Universidade Federal do ABC

PROFMAT

DIEGO VIEIRA COSIS

LOGARITMOS E ESCALAS

Santo André, 2017

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Diego Vieira Cosis

Logaritmos e Escalas

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno Diego Vieira Cosis, e orientado pelo Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi.

Santo André, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cosis, Diego Vieira
Logaritmos e Escalas / Diego Vieira Cosis. — 2017.

114 fls. : il.

Orientador: Rafael de Mattos Grisi

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Logaritmos. 2. Escalas. 3. Música. I. Grisi, Rafael de Mattos. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 18 de setembro de 2017.

Assinatura do autor: _______________

Assinatura do orientador: _______________

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Diego Vieira Cosis, realizada em 31 de julho de 2017:

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Jeferson Cassiano** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Renato A. Martins

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Jerônimo Cordoni Pellegrini** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, a minha esposa e filha, a minha mãe Cleusa e ao meu irmão Rodrigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo folego de vida no qual tem me dado para poder escrever essa dissertação. Sou grato aos amigos de estudo Ana Claudya, Andressa Pereira, Dênis Martins, Eloy Nicotera, Hugo Fulone, Tiago Dias e William Balla, que me incentivaram durante todo o curso.

Agradeço também aos amigos de trabalho, André Marcio, Demonaques Vital, Edmilson Francino, ao mestre José Manoel Vitolo e a amiga Suzete Bolgheroni que entenderam minha necessidade e me ajudaram a superar os obstáculos.

Por fim, quero agradecer ao Dr. Rafael de Mattos Grisi por ter me orientado no trabalho, trazendo grandes contribuições para o corpo da dissertação e, a CAPES pelo auxílio da bolsa de estudos.

"Para ver um mundo em um grão de areia, e um céu numa flor selvagem, pegue o infinito na palma de sua mão, e a eternidade em uma hora."

(William Blake, *Augúrius de inocência*)

RESUMO

Este estudo traz abordagens contextualizadas e dinâmicas para o processo de ensino-aprendizagem de logaritmo. Procuramos destacar nesta dissertação aspectos didáticos que possam envolver o aluno como protagonista de sua própria aprendizagem. A partir de situações contextualizadas interdisciplinares procuramos caracterizar o conceito de escala linear, e assim, propusemos situações em que a escala linear não é suficiente para modelar o fenômeno estudado. Neste sentido, discutimos um outro formato de escala para auxiliar na compreensão de estudo dos abalos sísmicos, do conceito de pH, entendido como a relação das moléculas num meio ácido ou básico, como também alguns aspectos relacionados à música: sua história e evolução desde a época de Pitágoras, destacando características principais como intensidade e frequência. Desse modo, durante a modelagem desta nova escala, tivemos a oportunidade de apresentar as propriedades e definições do logaritmo. Acreditamos que esta abordagem no ensino de logaritmo pode despertar o interesse dos alunos em compreender melhor o objeto em estudo. Ao término do trabalho, mostramos e sugerimos algumas aplicações reais, nas quais o logaritmo facilita o entendimento da situação em pesquisa, podendo tornar a aprendizagem mais significativa.

Palavras-chave: Escalas, Logaritmo, Interdisciplinariedade.

ABSTRACT

This study brings contextualized and dynamics approaches to learning-teaching process of logarithm. This paper highlights didactic aspects to make the student the protagonist of its own learning. From contextualized and interdisciplinary situations, linear scale is characterized. Then, situations where the linear scale is not enough to model the studied phenomenon where proposed. In addition, other formats of scale are presented to help understanding seismic activity studies, from pH scale (which consists in the relationship between molecules on acid or basic middle) to some aspects related to music (history and evolution since Pythagoras, highlighting the main characteristics as intensity and frequency). Therefore, during the modeling of this new scale, there was the opportunity to present properties and definitions of logarithm. We believe that this approach to logarithm teaching engages the students to comprehend the studied object. At the end of this study, we show and suggest some real life applications, in which logarithm facilitates the understanding of the studied situation, making the learning more meaningful.

Keywords: Scales, Logarithm, Interdisciplinarity.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Escrever sobre os logaritmos é compreender o que está ao nosso redor, é identificar vários fenômenos que são representados pela matemática. Nossa proposta é mostrar como o logaritmo esta intrinsecamente vinculado aos fenômenos naturais abordando-o de forma contextualizada e significativa para sua compreensão.

A proposta geral deste trabalho é apresentar o logaritmo de maneira que se possa compreender de forma eficiente e prazerosa o conceito e aplicações dos logaritmos. Abordaremos conceitos musicais que se relacionam com a escala logarítmica, com o objetivo de desmistificar a grande dificuldade que os alunos de ensino médio apresentam em compreender as operações envolvidas na aprendizagem do logaritmo, assim como vivenciar suas aplicações práticas manipulando adequadamente suas propriedades básicas.

É comum ouvir relatos de professores que questionam o método de ensino apresentado por livros didáticos utilizados em escolas públicas, dizendo que sua abordagem faz com que os alunos aprendam de forma mecanizada atentando a técnicas de memorização, sem fazer sentido para aquele que aprende. Essa observação nos leva a uma problemática, como transformar o ensino do logaritmo prazeroso e eficiente? Conforme colocam Sacristán e Pérez Gomez (1998, p.26), "[...] não se consegue a reconstrução dos conhecimentos, atitudes, e modos de atuação dos alunos/as, nem exclusiva, nem prioritariamente, mediante a transmissão ou intercâmbio de ideias, por mais ricas e fecundas que sejam. Isto ocorre mediante as vivências de um tipo de relações sociais na aula e na escola, de experiências de aprendizagem, intercâmbio e atuação que justifiquem e requeiram esses novos modos de pensar e fazer".

Acredito que os professores devam dar sentido ao conhecimento dos logaritmos, relacionando o conteúdo com propostas de ensino que possam promover uma aprendizagem significativa, fazendo com que o aluno seja protagonista da sua aquisição de conhecimento sendo capaz de compreender os conceitos, propriedades e suas aplicações.

Contextualizar o ensino da matemática é um desafio encontrado por muitos professores, por se apresentar a dificuldade de criar e organizar aprendizagens significativas. A proposta desse trabalho é possibilitar ao professor situações que tem como objetivo provocar no aluno o interesse pela aprendizagem do logaritmo, fazendo com que o discente se aproprie das propriedades e consiga relacionar os conteúdos com aplicações no cotidiano, fenômenos encontrados na música, na natureza, na astronomia, entre outros.

Já no início do capítulo 1, apresentaremos os principais conceitos relacionados a escalas aritmética, bem como, os critérios de construção desse tipo de representação linear. Usamos escalas conhecidas para mostrar o comportamento de cada uma delas em diferentes situações reais, e ainda, mostramos casos que a escala linear falha ao tentar representar alguns modelos de escala. Em geral, realizamos um estudo sobre escalas e como elas podem favorecer a aquisição de outros conhecimentos

O capítulo 2, embora mais técnico, abordamos diferentes maneiras de apresentar aos alunos as propriedades e definições da potenciação em todo corpo do conjunto dos números reais, para isso, usamos métodos que podem ser utilizados em sala de aula onde acreditamos que essa é parte fundamental para o ensino dos logaritmos, contudo, em alguns momentos se fez necessário a abordagem de conceitos matemáticos mais avançados, porém, que nada impede a leitura e interpretação do objeto em estudo.

Um pouco do surgimento dos logaritmos será abordado no trabalho como um instrumento de cálculo, dado através de uma tabela útil para realizar simplificações, uma vez que transformava grandes e trabalhosos cálculos, como veremos nos capítulos 3 e 4, nas operações mais básicas de soma e subtração. A ideia é bastante simples, se for possível escrever na forma de potência dois números quaisquer positivos com a mesma base, isto é, multiplicar esses números equivale a somar os respectivos expoentes. Impulsionada por John Napier, este capítulo destacará os principais matemáticos que contribuíram para a ideia fundamental do conceito de logaritmo da transformação da multiplicação em adição e a divisão em subtração, contando também com métodos aplicados na hipérbole para definir o logaritmo. Ainda no capítulo 4, destacamos a música como um grande instrumento de ensino, contextualizando a matemática com as escalas musicais.

Discorremos no capítulo 5, algumas aplicações diretas onde o logaritmo de maneira bastante eficiente está inserido em áreas de conhecimento distintas. Fizemos uma leitura contextualizada das escalas abordadas no capítulo 1, como por exemplo a escala de pH e de algumas escalas diretamente ligadas a arte da música. Procuramos destacar o logaritmo em lugares estratégicos de ensino que possa despertar o interesse dos alunos pela aprendizagem.

No último capítulo, fizemos nossas reais considerações finais sobre tudo o que foi pesquisado nesta dissertação. Apresentamos as expectativas que tivemos com este estudo e o que acreditamos ser melhor para o ensino de logaritmos em sala de aula.

1

ESCALAS

Iniciaremos nossa abordagem trazendo os conceitos sobre escalas. Mas afinal o que é uma escala?

Se fizéssemos esta pergunta a um piloto de avião a resposta certamente seria "uma parada entre um lugar e outro, provavelmente feito para receber ou descer passageiros ou até mesmo para abastecer a aeronave", mas, se a mesma pergunta for feita para um adolescente que esteja cursando o ensino médio, a resposta pode vir como: "Ora professor e eu lá sei"ou "escala é a divisão de algo em partes iguais, como por exemplo uma régua de 30 centímetros divida em 30 partes iguais". Podemos ainda, perguntar a um professor de arte, de música ou de química e as respostas poderiam ser, respectivamente: "escala é a variação graduada de tons das cores", "escala é a divisão entre uma oitava musical de Dó a Dó"e por ultimo "escala é a variação da concentração de íons H^+ ou OH^- em uma solução determinando o nível de acidez ou basicidade".

Note que dependendo do contexto podemos encontrar uma infinidade de respostas que defina escala, mas todas (ou quase) estariam relacionadas a um único objetivo: quantificar e medir um certo fenômeno ou elemento da natureza. Seja com distâncias, temperaturas, energia dissipada em um terremoto, concentração de H^+ em uma solução, ou frequência de sons, escalas nos ajudam a compreender melhor e lidar melhor com o mundo à nossa volta. Um sistema de medidas simples e bem estruturado, representando o que é essencial de um certo elemento ou fenômeno é capaz de produzir grandes efeitos na maneira como interagimos com o mundo.

Neste capítulo vamos explorar através de alguns exemplos o vasto e complexo mundo das escalas. Tentaremos revelar um pouco do que está por trás de algumas escalas conhecidas, identificando os elementos principais que às compõe.

1.1 ESCALA ARITMÉTICA

Começaremos tratando das chamadas *escalas aritméticas*, que compõe a classe de escalas com mais exemplos na nossa vida diária. Usamos este tipo de escalas sempre que medimos a distância entre nossa casa e a escola, ou o tempo que demoramos para chegar ao trabalho. Usamos quando pesamos as verduras compradas no mercado, ou quando medimos o volume de leite que vai na receita do bolo.

De maneira simplificada, tais escalas podem ser vistas como uma reta dividida em partes iguais, cada parte representando uma *unidade* da escala em questão. A unidade e o que ela representa forma uma espécie de bloco construtor da escala, o elemento a partir do qual definimos o resto da escala.

Olhemos, por exemplo, para o ato de medir a distância entre dois pontos, o comprimento de um dado objeto ou a altura de uma pessoa. Existem diversas maneiras de fazer isso, e todas elas começam pela escolha da unidade desta medida, e o que ela representa.

Se queremos, por exemplo, medir a distância entre dois bairros em uma cidade como São Paulo normalmente escolheremos o uso de quilômetros, e diremos que a distância é, digamos, $10km$. Para medir o tamanho de uma quadra, no entanto, e comum dividirmos essa unidade de referência ($1km$) em 1000 partes iguais, encontrando assim a unidade do metro (m), e podemos dizer que a quadra tem, por exemplo, 150m.

Existem diversas formas de definir uma unidade de comprimento. Um modo "artesanal" e bastante comum de determinar medidas usando como referência a palma da mão ou a planta do pé. Até na vida adulta você já deve ter utilizado um desses meios para medir algo, como comprimento de uma mesa, a altura de uma porta ou quando foi jogar futebol com os amigos na rua e mediu a largura das traves do gol separado-os com os chinelos. Tudo o que estamos fazendo nestes casos é determinar que uma unidade de medida será dado pelo tamanho de nossa mão, e posto isso estamos pontos a declarar, sem medo, que a mesa tem 6 *palmos* de largura. Pois bem, essa prática já era utilizada a muitos anos, e países como Inglaterra e Estados Unidos ainda adotam unidades de medida com este tipo de origem.

No Brasil usamos o Sistema Métrico Decimal, que possui como escala de referência para distâncias e tamanhos o *metro* (representada apenas por m). Em 1790, com a criação do sistema métrico decimal, a unidade desta medida (ou o valor de 1 metro) passou a ser definida como um décimo milionésimo da distância entre o equador terrestre e o Pólo Norte, mas no ano de 1983, foi definido na Conferência Geral de Pesos e Medidas que 1 metro ($1m$) passaria a ser o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 segundos.

Junto o metro foram criados outras escalas de comprimento, com unidades definidas a partir do metro. Se subdividirmos a unidade metro (m) em 100 partes iguais, por exemplo, encontraremos a unidade de medida centímetro, representado por cm que é a centésima parte do metro, ou seja, a cada $100cm$ teremos $1m$. Por outro lado, multiplicando a unidade de metro por 1.000 encontramos a unidade da escala quilômetro (km), onde portanto $1km = 1.000m$.

Tais escalas foram criadas por conveniência. Poderíamos usar apenas o metro para medir qualquer tipo de comprimentos e distâncias, mas quando estas ficam muito pequenas ou muito grandes, começamos a usar valores muito altos, e a escala se torna inconveniente.

Se quisermos, por exemplo, medir a distância entre dois bairros em uma cidade grande como São Paulo usando metros, seriamos forçados a usar valores como $5.000m$ ou até mesmo $10.000m$. Mas se usarmos a escala de quilômetros podemos falar em distâncias de $5km$ ou $10km$. Assim, para representarmos a distância entre os bairros é mais conveniente usar a medida Km ao invés de m.

É absolutamente possível passar de uma escala à outra, bastando para isso que entendamos como se relacionam as unidades das escalas usadas. Note que se quisermos estabelecer a distância entre os dois bairros em unidade de centímetros, basta multiplicar a distância em km por 1000 e depois por 100, pois para cada $1km$ temos $1000m$ e para cada $1m$ temos $100cm$. E portanto

$$1km = 1.000m$$

$$10km = 10.000m$$

e,

$$1m = 100cm$$

$$10.000m = 1.000.000cm$$

Assim,

$$10km = 1.000.000cm.$$

Outro exemplo bastante comum para escalas de comprimento ou distância aparece na medida de representações reduzidas ou expandidas da realidade. Frequentemente, para podermos visualizar um objeto detalhadamente, precisamos aumentar ou reduzir o seu tamanho. Fotos, por exemplo, usualmente representam uma imagem em tamanho menor que o real, mas mantendo todas as proporções do objeto original. Outros exemplos podem ser vistos nos atlas geográficos, onde para expressar a medida real de um território a imagem é diminuída consideravelmente a ponto de podermos visualizar todos os extremos da figura.

Neste contexto, a escala é escrita como uma razão matemática da forma $\frac{n}{d}$ ou ainda $n : d$, com n sendo o numerador e d o denominador, tal que, n seja a unidade do mapa e d a unidade real do terreno. Ou seja, n unidades da medida usada para o mapa, representa d unidades da medida usada no terreno representado. Esse formato de representação de escala, recebe o nome de escala numérica, mas podemos observar em muitos livros ou em atlas geográficos que a escala nem sempre é representada numericamente. É comum o uso de um *escala gráfica*, como a representada na figura 1, indicando graficamente o tamanho da unidade no mapa, e ao lado a correspondência com alguma escala conhecida (metros, quilômetros, milhas, etc).

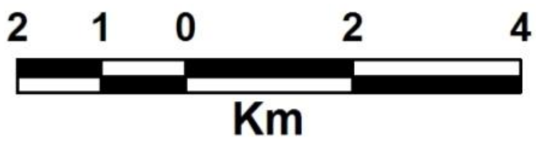

Figura 1: Modelo de escala gráfica \ Fonte: Software ArcGis 9.3

De todo modo, esta é ainda uma escala de distância, do mesmo tipo que vinhamos descrevendo, mas onde a unidade é definida a partir de outras escalas já conhecidas.

Observe que em uma escala numérica do tipo $n : d$ quanto maior for o número do denominador, menor será a escala. Isso faz com que a escala utilizada não apresente com detalhes a área mapeada, porém, por outro lado, pode-se representar a dimensão de todo a imagem em uma única folha de sulfite. Veja na figura 2, o mapa do Brasil apresentado em uma escala gráfica representada por um segmento de reta graduada em uma unidade de medida linear, dividida em partes iguais, (ver figura 1) tal que, a cada unidade de medida apresentada na figura é de $250Km$. Veja também que, a unidade de medida utilizada para o terreno representado na mesma reta graduada, mas esta não indica a medida usada para o mapa, por não ser necessário.

Perceba que no mapa apresentado não aparece a escala numérica, o que temos é apenas a distância real correspondente a $250km$. Porém, com a escala gráfica apresentada

Figura 2: Mapa do Brasil

podemos medir usando uma régua adequada e calcular por meio de proporcionalidade a escala que foi utilizada.

Suponha que a medida da unidade na escala gráfica, em centímetros, seja de $0,8cm$. Temos assim que cada $0,8cm$ no mapa corresponde $250km$ no terreno real. Para representar esses valores na escala numérica, primeiramente devemos transformar as unidades de comprimento na mesma unidade de medida e depois construir a escala. Vimos que $1km$ é igual à $100.000cm$, então:

$$250km = 25.000.000cm$$

Podemos representar a escala E, como:

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{E}$$

assim,

$$\frac{0,8}{25.000.000} = \frac{1}{E}$$

Multiplicando ambos os lados por E, fica,

$$E \cdot \frac{0,8}{25.000,000} = E \cdot \frac{1}{E}$$

$$\frac{E \cdot 0,8}{25.000,000} = 1$$

Daí,

$$E = \frac{25.000.000}{0,8} = 31.250.000$$

Portanto, o mapa da figura 2, está representado na escala 1 : 31.250.000, ou seja, a cada centímetro do mapa lê-se 31.250.000cm reais da figura, e ainda que a cada unidade da escala gráfica equivale à 250km, veja na figura 1 e tabela 1.

Medida n no mapa	$n \cdot d$	Distância real (d) em km
1	$1 \cdot 250$	250
2	$2 \cdot 250$	500
3	$3 \cdot 250$	750
4	$4 \cdot 250$	1000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n \cdot 250$	$250n$

Tabela 1: Representação das medidas da escala do mapa com os valores reais

Veja que, no exemplo dado a cada unidade de distância da escala temos sua correspondência em km, ou seja, se a distância de um ponto A até um ponto B no mapa medir 4 unidades teremos que a distância real será de 1000km, ou ainda, se a distância medida for x a distância real será $(250 \cdot x)km$.

Note que o mesmo acontece com várias outras escalas. Vejamos agora, como desde muitos anos era medida a velocidade de um navio, barco, lancha ou qualquer transporte náutico.

Para medir a velocidade dessas embarcações usamos uma medida chamada *Nós*, cuja prática foi desenvolvida pelos Portugueses no séc XVI. Consistia em dar a estimativa da velocidade, fazendo uso de um aparelho com nome de *barquinha* (Ver figura 3), que nada mais era do que um instrumento confeccionado de madeira e corda. Na corda, eram dados nós a cada $14,5m$ e esta era enrolada em um carretel de madeira fixo a uma prancha pesada que ficava no barco. Quando o marinheiro queria saber qual velocidade estava navegando, ele atirava a corda presa a uma madeira triangular na água, fazendo com que o barco em movimento parasse a madeira, assim com a ajuda de uma ampulheta registrava-se dentro de um período quantos nós se desprendia do carretel. É claro, que com o avanço da tecnologia esse método já não é mais utilizado, porém, ainda se utiliza a expressão *Nó* para representar a velocidade das embarcações náuticas.

É importante observar que apesar de ser usado para medir velocidade, podemos facilmente ver o *Nó* como uma escala de distância, onde $1nó$ equivalia, na época, à $14,5m$.

Figura 3: Instrumento utilizado no século XVI para medir a velocidades de embarcações

Observação 1.1.1. *Desde o ano de 1929, na* First International Extraordinary Hydrographic Conference *o nó passou a equivaler uma milha náutica, ou seja,* $1nó = 1852m$

Perceba mais uma vez, que também podemos representar a velocidade de uma barco dentro de uma escala numérica, onde a cada *nó* desprendido do carretel o barco avançaria nos dias atuais $1852m$.

$nó$	$nó \cdot 1milha$	Distância em milhas
1	$1 \cdot 1852$	1852
2	$2 \cdot 1852$	3704
3	$3 \cdot 1852$	5556
4	$4 \cdot 1852$	7408
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$x \cdot 1852$	$1852x$

Tabela 2: Relação da unidade *nó* com a distância percorrida em metros de uma embarcação

Veja que, qualquer que seja a linha da tabela 2 que escolhermos a razão entre as grandezas da 1ª e 3ª colunas será sempre de $\frac{1}{1852}$, indicando uma proporcionalidade, ou seja, a medida que a quantidade de *nó* aumenta a distância (m) aumenta de forma proporcional. Isso estabelece uma correspondência linear entre as duas escalas.

Além disso, em qualquer uma delas, a alteração em uma unidade na medida tem sempre o mesmo significado no fenômeno medido. Em outras palavras, dizer que uma criança cresceu $1cm$ no último mês tem o mesmo significado se a criança tinha $140cm$ ou $100cm$. Por esta razão, chamamos escalas de *lineares* ou *aritméticas*.

1.1.1 *Montando uma Escala Aritmética*

Visualmente esse tipo de escala é de fácil compreensão, pois com seu formato simples apresentando sempre os mesmos intervalos, e sua relação linear com o fenômeno medido, torna-se quase intuitivo o seu entendimento.

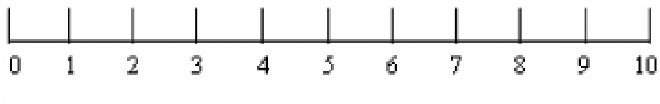

Figura 4: Modelo de escala linear

Como já comentamos,em uma escala aritmética, mudanças de igual magnitude no fenômeno que estamos medindo são conseguidas somando um certo valor numérico à medida anterior, assim como em uma progressão aritmética (P.A), onde cada termo da sequência pode ser escrito através de uma soma do seu antecessor com um número r pré-definido.

Nos exemplos dados até agora, nos concentramos em definir o significado de uma unidade da escala. Como mostramos, isso pode ser feito a partir de uma alteração real no fenômeno que desejamos mensurar (o tamanho de um palmo como unidade de distância) ou usando outras escalas já conhecidas, como no caso das escalas cartográficas. Mantendo a analogia com P.A.'s, escolher a unidade é analogo à escolher a razão da progressão.

No exemplo do mapa do Brasil, temos que a cada unidade da escala seu valor corresponde à $250km$ sendo esta a razão da escala numérica, ou ainda a razão da P.A.

As distância estabelecidas pelo barco (Tabela 2), também podem ser representadas através de uma Progressão Aritmética, porém, a razão não é a mesma apresentada no mapa, isso pois as unidades nas duas medidas tem significados distintos.

Você deve ter notado que em ambas escalas apresentadas, iniciou-se a construção a partir do número *zero*. Será que isso é particularidade das escalas? De fato,não! O ponto de partida da escala ser o "zero", não é tão relevante na construção das escalas lineares, pois seria apenas um ponto de referência para nossa medida. No caso de distâncias e tamanhos, o valor 0 tinha um significado especial, pois representa a distância entre dois objetos que estejam no mesmo lugar, ou seja, a ausência de distância. Mas este papel nem sempre é claro, e precisamos escolher o que definiremos como 0 na nossa escala. Ou ainda, se usaremos outro valor como referência. Por exemplo, ao construir sua escala de temperatura, Celsius admitiu o zero como o ponto de congelamento da água, enquanto Fahrenheit usou para isso uma solução de salmoura com igual partes de água e sal.

