



HERBERT MAVEL DE LIMA

**APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM CIRCUITOS
ELÉTRICOS**

Santo André, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

HERBERT MAVEL DE LIMA

**APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM CIRCUITOS
ELÉTRICOS**

Orientador: Prof. Dr. Antônio Cândido Faleiros

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO HERBERT MAVEL DE LIMA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANTÔNIO CÂNDIDO FALEIROS.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Mavel de Lima, Herbert

Aplicação de números complexos em circuitos elétricos / Herbert Mavel de Lima. — 2017.

141 fls.

Orientador: Antônio Cândido Faleiros

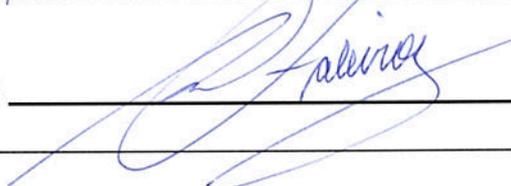
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Números Complexos. 2. Circuitos Elétricos. I. Cândido Faleiros, Antônio. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 13 de setembro de 2017.

Assinatura do autor: Herbert Mavel de Lima

Assinatura do orientador: 

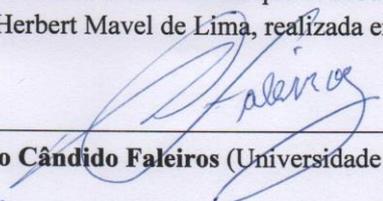


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

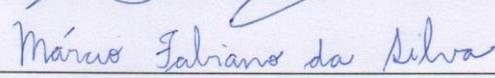
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

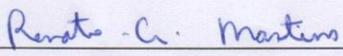
Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Herbert Mavel de Lima, realizada em 10 de agosto de 2017:



Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (Universidade Federal do ABC) – Presidente



Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Armando Traldi Junior** (Instituto Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Dedico este trabalho a Douglas Nunes da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família que sempre me motivou nos estudos, as diretoras Valéria Garcia e Letícia Garcia do Colégio Mania de Aprender, pois sempre me apoiaram, principalmente adaptando horários e turnos de trabalho, a professora Shirley, aos alunos do Profmat da UFABC, ao professor orientador Antônio Cândido Faleiros, cuja a orientação foi essencial para a elaboração deste trabalho e ao professor Daniel Miranda que auxiliou o uso da linguagem Latex.

“No meio da dificuldade, encontra-se a oportunidade.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho de conclusão tem o objetivo de identificar uma aplicação de conceitos estudados no curso de Profmat e que pode ser aplicado com alunos do Ensino Médio. O tema escolhido é Números Complexos com aplicação em Circuitos Elétricos, no qual são estudadas a Lei de Ohm, funções senoidais, assuntos referentes ao Ensino Médio. Entraremos no conceito inicial de fasores para análise de relação entre circuito elétrico e números complexos.

O primeiro capítulo dá uma introdução histórica sobre os números complexos como a necessidade de encontrar raízes quadradas de números negativos, operações com números complexos e representação no plano.

No segundo capítulo são abordados temas sobre a Lei de Ohm como tensão, resistência e corrente elétrica e a relação entre elementos eletrônicos como resistor, capacitor e indutor. Como consequência as reatâncias capacitivas, reatância indutivas e impedância, existindo a possibilidade de incluir o estudo de fasores que é um assunto pouco visto no ensino médio, mas em muitos casos é semelhante ao estudo de vetores abordados desde o ensino fundamental.

No terceiro capítulo são abordados os medidores elétricos, componentes elétricos unidos em associação série ou paralelo formando os circuitos elétricos fechados como RC, RL e RLC, onde temos diversos exemplos com resoluções inclusas no texto.

O quarto capítulo é composto por sugestões de aplicações com alunos sobre o tema proposto contendo exercícios, resoluções propostas e um trabalho inicial realizado com alunos de uma escola pública estadual.

Palavras-chave: componentes elétricos, circuitos, números complexos.

ABSTRACT

The purpose of this research is to identify an application of concepts studied in the course of Profmat and may be applied with students of Secondary Education. The subject chosen is Complex Numbers with application in Electrical Circuits that are studied the Ohm's Law, sinusoidal functions, subjects referring to the Secondary Education. We will enter the initial concept of phasors to analyze the relationship between electric circuit and complex numbers.

The first chapter gives a historical introduction about complex numbers such as the necessity to find square roots of negative numbers, operations with complex numbers and representation in the plane.

In the second chapter, it will be discussed theme about the Ohm's Law as voltage, resistance and electrical current, as well as the relationship between electronic elements such as resistor, capacitor and inductor. As a consequence of capacitive reactance, inductive reactance and impedance with a possibility to include the research about Phasors that is not explored enough in middle school, but in many cases is similar to the study of vectors addressed since elementary school. In the third chapter are approached the electric meters, electrical components united in series or parallel association forming closed electric circuits like RC, RL and RLC, where we have several examples with resolutions included in the text.

The fourth chapter is composed by suggestions of applications with students about the proposed theme with exercises, resolutions and an initial work realized with students of a state public school.

Keywords: electrical components, circuits, complex numbers

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Plano Complexo	15
Figura 2	Exemplo Numérico Plano Complexo	16
Figura 3	Linhas de Força	22
Figura 4	Campo Elétrico	23
Figura 5	Gerador de Tensão Contínua	24
Figura 6	Gerador de Tensão Alternada Senoidal	24
Figura 7	Condutor Elétrico	26
Figura 8	Resistores	27
Figura 9	Símbolo do Resistor	27
Figura 10	Resistores em Série	27
Figura 11	Resistores em Paralelo	28
Figura 12	Resistor Equivalente	28
Figura 13	Indutores	29
Figura 14	Símbolo do Indutor	29
Figura 15	Indutores em Série	30
Figura 16	Indutores em Paralelo	30
Figura 17	Indutor Equivalente	31
Figura 18	Capacitores	32
Figura 19	Símbolo do Capacitor	32
Figura 20	Capacitores em Série	32
Figura 21	Capacitores em Paralelo	33
Figura 22	Capacitor Equivalente	33

Figura 23	Plano Fasorial	36
Figura 24	Plano Fasorial da Impedância	37
Figura 25	Exemplo 2.11 Impedância Forma Polar	38
Figura 26	Defasagem	39
Figura 27	Circuito Tensão e Corrente no Resistor	40
Figura 28	Defasagem Corrente e Tensão no Resistor	41
Figura 29	Circuito Tensão e Corrente no Indutor	42
Figura 30	Defasagem Corrente e Tensão no Indutor	42
Figura 31	Circuito Tensão e Corrente no Indutor	43
Figura 32	Defasagem Corrente e Tensão no Capacitor	44
Figura 33	Amperímetro	46
Figura 34	Voltímetro	46
Figura 35	Ohmímetro	47
Figura 36	Circuito DC	47
Figura 37	Circuito AC	48
Figura 38	Circuito RL em Série	49
Figura 39	Circuito RL em Paralelo	50
Figura 40	Circuito RC em Série	52
Figura 41	Circuito RC em Paralelo	53
Figura 42	Circuito RLC em Série	55
Figura 43	Circuito RLC em Paralelo	56
Figura 44	Plano Fasorial Exercício 2-a	62
Figura 45	Plano Fasorial Exercício 2-b	62
Figura 46	Plano Fasorial Exercício 2-c	63
Figura 47	Resistores em Série do Exercício 7-a	66
Figura 48	Resistores em Paralelo do Exercício 7-b	66
Figura 49	Resistores em Paralelo e em Série do Exercício 7-c	67

Figura 50	Resistores em Paralelo e em Série do Exercício 7-d	68
Figura 51	Indutores em Série do Exercício 8-a	68
Figura 52	Indutores em Paralelo do Exercício 8-b	69
Figura 53	Indutores em Paralelo e em Série do Exercício 8-c	69
Figura 54	Indutores em Paralelo e em Série do Exercício 8-d	70
Figura 55	Capacitores em Série do Exercício 9-a	71
Figura 56	Capacitores em Paralelo do Exercício 9-b	71
Figura 57	Capacitores em Paralelos e em Série do Exercício 9-c	72
Figura 58	Capacitores em Paralelo e em Série do Exercício 9-d	72
Figura 59	Circuito RC em Série do Exercício 10-a.	73
Figura 60	Impedância do Exercício 10-a na Forma Fasorial	74
Figura 61	Circuito RC com Capacitores em Série do Exercício 10-b	74
Figura 62	Impedância do Exercício 10-b na Forma Fasorial	75
Figura 63	Circuito RC em Paralelo do Exercício 10-c	76
Figura 64	Segundo Circuito RC em Paralelo do Exercício 10-c	77
Figura 65	Impedância do Segundo Circuito do Exercício 10-c na Forma Fasorial	78
Figura 66	Circuito RC em Série com Capacitores e Resistores em Paralelos do Exercício 10-d	78
Figura 67	Impedância do Exercício 10-d na Forma Fasorial	80
Figura 68	Circuito RL em Série do Exercício 10-e	80
Figura 69	Impedância do Exercício 10-e na Forma Fasorial	81
Figura 70	Circuito RL com Indutores em Série do Exercício 10-f	82
Figura 71	Impedância do Exercício 10-f na Forma Fasorial	83
Figura 72	Circuito RL em Paralelo do Exercício 10-g	84
Figura 73	Segundo Circuito RL em Paralelo do Exercício 10-g	85
Figura 74	Impedância do Segundo Circuito do Exercício 10-g na Forma Fasorial	85

Figura 75	Circuito RL em Série com Indutores e Resistores em Paralelos do Exercício 10-h	86
Figura 76	Impedância do Exercício 10-h na Forma Fasorial	88
Figura 77	Circuito RLC em Série do Exercício 10-i	88
Figura 78	Impedância do Exercício 10-i na Forma Fasorial	89
Figura 79	Circuito RLC em Paralelo do Exercício 10-j	89
Figura 80	Segundo Circuito RLC em Paralelo do do Exercício 10-j	90
Figura 81	Impedância do Segundo Circuito do Exercício 10-j na Forma Fasorial	91
Figura 82	Simulação do Circuito do Exercício 10-a	93
Figura 83	Simulação do Circuito do Exercício 10-b	94
Figura 84	Simulação do Segundo Circuito do Exercício 10-c	95
Figura 85	Simulação do Circuito do Exercício 10-d	96
Figura 86	Segunda Simulação do Circuito do Exercício 10-d	97
Figura 87	Simulação do Circuito do Exercício 10-e	98
Figura 88	Simulação do Circuito do Exercício 10-f	99
Figura 89	Simulação do Segundo Circuito do Exercício 10-g	100
Figura 90	Simulação do Circuito do Exercício 10-h	101
Figura 91	Simulação do Circuito do Exercício 10-i	102
Figura 92	Simulação do Segundo Circuito do Exercício 10-j	103
Figura 93	Resumo da Aula Aplicada sobre Números Complexos	104
Figura 94	Introdução sobre Gráfico de Fasores	104
Figura 95	Exercícios Realizados pelo Aluno	104
Figura 96	Exercícios Realizados pelo Aluno	105
Figura 97	Circuito RLC em série.	110
Figura 98	Impedâncias em Série	113
Figura 99	Impedâncias em Paralelo	114

