $A \geq G$. Usando tal fato vamos calcular as médias aritmética e geométrica dos inversos de a e b para mostrar que $G \geq H$.

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \frac{1}{b}}$$

e, portanto,

$$\frac{a+b}{2ab} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}}$$

o que implica

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}. \quad (4.2)$$

Com a desigualdade (4.2), podemos concluir que, para dois números reais positivos a e b a média geométrica G é maior ou igual à média harmônica H .

Teorema 4.1. *As médias aritmética (A), geométrica (G) e harmônica (H) de dois números reais positivos são os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo se, e somente se, a razão entre a média aritmética e a harmônica é a Razão Áurea.*

Demonstração. Se A , G e H representam os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, pela propriedade (4.1), temos que A será a hipotenusa. Utilizando o Teorema de “Pitágoras”, temos

$$A^2 = G^2 + H^2. \quad (4.3)$$

Como $G^2 = AH$, substituindo em (4.3), obtemos

$$A^2 = AH + H^2 = H(A + H).$$

Logo,

$$\frac{A}{H} = \frac{A + H}{A} = 1 + \frac{H}{A}$$

e, portanto,

$$\frac{A}{H} = \Phi.$$

Reciprocamente, se $\frac{A}{H} = \Phi$, então

$$\left(\frac{A}{H}\right)^2 = \frac{A}{H} + 1$$

ou seja,

$$A^2 = AH + H^2 = G^2 + H^2.$$

Logo, pela recíproca do Teorema de “Pitágoras”, temos que A , G e H são comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. \square

4.2 TRIÂNGULO DE KEPLER

Apresentaremos a seguir um resultado interessante descoberto por Johannes Kepler em 1597, baseado no livro [13].

Teorema 4.2. *Se uma linha dividida na Razão Áurea é a hipotenusa de um triângulo retângulo de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto da secção, então o lado menor terá o mesmo valor do maior segmento da linha dividida.*

Demonstração. Vamos considerar o segmento \overline{AB} dividido em Extrema e Média Razão pelo ponto G , sendo $a = \overline{AG}$ o comprimento do maior segmento resultante da divisão

área e $b = \overline{GB}$ o do menor. Determinamos o ponto C pertencente à perpendicular do lado AB que passa por G de tal modo a formar o triângulo retângulo ABC de altura $\overline{GC} = h$ e catetos $\overline{AC} = y$ e $\overline{BC} = x$ (ver Figura 24).

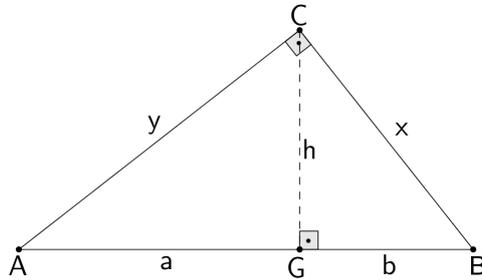


Figura 24: Triângulo de Kepler.

Aplicando o Teorema de “Pitágoras”, temos

$$(a + b)^2 = x^2 + y^2.$$

Usando a relação métrica $\overline{AC}^2 = \overline{AG} \cdot \overline{AB}$, chegamos a

$$a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + a(a + b).$$

Logo,

$$x^2 = b(a + b).$$

Como G divide AB em Extrema e Média Razão, temos que

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

e, portanto,

$$a^2 = b(a + b).$$

Logo, $x = a$.

Como AC é hipotenusa do triângulo ACG , temos que $\overline{AC} > \overline{AG}$, portanto, podemos concluir que $\overline{BC} < \overline{AC}$. \square

4.3 PARADOXO DO QUEBRA-CABEÇA

Um famoso problema que circula na internet em gifs e vídeos é o do chocolate infinito, onde uma barra de chocolate é dividida em algumas partes e quando reagrupadas voltam a formar uma barra com a mesma “área” porém sobrando um pedaço de chocolate. Tal problema desperta a curiosidade das pessoas a fim de descobrirem o mistério envolvido nele. Se aproveitando desse desejo por descobrir o “truque”, o professor pode introduzir e trabalhar o conceito de números irracionais além de reforçar e aprofundar sobre áreas e propriedades geométricas. Sendo, ainda possível, para o que veremos a seguir, apresentar a Identidade de Cassini (2.15).

Se assemelhando a tal problema, no livro [13] é apresentado um paradoxo divulgado pela primeira vez pelo criador de quebra-cabeças matemático, Sam Loyd (1841-1911), no qual ele considera um quadrado $ABCD$ de lado igual a oito unidades (logo, área igual a $8^2 = 64$), pontos E , F e H pertencentes, respectivamente, aos lados AB , BC e AD e, ainda, o ponto G sobre o segmento originado pelos pontos H e F tal que $\overline{AE} = 3$, $\overline{EB} = 5$, $\overline{BF} = 5$, $\overline{FC} = 3$, $\overline{DH} = 3$, $\overline{HG} = 5$ e $\overline{GF} = 3$. Teremos quatro regiões S_1 , S_2 , S_3 e S_4 correspondentes aos trapézios $AEGH$ e $EBFG$ e aos triângulos FCD e DHF que, quando reagrupadas (conforme podemos ver na Figura 25¹), darão origem a um “retângulo” de lados treze e cinco (ou seja, de área igual a $13 \cdot 5 = 65$), gerando o questionamento do que levou ao acréscimo de uma unidade na área.

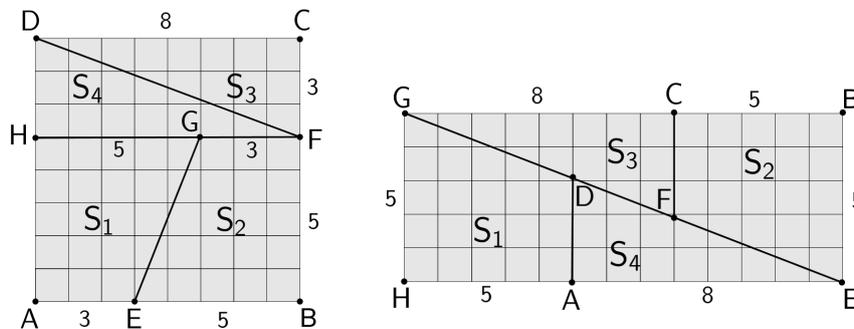


Figura 25: “Retângulo” formado com as peças resultantes da divisão do quadrado.

¹ Como vários pontos se sobrepuseram quando as peças S_1 , S_2 , S_3 e S_4 foram reagrupadas, optamos por denotar a coincidência entre os pontos A e H , E e F , C e F , G e D , F e G e D e E por apenas A , E , C , G , F e D , respectivamente.

Para desvendar o mistério, vamos iniciar verificando algumas medidas, como se de fato a diagonal \overline{EG} do “retângulo” corresponde à soma dos segmentos \overline{EF} e \overline{FG} . A medida da diagonal \overline{EG} do retângulo de lados 13 e 5 é dada pelo número irracional

$$\begin{aligned}\overline{EG} &= \sqrt{13^2 + 5^2} \\ \overline{EG} &= \sqrt{194}.\end{aligned}$$

Já as medidas \overline{EF} e \overline{FG} são dadas por

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \sqrt{2^2 + 5^2} \\ \overline{EF} &= \sqrt{29}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{FG} &= \sqrt{3^2 + 8^2} \\ \overline{FG} &= \sqrt{73}.\end{aligned}$$

Logo, $\overline{EG} \neq \overline{EF} + \overline{FG}$. Ou seja, na realidade as peças não se encaixam perfeitamente ao longo do que seria a diagonal do “retângulo”, porém como a diferença é quase imperceptível a olho nu, uma vez que $\sqrt{194} = 13,9283882\dots$ enquanto $\sqrt{73} + \sqrt{29} = 13,9291685\dots$, o paradoxo surpreende muitas pessoas.

Assim como sugerem os PCNs [4], os alunos podem investigar a diferença entre tais medidas com o uso de calculadora científica, chegando ao valor aproximado de $7,8 \cdot 10^{-4}$. Com isso, o professor além de ensinar aos alunos a manusearem adequadamente uma ferramenta tecnológica, deve mediar em seguida reflexões sobre números com tais características e questionar, neste caso, sobre qual figura acaba sendo formada no pequeno buraco ao longo da diagonal do “retângulo”.

Pela desigualdade triangular, cuja demonstração pode ser conferida no livro [18], dada pela Proposição 2.23, qualquer triângulo tem o comprimento de cada lado menor que a soma das medidas dos outros dois lados, podemos facilmente verificar a existência dos triângulos EDG e EFG e como eles são congruentes, pela proposição 2.29 também do livro [18] que diz que um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais, podemos concluir que o vão existente ao longo do que seria a diagonal \overline{EG} do “retângulo” é na verdade um paralelogramo.

Pode ser atrativo associar tal problema com a identidade de Cassini (2.15) e, com isso, questionar se para todo quadrado com medida do lado igual ao número de Fibonacci F_n pode ser dividido de modo análogo em quatro figuras e construir com elas um “retângulo” com medidas de seus lados iguais a F_{n-1} e F_{n+1} e área que se diferencia em uma unidade.

4.4 TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

Sejam ABC um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro O e M e N os pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente. Ao prolongar o segmento MN obtemos o ponto P , intersecção com a circunferência (ver Figura 26). Determine a razão na qual o ponto N divide o segmento MP .

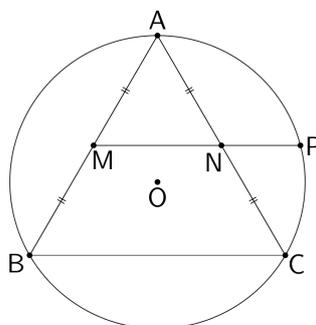


Figura 26: Triângulo equilátero inscrito na circunferência com segmento MP passando pelos pontos médios de dois lados.

Pelo teorema da base média, temos que $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Vamos considerar, sem perda de generalidade, o lado do triângulo equilátero ABC como sendo unitário. Então:

- $h_A = h_B = h_C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ são as medidas das alturas;
- $\overline{OH_A} = \overline{OH_B} = \overline{OH_C} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ são as medidas dos apótemas;
- o raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é o raio da circunferência.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ONP de ângulo $\widehat{ONP} = 150^\circ$, temos

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH_B}^2 + \overline{NP}^2 - 2 \cdot \overline{OH_B} \cdot \overline{NP} \cos(\widehat{ONP})$$

ou seja

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot x \cos(150^\circ)$$

e, portanto,

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

cuja raiz positiva é $\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{MP} &= \overline{MN} + \overline{NP} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\frac{1}{2}} = \Phi.$$

Note que, se tomássemos M e N tais que $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = p$, teríamos encontrado $\frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} = \Phi_p$.

4.5 TRIÂNGULO INSCRITO EM UM RETÂNGULO

Dado um retângulo arbitrário $ABCD$ marque pontos E e F sobre os lados AB e AD , respectivamente. Determine quando as áreas dos triângulos AEF , BCE e CDF são iguais.

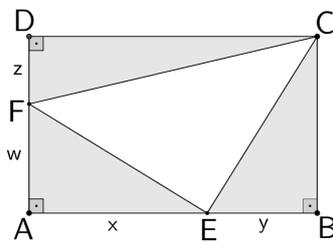


Figura 27: Triângulos sombreados com áreas iguais.

Sejam $x = \overline{AE}$, $y = \overline{EB}$, $z = \overline{DF}$ e $w = \overline{FA}$ (ver Figura 27). Pelo enunciado do problema, devemos ter $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF}$, onde $S_{\triangle AEF}$, $S_{\triangle BCE}$ e $S_{\triangle CDF}$ denotam, respectivamente as áreas dos triângulos AEF , BCE e CDF . Temos que

$$\begin{aligned} S_{\triangle AEF} &= S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF} \Leftrightarrow \\ \frac{x \cdot w}{2} &= \frac{y \cdot (z + w)}{2} = \frac{z \cdot (x + y)}{2} \Leftrightarrow \\ x \cdot w &= y(z + w) = z(x + y). \end{aligned}$$

Dessas igualdades podemos obter

$$x \cdot w = z(x + y)$$

e, portanto,

$$z = \frac{x \cdot w}{x + y} \quad (4.4)$$

e

$$y(z + w) = z(x + y)$$

e, portanto,

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z}. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.4) em (4.5), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{w}{\frac{x \cdot w}{x + y}} \\ &= \frac{x + y}{x} \\ &= 1 + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos membros por $\frac{x}{y}$, temos:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1.$$

Logo, $\frac{x}{y} = \Phi$ e como $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$, concluímos também que $\frac{w}{z} = \Phi$.

Reciprocamente, se $\frac{x}{y} = \frac{w}{z} = \Phi$, então

$$x = y\Phi$$

e

$$w = z\Phi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}xw &= yz\Phi^2, \\ y(z+w) &= yz\Phi^2\end{aligned}$$

e

$$z(x+y) = yz\Phi^2,$$

o que implica

$$xw = y(z+w) = z(x+y).$$

Ou seja, as áreas dos triângulos AEF , BCE e CDF serão iguais se, e somente se, os pontos E e F dividirem os lados AB e AD , respectivamente, em Extrema e Média Razão.

4.5.1 Quando o triângulo será isósceles?

Considerando o exercício anterior, quando o triângulo CEF será isósceles?

Surpreendentemente tal fato ocorre quando o retângulo $ABCD$ for áureo, pois nesse caso teremos

$$\frac{x+y}{z+w} = \Phi$$

de onde podemos obter

$$x+y = \Phi(z+w). \quad (4.6)$$

Como temos $\frac{x}{y} = \frac{w}{z} = \Phi$, conseguimos as seguintes igualdades:

$$x = \Phi y \quad (4.7)$$

e

$$w = \Phi z. \quad (4.8)$$

Substituindo em (4.6),

$$\begin{aligned} \Phi y + y &= \Phi(z + \Phi z) \\ y(\Phi + 1) &= \Phi z(\Phi + 1) \\ y &= \Phi z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando teorema de “Pitágoras” e as relações (4.7), (4.8) e (4.9), temos:

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= y^2 + (z + w)^2 \\ &= (\Phi z)^2 + (\Phi^2 z)^2 \\ &= z^2(\Phi^2 + \Phi^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CF}^2 &= (x + y)^2 + z^2 \\ &= (\Phi^3 z)^2 + z^2 \\ &= z^2(\Phi^6 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{EF}^2 &= x^2 + w^2 \\ &= (\Phi y)^2 + (\Phi z)^2 \\ &= z^2(\Phi^2 + \Phi^4) \end{aligned}$$

Comprovamos, portanto, que quando o retângulo $ABCD$ for áureo, o triângulo CEF será isósceles, com lados CE e EF congruentes.

Reciprocamente, quando o triângulo CEF for isósceles, teremos $\overline{CE} = \overline{CF}$ ou $\overline{CE} = \overline{EF}$ ou $\overline{EF} = \overline{CF}$. Usando o Teorema de “Pitágoras” para analisar as possibilidades:

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= \overline{CF}^2 \\ y^2 + (z + w)^2 &= z^2 + (x + y)^2 \\ y^2 + (\Phi^2 z)^2 &= z^2 + (\Phi^2 y)^2 \end{aligned}$$

Trocando y^2 e z^2 de membro e colocando-os em evidência, temos

$$\begin{aligned} z^2(\Phi^4 - 1) &= y^2(\Phi^4 - 1) \\ z &= y \end{aligned}$$

Logo, $x = w$, pois $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$. Neste caso, $ABCD$ é um quadrado.

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= \overline{EF}^2 \\ y^2 + (z + w)^2 &= x^2 + w^2 \\ y^2 + (\Phi^2 z)^2 &= (\Phi y)^2 + (\Phi z)^2 \end{aligned}$$

Trocando y^2 e $\Phi^2 z^2$ de membro e colocando-os em evidência, temos

$$\begin{aligned} y^2(\Phi^2 - 1) &= \Phi^2 z^2(\Phi^2 - 1) \\ y &= \Phi z \end{aligned}$$

Neste caso, $ABCD$ é um Retângulo Áureo com o maior lado tendo medida igual a \overline{AB} , pois se $y = \Phi z$, então

$$\frac{x + y}{z + w} = \frac{\Phi y + y}{z + \Phi z} = \frac{y(\Phi + 1)}{z(\Phi + 1)} = \frac{y}{z} = \Phi.$$

$$\begin{aligned} \overline{CF}^2 &= \overline{EF}^2 \\ z^2 + (x + y)^2 &= x^2 + w^2 \\ z^2 + (\Phi^2 y)^2 &= (\Phi y)^2 + (\Phi z)^2 \end{aligned}$$

Trocando z^2 e $\Phi^2 y^2$ de membro e colocando-os em evidência, temos

$$\begin{aligned} \Phi^2 y^2(\Phi^2 - 1) &= z^2(\Phi^2 - 1) \\ z &= \Phi y \end{aligned}$$

Neste caso, $ABCD$ é um Retângulo Áureo com o maior lado tendo medida igual a \overline{AD} , pois se $z = \Phi y$, então

$$\frac{z + w}{x + y} = \frac{z + \Phi z}{\Phi y + y} = \frac{z(\Phi + 1)}{y(\Phi + 1)} = \frac{z}{y} = \Phi.$$

4.6 CIRCUITO COM INFINITOS RESISTORES

Para mostrar uma situação, talvez inusitada, em que a Razão Áurea aparece junto à teoria dos circuitos elétricos, nos basearemos nos artigos [11] e [21].

Considere um circuito com infinitos resistores (ver Figura 28), onde cada um é denotado por R e possui a mesma impedância em *ohms*. Devemos encontrar a resistência total, R_e , medida entre a e b .

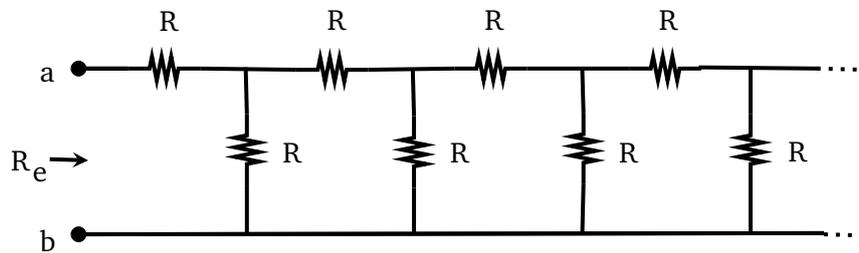


Figura 28: Circuito infinito de resistores.

Para melhor compreensão do cálculo, faremos uma secção no circuito, dando origem aos pontos a' e b' (ver Figura 29).