Para deixar mais clara essa ideia de relevância da escolha do zero, e outras maneiras para determinar o significado de uma unidade falaremos a seguir da construção de escalas de temperatura.

1.1.2 *Mais um Exemplo Aritmético*

Para representar esta situação, citaremos como exemplo as escalas de temperatura conhecidas como *Kelvin (K)*, *Celsius (C)* e *Fahrenheit (F)*. Antes de apresentarmos essas três escalas, precisamos saber como é o processo de medição de temperatura. Curiosamente, medir temperaturas consiste em medir a energia cinética dos átomos e moléculas que compõem o gás, ou seja, como estas partículas estão em constante movimento, quanto maior for a velocidade de movimentação dessas moléculas, maior será a temperatura.

Para construir tais escalas, usaremos um procedimento ligeiramente diferente. Daremos às nossas escala dois pontos de referência, atribuindo valores específicos para suas temperaturas. Tendo o valor da temperatura nestes dois pontos, conseguimos inferir o significado de uma unidade. Para o primeiro ponto, com temperatura mais baixa, usaremos como referência o congelamento da água, e para referenciar o segundo ponto, com temperatura mais alta, usaremos o momento que a água entra em ebulição.

Para representar essas temperaturas, vamos imaginar um experimento bastante simples. Com o auxílio de um termômetro de mercúrio sem nenhuma medição de escala, pegue um recipiente com gelo e coloque o termômetro dentro, após alguns instantes o mercúrio estacionará a uma altura x do frasco. Faça uma marcação no local exato da posição do mercúrio. Em seguida, pegue uma vasilha com água e coloque-a na fogo, espere até que a água entre em estado de ebulição, daí coloque o termômetro dentro do recipiente e faça outra marcação quando o mercúrio atingir o ponto máximo do frasco. Pronto, já temos nossos pontos de referência citado.

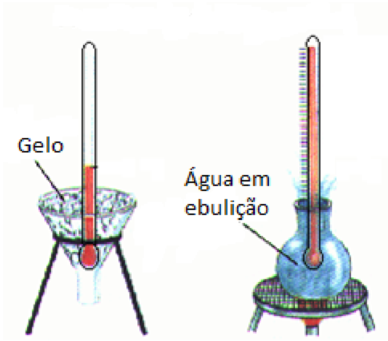

Figura 5: Ilustração do experimento para construção de uma escala de temperatura

Note que, não importa com qual escala venhamos realizar as leituras de temperatura no nosso termômetro a velocidade de movimentação das moléculas serão as mesmas. Deste modo, podemos atribuir temperaturas aos nossos pontos de referência da forma que queiramos. As escalas já citadas, Kelvin (K), Celsius (C), e Fahrenheit (F), por exemplo, usam para o ponto mínimo $273K$, $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ e $32\,^{\circ}\mathrm{F}$ respectivamente, e para o nível máximo $373K$, $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ e $212\,^{\circ}\mathrm{F}$.

Como mencionado anteriormente, a escolha do "zero" não é necessariamente relevante para indicar as temperaturas. Celsius relacionou o zero como ponto de congelamento da água, já Kelvin atribuiu a temperatura de $0K$ ao ponto em que as partículas de um corpo deixam de se mover, o que ocorre quando um corpo não contém energia, chamado pelo físico William Thonsom (conhecido como Lord Kelvin) como *zero absoluto*, estimado por ele como valendo aproximadamente $-273\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Tá, mas e a escolha do ponto de partida de Fahrenheit equivalente à $32\,^{\circ}\mathrm{F}$ se deu a quê? De fato, o ponto de congelamento da água não foi o ponto de partida! A relatos de que, Fahrenheit tenha estabelecido o ponto de $0\,^{\circ}\mathrm{F}$ ao dia mais frio de inverno de sua cidade natal no ano de 1708, correspondente à $-17{,}78\,^{\circ}\mathrm{C}$, e experimentalmente, atribuindo ao ponto de congelamento da água o valor de $32\,^{\circ}\mathrm{F}$. E mais uma vez que a escolha do zero teve um significado diferente. Como para Fahrenheit o frio do inverno era mais intenso do que a temperatura de congelamento da água, é possível que ele tenha atribuído o ponto zero ao ponto mínimo que ele já havia vivenciado.

Observação 1.1.2. *Posteriormente, para fazer da escala algo reproduzível, Fahrenheit determinou como* 0 °F *a temperatura de uma solução de gelo, sal e cloreto de amônio.*

Perceba que as escalas Kelvin e Celsius apresentam a mesma distância do ponto mínimo ao máximo usados como referências, exatamente 100 unidades (chamadas de graus). Diferente da escala Fahrenheit cuja diferença de temperatura entre estes dois pontos é de 180 °F (ver 6). Deste modo, a unidade nas escalas Kelvin e Celsius tem um significado diferente da unidade na escala Fahrenheit. Mais precisamente, cada grau na escala Celsius e Kelvin corresponde à 1,8 graus na escala Fahrenheit.

Deste modo, para relacionar duas destas escalas termométricas, precisaríamos não apenas considerar a diferença entre unidades, mas também os diferentes valores dados para um dos pontos de referência.

Para relacionar Kelvin e Celsius precisamos considerar apenas os diferentes valores de referência inicial, uma vez que suas unidades são a mesma. Como a temperatura de congelamento da água é $273K$ e $0\,^\circ C$, dada uma temperatura qualquer em Celsius precisamos apenas somar 273, e encontraremos o correspondente em Kelvin. Ou seja,

$$x\,^\circ C = (x + 273)K.$$

Entre Celsius e Fahrenheit a relação é um pouco mais complicada. Primeiro precisamos ajustar a unidade, e para isso lembramos que $1,8\,^\circ F$ equivalem à $1\,^\circ C$. Assim, como $x\,^\circ C$ significam x graus acima da temperatura do gelo, em Fahrenheit teríamos $1,8x\,^\circ F$ acima da temperatura do gelo, que corresponde à $32\,^\circ F$. Deste modo

$$x\,^\circ C = (1,8x + 32)\,^\circ F,$$

ou ainda

$$x\,^\circ C = \left(\frac{9}{5}x + 32\right)\,^\circ F.$$

Um bom exercício em sala de aula é pedir que os alunos criem suas próprias escalas de temperatura, usando estes ou outros pontos de referência.

Por exemplo, podemos dividir a distância entre os extremos em duzentas partes iguais, e dizer que o ponto mínimo inicie no ponto 83 (valor estabelecido usando o ano de meu nascimento), e cada grau aumentado poderíamos chamar de *Graus Cosis (D)* em homenagem à aquele que vos escreve (ver figura 6). Deste modo nossa nova escala tem como referência os pontos de gelo 83 °D e ponto de ebulição sendo 283 °D.

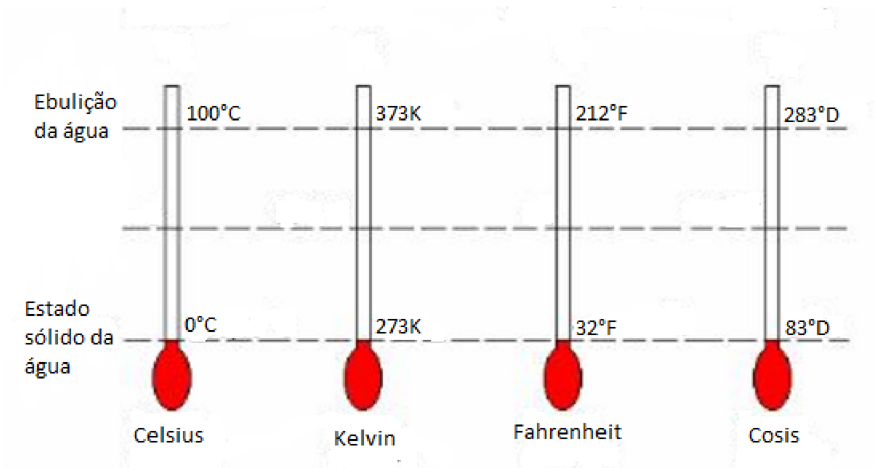

Figura 6: Escalas das temperaturas variando entre o ponto de gelo da água e o ponto de ebulição

Assim, como uma alteração de $1\,°C$ corresponde à uma mudança de $2\,°$D, e a água congela à uma temperatura de $83\,°$D, temos que

$$x\,°C = (2x + 83)\,°\text{D}.$$

Esta é uma estratégia que pode ser utilizada como incentivo aos alunos, promovendo autonomia e mais participação nas aulas, tornando-os autores da própria aprendizagem.

1.2 QUANDO AS ESCALAS ARITMÉTICAS FALHAM

Mas será que este tipo de escala é sempre a mais adequada para se medir qualquer fenômedo ou grandeza?

Como comentamos anteriormente, em uma escala aritmética a alteração real no que estamos medindo quando a medida varia de 1 à 2 será a mesma do que 4 à 5. Perceba no entanto, que se fossemos representar esses aumentos em porcentagem (%) o primeiro caso, apresentaria um aumento de 100% enquanto o segundo um aumento apenas de 25%. Isso pode ser irrelevante quando falamos de temperatura, ou distância. Mas em fenômenos como decaimento radioativo, e diversos outros fenômenos físico-químicos, isso pode ser bastante relevante.

Para deixar mais claro esta questão, apresentaremos a escala química de pH (Potencial Hidrogeniônico). Essa escala consiste em uma maneira alternativa de indicar a concentração de íon de hidrogênio (H^+) em uma solução. Mas antes de definir a escala, vamos primeiro conhecer um pouco de sua história.

De acordo com [4], no final do século XIX surgiram as primeiras ideias que relacionava a estrutura química com as propriedades ácidas e básicas. No ano de 1887, *Arrhenius* propôs a primeira teoria sobre ácidos e bases *Teoria Eletrolítica*, baseando seus estudos na ionização[1] e dissociação[2] dos eletrólitos, dizendo que certas substâncias dissolvidas em água formam espécies carregadas chamadas de *íons*. Segundo ele, os ácidos quando dissolvidos na água aumentam a concentração de íons (H^+), por serem compostos formados por ligações covalentes [3], sofrem ionização na presença da água. Já as bases aumentam a concentração de ânions (OH^-), pois apresentam ligação iônica[4], e por isso sofrem o processo de dissociação quando na presença de água.

Uma consequência importante desta teoria, é que nem todos os ácidos e bases se ionizam ou dissociam em água na mesma extensão, resultando assim em um estado de equilíbrio químico entre as moléculas e íons.

A escala de pH, foi proposta no ano de 1909 pelo bioquímico *Soren Peter Lauritz Sorensen*, que visava melhorias para o método de controle de qualidade em industrias de fermentação. Sua principal função, era verificação da acidez e basicidade de uma solução. Mais tarde, em 1923 *Bronsted* e *Lowry* através dos conceitos de *Arrhenius*, definiram ácidos como sendo espécies de íons ou moléculas neutras doadoras de prótons (H^+) ou (H_3O^+) e bases, espécies aceptoras de prótons. Alternativamente, neste mesmo ano, *Lewis* definiu que uma substância é básica quando fornece um par de elétrons para formar uma ligação química e ácida quando recebe um par de elétrons.

Para montar tal escala, Sorensen usou como base a concentração de íons H^+ dissolvidos em uma solução de água pura, que aparecem como produtos de uma reação conhecida como auto-ionização da água. Como vemos na figura 7, a molécula de água doa um de seus prótons agindo como descrito anteriormente como ácido, fazendo com que a outra molécula receba esse próton, atuando como base.

Perceba que ao receber o próton a molécula forma o cátion hidrônio H^+ (ou H_3O^+) enquanto aquela que perdeu o próton toma a forma do ânion hidróxido OH^-.

1 Processo que envolve a formação de íons, ou seja, esses íons não existiam antes do processo de ionização
2 Processo que envolve a separação de íons preexistentes
3 É o tipo de ligação formada entre elementos de alta eletronegatividade, ou seja, os átomos envolvidos tendem a receber elétrons
4 Ligação que ocorre entre um íon positivo e outro negativo por atração eletrostática

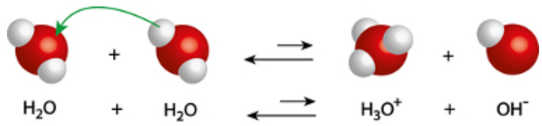

Figura 7: Ilustração da autoionização da água

Esta é uma reação *reversível*, de modo que ao mesmo tempo que moléculas de água estão se dissociando e ionizando, outros íons e ânions estão se unindo para formar novas moléculas. Dizemos que a reação está em equilíbrio quando não se percebe mais alteração na concentração de nenhum dos componentes da reação. Ou seja, a velocidade de reação é a mesma nos dois sentidos.

Antes de seguirmos com a definição da escala, vamos antes entender um pouco mais sobre equilíbrio de reações reversíveis.

Considere uma reação do tipo

$$mA + nB \rightleftharpoons pC + qD,$$

onde m moléculas de A e n moléculas de B, reagem para formar p moléculas de C e q moléculas de D. Do mesmo modo, C e D reagem na mesma proporção para formar os compostos A e B.

Como os compostos estão "nadando" juntos na mesma mistura, a reação poderá ocorrer sempre que m moléculas de A encontram n moléculas de B. É razoável supor que a frequência destes encontros é proporcional ao "total de grupos" de m moléculas de A ($\sim |A|^m$, $|A|$ o total de moléculas de A na solução), vezes o total de grupos de n moléculas de B ($\sim |B|^n$). Deste modo, como o total de moléculas de um composto é proporcional à sua concentração, temos que a velocidade (V_d) da reação pode ser expressa por

$$V_d = k_1 \cdot [A]^m \cdot [B]^n \tag{1.1}$$

onde, $[A]$ e $[B]$ representam as concentrações de A e B na solução.

Do mesmo modo, a reação inversa tem velocidade dada por

$$V_i = k_2 \cdot [C]^p \cdot [D]^q.$$

Agora, quando a reação está em equilíbrio as velocidade são iguais, e portanto

$$V_d = V_i$$

$$k_1 \cdot [A]^m \cdot [B]^n = k_2 \cdot [C]^p \cdot [D]^q$$
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{[C]^p \cdot [D]^q}{[A]^m \cdot [B]^n}$$

A constante $k_{eq}\frac{k_1}{k_2}$ é conhecida como constante de equilíbrio da reação. Em resumo, temos que

$$k_{eq} = \frac{[C]^p \cdot [D]^q}{[A]^m \cdot [B]^n} \tag{1.2}$$

Agora, para a autoionização da água descrita na imagem 7, como a reação é dada por

$$1H_2O + 1H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-,$$

segue da equação (1.2) que

$$k_{eq} = \frac{[H_3O^+] \cdot [OH^-]}{[H_2O] \cdot [H_2O]},$$

ou ainda

$$k_{eq} \cdot [H_2O] \cdot [H_2O] = [H_3O^+] \cdot [OH^-]$$

E fazendo $k_w = k_{eq} \cdot [H_2O] \cdot [H_2O]$ temos

$$k_w = [H_3O^+] \cdot [OH^-]. \tag{1.3}$$

Experimentalmente, por condutividade elétrica, ficou determinado que a constante k_w, conhecida por *constante de dissociação da água* ou *produto iônico da água*, é aproximadamente $1 \cdot 10^{-14}$, a uma temperatura de $25\,°C$. E portanto, a autoionização da água produz concentrações baixíssimas de íons H^+ e OH^-, caracterizando um estado de equilíbrio iônico.

Para mostrar isso, o físico *Friedrich Kohlrausch* verificou experimentalmente, que em um litro de água pura a uma temperatura ambiente, existem aproximadamente $55,5mols$ de moléculas de água, e que apenas $0,0000001mols$ de molécula sofrem ionização, ou seja, a quantidade de água que não se ioniza é praticamente igual.

Como a autoionização produz igual quantidade de íons H_3O^+ e OH^-, a concentração de íons H_3O^+ em equilíbrio é igual a concentração de íons OH^-, e assim, como $k_w = 1 \cdot 10^{-14}$, segue da equação 1.3 que

$$1 \cdot 10^{-14} = [H_3O^+] \cdot [OH^-],$$

com

$$[H_3O^+] = 1 \cdot 10^{-7} mol/L,$$

$$[OH^-] = 1 \cdot 10^{-7} mol/L.$$

Quando adicionamos uma impureza (ácido ou base) à água, estas concentrações se alteram. Se, por exemplo, dissolvermos um pouco de dióxido de carbono (CO_2) na água, esta ficará ligeiramente ácida por conta da formação do ácido carbônico (H_2CO_3), e a concentração de H_3O^+ será aumentada pela ação da reação

$$H_2CO_3 + H_2O \rightleftharpoons HCO_3^- + H_3O^+.$$

No entanto, a concentração de OH^- será reduzida na mesma proporção, de modo que o produto $[H_3O^+] \cdot [OH^-]$ permaneça igual.

Voltando a falar da escala de pH, é natural agora perguntar como podemos medir o nível de acidez ou basicidade de uma solução? Os cálculos acima apontam o caminho, que é de fato bastante simples. Quando há um aumento na concentração de íons H^+ a concentração de íons OH^- diminui, tornando o meio ácido. Similarmente, quando há um aumento de OH^- e a diminuição de H^+ torna-se o meio básico. Veja que, essa escala é construída a partir da quantidade de íons presentes no meio aquoso e já sabemos que quando há equilíbrio entre os íons H^+ e OH^- á uma temperatura de 25 °C o meio é neutro. Ou seja:

$$[H^+] > 10^{-7} mols/l > [OH^-] \quad \text{Ácido,}$$

$$[H^+] < 10^{-7} mols/l < [OH^-] \quad \text{Básico,} \tag{1.4}$$

$$[H^+] = 10^{-7} mols/l = [OH^-] \quad \text{Neutro.}$$

Bom, mas o que isso tem haver com nosso estudo sobre escalas?

A escala de pH, em uma temperatura ambiente de 25 °C, é definida então como uma escala que varia de 0 à 14, sendo o ponto 0 a quantidade de um mol de íons H^+ presentes por litro de solução, e 14 a quantidade de 10^{-14} mols de H^+ por litro. Isso é o mesmo que afirmar que aproximadamente $6,02 \cdot 10^{23}$ de moléculas de H^+ estão se ionizando no ponto de maior acidez da escala enquanto $6,02 \cdot 10^9$ corresponde ao ponto de maior basicidade da escala.

Assim, uma solução com $pH = 2$ tem $[H^+] = 10^{-2} mols/l$, enquanto $pH = 1$ indica uma concentração $[H^+] = 10^{-1} mols/l = 10 \cdot 10^{-2} mols/l$. Podemos dizer então que uma solução com $pH = 1$ é dez vezes mais ácida que uma com $pH = 2$, e cem vezes

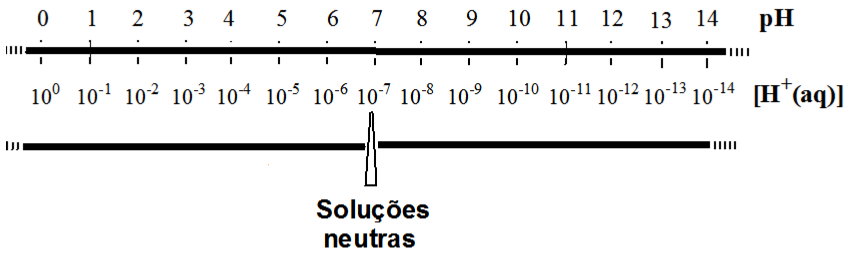

Figura 8: Escala de pH representada pela quantidade de íons H^+ se ionizando no meio aquoso

mais ácida que com $pH = 3$. Ou seja, conforme a escala se distância do zero, menor será a o nível de acidez da solução.

De maneira análoga, observando o outro lado da escala, dizemos que a substância torna-se mais básica ou alcalina, quanto mais ela se aproximar do extremo 14. Isso pois quanto menor for a quantidade de íons H^+ na solução, maior será a concentração de OH^-. Vale apontar que na escala de pH o meio neutro (água pura), à 25 °C, possui $pH = 7$.

Note que apesar de representada aritmeticamente (usamos uma reta numerada), a relação da escala de pH com o fenômeno medido (acidez) não é linear (ver figura 8), pois cada unidade da escala corresponde à uma acidez 10 vezes menor que a do nível anterior.

Mas por que usar uma escala deste tipo, quando poderíamos usar apenas as concentrações de H^+ (uma escala aritmética) para determinar a acidez da substância?

A resposta para esta pergunta está na relação entre as escalas $[H^+]$ e $[OH^-]$. Perceba primeiro que, da mesma forma que $[H^+]$, o valor de $[OH^-]$ também indica o nível de acidez da solução (ver a equação (1.4)). Pergunte-se agora, em quanto reduzimos o valor de $[OH^-]$ quando aumentamos o valor de $[H^+]$ em uma unidade.

Queremos então encontrar x tal que

$$([H^+] + 1)([OH^-] - x) = 10^{-14},$$

lembrando que $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$. Isso nos dá que

$$x = \frac{[OH^-]}{[H^+] + 1}.$$

Isso mostra que a alterações "aritméticas" em $[H^+]$ não se refletem da mesma forma em $[OH^-]$.

Em compensação, quando perguntamos qual a alteração em $[OH^-]$ quando alteramos $[H^+]$ para α vezes o valor original, a resposta é muito mais interessante, pois neste caso temos

$$([H^+]\cdot\alpha)([OH^-]\cdot x) = 10^{-14},$$

e lembrando que $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$, encontramos que

$$x = \frac{1}{\alpha}.$$

E é, portanto, justamente esta relação *geométrica* entre $[H^+]$ e $[OH^-]$ que torna o uso direto das concentrações para medir acidez menos eficiente.

Já a escala de pH faz este serviço de maneira muito mais prática! Suponha por exemplo que uma certa substância tenha um $pH = 3,5 = \frac{7}{2}$. Sabemos então que $[H^+] = 10^{-\frac{7}{2}} mols/l$, e usando que $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ obtemos $[OH^-] = 10^{-\frac{21}{2}} mols/l$.

Mais geralmente, se uma solução tem $pH = \alpha$, então $[H^+] = 10^{-\alpha} mols/l$ e $[OH^-] = 10^{-(14-\alpha) mols/l}$. Isso mostra que a escala de pH permite uma leitura muito mais eficiente dos fenômenos relacionados à acidez da solução.

Assim, existe uma relação direta entre as grandezas pH e concentração, que não conseguimos descrever aritmeticamente, ou seja, de forma linear. A relação entre estas duas grandezas é, de fato geométrica, pois a alteração de uma unidade no pH representa uma alteração de 10 vezes na concentração.

Veja na próxima seção, um outro exemplo que pode ser abordado em sala de aula.

1.3 ESCALAS MUSICAIS E AS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Nesta seção, faremos um convite ao leitor para que possa entender um pouco da música e sua principal relação com a matemática. A ideia é relacionar conceitos musicais com escalas, envolvendo partes da música como: intervalo musical, notas musicais, escalas e frequência.

De início podemos escrever que frequência musical é a vibração criada por algum mecanismo. Na música, é muito utilizado o diapasão de garfo feito de metal, que ao aplicar uma força sobre ele suas hastes são colocadas em movimento empurrando e comprimindo o ar com a mesma frequência que vibram. Na utilização de um diapasão típico, a frequência natural de vibração é de 440 ciclos por segundo, ou 440 Hz (Hertz - escala linear de medida que expressa o total vibrações por segundo). O sistema auditivo humano é muito sensível às alterações da frequência sonora, e consegue captar frequências numa faixa de 20 Hz a 20000 Hz.

De acordo com [21], o modo como as vibrações sonoras que agem sobre o tímpano (a maneira como percebemos tais vibrações) estão naturalmente relacionadas com o número de vibrações por segundo. Para entendermos melhor esta relação, apresentaremos a experiência desenvolvida por *Pitágoras*, que consistia em tensionar uma corda estendida sobre uma prancha e presa por dois cavaletes fixos, em particular do monocórdio.