Figura 100 Duas Impedâncias em Paralelo. 115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tabela Básica de Unidades de Medidas.	39
----------	---	----

CONTEÚDO

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xxi
INTRODUÇÃO	1
1 NÚMEROS COMPLEXOS	3
1.1 Introdução Histórica	3
1.2 Generalidades	4
1.3 Representação no plano cartesiano	15
1.4 Forma trigonométrica de um número complexo	16
2 ELETRICIDADE	21
2.1 Condutor	22
2.2 Diferença de Potencial	23
2.3 Gerador Elétrico	24
2.4 Corrente Elétrica	25
2.5 Resistência Elétrica	26
2.5.1 Resistência Equivalente	27
2.6 Indutor	29
2.6.1 Indutor Equivalente	29
2.7 Capacitor	31
2.7.1 Capacitor Equivalente	32
2.8 Reatância Indutiva, Reatância Capacitiva e Impedância	34
2.9 Defasagem	38
2.10 Relação Tensão e Corrente	40
2.10.1 Tensão x Corrente no Resistor	40
2.10.2 Tensão x Corrente no Indutor	41
2.10.3 Tensão x Corrente no Capacitor	43
3 APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS	45
3.1 Introdução	45

3.2	Medidores Elétricos	45
3.2.1	Amperímetro	46
3.2.2	Voltímetro	46
3.2.3	Ohmímetro	46
3.3	Circuitos Com Tensão Contínua	47
3.4	Circuitos Com Tensão Alternada	47
3.5	Circuito RL	48
3.5.1	Circuito RL em Série	48
3.5.2	Circuito RL em Paralelo	50
3.6	Circuito RC	51
3.6.1	Circuito RC em Série	51
3.6.2	Circuito RC em Paralelo	53
3.7	Circuito RLC	54
4	SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM	59
4.1	Aplicação com Alunos	92
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	107
A	IMPEDÂNCIA NOS CIRCUITOS ELÉTRICOS	109
A.1	Circuito RLC	109
A.2	Elementos ligados em série	113
A.3	Elementos ligados em paralelo	114
	Referência Bibliográfica	117
	Bibliografia	117

INTRODUÇÃO

A discussão sobre o estudo dos números complexos no Ensino Médio, muitas vezes se torna um debate entre alunos e professores. O início dos estudos sobre os números complexos se baseou na aproximação entre a geometria e a álgebra. Hoje existem mais aplicações como, por exemplo, em sinais periódicos senoidais.

Expressões que aparecem um número “imaginário”, ausência de compreensão sobre os resultados obtidos nos cálculos ou a sua importância, ocasionam numa resistência ou falta de motivação no processo de aprendizagem por parte dos alunos, todavia seria muito simples e prejudicial se apenas “descartar” este tema como objeto de estudo.

É necessário aplicações reais no processo de aprendizagem que motivem os alunos relacionando sua importância como objeto de estudo Ensino Médio. Melhorar também a compreensão de significados e a sua relação sobre temas do cotidiano do aluno (problemas reais), motivando-o ao estudo sobre os números complexos. Desta forma, a aplicação dos números complexos em circuitos elétricos se torna uma ferramenta para os alunos compreenderem sua importância que é o objetivo deste trabalho.

NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

O conceito dos números complexos começou a ser formalmente discutido no século XVI, no qual Raffaele Bombelli (1572), introduziu pela primeira vez os números complexos. Entretanto, apenas dois séculos depois Gauss e Argand apresentaram uma representação geométrica e a denominação “Número Complexo”, que se deve à Gauss (1832). Todavia, foi Euler quem, em 1777, introduziu o símbolo “ i ” no seu “*Institutiones Calculi Integralis*”.

Na história da matemática, observamos novos conceitos e teorias que causaram muitas controvérsias e debates sobre determinados temas e uma delas é o número complexo. Acredita-se que uma delas aconteceu quando Girolano Cardano (1501-1576) apresentou um método para resolução de equação do terceiro grau, no qual havia raiz quadrada de números negativo, por exemplo $x^3 = 15x + 4$ e chegou a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

o que parecia um resultado inválido por envolver raiz de número negativo, chegou-se ao resultado $x = 4$, afinal, é um resultado legítimo da equação $x^3 = 15x + 4$. É apenas um exemplo onde surgiu a necessidade de ampliar a quantidade de conjuntos, no qual o uso destes números são permitidos e hoje é denominado conjunto dos números complexos. Hoje os números complexos são aplicados em Física como campo magnético, equações diferenciais, engenharias, etc. Aqui ele será aplicado no estudo dos circuitos elétricos.

1.2 GENERALIDADES

O estudo dos números complexos se justifica pela possibilidade de dar significado à raízes quadradas de números negativos, simplificar os enunciados de muitos teoremas, calcular logaritmos de números negativos, ampliar o campo de análise, passando do eixo real, ampliando-o para o plano complexo. Enfim, a introdução de números complexos resulta em uma ampliação do campo de números. Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos, que serão necessários nas aplicações de circuitos eletrônicos.

A necessidade de ampliar o conjunto dos números reais se deu no estudo das equações polinomiais. A equação de Bhaskara nos diz que uma equação polinomial

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

na incógnita x , e $a \neq 0$, possui duas soluções reais

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

quando $b^2 - 4ac > 0$. Uma correspondente ao sinal mais + e outra correspondente ao sinal - na fórmula apresentada acima. Cada solução da equação polinomial $ax^2 + bx + c = 0$ na incógnita x recebe o nome de raiz do polinômio $ax^2 + bx + c$. Sendo x_1 e x_2 as raízes do polinômio, podemos fatorá-lo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Quando $b^2 - 4ac = 0$, o polinômio possui uma única raiz real. Sendo x_1 a única raiz real, podemos fatorar o polinômio

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

e dizer que a raiz x_1 é dupla, o que se justifica pela forma fatorada do polinômio em que $x - x_1$ aparece elevado ao quadrado.

Todavia, quando o termo $b^2 - 4ac < 0$, a equação não apresenta nenhuma solução real, uma vez que nenhum número real elevado ao quadrado resulta em um número negativo. Abaixo apresentamos alguns polinômios que não possuem raiz real

$$x^2 + 1, \quad x^2 + 4, \quad x^2 - 2x + 5.$$

Alguns polinômios possuem duas raízes reais, outros não possuem nenhuma, esta “assimetria” perdurou até que um matemático arrojado resolveu ampliar o conjunto dos

números reais, introduzindo uma “unidade imaginária” i . Este seria o número que, elevado ao quadrado resultaria em -1

$$i^2 = -1.$$

Inicialmente se operou com o número i como se ele possuísse todas as propriedades dos números reais. Portanto, ao aplicar a fórmula de Bhaskara para determinar as raízes de $x^2 - 2x + 5$, obtinham

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}.$$

Para determinar $\sqrt{-16}$, se procedia como se esta raiz quadrada negativa tivesse as mesmas propriedades das raízes quadradas de um número real positivo

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = i4 = 4i.$$

Assim, as raízes do polinômios $x^2 - 2x + 5$ são

$$\frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Uma delas é $1 + 2i$ e a outra é $1 - 2i$. Este tipo de número recebeu o nome de número complexo. Todo polinômio do segundo grau possui duas raízes. No caso de ter uma única raiz, esta é dupla e todo polinômio do segundo grau agora pode ser fatorado

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

sendo que x_1 e x_2 são números reais ou complexos.

A fórmula de Bhaskara indica que todo número complexo é da forma

$$a + bi,$$

onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, aquele número que, elevado ao quadrado, resulta em -1

$$i^2 = -1.$$

O a é chamado de parte real e o b de parte imaginária do número complexo $a + bi$. Usamos as notações $a = \text{Re}(a + bi)$ e $b = \text{Im}(a + bi)$.

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são iguais quando $a = c$ e $b = d$. Para adicionar dois números complexos $a + bi$ e $c + di$, tem-se

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mas devemos inicialmente definir a adição de números complexos como veremos a seguir.

Definição 1.1. Sejam $a + bi$ e $c + di$ dois números complexos. Definimos a operação de adição destes dois números complexos por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Para multiplicar dois números complexos, utilizamos a propriedade distributiva e que $i^2 = -1$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Novamente, ainda não definimos a multiplicação de números complexos. Tomemos então o resultado acima como definição da multiplicação.

Definição 1.2. Sejam $a + bi$ e $c + di$ dois números complexos. Definimos a operação de multiplicação destes dois números complexos por

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Em breve mostraremos que o conjunto dos números complexos com as operações de adição e multiplicação tais como definimos possui uma estrutura de corpo.

Exemplo 1.1. Vamos adicionar e multiplicar os números complexos $3 + 2i$ e $1 - i$ usando as definições

$$(3 + 2i) + (1 - i) = 4 + i$$

$$(3 + 2i) \cdot (1 - i) = (3 + 2) + (-3 + 2)i = 5 - i$$

Ainda havia um ponto que desagradava os matemáticos. Seria interessante construir o conjunto dos números complexos a partir dos conjuntos já definidos e usando o que se conhecia da teoria dos conjuntos. Como um número complexo da forma $a + bi$ precisa de dois números reais a e b para ser definido, nota-se que há uma bijeção entre o conjunto dos números complexos e o conjunto de pares ordenados (a, b) de números reais, que pertencem ao produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Resolveu-se então escrever o número complexo $a + bi$ correspondente a (a, b) , ou seja $f(a + bi) = (a, b)$. O conjunto dos números complexos passa a também ser representado por conjunto de pares ordenados de números reais. Conhecemos o conjunto dos números reais e sabemos realizar o produto cartesiano. Dois números complexos (a, b) e (c, d) são iguais quando $a = c$ e $b = d$. O número real a é denominado de parte real e o número real b de parte

imaginária. Usamos as notações $a = \text{Re}(a, b)$ e $b = \text{Im}(a, b)$. Definimos a adição e a multiplicação de números complexos (a, b) e (c, d) pelas igualdades a seguir

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

No caso da multiplicação podemos omitir o ponto \cdot e indicar esta operação apenas como $(a, b)(c, d)$. Cada número complexo de uma soma é denominado parcela e cada número complexo em um produto é chamado fator. Essas operações foram inspiradas nas definições anteriores quando usamos a notação $a + bi$ para denotar um número complexo.