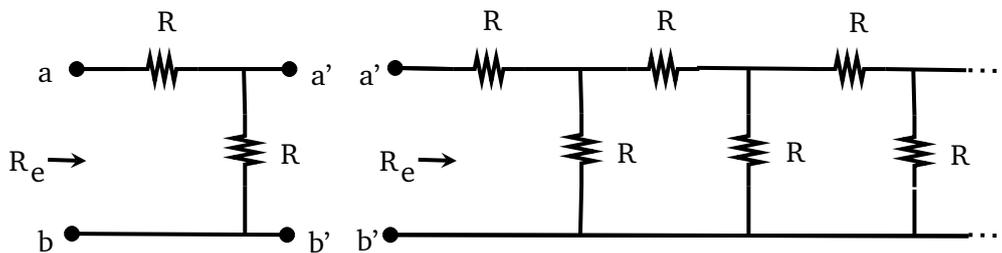


Figura 29: Secção feita no circuito.

Repare que no lado direito da secção temos o mesmo circuito com infinitos resistores apresentado inicialmente, ou seja, sua resistência total também é R_e . Sendo assim,

podemos representar com apenas um resistor de impedância R_e toda essa secção do lado direito (ver Figura 30).

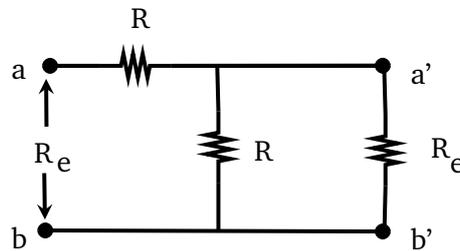


Figura 30: Resistência entre a e b .

Como temos um circuito misto (ligações em série e em paralelo), para o cálculo devemos lembrar:

- Ligação em série: fazemos a soma algébrica dos resistores em série.
- Ligação em paralelo: teremos uma fração de numerador 1 e no denominador a soma dos inversos dos resistores em paralelo.

Então, conforme podemos verificar na Figura 30, temos R e R_e em paralelo, logo

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e}} = \frac{R \cdot R_e}{R + R_e}. \quad (4.10)$$

Mas ainda temos um resistor R em série com esta combinação que deu origem à equação (4.10) e, portanto, a resistência total R_e do circuito infinito de resistores será

$$R_e = R + \frac{R \cdot R_e}{R + R_e}. \quad (4.11)$$

Desenvolvendo a equação (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{(R + R_e) \cdot R_e}{R + R_e} &= \frac{R(R + R_e) + R \cdot R_e}{R + R_e} \\ R \cdot R_e + R_e^2 &= R^2 + R \cdot R_e + R \cdot R_e \\ R_e^2 - R \cdot R_e - R^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando a fórmula resolutive para equações do segundo grau em (4.12), obtemos duas raízes distintas e, como a resistência R_e não pode ser negativa, concluímos que ela vale

$$R_e = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot R$$

ou seja, a resistência total R_e é igual ao produto da Razão Áurea por R .

Uma outra forma de desenvolver a resolução e também chegar a esse resultado pode se dar indutivamente. Para isso, comecemos analisando um circuito com apenas dois resistores R (ver Figura 31) e calculemos sua resistência total, R_1 .

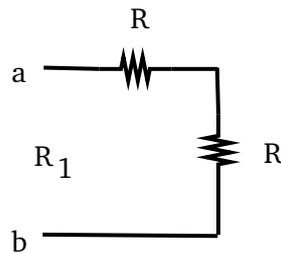


Figura 31: Circuito com um resistor.

$$R_1 = 2R = \frac{2}{1}R$$

Acrescentando uma seção com mais dois resistores R ao circuito (ver Figura 32) e calculando a resistência total R_2 :

$$R_2 = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{5}{3}R.$$

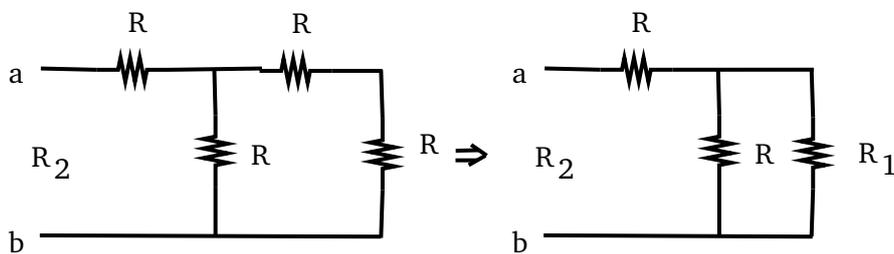


Figura 32: Circuito com dois resistores.

Novamente, adicionando mais dois resistores R (ver Figura 33), teremos a resistência total R_3 :

$$R_3 = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = \frac{13}{8}R.$$

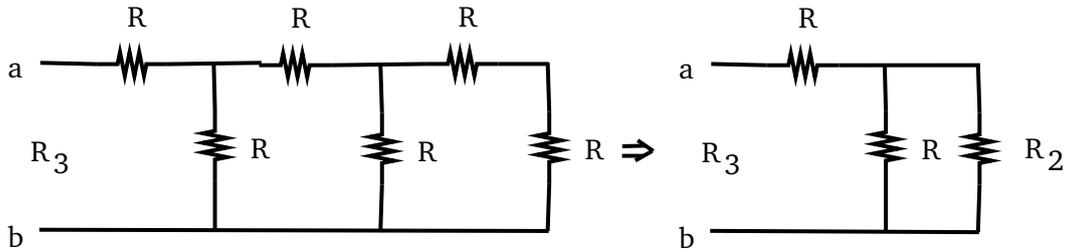


Figura 33: Circuito com três resistores.

Procedendo sucessivamente desta maneira (ver Figura 34), podemos perceber que a resistência total R_n de $2n$ resistores é sempre a razão entre o termo da Sequência de Fibonacci F_{2n+1} pelo seu antecessor F_{2n} vezes R . Ou seja, podemos concluir que o cálculo da resistência total do circuito será dado por:

$$R_n = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}R \tag{4.13}$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \right) R = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) R.$$

Usaremos o PIF para provar a relação (4.13). Para o caso $n = 1$ é válida, pois

$$R_1 = R + \frac{1}{\frac{1}{R}} = \frac{2}{1}R = \frac{F_3}{F_2}R.$$

Vamos verificar se continua válida para $n + 1$, assumindo sua validade para um n natural qualquer. Então

$$\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}R = \frac{F_{2n+2}R + F_{2n+1}R}{F_{2n+2}} = R + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}R.$$

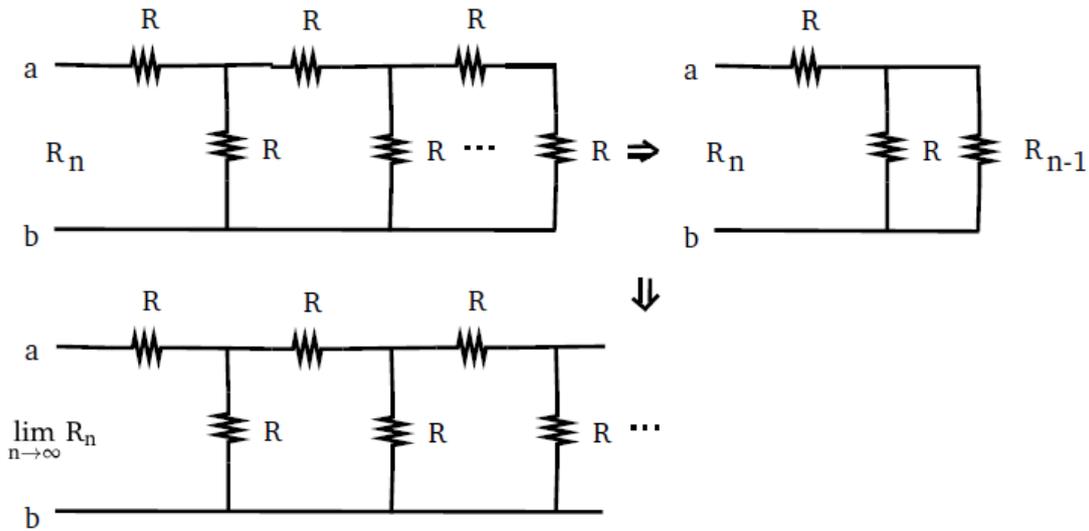


Figura 34: Circuito com infinitos resistores.

Usando a hipótese de indução no numerador e multiplicando por $\frac{R}{R}$, temos

$$\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}R = R + \frac{R \cdot R_n}{\frac{F_{2n+2}}{F_{2n}}R} = R + \frac{R \cdot R_n}{\frac{F_{2n+1}R + F_{2n}R}{F_{2n}}}$$

Usando a hipótese de indução no denominador, obtemos

$$\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}R = R + \frac{R \cdot R_n}{R_n + R}. \tag{4.14}$$

Como

$$R_{n+1} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_n}} = R + \frac{R \cdot R_n}{R_n + R} \tag{4.15}$$

temos (4.15) igual a (4.14), confirmando a validade para $n + 1$ e concluindo a demonstração por PIF.

4.7 PROBLEMAS COM SEQUÊNCIAS RECURSIVAS

Nesta seção aproveitaremos para mostrar dois problemas hipotéticos que se assemelham ao apresentado no Capítulo 2 sobre casais de coelhos. Enunciados derivados de tal problema são comuns e, para mostrar um exemplo disso, iniciaremos com um retirado integralmente do banco de questões da OBMEP de 2013 (Nível 1, Questão 14) presente em [19], onde a ideia é a mesma, mas o contexto é diferente. Já o segundo

é proposto a fim de diversificar a sequência obtida e possibilitar a exposição de um outro número irracional conforme visto no livro [6], onde apesar do contexto semelhante terá uma ideia ligeiramente distinta.

Consideramos importante mostrar como pequenas variações no enunciado podem fazer grandes alterações no resultado final. No caso, uma pequena mudança, dará sequências distintas. Sendo no primeiro caso a razão entre um termo e seu antecessor convergente à Razão Áurea (visto no Capítulo 2.1), mas no segundo caso, a um outro número irracional.

4.7.1 Crescimento de planta - OBMEP

Vai dar galho.

A árvore do professor Fernando cresce de acordo com a seguinte regra:

- na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho;
- após crescer por duas semanas, esse galho dá origem à um novo galho por semana;
- cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

A figura abaixo ilustra a árvore do professor Fernando após cinco semanas passadas do início do seu crescimento.

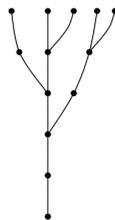


Figura 35: Figura retirada do banco de questões da OBMEP.

Note que após três semanas havia dois galhos; após quatro semanas havia três galhos e após cinco semanas havia cinco galhos.

- Quantos galhos haverá após seis semanas?
- Quantos galhos haverá após sete semanas?

(c) Quantos galhos haverá após treze semanas?

Solução:

(a) Seguindo as regras de crescimento da árvore do professor Fernando podemos continuar o desenho mostrado no enunciado do problema para obter uma ilustração dessa árvore após a sexta semana de crescimento:

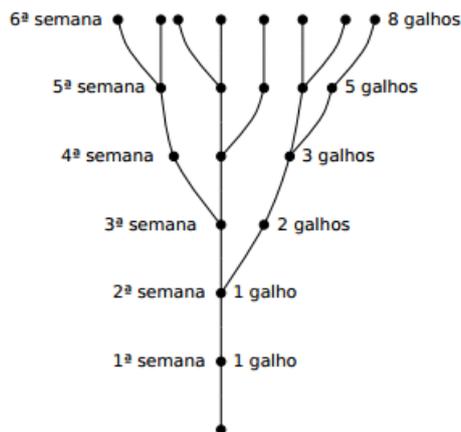


Figura 36: Figura retirada do banco de questões da OBMEP.

Essa figura mostra que, após a sexta semana de crescimento, teremos um total de oito galhos.

(b) Note que a sequência que determina o número de galhos por semana de crescimento é a seguinte:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Essa sequência satisfaz a seguinte regra: a partir de seu terceiro termo, cada termo é a soma dos dois termos anteriores. Por exemplo, o terceiro termo, 2, é igual à soma do primeiro termo, 1, com o segundo termo, 1. Também o quarto termo, 3, é igual à soma do terceiro termo, 2, com o segundo termo, 1.

A quantidade de galhos presentes após a sétima semana de crescimento será dada pelo sétimo termo da sequência. Para gerar esse sétimo termo precisamos então somar o sexto termo (8) com o quinto termo (5). Isto é, o sétimo termo da sequência é igual a $8 + 5 = 13$.

(c) A quantidade de galhos após 13 semanas de crescimento será dada pelo décimo terceiro termo da sequência que aparece na solução do item (b). Lembrando que

cada termo naquela sequência será dado pela soma dos dois termos anteriores, podemos gerar os demais termos da seguinte forma:

- **sexto termo:** 8;
- **sétimo termo:** 13;
- **oitavo termo:** $8 + 13 = 21$;
- **nono termo:** $13 + 21 = 34$;
- **décimo termo:** $21 + 34 = 55$;
- **décimo primeiro termo:** $34 + 55 = 89$;
- **décimo segundo termo:** $55 + 89 = 144$;
- **décimo terceiro termo:** $89 + 144 = 233$;

Assim, a quantidade de galhos após 13 semanas é igual a 233.

Observação: A sequência obtida foi

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

que é a famosa sequência de Fibonacci!

4.7.2 Criação de gado

Suponha que um casal jovem de gado evolua em um mês para casal imaturo e no mês seguinte para adulto. Os casais adultos são férteis e sempre geram um novo casal.

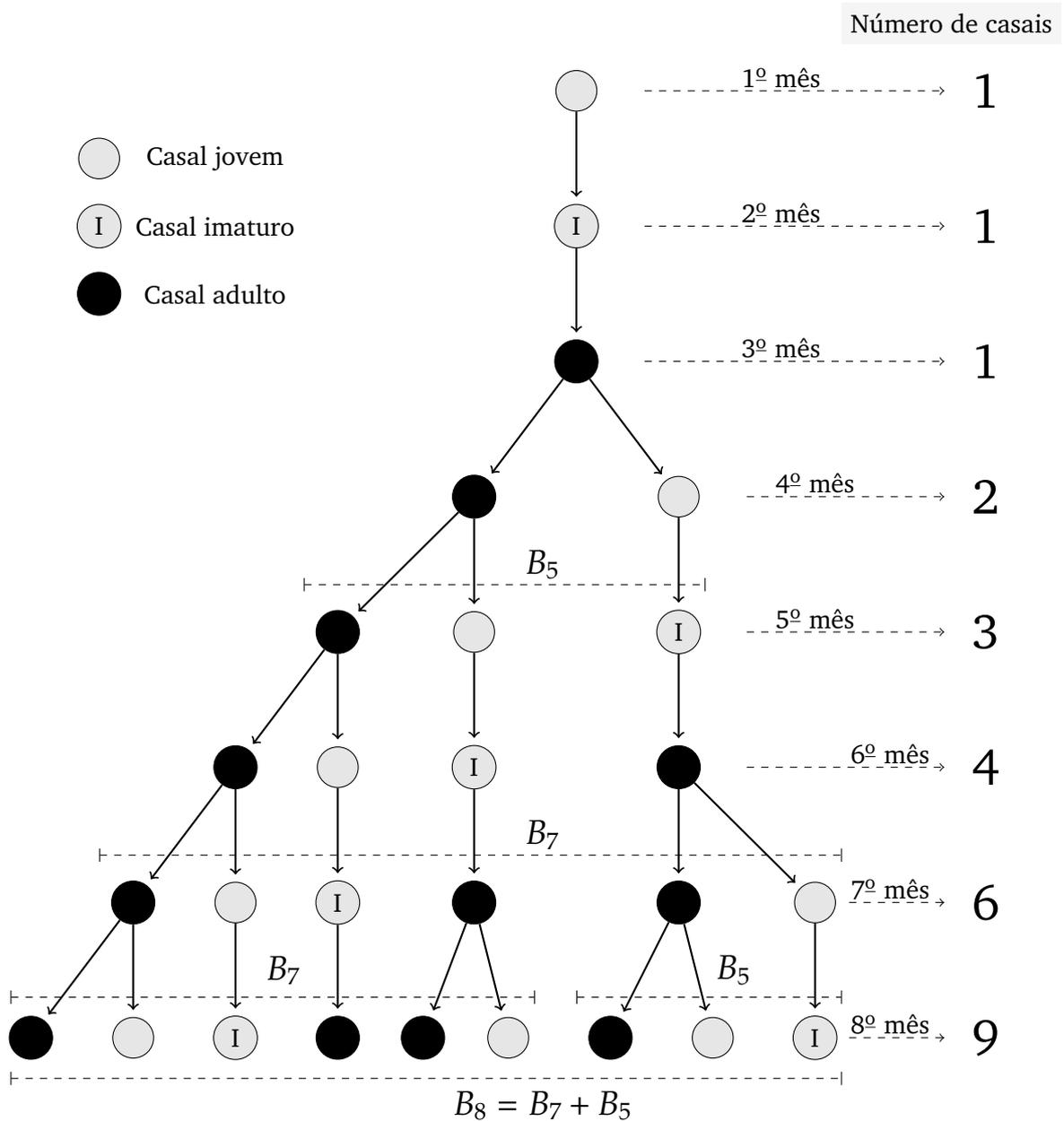


Figura 37: Árvore genealógica.

Chamaremos de B_n o número de pares de gados ao final do n -ésimo mês. A Figura 27 mostra a árvore genealógica dos casais durante os oito primeiros meses, onde temos a sequência 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, ... Repare que no 8^o mês os itens à esquerda são uma repetição da linha imediatamente acima e os demais à direita correspondem aos da linha do mês anterior ao retrasado, ou seja, $B_8 = B_7 + B_5$. Como o número de casais jovens num determinado mês é igual ao total de casais referentes a três meses anteriores (tempo

necessário para que todos tenham se tornado férteis e gerem casais novos) e o número de casais imaturos e adultos juntos correspondem ao total de casais do mês anterior, teremos, de modo geral, no n -ésimo mês, a quantidade de casais de gado dada por

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-3} \quad (4.16)$$

com $n > 3$ e $B_1 = 1$, $B_2 = 1$ e $B_3 = 1$.