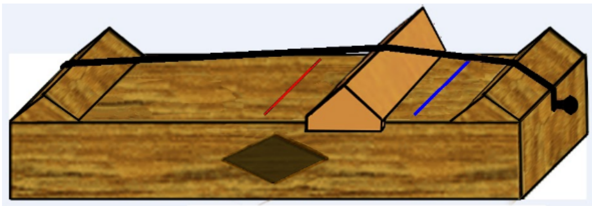

Figura 9: Ilustração de um Monocórdio utilizado por Pitágoras

Pitágoras percebeu que ao tensionarmos a corda em um certo ponto, reduzindo seu tamanho, aumentamos sua frequência, produzindo assim sons diferentes.

Decidiu então comparar o som da corda solta, com o som gerado ao tensioná-la em diferentes pontos. Primeiro notou que ao dividir a corda na metade ouvia-se um som agradável, que se somava ao som original, intensificando-o. Dizia então que estes dois sons soavam em *uníssono*.

Pressionando agora em um ponto situado a $\frac{3}{4}$ da extremidade final da corda (a corda teria $3/4$ do tamanho original) e tocando-a, o som gerado era diferente, e não soava mais em uníssono com o som original, complementando-o de alguma forma. O mesmo acontecia quando pressionava à, por exemplo, uma distância de $\frac{2}{3}$ da extremidade final, mas o som gerado era novamente distinto. Pressionando em outros pontos, percebeu que existiam sons que soavam mais *harmoniosos*, quando tocados com o som da corda solta.

Matemático que era, percebeu que as razões de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ possuíam uma relação bastante especial entre elas. Primeiro lembrou que o som produzido com a corda de tamanho $1/2$ da original era, de certa forma, igual ao produzido com a corda solta. Percebeu também que, se quisesse recuperar o som original, partindo de uma corda com tamanho 2/3 da original, bastava reduzir a nova corda à 3/4 do seu tamanho! Isso por que

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Pitágoras decide então usar estas duas razões para classificar as frequências em um intervalo. A ideia era, a partir de uma frequência original encontrar aquelas geradas com as razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ ($\frac{1}{2}$ foi tratada separadamente por soar em uníssono com a frequência original). A partir daí, encontrar aquelas que guardam estas mesmas relações com as novas frequências, e assim por diante, até completar a escala.

A partir desse princípio, surge a escala pitagórica ou diatônica, formada por sete notas: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, onde Dó representa a frequência original. Sol representa a frequência encontrada com a razão $\frac{2}{3}$, e é chamada de *quinta* de Dó, por ser a quinta nota da escala. Fá, encontrada a partir do Dó usando a razão $\frac{3}{4}$, é chamada de *quarta* de Dó. A nota encontrada ao se dividir a corda na metade recebe o mesmo nome da frequência original (Dó), e é conhecida como *oitava* de Dó.

Devido à relação entre as razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ apontada por Pitágoras, diremos que a quarta é a inversão da quinta. Diz-se então que a escala Pitagórica é encontrada a partir dos intervalos de quinta, e suas inversões.

Pitágoras destacou ainda a quarta, a quinta e a oitava como os tons mais harmoniosos quando soados com a nota original, considerando-os assim *harmônicas perfeitas*.

Antes de construir a escala, é importante salientar que dividir a corda em uma proporção α, faz com que a frequência f_0 da corda solta seja levada à uma frequência f_0/α. Ou seja, a frequência que conseguimos ao dividir a corda na proporção de $\frac{2}{3}$, por exemplo, é $\frac{3}{2}$ da frequência original.

Para construirmos esta escala, tomaremos o intervalo definido por uma nota e sua oitava, dado pelas frequências f_0 e $2f_0$. Como já comentado, daremos à estas notas o mesmo nome, que como referência chamaremos de *Dó*.

As demais notas serão definidas da seguinte forma

- Sol é uma quinta acima de Dó

$$Sol = f_0 \cdot \frac{3}{2}$$

- Fá é uma quarta acima de Dó

$$Fa = f_0 \cdot \frac{4}{3}$$

- Ré é uma quarta abaixo de Sol

$$Re = \frac{f_0 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = f_0 \cdot \frac{9}{8}$$

- Lá é uma quinta acima de Ré

$$La = f_0 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = f_0 \cdot \frac{27}{16}$$

- Mi é uma quarta abaixo de Lá

$$Mi = \frac{f_0 \cdot \frac{27}{16}}{\frac{4}{3}} = f_0 \cdot \frac{81}{64}$$

- Si é uma quinta acima de Mi

$$Si = f_0 \cdot \frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = f_0 \cdot \frac{243}{128}$$

Com base nesta construção, podemos calcular os intervalos entre todas as alturas da escala construída, obtendo apenas dois valores. Veja:

De Dó à Ré, temos:

$$\frac{Re}{Do} = \frac{f_0 \cdot \frac{9}{8}}{f_0} = \frac{9}{8}$$

De Ré à Mi, temos:

$$\frac{Mi}{Re} = \frac{f_0 \cdot \frac{81}{64}}{f_0 \cdot \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$$

De Mi à Fá, temos:

$$\frac{Fa}{Mi} = \frac{f_0 \cdot \frac{4}{3}}{f_0 \cdot \frac{81}{64}} = \frac{256}{243}$$

De Fá à Sol, temos:

$$\frac{Sol}{Fa} = \frac{f_0 \cdot \frac{3}{2}}{f_0 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{9}{8}$$

De Sol à Lá, temos:

$$\frac{La}{Sol} = \frac{f_0 \cdot \dfrac{27}{16}}{f_0 \cdot \dfrac{3}{2}} = \frac{9}{8}$$

De Lá à Si, temos:

$$\frac{Si}{La} = \frac{f_0 \cdot \dfrac{243}{128}}{f_0 \cdot \dfrac{27}{16}} = \frac{9}{8}$$

De Si à uma oitava acima de Dó, temos:

$$\frac{Do}{Si} = \frac{2 \cdot f_0}{f_0 \cdot \dfrac{243}{128}} = \frac{2}{\dfrac{243}{128}} = \frac{256}{243}$$

Nota	Comprimento	Frequência
Dó	d	f_0
Ré	$\frac{8}{9}d$	$\frac{9}{8}f_0$
Mi	$\frac{64}{81}d$	$\frac{81}{64}f_0$
Fá	$\frac{3}{4}d$	$\frac{4}{3}f_0$
Sol	$\frac{2}{3}d$	$\frac{3}{2}f_0$
Lá	$\frac{16}{27}d$	$\frac{27}{16}f_0$
Si	$\frac{128}{243}d$	$\frac{243}{128}f_0$
Dó	$\frac{d}{2}$	$2f_0$

Tabela 3: Escala Pitagórica construída sobre uma corda de comprimento d

Observação 1.3.1. *A frequência representada pela nota Dó é de* $261,6Hz$. *Este é o chamado* Dó central do piano*, ou ainda* Dó4*, para diferenciar os demais Dó's que encontramos ao dobrar a frequência ou dividi-la por 2.*

O procedimento adotado por Pitágoras sugere uma separação das notas musicais em o que chamou-se de tom e semitom (Ver em tabela 4). Em outras palavras, dizemos que tom é o intervalo que representa uma razão de $\frac{9}{8}$ entre frequências, e semitom representa a razão de $\frac{256}{243}$.

Infelizmente para Pitágoras dois semitons na escala pitagórica **não** representam um tom!! Isso por que

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 \neq \frac{9}{8}.$$

Notas	Intervalo
Dó à Ré	Tom
Ré à Mi	Tom
Mi à Fá	Semi tom
Fá à Sol	Tom
Sol à Lá	Tom
Lá à Si	Tom
Si à Dó	Semi tom

Tabela 4: Escala Natural ou Diatônica

Ou seja, aumentar a frequência em $\frac{256}{243}$ duas vezes não é o mesmo que aumentar a frequência em $\frac{9}{8}$.

De fato,

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 = 1,109857915 < 1,125 = \frac{9}{8},$$

de modo que dois semitons represetam um pouco menos de um tom na escala pitagórica.

É possível que Pitágoras, tivesse percebido que os intervalos de sua escala não eram sempre os mesmos, mas mesmo assim, muito harmoniosa, talvez, por isso, a escala definida por *Pitágoras* com intervalos racionais foi utilizada durante muitos anos.

Veja na figura 10 que a escala musical construída por Pitágoras quando representada em uma reta, não apresenta a mesma distância entre os pontos que definem as notas musicais. Como comentamos, as razões também não são respeitadas. Portanto, esta escala musical não está escrita em nenhuma forma vista até aqui, aritmética ou geométrica.

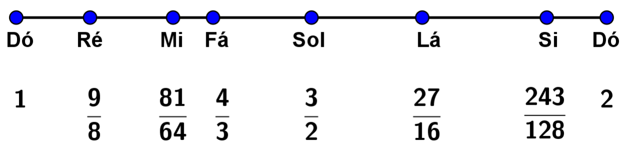

Figura 10: Escala Pitagórica

Inicialmente as notas musicais registradas por Pitágoras, eram representadas por letras do alfabeto, sendo A, B, C, D E, F e G, que mais tarde foram nomeadas pelo monge italiano *Guido d'Arezzo* (992 - 1050 d.C) através do texto *Hino a São João Batista* com o nome de *Ut queant Laxis*. Usando o início de cada verso que continha diferentes alturas, d'Arezzo trocou as letras até então conhecidas como as sete notas musicais, pelas primeiras sílabas de cada um dos versos, veja:

Nota	Representação	Versos
Ut	C	**Ut** queant laxis
Ré	D	**RE**sonare fibris
Mi	E	**MI**ra gestorum
Fá	F	**FA**muli tuorum
Sol	G	**SOL**ve polluti
Lá	A	**LA**bii reatum
Si	B	**S**ancte **I**oannes

Tabela 5: Nomenclatura das notas musicais dadas pelo Hino de São João Batista

Perceba que a nota DÓ usada atualmente, era Ut. Foi o compositor italiano *Giovanni Battista Doni* (1595-1647), que para facilitar o solfejo em seu idioma, trocou **Ut** pela primeira sílaba de seu sobrenome **DO**, que atualmente escrevemos acentuada.

A escala pitagórica era restrita na composição e execução de obras musicais, pois impossibilitava a transposição das notas para outras tonalidades. Isso levou músicos ao longo dos séculos a desenvolverem diversas outras escalas, de modo a facilitar a transposição entre tonalidades.

1.3.1 *Escala Cromática ou Temperada*

Vimos que os intervalos musicais correspondem à razões entre frequências. Uma razão de $9/8$ significa o aumento de um tom na frequência (ou um intervalo de segunda), $4/3$ representa um intervalo de quarta, e um intervalo de quinta é dado pela razão $3/2$ entre as frequências.

Vimos também que estas razões permitem a construção de uma escala de 7 notas (diatônica), mas que tal escala não guarda relação aritmética e tampouco geométrica com as frequências das notas.

Figura 11: Partitura contendo o texto com as silabas que deram nome as notas musicais

Uma das consequências, é que a escala diatônica construída não possibilita uma melodia feita para a tonalidade de Dó ser executada em qualquer outra tonalidade, pois as notas que surgem em outra escala podem não ser as mesmas que aparecem na escala de Dó.

A primeira ideia para resolver o problema da escala seria construir uma escala de 12 notas, incluindo uma nota entre quaisquer duas notas com intervalo de um tom, transformando todos os intervalos em intervalos de semitom.

Mas isso ainda não resolve o problema! Se, por exemplo, tentarmos escrever a escala a partir do Fá (a quarta acima de Dó), a nota Si não apareceria. No lugar teríamos que colocar uma nota um semitom acima de Lá, mas mais de um semitom abaixo de Si!

Isso pois, como vimos,

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 = 1,109857915 < 1,125 = \frac{9}{8},$$

e isso causa grandes problemas para a escala diatônica.

Seria interessante então que as proporções se mantenham independentes da nota com a qual começarmos.

Em 1691, *Andréas Werkmeister* propôs uma nova escala chamada de *Escala Temperada ou Escala Cromática* equivalente a escala diatônica, porém, com cada tom representando exatamente dois semitons.

Essa nova escala, consistia em dividir a oitava em doze partes, de forma que a razão entre as frequências sucessivas de quaisquer notas fossem iguais. Além disso, como o intervalo de uma oitava representa o dobro da frequência original, e um semitom corresponde à um aumento de i vezes na frequência, o produto por i doze vezes deverá dobrar a frequência original, completando uma oitava. Deste modo

$$f_0 \cdot i^{12} = 2 \cdot f_0,$$

de onde segue que

$$i^{12} = 2,$$

e

$$i = \sqrt[12]{2} \simeq 1,0594$$

Mas como escrever essas doze notas?

Primeiro, usaremos os mesmos nomes e relações de toms e semitons da escala diatônica.

Além disso, dada uma nota inicial C_0 (ou Dó 0), para representar a posição das notas dentro de uma mesma oitava, adotaremos a seguinte notação: C_0 à B_0, intervalo de Dó à Si, com frequência mínima em Hz escrita na 1ª oitava, C_1 à B_1, intervalo de Dó à Ré pertencente a 2ª oitava, e assim sucessivamente.

Assim se tomarmos, por exemplo, as notas C_1 e D_1 que são separadas por um tom, ao aumentarmos a frequência de C_1 em meio tom, ou abaixarmos a frequência de D_1 em meio tom, o som produzido por ambas as notas terá a mesma frequência. Isto surgiu pela necessidade da época em evitar o *Tritono* [5], pois seu som proporcionava uma verdadeira dissonância musical [6].

5 Tritono é o intervalo que possui três tons de distância entre si. Chegou a ser proibido pela igreja ocidental por causar demasiado efeito de tensão

6 Dissonância é um efeito causado por um intervalo considerado instável, trazendo sensação de desconforto e instabilidade, não há combinação entre as notas.

A essa elevação ou rebaixamento das frequências das notas em meio tom, dá se o nome de *acidentes* e são chamados respectivamente de *sustenido* (elevado, em latim) representado pela figura $\sharp$ e *bemol* (suave, em latim) representado pela figura $\flat$.

Figura 12: Notas da Escala Cromática ascendente e descendente, escritas na partitura na clave de Sol

Em uma partitura, quando as notas estão acompanhadas por umas dessas figuras, sabe-se que sua frequência deve soar meio tom acima ou meio tom abaixo da nota natural. Veja na tabela 9 as notas que teriam a mesma frequência, quando tocadas dentro da mesma oitava.

Notas com ($\sharp$)	Notas com ($\flat$)	Crescimento i
C	C	i^0
C$\sharp$	D$\flat$	i
D	D	i^2
D$\sharp$	E$\flat$	i^3
E	E	i^4
F	F	i^5
F$\sharp$	G$\flat$	i^6
G	G	i^7
G$\sharp$	A$\flat$	i^8
A	A	i^9
A$\sharp$	B$\flat$	i^{10}
B	B	i^{11}
C	C	i^{12}

Tabela 6: Escala Cromática representada na mesma frequência com acidentes em $\sharp$ e $\flat$

Esta nova escala, agora com doze notas musicais, sendo elas: sete naturais e cinco acidentes, não preservam os intervalos racionais mostrados anteriormente na experiência de Pitágoras, pois existe, uma única razão i entre as frequências, permitindo assim, que qualquer música possa ser executada em qualquer tonalidade.

Como mostrado na figura 10, a distância entre as notas construídas por Pitágoras dentro de uma mesma oitava, não apresentam a mesma razão. Perceba agora, que com essa nova escala temperada as distâncias tendem a manter a mesma proporção, pois os acidentes colocados na escala corrige o "problema"de escrevermos as notas musicais em uma reta, e assim, manter um certo padrão de uma nota para a outra.

Assim, nesta nova divisão de 12 notas, a razão da frequência de uma nota para a sua sucessora será sempre a mesma, ou seja, 1 semitom separará a frequência de duas notas consecutivas conforme mostra a figura 13.

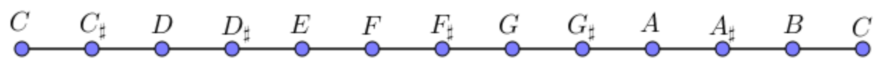

Figura 13: Notas da Escala Cromática dispostas na reta

É importante apontar que a escala cromática é de fato uma escala geométrica. De duas notas estão separadas por k semitons, então a razão de suas frequências será sempre igual à $2^{k/12}$. Ou seja, vale que

$$\frac{C_\sharp}{C} = \frac{D}{C_\sharp} = \frac{D_\sharp}{D} = \cdots = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = i = 2^{1/12}$$

Da mesma forma,

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{C_2}{C_1} = \cdots = 2$$

ou ainda,

$$\frac{A_{\sharp 4}}{A_{\sharp 3}} = \frac{A_{\sharp 3}}{A_{\sharp 2}} = \frac{A_{\sharp 2}}{A_{\sharp 1}} = \cdots = 2 \tag{1.5}$$

Antes de mostrar como podemos escrever essas escalas, apresentaremos um pouco mais sobre essas frequências musicais.

1.3.2 *Frequências das notas musicais*

Nos dias de hoje, temos a Escala Cromática com todo seu temperamento como referência padrão na musica ocidental moderna. Como vimos, seu surgimento se deu pela necessidade de transpor melodias para outras tonalidades, pois a escala de Pitágoras, não possuía intervalos iguais para que se pudesse transpor a tonalidade de uma melodia sem desafinar as notas.

Logo após *Werkmeister* propor essa nova escala musical, o compositor *Johann Sebastian Bach* escreveu o *Cravo bem temperado*, deixando claro que essa nova escala não comprometia a qualidade sonora da melodia.

Figura 14: 1ª Parte: Partitura Cravo bem temperado escrita por John Sebastian Bach

Figura 15: 2ª Parte: Partitura Cravo bem temperado escrita por John Sebastian Bach

Tudo o que fizemos aqui foi determinar a razão da progressão geométrica de frequências que representam os intervalos entre notas de uma escala. Para completar precisamos definir a frequência de ao menos uma das notas na escala.

Mencionamos que os seres humanos captam frequências audíveis na faixa de 20 Hz a 20 mil Hz, e isso implica que o ponto de partida deveria ser definido neste intervalo. Ao longo da história várias frequências distintas foram usadas, quase sempre usando a nota Lá (A na notação original, ainda usada em vários países). Desde 1936 usamos a frequência de 440Hz para o Lá à direita do Dó central do piano, também chamado de Lá 4 ou A_4 ou A natural.

Partindo assim da nota A natural, que produz uma frequência de 440 Hz por segundo, podemos determinar as frequências de todas as notas audíveis da escala cromática dentro de uma mesma oitava.

Dado que a escala temperada, é construída por doze semitons dentro de uma mesma oitava, e que a frequência entre duas notas sequenciais cresce ou diminui na razão $i = \sqrt[12]{2}$, podemos escrever:

$$A\sharp = A \cdot i$$

$$A\sharp = 440 \cdot \sqrt[12]{2} \simeq 466,16Hz$$

e

$$A\flat = \frac{A}{i}$$

$$A\flat = \frac{440}{\sqrt[12]{2}} \simeq 415,31Hz$$

Usando o mesmo procedimento para todas as notas audíveis, podemos obter todas as frequências em Hertz. (Ver tabelas 7 e 8)

Notas	C_0 - B_0	C_1 - B_1	C_2 - B_2	C_3 - B_3	C_4 - B_4	C_5 - B_5
C	16,352	32,703	65,406	130,81	261,63	523,25
C♯ ou D♭	17,324	34,648	69,295	138,59	277,18	554,37
D	18,354	36,708	73,416	146,83	293,66	587,33
D♯ ou E♭	19,445	38,890	77,781	155,56	311,13	622,25
E	20,601	41,203	82,406	164,81	329,63	659,26
F	21,826	43,653	87,307	174,61	349,23	698,46
F♯ ou G♭	23,124	46,249	92,499	184,99	369,99	739,99
G	24,449	48,999	97,988	195,99	391,99	783,99
G♯ ou A♭	25,956	51,913	103,82	207,65	415,31	830,61
A	27,500	55,000	110,00	220,00	440,00	880,00
A♯ ou B♭	29,135	58,270	116,54	233,08	466,16	932,32
B	30,867	61,735	123,47	246,94	493,88	987,77

Tabela 7: Frequência em Hz das notas da Escala Cromática, escritas da 1ª à 6ª oitava

Perceba na tabela 7, que as frequência das notas $C_0, C\sharp_0, D_0$ e $D\sharp_0$, não podem ser captadas pelo ouvido humano pois sua frequência é abaixo de $20Hz$. O mesmo acontece com as notas $E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp$ e B que estão dispostas na 11ª oitava (ver tabela

Notas	C_6 - B_6	C_7 - B_7	C_8 - B_8	C_9 - B_9	C_{10} - B_{10}
C	1046,50	2093,00	4186,01	8372,02	16744,04
C♯ ou D♭	1108,50	2217,73	4434,92	8869,84	17739,68
D	1174,66	2349,32	4698,64	9397,28	18794,56
D♯ ou E♭	1244,51	2489,02	4978,03	9956,06	19912,12
E	1318,51	2637,02	5274,04	10548,08	21096,16
F	1396,91	2793,83	5587,66	11175,32	22350,64
F♯ ou G♭	1479,98	2959,96	5919,92	11839,84	23679,68
G	1567,98	3135,97	6271,93	12543,86	25087,72
G♯ ou A♭	1661,22	3322,44	6644,88	13289,76	26579,52
A	1760,00	3520,00	7040,00	14080,00	28160,00
A♯ ou B♭	18,64,66	3729,31	7458,63	14917,26	29834,52
B	1975,53	3951,07	7902,13	15804,26	31608,52

Tabela 8: Frequência em Hz das notas da Escala Cromática, escrita da 7ª à 11ª oitava

8), pois essas apresentam frequências acima de 20 mil Hertz. Com isso, é possível destacar que a primeira e a última nota possível de serem captadas pelo ouvido humano são respectivamente as notas E_0 e $D\sharp_{10}$, encontradas na 1ª e 11ª oitava, ou seja, as nove oitavas completas capazes de serem ouvidas, que foram citadas anteriormente, são as notas compreendidas entre C_1 e B_9.

Visto isso, destacaremos as notas musicais que podem ser percebidas pelo ouvido humano, e assim, podemos escrever nossas escalas.

A escala cromática de Dó a Dó dentro de uma mesma oitava, pode ser representada em uma reta onde cada par de notas adjacentes crescem na razão i (ver figura 13), enquanto as notas separadas por oitavas crescem na razão 2. Isto mostra que, embora tenhamos a disposição das notas em uma escala sua correspondência não é linear, ou seja, se pegarmos a frequência de C_4 em relação a frequência C_3, podemos observar na tabela 7 que a frequência de C_4 será o dobro da frequência de C_3, ou ainda, se tomarmos a frequência de C_1 e C_4, perceba que a frequência de C_4 será oito vezes maior que a frequência de C_1. Sendo assim, podemos concluir que o crescimento desta escala é exponencial, isto é, conforme as notas musicais são tocadas na escala de som mais grave passando por todas as oitavas audíveis até chegar na ultima oitava

Nota Tônica	Frequência (Hz)
A_0	$27,5$
A_1	55
A_2	110
A_3	220
A_4	440
A_5	880
A_6	1760
A_7	3520
A_8	7040
A_9	14080

Tabela 9: Escala das oitavas audíveis, tendo como referência a nota Lá.

com som agudo , podemos representar as frequências de cada nota em uma potência de base 2. Veja na tabela 9.

Dito isso, faremos nos próximos capítulos uma abordagem dessas escalas não lineares, conceituando e desenvolvendo estratégias de como as construir com os alunos em sala de aula.

2

COMPORTAMENTO DE FUNÇÕES COM A VARIÁVEL NO EXPOENTE

Este capítulo será dedicado à apresentar e estudar as chamadas funções exponenciais. Como apresentamos no final do capítulo 1, tais funções exercem um papel fundamental no desenvolvimento e compreensão de algumas escalas. Escalas como pH, escalas musicais e até mesmo escalas para medidas de intensidades de terremotos, como a Richter, dependem ativamente de tais funções. Em particular, dependem das propriedades destas funções, em especial no que tange o comportamento de seus expoentes.