Exemplo 1.2. Vamos adicionar e multiplicar os números complexos $(5, 6)$ e $(1, 4)$.

$$\begin{aligned}(5, 6) + (1, 4) &= (5 + 1, 6 + 4) = (6, 10), \\ (5, 6) \cdot (1, 4) &= (5 - 24, 20 + 6) = (-19, 26),\end{aligned}$$

Observação 1.2.1. *A equação do terceiro grau foi efetivamente estudada no final do século XV, com a Renascença,*

Propriedades da adição e da multiplicação

- A adição e a multiplicação de números complexos são operações **comutativas**, isto é, sendo z_1 e z_2 números complexos,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Observação 1.2.2. *Estamos assumindo que a comutatividade e a associatividade no conjunto dos números reais é conhecida e a usamos para provar nas operações com números complexos.*

Exemplo 1.3. Observe que

$$(5, 6) + (1, 4) = (5 + 1, 6 + 4) = (6, 10)$$

e

$$(1, 4) + (5, 6) = (1 + 5, 4 + 6) = (6, 10)$$

mostrando que, para estes dois números complexos, a adição é comutativa

$$(5, 6) + (1, 4) = (1, 4) + (5, 6).$$

A multiplicação também é comutativa para estes dois números complexos pois

$$(5, 6) \cdot (1, 4) = (5 - 24, 20 + 6) = (-19, 26)$$

e

$$(1, 4) \cdot (5, 6) = (5 - 24, 6 + 20) = (-19, 26).$$

Vale, portanto, a igualdade

$$(5, 6) \cdot (1, 4) = (1, 4) \cdot (5, 6).$$

- A adição e a multiplicação de números complexos são operações **associativas**, isto é, se z_1, z_2 e z_3 forem números complexos, então

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

e

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

Definição 1.3. O número complexo $(0, 0)$ é o **elemento neutro da adição** pois, para todo número complexo (a, b) ,

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b).$$

O número complexo $(0, 0)$ é chamado **nulo** ou **zero**.

Definição 1.4. Dado o número complexo (a, b) , ao adicioná-lo com $(-a, -b)$, obtemos

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

O número $(-a, -b)$ é chamado de **simétrico aditivo** ou **oposto** de (a, b) e é denotado por $-(a, b)$. O oposto de (a, b) é o número complexo que adicionado ao (a, b) resulta no $(0, 0)$, que é o elemento neutro da adição. Cada número complexo possui um único elemento oposto.

Sendo z_1 e z_2 números complexos, definimos a diferença $z_1 - z_2$ como sendo o número complexo $z_1 + (-z_2)$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Definição 1.5. O número complexo $(1, 0)$ é o **elemento neutro da multiplicação** pois, para todo número complexo (a, b) ,

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

Exemplo 1.4. Multiplicando $z = (10, 2)$ pelo elemento neutro da multiplicação obtemos

$$z \cdot (1, 0) = (10, 2) \cdot (1, 0) = (10 - 0, 0 + 2) = (10, 2) = z.$$

Dado o número complexo (a, b) não nulo, ao multiplicá-lo por

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

obtemos

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0),$$

que é o elemento neutro da multiplicação. Não existe outro número complexo que multiplicado por (a, b) dê $(1, 0)$, que é o elemento neutro da multiplicação.

Definição 1.6. O número

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

é chamado de **simétrico multiplicativo** ou **inverso** de (a, b) e será denotado por $(a, b)^{-1}$.

Observação 1.2.3. Dado o número complexo $z = a + bi$, não nulo, definimos o inverso de z como $z^{-1} = c + di$, tal que $zz^{-1} = 1$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = 1 = 1 + 0i$$

ou seja,

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$$

este sistema pode ser resolvido pela regra de Cramer e possui uma única solução

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

o que explica a unicidade do inverso do número complexo.

Exemplo 1.5. O inverso de $(1, 2)$ é

$$(1, 2)^{-1} = \left(\frac{1}{1^2 + 2^2}, \frac{-2}{1^2 + 2^2} \right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right).$$

Apenas o $(0, 0)$ não possui inverso. Para cada número complexo z não nulo, existe um único número complexo w , também não nulo, tal que

$$z \cdot w = w \cdot z = (1, 0).$$

Em outras palavras, cada número complexo (a, b) não nulo possui um único inverso.

Definição 1.7. Sendo z_1 e z_2 números complexos, com $z_2 \neq (0, 0)$, definimos a **divisão** de z_1 por z_2 como sendo a operação que resulta no número complexo z_1/z_2 dado por

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

O número z_1/z_2 é chamado de **quociente** de z_1 por z_2 .

No caso de $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, o quociente $(a, b)/(c, d)$ é

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b) \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} \right)$$

Exemplo 1.6. Usando como exemplo os números complexos $z_1 = (5, 6)$ e $z_2 = (1, -4)$, a diferença entre z_1 e z_2 e a divisão de z_1 por z_2 resultam em

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (5, 6) - (1, -4) = (5, 6) + (-1, 4) = (4, 10) \\ z_1/z_2 &= z_1 \cdot z_2^{-1} = (5, 6) \cdot \left(\frac{1}{17}, \frac{4}{17} \right) = \left(-\frac{19}{17}, \frac{26}{17} \right). \end{aligned}$$

Vamos determinar o quociente de $(5, 2)$ por $(3, 6)$

$$\begin{aligned} \frac{(5, 2)}{(3, 6)} &= (5, 2) \cdot \left(\frac{3}{3^2 + 6^2}, \frac{-6}{3^2 + 6^2} \right) = \left(\frac{15 + 12}{45}, \frac{-30 + 6}{45} \right) \\ &= \left(\frac{27}{45}, -\frac{24}{45} \right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{8}{15} \right). \end{aligned}$$

- A multiplicação é uma operação **distributiva** em relação à adição. Com isto pretendemos dizer que, se z_1, z_2 e z_3 forem números complexos,

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Sendo $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$, a igualdade acima se escreve

$$(a, b)((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f).$$

Exemplo 1.7. Para os números complexos $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (3, 4)$ e $z_3 = (5, 6)$, tem-se:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (1, 2)((3, 4) + (5, 6)) = (1, 2)(8, 10) \\ &= (8 - 20, 10 + 16) = (-12, 26) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_3 &= (1, 2)(3, 4) + (1, 2)(5, 6) \\ &= (3 - 8, 4 + 6) + (5 - 12, 6 + 10) \\ &= (-5, 10) + (-7, 16) = (-12, 26). \end{aligned}$$

Nota-se que, para este exemplo, vale a distributividade

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Prova das propriedades das operações

- Vamos provar a comutatividade da adição, usando a comutatividade da adição dos números reais.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b).$$

- Vamos provar a comutatividade da multiplicação, usando a comutatividade da multiplicação dos números reais.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b).$$

- Vamos provar a associatividade da adição, usando a associatividade da adição dos números reais.

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)). \end{aligned}$$

- Vamos provar a associatividade da multiplicação, usando a associatividade da multiplicação dos números reais. Note que

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, ade + bce + acf - bdf) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, ade + bce + acf - bdf) \end{aligned}$$

Comparando os dois resultados, temos a validade da associatividade da multiplicação, isto é,

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)).$$

- Vamos provar que a multiplicação de números complexos é uma operação distributiva em relação à adição. Sejam $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$ três números complexos. Vamos provar que

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

desenvolvendo cada membro em separado. Efetuando as contas,

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a, b)((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_3 &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be). \end{aligned}$$

Percebemos que

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

o que prova a distributividade.

As operações de adição e multiplicação de números complexos são comutativas, associativas, possuem elemento neutro, todo número complexo possui um único oposto, todo número complexo não nulo possui um único inverso e a multiplicação é distributiva em relação à adição. Um conjunto com duas operações possuindo estas propriedades forma uma estrutura que denominamos **corpo**. A este damos o nome de **corpo dos números complexos** e vamos denotá-lo por \mathbb{C} . Por vezes vamos nos referir a este corpo apenas como conjunto de números complexos.

A notação anterior $a + bi$ para um número complexo era bem mais confortável de se trabalhar. Podemos retornar a ela. Quando a parte real de um número complexo for igual a zero, como em $(0, b)$, vamos chamá-lo de número **imaginário puro**. Quando a parte imaginária de um número complexo for zero, como em $(a, 0)$, vamos denotá-lo simplesmente por a

$$a = (a, 0).$$

Vamos denotar o número complexo $(0, 1)$ por i

$$i = (0, 1).$$

Com esta convenção,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

O número complexo (a, b) pode ser escrito na forma $a + bi$ com as convenções estabelecidas. Este formato de apresentação de um número complexo se chama **forma cartesiana**.

Com esta notação podemos dizer que o conjunto de números reais está contido no conjunto de números complexos pois, se a é um número real, $a = a + 0i$. Todo número real pode ser pensado como um número complexo com parte imaginária nula.

Podemos calcular

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

o oposto de $i = (0, 1)$ é o $-i = (0, -1)$. Como $-1 \cdot i = (-1, 0) \cdot (0, 1) = (0, -1) = -i$, mostramos que

$$-i = -1 \cdot i.$$

O inverso de i é

$$i^{-1} = \left(\frac{0}{0^2 + 1^2}, \frac{-1}{0^2 + 1^2} \right) = (0, -1) = -i.$$

Tanto o oposto de i quanto o seu inverso são iguais a $-i$

$$i^{-1} = -i.$$

De modo semelhante se chega às fórmulas de adição e multiplicação

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

O oposto de $a + bi$ é $-a - bi$ e o seu inverso é

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Vamos agora definir as potências inteiras de um número complexo.

Definição 1.8. Seja $n > 0$ um número inteiro positivo. As potências inteiras de um número complexo z são definidas recursivamente por

$$z^0 = 1, \quad z^n = z^{n-1}z.$$

Quando z for diferente de zero, definimos suas potências inteiras negativas por

$$z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

Com esta definição, as primeiras potências inteiras positivas de z são dadas por

$$\begin{aligned}z^0 &= 1 \\z^1 &= z^0 z = z \\z^2 &= z^1 z = zz \\z^3 &= z^2 z = zzz\end{aligned}$$

e as primeiras potências inteiras negativas são

$$z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z^{-2} = (z^{-1})^2 = \left(\frac{1}{z}\right)^2, \quad z^{-3} = \left(\frac{1}{z}\right)^3.$$

Podemos calcular as potências inteiras positivas de i .