No livro [6] é citado que a razão entre um termo da sequência (4.16) e o seu antecessor tem limite que aproxima-se do número chamado *Super Número de Ouro* e é representado pela grega *psi*, ψ , com valor decimal dado por

$$\psi = 1,46557123187676802665\dots$$

É importante ressaltar que não encontramos outras fontes que utilizam tal denominação para o número e , mesmo se tivéssemos conseguido, assim como devemos questionar para a Φ o significado que o nome pode dar ao número, com ψ não é diferente. Afinal, existem outras sequências que a razão entre um termo com o seu antecessor convergem para um número irracional e nem por isso merecem receber um nome especial.

4.8 PROBLEMAS DE CONTAGEM

Para contemplar análise combinatória, apresentaremos três problemas — o primeiro baseado em [10] e os dois seguintes no livro [13].

4.8.1 Colorir

Considere uma faixa com dez quadrados alinhados conforme a Figura 38.

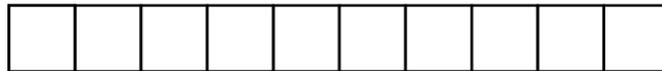


Figura 38: Faixa a ser colorida.

Se usarmos duas cores para colorir os quadrados, por exemplo, verde e amarelo, quantas faixas diferentes podem ser feitas?²

Para cada quadrado haverá duas opções de cores. Logo, há $2^{10} = 1024$ modos diferentes de pintar a faixa.

No entanto, se restringirmos o modo como a faixa pode ser colorida, essa quantidade será alterada. Se, por exemplo, dois quadrados adjacentes não podem ser ambos da cor amarela, de quantos modos diferentes a faixa poderá ser pintada?

Para uma solução com tal restrição, convém iniciarmos a análise com uma faixa com um número menor de quadrados e aumentarmos de um em um para observar como ocorre o crescimento na quantidade de possibilidades. Então, para uma faixa com:

- um quadrado, temos duas maneiras diferentes de colorir, verde ou amarelo:

$$\boxed{V} \quad \text{ou} \quad \boxed{A}$$

- dois quadrados, temos três modos diferentes de colorir:

$$\boxed{V|V} \quad \text{ou} \quad \boxed{V|A} \quad \text{ou} \quad \boxed{A|V}$$

- três quadrados, temos cinco modos diferentes de colorir:

$$\boxed{V|V|V} \quad \text{ou} \quad \boxed{V|V|A} \quad \text{ou} \quad \boxed{V|A|V} \quad \text{ou} \\ \boxed{A|V|V} \quad \text{ou} \quad \boxed{A|V|A}$$

- quatro quadrados, temos oito modos diferentes:

$$\boxed{V|V|V|V} \quad \text{ou} \quad \boxed{V|V|V|A} \quad \text{ou} \quad \boxed{V|V|A|V} \\ \boxed{V|A|V|V} \quad \text{ou} \quad \boxed{V|A|V|A} \quad \text{ou} \quad \boxed{A|V|V|V} \\ \boxed{A|V|V|A} \quad \text{ou} \quad \boxed{A|V|A|V}$$

² Suponha não ser possível rotacionar a faixa.

É possível notar um padrão dependente das situações anteriores ocorrendo sempre que se acrescenta um quadrado na faixa. Por exemplo, para uma faixa com quatro quadrados, se pintarmos o primeiro de verde, teremos como possibilidades para o segundo quadrado as cores verde e amarela, ou seja, a mesma situação analisada para a faixa com três quadrados, logo cinco modos diferentes, mas se o primeiro quadrado for pintado de amarelo, o segundo só poderá receber a cor verde e conseqüentemente o terceiro pode ter as cores verde ou amarela, correspondendo assim à situação da faixa com dois quadrados, totalizando assim oito ($5 + 3 = 8$) faixas possíveis.

Continuando, para a faixa com cinco quadrados, se o primeiro for colorido de verde as possibilidades para os próximos quadrados corresponderão ao caso da faixa de quatro quadrados e, se o primeiro for amarelo, o segundo deverá ser verde, fazendo os três quadrados restantes terem as possibilidades da faixa de três quadrados, ou seja, são $8 + 5 = 13$ modos diferentes. Nota-se uma seqüência recursiva com termos iniciais 2 e 3 e característica semelhante à Sequência de Fibonacci (2.1), já que para se obter um termo deve-se somar os dois anteriores, sendo portanto 144 faixas possíveis a solução para o problema dado com a restrição.

4.8.2 Refração de luz

Imagine uma placa dupla de vidro com propriedades de refração diferentes. Deseja-se analisar a quantidade possível de caminhos percorridos por um raio de luz antes de emergir do vidro em função do número de reflexões, a fim de viabilizar o preenchimento da Tabela 1.

Tabela 1: Possibilidades de reflexões.

Quantidade de reflexão	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n
Número de caminhos possíveis													

Vamos considerar um raio de luz, com uma certa inclinação, da esquerda para direita que, ao adentrar a primeira placa de vidro e chegar na emenda com a segunda, terá a camada onde poderá haver a refração que denominaremos *I*, mas se atravessar diretamente e ser refletido só à direita da segunda placa, chamaremos de *II*. Para as situações no sentido oposto, teremos, respectivamente, *III* e *IV* conforme podemos ver na Figura 39.

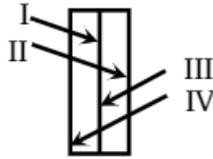


Figura 39: Possíveis camadas de refração.

Para o primeiro caso, o raio de luz deve atravessar diretamente os vidros sem ser refletido o que resulta em um único caminho possível. Já numa situação onde ocorre uma reflexão, o raio de luz pode ser refletido na primeira camada *I* ou na segunda *II*, sendo dois caminhos possíveis portanto. Com duas reflexões, o raio poderá refletir de três modos distintos: *I* e *IV*; *II* e *IV*; *II* e *III*. Com três, as cinco possibilidades serão: *I*, *IV* e *II*; *I*, *IV* e *I*; *II*, *IV* e *II*; *II*, *III* e *II*; *II*, *IV* e *I* (ver Figura 40).

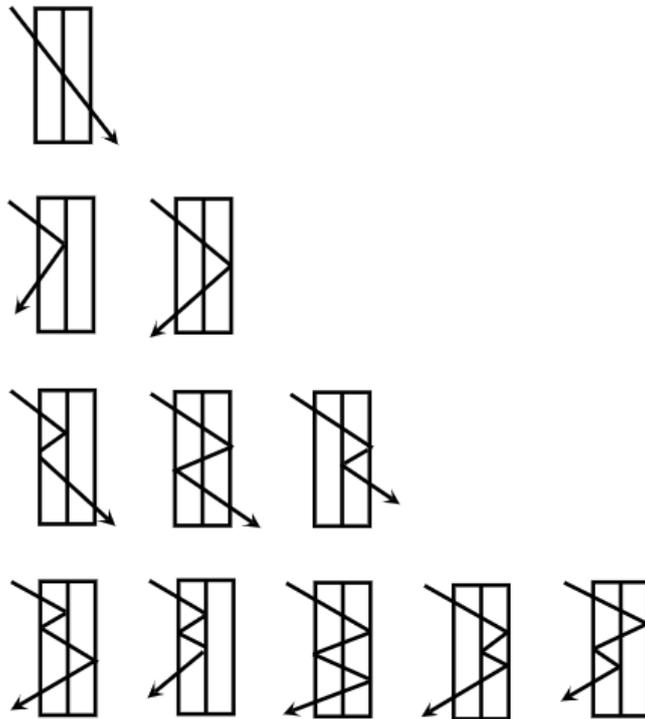


Figura 40: Possibilidades de reflexões.

Analisando como se dão as possibilidades, nota-se a Sequência de Fibonacci (2.1) iniciando com o seu segundo termo como sendo solução para o problema proposto.

De fato, seja R_n o número de possibilidades quando há n reflexões. Temos que $R_0 = 1$ e $R_1 = 2$. Suponha que, quando há n reflexões, o raio de luz saia à esquerda.

Isso significa que a última reflexão ocorreu na placa do meio ou na placa da direita. Para ter ocorrido na placa da direita, ela deve ser uma extensão de alguma das R_{n-1} possibilidades quando há $n - 1$ reflexões. Para ter ocorrido na placa do meio, ela deve ser uma extensão de alguma das R_{n-2} possibilidades quando há $n - 2$ reflexões. Portanto, $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$.

Como sugestão, para o caso com n reflexões, é importante o aluno ter investigado as situações iniciais para avaliar como se dá a recorrência, mas, em seguida, pode-se apresentar a Fórmula de Binet (2.5) para assim mostrar como através da Razão Áurea pode-se obter o número de possibilidades sem depender dos termos anteriores, sendo neste caso necessário ajustar os expoentes devido termos alterado os termos iniciais, então

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.8.3 Subir uma escada

Vamos analisar de quantos modos diferentes, C_n , uma pessoa pode subir uma escada com n degraus considerando o número máximo de degraus que ela consegue subir por vez como sendo dois.

Caso haja:

- apenas um degrau ($n = 1$), existirá uma única forma de subir, ou seja, $C_1 = 1$;
- dois degraus ($n = 2$), pode-se subir um de cada vez ou os dois diretamente, portanto, duas maneiras distintas, $C_2 = 2$;
- três degraus ($n = 3$), ou sobe-se um de cada vez, ou salta-se dois e em seguida um ou o contrário, primeiro um e depois dois de uma vez, ou seja, $1 + 1 + 1$, ou $2 + 1$, ou $1 + 2$, $C_3 = 3$;
- quatro degraus ($n = 4$), teremos como possibilidades $1 + 1 + 1 + 1$, ou $1 + 1 + 2$, ou $1 + 2 + 1$, ou $2 + 1 + 1$, ou $2 + 2$, $C_4 = 5$;
- cinco degraus ($n = 5$), teremos como possibilidades $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, ou $1 + 1 + 1 + 2$, ou $1 + 1 + 2 + 1$, ou $1 + 2 + 1 + 1$, ou $2 + 1 + 1 + 1$, ou $1 + 2 + 2$, ou $2 + 1 + 2$, ou $2 + 2 + 1$, $C_5 = 8$.

A continuação dessa verificação de possibilidades remete à Sequência de Fibonacci (2.1), sendo $C_n = F_{n+1}$, com termos iniciais $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$. O n -ésimo termo pode ser obtido com a Fórmula de Binet (2.5) feito o ajuste necessário no expoente, sendo a solução do problema dada, portanto, por

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

para todo $n \geq 1$.

Para facilitar o cálculo, mas gerando reflexão sobre o procedimento, é benéfico usar a calculadora científica de maneira semelhante aos Exemplos 2.1 e 2.2 dados no Capítulo 2.

4.9 DOBRADURAS

Um excelente recurso para o ensino de Geometria, pelo seu caráter lúdico e propício a investigações, é o uso de dobraduras. O professor, em sua função de mediador, deve oferecer oportunidades para que os alunos não apenas repitam procedimentos seguindo instruções, mas possibilitar situações-problema que gerem experimentações, reflexões e discussões com o intuito de introduzir e/ou aprofundar conceitos que possam ser explorados em construções geométricas com suas justificativas.

Para favorecer tal cenário, apresentaremos duas alternativas de trabalho com dobraduras tendo como referência o material [5] destinado aos alunos bolsistas da OBMEP, principalmente, dos Níveis I (alunos dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental) e II (alunos dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental).

4.9.1 Razão Áurea

O propósito desta atividade é encontrar o ponto P sobre o lado AB de modo que P divida o segmento AB em Extrema e Média Razão.

Considere uma folha de papel retangular $ABCD$. Vamos extrair da folha um quadrado $ABFB'$ realizando uma dobra de modo a sobrepor o segmento AB no lado AD , obtendo os pontos B' e F , respectivamente, sobre os segmentos iniciais AD e BC conforme pode ser visto na Figura 41.

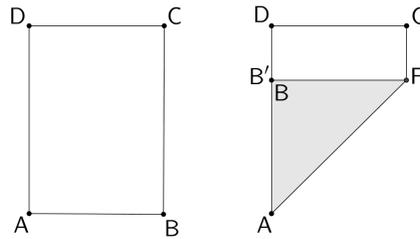


Figura 41: Dobradura para obter o quadrado $ABFB'$.

O retângulo $B'FCD$ pode ser desprezado e determinaremos o ponto P realizando algumas dobras com o quadrado $ABFB'$, conforme os passos a seguir:

PASSO 1: Dobre a folha ao meio de modo a determinar os pontos médios N e M , respectivamente, dos lados AB' e BF .

PASSO 2: Desdobre a folha.

PASSO 3: Movimentando o vértice B , dobre a folha para marcar nela o segmento AM .

PASSO 4: Desdobre a folha.

PASSO 5: Dobre a folha de modo a sobrepor o segmento BM a AM , marcando o ponto B'' no local onde o vértice B se sobrepôs.

PASSO 6: Desdobre a folha.

PASSO 7: Dobre a folha de modo a sobrepor o segmento AB a AM , sendo que o ponto B'' irá determinar o ponto P procurado.

PASSO 8 Ao desdobrar a folha terá o ponto P que divide o segmento AB em Extrema e Média Razão.

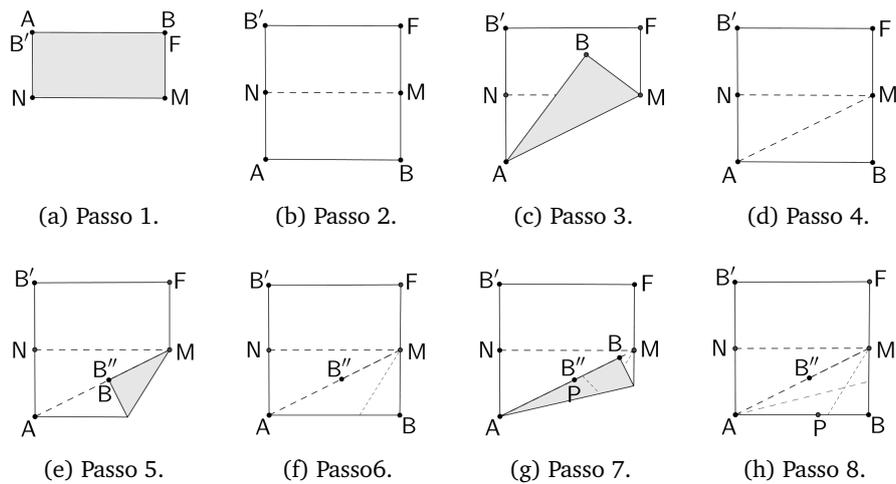


Figura 42: Etapas das dobraduras até obter o ponto P.

Para justificar a construção note que

$$\overline{B''M} = \overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2},$$

uma vez que $B''M$ foi obtido com BM e M é o ponto médio do lado BF do quadrado $ABFB'$.

Usando o teorema de “Pitágoras”, temos

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \overline{BM}^2 + \overline{AB}^2 \\ &= \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \overline{AB}^2 \\ &= \frac{5}{4} \cdot \overline{AB}^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \overline{AB''} &= \overline{AM} - \overline{B''M} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB} - \frac{\overline{AB}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB} \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{AB''}$.

Como AP foi obtido com a mesma medida de AB'' , temos

$$\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{AP}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{PB} &= \overline{AB} - \overline{AP} \\ &= \overline{AB} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overline{AB}.\end{aligned}$$

Podemos concluir então que o ponto P dividiu o segmento AB em Extrema e Média Razão, pois

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

4.9.2 *Pentágono regular*

Usaremos uma folha de papel retangular $ABCD$ para construir um pentágono regular $RUVTS$.

Na subseção anterior vimos como obter o quadrado $ABFB'$ dada uma folha retangular $ABCD$ e, em seguida, determinar o ponto P que divide o segmento AB em Extrema e Média Razão (ver Figuras 41 e 42). Utilizaremos tal construção para obter $RUVTS$, uma vez que a Razão Áurea possui ligação direta com o pentágono regular, conforme vimos na Subseção 1.4.1. Então, seguiremos os passos a seguir para obter o pentágono regular $RUVTS$ com dobraduras:

PASSO 1: Obter o ponto P que divide o segmento AB em Extrema e Média Razão (em caso de dúvida consultar Subseção 4.9.1).

PASSO 2: Determinar o ponto médio R do segmento PB .

PASSO 3: Desdobrar a folha.

PASSO 4: Sobrepor o segmento BF ao segmento AB' (dobrar a folha ao meio) e, com o auxílio do ponto R , marcar o ponto S , tal que $\overline{AS} = \overline{BR}$.³

PASSO 5: Desdobrar a folha.

PASSO 6: Sendo S o ponto fixo de rotação, girar o segmento RS dobrando a folha até o ponto R pousar sobre o lado AB' , determinando assim o vértice T .

PASSO 7: Desdobrar a folha.

³ Como RS será o lado do pentágono, os próximos passos serão feitos para obter os demais vértices.

PASSO 8: Sobrepor o segmento AB' ao BF (dobrar a folha ao meio) e, assim o ponto T irá determinar o vértice U^4 .

PASSO 9: Desdobrar a folha.

PASSO 10: Dobrar a folha de modo a deixar o segmento RS com o extremo R sobre U e S sobre a mediatriz do lado AB (a folha terá essa mediatriz como marca de dobra devido a etapas anteriores), marcando assim o vértice V^5 .

PASSO 11: Desdobrar a folha.

PASSO 12: Como os vértices foram determinados, basta ligá-los para obter o pentágono regular $RUVTS$

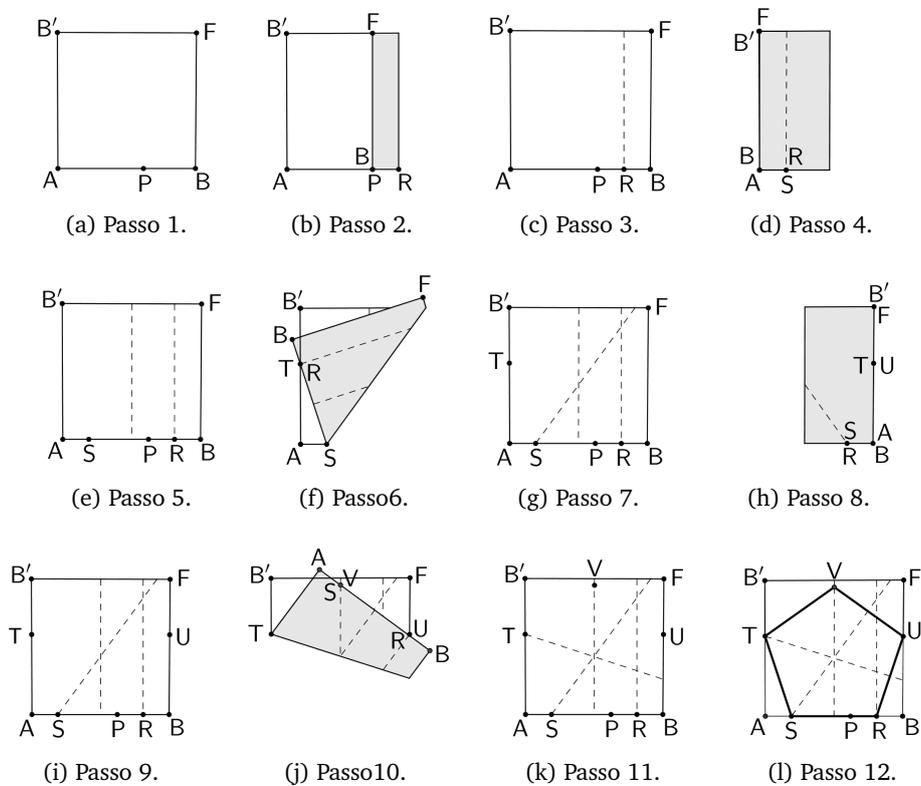


Figura 43: Etapas para obter o pentágono regular $RUVTS$.