Nas próximas seções faremos a apresentação passo a passo de tais funções. Começaremos apresentando as potências com números naturais, apresentadas pela primeira vez no ensino fundamental. A partir de suas propriedades extrairemos definições para potências com números inteiros e racionais. Por fim, comentaremos a definição de tais funções para coeficientes irracionais.

2.1 PRIMEIRAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

O primeiro passo para entender as funções exponenciais é lembrar como se dá a chamada potenciação, que nada mais é do que o produto de um número por ele repetidas vezes. Assim, o número 8 pode ser visto como o produto de 2 por ele mesmo 3 vezes, e dizemos então que

$$8 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Da mesma forma, $4 = 2^2$, $32 = 2^5$ e $625 = 5^4$. O número “2” em 2^3 é conhecido como *base* (termo que se repete na multiplicação), enquanto o 3 por expoente (indica a quantidade de vezes que a base se multiplica).

Mais geralmente, podemos definir a operação de potência da seguinte maneira.

Definição 2.1. Dado um número real $a > 0$. Definimos a potência de a, com expoente natural $n > 0$, denotada por a^n, como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Ou ainda, de modo recursivo, dado $a > 0$ definimos

$$a^1 = a,$$

e para $n \geq 1$,

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Esta é a operação básica de potenciação, já estudada e entendida por alunos do ensino fundamental, mas que serve de base para todas as demais formas de potência que estudaremos neste capítulo. Assim, para melhor entender o funcionamento desta operação, vamos estudar algumas de suas propriedades básicas.

Observação 2.1.1. *É muito comum ver em livros didáticos que por definição $a^0 = 1$. Para tornar isso mais compreensível ao aluno, mostraremos como tal definição segue naturalmente das definições acima, uma vez entendidas suas propriedades.*

Propriedade 2.1. *Para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \neq 0$, valem as seguintes propriedades:*

I - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, *para* $m > n > 0$

III - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

V - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

As verificações de tais propriedades são bastantes simples, e seguem quase que diretamente da definição. A seguir apresentaremos demonstrações para cada propriedade. Em algumas delas mostraremos a propriedade de duas formas distintas. A primeira é uma forma mais visual, seguindo o mesmo formato usado na definição. Para a segunda, um pouco mais formal, utilizaremos uma técnica conhecida como indução finita. Maiores detalhes sobre este método podem ser encontrados em [15].

Demonstração. I - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Prova 1 - Pela definição, segue que

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ vezes}} = a^{m+n}.$$

Prova 2 - Fixando m, seguiremos por indução sobre n.

(i) Para $n = 1$ a relação $p(n) : a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$ é verdadeira pois pela definição,

$$a^m \cdot\ a^1 = a^m \cdot\ a = a^{m+1}.$$

(ii) Suponha que $p(k)$ seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto é, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ e vamos mostrar que $p(k+1)$ também é verdadeira. De fato:

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}$$

Segue por indução que $p(k+1)$ é verdadeira. Assim,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

II - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n > 0$

Como $m > n$, temos $m - n > 0$ e podemos escrever $m = (m-n) + n$. Pela propriedade anterior, segue então que

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}.$$

III - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ com $b \neq 0$ ou $n > 0$

Prova 1 - Pela definição, segue que

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ vezes}} = a^n \cdot b^n.$$

Prova 2 - Por indução sobre n.

(i) Para $n = 1$ vale a propriedade, pois:

$$(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$$

(ii) Suponha que a propriedade seja verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, isto é, $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$ e vamos mostrar que também é verdadeira para $k+1$, ou seja, $(a \cdot b)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$. De fato:

$$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b) = (a^k \cdot b^k) \cdot (a \cdot b) = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$$

IV - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

Prova 1 - Pela definição, segue que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ vezes}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Prova 2 - Por indução sobre n.

(i) Para $n = 1$ vale a propriedade, pois:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$$

(ii) Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$, mostremos que é verdadeira para $n = k+1$, ou seja:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}$$

De fato:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^k \cdot a}{b^k \cdot b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}$$

V - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Prova 1 - Segue da definição e da primeira propriedade que

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{m + m + \cdots + m}^{n \text{ vezes}}} = a^{m \cdot n}.$$

Prova 2 - Por indução sobre n, vamos considerar m fixo.

(i) Para $n = 1$ vale a propriedade, pois:

$$(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$$

(ii) Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $(a^m)^k = a^{m \cdot k}$, mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $(a^m)^{k+1} = a^{m \cdot (k+1)}$. De fato:

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m) = a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m(k+1)}$$

□

Como comentamos anteriormente, é comum encontrar nos livros didáticos que $a^0 = 1$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$, frequentemente colocado como parte da definição, e sem nenhum comentário adicional.

Para entender de onde vem esta igualdade precisamos voltar às propriedades que acabamos de demonstrar. Tomemos, por exemplo, a propriedade I, que diz que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ para $m, n > 0$. Se quisermos estender esta propriedade para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, precisaríamos que

$$a^m = a^{m+0} = a^m \cdot a^0,$$

e portanto fazer $a^0 = 1$ é a única forma de que tal propriedade possa ser levada para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado quando queremos definir a^{-n}, para algum $n \in N$. Para isso, podemos tomar a propriedade II, que diz que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0 \text{ e } m > n > 0.$$

Com $a^0 = 1$ podemos facilmente estender tal propriedade para $m \geq n \geq 0$, mas ainda precisamos que $m \geq n$, pois caso contrário teríamos $m - n < 0$ e nossa definição falharia.

Por outro lado, se quisermos que tal propriedade continue valendo para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, seria necessário e suficiente que

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

É interessante observar que no argumento acima não é necessário que n seja positivo. Em especial se quisermos que a propriedade em questão (e as demais) valham para quaisquer inteiros m, n.

Isso nos leva à primeira generalização na noção de potência, onde estendemos a definição para os números inteiros.

Definição 2.2. Dado um $a \in \mathbb{R}^*$ e um $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Temos que, a potência de base real diferente de zero, e expoente inteiro negativo é definido como o inverso da potência de inteiro positivo.

Além disso, para $n = 0$ definimos

$$a^0 = 1.$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que a definição acima permite extender as propriedades em 2.1 para todos os números inteiros, como colocamos abaixo.

Propriedade 2.2. *Para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a, b \neq 0$, e $m, n \in \mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:*

I - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, *para* $m > n > 0$

III - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

V - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

2.1.1 *Definições e Propriedades da Radiciação*

Antes de prosseguirmos com o estudo das potências com expoentes racionais, vamos explorar um problema que já atormentou muito os antigos.

O problema consiste em inverter a operação de potência. Ou seja, dado um real $a \in \mathbb{R}$ e um natural n, encontrar um outro número real $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$.

Para exemplificar, se perguntarmos qual o número real $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^3 = 125$, encontramos como resposta $b = 5$, pois sabemos que $5^3 = 125$.

O cálculo de tal valor para valores quaisquer de a e n é bastante difícil, e já foi razão para muita controvérsia. Na época de Pitágoras por exemplo, já era sabido que o comprimento x da diagonal de um quadrado de lado 1 era tal que $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, mas seu valor não era conhecido. De fato, este é o primeiro número reconhecido como irracional, fato que estremeceu a escola Pitagórica, que acreditava que os números racionais poderiam descrever toda a geometria do mundo.

Não apenas o cálculo, mas a própria existência de tais números, é um desafio que ultrapassa nossas intenções com este texto. Por esta razão, o resultado a seguir é listado sem demonstração. Comentaremos um pouco mais sobre este o outros resultados envolvendo números irracionais um pouco mais a frente no capítulo, em uma seção dedicada apenas a isso, e cuja a leitura não é obrigatória para o entendimento do resto do trabalho.

Proposição 2.1. *Dado um número real $a \geq 0$ e um número natural $n \geq 1$, existe sempre um número real positivo ou nulo b, tal que $b^n = a$.*

Chamamos a tal número de raíz enésima de a, e escrevemos

$$\sqrt[n]{a} = b,$$

considerando a o radicando e n o índice do radical.

Observação 2.1.2. *Da proposição 2.1 decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geq 0$*

Assim como com potências inteiras, vamos a seguir estudar as propriedades de tal operação.

Propriedade 2.3. *Se a e $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, n e $p \in \mathbb{N}^*$, valem as seguintes propriedades:*

I - $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$ *para* $a \neq 0$ *ou* $m \neq 0$

II - $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

III - $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *para* $b \neq 0$

IV - $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, *para* $a \neq 0$ *ou* $m \neq 0$

V - $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p\cdot n]{a}$

Demonstração. Propriedade I - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$

Considere $\sqrt[n]{a^m} = x$, assim

$$x^{n\cdot p} = (\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = [a^m]^p \Rightarrow x = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

Propriedade II - $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Considere $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, assim

$$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Propriedade III - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Considere $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ com $b \neq 0$, então

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b},$$

e portanto

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Propriedade IV - $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Faça $x = \sqrt[n]{a}$, e note que $x^n = a$ e $a^m = x^{n \cdot m}$.

Segue daí que $a^m = (x^m)^n$, e portanto

$$\sqrt[n]{a^m} = x^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Propriedade V - $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Considere $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$, assim podemos escrever:

$$x^p = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}})^p = \sqrt[n]{a}$$
$$(x^p)^n = (\sqrt[n]{a})^n$$
$$x^{p \cdot n} = a$$
$$x = \sqrt[p \cdot n]{a}$$

□

2.1.2 *Potências com o expoente racional*

Nesta seção continuaremos nosso trajeto de estudo de potências, e seguindo a ideia de preservação de propriedade, vamos definir as potências a^x, com x da forma $\frac{p}{q}$. Ou seja, x racional com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Relembrando, vimos que

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$$

Deste modo, dado $x = p/q$, se quisermos que ainda seja válida a propriedade V em 2.2, devemos ter que

$$(a^x)^q = a^{x \cdot q} = a^p.$$

Segue que, portanto, a^p pode ser definida como a q-ésima potência do número real positivo a^x. Com isso segue a seguinte definição.

Definição 2.3. Dado o número real $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$ definimos

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Como fizemos com as demais definições, vamos verificar algumas das propriedades deste tipo de potência. Como esperado, as mesmas propriedades vistas para potências naturais e inteiras ainda são válidas. Algumas delas consequências diretas das propriedades da radiciação.

Propriedade 2.4. *Se a e $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ então valem as seguintes propriedades:*

I - $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

II - $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

III - $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

IV - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

V - $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

Demonstração. Propriedade I - $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

Segue da definição que

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = (\sqrt[q]{a}^p)^q = a^p$$

e analogamente

$$\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{s} = a^{r}$$

Então

$$\left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{q\cdot s} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q\cdot s} \cdot \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{q\cdot s} = \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right)^{s} \cdot \left(\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{s}\right)^{q} = a^{p\cdot s} \cdot a^{r\cdot q} = a^{(p\cdot s)+(r\cdot q)}.$$

Assim,

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{(p\cdot s)+(r\cdot q)}{q\cdot s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

De modo alternativo, segue da propriedades I e II em 2.3 que

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Propriedade II - $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

De modo análogo à propriedade anterior, segue das propriedades I e III em 2.3 que

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{\frac{a^{ps}}{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}} = a^{\frac{ps-rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

Propriedade III - $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

Assim como nos casos anteriores, segue da propriedade IV em 2.3 que

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^{p}} = \sqrt[q]{a^{p} \cdot b^{p}} = \sqrt[q]{a^{p}} \cdot \sqrt[q]{b^{p}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

Propriedade IV - Segue de modo análogo às anteriores, e deixamos como exercício para o leitor.

$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$

Propriedade V - Segue da propriedade V em 2.3 que

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{r}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^{p}}\right)^{r}} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$$

□

Estamos quase lá, mas ainda falta definir as potências com expoentes irracionais. Como comentamos no início do capítulo, tais potências são mais complicadas de se definir, e usam conceitos normalmente ausentes no currículo do ensino básico.

Por isso, vamos terminar esta seção mostrando que as potências racionais já são bastante boas para quase tudo o que é tratado sobre funções exponenciais no ensino básico.

Lema 2.4. *Dado um número $a \in \mathbb{R}_+$, com $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+$, existe alguma potência a^x, com $x \in \mathbb{Q}$*

Demonstração. Embora saibamos que tais potências não varre todos os números reais positivos (faltam as potências irracionais), este resultado nos mostra que a^x com $x \in \mathbb{Q}$ está de algum modo espalhado por todo os reais positivos.

Dados então $0 \leq \alpha < \beta$, precisamos encontrar $x \in \mathbb{Q}$, tal que $\alpha \leq a^x \leq \beta$.

Antes de prosseguir precisamos perceber uma importante propriedade das potências naturais. Tome um $y > 0$ qualquer, e note que

$$(1+y)^2 = 1 + 2y + y^2 \geq 1 + 2y.$$

Do mesmo modo,

$$(1+y)^3 \geq (1+2y)(1+y) = 1 + 3y + 2y^2 \geq 1 + 3y,$$

e

$$(1+y)^4 \geq (1+3y)(1+y) = 1 + 4y + 3y^2 \geq 1 + 4y.$$

Seguindo este raciocínio mostramos que para todo $n \geq 1$

$$(1+y)^n \geq 1 + ny.$$

Assim, dados quaisquer $x > 0$ e $\beta > 1$ conseguimos $n \geq 1$ tal que

$$(1+y)^n > \beta.$$

De fato, se tomarmos qualquer $n \geq (1-\beta)/y$ temos

$$(1+y)^n \geq 1 + ny \geq 1 + \left(\frac{1-\beta}{y}\right) y = \beta.$$

Voltando ao resultado, suponha $a > 1$ e $\alpha > 1$. Tome então m, n naturais tais que

$$\alpha < \beta < a^m$$

e

$$1 < a < \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{a^m}\right)^n$$

Segue que

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\alpha - \beta}{a^m}$$

e

$$0 < a^m \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \alpha - \beta \tag{2.1}$$

Tome então $k \in \mathbb{N}$ é tal que $\dfrac{k}{n} \leq m$, e observe que como $a > 1$ então $a^{1/n} > 1$ e

$$a^{\frac{k-1}{n}} < a^{\frac{k-1}{n}} a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{k}{n}},$$

e em particular

$$a^{\frac{k}{n}} \leq a^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m.$$

Segue então de (2.1)

$$0 < a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{k}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq a^m \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \alpha - \beta.$$

Assim, as potências $a^0 < a^{\frac{1}{\beta}} < a^{\frac{2}{\beta}} < \cdots < a^{\alpha}$, formam intervalos consecutivos de tamanho menor que $\alpha - \beta$, e portanto existe ao menos um k tal que

$$\alpha \leq a^{\frac{k}{n}} \leq \beta.$$

De fato, se não existir tal k, como $a^0 = 1 < \alpha < \beta < a^m$, então deve existir k tal que

$$a^{\frac{k}{n}} < \alpha < \beta < a^{\frac{k+1}{n}},$$

o que nos daria

$$a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} > \alpha - \beta.$$

Para os demais casos basta notar que

$$\alpha < a^x < \beta < 1 \Longleftrightarrow 1 < \frac{1}{\beta} < a^{-x} < \frac{1}{\alpha}.$$

$\square$

2.1.3 *Potências com expoente irracional*

Para completar a parte de potências, é necessário que tratemos das potências com expoente irracional. Mas, ao contrário do que acontece com os demais casos, tais potências não aparecem de forma tão natural a partir das definições á tratadas. Isso se deve ao fato de que os números irracionais por si só requerem um tratamento mais fino para seu entendimento. Vários séculos separam o surgimento e uso dos primeiros números racionais do entendimento completo dos números irracionais. Os pitagóricos, como já comentamos, acreditavam que toda a geometria poderia ser descrita por números racionais.

As ferramentas matemáticas necessárias para estudar tais números surgiu muito posteriormente, e envolve conceitos não trabalhados em sala de aula durante o ensino básico, sendo deixado quase que exclusivamente para os primeiros anos de cursos superiores.

No entanto acreditamos que a compreensão ao menos intuitiva de tais conceitos não está completamente fora do alcance de nossos alunos, e portanto decidimos tratar abaixo as potências irracionais de forma menos formal, mas explorando as ideias e conceitos centrais usados nesta definição. Com isso esperamos deixar um pouco mais claro o funcionamento de tais potências, e como estas se conectam com as vistas anteriormente.

Falaremos dos pontos mais importantes, deixando alguns detalhes técnicos de lado. Seguiremos na maior parte as ideias expostas em [2], de modo que se o leitor quiser saber mais sobre os números irracionais e como eles estão definidos, esta é uma boa referência.

Vimos na seção passada que as potências com números racionais estão espalhadas por todo $\mathbb{R}_+$, no sentido de serem encontradas em quaisquer intervalos. Mas isso não significa que não existam buracos a serem preenchidos. Isso pois apesar de potências racionais estarem em quaisquer intervalos, fixado um $a > 0$, ainda existem diversos reais que não podem ser escritos como potência racional de a.

Esses espaços serão preenchidos justamente pelas potências irracionais. Para fixar notação representaremos o conjunto dos irracionais por $\mathbb{I}$, ou seja, $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Como valores neste conjunto não são racionais, e portanto não podem ser escritos como quocientes de dois números naturais, é visto no ensino básico que a representação desses números possui parte decimal infinita não periódica.

Antes de seguir com a apresentação dos números irracionais, vamos retornar ao problema encontrado na escola Pitagórica, e já citado anteriormente.

Exemplo 2.1. Desde Pitágoras, os gregos já sabiam que se x é o tamanho da diagonal de um quadrado, então $x^2 = 1^2 + 1^2 = 1$. Quanto mede efetivamente a diagonal de um quadrado de lado 1? Em outras palavras, qual o número real x, tal que $x^2 = 2$?

Uma das maneiras de responder a essa pergunta é calculando esse número por aproximação, por falta ou por excesso, usando valores racionais. Sabemos que, o produto do número desejado por ele mesmo tem que ser 2, então:

$$1 < x < 2$$

Pois, $1 \cdot 1 = 1$ e $2 \cdot 2 = 4$, e ainda,

$$1,4 < x < 1,5$$

Pois, $1,4 \cdot 1,4 = 1,96$ e $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$, e assim segue que:

$$1,41 < x < 1,42$$

$$\begin{gathered} 1,414 < x < 1,415 \\ 1,4142 < x < 1,4143 \\ 1,41421 < x < 1,41422 \\ 1,414213 < x < 1,414214 \\ 1,4142135 < x < 1,4142136 \\ 1,41421356 < x < 1,41421357 \\ \vdots \end{gathered}$$

Perceba que os valores do lado esquerdo das desigualdades estão crescendo e estão se aproximando um certo número valor. Do mesmo modo, os valores no lado direito estão decrescendo e se aproximando do que parece ser exatamente o mesmo valor. De fato, o leitor é convidado a verificar, com o auxílio de uma calculadora, que o quadrado destes números estão mais próximos de 2 a cada passo. Isso nos permite concluir que tal número deve ser exatamente o valor que buscamos.

É interessante notar que só é possível obtermos uma melhor aproximação se acrescentarmos novos algarismos decimais aos que já estão lá, que por sua vez, não apresenta periodicidade na indicação desses números.

Exemplo 2.2. Um outro número irracional bastante conhecido é o número de π. Por definição, esse número representa a área de uma circunferência de raio unitário. Mais uma vez, podemos representar esse número irracional por aproximação. Neste caso, inscrevemos no círculo de raio 1 polígonos regulares cada vez com mais números de lados, assim, as arestas do polígono tendem a ficar cada vez mais próximo da circunferência que limita o círculo, como mostra a figura 16.

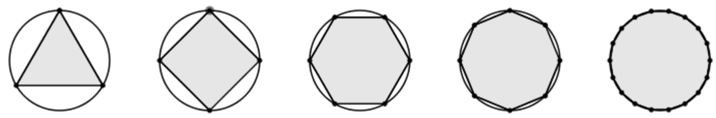

Figura 16: Aproximação do número π, através das áreas dos polígonos inscritos na circunferência de raio 1

Veja mais uma vez que, o nosso número irracional é encontrado por uma aproximação, ou seja, quanto maior for o número de lados do polígono inscrito no círculo de raio 1, mais próximo a área desse polígono estará do nosso número π.

Mas como nesta aproximação temos números também irracionais, faremos outra um pouco mais simples.

Usando a representação de π em números decimais, podemos apenas trucar a sequência infinita em uma certa posição, ignorando os algarismos seguintes. Fazendo isso após cada algarismo da representação, encontramos a sequência

$$\begin{gathered} 3 \\ 3,1 \\ 3,14 \\ 3,141 \\ 3,1415 \\ \vdots \end{gathered}$$

Esta é uma maneira *informal* de apresentar os números irracionais, mas que usa conceitos tratados no ensino básico e acreditamos que pode ser tratada sem problemas em sala de aula.

Esta forma de olhar para os números irracionais trás uma maneira bastante intuitiva de se definir uma potência irracional.

Dado um número irracional $x \in \mathbb{R}$, tome uma sequência de números racionais $r_1, r_2, r_3, \dots$, se aproximando de x, denotado normalmente por

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x.$$

É intuitivo perceber que, dado $a > 0$, a sequência

$$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots,$$

também está se aproximando de algum número $y \in \mathbb{R}$. Ou seja

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y.$$

Podemos então definir a^x como sendo precisamente este número. Ou seja, temos a seguinte definição.

Definição 2.5. Dado $a \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}$ defina

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

onde (r_n) é qualquer sequência monótona de racionais, com

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

De fato, esta é uma definição possível, mas cuja formalização pode ser um pouco complicada. A seguir faremos, ao menos parcialmente, esta formalização. A leitura da próxima parte é opcional, e o leitor pode saltar para a seção de funções exponenciais sem prejuízo ao entendimento do texto.

Sequências e Limites[1]

Para definirmos essas potências usaremos o conceito de sequências, convergência, supremo e ínfimo. Essa é uma das maneiras que temos para garantir o lema 2.4, apresentando as potências com números irracionais. Antes de iniciarmos sua demonstração, mostraremos primeiramente cada um dos conceitos que serão utilizados.

Dados números $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ denotaremos por

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

a sequência definida por tais valores, com a_n sendo o termo geral da sequência.

Sequências são portanto sucessões de números reais. Algumas sequências recebem classificações particulares quando satisfazem certas propriedades. As mais importantes para nós são a seguintes

1 Deste ponto até o final da seção trataremos as potências irracionais de maneira mais formal, e o leitor que preferir pode pular diretamente para a seção de funções exponenciais, sem perda de entendimento.

- (a_n) é dita crescente ou estritamente crescente se

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n \ldots.$$

Ou seja, se

$$a_n < a_{n+1},$$

para todo $n \geq 1$.

- (a_n) é dita decrescente ou estritamente decrescente

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n \ldots.$$

Ou seja, se

$$a_n > a_{n+1},$$

para todo $n \geq 1$.

- (a_n) é dita não-crescente se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots.$$

Ou seja,

$$a_n \leq a_{n+1},$$

para todo $n \geq 1$.

- (a_n) é dita não-decrescente se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \ldots.$$

Ou seja, se

$$a_n \geq a_{n+1},$$

para todo $n \geq 1$.

Observação 2.1.3. *Se uma sequência satisfaz qualquer uma dessas propriedades acima ela é caracterizada como monótona.*

Vamos a seguir trabalhar com o conceito de convergência de uma sequência.

Se seguirmos ao pé da letra, podemos entender intuitivamente o significado de convergência de uma sequência. A palavra convergência nos faz lembrar de algo que se direciona a algum lugar ou ponto, pois bem, a ideia é exatamente essa. Intuitivamente, uma sequência (a_n) *converge* para um certo $L \in \mathbb{R}$ quando a_n fica mais próxima de L a medida que n aumenta.

Tome, por exemplo, a sequência $1, 1/2, 1/3, \ldots$, definida por

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

É fácil ver que a medida que aumentamos n, mais próximo de 0 ficam os valores da sequência.