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

como apresentamos com mais detalhe embaixo, sabendo de antemão que $i^0 = 1$ e $i^1 = i$.

- $i^2 = i \cdot i = -1$;
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$;
- $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = (-1)i \cdot i = (-1)(-1) = 1$;
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$;
- $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$;
- $i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$;
- $i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = 1$.

Observa-se através dos resultados, que há uma periodicidade nas potências de i , cujos valores são $1, i, -1, -i$. De quatro em quatro unidades, os valores das potências se repetem e podemos escrever para todo número inteiro k ,

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Para calcular uma potência inteira de i , pode-se dividir o expoente por quatro e tomar o resto positivo como expoente para calcular a potência desejada.

Exemplo 1.8. Dividindo-se 2341 por 4 obtemos quociente 585 e resto 1

$$2341 = 4 \times 585 + 1.$$

Deste modo,

$$i^{2341} = i^{4 \times 585 + 1} = i^1 = i.$$

Para calcular a potência i^{-2341} , precisamos do resto positivo da divisão de -2341 por 4 e podemos obter este resto positivo do seguinte modo. Tomando o quociente e o resto obtidos acima temos

$$-2341 = -4 \times 585 - 1.$$

Agora basta subtrair 4 unidades da primeira parcela do lado direito e adicionar 4 unidades à segunda parcela

$$-2341 = (-4 \times 585 - 4) + (4 - 1) = -4 \times 586 + 3.$$

Daí,

$$i^{-2341} = i^{-4 \times 586 + 3} = i^3 = -i.$$

1.3 REPRESENTAÇÃO NO PLANO CARTESIANO

Como um número complexo pode ser também representado por um par ordenado (a, b) de números reais, podemos representá-lo geometricamente usando o plano cartesiano, associando a este par ordenado o ponto P de coordenadas retangulares (a, b) . A abscissa de P corresponde à parte real e a ordenada de P a parte imaginária. Observe a Figura 1.

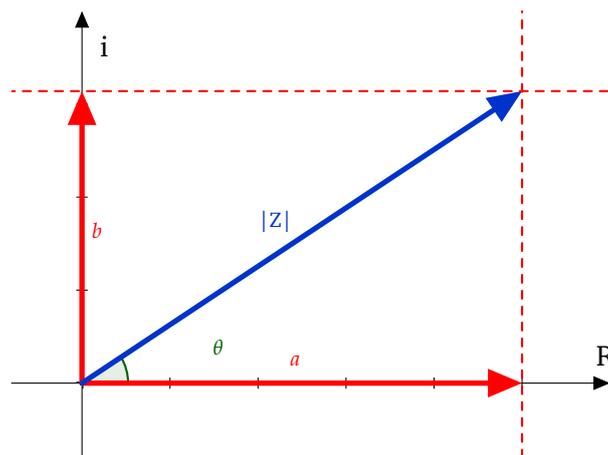


Figura 1: Plano Complexo

Usando como exemplo numérico o número complexo $z = 8 + 3i$, tem-se a Figura 2.

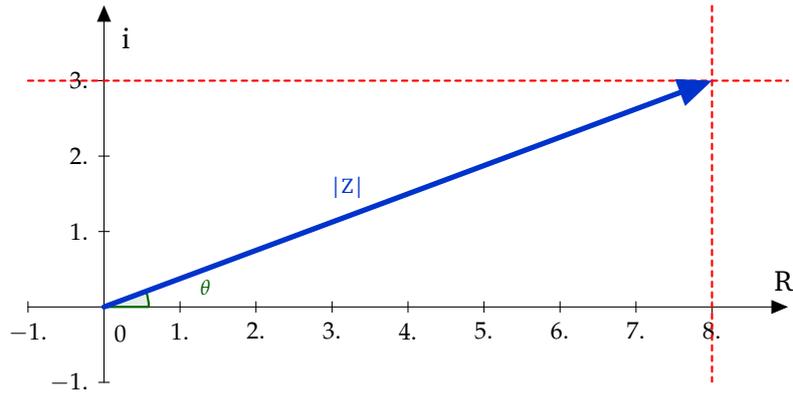


Figura 2: Exemplo Numérico Plano Complexo

Vamos definir o módulo de um número complexo como sendo a sua distância até a origem do sistema de coordenadas usado para representá-lo no plano geométrico.

Definição 1.9. O módulo do número complexo $z = a + bi$ é o número real denotado por $|z|$, definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.1)$$

Exemplo 1.9. O módulo do número complexo $z = 8 + 3i = (8, 3)$ é igual a

$$|z| = \sqrt{8^2 + 3^2} = 5\sqrt{3}.$$

1.4 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Observando a Figura 1, nota-se que o número complexo $z = (a, b) = a + bi$ é tal que

$$a = r \cos \theta$$

e

$$b = r \operatorname{sen} \theta,$$

onde r é o módulo de z

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Logo, podemos escrever

$$a + bi = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r \operatorname{cis} \theta. \quad (1.2)$$

Esta é a **forma trigonométrica** do número complexo.

Registre-se que $\text{cis } \theta$ é a abreviatura de cosseno de θ mais i seno de θ . Podemos também representar os números complexos na forma polar ou fasorial

$$z = |z| \angle \theta. \quad (1.3)$$

O ângulo θ é chamado de argumento do número complexo z , é o ângulo entre o $|z|$ e o eixo real do plano complexo e é dado por

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (1.4)$$

onde $a \neq 0$.

A forma trigonométrica de um número complexo é conveniente para calcular produtos e divisões de números complexos.

Exemplo 1.10. A forma trigonométrica de $z = 3 + 4i$ é

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) \approx 53,13^\circ$$

$$z \approx 5 \cos 53,13^\circ + i 5 \sin 53,13^\circ$$

$$z \approx 5 \text{ cis } 53,13^\circ$$

.

Dados dois números complexos $z = r \text{ cis } \alpha$ e $w = s \text{ cis } \beta$ o seu produto é dado por

$$z \cdot w = rs \text{ cis } (\alpha + \beta).$$

De fato,

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= rs((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) = rs \text{ cis } (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Exemplo 1.11. Dados dois números complexos $z = 10 \text{ cis } 30^\circ$ e $w = 4 \text{ cis } 45^\circ$ o seu produto é dado por

$$z \cdot w = 10 \times 4 \text{ cis } (30 + 45)$$

$$z \cdot w = 40 \text{ cis } 75^\circ$$

O inverso do número complexo $w = s \operatorname{cis} \beta$ é dado por

$$w^{-1} = \frac{1}{s^2} s(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta) = s^{-1}(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)$$

podemos dividir $z = r \operatorname{cis} \alpha$ por $w = s \operatorname{cis} \beta$ para obter

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= z \cdot w^{-1} = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot s^{-1}(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta) \\ &= rs^{-1}((\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)) \\ &= rs^{-1}(\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

e obtemos

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \operatorname{cis}(\alpha - \beta).$$

Exemplo 1.12. Dados dois números complexos $z = 30 \operatorname{cis} 60^\circ$ e $w = 10 \operatorname{cis} 45^\circ$ a razão $\frac{z}{w}$ é dada por

$$\frac{z}{w} = \frac{30}{10} \operatorname{cis}(60 - 45) = 3 \operatorname{cis} 15^\circ.$$

Conclusão: Para multiplicar dois números na forma trigonométrica, multiplique seus módulos e adicione seus argumentos. Para dividir dois números complexos na forma trigonométrica, divida seus módulos e subtraia seus argumentos.

Escrevendo na forma fasorial,

$$\begin{aligned} zw &= rs \angle(\alpha + \beta), \\ z/w &= (r/s) \angle(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

A forma trigonométrica também é conveniente para calcular uma potência inteira de um número complexo. Dado o número complexo $z = r \operatorname{cis} \alpha$, sendo n um número inteiro positivo, vamos mostrar que

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\alpha).$$

De fato, sabemos que $z^1 = r \operatorname{cis} \alpha$ e $z^2 = z \cdot z = r^2 \operatorname{cis}(2\alpha)$. Vamos supor, como hipótese de indução, que

$$z^{n-1} = r^{n-1} \operatorname{cis}((n-1)\alpha).$$

Então

$$\begin{aligned} z^n &= z^{n-1}z = r^{n-1} \operatorname{cis}((n-1)\alpha) \cdot r \operatorname{cis} \alpha \\ &= r^n \operatorname{cis}((n-1)\alpha + \alpha) = r^n \operatorname{cis}(n\alpha), \end{aligned}$$

e fica provada a fórmula usada para o cálculo das potências inteiras de um número complexo z . Escrevendo esta potência na forma fasorial, temos

$$z^n = r^n \angle(n\alpha).$$

Exemplo 1.13. Dado o números complexos $z = 5 \text{ cis } 30^\circ$, z^4 é

$$z^4 = 5^4 \text{ cis}(4 \times 30)$$

$$z^4 = 625 \text{ cis } 120^\circ$$

Observação 1.4.1. A apresentação da adição e da subtração de números complexos na forma polar não é usual.

Observação 1.4.2. A forma polar da unidade imaginária i é $i = \text{cis}(\pi/2)$.

Observe agora um exemplo onde a unidade do ângulo é radiano.

Exemplo 1.14. O produto dos números complexos $z = 2 \text{ cis}(\pi/3)$ e $w = 3 \text{ cis}(\pi/6)$ é

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2 \cdot 3 \text{ cis}(\pi/3 + \pi/6) = 6 \text{ cis}(\pi/2) \\ &= 6(\cos(\pi/2) + i \text{ sen}(\pi/2)) = 6i. \end{aligned}$$

A divisão de z por w resulta no quociente

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2}{3} \text{ cis}(\pi/3 - \pi/6) = \frac{2}{3} \text{ cis}(\pi/6) \\ &= \frac{2}{3} (\cos(\pi/6) + i \text{ sen}(\pi/6)) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{3} (\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

ELETRICIDADE

A eletricidade está presente em diversos lugares como, por exemplo, em lâmpadas, rádios, motores, etc. Há cerca de 2500 anos, o filósofo grego Tales observou que ao atritar um pedaço ou uma haste de âmbar ele era capaz de atrair objetos leves. Em seguida foram feitos diversos estudos sobre o comportamento dos objetos através da eletrostática. Descobriram que existem maneiras diferentes de carregar eletricamente um corpo, que podem ser por contato e por indução. Coulomb, ao estudar a Força Elétrica obteve uma relação entre ela e as cargas envolvidas. O resultado que ele obteve ficou registrado na história da ciência como Lei de Coulomb: “A força elétrica que existe entre dois corpos carregados eletricamente depende inversamente do quadrado da distância que separa esses dois objetos”:

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (2.1)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade, que depende do meio, seja ele água, vácuo, etc. No vácuo, por exemplo, seu valor seria de: $k = 9 \times 10^9 \text{ (Nm}^2\text{/C)}$. A unidade no SI para a carga q é Coulomb (C) e a massa m é em quilogramas (kg).