Devemos lembrar da relação entre a medida da diagonal d do pentágono regular e do seu lado l , conforme vimos no Capítulo 1 pelas igualdades (1.8) e (1.9), ou seja,

4 Note que seria possível, de modo análogo ao Passo 6, determinar o vértice U , usando o ponto R como sendo fixo na rotação e levar S sobre BF .

5 Também é possível obter V , fazendo uma dobra da diagonal SU , de modo que, com S fixo, U sobreponha a mediatriz do lado AB .

$\frac{d}{l} = \Phi$. Com isso, podemos concluir da igualdade (??) que as diagonais do pentágono regular de lado \overline{RS} têm a mesma medida do segmento AB .

Para justificar a construção, inicialmente vamos reparar que o “Passo 4” da dobradura garante que $\overline{AS} = \overline{BR}$ e, pelo “Passo 2”, R é o ponto médio de PB (logo, $\overline{PR} = \overline{BR}$), então como $\overline{AP} = \overline{AS} + \overline{SP}$ e $\overline{RS} = \overline{PR} + \overline{SP}$, temos $\overline{RS} = \overline{AP}$.

O ponto T foi obtido justapondo R sobre AB' de modo a ter $\overline{ST} = \overline{RS}$ e, em seguida, foi obtido o ponto U . Sendo U o simétrico de T em relação à mediatriz do segmento AB , a diagonal \overline{TU} é congruente a \overline{AB} e pela simetria temos também $\overline{RU} = \overline{ST}$.

Já o último vértice obtido, V , está na mediatriz de AB e foi construído de modo que $\overline{UV} = \overline{RS}$, e, portanto, também igual a \overline{VT} .

É interessante notar que ao realizar a dobra obtendo a mediatriz do lado AB , além da simetria verificada entre os vértices T com U e S com R , temos $\widehat{STV} = \widehat{RUV}$ e $\widehat{RST} = \widehat{SRU}$. De modo semelhante, é possível com a mediatriz do lado UV , verificar $\widehat{RUV} = \widehat{UVT}$ e $\widehat{SRU} = \widehat{STV}$.

Temos, então, $RUVTS$ sendo um pentágono regular.

EQUÍVOCOS SOBRE A RAZÃO ÁUREA

O propósito deste capítulo é instigar um olhar um pouco mais cético em relação a informações amplamente divulgadas, seja através de livros, reportagens, sites e até mesmo trabalhos acadêmicos. Infelizmente, informações equivocadas são apresentadas e largamente aceitas por muitos sem verificação, mesmo em casos de tentativas subjetivas de encontrar a Razão Áurea através de manipulações e malabarismos numéricos.

Tomando como referência o livro [13] e os artigos [16] e [22], mostraremos alguns desses equívocos e cuidados que devemos ter ao tratar do assunto. Aproveitaremos para destacar alguns pontos analisados em um dos livros didáticos incluído no Programa Nacional do Livro Didático¹ - PNLD 2017.

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No artigo [22] é apresentada uma atividade (ver Figura 44) com o título, aqui traduzido, “Encontrando o Ouro” na qual se pede para realizar algumas medições com régua e, em seguida, calcular certas razões com os valores obtidos. É importante destacar a orientação na parte inferior esquerda onde são exigidas respostas próximas ao Número de Ouro com três casas decimais, 1,618, e, caso o valor não esteja próximo, pede-se para verificar novamente as medidas e refazer os cálculos, sem dar margem à discussão. Veremos no decorrer deste capítulo os cuidados que devemos ter com propostas aparentemente inofensivas como esta.

¹ “O PNLD, consolidado pelo Decreto nº 7.084 de 27/01/2010, é um programa de Estado que distribui às escolas públicas do Brasil livros didáticos, dicionários e outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita.” Fonte: <http://www.fnnde.gov.br/pnld-2017/>

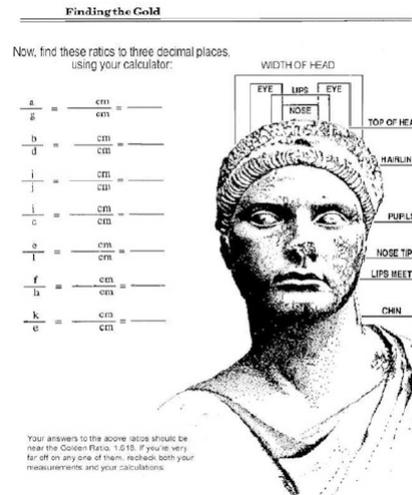


Figura 44: Φ está aqui, melhor acreditar nisso. Fonte: [22]

Ainda no mesmo artigo são mostradas afirmações retiradas do livro *Número de ouro e seção áurea: Considerações e sugestões para a sala de aula* de Biembengut, M. S. (1996), Editora da FURB, destinado a alunos do Ensino Médio, onde, sem justificativa nenhuma, é dito:

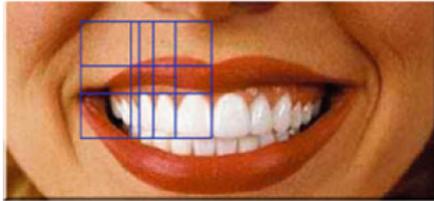
- “Qualquer coisa que se rompe ao meio pode ser consertada, mas se ela quebrar na razão $\frac{1}{\Phi}$ nenhum reparo será possível!”
- “Uma árvore frutífera terá a fruta mais suculenta quando atingir $\frac{1}{\Phi}$ de sua carga total.”
- “O ciclo menstrual de uma mulher dura 28 dias, portanto, $\frac{1}{\Phi}$ de 28 será 17,5 dias, quando a fertilização é garantida.”

A primeira afirmação é finalizada com a pergunta, “você acredita nisso?”. Nenhum argumento ou referência é dado para justificar as afirmações sobre a presença da Razão Áurea, restando ao leitor fé em acreditar ou não, assim como nos exemplos da Figura 45, obtidos entre tantos outros.

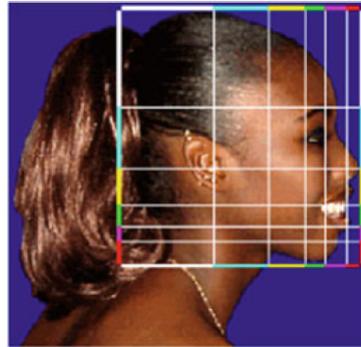
Entre algumas das manobras realizadas para encontrar as medidas por entusiastas da Proporção Divina, devemos ficar atentos a:

- pontos, linhas, retângulos e espirais colocados arbitrariamente;
- pontos e linhas com espessuras arbitrárias;

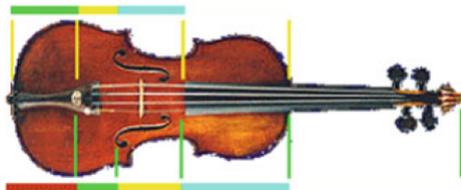
- uso de medidas não oficiais de monumentos, muitas das vezes corroídos pelo tempo;
- medidas de objetos baseadas em fotografias distorcidas pela perspectiva.



(a)



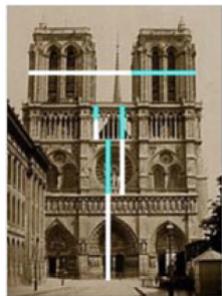
(b)



(c)



(d)



(e) Catedral de Notre-Dame em Paris.



(f) Partenon.

Figura 45: Pontos escolhidos arbitrariamente e ausência de dados oficiais determinam supostamente a Razão Áurea.

O cuidado em observar itens como esses é necessário, pois sem critérios claros ou metodologia padrão, alguém interessado em comprovar a presença da Razão Áurea, mesmo que essa hipótese seja falsa, pode facilmente manipular o resultado com uma

pequena modificação nas medidas. Afinal, suponha uma variação de $\pm 1\%$ nas medidas a e b . Com isso, as seguintes razões podem ser obtidas:

$$\frac{0,99a}{1,01b} \cong 0,98\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{1,01a}{0,99b} \cong 1,02\frac{a}{b}$$

ou seja, alterar “convenientemente” $\pm 1\%$ os valores iniciais dos comprimentos afeta a razão deles em $\pm 2\%$.

Como não podemos ignorar o fato de que medições de objetos reais são aproximações, devemos criar algumas diretrizes. Portanto, considerando medições feitas com régua sem um erro grande dentro de $\pm 1\%$, teremos $\pm 2\%$ como tolerância para a razão a ser comparada com o valor de Φ . Expandindo um pouco mais essa margem de erro, vamos considerar como *intervalo de aceitação*, o intervalo fechado $[1,58; 1,66]$. Caso o valor de uma proporção não esteja dentro do intervalo de aceitação, não deve ser considerada razoável a alegação da presença da Razão Áurea.

Se o valor da proporção estiver dentro do intervalo de aceitação significará tão somente que um requisito foi cumprido e que vale a pena investigar mais os motivos que possam levar a considerar Φ especialmente presente.

5.2 CONSTRUÇÕES

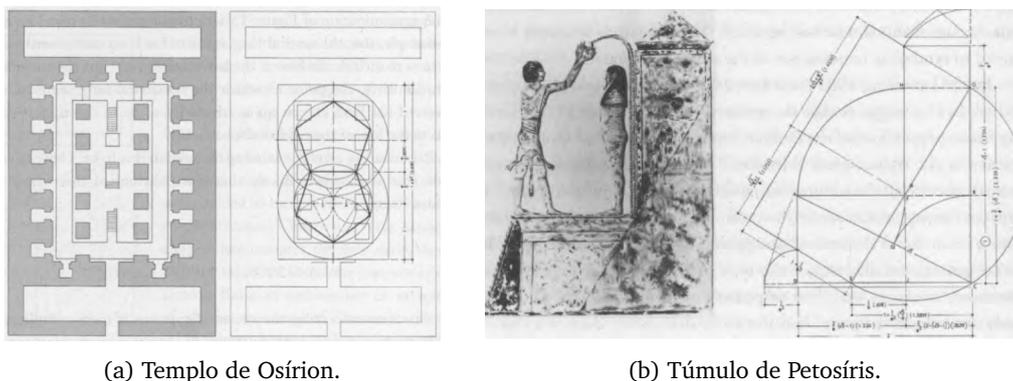
Diversas fontes alegam a presença da Razão Áurea em monumentos e construções em geral. Devemos lembrar que com um simples quadrado e uma circunferência sobre o ponto médio de seu lado, como explicado para obter a Figura 7 (página 17), pode-se fazer com que a Razão Áurea apareça sem que necessariamente tenha sido projetada conscientemente pelo autor de uma obra.

5.2.1 Antigo Egito

Conforme vimos no Capítulo 1, a data da descoberta dos números irracionais não é conhecida, assim como é questionável a forma como ocorreu, apesar do século V a.E.C. ser considerado por alguns pesquisadores como o momento inicial. Apesar disso, algumas pessoas defendem haver construções com uso da Razão Áurea anteriores a isso, um grande exemplo é a Grande Pirâmide de Quéops no Egito, construída antes de 2500 a.E.C.

Assim como no livro [13], iniciaremos expondo dois casos repletos de artifícios. O templo de Osíron, apontado como memorial do rei Seti I — responsável pelo governo do Egito na 19^a dinastia, aproximadamente de 1300 a 1290 a.E.C. — e o túmulo de Petosírís, construído por volta de 300 a.E.C.. Ou seja, apenas no segundo caso pode-se dizer que a Razão áurea já era conhecida (pelos gregos) e cogitar a construção consciente com base nela.

No livro *Geometria sagrada: filosofia e prática*, de 1982, Robert Lawlor, seu autor, procura a todo custo relacionar tais construções com a Proporção Áurea, alegando ser uma ‘ideia-forma’ divina e existente *a priori* e eternamente antes de qualquer progressão que evolua no tempo e espaço. Para justificar, apresenta uma série de análises geométricas com excesso de linhas em pontos arbitrários; pentágonos imaginários desenhados sobre uma planta onde o formato retangular se sobressai, conforme pode ser visto na parte (a) da Figura 46, e, similarmente na parte (b), linhas com extremos nada óbvios. Além disso, a análise feita do túmulo por Lawlor se deu num baixo-relevo pintado no muro da capela do Petosírís e obteve razões um tanto complexas para serem plausíveis, como por exemplo $\frac{2\sqrt{1+\Phi^2}}{\Phi^2}$.



(a) Templo de Osíron.

(b) Túmulo de Petosírís.

Figura 46: Análise forçada sobre a presença da Razão Áurea. Fonte: [13]

É necessário destacar que, baseado apenas em algumas medições, sempre haverá possibilidade de obter uma razão dentro do intervalo de aceitação, mas na falta de documentação para sustentar a ideia, teríamos que ter dimensões relacionadas com a Razão Áurea extremamente claras no projeto arquitetônico.

Para ilustrar essa busca não sistemática por Φ , também presente quando entusiastas do assunto abordam a Grande Pirâmide — e nesse caso chamado pelo artigo [16] de *Falácia da Pirâmide* — Martin Gardner, também citado em [13], deriva “surpreen-

dentes propriedades numéricas” do Monumento de Washington com base nos dados obtidos a partir do *Almanaque mundial*.

O livro *A grande pirâmide: por que foi construída e quem a construiu?* de John Taylor, publicado em 1859, é tido como responsável por incentivar novos registros em piramidologia defendendo a construção baseada em medidas com propriedades matemáticas com a presença de Φ e, entre outras, do famoso número π . Para ele, o fato dos egípcios não conhecerem naquele momento tais propriedades avançadas comprova uma intervenção divina nas obras, inclusive passa a adotar como unidade de medida o cúbito bíblico (correspondente a pouco mais de 25 polegadas britânicas), supostamente também usada por Noé e o Rei Salomão.

Entre os que se sentiram estimulados pelo livro de Taylor está o astrônomo real da Escócia, Piazzi Smyth, que por volta de 1860 resolve publicar três volumes sobre a Grande Pirâmide. Essa motivação deve ter ganho força pelo seu interesse em recusar a implementação de um novo sistema métrico na Inglaterra, pois para ele era inspirado numa revolução selvagem e ateísta (referindo-se à Revolução Francesa) enquanto a Grande Pirâmide sinalizava dimensões com indicações divinas através da polegada e deveria, portanto, ser preservada.

Como podemos ver até o momento, prevalecem justificativas baseadas em malabarismos numéricos e invocação divina. Autores como Gardner, John Herschel (1792-1871) e mais recentemente, Midhat J. Gazalé, entre outros, procuraram citar como referência documental o que seria atribuído ao historiador grego Heródoto (viveu por volta de 485 a 425 a.E.C.), onde se afirma que a Pirâmide foi construída intencionalmente para ter o quadrado da medida de sua altura igual à área da sua face lateral. Se tais alegações estiverem corretas, podem indicar a intencionalidade através de um documento histórico, e não simplesmente por manipulação numérica, de obter a Razão Áurea na construção através da razão entre a altura da face triangular e a metade do lado da base. Afinal, vamos considerar, como na Figura 47, a sendo a metade da medida lado da base, $s = \overline{AT}$ a medida da altura da face triangular e $h = \overline{OT}$ a medida da altura da pirâmide. Logo, $\overline{OA} = a$ e, pelo teorema de “Pitágoras”, temos para o triângulo retângulo TOA a seguinte igualdade:

$$s^2 = h^2 + a^2. \quad (5.1)$$

Considerando o quadrado da altura da pirâmide igual à área da face triangular, temos

$$h^2 = \frac{s \cdot 2a}{2} = s \cdot a.$$

Substituindo h^2 em (5.1):

$$s^2 = s \cdot a + a^2.$$

Ao dividir ambos membros por a^2 e substituir $\frac{s}{a}$ por x vamos obter a equação (1.4), pois

$$x^2 = \left(\frac{s}{a}\right)^2 = \frac{s}{a} + 1 = x + 1.$$

Portanto, $\frac{s}{a}$ é igual a Φ .

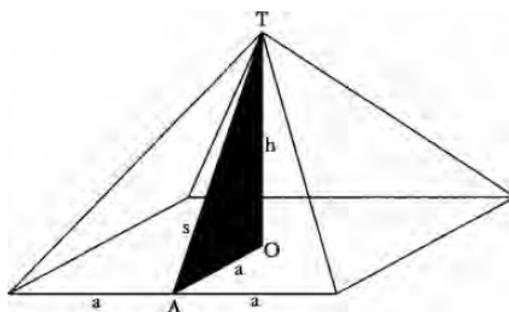


Figura 47: Esboço da pirâmide. Fonte: [13]

No entanto, segundo ao menos quatro pesquisadores, entre eles Herz-Fischler e Markowsky [16], o texto original de Heródoto (Parágrafo 124 do Livro II), chamado *Euterpe*, não condiz com as citações a ele atribuídas, pois na realidade a tradução seria de que a Pirâmide tem base quadrada com 244 m de cada lado e a mesma altura. Ou seja, as medidas de fato usadas no registro histórico estão longe de serem corretas, pois a altura da Grande Pirâmide é de aproximadamente 147 m e os lados da base possuem cerca de 230 m (a base não chega a ser um quadrado perfeito). Herz-Fischer considera o livro de John Taylor como a origem da propagação enganosa que, segundo ele, levou a uma das mais engenhosas prestidigitações da história científica. Além disso,

o documento de Heródoto foi escrito depois de aproximadamente dois milênios da construção da Grande Pirâmide.