Mais do que isso, dado qualquer $\varepsilon > 0$, sempre existe um N, tal que $a_n < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Para ver isso escolha, por exemplo, $\varepsilon = 0,000003$, e observe que

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{3} = \frac{10}{3} \cdot 10^5 < 400000.$$

Assim, para todo $n > 400000$ vale que

$$a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{40000} < \varepsilon.$$

Isso mostra que aumentando o valor de n, a_n chega tão próximo de 0 quanto desejemos.

Dizemos então que (a_n) converge para 0, ou ainda, que 0 é o *limite* de a_n quando n tende ao infinito.

Expandindo esta ideia, encontramos a seguinte definição.

Definição 2.6. Seja uma sequência (a_n) de números reais e um número real L, dizemos que L é o limite da sequência, ou que (a_n) converge para L, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$; tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Em outras palavras, se $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, então dado um intervalo qualquer $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L temos que todos os termos a_n da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices n, estarão contidos no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Assim, só poderiam estar fora do intervalo no máximo os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$, para algum N, pois a partir de $n \geq N$ todos os valores de a_n pertenceram a este intervalo.

Ou seja, sempre existirá um $N > 0$, dependendo de ε, para o qual

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

SEQUÊNCIAS DE RACIONAIS - PRIMEIRAS IMPRESSÕES Vimos no início da seção alguns exemplos de sequências de racionais que convergem para irracionais. As sequências que montamos eram monótonas, e mostramos que o processo de truncamento sempre gera uma sequência monótona que converge para o número desejado.

Precisamos entender agora o que acontece com as sequências formadas pelas potências destes valores. Ou seja, dado $a > 0$ e uma sequência (r_n) monótona de números racionais, queremos entender como se comporta a sequência (a_n) dada por $a_n = a^{r_n}$.

O primeiro passo para isso é entender MONOTONICIDADE.

O primeiro passo é tentar entender se a monotonicidade de (r_n) se transfere de algum modo para (a^{r_n}). Para isso, precisamos entender se $r < s$, implica de algum modo que $a^r < a^s$ ou mesmo que $a^r > a^s$.

Tal propriedade faz parte do currículo básico do ensino básico, e está presente na maior parte dos livros didáticos. Mas como acontece com a maior parte dos resultados envolvendo potências, é apresentado de forma pobre, com justificativas rasas e incompletas. Por esta razão, escolhemos fazer este estudo com calma, justificando cada passagem.

Como de costume, vamos nos concentrar no caso em que $a > 1$. Ao final generalizaremos os resultados, usando que $a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}$.

Observe que mostrar que $a^r > a^s$ é equivalente a mostrar que

$$a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s} > 1.$$

Por isso começaremos analisando sob que condições temos $a^r > 1$ ou $a^r < 1$.

Seguindo a mesma ordem que temos seguido desde o início, começaremos analisando potências de números inteiros, para só depois passarmos para os racionais.

Comecemos então!

Lema 2.7. *Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, vale que $a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.*

Demonstração. Isso seguirá da definição, bastando para isso perceber se $a > 1$ então

$$a^{k+1} = a^k \cdot a > a^k \cdot 1 = a^k.$$

Isso mostra que $1 < a < a^2 < a^3 < a^4 < \cdots$, e portanto (a^n) é uma sequência crescente.

Usando o mesmo raciocínio para $a^{-1} < 1$ encontramos que para $k > 0$ que

$$a^{-(k+1)} = a^{-k} \cdot a^{-1} < a^{-k} \cdot 1 = a^{-k}.$$

Encontramos assim que se $a > 1$, então

$$\cdots < a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < a^0 = 1 < a < a^2 < a^3 < \cdots,$$

e o resultado segue diretamente.

Abaixo apresentamos uma demonstração mais formal, mas que segue exatamente as mesmas ideias apresentadas acima.

Mostraremos primeiro que $n > 0 \Longrightarrow a^n > 1$. Seguiremos por indução em $n > 0$.

(i) Para $n = 1$, temos que: $a^1 = a > 1$ é verdadeira.

(ii) Supondo que $a^k > 1$, mostraremos que é verdadeira para $a^{k+1} > 1$.

Como fizemos acima, como $a > 1$, então

$$a^{k+1} = a^k \cdot a > a^k \cdot 1 = a^k > 1.$$

Mostramos assim que se $n > 0$, então $a^k > 1$.

Para mostrar a volta (se $a^n > 1$, então $n > 0$), note primeiro que, quando $n = 0$ temos $a^n = a^0 = 1$. Tomando agora $n < 0$, segue da primeira parte do resultado que $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$, e portanto

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^n \geq 1$$

Multiplicando ambos os membros por $a^n > 0$, obtemos

$$a^{-n} \geq 1$$

$$a^n \cdot a^{-n} \geq 1 \cdot a^n$$

$$a^0 \geq a^n$$

$$1 \geq a^n$$

Isso mostra que se $n \leq 0$, então $a^n \leq 1$. Ou ainda, que se $a^n \leq 1$, então $n \leq 0$. $\square$

Vamos agora estender o resultado acima para potências racionais.

Lema 2.8. *Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, vale que $a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$*

Demonstração. Provemos primeiro que se $r > 0$, então $a^r > 1$.

Considere $r = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}^*$, de modo que $a^r = a^{\frac{p}{q}}$.

Pelo lema 2.7, se $a = (a^{\frac{1}{q}})^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Isso por que se tivéssemos $a^{\frac{1}{q}} < 1$, como $q > 0$ teríamos $a = (a^{\frac{1}{q}})^q < 1$, o que é absurdo.

Assim, como $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, então $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1$ e

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p > 1$$

Provemos agora que $a^r > 1$, então $r > 1$.

Novamente, faça $r = \frac{p}{q} \leq 0$, com $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, de modo que $a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Como $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p \leq 0$, segue do lema 2.7 que

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p \leq 1,$$

completando a prova.

□

Com este resultado em mãos, fica fácil estudar as desigualdades entre potências racionais.

Lema 2.9. *Dados $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 1$, e $r, s \in \mathbb{Q}$, vale que $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.*

Demonstração. Segue direto do lema 2.8 que se

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^{s-r} = \frac{a^s}{a^r} > 1 \Leftrightarrow s - r > 0 \Leftrightarrow s > r.$$

□

Segue do lema 2.9 acima, que se (r_n) é uma sequência monótona de números racionais, então (a^{r_n}) é também monótona.

De fato, se (r_n) é não-decrescente (ou até mesmo crescente) e $a > 1$, então para qualquer n, $r_n \leq r_{n+1}$, e portanto $a^{r_n} \leq a^{r_{n+1}}$, e a sequência (a^{r_n}) é não-decrescente.

Do mesmo modo, se (r_n) é não-crescente (ou até mesmo decrescente), a sequência (a^{r_n}) é também não-crescente (ou crescente).

Fazer $a < 1$ tem o efeito de inverter as desigualdades, mas ainda deixando (a^{r_n}) monótona.

Antes de passarmos para o estudo mais completo de sequências de potências racionais, façamos primeiro um exemplo. Para isso, voltemos à sequência dada por

$$a_n = \frac{1}{n},$$

supondo por um instante que $a > 1$.

Neste caso temos que $a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n+1}} > 1$, e parece razoável supor que

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Vamos supor que este limite não seja verdadeiro. Como

$$a^{\frac{1}{n}} > 1$$

para todo $n \geq 1$, isso significaria que existe algum $\varepsilon > 0$ tal que

$$a^{\frac{1}{n}} > 1 + \varepsilon,$$

para todo n. Mas isso implicaria que

$$a \geq (1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon,$$

para todo $n \geq 1$, o que é um absurdo.

Mostramos assim que

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Um raciocínio análogo, mostra que o mesmo vale para $0 < a < 1$.

Com um pouco mais esforço, podemos generalizar este resultado e mostrar que

Proposição 2.10. *Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ e seja (r_n), $0 < r_n < 1$ uma sequência de números racionais convergentes para zero, tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = 1$$

Não entraremos em detalhes da demonstração, mas apontaremos que como

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

então para todo $m \in \mathbb{N}$, conseguimos encontrar $N > 0$ tal que

$$-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}.$$

E isso nos permite comparar a sequência a^{r_n} com a sequência $a^{\frac{1}{n}}$.

Posto isso, vamos deixar que o leitor complete os detalhes desta demonstração.

SEQUÊNCIAS MONÓTONAS Estamos quase prontos para estudar os limites de sequências racionais, e assim conseguir definir potências irracionais, mas para fazer isso precisamos de mais alguns conceitos importantes!

Dando continuidade então, dado um conjunto de números reais A, diremos que $c \in \mathbb{R}$ é uma *cota superior* para A se $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Do mesmo modo, $c \in \mathbb{R}$ é uma *cota inferior* para A se $c \leq x$ para todo $x \in A$.

Exemplo 2.3. Dado o conjunto

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 \geq 2\},$$

temos que 2 é uma cota superior para A, pois se $r \in A$, então $r^2 < 2 < 4 = 2^2$. E portanto $r < 2$.

Da mesma forma -2 é cota inferior para A.

Observe, no entanto, que 2 não é a menor cota superior de A. Basta percebermos que, por exemplo,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2,$$

e pelo mesmo raciocínio, $3/2$ é outra cota superior para A, mas menor que 2.

De fato, a menor cota superior para A é exatamente $\sqrt{2}$!

Isso por que se $c < \sqrt{2}$, então pelo lema 2.4, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $c < r < \sqrt{2}$. Assim $r \in A$ e c não é cota superior.

Dizemos neste caso, que $\sqrt{2}$ é o *supremo* de A.

Definição 2.11. Seja A um conjunto de números reais limitado superiormente e não vazio, diremos que $a \in \mathbb{R}$ é o supremo de A, quando

- a é cota superior de A;
- Se $c \in \mathbb{R}$ é cota superior de A então $a \leq c$.

Escreveremos então que

$$a = \sup A.$$

Analogamente, se A for um subconjunto dos números reais limitado inferiormente e não vazio, diremos que um número $b \in \mathbb{R}$ é o supremo de A, quando

- b é cota inferior de A;
- Se $c \in \mathbb{R}$ é cota inferior de A então $b \geq c$.

Denotaremos isso por

$$b = \inf A$$

Voltando ao exemplo 2.3, definimos $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 \geq 2\}$ e vimos que $\sqrt{2} = \sup A$. E da mesma forma, podemos mostrar que $-\sqrt{2} = \inf A$.

Mas perceba que $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \notin A$, pois A é formado apenas de números racionais! Isso mostra que o supremo ou o ínfimo de um conjunto não precisam ser elementos do conjunto.

Estamos prontos agora para mostrar o seguinte resultado.

Teorema 2.12. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Tome (a_n) uma sequência monótona, limitada e não decrescente, faça $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ e $b = \sup A$.

Vamos agora mostrar que $b = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Para isso, dado qualquer $\varepsilon > 0$, sabemos da definição de supremo que $b - \varepsilon$ não é cota superior de A. Portanto, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, $b - \varepsilon < a_N \leq b$, e pela monotonicidade de a_n,

$$n > N \Rightarrow b - \varepsilon < a_N \leq a_n < b + \varepsilon,$$

mostrando assim que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = b.$$

Um raciocínio análogo mostra o resultado para (a_n) não-crescente, com diferença que agora o limite será dado pelo ínfimo.

$\square$

DEFININDO POTÊNCIAS IRRACIONAIS - Estamos prontos para concluir nossa seção, e finalmente definir o que entenderemos por uma potência irracional.

Como já falamos no início da seção, todo irracional pode ser aproximado por uma sequência monótona de irracionais. Além disso, a sequência das potências definidas com estes expoentes também será monótona e, como veremos a seguir, limitada, e portanto convergente.

Isso torna razoável a definição 2.5, que apresentamos anteriormente, e que repetiremos a seguir para simplificar a leitura.

Definição 2.13. Dado $a \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}$ defina

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

onde (r_n) é qualquer sequência monótona de racionais, com

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

Mas a definição ainda tem um problema!

Sabemos que se (r_n) é monótona, então a sequência (a^{r_n}) é também monótona.

Mais do que isso, como (r_n) é limitada, então existem $c, b \in \mathbb{Q}$ tais que $c < r_n < b$ para todo $n \geq 1$, e portanto temos

$$a^c < a^{r_n} < a^b, \quad \text{para todo } n \geq 1, \text{ quando } a > 1,$$

ou

$$a^c > a^{r_n} > a^b, \quad \text{para todo } n \geq 1, \text{ quando } a < 1.$$

Concluímos assim que a sequência (a^{r_n}) é monótona e limitada, e portanto convergente.

O que não sabemos é que o limite (a^{r_n}) é o mesmo para qualquer sequência (r_n) com $\lim_{n\to\infty} r_n = x$.

Precisamos então mostrar que se duas sequências de racionais, (b_n) e (b'_n), monótonas, convergem para x, então as sequências (a^{b_n}) e $(a^{b'_n})$ convergem para o mesmo valor. Ou seja, precisamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a^{b'_n}.$$

Mas se

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b'_n = x,$$

então

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - b'_n) = 0,$$

e, pelo teorema 2.10,

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n - b'_n} = 1.$$

Segue assim que

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a^{b_n - b'_n} \cdot a^{b'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{b'_n}.$$

Com isso mostramos que realmente podemos definir

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$$

para qualquer sequência monótona b_n que convirja para x.

2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Funções exponenciais são largamente estudadas no ensino médio, e existe o material didático sobre o assunto é vasto. Não pretendemos aqui repetir tudo o que é feito nestes livros, mas apenas complementar aquilo que achamos interessante. A maior parte deste complemento foi feito com a definição de a^x. Vamos então complementar com mais algumas propriedades importantes.

Comecemos pela definição.

Definição 2.14. Seja a um número real positivo, tal que $0 < a \neq 1$, chama-se função exponencial de base a, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$

Esta é a definição natural, usada na maioria (se não na totalidade) dos livros didáticos de ensino médio. É importante destacar algumas propriedades, algumas delas já extensivamente discutidas neste capítulo.

Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial $f(x) = a^x$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $a^1 = a$;
2. $a^0 = 1$;

3. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
5. $a^{xy} = (a^x)^y$
6. Se $a > 1$ então $a^x < 1$ para $x < 0$, e $a^x > 1$ para $x > 0$;
7. Se $a < 1$ então $a^x > 1$ para $x < 0$, e $a^x < 1$ para $x > 0$;
8. Se $x < y$ então

$$\begin{cases} a^x < a^y, & \text{se} \quad a > 1, \quad \text{e } f(x) \text{ é crescente} \\ a^x > a^y, & \text{se} \quad 0 < a < 1, \quad \text{e } f(x) \text{ é decrescente} \end{cases}.$$

Não vamos entrar nos detalhes de como verificar tais propriedades, mesmo por que todas já foram demonstradas no caso de $x, y \in \mathbb{Q}$.

O leitor é convidado a verificar as propriedade de 1 a 5, bastando para isso tomar sequências (r_n) e (s_n) monótonas quaisquer com $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} s_n = y$.

Como exemplo, nos concentraremos em mostrar as propriedades 6, 7 e 8.

As propriedades são de fácil verificação para x natural. De fato, pela definição de potência natural, se $a > 1$ temos $a^1 = a > 1$ e

$$a^n = a^{n-1} \cdot a > a^{n-1},$$

e portanto

$$a^n > a^{n-1} > a^{n-2} > \cdots > a > 1.$$

De modo análogo podemos estudar os casos em que $a < 1$ e/ou x é um inteiro negativo.

O caso racional pede um pouco mais de cuidado, e sua prova pode ser vista no lema 2.8.

Agora, para verificar 6 no caso de x irracional, tome primeiro (r_n) crescente ($r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$), tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x < 0$. Como $r_n < x < 0$ para todo $n \geq 1$, temos que $a^{r_n} < a^0 = 1$ para todo $n \geq 1$.

Além disso, podemos escolher $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < 0$, de onde segue que $a^{r_n} < a^r < 1$ para todo $n \geq 1$.

Isso mostra que

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} < a^r < 1.$$

No caso em que $x > 0$, tome (s_n) decrescente, tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = x > 0$. Um raciocínio análogo mostra que

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} > a^s > 1,$$

para algum $s \in \mathbb{Q}$, com $1 > s > 0$.

A propriedade 7 segue da 6, usando que $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Finalmente, para mostrar 8, tome $a > 1$ e $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x > y$. Segue então que $x - y > 0$ e

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} > 1,$$

mostrando que $a^x < a^y$.

Para $a < 1$ a prova é análoga.

Como vemos no ensino médio, podemos representar todas as potenciações da forma a^x com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ nas curvas representadas pelas funções $f(x) = a^x$ quando $a > 0$ e $g(x) = a^x$ quando $0 < a < 1$, conforme figura 17.

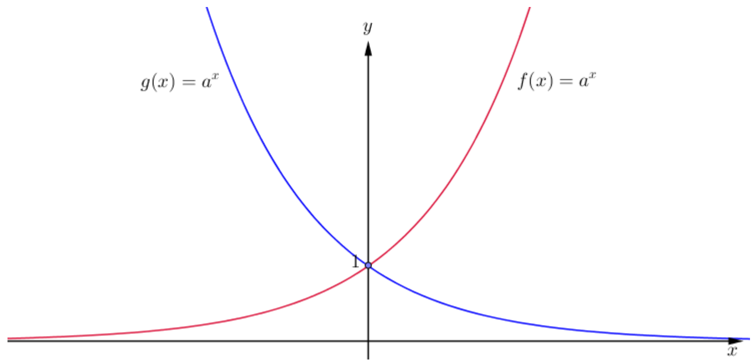

Figura 17: Representação gráfica das funções exponenciais f(x) e g(x)

Outra propriedade importante é a seguinte

Proposição 2.2. *A função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ é injetora. Ou seja, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.*

Demonstração. Tome $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(y)$. Segue que $a^x = a^y$, e portanto

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} = 1,$$

e como $a \neq 1$ temos $x - y = 0$, e o resultado segue. $\square$

Note que, em nossas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ não temos imagem negativa, para qualquer valor de $a > 0$, pois, não importa quem seja o expoente x a função sempre admitirá valores positivos.

Mas se tomarmos $b > 0$ qualquer, será que encontramos $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$?

Para responder isso, escolha $N > 0$ tal que $b - \frac{1}{N} > 0$ e defina a sequência

$$b_0 = b - \frac{1}{N}, \, b_1 = b - \frac{1}{N+1}, \cdots, b_n = b - \frac{1}{N+n}, \cdots.$$

Temos uma sequência $b_0 < b_1 < \cdots < b_n < \cdots$ com $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Já sabemos que em qualquer intervalo de reais positivos conseguimos encontrar alguma potência a^r com r racional. Deste modo, dado $n \geq 1$ podemos escolher r_n tal que

$$b_{n-1} \leq a^{r_n} < b_n.$$

Sabemos também que, para $a > 1$,

$$a^{r_n} < b_n \leq a^{r_{n+1}},$$

de modo que

$$a^{r_n - r_{n+1}} = \frac{a^{r_n}}{a^{r_{n+1}}} < 1,$$

e $r_n < r_{n+1}$.

Além disso, escolhendo um racional s tal que $a^s > b$, encontramos que $a^{r_n} < b < a^s$ e portanto $r_n < s$, para todo $a \geq 1$.

Segue assim que as sequências (r_n) e (a^{r_n}) são ambas monótonas e limitadas. Portanto, são ambas convergentes.

Convidamos o leitor a verificar que, pela construção de a^{r_n} segue diretamente que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b.$$

Assim, fazendo

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n$$

, encontramos que

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b.$$

Mostramos assim que

Proposição 2.3. *Dado* $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$*, a função exponencial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$*, definida por* $f(x) = a^x$*, é sobrejetora e injetora, e portanto bijetora.*

Isso permite que definamos a inversa de $f(x)$, e este será um dos assuntos do próximo capítulo!

3

O SURGIMENTO DOS LOGARITMOS

Neste capítulo trataremos da chamada função logarítmica. Apresentaremos no início uma breve revisão histórica, que conta como se iniciaram os estudos que levaram à sua definição, além das primeiras aplicações. Em seguida definiremos esta nova função, tendo como base a função exponencial definida no capítulo anterior. Terminaremos abordando rapidamente uma maneira alternativa de definir tal função.

3.1 JOHN NAPIER, O INVENTOR

Nascido em 1550 (a data exata é desconhecida) na Escócia, *John Napier* aos treze anos estudou religião na Universidade de St. Andrews, onde tinha como interesse inicial o ativismo religioso. Publicou o livro *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John (1593)* no qual confrontava a igreja católica.

John Napier, entrou para a história não pelo fato dos esforços que atacava a igreja Católica que há muito foram esquecidas, mas sim devido a uma grande ideia que levara cerca de 20 anos para desenvolver: os logaritmos.

No fim do século XVI e o início do século XVII o desenvolvimento da Astronomia, da navegação e das tábuas de juros, exigia cálculos aritméticos bastante complexos para a época, exigindo um auxílio a esses cálculos em desenvolver técnicas para efetua-los. Pois bem, a ocasião gritava por alguma descoberta que permitisse calcular com precisão multiplicações e divisões por um método simples e objetivo. Segundo [11],

> "As tarefas, provocadas pela expansão comercial e pelos melhoramentos técnicos da arte de navegar (séc. XV), obrigaram a criação de algorismos mais compactos."

Segundo [20] esse foi um período onde estudos sobre a trigonometria estavam sendo realizados e Napier já era conhecedor das fórmulas escritas como regras de prostaférese que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença (daí o nome *prosthaphaeresis*, palavra grega que significa adição e subtração). Sua importância está no fato de que o produto de duas expressões trigonométricas, tais como $senA\ senB$, poderem ser calculadas determinando a soma ou a diferença de outras expressões trigonométricas, neste caso $cos(A - B)$ e $cos(A + B)$. É bem provável, que essa tenha sido a ideia que Napier encontrou para simplificar os cálculos imensos que eram feitos para construir as tábuas trigonométricas para a navegação e astronomia.

Muito antes da época de Napier uma relação mais direta com expoentes, envolvia termos de uma *progressão geométrica* uma sequência de números reais obtida, com exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa q, chamada razão. *Michael Stifel*(1487-1567) matemático alemão, formulou em seu livro *Arithmetica integra* a relação que se segue: "Se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $1, q, q^2, \ldots$ segue que o resultado será q elevado a soma dos expoentes correspondentes".

Exemplo 3.1. $q^2 \cdot q^3 = (q \cdot q) \cdot (q \cdot q \cdot q) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5$

Similarmente, ao dividir um termo de uma expressão geométrica por outro, podemos apenas subtrair seus expoentes.

Ele percebia assim, algumas das propriedades de potência que abordamos no capítulo anterior. Especificamente, que $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ e $q^m \div q^n = q^{m-n}$.

3.2 A CRIAÇÃO

O real interesse de Napier estava ligado particularmente na simplificação de cálculos. Sua linha de pensamento era escrever qualquer número positivo como uma potência de algum número fixado. Assim, tornaria a multiplicação e divisão de números na soma ou subtração de seus expoentes, reduzindo então a dificuldade dos cálculos numéricos. Para exemplificar esta ideia utilizaremos a tabela 10, constituída por duas sequências numéricas, a primeira uma progressão geométrica de razão $q = 2$ e a segunda uma progressão aritmética de razão $r = 1$.

Assim, se quisermos multiplicar dois números quaisquer da primeira linha formada pela progressão geométrica, adicionamos os números correspondentes da progressão

2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	$\cdots$
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$

Tabela 10: Progressão Geométrica e Aritmética

aritmética representada na segunda linha e o encontramos nesta mesma linha. O resultado desta multiplicação será exatamente o número que estiver acima do valor da soma realizada.

Note que entre essas duas progressões existe uma relação: os expoentes da base 2, correspondem a progressão aritmética de razão 1, iniciada por $n = 0$. Assim temos, $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ e assim sucessivamente. Suponha que queremos multiplicar $16 \cdot 64$, basta então procurar na tabela os expoentes que correspondem aos números 16 e 64, que são respectivamente 4 e 6, e efetuar a adição $4 + 6$ obtendo 10. Agora é só procurar na sequência da progressão geométrica, o resultado cujo expoente resultante seja 10 que é o número 1024, o resultado desejado.