Ela é bastante semelhante com a Lei da Gravitação Universal de Newton:

$$F_g = G \frac{Mm}{d^2} \quad (2.2)$$

onde G é a constante de gravitação cuja unidade é $(\text{N}^2\text{m}^2/\text{kg}^2)$, F_g é a força de atração gravitacional em Newton (N), M e m são as massas dos corpos em quilogramas (kg) e d é a distância entre eles em metros (m).

Uma carga elétrica Q é capaz de gerar um Campo Elétrico, cuja unidade de medida é Newton por Coulomb (N/C), depende do valor da carga Q (em Coulomb) e da distância da carga ao ponto considerado. A carga pode repelir ou atrair uma carga de prova (convencionalmente positiva). Este campo elétrico se manifesta na forma da

força F que ele exerce sobre outra carga q colocada a uma distância d da carga Q que origina o campo

$$E = \frac{F}{q} = \frac{kQ}{d^2}. \quad (2.3)$$

Pode-se representar o campo elétrico utilizando linhas de força como mostra a Figura 3. As linhas de força ou linhas de campo podem ser gerados por corpos carregados eletricamente.

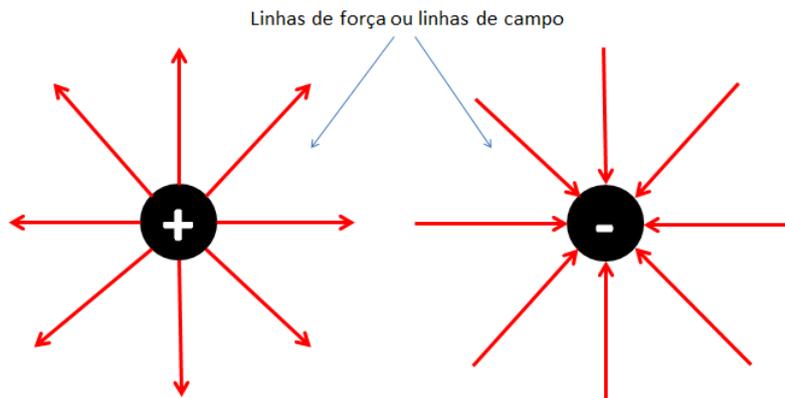


Figura 3: Linhas de Força

Neste trabalho precisamos conhecer alguns dos principais componentes que são estudados no Ensino Médio em circuitos elétricos que veremos a seguir.

2.1 CONDUTOR

Podemos chamar de condutor materiais nos quais as cargas elétricas se deslocam de maneira relativamente livre. Nos circuitos são utilizados em sua maioria cobre e alumínio.

Na condição de equilíbrio eletrostático num condutor, o campo elétrico no seu interior é nulo. Caso exista um campo elétrico externo agindo sobre o condutor, as cargas irão se deslocar produzindo um campo elétrico de sentido oposto a fim de anular o efeito da presença deste campo, observe a Figura 4.

Se o condutor for colocado numa região onde existe campo elétrico, os elétrons se deslocam em sentido oposto às linhas de campo, acumulam-se num extremo, ficando

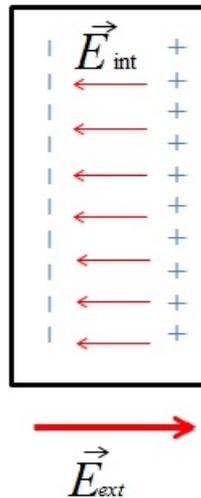


Figura 4: Campo Elétrico

com excesso de carga negativa, e no extremo oposto aparece uma carga do mesmo valor mas com sinal positivo (falta de elétrons).

Essa acumulação de cargas no condutor cria um campo elétrico interno oposto ao campo externo e quando as cargas acumuladas nos extremos sejam suficientemente elevadas, os dois campos se anulam e movimento dos elétrons é interrompido.

2.2 DIFERENÇA DE POTENCIAL

Um Campo Elétrico E ao transportar uma carga q , por uma distância Δd em metros, através de um condutor realiza um trabalho τ em Joule (J) que pode ser calculado pela expressão:

$$\tau = Eq\Delta d. \quad (2.4)$$

Uma carga elétrica se movimentada de um ponto para o outro no espaço se houver um Campo Elétrico, ou se nesta região existir uma Diferença de Potencial (ΔV) entre dois pontos que pode ser calculada com a equação:

$$\Delta V = E\Delta d \quad (2.5)$$

onde E é o campo elétrico e Δd a distância entre os pontos considerados. A unidade de medida da diferença de potencial no SI é o Joule por Coulomb (J/C) ou em Volt (V) em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta (1785-1827). Em resumo, para

transportar uma carga de um ponto ao outro dentro de um campo elétrico, é preciso existir uma Diferença de Potencial (ΔV) entre esses pontos. O trabalho realizado pelo campo elétrico para deslocar uma carga q de um ponto ao outro é:

$$\tau = q\Delta V. \quad (2.6)$$

Exemplo: se houver uma diferença de potencial de 20 V entre dois pontos de 20 V, o campo elétrico realiza um trabalho de 20 Joules para cada 1 Coulomb de carga transportada de um ponto ao outro.

2.3 GERADOR ELÉTRICO

É qualquer dispositivo que transforma outras formas de energia em energia elétrica, gerando uma diferença de potencial nos seus terminais. Uma pilha, por exemplo, é um gerador elétrico.

Existem dois tipos de geradores elétricos que são muito utilizados em circuitos elétricos: Gerador de Tensão Contínua, que mantém uma diferença de potencial constante entre seus terminais e Gerador de Tensão Alternada, onde a diferença de potencial varia periodicamente.

Temos o símbolo do Gerador de Tensão Contínua representado na Figura 5.



Figura 5: Gerador de Tensão Contínua

Temos o símbolo do Gerador de Tensão Alternada Senoidal representado na Figura 6.

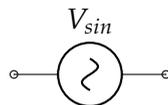


Figura 6: Gerador de Tensão Alternada Senoidal

Um circuito elétrico é formado por um gerador (gera o sinal de entrada), condutor em circuito fechado e um ou mais elementos elétricos, que utiliza a energia do gerador para manter uma corrente elétrica que pode sofrer alterações de acordo com os tipos de elementos de que o circuito é formado. Tal circuito pode conter entradas e saídas que se alimentam ou vão alimentar outros circuitos.

Considere:

- um sinal de entrada com tensão alternada $\Delta V_E = A \text{sen}(\omega)$ em V;
- período $T = t_2 - t_1$ em segundos, $\omega t_2 - \omega t_1 = 2\pi$ em radiano (*rad*), desta forma:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega};$$

- frequência f em ciclos por segundo ou Hertz (*Hz*):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

logo:

$$\omega = 2\pi f$$

onde a unidade de medida é radiano por segundo (*rad/s*).

Observação 2.3.1. Lembrando que:

$$\text{sen}(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos(\omega t) = \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

quando necessário, podemos usar a conversão:

$$f(t) = A_m \text{sen}(\omega t) = A_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta conversão será utilizada quando necessária nos cálculos com fasores nos exercícios de aplicações do Capítulo 4.

2.4 CORRENTE ELÉTRICA

O movimento de cargas através de um condutor é chamado de corrente elétrica. Suponha que uma certa quantidade de carga Δq atravesse uma seção transversal de um condutor num intervalo de tempo Δt . Define-se a corrente elétrica de símbolo I que percorre esse condutor pela expressão

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

A unidade de corrente elétrica no sistema MKS é o Ampere, cujo símbolo é A . Um ampere corresponde a uma corrente elétrica de um Coulomb por segundo passando pela seção transversal do condutor, ou seja, $1 [A] = \frac{1 [C]}{1 [s]}$. Observe a Figura 7.

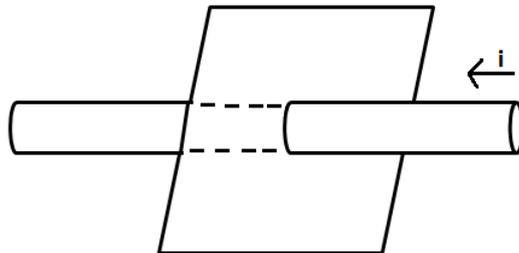


Figura 7: Condutor Elétrico

2.5 RESISTÊNCIA ELÉTRICA

É um componente do circuito que cria oposição à passagem de corrente elétrica e esta oposição dissipa energia em forma de calor (Efeito Joule). Ohm definiu a resistência elétrica como a razão entre a diferença de potencial nas extremidades do resistor e a corrente elétrica:

$$R = \frac{V}{I}. \quad (2.8)$$

A unidade de medida da resistência é o Ohm (Ω).

Num fio condutor a resistência depende de três fatores: comprimento do resistor, área da seção transversal e de uma constante que depende do material do qual ele é formado.

Observe alguns modelos de resistores na Figura 8. O símbolo elétrico do resistor é dado na Figura 9.

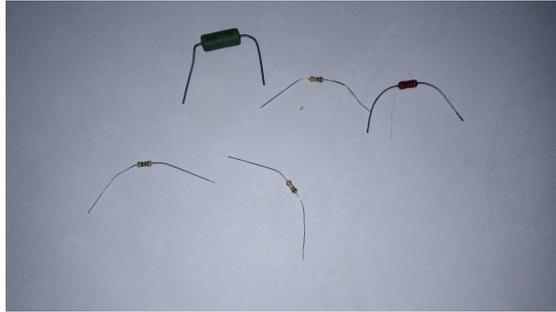


Figura 8: Resistores



Figura 9: Símbolo do Resistor

2.5.1 Resistência Equivalente

Quando temos mais de um resistor, podemos obter uma resistência equivalente que significa o valor correspondente a toda associação, é como se todos os resistores se transformassem em apenas um. Existem dois tipos de associação de resistores:

- 1) série: todos os resistores são percorridos pela mesma corrente elétrica. Seu valor é a soma dos resistores:

$$R_{equivalente} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n. \quad (2.9)$$

Observe a Figura 10.