O fato é que existem diversas teorias, muitas delas inclusive defendendo a utilização de outro número irracional, o π , como sendo protagonista na construção da Pirâmide, pois a razão entre a circunferência da base e a altura da pirâmide resultaria no valor 2π . Apenas com os valores das dimensões da Pirâmide é praticamente impossível determinar se Φ ou π , ou ambos, foram considerados pelos projetistas. O trecho do artigo do coronel R. S. Beard, publicado na *The Fibonacci Quarterly* de 1968, sugere, ironicamente, para rolar os dados e escolher sua própria teoria.

Apesar do *Papiro de Rhind* (Ahmes) mostrar que os antigos egípcios conheciam um valor aproximado para π , não há nenhum indício que o mesmo vale para Φ . Roger Herz-Fischler, verificou nove teorias sobre o projeto da Grande Pirâmide e concluiu num artigo publicado no periódico *Crux Mathematicorum* em 1978, que provavelmente nem Φ e nem π foram utilizados, nem mesmo de maneira inconsciente, para definir os traços da construção.

5.2.2 *Partenon*

O Partenon, situado na Acrópole de Atenas, é um templo constantemente usado como exemplo para tratar sobre Proporção Áurea, em especial, o Retângulo Áureo. Teve sua construção realizada no período entre 447 e 432 a.E.C., sendo Íctino e Calícrates os arquitetos e Fídias (490-430 a.E.C.), junto de seus assistentes, o responsável pelas esculturas.

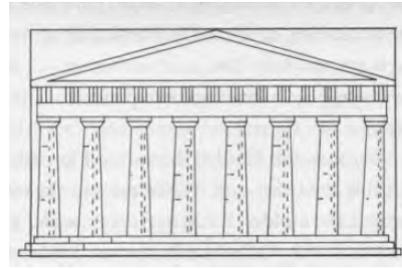
Curiosamente, a letra grega τ (lê-se “tau”), cujo significado é “corte” ou “seção”, era usada frequentemente para se referir à Razão Áurea. Porém, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr passou a utilizar Φ em seu lugar para fazer referência à primeira letra do nome de Fídias, que alguns historiadores da época atribuíam fazer uso reiterado e meticuloso da Proporção de Ouro em suas esculturas, incluindo as presentes no Partenon.

Geralmente os livros utilizam uma imagem semelhante à Figura 48 para indicar um “encaixe perfeito” de um Retângulo de Ouro com a parte frontal do Partenon ou de outras partes da construção, como os espaços entre colunas e esculturas. Normalmente, o único comentário feito é sobre a parte incompleta do topo devido ao ataque veneziano contra os turcos otomanos que utilizavam o espaço como um paiol em 1687 (isso

quando não ignoram completamente o fato como na Figura 45), mas nenhuma observação é feita sobre as partes da construção que ultrapassam os limites do Retângulo Áureo como podemos ver nas extremidades do pedestal.



(a) Frontispício em ruínas.



(b) Frontispício supostamente delimitado por um Retângulo Áureo.

Figura 48: Partenon. Fonte: [13]

Mais falhas podem ser apontadas devido à falta de critérios padronizados e manipulações feitas, o que causa uma variação enorme nos valores de uma fonte para outra. Por exemplo, os valores obtidos no livro *Arquitetura: da pré-história ao pós-modernismo* (1985) de Marvin Trachtenberg e Isabelle Hyman são de 30,9 m para largura e 13,75 m para altura, dando como razão $\frac{30,9}{13,75} \cong 2,25$ (absurdamente longe do valor de Φ). Mesmo considerando a altura dada por Stuart Rossiter no livro *Grécia* (1977) de 18 m, a razão ainda estará fora do intervalo de aceitação, pois $\frac{30,9}{18} \cong 1,72$.

O Partenon foi construído antes dos gregos formalizarem o conhecimento sobre Extrema e Média Razão em *Os Elementos* de Euclides (por volta de 300 a.E.C.), logo também não há registros da época que demonstrem intenção de utilizar a Proporção Áurea em alguma parte da construção, embora exista a possibilidade, segundo Christine Flon em *O atlas mundial de arquitetura* (1984), deles terem se baseado empiricamente e usado algum sistema estrito de razões, mas não podendo generalizar. Porém, como vimos, a teoria da presença da Razão Áurea no Partenon não se sustenta com os valores das dimensões reais.

5.2.3 Edifício da ONU

Entre as construções mais recentes, se destaca nas citações sobre exemplos de projetos arquitetônicos supostamente baseados na Proporção Áurea o Edifício da Secretaria da Organização das Nações Unidas (ONU), situado em Nova Iorque e construído de

1949 a 1952, com colaboração do arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer na parte final do projeto, em fusão com Le Corbusier.

Para verificar as dimensões, Markowsky em seu artigo [16] apresenta as medidas obtidas diretamente ao entrar em contato com a ONU como sendo 505 ft² (153,924 m) de altura, 287 ft (87,4776 m) de largura e 72 ft (21,9456 m) de espessura. Calculando as razões possíveis entre esses valores, o resultado mais próximo de Φ é $\frac{505}{287} \cong 1,76$, porém longe do intervalo de aceitação definido no início deste capítulo.

Usando valores de altura apresentados por outros dois autores, 550 ft (167,64 m) e 544 ft (165,8112 m), Markowsky mostra que a razão encontrada fica ainda mais distante do intervalo de aceitação, respectivamente, $\frac{550}{287} \cong 1,92$ e $\frac{544}{287} \cong 1,90$.

A possível explicação para diferença nos valores da altura foi dada pela Seção de Planejamento Arquitetônico da ONU, que alegou o valor de 505 ft (153,924 m) considerando a medida do topo até o nível de entrada do edifício (e no mesmo nível da rua do lado oeste), mas pode-se considerar os 41 ft (12,4968 m) abaixo desse nível se a medida for tomada pelo lado leste levando em conta o nível do rio.

Independentemente disso, fica claro que o Edifício não foi construído com base na Proporção Áurea, como repetidamente é dito.

5.3 OBRAS DE ARTES

Apesar de ser possível encontrar fontes relacionando obras de artes com a Razão Áurea, muitas das afirmações são baseadas no senso comum, sem nenhuma comprovação científica. Um exemplo do cuidado necessário ao lidar com uma informação de forma isolada pode ser dado pelo episódio tratado no livro [13], em que alguns cubistas, entre eles, Jacques Villon e seus irmãos Marcel e Raymond Duchamp-Villon, Albert Gleizes e Francis Picabia realizaram uma exposição em Paris, em 1912, com o título “Section d’Or”. Uma pessoa leiga, mas curiosa sobre o assunto, terá qual interpretação ao imaginar e/ou observar as obras numa amostra intitulada “A Seção Áurea”? A verdade é que, durante o evento, não houve nenhuma pintura contendo a Razão Áurea e a intenção dos organizadores era apenas ressaltar o interesse geral sobre a arte com ciência e filosofia.

2 A unidade de medida “pé” tem como abreviação ft, sendo 1ft = 30,48cm.

Mesmo que existam obras elaboradas com a presença da Proporção Áurea, o intuito aqui é gerar uma reflexão acerca de alguns dos artistas tidos como adeptos de seu uso, porém baseado pelo livro [13] e artigo [16] veremos que com uma verificação matemática ou do contexto documental tal afirmação não se comprova.

5.3.1 *Leonardo da Vinci*

É amplamente divulgado que o artista renascentista Leonardo da Vinci (1452-1519) utilizava a Razão Áurea em seus trabalhos. Muito dessa fama é devido a ele ter feito as ilustrações do livro *A Proporção Divina* de Luca Pacioli, publicado em 1509. No entanto, biografias feitas por Clark, Vallentin e Zammattio não indicam que ele tenha usado a Proporção Áurea em seus trabalhos e, associado a isto, Roger Fischler garante que mesmo o trabalho de Pacioli defendia o uso do sistema Vitruviano Clássico, que é baseado em proporções simples (números racionais).

Entre as várias obras de Leonardo da Vinci, normalmente os casos mais discutidos em relação às proporções se concentram em quatro delas: “Virgem dos Rochedos” (1483-1486 e 1506), “Uma Cabeça de Ancião” (por volta de 1490), “Mona Lisa” (também conhecida por “A Gioconda”, de 1503) e “São Jerônimo”(1480).

Iniciaremos a análise com a “Virgem dos Rochedos”, que na realidade são duas obras (ver Figura 49). Segundo especialistas, a primeira versão da pintura, atualmente no Musée du Louvre, em Paris, foi feita exclusivamente por Leonardo da Vinci entre 1483 e 1496, tendo sido, portanto, finalizada ao menos dez anos antes do primeiro encontro de da Vinci com Pacioli. Já a segunda versão, concluída por volta de 1506 e, hoje em dia, em posse da National Gallery, em Londres, ainda é motivo de discussão pois sua realização pode ter sido resultado de um esforço conjunto.

Ao verificar a razão entre a altura e a largura das pinturas, se obtém cerca de 1,64 e 1,58, respectivamente, para a primeira e segunda versão. Apesar dos valores estarem dentro do intervalo de aceitação (mas também próximos à razão simples 1,6), ao se verificar o contexto de suas elaborações e os estudos dos especialistas, não há qualquer evidência para corroborar com afirmações da presença especial da Proporção Divina.



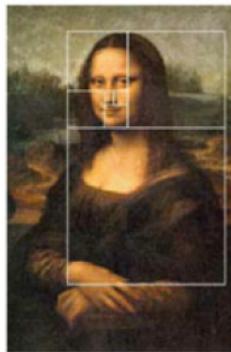
(a) Virgem dos Rochedos
(no Musée du Louvre,
em Paris).



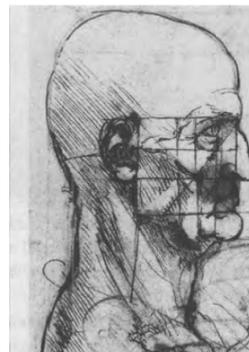
(b) Virgem dos Rochedos
(na National Gallery,
em Londres).

Figura 49: Obras de Leonardo da Vinci supostamente com uso da Razão Áurea. Fonte: [13]

Entre as pinturas mais famosas destaca-se “Mona Lisa”, também conhecida como “A Gioconda”, criada por volta de 1503. Tal obra, apesar de amplamente estudada, teve muitos livros publicados com especulações contraditórias fazendo com que, segundo Livio [13], seja impossível tirar alguma conclusão inequívoca. Levando em conta que os entusiastas defendem a ideia devido à possibilidade de inserir Retângulos de Ouro em torno da “Mona Lisa”, como na Figura 50a, retirada do artigo [22], fica claro, mais uma vez, a oportunidade para malabarismos numéricos devido à falta documentação e regras claras para impossibilitar pontos aleatórios.



(a) Mona Lisa.

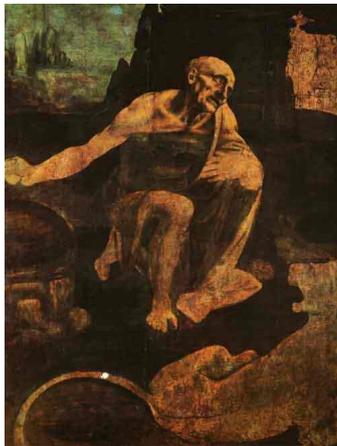


(b) Uma Cabeça de An-
cião.

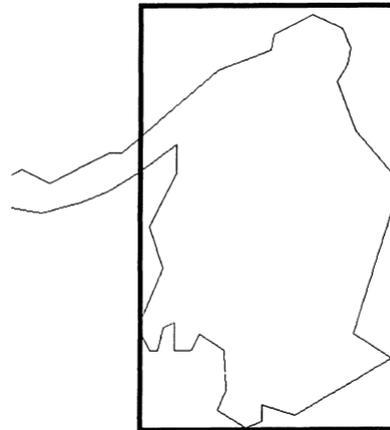
Figura 50: Obras de Leonardo da Vinci supostamente com uso da Razão Áurea. Fonte: [22] e [13]

Em relação ao desenho de “Uma Cabeça de Anciã” feito por volta de 1490 e, atualmente, exposto na Galleria dell’Accademia, em Veneza, é possível notar a preocupação de Leonardo da Vinci com as proporções do rosto devido à grade pertencente à imagem original, conforme pode ser visto na Figura 50b, retirada do livro [13]. No entanto, mesmo nesse caso, não é possível uma conclusão positiva inquestionável, já que as linhas são um tanto irregulares e grosseiras e, apesar do retângulo localizado no meio, à esquerda, ser aproximadamente igual a um Áureo, há vários outros retângulos gerados que não são.

Por último, vamos analisar a pintura inacabada “São Jerônimo” (ver Figura 51a), presente atualmente no Museu do Vaticano e que, assim como a primeira imagem verificada da “Virgem dos Rochedos”, foi feita antes de Leonardo da Vinci ter tido contato com Paccioli, datando de 1483.



(a) São Jerônimo.



(b) Esboço do Retângulo Áureo e linhas do corpo.

Figura 51: Obra de Leonardo da Vinci supostamente com uso da Razão Áurea. Fonte: [13] e [16]

Alguns livros alegam a possibilidade de delimitar o corpo de São Jerônimo com um Retângulo de Ouro, de modo semelhante ao da Figura 51b. Analisando o esboço, é nítido como é ignorado o fato de pontos importantes como a cabeça não tocar o retângulo, boa parte do braço direito atravessar a linha esquerda e esta tocar apenas a dobra do tecido na parte inferior mas não o corpo, além da linha utilizada para o Retângulo Áureo ser grossa.

5.3.2 *Georges Seurat*

O pintor francês Georges Seurat (1859-1891), conhecido por utilizar a técnica do pontilhismo para dar a sensação cintilante, vibratória, da luz, também tem obras consideradas equivocadamente como tendo a Razão Áurea.

A pintura “The Parade of a Circus” (ver Figura 52a), às vezes chamada de “The Side Show”, atualmente no Metropolitan Museum of Art, em Nova Iorque, tem sua composição baseada em ideias que Seurat tirou do livro *La philosophie des Beaux-Arts appliquée à la peinture* (A filosofia das belas-artes aplicada à pintura, 1870) do teórico da arte David Sutter, no qual procura gerar sensações através de linha horizontal e sucessão de objetos verticais.

Defensores da presença de Φ nas obras de Seurat chegam a afirmar que todos os quadros foram elaborados baseados na Seção Áurea. Tal mito foi gerado por dois livros do prelado, escritor e “especialista em artes” romeno Matila Ghyka (1881-1965): *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (Estética das proporções na natureza e nas artes, 1927) e *Le Nombre d’Or: Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale* (O Número Áureo: Ritos e ritmos pitagóricos no desenvolvimento da civilização ocidental, 1931). Tais livros apresentam uma visão quase mística da Matemática, contendo vários exemplos anedóticos imprecisos com a intenção de relacionar a Razão Áurea com as artes, o Partenon e templos egípcios.

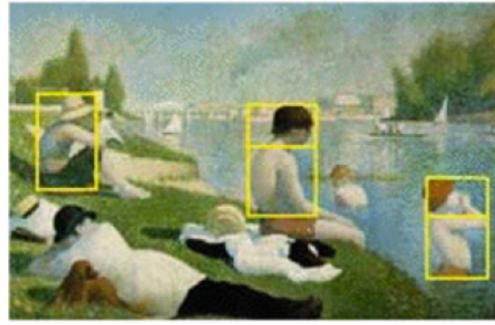
Retornando ao caso específico da obra “A Parada”, apesar da linha horizontal ser dividida próxima da Seção Áurea, a razão simples de oito quintos é a que deve ter sido usada; além do mais, com a vertical não ocorre o mesmo. Reforçando essa análise, até mesmo o pintor e escritor Charles Bouleau, defensor da Proporção Divina, chegou a confessar que sem forçar evidências não seria possível encontrar Φ nessa ou em outras obras.

Em relação à pintura “Um banho em Asnières”, extraída do artigo [22], é possível ver na Figura 52b três supostos Retângulos Áureos conforme os defensores do assunto costumam apresentar. Novamente, a falta de critérios claros, apenas reforça a possibilidade de manipulações numéricas.

Em 1980, Roger Herz-Fischler, realizou uma investigação detalhada nos textos, esboços e pinturas de Georges Seurat, chegando à conclusão da ausência da Razão Áurea.



(a) The Parade of a Circus (ou The Side Show).



(b) Supostos Retângulos Áureos sobre a pintura Um banho em Asnières.

Figura 52: Obras de Georges Seurat supostamente com uso da Razão Áurea. Fonte: [13] e [22]

5.3.3 Mondrian

Piet Mondrian (1872-1944) foi um pintor holandês conhecido principalmente por suas pinturas geométricas, com cores primárias contra um fundo branco, formadas exclusivamente por linhas horizontais e verticais, estilo que ficou conhecido como “neoplasticismo”.

O escritor americano David Bergamini diz que o trabalho de Mondrian “Place de la Concorde” (ver Figura 53a) contém Retângulos Áureos superpostos. Já o francês Charles Bouleau afirma, em *The Painter’s Secret Geometry*, que o pintor procurou fazer uso preciso da Razão Áurea, citando “Broadway Boogie-Woogie” (ver Figura 53b) como exemplo de linhas se intersectando em Proporção de Ouro.

Com uma quantidade enorme de linhas perpendiculares para serem escolhidas em suas pinturas, não é de se estranhar que os entusiastas da Razão Áurea tenham perpetuado afirmações falsas neste caso também. O especialista Yves-Alain Bois, coautor do livro *Mondrian*, utilizado durante uma grande exposição sobre as obras do artista em 1999, afirma que Mondrian nunca utilizou um sistema de proporção em seu trabalho, com exceção das pinturas feitas em 1918-1919 que se dividem em unidades de 8×8 . Bois, inclusive, relata que Mondrian chegou a debochar das análises de suas obras através de computação numérica.

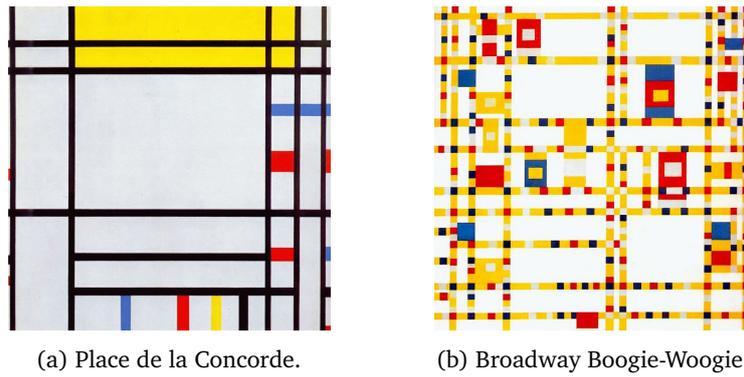


Figura 53: Obras de Piet Mondrian supostamente com uso da Razão Áurea.