Para calcular a divisão o procedimento é inverso. Suponha agora que tenhamos que dividir 2048 por 32. Procuramos na tabela os expoentes correspondentes que são respectivamente, 11 e 5, e os subtraímos, $11 - 5$, resultando em 6. Note que para $n = 6$ na progressão aritmética, encontramos o valor 64 na progressão geométrica que seria o resultado de $\frac{2048}{32}$.

Para efetuar potências, seguimos o mesmo procedimento, porém, devemos multiplicar os expoentes. Por exemplo: desejamos calcular 8^4. Encontramos o expoente correspondente a 8, ou seja, 3 e o multiplicamos por 4 obtendo 12. Daí, basta encontrar o número correspondente ao expoente 12 que é 4096, onde de fato temos que: $8^4 = (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$.

Nota-se que com este método, obter resultados de cálculos com números fracionários só seria possível se preenchesse todos os espaços entre os números de nossa tabela, assim como fizemos no capítulo anterior.

Segundo [11],

> "foram precisos mais de mil anos para que a humanidade transpusesse o abismo existente entre a regra de Arquimedes e o segundo passo da evolução das tábuas Logarítmicas."

Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos. Mas após anos de estudo, escolheu como base um número não tão pequeno, pois assim as potências cresceriam muito devagar, decidiu então por algo próximo ao número 1. Ele dividiu o raio de um círculo unitário em 10.000.000 partes, e ao subtrair de uma unidade inteira sua 10^7 parte obteve a base $0,9999999$ ou seja $1 - 10^7$.

Após mais vinte anos de estudo, em 1614, Napier publicou sua invenção *Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos* e pouco depois o suíço *Joost Bürgi* (1552-1632), apresentava as suas *tábuas de Progressões Aritméticas e Geométricas* contribuindo para o surgimento dos logaritmos.

Evidências apontam que Bürgi, estimulado pelas ideias de Stifel inventou seus logaritmos por volta do ano 1588 partindo de noções algébricas, porém só foi divulgada em 1620, quatro anos após a publicação de Napier, perdendo o direito pela invenção. Talvez seja por isso que tenham intitulado Napier como o criador dos *logaritmos* fazendo com que Bürgi reclamasse o título.

3.3 A EVOLUÇÃO DAS TABELAS LOGARÍTMICAS

Após a primeira publicação de Napier, seu filho Robert em 1619 publicou *Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos* incentivando cientistas a utilizarem os logaritmos. Henry Briggs (1561-1631) motivado com os trabalhos de Napier, propôs duas modificações que tornaria as tabelas logarítmicas mais úteis.

A primeira era fazer o logaritmo de 1 igual a 0, substituindo 10^7, e a segunda ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada a 10, ou seja, criar uma tábua de logaritmos de base 10. Infelizmente, mesmo concordando com tais mudanças, Napier não viveria para desenvolver as novas tabelas. Faleceu em 03 de Abril de 1617 deixando para Briggs publicar em *Arithmetica Logarithmica* no ano de 1624 seus resultados que davam os logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20.000 e 90.000 a 100.000 com precisão de 14 casas decimais. Mais tarde, um editor holandês *Adriaan Vlacq* (1600-1667) preencheu os espaços entre 20.000 a 90.000, incluindo na segunda edição de *Arithmetica Logarithmica* em 1628.

Johannes Kepler (1571-1630), tomando conhecimento das tábuas de Napier, divulgou seu desenvolvimento na Alemanha, foi assim um dos primeiros dos muitos cientistas que veio a se utilizar dessa descoberta, assim como o matemático *Bonaventura Cavalieri* (1598-1647) que o fez na Itália. Em 1653, a China também adotou a criação de Napier através de um tratado sobre logaritmos escrito por *Xue Fengzuo*, e após um trabalho em 1722 publicado em Pequin entitulado *Shu Li Ching Yün* (Coletânea de Princípios Básicos de Matemática) chega também ao Japão. Assim, a invenção dos logaritmos espalhou-se por todo o mundo fazendo com que cientistas, astrônomos e matemáticos aprovasse seu uso como instrumento de cálculo.

Para facilitar a leitura das tabelas logarítmicas, *William Oughtred* (1574-1660) inventou uma régua linear e outra circular com duas escalas logarítmicas que se moviam, marcadas em discos que giravam em torno de um eixo comum. Embora Richard Delamain, aluno de Oughtred tenha publicado em 1630 o trabalho *Grammelogia, or The Mathematicall Ring* onde mencionava que havia inventado uma régua de cálculo, aceita-se que Oughtred foi o verdadeiro inventor, e que seu aluno roubara a ideia.

Após a criação do logaritmo por John Napier, seguido por outros matemáticos, vamos agora associa-lo com conceitos que envolvem potenciações, entendendo como ele se dá através de um expoente dentro de algumas das escalas citadas no capítulo 1.

3.4 CONCEITUANDO O LOGARITMO

Antes de definir o que entenderemos por função logarítmica, vamos voltar ao primeiro capítulo, e lembrar que para medir a acidez de uma solução de maneira mais eficiente, deixamos de lado a escala linear de concentração e usamos a a escala de pH. Nela onde a medida que a escala crescia uma unidade a concentração de íons H^{+} era dividido em dez vezes.

Mais precisamente, se $[H^{+}] = 10^{-k}$, então o pH da solução é k.

Mas como relacionar concentração e pH? Em outras palavras, como encontrar um função $f(x)$ tal que $f(10^{-k}) = k$?

Alternativamente, podemos encontrar uma função $F(a)$, onde $F(10^{x}) = x$, e então definir $f(x) = -F(x)$

É interessante antes observar que se uma função F é tal que $F(a^{x}) = x$ para algum $a > 0$, então vale que

$$F(w \cdot t) = F(w) + F(t).$$

Para ver isso, tome $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $a^{x} = w$ e $a^{y} = t$ (a existência de x e y foi a última coisa que discutimos no final do capítulo anterior). Temos então que

$$F(w \cdot t) = F(a^{x} \cdot a^{y}) = F(a^{x+y}) = x + y = F(a^{x}) + F(a^{y}) = F(w) + F(t).$$

De modo que a função F era exatamente o que Napier estava tentando construir!

Como ele já havia percebido, tal função não é exatamente única, pois assim como no caso das funções exponenciais, depende do valor de a que queremos tomar como base.

Pois bem, esta função, que dentre outras coisas irá realmente resolver nossos problemas, é a espetacular, magnifica, extraordinária *função logarítmica*. Essa nova função, fará exatamente o que precisamos, que é indicar o expoente de um número a que resultou em $a^x = b$.

Observação 3.4.1. *Vale lembrar, que muitos livros didáticos trabalhados no ensino médio adotam o logaritmo como inversa da exponencial. Seria possível também fazer o contrário, admitindo a função exponencial como inversa da logarítmica, que deveria ser definida de maneira alternativa. Mas, já que o ensino de função exponencial é apresentada aos alunos antes da função logarítmica, adotaremos o fato da função logarítmica ser a função inversa da exponencial.*

Antes de introduzir a função logarítmica propriamente dita, vamos antes definir formalmente o que entenderemos como logaritmo.

Definição 3.1. Dado um número real $a > 0$, com $a \neq 1 \in \mathbb{R}$, e um número $b > 0 \in \mathbb{R}$, dá se o nome de logaritmo de b na base a, o expoente x que deve elevar a de tal modo que $a^x = b$. Em outras palavras, dados $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$, definimos

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Lê se x é o logaritmo de b na base a

Seguem imediatamente de 3.1 as seguintes propriedades:

1. Para todo $a \neq 1$ positivo, $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$
2. Para todo $a \neq 1$ positivo $\log_a a = \log_a a^1 = 1$
3. A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b. Ou seja,

$$a^{\log_a b} = b$$

4. Para quaisquer $a \neq 1$ positivo, e $a, b > 0$, vale que

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

A última destas propriedades segue da definição 3.1, e pela propriedade 3, de onde

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a c} = b \Leftrightarrow c = b.$$

Destacaremos a seguir algumas propriedades menos óbvias.

Proposição 3.1. *Em qualquer base $a \neq 1$, dados b e c números reais positivos, tem-se:*

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Demonstração. Tome x, y e z como sendo $\log_a b, \log_a c$ e $\log_a(b \cdot c)$ respectivamente. Provemos que $x + y = z$.

Segue pela definição 3.1 que

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \tag{3.1}$$

$$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c \tag{3.2}$$

$$\log_a(b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \tag{3.3}$$

Substituindo 3.1 e 3.2 em 3.3, temos:

$$a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Portanto,

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

□

Proposição 3.2. *Em qualquer base $a \neq 1$, sendo b e c números reais positivos, tem-se:*

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração. Mais uma vez, tomando x, y e z como sendo $\log_a b, \log_a c$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ respectivamente, provemos que $x - y = z$. Segue por 3.1 que:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b, \tag{3.4}$$

$$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c, \tag{3.5}$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \tag{3.6}$$

Substituindo 3.4 e 3.5 em 3.6, temos:

$$a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Portanto,

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

□

Proposição 3.3. *Sendo a, b e c números reais positivos com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, tem-se que:*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração. Considere x, y e z, sendo $\log_a b, \log_c b$ e $\log_c a$ respectivamente, provemos que $x = \dfrac{y}{z}$. Segue pela *definição 2.14* que:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b, \tag{3.7}$$

$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b, \tag{3.8}$$

$$\log_c a = z \Rightarrow c^z = a \tag{3.9}$$

Igualando 3.7 e 3.8, obtemos:

$$a^x = c^y \tag{3.10}$$

Substituindo 3.9 em 3.10, tem-se:

$$(c^z)^x = c^y$$

$$c^{z \cdot x} = c^y$$

$$z \cdot x = y$$

$$x = \frac{y}{z}$$

Logo,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

□

Proposição 3.4. *Em qualquer base $a \neq 1$, sendo a e b números reais positivos e $k \in \mathbb{R}$, tem-se:*

$$\log_a b^k = k \cdot \log_a b$$

Demonstração. Considere $\log_a b = x$ e $\log_a b^k = y$, vamos mostrar que $y = k \cdot \log_a b$ Segue pela *definição 2.14* que:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b, \tag{3.11}$$

$$\log_a b^k = y \Rightarrow a^y = b^k, \tag{3.12}$$

Substituindo 3.11 em 3.12, temos:

$$a^y = (a^x)^k$$

$$a^y = a^{x \cdot k}$$

$$y = x \cdot k$$

Portanto,

$$\log_a b^k = k \cdot \log_a b$$

□

Corolário 3.2. *Da* proposição 2.5*, temos que, se a e $b \in \mathbb{R}_+$, com $a \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$, segue que:*

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$$

No final do capítulo anterior mostramos que dado um $a \neq 1$ positivo, a função $f(x) = a^x$ é injetora. Mostramos também que se restringirmos o contra-domínio de f aos reais positivos, então ela passa a ser também sobrejetora.

Em outras palavras, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, para algum $a \neq 1$ positivo, é bijetora e portanto possui uma inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Mas lembre-se f^{-1} é tal que

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x,$$

e em particular $f^{-1}(a^x) = x$.

Não coincidentemente, para explicitar a função inversa de a^x precisamos lançar mão exatamente da definição de logaritmo que acabamos de ver, como colocado no teorema abaixo.

Teorema 3.3. *Sendo $a > 0 \neq 1$ e seja $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica de base a que associa a cada x o número $\log_a x$ definida por $f(x) = \log_a x$, , e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$, temos que $f(x)$ e $g(x)$ são inversas.*

Demonstração. Para mostrar que f e g são inversas, basta mostrarmos que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

$$f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x \cdot log_a a = x \cdot 1 = x$$

e

$$g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x.$$

□

Usando o gráfico de a^x, podemos construir o gráfico de $f(x) = \log_a x$.

Assim, se a base a do logaritmo for maior que 1 sua representação gráfica no plano cartesiano será uma curva crescente, como na figura 18.

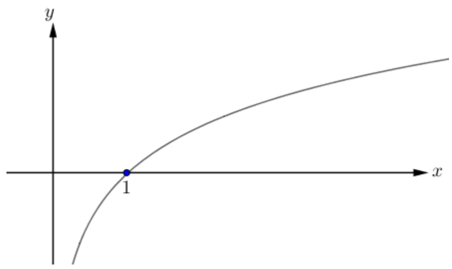

Figura 18: Representação gráfica de $f(x) = log_a x$, com $a > 1$

E, se a função $a^x = b$ tiver a base a no intervalo $0 < a < 1$, sua representação gráfica no plano cartesiano será uma curva decrescente, como na figura 19.

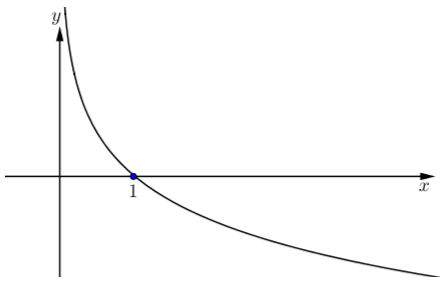

Figura 19: Representação gráfica de $f(x) = log_a x$, com $0 < a < 1$

Na próxima seção mostraremos uma método alternativo de se definir a função logarítmica.

3.5 MÉTODO DE FERMAT E DE SAINT VINCENT APLICADO NA HIPÉRBOLE

Por volta de 1640, Pierre de Fermat trabalhava com curvas do tipo $y = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$. Através de uma série de retângulos com as bases formando um progressão geométrica decrescente, Fermat fez uma aproximação da área sob o gráfico da curva entre $x = 0$ e $x = d$.

Para entender o método de Fermat, vamos considerar o intervalo de 0 à d no eixo das abscissas, dividido em infinitos subintervalos dados pelos pontos $x_0 > x_1 > \ldots > x_{i-2} > x_{i-1} > x_i > \ldots$, definidos da seguinte forma.

Escolhida uma razão q, com $0 < q < 1$, definimos $x_i = dq^i$, $i \geq 0$.

Como as alturas da curva nesses pontos, são dadas pelas ordenadas $d^n, (d \cdot q)^n, (d \cdot q^2)^n, \ldots$, é possível encontrar as áreas dos retângulos e então soma-las.

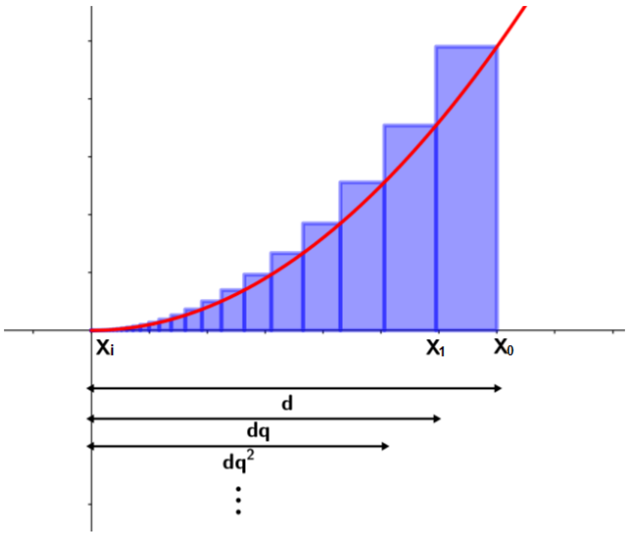

Figura 20: Cálculo da área abaixo da curva por aproximação das áreas dos retângulos

Chamando de A_i a área do retângulo de base $(X_i - X_{i+1}) = (dq^i - dq^{i+1})$, temos

$$A_0 = (d - dq) \cdot d^n = d \cdot d^n - dq \cdot d^n = d^{n+1}(1 - q),$$

$$A_1 = (dq - dq^2) \cdot (dq)^n = d^{n+1}q^{n+1} - d^{n+1}q^{n+2} = (dq)^{n+1}(1 - q),$$

e assim sucessivamente, encontrando

$$A_i = (dq^i - dq^{i+1})(dq^i)^n = (dq^i)^{n+1} \cdot (1-q). \tag{3.13}$$

Assim, calculando a razão entre as áreas, encontramos

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{(dq^{i+1})^{n+1} \cdot (1-q)}{(dq^i)^{n+1} \cdot (1-q)} = \frac{d^{n+1} \cdot q^{n+1}}{d^{n+1}}$$

Assim,

$$\frac{A_{i-1}}{A_i} = q^{n+1}. \tag{3.14}$$

Deste modo, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ formam um P.G. infinita de razão q^{n+1}, e assim a soma das áreas dos retângulos é dada por

$$A(q) = A_0 + A_1 + A_2 \cdots = \frac{A_0}{1-q^{n+1}} = \frac{d^{n+1} \cdot (1-q)}{1-q^{n+1}}. \tag{3.15}$$

onde a área A depende da escolha de q.

Para melhorar a aproximação da área abaixo da curva, Fermat percebeu que quando q se aproximar de 1, menor seriam as bases dos retângulos, e melhor seria o encaixe entre os retângulos e a curva.

Note que, quando $q \to 1$, tem-se a expressão indeterminada $\frac{0}{0}$. Para corrigir isso, Fermat escreveu o denominador da equação na forma fatorada, encontrando

$$1 - q^{n+1} = 1 - q \cdot q^n = (1-q) \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n)$$

Como $(1-q)$ é comum no numerador e no denominador a equação fica:

$$A(q) = \frac{d^{n+1}}{1 + \underbrace{q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n}_{\text{n termos de q}}}$$

Agora com $q \to 1$, temos a equação:

$$A_n[0,d] = \frac{d^{n+1}}{n+1} \tag{3.16}$$

Com a expressão acima, caso queiramos a área de baixo da curva, entre as abcissas a e d, basta calcularmos

$$A_n[a,d] = A_n[0,d] - A_n[0,a] = \frac{d^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Estendendo esta expressão para para $\mathbb{Z}_{-}$, Fermat percebeu que quando $n \geq -2$, a equação permanecia válida para o cálculo da área entre 1 e $d > 0$. Percebeu inclusive que era possível fazer $d \to \infty$, encontrando.

Porém, para $n = -1$ a equação se torna $A_{-1}[1, d] = \dfrac{d^0 - 1}{0}$ tomando assim uma forma indeterminada. Assim, em seu trabalho Fermat concluiu que todas as hipérboles infinitas (exceto a hipérbole $y = \frac{1}{x}$), podem ser quadradas pelo método da progressão geométrica.

A restrição de Fermat logo foi resolvida pelo jesuita belga *Grégoire de Saint-Vincent*, notando que, quando $n = -1$, todos os retângulos usados na aproximação da área sob a hipérbole possuem áreas iguais.

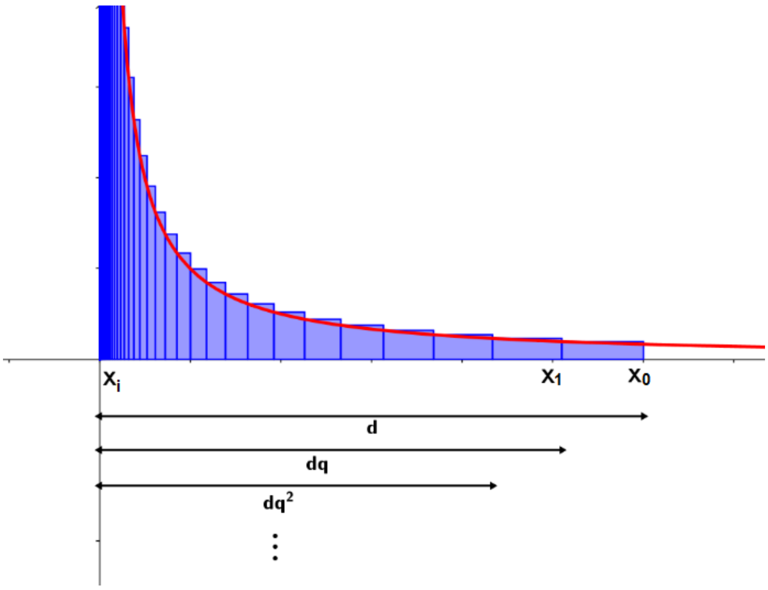

Figura 21: Cálculo da área abaixo da hipérbole, a partir da soma das áreas dos retângulos de mesma área

De fato, considerando a mesma sequência de pontos do calculo de $A_n[0, d]$, encontramos que

$$A_0 = (d - dq) \cdot \frac{1}{dq} = \frac{d \cdot (1 - q)}{dq} = \frac{1 - q}{q}$$

$$A_1 = (dq - dq^2) \cdot \frac{1}{dq^2} = \frac{dq \cdot (1 - q)}{dq^2} = \frac{1 - q}{q}$$

$$A_2 = (dq^2 - dq^3) \cdot \frac{1}{dq^3} = \frac{dq^2 \cdot (1 - q)}{dq^3} = \frac{1 - q}{q}$$

$$\vdots$$

Saint-Vincent, verificou que a soma das áreas dos retângulos (que cresce de forma aritmética, a medida que a soma das bases aumenta geometricamente com n) é proporcional ao logaritmo da distância horizontal. Assim, considerando $A(t)$ como a área sob a hipérbole, entre os pontos de abcissa $x = c$ e $x = t$, concluiu que

$$A(t) = \log_a t, \tag{3.17}$$

para alguma base a.

No próximo capítulo, estenderemos esta construção, e apresentaremos os logaritmos naturais na forma geométrica, partindo da mesma ideia de áreas retangulares.

4

ONDE ESTÃO OS LOGARITMOS?

Muitos fenômenos em diferentes situações, estão associados a escalas logarítmicas. A escala utilizada para medir o brilho das estrelas, foi criada pelo inglês e astrônomo *Norman Pogson* por volta do ano de 1850, baseando no trabalho de *Hiparco*, que consistia dividir aproximadamente 850 estrelas visíveis a olho nu e classifica-las em seis grupos, de acordo com a intensidade do brilho, sendo 1 para as mais brilhantes e 6 as de menor brilho. Porém, algumas dessas escalas surgiram apenas três séculos após a descoberta do logaritmo, como as escalas de: decibeis (mede a intensidade sonora), Richter (mede a intensidade dos terremotos), pH (mede potencial de hidrogênio, ou seja, a acidez de um líquido), a rapidez com que uma substância radioativa se desintegra, entre outras.

Veremos a seguir, onde e como podemos encontrar e aplicar os logaritmos como ferramenta de cálculos.

4.1 O NÚMERO DE EULER COMO BASE DO LOGARITMO

Note que nos exemplos usados até aqui, utilizamos no logaritmo sempre a base 10 considerando a ideia de Briggs e de Napier, que dizia ser possível escrever qualquer número positivo N como 10^n (tábuas de logaritmos).

Existe porém uma bases bastante comum em diversas aplicações, distinta de todas as outras que matemáticos famosos haviam estudado. Esta é a base e, que passaremos a estudar agora.

O número e, que definimos abaixo, é um número irracional, ou seja, $e \neq \frac{p}{q}$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, e o logaritmo com base e é conhecido como *logaritmo natural*, e é representado por ln.

Definição 4.1. Chamamos de e o limite da função $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ com $n \in \mathbb{N}^*$, quando n tende a $+\infty$.

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Não é imediatamente claro a sequência usada para definir e realmente se aproxima de algum valor quando n cresce, mas não exploraremos este fato aqui.

O número e, surge espontaneamente em várias questões básicas que estuda a variação das grandezas, por exemplo, em questões relacionadas a juros, crescimento populacional, desintegração radioativa, liberação de energia, entre outras. Como exemplo, vamos citar um problema de fácil compreensão, podendo este ser usado em sala de aula com o objetivo de apresentar aos alunos o tão famoso número de Euler "e", em homenagem ao matemático suíço *Leonhard Euler*.