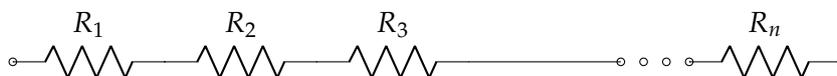


Figura 10: Resistores em Série

Exemplo 2.1. Para três resistores em série $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 15 \text{ k}\Omega$ a resistência equivalente é a soma dos resistores:

$$R_{equivalente} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_{equivalente} = 10 + 5 + 15 = 30 \text{ k}\Omega$$

- 2) paralelo: todos os resistores são submetidos à mesma tensão elétrica. Seu valor pode ser determinado pela expressão

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (2.10)$$

Observe a Figura 11.

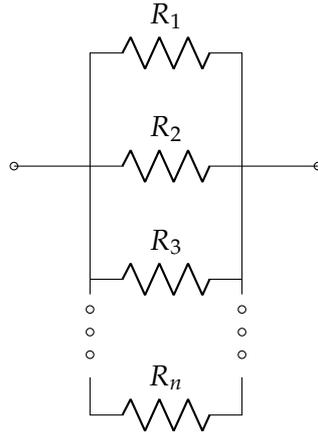


Figura 11: Resistores em Paralelo

Temos o Resistor equivalente representado na Figura 12.



Figura 12: Resistor Equivalente

Exemplo 2.2. Três resistores em paralelo $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ a resistência equivalente:

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{2+4+1}{20}$$

$$R_{equivalente} \approx 2,86 \text{ k}\Omega$$

2.6 INDUTOR

Os indutores geralmente são construídos como uma bobina ou espiras de um material condutor, como, por exemplo, cobre. Ele contém um núcleo que pode ser feito com diversos materiais como ferro, ar, laminado, ferrite, bobinas toroidais, etc.

Um indutor se opõe a variações de corrente elétrica, ou seja, sempre que houver uma variação de corrente no indutor aparece uma diferença de potencial em suas extremidades que é proporcional à variação. A constante de proporcionalidade é chamada de indutância, cujo a unidade de medida é Henry (H) e depende do material do núcleo.

Existem diversos tipos de indutores como apresentados na Figura 13 e o símbolo elétrico do indutor é dado na Figura 14.



Figura 13: Indutores

Disponível em: <<https://www.mundodaeletrica.com.br/o-que-e-um-indutor>>. Acesso em: 15 jun. 2017.



Figura 14: Símbolo do Indutor

2.6.1 Indutor Equivalente

Quando temos mais de um indutor, é possível calcular o indutor equivalente como feito anteriormente com o resistor:

- 1) série: todos os indutores são percorridos pela mesma corrente elétrica. Seu valor é a soma das indutâncias:

$$L_{equivalente} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n. \quad (2.11)$$

Observe a Figura 15 dos Indutores em Série.

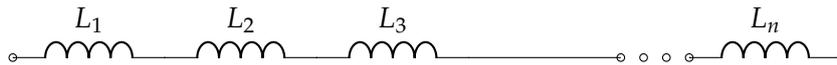


Figura 15: Indutores em Série

Exemplo 2.3. Três indutores em série $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 5 \text{ mH}$, $L_3 = 20 \text{ mH}$ o indutor equivalente é a soma dos indutores:

$$L_{equivalente} = L_1 + L_2 + L_3$$

$$L_{equivalente} = 10 + 5 + 20 = 35 \text{ mH}$$

- 2) paralelo: todos os indutores são submetidos à mesma tensão elétrica. Seu valor pode ser determinado pela expressão:

$$\frac{1}{L_{equivalente}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (2.12)$$

observe a Figura 16.

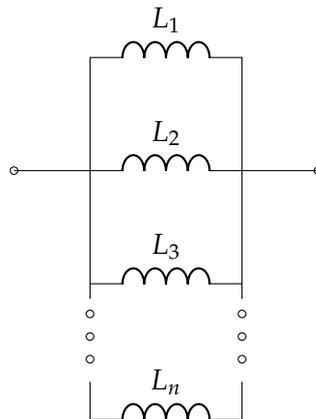


Figura 16: Indutores em Paralelo

Temos o Indutor equivalente representado na Figura 17.



Figura 17: Indutor Equivalente

Exemplo 2.4. Para dois indutores em paralelo $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 10 \text{ mH}$ a indutância equivalente é:

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente}}} = \frac{2}{10}$$

$$L_{\text{equivalente}} = 5 \text{ mH}$$

Observação 2.6.1. Para indutores paralelos com valores iguais, pode-se encontrar a indutância da associação apenas dividindo pela quantidade de indutores. Por exemplo, se tiver 4 indutores iguais a 10 mH o valor desta associação será:

$$L_{\text{equivalente}} = 10 : 4 = 2,5 \text{ mH}.$$

2.7 CAPACITOR

É um componente elétrico formado por duas placas paralelas de material condutor, isoladas eletricamente. Quando se estabelece uma diferença de potencial entre as placas, elas vão se carregando com cargas de sentido contrário, o que cria um campo que se opõe ao aumento desta carga. Quando se mede a diferença de potencial entre as placas, nota-se que ela é proporcional à carga acumulada nas placas e a constante de proporcionalidade se chama capacitância. Ao fechar o circuito entre as placas usando um condutor, a descarga é rápida.

A unidade de medida de um capacitor é dada em Farad (F).

Observe alguns modelos de capacitores na Figura 18.

O símbolo elétrico do capacitor é dado na Figura 19.

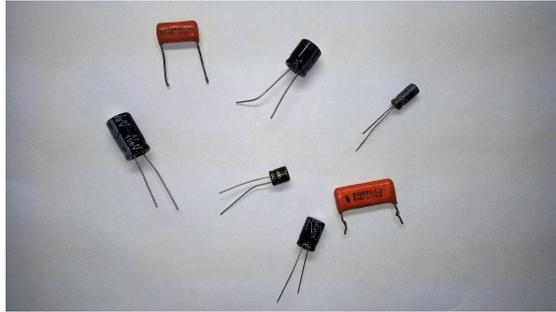


Figura 18: Capacitores

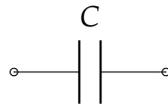


Figura 19: Símbolo do Capacitor

2.7.1 Capacitor Equivalente

Quando temos mais de um capacitor, é possível calcular o capacitor equivalente:

- 1) série: todos os capacitores são percorridos pela mesma corrente elétrica. O inverso da capacitância equivalente é a soma dos inversos das capacitâncias de cada capacitor.

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (2.13)$$

A Figura 20 apresenta uma associação de capacitores em série.

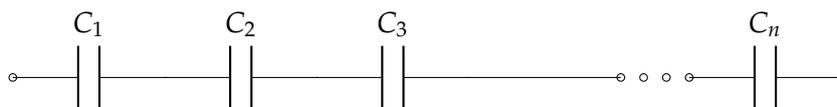


Figura 20: Capacitores em Série

Exemplo 2.5. Se dois capacitores com capacitâncias $C_1 = 10 \text{ mF}$, $C_2 = 2 \text{ mF}$ estiverem associados em série, a capacitância equivalente é

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1+5}{10}$$

$$C_{equivalente} \approx 1,67 \text{ mF}$$

2) paralelo: todos os capacitores são submetidos à mesma tensão elétrica. O valor da capacitância equivalente pode ser determinado pela expressão:

$$C_{equivalente} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n. \quad (2.14)$$

A Figura 21 apresenta uma associação de capacitores em paralelo e a Figura 22 apresenta o capacitor equivalente.

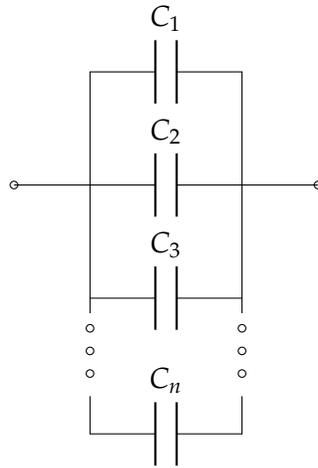


Figura 21: Capacitores em Paralelo

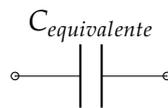


Figura 22: Capacitor Equivalente

Exemplo 2.6. Três capacitores em paralelo, com capacitâncias $C_1 = 10 \text{ mF}$, $C_2 = 5 \text{ mF}$, $C_3 = 20 \text{ mF}$, resulta num capacitor equivalente, cuja capacitância é

$$C_{equivalente} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_{equivalente} = 10 + 5 + 20 = 35 \text{ mF}$$

2.8 REATÂNCIA INDUTIVA, REATÂNCIA CAPACITIVA E IMPEDÂNCIA

Os circuitos que iremos analisar possuem um gerador elétrico, resistores, indutores e capacitores. Estes elementos oferecem resistência à passagem da corrente elétrica I produzida pela diferença de potencial V fornecida pelo gerador elétrico. A relação entre V e I é dada por

$$V = ZI \quad (2.15)$$

onde Z é impedância do circuito.

Vamos mostrar como se calcula Z e como se interpreta a relação $V = ZI$.

Quando

$$V = V_m \cos(\omega t),$$

esta diferença de potencial é a parte real do número complexo

$$V_m (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)).$$

Na expressão $V = ZI$, vamos considerar que

$$\begin{aligned} V &= V_m (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) \\ &= V_m \operatorname{cis}(\omega t) = V_m \angle \omega t \end{aligned}$$

sem nos esquecer que a grandeza física que interessa é a parte real deste número complexo. A impedância Z , que veremos como se calcula, é um número complexo.

A relação

$$I = \frac{V}{Z}$$

nos fornecerá uma corrente complexa.

A corrente física, que é o que nos interessa, é a parte real de I .

A frequência da fonte que fornece a diferença de potencial

$$V = V_m \operatorname{cis}(\omega t)$$

é

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.16)$$

A corrente no circuito terá esta mesma frequência f .

Se um capacitor estiver numa linha percorrida por uma corrente I de frequência f , ele irá oferecer uma resistência

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (2.17)$$

chamada de **reatância capacitiva**.

Observe que X_C depende da frequência da fonte e da capacitância do capacitor.

O indutor também oferece uma resistência a passagem da corrente alternada. Esta resistência é dada por

$$X_L = \omega L \quad (2.18)$$

chamada de **reatância indutiva**.

Ela depende da frequência da fonte e da indutância do indutor.

A resistência também se opõe à passagem da corrente alternada. A resistência oferecida é a própria resistência do R , que não depende da frequência da fonte.