5.4 NATUREZA

Diversas fontes alegam a presença da Razão Áurea na natureza, seja na forma como se dá o crescimento de plantas, proporções em corpos de animais ou até mesmo na formação de galáxias e tempestades, entre outros. Markowsky, em seu artigo [16], comenta sobre a obra *The Golden Relationship* de Martha Boles e Rochelle Newman, publicada em 1987, por apresentar animais como falcão, libélula, esquilo voador e peixe sol delimitados por Retângulos Áureos. Assim como em muitas das reivindicações da presença de Φ , partes dos animais são desprezadas durante manipulações, como asas, barbatanas e cauda que possibilitam uma ampla gama de posições e, assim como aconteceu com a pintura analisada São Jerônimo de Leonardo da Vinci (Figura 51), ora ultrapassam os limites do Retângulo de Ouro, ora não tocam um dos lados.

No artigo [22], Spira também apresenta, entre exemplos de imagens com possibilidade de falsificação de dados, algumas relacionadas à natureza, conforme podemos ver na Figura 54.

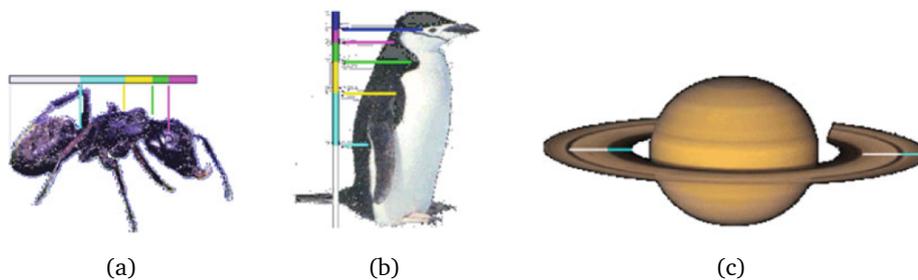


Figura 54: Alegação da presença da Razão Áurea. Fonte: [22]

Embora seja possível encontrar determinadas plantas com uma tendência a apresentarem relação com a Sequência de Fibonacci (2.1), seja na quantidade ou arranjo de pétalas, disposição de galhos ou outra parte, é necessário tomar cuidado com afirmações generalistas. O livro [13] aponta que já na Antiguidade se observou certos padrões existentes nos vegetais, em *Investigação sobre plantas* de Teofrasto (372 a.E.C.-287 a.E.C.) e *História Natural* de Plínio, o Velho (23-79 E.C.) e mais tarde quando Leonardo da Vinci acrescentou um elemento quantitativo, as observações até então iniciais e qualitativas, ao notar folhas em posições espirais correspondendo a $\frac{2}{5}$ por volta. Mas teria sido Johannes Kepler o primeiro a descobrir intuitivamente a relação da filotaxia³ com os números de Fibonacci.

Os estudos mais sérios sobre filotaxia iniciam com Charles Bonnet que, provavelmente junto do matemático Calandrini, indicou algumas plantas com linhas espirais, conhecidas como *parastichies*, como a pinha e o abacaxi. Mas esses estudos passaram a utilizar matemática verdadeiramente apenas no século XX com os botânicos Karl Friedric Schimper, Alexander Braun e Louis Bravais e seu irmão cristalógrafo Auguste Bravais. Os trabalhos desses pesquisadores estabeleciam regra geral para quocientes de filotaxia como, por exemplo, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, além de sinalizar a relação em certas espirais com números de Fibonacci consecutivos, como a Figura 55, que indica três linhas de espirais nos abacaxis cujo número total para cada linha tende a ser geralmente 5, 8 e 13 ou 8, 13 e 21.

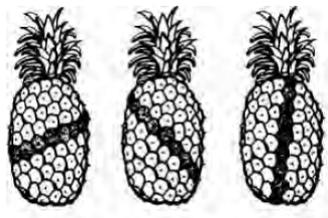


Figura 55: Linhas em espirais no abacaxi. Fonte: [13]

Entre os estudos dos irmãos Bravais, em 1837, está a percepção de que novas folhas numa planta tendem a surgir definidas por um ângulo conhecido como *divergente*, cujo valor geralmente é próximo de $137,5^\circ$, ou seja, se aproxima normalmente do Ângulo Áureo. Uma possível explicação é dada por trabalhos iniciais dos matemáticos Harold S. M. Coxeter e I. Adler e do cristalógrafo N. Rivier, que mostram o Ângulo

³ A *phyllotaxis*, do grego “arranjo de folhas”, palavra incorporada pelo naturalista suíço Charles Boneet (1720-1793), também conhecida como *filotaxia*, é um ramo da botânica que estuda como as folhas estão dispostas numa planta, classificando-a em três formatos básicos: oposta, verticilada e alternada.

Áureo como sendo responsável por uma distribuição mais eficiente, por não permitir o alinhamento ao longo de qualquer direção radial e preencher portanto o espaço de modo a possibilitar a captação igualitária da luz solar e umidade, fato que não ocorrerá caso o ângulo seja um múltiplo racional de 360° resultando em folhas sobrepostas (por exemplo, ao longo de três linhas radiais, no caso de 120°).

Outra explicação se dá por experimentos físicos feitos por L. S. Levitov (em 1991) e por Stephane Douady e Yves Couder (de 1992 até 1996) que, ao serem relacionados à filotaxia, indicam uma causa dinâmica que minimiza a energia gasta por botões de flor que se repelem mutuamente.

É importante ressaltar que o crescimento de uma planta depende de diversos fatores além do espaçamento ideal e, então, mesmo dentro de uma mesma espécie é possível encontrar diferenças significativas, sendo portanto essas relações, como disse o matemático canadense Coxeter, “apenas uma *tendência* fascinantemente predominante”. Além do mais, a possível justificativa dada que o Ângulo Áureo otimizaria a disposição das folhas diferentemente de um “ângulo racional” pode ser questionada com o fato de que próximo do valor do Ângulo Áureo existem infinitos outros “ângulos irracionais”.

Inclusive, como Spira cita em seu artigo [22], para os entusiastas da Razão Áurea, basta ver uma (não necessariamente) espiral logarítmica na natureza, para alegarem a presença de Φ , seja na concha de nautilus, num girassol ou numa galáxia, por exemplo. No entanto, ele comenta como as espirais logarítmicas podem ser indexadas por p e obtidas com qualquer retângulo $\Phi_p \times 1$, dando como exemplos para visualização as espirais logarítmicas em seus retângulos geradores com o valor correspondente de Φ_p logo abaixo, como podemos conferir na Figura 56.

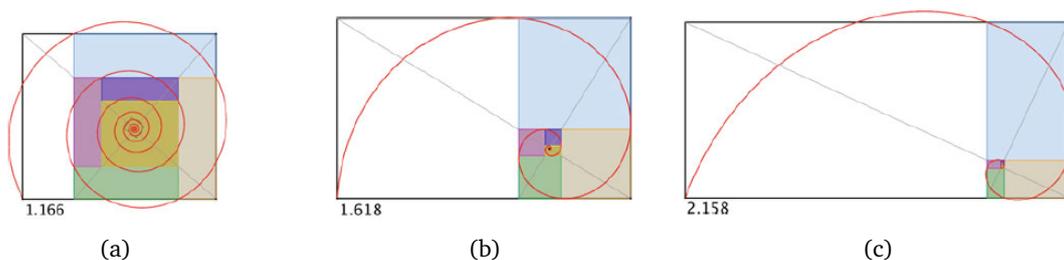


Figura 56: Espirais logarítmicas. Fonte: [22]

Destaque-se, nesse momento, talvez um dos maiores exemplos de erros frequentemente repetidos, afirmar que a concha de nautilus possui suas câmaras internas com crescimento constante dado por Φ e, assim, seria a concha uma Espiral Áurea. Mas ao

se comparar, mesmo que com uma espiral manualmente feita, Spira obteve como taxa de crescimento $\Phi_p = 1,332$ conforme pode ser verificado na Figura 57, ou seja, um valor extremamente longe do Número de Ouro.



Figura 57: Espiral logarítmica sobre uma concha de Nautilus. Fonte: [22]

Segundo o livro [15], esse tipo de curva foi estudada por Jakob Bernoulli (1654-1705) que a chamava de *spira mirabilis* (em latim, espiral maravilhosa). Ele introduziu as coordenadas polares na Geometria Analítica, gerando facilidade para descrever tal curva.

Considerando retângulos de lados a e b , com $a > b$, é possível construir uma sequência de retângulos semelhantes reduzidos por um fator λ^{-1} , onde $\lambda = \frac{a}{b}$, os quais irão convergir para um ponto O e o lugar geométrico que um de seus vértices irá descrever será uma espiral logarítmica de equação

$$r = c\lambda^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

sendo, portanto, a Espiral Áurea apenas uma caso particular (quando $\lambda = \Phi$) entre infinitas espirais logarítmicas possíveis.

5.5 CORPO HUMANO E NAZISMO

Como sugere Spira em [22], a preocupação em questionar informações replicadas ao longo do tempo e reconhecidas como tendo base na Matemática é necessária para combater o mau uso desta ciência como uma linguagem de poder.

Ao associar o conceito de beleza à Razão Áurea, estipula-se um padrão estético questionável e de possíveis consequências perigosas. Embora possam existir algumas

proporções do corpo humano dentro do intervalo de aceitação, muitas das razões requeridas são baseadas no sistema vitruviano (ou seja, em razões simples, racionais). Além disso, há muitos locais utilizados nas medições podem ser facilmente manipulados (o umbigo, por exemplo, que por ter um diâmetro, não se trata de um ponto exato).

Para os entusiastas, ao dividir a altura de uma pessoa pela altura de seu umbigo, quanto mais próximo o resultado estiver do valor de Φ , mais bela ela deverá ser considerada. Para compreender como afirmações como essas podem ser nocivas, Spira menciona que em *Le nombre d'or: clé du monde vivant*, escrito por D. Néroman em 1940, há a defesa da ideologia de que a humanidade está em constante evolução espiritual e que o grau desse desenvolvimento pode ser obtido verificando o quão próxima da Proporção Divina está a altura do umbigo das mulheres de uma “raça”.⁴

São apresentados desenhos à mão livre (ver Figura 58) com uma linha horizontal indicando a posição onde a mulher é dividida na Razão Áurea, possibilitando a comparação visual de mulheres de “raças” distintas se encontra. Vale contextualizar o período no qual a publicação original foi feita, durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945), indicando a defesa de ideais nazistas pelo autor que, para não deixar dúvidas, reforça o preconceito enfatizando que negros e judeus se encontram na parte inferior da escala de evolução.

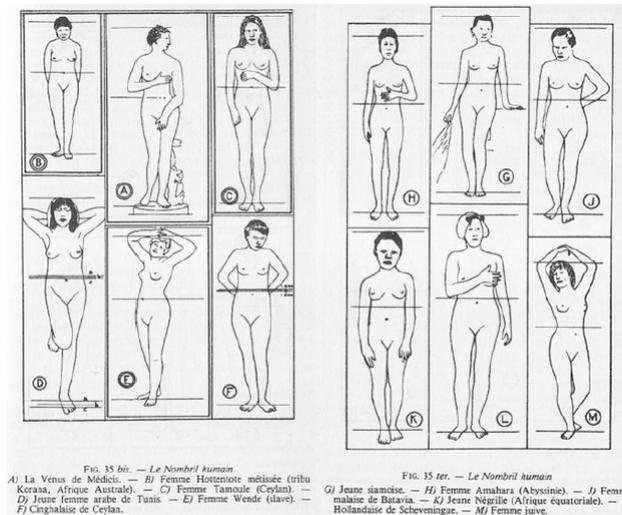


Figura 58: Comparação do “desenvolvimento espiritual”. Fonte: [22]

4 O conceito de raça, na realidade, foi uma invenção social e cultural, afinal existe apenas a espécie humana.

Com tal exemplo, fica claro como pode ser nocivo tipificar as pessoas, utilizando para isso argumentos supostamente baseados na Matemática. No início do século XX, classificavam as pessoas por testes chamados de *Quociente de Inteligência*, o famoso teste de Q.I., tendo como consequência a esterilização forçada daqueles considerados na faixa inferior, ditos idiotas, além do estabelecimento de restrições na imigração nos Estados Unidos da América e posteriormente a morte de pessoas em campos de concentração durante a Segunda Guerra Mundial. Seja usando pontuação atingida num teste de Q.I. ou a proporção do corpo, a ideia é a mesma, a de uma suposta ciência classificar e reivindicar o preconceito e divisões sociais. Parafraseando [22], a Matemática pode ser mais poderosa que espadas.

5.6 LIVROS DO PNLD 2017

Durante o ano de 2016, professores do Ensino Fundamental II⁵ da rede pública do país tiveram acesso a livros do PNLD 2017 em suas escolas para avaliarem e indicarem qual coleção gostariam utilizar durante o triênio 2017-2019.

Dentre as opções, comentaremos alguns pontos da coleção [7]⁶, por ter chamado a atenção positivamente ao procurar abordar a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental II, porém reproduz diversos dos pontos dúbios ou equivocados como sendo irrefutáveis.

No livro do sétimo ano, no capítulo sobre proporcionalidade, é apresentado para leitura o texto *A proporção na arte - Antiguidade e Renascimento* (ver Figura 60) onde logo abaixo a nota destinada ao professor orienta estimular os alunos a lerem ao final da Unidade sobre a Razão Áurea (ver Figura 61) devido ao vínculo existente entre as redações. Porém a divergência entre pesquisadores deixa claro não ser possível validar o uso meticuloso da Proporção Divina por Fídias, inclusive a época em que ele viveu não há comprovação de que os gregos já tivessem conhecimento sobre ela. O mesmo ocorre com Policeto que viveu de 480 a.E.C. a 420 a.E.C., inclusive Markowsky em seu artigo [16] questiona as medições realizadas por Boles e Newman na escultura *Doryphóros* por ter pontos considerados possíveis de manipulações (como exemplo o joelho), além da proporção entre os lados esquerdo e direito não serem a mesma, mas mesmo assim é dada uma razão com precisão improvável no valor de 1,61803. Outro

5 Do 6º ao 9º ano.

6 Optamos em expor as figuras referentes às páginas utilizadas para os comentários em ordem de aparecimento nos livros ao final deste capítulo.

ponto é sobre o sistema vitruviano que, apesar de entusiastas defenderem a presença da Razão Áurea, na realidade era baseado em razões racionais.

Mas ao final da Unidade, na parte sugerida para leitura anteriormente, fica ainda mais claro a linha de abordagem sobre o assunto que ocorre ao longo de praticamente toda coleção (ver Figura 61). Ao tratar de maneira explícita sobre a Razão Áurea, frequentemente busca relacionar o Retângulo de Ouro com obras de artes, construções e natureza, além de uma constante afirmação que os gregos consideravam essa proporção mais esteticamente agradável.

Sobre essa suposta relação com a beleza, Markowsky, em seu artigo [16], indica que muitas das alegações sobre a preferência das pessoas pelo Retângulo de Ouro devem ter como base as experiências de 1860 de Gustava Fechner, onde se pedia para as pessoas escolherem o retângulo mais agradável dentre dez retângulos com proporções variando de 1 (quadrado) para 0,4.

Porém a limitação do teste faz com que o resultado seja questionado e, então é sugerida uma investigação com 48 retângulos, ora distribuídos aleatoriamente, ora organizados em ordem crescente como pode ser visto na Figuras 59a e 59b, respectivamente. A conclusão obtida no artigo [16] mostra não haver indícios que justifique a importância estética da Proporção Áurea.

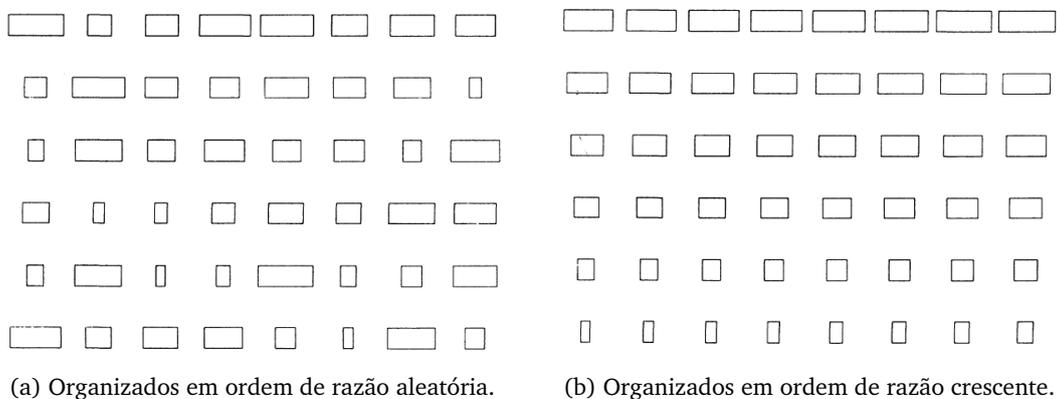


Figura 59: Retângulos com razões que variam de 0,4 a 2,5. Fonte: [16]

Mas nos livros do 7º ao 9º ano da coleção [7] a ideia de uma estética mais agradável em obras de artes e construções dada pela Razão Áurea é defendida frequentemente conforme mostram as Figuras 61, 62, 63, 64, 65, 67 e 68. Inclusive é garantida a presença do Retângulo Áureo nas dimensões do Partenon (ver Figuras 61, 62 e 63)

e no quadro da Mona Lisa (ver Figura 61), fatos vistos respectivamente nas Subseções 5.2.2 e 5.3.1 não serem corretos.

Ainda sobre as Figuras 61 e 62, observe o erro ao fazer arredondamento da razão obtida respectivamente na atividade 2 e ao final do texto, $\frac{30,7}{18,24} = 1,6831140\dots$ teve considerado como valor aproximado 1,6 ao invés de 1,7. Outro detalhe também chama a atenção nas Figuras 61 e 64, o aviso que as imagens não estão em proporção serve de alerta aos interessados em conferirem as razões usando régua restando para esses acreditarem na informação ou procurarem outro meio para verificação (se é que é possível).

O famoso equívoco, comentado na Seção 5.4, de relacionar a concha de Nautilus com a Espiral Áurea obtida com Retângulos de Ouro, muitas vezes com lados de medidas iguais aos termos da Sequência de Fibonacci, também configura entre os pontos no mínimo controversos porém apresentados como incontestáveis na coleção [7] conforme pode ser visualizado na Figura 66 .