Seguindo a ideia de [5], suponha que um banco conceda ao cliente juros de 100% ao ano na aplicação na poupança. Como exemplo, citaremos um certo cliente que tenha investido a quantia de $R\$1,00$ nessa aplicação. Ao se passar um ano o cliente acreditava que receberia do banco o valor de $R\$2,00$, porém, foi surpreendido pelo gerente que o entregou a quantia de e de real, ou seja, aproximadamente $R\$2,72$. Para que o cliente pudesse entender o valor de rendimento desta aplicação no banco, o gerente apresentou a seguinte explicação:

"Caro cliente, os juros rendidos pelo banco são proporcionais ao capital investido e ao tempo da aplicação. Se você após seis meses viesse receber a quantia do investimento, receberia $\frac{3}{2}$ de real, correto? Veja, após o primeiro semestre você estaria ainda com $\frac{1}{2}$ real do valor aplicado no banco no fim do prazo de um ano. Então, você investiu $\frac{1}{2}$ real em seis meses com a mesma taxa de 100%, portanto deveria receber:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

Ou seja, isto te renderia $R\$2,25$ no fim do ano. Porém, podemos dividir o ano em m partes iguais, isto é, no período de $\frac{1}{m}$ ano, o capital de investimento estaria valendo

$1 + \frac{1}{m}$ reais. Assim, no fim do ano o banco deveria te pagar $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ reais. Portanto, segue que o valor mais justo que cabe a você receber é:

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Cujo valor em moeda real mais próximo é $R\$2,72$."

Note que, situações como essa são possíveis de serem apresentadas a alunos do ensino fundamental e médio, pois utiliza conceitos de matemática básica (exceto o cálculo de limite) e tais circunstâncias podem ser facilmente vivenciadas pelo educando.

Veja agora, uma definição geométrica do logaritmo natural, que tem como base o número de *Euler* "*e*". Usaremos a ideia da soma das áreas dos retângulos abaixo da hipérbole, usado para apresentar a equação 3.17.

Chamaremos de A_a^b, a região do plano limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ verticais pelo eixo das abcissas e situada abaixo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no primeiro quadrante.

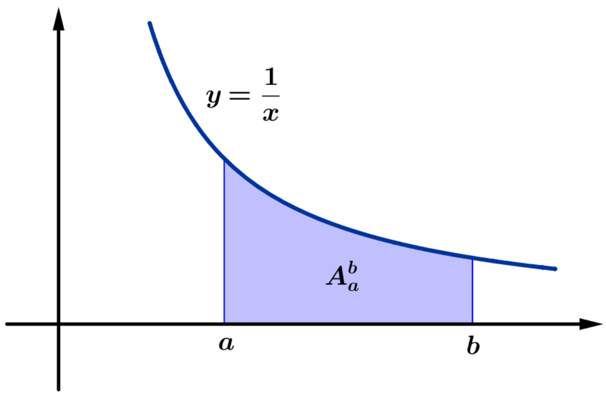

Figura 22: Área da região abaixo da hipérbole limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$

Para calcular a área $|A_a^b|$ da região A_a^b podemos usar uma técnica parecida com a de Fermat, e aproximar a região por retângulos com base em subintervalos de $[a, b]$.

Tomamos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, de modo que quando n cresce, o comprimento dos intervalos vai para 0. Assim, chamando de $R_{x_i}^{x_{i+1}}$ a área do retângulo com base $x_{i+1} - x_i$ e altura $1/x_i$, temos que

$$A_a^b = \lim_{n \to \infty} (R_{x_0}^{x_1} + R_{x_1}^{x_2} + \cdots + R_{x_{n-1}}^{x_n}).$$

Teorema 4.2. *Seja qual for o número real, k>0, as regiões A_a^b e A_{ak}^{bk} terão a mesma área.*

Demonstração. Dado dois pontos c e d no eixo das abscissas, observe que

$$R_c^d = (d-c) \cdot \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$$

Do mesmo modo, se $k > 0$, temos

$$R_{ck}^{dk} = (dk - ck) \cdot \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}$$

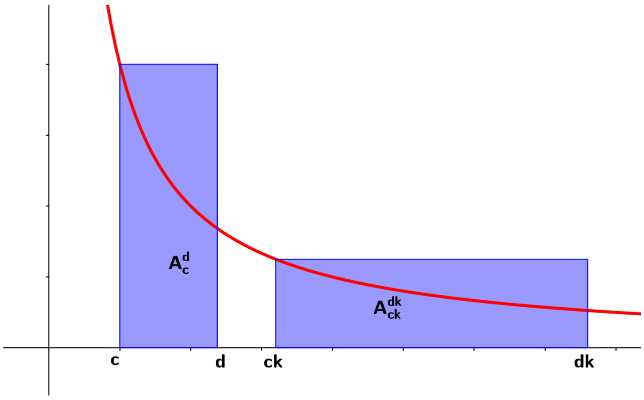

Figura 23: Construção de retângulos abaixo da curva com áreas iguais

Agora, tomando uma divisão de $[a, b]$ determinada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, temos que $ak = x_0 k < x_1 k < \cdots < x_n k = bk$, também forma uma divisão do intervalo $[ak, bk]$, e assim

$$A_a^b = \lim_{n\to\infty}(R_{x_0}^{x_1} + R_{x_1}^{x_2} + \cdots + R_{x_{n-1}}^{x_n}) = \lim_{n\to\infty}(R_{x_0}k^{x_1 k} + R_{x_1 k}^{x_2 k} + \cdots + R_{x_{n-1}k}^{x_n k}) = A_{ak}^{bk} \quad (4.1)$$

□

Afim de mostrarmos o logaritmo natural geometricamente, acordaremos que a área da hipérbole A_a^b, será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e nulo quando $a = b$. Assim estendemos a definição de A_a^b como uma espécie de áreas orientada, onde

$$A_a^b = -A_b^a$$

Segue que, quando $a < b < c$, temos:

$$A_a^c = A_a^b + A_b^c \quad (4.2)$$

Definição 4.3. Dado $x > 0$, defina a função $ln(x)$ como a área orientada abaixo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, no intervalo de $[1, x]$ no eixo das abscissas. Ou seja, para $x > 0$ faça

$$\ln x = A_1^x.$$

Teorema 4.4. *Quaisquer que sejam os números reais positivos a, b, temos:*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Demonstração. Temos por 4.2 que

$$A_1^{ab} = A_1^a + A_a^{ab}$$

Ainda, independente da posição dos pontos no eixo da abscissa $1, a, ab$, temos por 4.1, que:

$$A_a^{ab} = A_1^b$$

Segue que:

$$A_1^{ab} = A_1^a + A_1^b$$

Ou seja:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

□

Deixamos como desafio para o leitor mostrar as seguintes propriedades.

1. $ln(1/a) = -ln(a)$ para todo $a > 0$;
2. $ln(a/b) = ln(a) = ln(b)$;
3. $ln(a^n) = n \cdot ln(a)$ para todo $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$;
4. $ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}$ para todo $a > 0$ e $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$;
5. $ln(a^r) = r \cdot ln(a)$ para todo $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

As propriedades acima indicam que $ln(x)$ é de fato um logaritmo. Isso pois se a é tal que $ln(a) = 1$, então

$$ln(a^x) = x \cdot ln(a) = x.$$

Mas o método de Fermat já havia mostrado que A_1^x cresce indefinidamente quando x cresce, segue assim que existe x tal que $\ln x = 1$. Precisamos agora calcula-lo!!

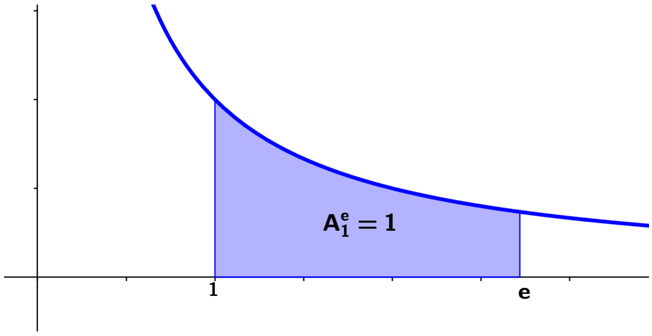

Figura 24: Representação do número e

Para encontrar a tal que $ln(a) = 1$, tome $x > 0$ e considere a área em baixo da hipérbole, entre as abcissas 1 e $1 + x$.

Considere então dois retângulos: o primeiro com base em $[1, 1 + x]$ e altura $\frac{1}{1+x}$, e outro com mesma base e altura 1, como ilustrado na figura 25.

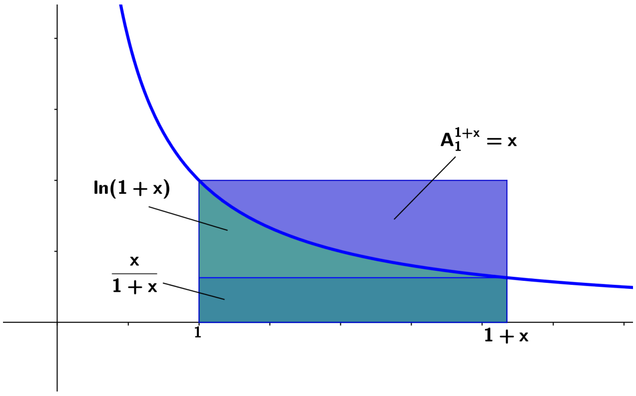

Figura 25: Desigualdade de áreas abaixo da curva

Com base na figura, o retângulo menor tem base x e altura $\frac{1}{1+x}$, está contido na região A_1^{1+x}, que por sua vez está contida no retângulo de mesma base x e altura 1.

Deste modo, para todo $n > 0$ vale a desigualdade:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$$

Dividindo todos os membros por x, fica:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Considerando $x = \frac{1}{n}$, temos:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

Deste modo, fazendo $n \to \infty$ temos que $\dfrac{n}{n+1} \to 1$, e portanto

$$\lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1,$$

e o número que buscamos é dado exatamente pelo limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

que definimos anteriormente como sendo e.

De modo que a função $ln(x)$ definida como a área em baixo da hipérbole é de fato um logaritmo com base dada por e.

Esta é uma maneira geométrica de interpretar o logaritmo natural, partindo da noção de áreas abaixo da hipérbole mostradas até aqui. Visualmente, esta é uma maneira interessante de apresentar o número e em sala de aula para alunos do ensino médio, tendo como representação desigualdades envolvendo as áreas dos retângulos.

4.2 A MÚSICA NA ESPIRAL LOGARÍTMICA

Vimos no capítulo 1, como podemos representar a escala cromática ou temperada em uma reta. Vamos observar agora esses intervalos na curva chamada por *Jakob Bernoulli* de *spira mirabilis*.

Para definir esta curva, dados $r > 0$ e $\theta > 0$, seja $P(r,\theta)$ o ponto P no plano que dista r da origem, e cuja reta determinada por P e a origem faz um ângulo θ com a horizontal (ver figura 26). O par (r,θ) é conhecido como coordenadas polares do ponto P.

Fazendo agora $r := r(\theta)$, temos que os pontos $(r(\theta),\theta)$ desenham uma curva no plano quando fazemos θ variar.

A maravilhosa *spira mirabilis* ou *espiral logaritmica* é a curva descrita pela equação $ln\, r = a\cdot\theta$, onde a é uma constante conhecida por taxa de crescimento da espiral . Podemos ainda escrever a equação de forma inversa fazendo $e^{a\theta} = r$.

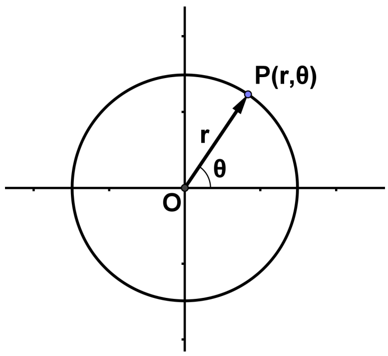

Figura 26: Coordenada polar de P

É interessante notar que quando aumentamos θ linearmente, r aumenta geometricamente. Isso porque

$$r(\theta+\alpha) = e^{a\cdot(\theta+\alpha)} = e^{a\cdot\theta}\cdot e^{a\cdot\alpha} = r(\theta)r(\alpha).$$

Vamos agora representar as notas da escala cromática em uma espiral logarítmica. Queremos fazer isso de forma que giros de 2π radianos simbolizem um intervalo de uma oitava. Queremos também que a alteração no raio represente a alteração na frequência. Ou seja $r(\theta+2\pi) = r(\theta)$.

Veja na figura 27 a escala cromática, construída na espiral logarítmica.

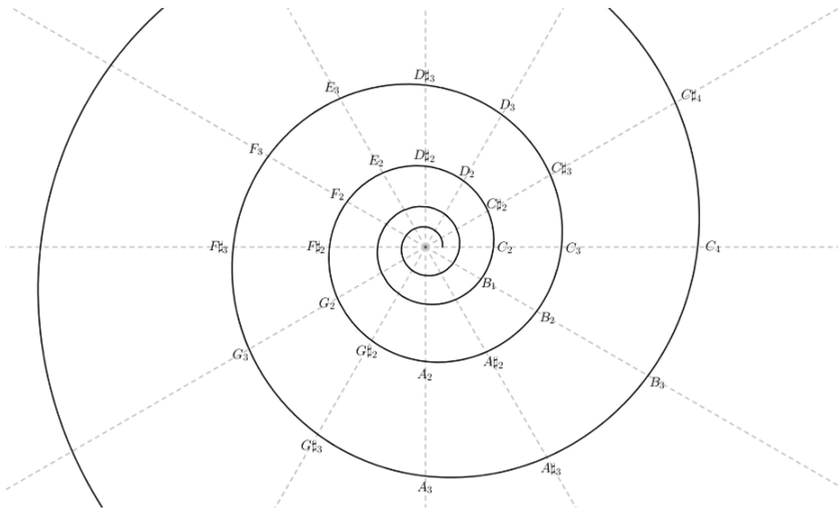

Figura 27: Escala cromática e espiral logarítmica

Como o intervalo de oitava na escala cromática é dividida em doze partes iguais, e queremos que um giro de 2π radianos represente um intervalo de uma oitava, cada semitom vai ser dado por um giro de

$$\alpha = \frac{2\pi}{12}\frac{\pi}{6} = 30\,^\circ.$$

Assim, colocando uma nota C_k, teremos que $C_k\sharp$ estará sobre a semi-reta que faz um ângulo de $\pi/6$ com o eixo, e assim por diante.

Mas queremos também que a alteração no raio represente a alteração na frequência. Como um intervalo de semitom indica um produto de $2^{1/12}$ na frequência, precisamos que

$$r(\theta + \frac{\pi}{6}) = r(\theta)r(\frac{\pi}{6}) = r(\theta)2^{\frac{1}{12}},$$

e portanto

$$e^{a\cdot\theta} \cdot e^{a\cdot\frac{\pi}{6}} = e^{a\cdot\theta} \cdot 2^{\frac{1}{12}}.$$

Segue que

$$e^{a\cdot\frac{\pi}{6}} = 2^{\frac{1}{12}},$$

e elevando os dois lados à 12, obtemos

$$e^{2\pi\cdot a} = 2.$$

Ao aplicarmos ln em ambos os lados, segue que:

$$\ln 2 = \ln e^{2\pi a}$$

$$\ln 2 = 2\pi a$$

Por fim, ao dividirmos os lados por 2π, temos:

$$a = \frac{\ln 2}{2\pi},$$

e a espiral fica definida por

$$r = e^{\frac{\ln 2}{2\pi}\cdot\theta}.$$

Veja na tabela 11 construída a partir da equação $e^{\frac{\ln 2}{2\pi}\cdot\theta} = r$, que a medida que θ aumenta em incrementos iguais, ou seja, de forma aritmética, o raio r aumenta de forma geométrica, descrevendo assim uma das principais características da espiral logarítmica.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	1	$e^{\frac{\ln 2}{12}}$	$e^{\frac{\ln 2}{6}}$	$e^{\frac{\ln 2}{4}}$	$e^{\frac{\ln 2}{3}}$	$e^{\frac{\ln 32}{12}}$	$e^{\frac{\ln 2}{2}}$	$e^{\frac{\ln 128}{12}}$	$e^{\frac{\ln 16}{6}}$	$e^{\frac{\ln 8}{4}}$	$e^{\frac{\ln 32}{6}}$	$e^{\frac{\ln 2048}{12}}$	$e^{\ln 2}$

Tabela 11: Coordenadas polares representando a frequência das notas musicais da escala cromática dentro de uma oitava

Vimos até aqui, que a frequência das notas musicais de uma oitava para a outra, dobram sua quantidade de vibrações por segundos, ou ainda, depois que multiplicamos a frequência de uma nota por i doze vezes voltamos a mesma nota, porém uma oitava acima.

Como dito anteriormente, o ouvido humano consegue identificar o som nas frequências de no mínimo 20 Hz a no máximo 20000 Hz. Isto significa que nossa espiral terá menos do que dez voltas, ou seja, nosso ouvido só é capaz de captar nove oitavas completas. Veja:

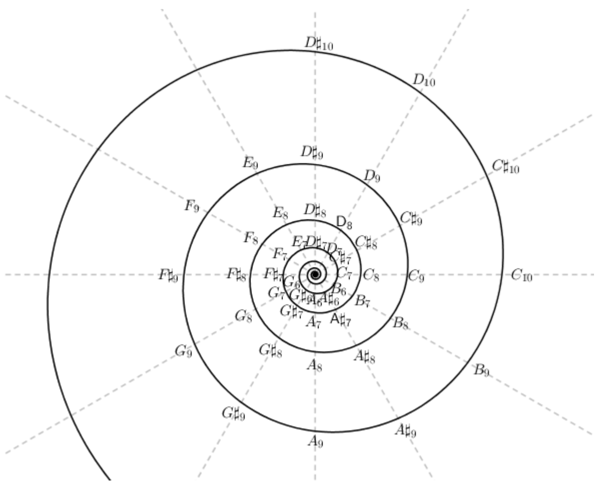

Figura 28: Notas da Escala cromática construída na espiral logarítmica

Visto que a cada oitava a frequência de uma nota dobra, e tendo a faixa de audição do ser humano, podemos escrever que:

$$2^x = \frac{20000}{20}$$

onde x é o número de oitavas existentes dentro do intervalo $[20; 20000]$. Aplicando log nos dois lados da igualdade, fica:

$$\log 2^x = \log \frac{20000}{20}$$

Usando 3.4, conseguimos escrever:

$$x \cdot \log 2 = \log 1000$$

$$x = \frac{3}{\log 2}$$

$$x \simeq 9{,}96578$$

Visto que, a percepção humana ouve até nove oitavas completas, temos que, podemos ouvir uma nota A_0 na frequência mínima até uma nota A_9 em uma frequência máxima captada por nossos ouvidos.

5

APLICAÇÕES GERAIS DO LOGARITMO

Vimos que inicialmente, o logaritmo tinha como principal característica simplificar os cálculos de um modo que o tornasse de fácil compreensão. No entanto, nos dias de hoje é possível encontrar vários instrumentos eletrônicos como calculadoras e computadores com preços bastante acessíveis que facilmente faria esse trabalho. Pois bem, estudar logaritmo tornaria dispensável para esse fim, porém atualmente seu significado e sua aplicação vai muito mais além da época de sua criação.

5.1 CONTEXTUALIZANDO O LOGARITMO EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

De acordo com [8] a interdisciplinaridade propõe a capacidade de dialogar com as diversas ciências, fazendo entender o saber como um e não partes, ou fragmentações, assim o uso dos logaritmos em outras disciplinas da grade curricular torna seus conceitos mais práticos favorecendo a aprendizagem.

5.1.1 *O Logaritmo na escala de pH*

Na Química, o logaritmo é utilizado para realizar o cálculo do pOH (potencial hidroxiliônico) ou pH (potencial hidrogeniônico) de uma solução, que analisa se ela é acida ou básica. Vimos no *capítulo 1* que uma solução é dita ácida sempre quando a quantidade de moléculas do íon H^{+} (cátions hidrônio) for maior que a quantidade de moléculas de OH^{-} (íons hidroxila), e caso aconteça o contrário, isto é, a quantidade de OH^{-} for maior que H^{+} a solução será uma base e por último, se a concentração entre os íons forem iguais a solução é dita neutra.

Mas onde está o logaritmo neste conceito?

De acordo com [4], *Sorensen* definiu pH como sendo o logaritmo negativo da concentração do íon de hidrogênio ou íon hidrônio, daí o nome pH *Potencial Hidrogeniônico*. Segue da mesma forma que o pOH *Potencial Hidroxiliônico* pode ser definido como o logaritmo negativo da concentração de íons hidroxila. Assim,

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pOH = -\log[OH^-]$$

Vimos que o produto de $[H^+]$ com $[OH^-]$ é igual à 10^{-14}, e que, $K_w = [H^+] \cdot [OH^-]$ representa o produto iônico da água, então:

$$K_w = [H^+] \cdot [OH^-],$$

aplicando o logaritmo negativo em ambos os lados, fica:

$$-\log K_w = -\log([H^+] \cdot [OH^-])$$

Como, a 25 °C, $K_w = 1 \cdot 10^{-14}$, temos:

$$-\log 10^{-14} = -\log([H^+] \cdot [OH^-])$$

Usando 3.1 e 3.4, fica:

$$-14 \cdot (-\log 10) = -\log[H^+] + (-\log[OH^-])$$

$$14 = -\log[H^+] + (-\log[OH^-])$$

Assim, podemos representar o cálculo do pOH e pH de uma solução através da expressão:

$$14 = pH + pOH$$

Perceba que esse é um dos motivos ao qual nós não havíamos conseguido representar a escala de pH como escala linear, pois, por trás de cada nível da escala que determina acides ou basicidade existe uma representação logarítmica de base 10 fazendo com que essa escala seja representada de forma geométrica.

Veja uma aplicação direta do cálculo de pH, tendo o logaritmo como ferramenta de cálculo.

Exemplo 5.1. Analisando a concentração de íons hidrônios de um rio, verificou que a quantidade presente foi de $10^{-3} mol/L$, determine qual o pH, o pOH e o meio da água analisada.

Solução:

Pela expressão $pH = -\log[H^{+}]$, temos que:

$$pH = -\log 10^{-3} = -3 \cdot (-\log 10) = -3 \cdot (-1) = 3$$

Como, $14 = pH + pOH$ tem-se:

$$14 = 3 + pOH$$

$$pOH = 14 - 3 = 11$$

Como a solução apresentou $[H^{+}] > 10^{-7} mol/L$ seu $pH < 7$, assim, o meio é acido. (Ver figura 8)

É claro, que esse fato também ocorreu na representação da escala musical temperada. Vimos que, a frequência das notas musicais dobram a medida que elas passam de uma oitava para outra, necessariamente aquela acima de onde está a nota. Visto que é possível saber a frequência de uma nota, pode-se estabelecer qualquer frequência em Hz usando uma escala logarítmica, porém, não mais na base 10 e sim usando uma base 2 já que as frequências tendem a dobrar de uma oitava à outra.

A ideia de tentarmos escrever escalas logarítmicas de forma linear, possivelmente pode ter sido experimentada por *Pitágoras*, porém, como a matemática da época não era tão avançada isso não foi possível. Aqui, nossa intenção foi trazer para o professor leitor uma proposta de abordagem dos conteúdos sobre logaritmos, que podem ser construídos com os alunos durante o curso de ensino médio. Veja agora, outras escalas logarítmicas que podemos mostrar em sala de aula.

5.1.2 *Escala Richter*

Como visto, os logaritmos pode ser utilizado para representar grandezas de valores muito pequenos, como a quantidade de íons de hidrogênio livres em um líquido. A expressão dessa grandeza torna os números menores de 0 a 14 na indicação do pH. Será que ele também é eficaz na representação de grandezas muito grandes? Bem, a resposta é sim. Como exemplo podemos citar a energia liberada dos terremotos, que pode ser escrita por meio de potências de 10, de 0 até por volta de 10 graus na escala Richter, que mede o potencial destrutivo indicando a magnitude do terremoto, fazendo com que os valores atribuídos nesta escala, não aumentem de forma linear, mas sim de forma logarítmica evitando resultados com grandes valores.

Na Geologia, a escala Richter desenvolvida por *Charles Francis Richter* e *Beno Gutenberg*, mede a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas. Essa escala tem como função atribuir um número, no qual representará o grau de energia liberada por um abalo sísmico, ou seja, os terremotos são classificados de acordo com a variação de amplitude das oscilações de um tremor, registradas através de um sismógrafo [1].