Em resumo, temos três elementos se opondo à passagem da corrente elétrica: a resistência R , a reatância capacitiva X_C a reatância indutiva X_L .

Na expressão conhecida como a Lei de Ohm

$$V = ZI$$

a impedância Z do circuito é o número complexo

$$Z = R + Xi \quad (2.19)$$

onde

$$X = X_L + X_C \quad (2.20)$$

é a reatância do circuito.

Este é o ponto onde os números complexos entram no estudo dos circuitos elétricos.

Agora passaremos a estudar como se obtém Z nos diversos circuitos.

A Figura 23 apresenta R , X_C e X_L no plano complexo.

Exemplo 2.7. Se um circuito com capacitor de $C = 5 \text{ mF}$ receber um sinal alternado de frequência $f = 100 \text{ Hz}$, sua reatância capacitiva será igual a

$$X_C = -\frac{1}{2\pi f C} = -\frac{1}{2 \times 3,14 \times 100 \times 0,005}$$

$$X_C \approx -0,32 \Omega.$$

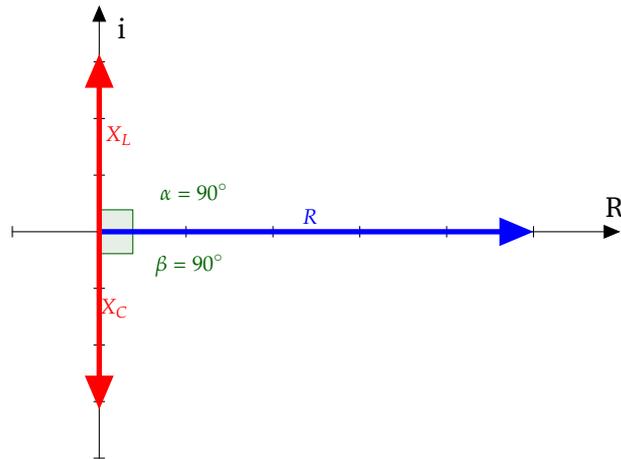


Figura 23: Plano Fasorial

Exemplo 2.8. Se um circuito com indutor $L = 5 \text{ mH}$ receber um sinal alternado de frequência $f = 1 \text{ kHz}$, sua reatância indutiva será igual a

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3,14 \times 100 \times 0,005$$

$$X_L \approx 31,4 \Omega.$$

Exemplo 2.9. Para uma reatância capacitiva de $X_C = -100 \Omega$ e reatância indutiva de $X_L = 200 \Omega$ a reatância é:

$$X = X_L + X_C$$

$$X = 200 + (-100)$$

$$X = 100 \Omega.$$

Exemplo 2.10. Quando $R = 100 \Omega$, $X_L = 150 \Omega$ e $X_C = -200 \Omega$ a impedância é:

$$Z = R + Xi$$

$$Z = 100 + (150 + (-200))i$$

$$Z = 100 - 50i \Omega.$$

Como a impedância é um número complexo, se θ for o argumento de Z , podemos escrevê-la na forma polar:

$$Z = |Z| \angle \theta \quad (2.21)$$

onde o módulo de Z é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (2.22)$$

e o ângulo θ é

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) \quad (2.23)$$

pois $R \neq 0$. Observe a Figura 24 que representa a impedância no plano.

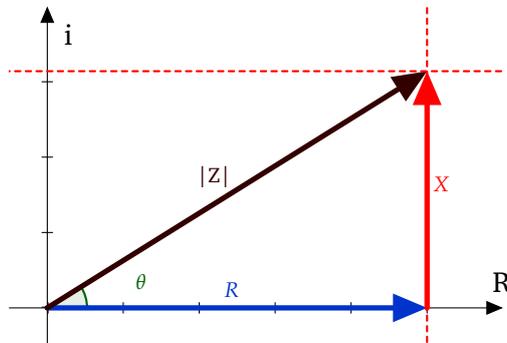


Figura 24: Plano Fasorial da Impedância

O indutor oferece maior resistência para frequências mais altas e o capacitor para frequências mais baixas. Quando $|X_C| > |X_L|$, a reatância será negativa.

Exemplo 2.11. A forma polar de uma impedância $Z = 100 - 50i \Omega$. O módulo da impedância é:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$|Z| = \sqrt{100^2 + (-50)^2}$$

$$|Z| \approx 111,80 \Omega$$

o ângulo θ é:

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-50}{100}\right)$$

$$\theta \approx -26,57^\circ$$

a forma polar de Z é

$$Z = 111,80 \angle -26,57^\circ \Omega$$

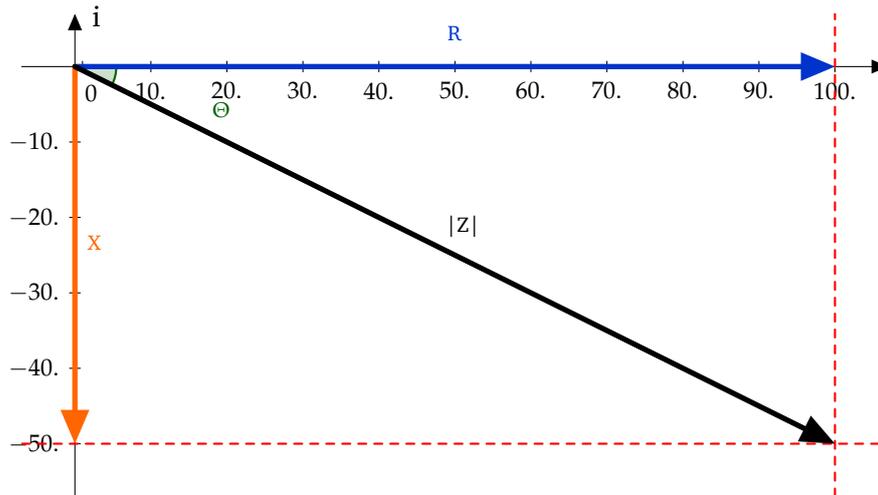


Figura 25: Exemplo 2.11 Impedância Forma Polar

2.9 DEFASAGEM

É a “distância angular” entre dois sinais. É importante entender o significado, por exemplo na Figura 26, o ângulo θ indica a defasagem entre o sinal de entrada e sinal de saída. Dizemos que as duas ondas estão defasadas ou possuem uma diferença de fase.

Pela Lei de Ohm,

$$V = ZI$$

se

$$V = V_m \text{cis}(\omega t) \quad e \quad Z = |Z| \text{cis} \theta$$

então

$$I = (V_m/|Z|) \text{cis}(\omega t - \theta).$$

O θ é o argumento principal de Z . Quando θ for positivo, se diz que a corrente está atrasada em relação à tensão. Quando θ for negativo, se diz que a corrente está adiantada em relação à tensão.

Uma situação de defasagem é observada na Figura 26. A onda de sinal de saída está defasada de θ e se encontra “atrasada” em relação ao sinal de entrada. Pode-

Elemento	Unidade de Medida	Símbolo
Resistência Elétrica (R)	Ohm	Ω
Corrente Elétrica (I)	Ampere	A
Tensão Elétrica (V)	Volt	V
Capacitância (C)	Farad	F
Indutância (L)	Henry	H
Reatância (X)	Ohm	Ω
Reatância Capacitiva (X_C)	Ohm	Ω
Reatância Indutiva (X_L)	Ohm	Ω
Impedância (Z)	Ohm	Ω
Frequência (f)	Hertz	Hz
Velocidade Ângular (ω)	Radiano por segundo	rad/s

Tabela 1: Tabela Básica de Unidades de Medidas.

se encontrar o ângulo de defasagem conhecendo os ângulos de cada sinal e usar a equação a seguir para calcular a defasagem:

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.24)$$

onde os ângulos θ_1 e θ_2 são os ângulos de fase das duas ondas senoidais quaisquer para as quais queremos encontrar a defasagem. As ondas podem ser de corrente elétrica ou de diferença de potencial. Quando $\theta > 0$, a segunda onda está à frente da primeira.

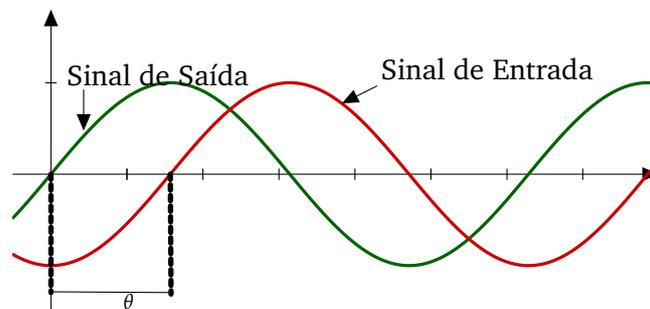


Figura 26: Defasagem

Observação 2.9.1. Caso não exista a defasagem, ou seja, defasagem igual a zero, dizemos que as ondas estão “em fase”.

Observação 2.9.2. Podemos observar as unidades de medidas na Tabela 1.

2.10 RELAÇÃO TENSÃO E CORRENTE

Pode-se analisar o que acontece com as ondas em relação a corrente e tensão nos componentes: resistor, capacitor e indutor. Faremos a análise de forma geral para uma tensão de entrada:

$$V_m \cos(\omega t)$$

que é a parte real do potencial complexo

$$V = V_m \operatorname{cis}(\omega t).$$

Vamos trabalhar com o potencial complexo sem nos esquecer que a grandeza física de interesse é sua parte real.

A relação entre o potencial complexo V e a corrente complexa I , no regime permanente é

$$V = ZI \quad (2.25)$$

conhecida como Lei de Ohm. A corrente física é a parte real de I .

2.10.1 Tensão x Corrente no Resistor

Observe a Figura 27. Como $V = ZI$, neste caso a impedância é composta somente

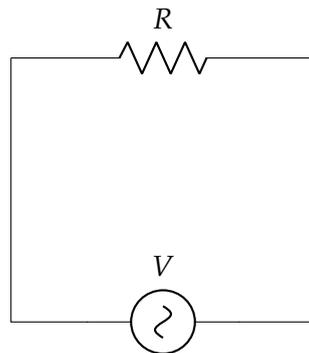


Figura 27: Circuito Tensão e Corrente no Resistor

pelo resistor $Z = R$, logo $I = \frac{V}{R}$ e podemos escrever:

$$I = \frac{V_m \operatorname{cis}(\omega t)}{R} \quad (2.26)$$

Na forma fasorial:

$$I = \frac{V_m}{R} \angle \omega t \quad (2.27)$$

Isto significa que a diferença de potencial nas extremidades do resistor e a corrente que passa por ele estão em fase. A defasagem entre eles é zero.