Apesar de ser interessante a intenção de abordar a Razão Áurea ao longo dos anos finais, aprofundando e reforçando suas propriedades de um ano para o outro, se faz necessário refletir sobre os cuidados ao tratar o assunto para não reproduzir distorções no conhecimento. Para finalizar com mais uma amostra disso, na Figura 68 é possível ler que Fibonacci teria criado o problema dos coelhos durante sua visita a uma fazenda; seria tal afirmação baseada em algum documento histórico, o que não é provável pelo material pesquisado para esta dissertação, ou uma tentativa apenas de deixar o problema mais atrativo, porém, neste caso, sem dar o devido valor à historiografia?

Leitura

A proporção na arte – Antiguidade e Renascimento

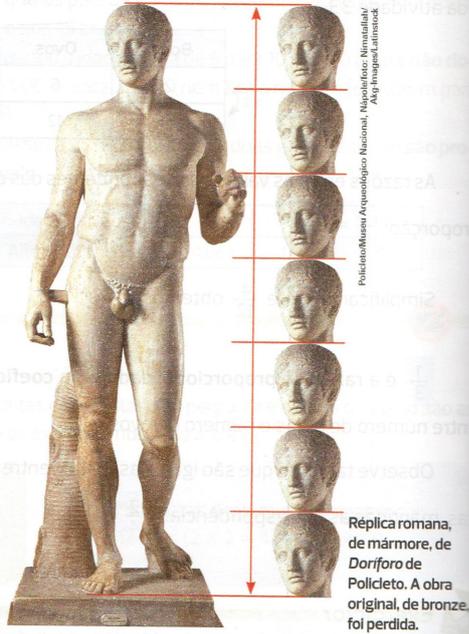
Na Grécia antiga, o período que vai do século V a.C. ao século IV a.C. é conhecido como Período Clássico. Nesse momento histórico, a arte grega se caracteriza principalmente pela busca de equilíbrio, harmonia e beleza. Na escultura clássica, artistas como Fídias (c. 490 a.C.-432 a.C.) e Policleto (480 a.C.-420 a.C.) buscavam as proporções ideais do corpo humano.

Em meados do século V a.C., Policleto escreveu um tratado, o *Cânone* (regra), no qual descreve sua concepção das proporções matemáticas ideais do corpo humano. A escultura *Doriforo* (do grego *Doryphoros*, 'portador de lança') ilustra essas teorias. Para Policleto, um dos princípios da proporção ideal era que a altura do corpo humano deveria corresponder a sete vezes a altura da cabeça.

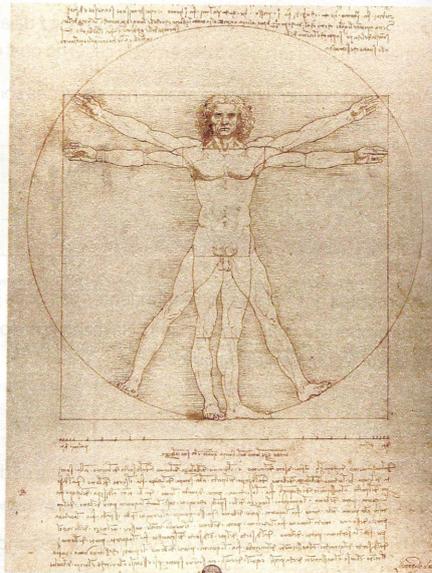
A preocupação em representar as proporções ideais do corpo humano aparece também no Renascimento, período da história da Europa (aproximadamente entre fins do século XIII e meados do século XVII) marcado por transformações que assinalam o final da Idade Média e o início da Idade Moderna e caracterizado por grandes mudanças nas artes, na filosofia e nas ciências.

O Renascimento se destacou por uma retomada do pensamento e da arte da Antiguidade clássica e pela valorização do ser humano como centro do Universo. Artistas como Leonardo da Vinci (1452-1519), Michelangelo Buonarroti (1475-1564) e Rafael Sanzio (1483-1520) criaram obras de grande rigor na proporção das formas, buscando transmitir beleza e harmonia.

O *Homem Vitruviano* (veja a reprodução ao lado) é um desenho de Leonardo da Vinci, realizado por volta de 1490, que representa uma figura masculina, em duas posições sobrepostas de braços e pernas estendidos, desenhada dentro de uma circunferência e de um quadrado. Trata-se de um estudo das proporções do corpo humano, com base no tratado *De Architectura*, do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (c. 90 a.C.-20 a.C.), para quem os edifícios deveriam se basear na simetria e proporção da figura humana. Segundo Vitruvius, o corpo humano, com os braços e pernas estendidos, deveria se ajustar perfeitamente à circunferência e ao quadrado.



Réplica romana, de mármore, de *Doriforo* de Policleto. A obra original, de bronze, foi perdida.



Homem Vitruviano, desenho de Leonardo da Vinci, c. 1490.

Estimule os alunos a ler o texto do final desta Unidade, na seção *Ponto de chegada*, que trata sobre a razão áurea, assunto relacionado a este texto.

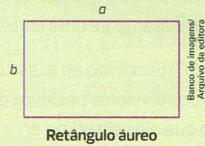
Figura 60: Retângulo de Ouro. Fonte: [7] (sétimo ano)

Ponto de chegada

A Matemática no texto

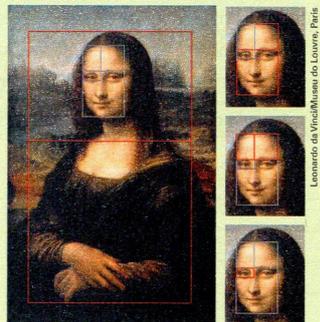
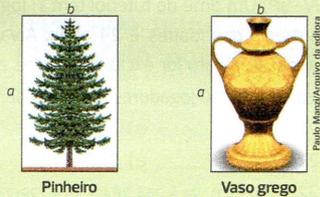
Retângulo áureo ou retângulo de ouro

Se a razão entre a medida do comprimento e a medida da largura de um retângulo é de aproximadamente 1,6, então ele é chamado de **retângulo áureo** ou **retângulo de ouro**.



A razão $\frac{a}{b} = a : b \approx 1,6$, chamada de **razão áurea** ou **razão de ouro**, aparece em diversos elementos da natureza e objetos feitos pela humanidade, como obras de arte e de construção civil.

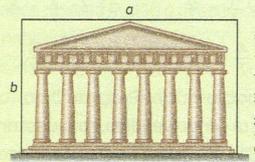
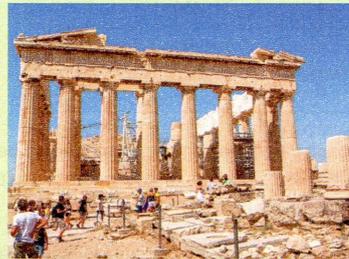
Observe alguns exemplos nas figuras abaixo.



No quadro mais famoso do mundo, *Mona Lisa* (1503-1505), de Leonardo da Vinci, 77 cm x 53 cm, óleo sobre tela, podem ser observados diversos retângulos áureos.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Os antigos gregos diziam que o retângulo de ouro é perfeito, equilibrado e harmonioso a nossos olhos. Por isso, muitas esculturas e obras de arquitetura gregas foram construídas de acordo com a razão áurea. Por exemplo, o Parthenon de Atenas, templo grego em homenagem à deusa Atena, construído no século 5 a.C., pode ter sua fachada inserida em um retângulo de ouro, como representado a seguir.



Trabalhando com o texto

1. Explique com suas palavras a ideia principal do texto.
2. O Parthenon tem 30,70 m de largura e 18,24 m de altura. Confira se essas medidas formam um retângulo de ouro. *Sim* ($30,70 : 18,24 \approx 1,6$).
3. Imagine que você está desenhando a fachada de um prédio cujas medidas formam um retângulo de ouro. Em seu caderno, a altura dessa fachada mede 10 cm. Quanto deve medir a base, sabendo que ela é maior do que a altura? *16 cm* (altura: 10 cm; base: $1,6 \cdot 10 = 16$ cm)

Figura 61: Sobre proporção na arte. Fonte: [7] (sétimo ano)

Este assunto foi abordado no 7º ano desta coleção.

Fi (Φ): o número de ouro dos gregos

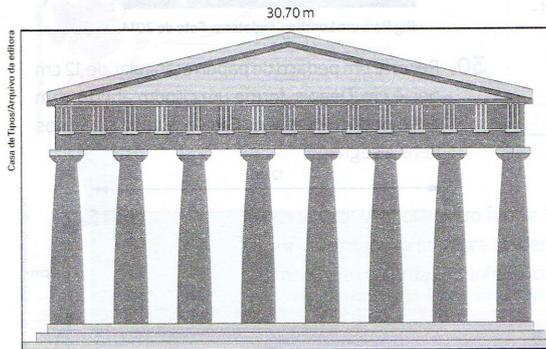
Você já deve ter estudado que a razão aurea (ou razão de ouro) é representada por 1,6. Esse número corresponde a um valor racional aproximado do **número de ouro** dos gregos, um número irracional representado pela letra grega Φ (fi maiúsculo). Seu valor é dado por:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

Essa expressão era muito utilizada por Fídias (490 a.C.–432 a.C.), escultor grego encarregado da construção do Parthenon, templo situado em Atenas e que data de 440 a.C. Em homenagem a esse escultor, utilizamos o Φ (fi) para representar a razão de ouro.

Para os gregos antigos, esse número representava harmonia, equilíbrio e beleza. Ele aparece em diversos lugares, por exemplo, no corpo humano, nas artes, na arquitetura e na natureza.

Em algumas pessoas, ao dividirmos a altura (a) pela distância do umbigo até o chão (b), obtemos aproximadamente 1,6 (número de ouro aproximado). Veja a representação ao lado.



O esquema ao lado representa o Parthenon, com as medidas de sua largura e de sua altura. Verifique que a medida da largura dividida pela medida da altura também vale aproximadamente 1,6 ($30,70 \text{ m} : 18,24 \text{ m} \approx 1,6$).



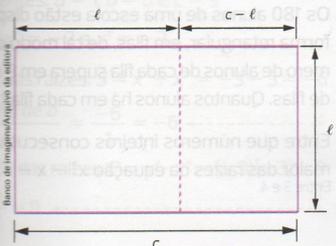
Observe os valores do inverso e do quadrado de Φ . Veja que interessante!

$$\begin{aligned} \Phi &= 1,618034... \\ \Phi^{-1} &= 0,618034... \\ \Phi^2 &= 2,618034... \end{aligned}$$

Figura 62: Retângulo de Ouro e o Partenon. Fonte: [7](oitavo ano)

Proporção áurea e número de ouro

O retângulo áureo, ou de ouro, dos gregos é um retângulo especial em que valem as relações entre o comprimento (c) e a largura (ℓ):

$$\frac{c}{\ell} = \frac{\ell}{c-\ell} \leftarrow \text{proporção áurea}$$


A proporção áurea pode ser observada em muitas situações. O templo grego Partenon, por exemplo, tem suas medidas apoiadas na proporção áurea.



Partenon, na acrópole ateniense (Grécia). Foto de 2014.

Se considerarmos $c = 1$, a proporção será:

$$\frac{1}{\ell} = \frac{\ell}{1-\ell} \rightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0$$

O valor $\frac{1}{\ell}$, inverso da raiz positiva dessa equação, é chamado **número de ouro**.

Em seu caderno: [Veja as resoluções no Manual do Professor.](#)

- a partir da informação dada acima, determine o número de ouro dos gregos. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
- considerando $\sqrt{5} = 2,2$, calcule o valor aproximado do número de ouro. 1,6

Unidade 1 • Números reais e equações 47

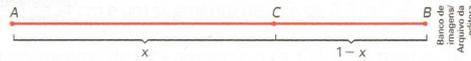
Figura 63: Retângulo de Ouro. Fonte: [7] (nono ano)

A divina proporção: o número de ouro

Você acredita que pode existir um número com propriedades mágicas, que represente beleza, perfeição e harmonia? Que teria sido utilizado ao longo dos séculos por matemáticos, cientistas, artistas e, por incrível que pareça, estaria presente na natureza? Pois esse número existe e você já o conhece dos anos anteriores. Vamos retomá-lo.

Considere um segmento de reta AB cuja medida AB é de 1 unidade de comprimento.

Nele, podemos localizar um ponto C , de tal modo que C divide AB na seguinte proporção: a razão entre o segmento de reta todo e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor. Assim:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}, \text{ ou seja: } \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 = 1-x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

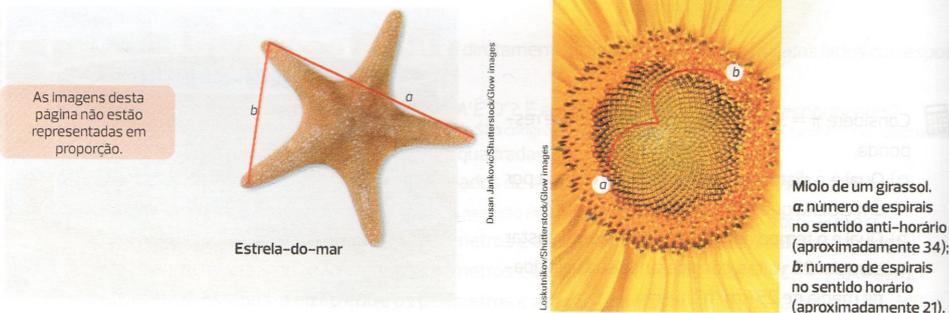
Resolvendo essa equação, o valor positivo de x é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Consideremos a

$$\text{razão } \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Este número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor aproximado é 1,618034, é conhecido por **número de ouro** ou **razão de ouro**, ou ainda, **razão áurea**.

Para os gregos, o número de ouro representava harmonia, equilíbrio e beleza. Por esse motivo, muitas construções gregas tinham como base esse número. Mas foi no século XIII que o matemático Leonardo de Pisa (1170-1240), cujo apelido era Fibonacci, constatou que o número de ouro estava presente também na natureza. No Renascimento, a revalorização dos conceitos estéticos gregos levou grandes artistas, como Leonardo da Vinci, a utilizar o número de ouro em suas obras.

Veja os exemplos a seguir. Em ambos há a razão $\frac{a}{b} \approx 1,6$



As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Estrela-do-mar

Miolo de um girassol.
a: número de espirais no sentido anti-horário (aproximadamente 34);
b: número de espirais no sentido horário (aproximadamente 21).

Figura 64: Atividades envolvendo a Sequência de Fibonacci e o Retângulo de Ouro. Fonte: [7] (nono ano)

Exercícios

17. Retângulo de ouro ou retângulo áureo
Atividade em dupla
 Examinem estes retângulos:

Use calculadora e, em seu caderno, façam o que se pede.

a) Qual é a razão aproximada entre as medidas do comprimento e da largura de cada retângulo? (Considerem apenas uma casa decimal.)
 $1,6 (5 : 3 ; 8 : 5 ; 13 : 8)$

b) Escrevam no caderno as dimensões dos próximos três retângulos dessa sequência.
 21 por 13; 34 por 21 e 55 por 34

d) 89, 144, 233 (A partir do terceiro número, cada termo é a soma dos dois anteriores.)

c) Qual é a razão aproximada entre a medida do comprimento e a medida da largura de cada um dos três novos retângulos? 1,6

d) Descubram como começou a sequência que vem a seguir e completem-na no seu caderno com mais três números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ■, ■, ■, ...

e) Essa sequência é conhecida como sequência de Fibonacci (leia mais a respeito disso no texto "A sequência de Fibonacci e a criação de coelhos", da seção *Leitura*, página 110). Comparem os números da sequência de Fibonacci a partir do quarto termo com as dimensões dos seis retângulos anteriores. O que vocês descobriram? Os números são os mesmos.

f) Usem a calculadora e dividam cada termo da sequência de Fibonacci pelo seu precedente. Por exemplo, $233 : 144$; $144 : 89$; etc. O que vocês descobriram?
 O resultado é sempre aproximadamente 1,6.

Todo retângulo que tem a razão entre a medida de seu comprimento e a medida de sua largura igual ao número de ouro $\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,6$ é chamado de **retângulo de ouro**. O número 1,6 é uma aproximação racional do número irracional $1,61803399\dots$, valor de $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Por isso, consideramos retângulo de ouro todo retângulo no qual essa razão é aproximadamente 1,6.

$$\frac{c}{l} = c : l = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,6$$

Segundo os gregos, esse retângulo é o mais agradável aos olhos humanos, é o mais perfeito, o mais equilibrado, o mais harmonioso.

Unidade 2 • Funções e Geometria 107

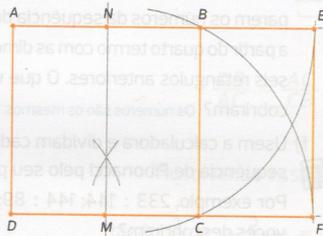
Figura 65: Atividades envolvendo a Sequência de Fibonacci e o Retângulo de Ouro. Fonte: [7] (nono ano)

18. Construção de um retângulo de ouro

A construção de um retângulo de ouro é bem simples. Veja como devemos proceder. Iniciamos com um quadrado $ABCD$.

Determinamos os pontos médios M de \overline{DC} e N de \overline{AB} .

Com o compasso, traçamos dois arcos: um com centro em M e raio \overline{MB} e outro com centro em N e raio \overline{NC} . Prolongamos os lados \overline{AB} e \overline{DC} até intersectarem esses arcos em E e F . Traçamos o segmento de reta \overline{EF} .



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Pronto!
Está construído um retângulo áureo $AEFB$.

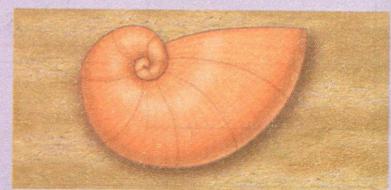
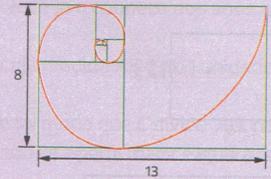


Maurio Souza/Arquivo da editora

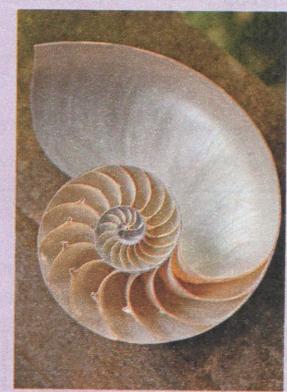
- a) Confira se a razão entre as medidas do comprimento e da largura é de aproximadamente 1,6. Sim; $\frac{5,3 \text{ cm}}{3,3 \text{ cm}} \approx 1,6$.
- b) Você também pode construir um retângulo de ouro. Siga os passos acima e desenhe em seu caderno um retângulo de ouro com largura de 2 cm. Basta começar construindo um quadrado com 2 cm de lado.