Magnitude	Efeito
$< 2,5$	Normalmente não sentido, mas registrado
$2,5$ a $6,0$	Geralmente sentido; danos pequenos a moderados às estruturas
$6,1$ a $6,9$	Potencialmente destrutivo, especialmente em áreas povoadas
$7,0$ a $7,9$	Grandes terremotos; resultam em grandes danos
$> 8,0$	Grandes terremotos; geralmente resultam em destruição total

Tabela 12: Efeitos do terremoto em diversos níveis de intensidade

A escala Richter é uma escala logarítmica, pois a magnitude é o logaritmo da medida das amplitudes das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto. Isso é facilmente demonstrado quando assumimos que $M = logA - logA_0$, tal que M é a magnitude, A e A_0 representam respectivamente a amplitude máxima e amplitude de referência.Veja:

$$M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0)$$

$$M_1 - M_2 = \log A_1 - \log A_2$$

$$M_1 - M_2 = \log \frac{A_1}{A_2} \tag{5.1}$$

Isso quer dizer que, quando dois tremores de terras são classificados em magnitude de grau 4 e grau 5 por exemplo, temos que, a energia liberada do segundo terremoto foi exatamente 10 vezes maior que a do primeiro, e ainda um tremor de grau 6 será 100 vezes maior que um terremoto de grau 4.

Substituindo os tremores de magnitude 4 e 6, tal que $M_1 = 4$ e $M_2 = 6$ em 5.1, fica:

$$4 - 6 = \log \frac{A_1}{A_2}$$

1 Sismógrafos são instrumentos utilizados para registrar a hora, a duração e a amplitude de vibrações dentro da Terra e do solo.

$$-2 = \log \frac{A_1}{A_2}$$

$$10^{-2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{1}{100} \cdot A_2 = A_1$$

$$A_2 = A_1 \cdot 100$$

Com base nas análises registradas por sismólogos, Richter desenvolveu a expressão $M = \log A + 3 \cdot \log(8 \cdot \Delta t) - 2,92$, que determina a Magnitude M de um terremoto, a partir da amplitude A (em milímetros) registrada pelo sismógrafo e Δt que é o intervalo de tempo (em segundos) entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P).

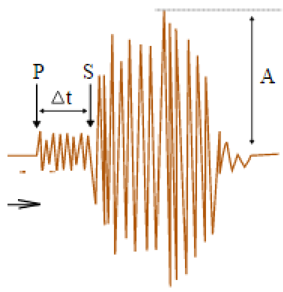

Figura 29: Registro de um sismólogo de um terremoto

A magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas de tipo P e S, a 100 km do epicentro.

Um terremoto a que seja atribuída magnitude 3 na escala de Richter tem uma amplitude 10 vezes maior do que um de magnitude 2, ou ainda, uma diferença de três pontos na escala corresponde a um aumento de 1000 vezes na amplitude do tremor, porém o que aumenta é a amplitude das ondas sismográficas e não a energia liberada, ou seja, comparar um trator que produza um tremor de 2 graus na escala Richter não é o mesmo que afirmar que 4 tratores produzirá um tremor de 8 graus.

Exemplo 5.2. De acordo com [7], o terremoto que atingiu o Chile em 27 de Fevereiro de 2010 teve uma intensidade de aproximadamente 9 graus na escala Richter, e seus efeitos foram sentidos em várias regiões, inclusive em São Paulo a 2850Km de distância. A expressão $I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$, onde E é a energia liberada do terremoto, em quilowatt-hora, e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kwh$.

Com base no enunciado, qual seria o intervalo correspondente à energia liberada do terremoto no Chile?

Solução:

Substituindo os valores na expressão, temos:

$$9 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{3}{2}$, fica:

$$\frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 13,5 = \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$$

Daí, pela definição 2.14, fica:

$$10^{13,5} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow E = 10^{13,5} \cdot 7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{10,5}$$

Dessa forma, em kwh, tem-se:

$$7 \cdot 10^{10} < E < 7 \cdot 10^{11}$$

5.1.3 *Logaritmo na matemática financeira*

Uma das aplicações mais comum do logaritmo na matemática financeira, está relacionada a taxa de juro composto, tornando imprescindível seu uso como ferramenta de cálculo. Sua abordagem em aula, desperta a curiosidade nos educandos, visto que, de um modo geral as transações financeiras fazem parte do cotidiano de muitos alunos.

Exemplo 5.3. Um cliente aplicou $R\$1.000,00$ numa instituição bancária a $1,5\%$ mensais no regime de juros composto. Quanto tempo de aplicação será necessário para que o montante seja de $R\$1.500,00$?

Para esse cálculo é necessário utilizar a fórmula: $M = C \cdot (1+i)^t$, onde M é o montante, C o capital de aplicação, i a taxa e t o tempo de aplicação.

Solução:

$$1500 = 1000 \cdot (1 + 0,015)^t$$

Dividindo os dois lados por 1000, fica:

$$1,5 = 1,015^t$$

Aplicando o logaritmo, temos:

$$\log 1,5 = \log 1,015^t$$

Aplicando a proposição: $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, e isolando a variável t, escrevemos:

$$\log 1,5 = t \cdot \log 1,015 \Rightarrow t = \frac{\log 1,5}{\log 1,015}$$

Com auxílio da calculadora, temos que:

$$t = \frac{0,176}{0,0065} \Rightarrow t = 27,08$$

Assim, será necessário 28 meses para o montante atingir os $R\$1500,00$.

A aplicação do logaritmo também se dá no cálculo do crescimento populacional de determinadas cidades.

Exemplo 5.4. Sabe-se que a população duma cidade A cresce 2% por ano. Quanto tempo será necessário para que essa população dobre?

Vamos considerar P_0 como a população inicial da cidade A, e admitir que P_1 seja a população após um ano, P_2 após dois anos e assim respectivamente. Seja P_t o dobro da população inicial, precisamos calcular t que indica o tempo necessário para a população dobrar.

Sabemos que:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + 0,02)^1$$

$$P_2 = P_0 \cdot (1 + 0,02)^2$$

$$\vdots$$

$$P_t = P_0 \cdot (1 + 0,02)^t$$

Como P_t é o dobro de P_0, ou seja:

$$P_t = 2 \cdot P_0$$

escrevemos,

$$2 \cdot P_0 = P_0 \cdot (1 + 0,02)^t$$

Dividindo ambos os lados por P_0, tem-se:

$$2 = (1 + 0,02)^t$$

Aplicando o logaritmo, fica:

$$\log 2 = \log 1,02^t$$

Aplicando a proposição: $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, e isolando a variável t, escrevemos:

$$\log 2 = t \cdot \log 1,02 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,02}$$

Com auxílio da calculadora, temos que:

$$t = \frac{0,301}{0,0086} \Rightarrow t = 35$$

Portanto, a população dobrará após 35 anos.

Note que, em todos os exemplos apresentados quando precisamos encontrar valores para os expoentes das potencias o logaritmo foi utilizado como uma ferramenta fundamental de cálculo. Perceba que o mesmo ocorre na representação das escalas geométricas, pois o crescimento se dá exponencialmente, isto é, os valores da escala esta na representação dada pelos expoentes e não pela base.

5.1.4 *Logaritmo como instrumento de cálculo de Intensidade Sonora*

Faremos mais um exemplo em como relacionar a escala logarítmica com os valores relativos da intensidade de ondas sonoras.

Segundo [10], a intensidade relativa I_R de uma onda sonora, medida em decibel (dB), é definida por,

$$I_R = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} \tag{5.2}$$

sendo I a intensidade sonora a ser medido e I_0 a menor intensidade sonora de referência audível (correspondente ao limiar da audição humana) ambas medida em $watt/m^2$. Nessa relação I é uma qualidade fisiológica do som, onde o ouvido humano diferencia um som forte de um fraco. Veja na tabela 13 os valores de I_R para alguns casos particulares.

Situação	I_R(dB)
Limiar da audição humana	0
Sussurro médio	20
Conversa normal	65
Limiar da dor	120

Tabela 13: Intensidade relativa de uma onda sonora

Observe que é possível representarmos os dados da tabela 13 em uma escala logarítmica. Basta resolvermos a equação 5.2, substituindo I_R pelos valores correspondentes, e assim calcular I em relação a I_0 em $watt/m^2$.

Exemplo 5.5. Para construir a escala que queremos, vamos calcular os valores de I para todas as situações citadas na tabela 13.

Quando $I_R = 0$, temos:

$$0 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$0 = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$10^0 = \frac{I}{I_0}$$

Isso mostra que, quando $I = I_0$ temos o mínimo de intensidade audível.

Para o sussurro médio, temos:

$$20 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$2 = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$10^2 = \frac{I}{I_0}$$

$$I = 100 \cdot I_0$$

O mesmo segue para o calculo da intensidade em $watts/m^2$ de uma conversa normal, veja:

$$65 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$6,5 = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$10^{6,5} = \frac{I}{I_0}$$

Perceba que a intensidade de uma conversa normal ficara representada na escala entre o intervalo de $[6,7]$.

Por ultimo, vamos calcular o limiar de dor, tal que, $I_R = 120$.

$$120 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$12 = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$10^{12} = \frac{I}{I_0}$$

$$I = 10^{12} \cdot I_0$$

Com isso, podemos escrever a escala logarítmica I no intervalo de $[0; 12]$, com os extremos sendo o limiar da audição e da dor respectivamente. Fica fácil perceber que, a medida que a escala aumenta aritmeticamente a intensidade I aumenta geometricamente, e assim,podemos responder perguntas do tipo:

Exemplo 5.6. Qual a intensidade sonora do limiar da dor em relação a intensidade sonora de um sussurro médio?

Solução

Como a intensidade I_s de um sussurro médio está representado na escala no ponto 2 e a limiar da dor I_d localizada no ponto 12, temos que, a distância entre elas é de exatamente 10 unidades, então:

$$I_d = 10^{12} \cdot I_0 = 10^{10} \cdot 10^2 \cdot I_0$$

Como $I_s = 10^2 \cdot I_0$, segue que, a intensidade sonora do limiar da dor é 10^{10} vezes, a intensidade sonora de um sussurro médio.

Podemos ainda, escrever a escala de intensidade sonora dando a cada ponto sua correspondência em W/m^2. Experimentalmente, temos que a menor intensidade física audível I_0 equivale à $10^{-12}W/m^2$. Assim, usando a equação 5.2, obtemos:

$$120 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$

$$12 = \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$

$$10^{12} = \frac{I}{10^{-12}}$$

$$10^{12+(-12)} = I$$

$$1 = I$$

Segue que, o limiar da dor tem intensidade igual a $10^0 = 1W/m^2$. Como mostrado anteriormente verificou-se que o limiar da audição ocorre quando $I = I_0$, então, o ponto de referência para 0 dB é $10^{-12}W/m^2$.

Assim podemos representar nossa escala conforme figura 30:

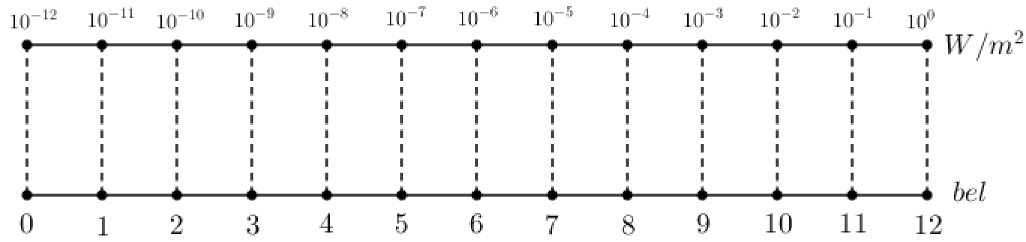

Figura 30: Representação da escala de intensidade sonora medido em bel

Embora tenhamos calculado a intensidade sonora em decibéis, a escala adotada está em *bel* que na prática nada mais é do que, um múltiplo do decibel, ou seja, um decibel representa um décimo do *bel*.

Vale lembrar que, a audição humana quando exposta por um longo período de tempo a níveis superiores a 85 dB, por ocorrer danos irreversíveis, e quando a intensidade está acima de 120 dB há uma sensação de extrema dor.

Observação 5.1.1. *Na construção da escala foi proposto os pontos de máximo e mínimo como sendo o Limiar da dor e da audição respectivamente, porém, existem situações em que a intensidade sonora supera a Limiar da dor, como por exemplo, o som de um avião a jato que supera a sensação de* $10W/m^2$.

A ideia que queremos deixar ao leitor, é que podemos transmitir aos nossos alunos, métodos para apresentar os logaritmos de forma contextualizada e objetiva, favorecendo a esses discentes uma real interpretação das principais características dessa maravilhosa escala.

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ouvindo relatos de amigos professores e de alunos da rede estadual de ensino, foi possível diagnosticar uma grande defasagem do ensino de logaritmos na escolas publicas. A proposta inicial dessa dissertação foi a de apresentar aos professores de matemática do ensino médio, um novo olhar sobre os logaritmos, propondo uma abordagem contextualizada desse ensino. Assim, este seria um instrumento no qual pudéssemos atenuar um pouco as dificuldades encontradas pelos docentes em sala de aula.

Esse trabalho trouxe uma relação direta das escalas aritméticas e geométricas com o uso dos logaritmos, propondo aos professores leitores uma abordagem construtivista desse ensino. É fácil encontrar livros didáticos que tratam o ensino do logaritmo apenas como uma ferramenta de cálculo, onde o que basta, é apenas entender as propriedades e definições do logaritmo. Tínhamos como pressuposto, apresentar estratégias reais de ensino, que pudessem ser abordadas em sala de aula, tal que, o aluno pudesse ser protagonista da sua própria aprendizagem e entender de forma contextualizada o significado de uma função ou escala logarítmica, e ainda, tirar suas próprias conclusões de tão quão importante e eficaz a criação do logaritmo foi para a sociedade.

Não foi a toa que procuramos relacionar o ensino de logaritmos com a música. O que queríamos, era apresentar métodos para colaborar com professores e alunos numa formação mais contextualizada, o que não significa, saber todas as demonstrações dos teoremas, postulados ou lemas, porém, poder apresentar diferentes métodos para explorar os logaritmos. A indícios que, a mesmice nas salas de aula, faz com que o aluno não se interesse ou se aproprie dos conhecimentos apresentados pelo professor. A ideia de apresentar escalas musicais como estratégia de ensino, é um artifício para despertar no educando o interesse e facilitar a compreensão do que se ensina. Nosso intuito foi, promover ao docente variadas maneiras de apresentar aos alunos o logaritmo, como algo que eles podem vivenciar, sendo esta uma prática de cativa-lo, fazendo com que ele participe mais assiduamente das aulas.

Outro método apresentado no trabalho foi a interdisciplinariedade que é defendida por muitos autores. Acreditamos que, quando o discente percebe uma relação entre duas ou mais disciplinas ou ainda, quando consegue enxergar uma aplicação para aquilo que está aprendendo, o estudo torna-se muito mais objetivo e prazeroso. Ao citar as escalas de pH, Richter, Intensidade Sonora e musical, pensamos que o aluno consiga mais facilmente desfragmentar os principais conceitos e definições por trás da teoria, compreendendo as propriedades e aplicações do logaritmo.

Em nossas abordagens, procuramos relacionar os conceitos do logaritmo também de forma geométrica, pois buscamos em nossa pesquisa, uma alternativa diferente das que são apresentadas nos livros didáticos. Indicamos no trabalho, uma construção geométrica dada através de retângulos abaixo da hipérbole, mostrando assim o cálculo de área construído por Fermat, verificando que quando as áreas dos retângulos cresciam de forma aritmética as distâncias aumentavam geometricamente. Embora mais visual e talvez um processo não tão conceitual, esta é uma outra maneira em que o professor pode propiciar ao aluno um novo olhar para os logaritmos. O processo de ensino aprendizagem não segue um roteiro único, no decorrer dos estudos observamos situações como essa no qual, podemos apresentar aos alunos de forma bastante visual, porém, sem esquecer de conceitua-la no percurso da sua abordagem.

Sabemos que no decorrer do trabalho, foi utilizado conceitos matemáticos que não são apresentados a alunos do ensino médio, porém, se fizeram necessário para mostrar ao nosso leitor os caminhos percorridos para definir e apresentar os conceitos utilizados. Foi possível, em alguns pontos do trabalho trocar e mostrar algumas situações problemas ou demonstrações, dispondo de conceitos básicos, como por exemplo, quando definimos o número de e usando limite e apresentamos uma outra possibilidade lidando com conceitos de matemática financeira.

Embora tenhamos apresentado no decorrer do trabalho alguns pontos utilizando matemática avançada para o nível de ensino médio, acreditamos que esta dissertação possa ser um grande suporte para professores que queiram inovar e aceitem o desafio de apresentar os logaritmos aos alunos de uma forma mais dinâmica e contextualizada. Sabemos que o conteúdo de logaritmos, nos traz inúmeras maneiras de abordagem em sala de aula, o que fizemos foi ampliar ao leitor as possibilidades em que ele pode ser explorado ou até mesmo criar novas estratégias de ensino.

Por fim, queremos deixar ao leitor do nosso trabalho que o conteúdo dos logaritmos pode ser apresentado aos educandos de maneira mais prazerosa sem perder os conceitos, propriedades e as aplicações gerais dispostos nos livros. Contudo, tratamos no decorrer da dissertação somente algumas possibilidades de ensino, considerando a vasta análise e imaginação daquele que ensina e trata a matemática não como uma incógnita mas sim como uma real construção de conhecimento.

APÊNDICE A

A.1 CURIOSIDADE

Em certo momento do estudo, nos deparamos com a *lei de Benford*, nome dado em homenagem ao físico *Frank Benford*, que consiste em estabelecer uma certa probabilidade referente a frequência que os dígitos de 1 à 9 aparecem em determinadas listas ou conjuntos de dados.

Este fato ocorre inacreditavelmente em muitas sequências ou dados aleatórios, talvez seja por isso, que tenha despertado em muitos matemáticos um interesse enigmático sobre o assunto. Uma sequência bastante conhecida que se observa nessa lei é a de *Fibonacci* que vamos tomar como exemplo.

Exemplo A.1. Seja a sequência dos números de Fibonacci, $F = \{1; 2; 3; 5; 8; 13; 21 \dots\}$, ao contarmos a quantidade de vezes que o primeiro dígito de cada número aparece na sequência F, teremos como resposta uma probabilidade diferente para cada algarismo. Pense que esta sequência infinita, particularmente deveria ter a mesma probabilidade de ocorrência em todos os dígitos, mas não é isso que ocorre. Na análise, o algarismo 1 aparece em 30% das vezes no primeiro dígito, enquanto o algarismo 2 aproximadamente $17,67\%$, diminuindo gradativamente a aparição dos outros algarismos até chegar ao 9 que aparece somente $4,67\%$ das vezes.

Se inicialmente nossa pergunta tivesse sido, "Qual a probabilidade de aparecer os algarismos de 1 à 9 como primeiro dígito na sequência de Fibonacci", a resposta possivelmente seria de aproximadamente $11,11\%$, já que temos nove algarismos como possibilidade. Porém, esse fenômeno do primeiro dígito mostrou uma relação diferente da esperada em diversas outras sequências ou dados estudados. Mas o que isso tem haver com nosso trabalho?

Inacreditavelmente, em 1881 o astrônomo e matemático *Simon Newcomb* desenvolveu uma fórmula que indicaria a probabilidade de ocorrência desses algarismos como o primeiro dígito de uma sequência como a do exemplo citado. Alguns anos mais tarde, Benford a testou tendo como amostra dados de áreas de bacias de rios, números que apareciam em artigos de revistas, jornais, dados estatísticos de jogos como beisebol, entre outros. Surpreendentemente, os resultados seguiam a ideia inicial da fórmula, que tinha na sua composição o logaritmo. Veja:

$$P = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

onde, d é o dígito que queremos calcular e P a probabilidade de ocorrência.

A fórmula mostrava, que uma certa potência de base 10 teria uma relação direta com a probabilidade do primeiro dígito ser um algarismo de 1 à 9.

Perceba que, ao substituir d pelos números de 1 à 9, tem-se a probabilidade de ocorrência desses números em determinadas sequências.

Para $d = 1$, segue que:

$$P = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \log 2 \approx 0,301$$

$$P \approx 30,1\%$$

Para $d = 2$

$$P = \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \log\frac{3}{2} \approx 0,1761$$

$$P \approx 17,61\%$$

Para $d = 3$

$$P = \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \log\frac{4}{3} \approx 0,1249$$

$$P \approx 12,49\%$$

Segue o mesmo raciocínio para $d = 4,5,6,7,8,9$

Deixamos aqui ao leitor, uma curiosidade e sugestão de pesquisa que envolve o logaritmo com probabilidade e um pouco de enigma.

BIBLIOGRAFIA

[1] Abdounur, O. J.: *Matemática e música: O pensamento analógico na construção de significados*. Escrituras, 5ª ed., 2010, ISBN 9788586303524.

[2] Aragona, J.: *Números reais*. Livraria da Física, São Paulo, 1ª ed., 2010, ISBN 9788578610401.

[3] Boyer, C. B.: *História da MAtemática*. Blucher, São Paulo, 3ª ed., 2010, ISBN 9788521205135.

[4] Costa, P. R. R., V. F. Ferreira, P. M. Esteves e M. L. A. A. Vasconcellos: *Ácidos e Bases em Química orgânica*. SBQ-Bookman, Porto Alegre, 1ª ed., 2005, ISBN 8536305339.

[5] Druck, S., A. C. P. Hellmeiister e C. M. Peixoto: *Coleção Explorando o Ensino*. SEB do Ministério da Educação, Brasília, 1ª ed., 2004, ISBN 8598171158.

[6] Eves, H.: *Introdução à história da matemática*. Unicamp, Campinas, SP, 5ª ed., 2011, ISBN 8526806572.

[7] Farago, J. L. e L. N. dos Santos Carneiro: *Apostila Positivo de Matemática*. Positivo, Curitiba, 1ª ed., 2010, ISBN 9788538550280.

[8] Fazenda, I. C. A.: *Interdisciplinaridade: História, teoria e pesquisa*. Papirus, Campinas, São Paulo, 13ª ed., 1994.

[9] Guidorizzi, H. L.: *Um curso de Cálculo*. Livros técnicos e científicos, IME USP, 3ª ed., 1986, ISBN 8521611226.

[10] Halliday, D., R. Resnick e J. Walker: *Física 2*. LTC-Livros Técnicos e Científicos, 1984, ISBN 8521607067.

[11] Hogben, L.: *Maravilhas da Matemática influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos*. Livraria Globo, 2ª ed., 1970.

[12] Iezzi, G., O. Dolce, D. Degenszajn, R. Périgo e N. de Almeida: *Matemática: ciência e aplicações*. Atual, São Paulo, 2ª ed., 2004, ISBN 8535704256.

[13] Iezzi, G., O. Dolce e C. Murakami: *Fundamentos de Matemática Elementar - Loga-*

ritmo. Atual, São Paulo, 9ª ed., 2004, ISBN 8535704566.

[14] Iezzi, G., N. J. Machado e C. Murakami: *Fundamentos de Matemática Elementar - Limites, Derivadas e Noções de Integral*. Atual, São Paulo, 6ª ed., 2005, ISBN 8535705473.

[15] Lima, E. L.: *Logaritmos*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

[16] Lima, E. L.: *Meu professor de matemática e outras histórias*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1ª ed., 1987.

[17] Lima, E. L., P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado: *A Matemática do Ensino Médio*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1ª ed., 1996.

[18] Lima, P. C. de: *Fundamentos de Análise I*. CAED-UFMG, Belo Horizonte, 1ª ed., 2013, ISBN 9788564724259.

[19] Livio, M.: *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*. Record, Rio de Janeiro, 2ª ed., 2007, ISBN 9788501066534.

[20] Maor, E.: *e: a história de um número*. Record, Rio de Janeiro, 4ª ed., 2008, ISBN 9788501058478.

[21] Miguel, A. e M. A. Miorim: *Os logaritmos na cultura escolar brasileira*. FE-UNICAMP: Sociedade Brasileira de História da matemática, Campinas, São Paulo, 1ª ed., 2001, ISBN 9788586091230.