Você sabia?

É possível desenhar vários retângulos de ouro um dentro do outro e, com eles, traçar uma **espiral**, modelo matemático da concha do molusco náutilo.



Representação artística da concha do molusco náutilo.



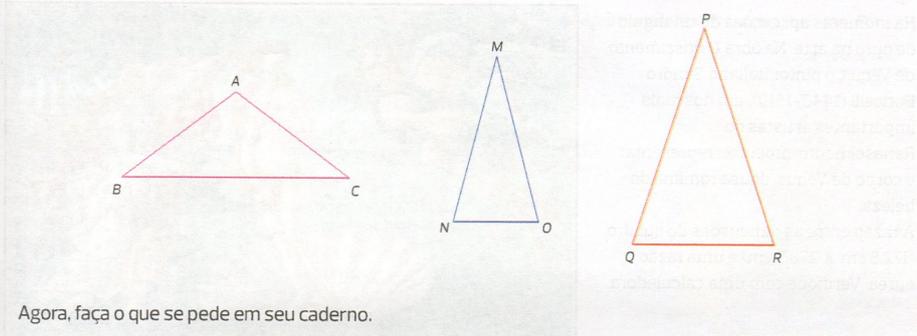
Concha do molusco náutilo em corte. Esse molusco mede cerca de 20 cm.

Veja as resoluções deste exercício no Manual do Professor.

- 19.** Considere o valor aproximado 1,6 para o número de ouro, copie em seu caderno e substitua os ■ pelos valores adequados.
- a) Em um retângulo de ouro, se o comprimento mede 5,6 cm, a largura mede aproximadamente ■. **3,5 cm**
 - b) Se a largura de um retângulo de ouro é de 5,6 cm, a medida do comprimento é aproximadamente ■. **8,96 cm**
 - c) Se o perímetro de um retângulo de ouro é de 104 cm, esse retângulo tem dimensões de aproximadamente ■ por ■. **32 cm; 20 cm**

Figura 66: Retângulo Áureo e a concha de nautilus. Fonte: [7] (nono ano)

20. Examine com atenção cada um destes três triângulos isósceles:

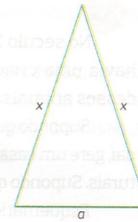


Agora, faça o que se pede em seu caderno.

- a) Qual deles lhe parece mais equilibrado, mais harmonioso, mais bonito? *Resposta pessoal.*
- b) Use uma régua e meça os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{BC} ; \overline{MN} e \overline{NO} ; \overline{PQ} e \overline{QR} . $2,5\text{ cm e }4,0\text{ cm}$; $3,0\text{ cm e }1,5\text{ cm}$; $4,0\text{ cm e }2,5\text{ cm}$.
- c) Com uma calculadora, determine o valor das razões $\frac{AB}{BC}$, $\frac{MN}{NO}$ e $\frac{PQ}{QR}$. $0,625$ ($2,5 : 4$); 2 ($3,0 : 1,5$); $1,6$ ($4 : 2,5$)

21. **Triângulo de ouro ou triângulo sublime**

Os gregos chamavam de **triângulo de ouro** ou **triângulo sublime** todo triângulo isósceles, como o da figura ao lado, que tem a razão $\frac{x}{a}$ com valor aproximado de 1,6 (aproximação de 1,618033989...). Segundo eles, esse triângulo era o mais belo, o mais equilibrado e o mais harmonioso aos nossos olhos. Responda.

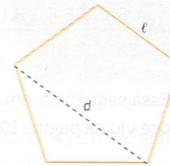


- a) No exercício anterior, qual dos triângulos é um triângulo de ouro? $\triangle PQR$, pois $\frac{PQ}{QR} = 1,6$.
 - b) E você, escolheu esse triângulo como o mais bonito? *Resposta pessoal.*
22. Use 1,6 para o número de ouro e construa em seu caderno um triângulo de ouro com base de 2 cm.
23. Faça em seu caderno as medições necessárias e verifique, no pentágono regular desenhado abaixo, o valor aproximado da razão entre d (medida de uma diagonal) e ℓ (medida de um lado). $\frac{d}{\ell} = \frac{2,9}{1,8} = 1,6$

Mauro Sroux/Arquivo da editora



Temos aqui mais um caso interessante no qual aparece o número de ouro: é possível provar que, em todo pentágono regular, a razão entre a medida de uma diagonal e a medida de um lado é igual a $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, o número de ouro.



Ilustrações técnicas desta página: Benno do Imagem/Arquivo da editora

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Use essa propriedade e calcule a medida exata da diagonal de um pentágono regular cujo perímetro é de 30 cm. $(3\sqrt{5} + 3)\text{ cm}$ ($30 : 5 = 6$ (lado); $\frac{d}{6} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow d = 3\sqrt{5} + 3$)

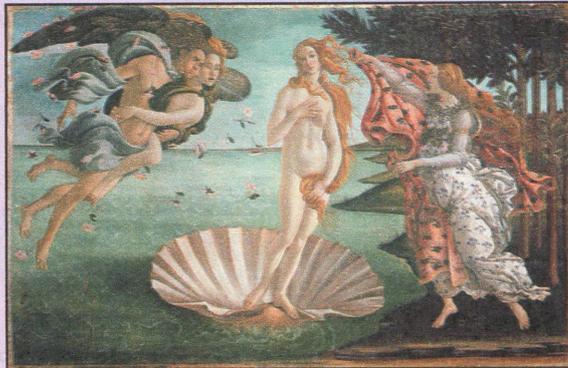
$$\frac{3,2}{2} \left(\frac{x}{2} = 1,6 \Rightarrow x = 2 \cdot 1,6 = 3,2 \right)$$

Figura 67: Triângulo Áureo e o pentágono regular. Fonte: [7] (nono ano)

Você sabia?

Há inúmeras aplicações do retângulo de ouro na arte. Na obra *O nascimento de Vênus*, o pintor italiano Sandro Boticelli (1445-1510), um dos mais importantes artistas do Renascimento, procurou representar o corpo de Vênus, deusa romana da beleza.

A razão entre as dimensões do quadro (172,5 cm × 278,5 cm) é uma razão áurea. Verifique com uma calculadora.



O nascimento de Vênus, 1485, têmpera sobre a tela, obra de Sandro Boticelli.

$$\frac{278,5}{172,5} = 1,6$$

Leitura

A sequência de Fibonacci e a criação de coelhos

No século XIII, o matemático Leonardo de Pisa visitou uma fazenda onde havia uma criação de coelhos e pôs-se a refletir sobre a reprodução rápida desses animais.

Supondo que cada casal gere um novo casal depois de dois meses e que, a partir daí, gere um casal todo mês, fica formada uma sequência especial com números naturais. Supondo que os coelhos tivessem vida eterna, a sequência seria infinita.

Esquemáticamente, temos:

Mês	Casais	Número de casais	Casais que dão cria
1º	A	1	
2º	A	1	A
3º	A, B	2	A
4º	A, B, C	3	A e B
5º	A, B, C, D, E	5	A, B e C
6º	A, B, C, D, E, F, G, H	8	A, B, C, D e E
7º	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M	13	A, B, C, D, E, F, G e H
etc.			



Fibonacci (Leonardo de Pisa)



Casal de coelhos

Essa sequência, em que cada termo nos dá o número de casais de coelhos, é a **sequência de Fibonacci**, que você viu na página 107.

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)

Observe que obtemos um termo qualquer dessa sequência, a partir do 3º, somando os dois termos imediatamente anteriores a ele. Por exemplo: $3 = 2 + 1$; $34 = 21 + 13$; etc.

Além disso, a partir do 5º termo, a razão entre cada termo e seu precedente está sempre próxima de 1,6 (valor aproximado do número de ouro): $\frac{5}{3} = 1,666\dots$; $\frac{8}{5} = 1,6$; $\frac{13}{8} = 1,625$; e assim por diante.

Use uma calculadora e verifique com mais alguns termos.

Figura 68: Obra de arte e a sequência de Fibonacci. Fonte: [7] (nono ano)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos como o Número de Ouro possui uma história de pelo menos mais de dois mil e trezentos anos, com o primeiro registro explícito na obra de Euclides, *Os Elementos*. Mostramos como muitas das propriedades tidas por entusiastas da Razão Áurea como surpreendentes na realidade estão relacionadas ao polinômio $x^2 - x - 1 = 0$. Além da sua presença na geometria, em que se destaca o pentágono regular e suas diagonais que formam o pentagrama de onde temos seus segmentos se intersectando em Razão Áurea e o Retângulo Áureo do qual com movimento simultâneo de rotação e contração obtemos uma espiral logarítmica.

Revelamos como a sequência de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ficou conhecida como Sequência de Fibonacci, apesar de haver registros dela na Índia anteriores a publicação do livro *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa. Assim como, a razão entre seus termos tendem a Φ e diversas de suas propriedades aritméticas. Aliás, com o uso de algumas das várias proposições de divisibilidade, conseguimos provar a existência de infinitos números primos.

Mas o intuito do trabalho não era simplesmente expor relações e propriedades da Razão Áurea e da Sequência de Fibonacci, fatos esses frequentemente abordados. Diferenciando, portanto, do que normalmente se encontra nas pesquisas, verificamos como o Número de Ouro é na realidade um caso particular de um conjunto de números irracionais com propriedades semelhantes que podem ser obtidos através de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, sendo a Sequência de Fibonacci também um caso específico dela.

Além desse importante fato matemático geralmente ignorado ou simplesmente não mencionado quando se discute o assunto, desvendamos os equívocos cometidos quando se tenta associar a Razão Áurea a construções, obras de arte, natureza e o corpo hu-

mano. Vale ressaltar que esses são pontos geralmente predominantes e com necessidade de um árduo trabalho para desmistificá-los. Mas não se restringe a eles, como exemplo, se alega a possibilidade de prever o comportamento do mercado de ações através do quão próximo um índice se aproxima de Φ ou do seu inverso ϕ .

Foram apresentadas possibilidades de atividades que contemplam o assunto, sem subjetividades ou malabarismos numéricos, e oportunizam aos professores elaborarem problemas para explorarem conceitos de geometria, desigualdade de médias, análise combinatória, eletricidade, reflexão da luz, entre outros.

Mas esse trabalho não esgota todas possibilidades de abordagens referentes a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci. Como exemplo, há um interessante estudo sobre ladrilhagem de simetria quádrupla baseada nos estudos, em 1974, de Roger Penrose (1931). Porém, espera-se contribuir para a desmistificação do tema levantado e gerar reflexão sobre informações quase consagradas que na realidade não passam de repetições de publicações ou discursos equivocados. Assim como Markowsky comenta em seu artigo [16], as propriedades matemáticas geralmente são abordadas corretamente, no entanto, quando relacionada a arte, arquitetura e estética, entre outras situações, a aplicação da Razão Áurea se torna questionável, apesar de ter ganhado status de conhecimento comum e de conotação religiosa.

Em relação a parte histórica, é importante ressaltar como as diferentes fontes podem mostrar dados divergentes, provavelmente devido ao documento no qual um autor se baseia ser diferente do outro. Mas o que mais chama atenção é como em quase todas há uma supervalorização da cultura ocidental em detrimento da oriental. Como se praticamente todo o conhecimento acumulado ao longo dos séculos fossem méritos dessa civilização e na outra não houvesse avanços significativos. Em especial, a consagração de nomes muitas vezes apenas por compilarem conhecimentos da época ou por simples citações (não que isso não possa ser significativo). Importante então, assim como Tatiana Roque procura mostrar em sua livro [20], uma visão mais crítica em relação a informações históricas.

Por esse motivo, encerramos o capítulo anterior questionando a apresentação de certas informações no livro didático. Vivemos uma era em que a difusão de informações foi extremamente facilitada com o desenvolvimento tecnológico e o uso da internet. Apesar dos vários pontos positivos ganhos com isso, faz-se necessário cada vez mais tomar cuidado com a veracidade dessas informações a que se tem acesso e não propagar dados enganosos.

A necessidade de desmistificação do tema desenvolvido ao longo deste trabalho, bem como os equívocos a respeito da aplicação da Razão Áurea apresentados corroboram a afirmação acima, e representam uma oportunidade do professor gerar debates sobre o assunto e conscientizar, por exemplo, sobre a importância do método científico para continuarmos avançando.

No entanto, vale salientar que os equívocos apontados neste trabalho não desmerecem ou anulam a abordagem com o Número de Ouro em sala de aula. Ao contrário, o devido debate e reflexão acerca deste tema são fundamentais para que ocorra, de fato, sua desmistificação. O uso do método científico, aliado a uma análise crítica do assunto, só tem a contribuir no que se refere ao estudo da Matemática, para professores e alunos.

RECORRÊNCIAS LINEARES

Neste apêndice, apresentaremos uma dedução dos resultados envolvendo recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes utilizados no Capítulo 3. Nossa principal referência será [17].

Definição A.1. Uma *recorrência linear de segunda ordem* tem a forma

$$x_n + f(n)x_{n-1} + g(n)x_{n-2} + h(n) = 0$$

onde f , g e h são funções a valores reais definidas no conjunto números naturais e $g(n)$ é não-nula¹. Se $h(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a recorrência será chamada *homogênea*.

Trataremos de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, isto é, de recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

onde p e q são números reais e $q \neq 0$.

À recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ será associada uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada *equação característica*.

Proposição A.2. Se r_1 e r_2 são raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, então $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam c_1 e c_2 constantes reais.

Demonstração. Sejam c_1 e c_2 números reais. Substituindo $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e, em seguida, agrupando as parcelas de maneira conveniente, obtemos:

¹ Caso $g(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a recorrência seria de primeira ordem.

$$\begin{aligned}
x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= (c_1r_1^{n+2} + c_2r_2^{n+2}) + p(c_1r_1^{n+1} + c_2r_2^{n+1}) + q(c_1r_1^n + c_2r_2^n) \\
&= c_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + c_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

O resultado a seguir garante que se raízes da equação característica são distintas, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ têm a forma descrita na Proposição A.2.

Proposição A.3. *Se as raízes r_1 e r_2 da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ são distintas, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$, onde c_1 e c_2 são constantes reais.*

Demonstração. Seja x_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Vamos determinar constantes reais c_1 e c_2 que sejam solução do sistema de equações

$$\begin{cases} c_1r_1 + c_2r_2 = x_1 \\ c_1r_1^2 + c_2r_2^2 = x_2 \end{cases}$$

isto é,

$$c_1 = \frac{r_2^2x_1 - r_2x_2}{r_1r_2(r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{r_1x_2 - r_1^2x_1}{r_1r_2(r_2 - r_1)}.$$

O sistema será possível e determinado, já que $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $x_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A escolha de c_1 e c_2 mostra que esta igualdade vale para $n = 1$ e $n = 2$. Assumindo que a igualdade em questão vale para n e $n + 1$, mostraremos que o mesmo ocorre para $n + 2$. Do PIF seguirá a validade para todo n natural.

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= -px_{n+1} - qx_n \\
&= -p(c_1r_1^{n+1} + c_2r_2^{n+1}) - q(c_1r_1^n + c_2r_2^n) \\
&= -c_1r_1^n(pr_1 + q) - c_2r_2^n(pr_2 + q) \\
&= -c_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) - c_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) + c_1r_1^{n+2} + c_2r_2^{n+2}
\end{aligned}$$

Note que tanto o primeiro parênteses quanto o segundo são iguais a 0, pois r_1 e r_2 são raízes da equação característica. Logo,

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= -c_1 r_1^n \cdot 0 - c_2 r_2^n \cdot 0 + c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2} \\ &= c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2}.\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Notas de Aula - A Sequência de Fibonacci*. pp. 1–17, 2013. www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/nota_aula_03.
- [2] Bicudo, I.: *Os Elementos de Euclides; tradução e introdução Irineu Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [3] Boyer, C. B. e U. C. Merzbach: *História da matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- [4] Brasil, P. C. N.: *Matemática*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- [5] Carneiro, M. J. D. e M. Spira: *Oficina de Dobraduras*. Rio de Janeiro, IMPA, 2015, ISSN 9788524403385.
- [6] Crilly, T.: *50 Ideias Matemática que precisa mesmo saber*. Portugal-Alfragide: Editora D. Quixote - Grupo Leya, 1ª ed., 2011.
- [7] Dante, L. R.: *Projeto Teláris - Matemática - Ensino Fundamental 2*. São Paulo: Ática, 2ª ed., 2015.
- [8] Domenico, A. D.: *89.41 The Golden Ratio: The Right Triangle: And the Arithmetic, Geometric, and Harmonic Means*. *The Mathematical Gazette*, 89(515):261–261, 2005, ISSN 00255572. <http://www.jstor.org/stable/3621234>.
- [9] Falbo, C. E.: *Generalizations of the Golden Ratio*. http://www.mathfile.net/generalized_phi_mathpage.pdf.
- [10] Freire, B. T. V.: *Notas de Aula - A Teoria dos Números*. pp. 114–115, versão 01/06/2009. http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/NOTAS-DE-AULA_09.pdf.
- [11] George Manuel, A. S. e: *An Unexpected Appearance of the Golden Ratio*. *The College Mathematics Journal*, 19(2):168–170, 1988, ISSN 07468342, 19311346. <http://www.jstor.org/stable/2686180>.
- [12] Linn, S. L. e D. K. Neal: *Approximating Pi with the Golden Ratio*. *The Mathematics Teacher*, 99(7):472–477, 2006, ISSN 00255769. <http://www.jstor.org/>

- stable/27972030.
- [13] Livio, M.: *Razão áurea: a história de Φ , um número surpreendente*. Rio de Janeiro: Record, 6ª ed., 2011.
- [14] Livio, M.: *Deus é matemático?* Rio de Janeiro: Record, 4ª ed., 2015.
- [15] Maor, E.: *e: a história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 4ª ed., 2008.
- [16] Markowsky, G.: *Misconceptions about the Golden Ratio*. The College Mathematics Journal, 23(1):2–19, 1992, ISSN 07468342, 19311346. <http://www.jstor.org/stable/2686193>.
- [17] Morgado, A. C. e P. C. P. Carvalho: *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [18] Neto, M. e A. Caminha: *Geometria*. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [19] OBMEP: *Banco de questões 2013*. <http://147.65.23.40/banco.php>.
- [20] Roque, T.: *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar, Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [21] Rose, N. J.: *The Golden Mean and Fibonacci Numbers*. pp. 1–44, 2014.
- [22] Spira, M.: *On the Golden Ratio*. Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education, pp. 755–770, 2012, ISSN 10.1007/978-3-319-17187-6_42.