Observação 2.10.1. Eventualmente utilizaremos α como um fator de conversão radiano para grau, onde $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}$.

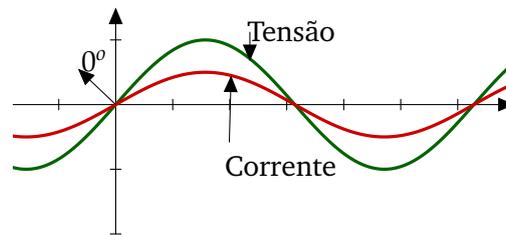


Figura 28: Defasagem Corrente e Tensão no Resistor

Exemplo 2.12. Para uma tensão $V = 20 \cos(10t)$ V sobre um resistor de $R = 500 \Omega$ a corrente é:

$$I = \frac{V_m \text{ cis}(\omega t)}{R}$$

$$I = \frac{20 \text{ cis}(10t)}{500}$$

$$I = 0,04 \text{ cis}(10t)$$

ou

$$I = 40 \text{ cis}(10t) \text{ mA.}$$

Na forma fasorial:

$$I = 40 \angle 10t \text{ mA.}$$

Observamos que o ângulo da corrente e tensão são iguais, ou seja, a defasagem é nula.

2.10.2 Tensão x Corrente no Indutor

Observe a Figura 29, que apresenta uma fonte e um indutor. Neste caso a impedância é a reatância indutiva $Z = X_L j$, logo:

$$V = ZI$$

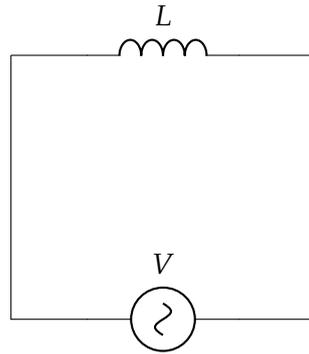


Figura 29: Circuito Tensão e Corrente no Indutor

$$V_m \operatorname{cis}(\omega t) = X_L i$$

$$V_m \operatorname{cis}(\omega t) = \omega L i$$

multiplicando por $-i$ nos dois lados da equação:

$$V_m \operatorname{cis}(\omega t) \cdot (-i) = \omega L i \cdot (-i)$$

como $-i = 1 \angle -90^\circ$

$$V_m \operatorname{cis}(\omega t - 90^\circ) = \omega L I$$

$$I = \frac{V_m \operatorname{cis}(\omega t - 90^\circ)}{\omega L} \quad (2.28)$$

na forma fasorial:

$$I = \frac{V_m}{\omega L} \angle -90^\circ \quad (2.29)$$

isto significa que a tensão e a corrente estão defasadas de 90° , ou seja, a corrente está 90° atrasada em relação a tensão.

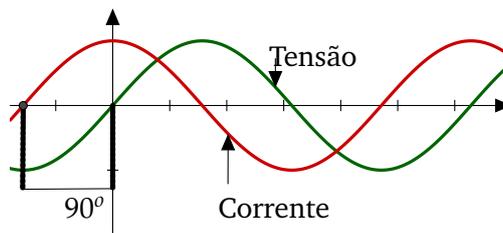


Figura 30: Defasagem Corrente e Tensão no Indutor

Exemplo 2.13. Vamos calcular a corrente elétrica para uma tensão $V = 10 \cos(2000t)$ V sobre um indutor de $L = 10$ mH. Como $\omega = 2000$ [rad/s],

$$I = \frac{V_m \operatorname{cis}(\omega t)}{\omega L i}$$

$$I = \frac{10 \operatorname{cis}(2000\alpha t - 90^\circ)}{2000 \times 0,01}$$

$$I = 0,5 \operatorname{cis}(2000\alpha t - 90^\circ) \text{ A}$$

ou seja:

$$I = 500 \operatorname{cis}(2000\alpha t - 90^\circ) \text{ mA}$$

na forma fasorial:

$$I = 500 \angle 2000\alpha t - 90^\circ \text{ mA}$$

observamos que o ângulo da corrente está 90° atrasado em relação a tensão.

2.10.3 Tensão x Corrente no Capacitor

Observe a Figura 31.

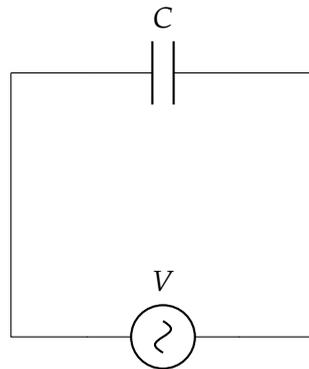


Figura 31: Circuito Tensão e Corrente no Indutor

Neste caso a impedância é composta somente pelo capacitor e ela é a reatância indutiva $Z = X_C i$, logo:

$$V = ZI \text{ ou } V = X_C I = -\frac{1}{\omega C} i I$$

isto implica em

$$I = -\frac{\omega C}{i} V = \omega C i V$$

Se o gerador fornecer uma diferença de potencial

$$V_m \cos(\omega t)$$

o potencial complexo V é $V = V_m \operatorname{cis}(\omega t)$ e a corrente complexa será $I = \frac{V}{X_C}$ ou, $I = \omega C i V = V_m \omega C \operatorname{cis}(\omega t + 90^\circ)$.

Na forma fasorial,

$$I = V_m \omega C \angle \omega \alpha t + 90^\circ.$$

Isto significa que a tensão e a corrente estão defasadas de 90° , estando a corrente 90° adiantada em relação a tensão como é mostrado na Figura 32.

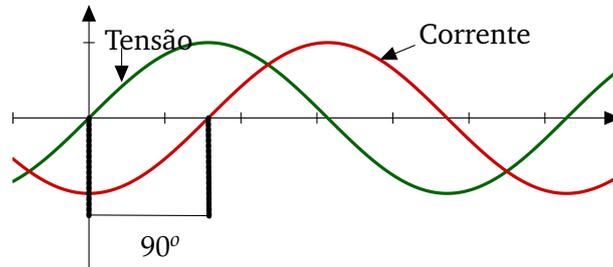


Figura 32: Defasagem Corrente e Tensão no Capacitor

Exemplo 2.14. Vamos calcular a corrente elétrica para uma tensão $V = 10 \cos(1000t) V$ sobre um capacitor de $C = 1 \mu F$. Como $\omega = 1000 \text{ rad/s}$,

$$I = V_m \omega C \cos(\omega \alpha t + 90^\circ)$$

$$I = 10 \times 1000 \times 10^{-6} \times \cos(1000\alpha t + 90^\circ)$$

$$I = 0,01 \cos(1000\alpha t + 90^\circ) A$$

ou seja,

$$I = 10 \angle 1000\alpha t + 90^\circ \text{ mA}.$$

Na forma fasorial:

$$I = 10 \angle 1000\alpha t + 90^\circ \text{ mA}$$

observamos que a fase da corrente está 90° adiantada em relação a tensão.

APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS

3.1 INTRODUÇÃO

Um circuito elétrico é uma linha fechada de condutores que contorna ou circula uma região passando pelos componentes elétricos. Em outras palavras, temos um gerador que oferece uma diferença de potencial que faz com que os elétrons se movimentem, gerando uma corrente elétrica positiva no sentido de um ponto com maior potencial para o de menor potencial. Esta corrente atravessa os resistores, capacitores e indutores do circuito. Seria como se o elétron saísse do polo negativo do gerador e chegasse até o polo positivo do mesmo.

Neste capítulo veremos algumas aplicações dos dispositivos estudados no capítulo anterior.

Observação 3.1.1. *Uma corrente positiva num sentido corresponde a elétrons percorrendo o circuito em sentido contrário.*

3.2 MEDIDORES ELÉTRICOS

Apesar de podermos calcular corrente e voltagem com a Lei de Ohm, podemos também medir estes valores com aparelhos chamados de medidores elétricos.

3.2.1 Amperímetro

É um medidor de corrente elétrica. Ele deve ser colocado em série no trecho do circuito em que se quer medir a corrente elétrica e mede quantos amperes de corrente passa por aquele ponto do circuito.

Temos o símbolo do amperímetro representado na Figura 33.

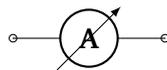


Figura 33: Amperímetro

3.2.2 Voltímetro

É um medidor de volts, ou seja, mede a Diferença de Potencial entre dois pontos do circuito. Ele deve ser colocado em paralelo no trecho do circuito em que se quer medir a Diferença de Potencial, que também pode ser chamada de Tensão Elétrica.

Temos o símbolo do voltímetro representado na Figura 34.

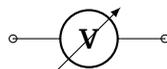


Figura 34: Voltímetro

3.2.3 Ohmímetro

É um medidor de resistência elétrica, ou seja, mede a Resistência. Ele deve ser colocado em paralelo com o componente cuja resistência se pretende medir, mas com o circuito desligado e com uma das extremidades “aberta”. Quando possível se deve retirar o componente para medir sua resistência a fim de outros componentes não influenciarem no seu valor.

Temos o símbolo do Ohmímetro representado na Figura 35.



Figura 35: Ohmímetro

3.3 CIRCUITOS COM TENSÃO CONTÍNUA

É um circuito, cuja corrente elétrica é obtida pela ação de geradores de tensão contínua, ou seja, tensão constante. Para estudos de suas propriedades, aplica-se a Lei de Ohm. Normalmente no Ensino Médio, neste tipo de circuitos, são utilizados apenas resistores que podem estar associados em série ou em paralelo como visto no capítulo 2 como ilustrado na Figura 36.

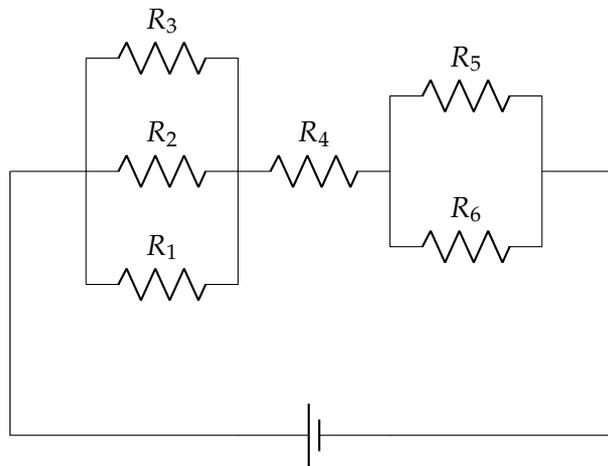


Figura 36: Circuito DC

3.4 CIRCUITOS COM TENSÃO ALTERNADA

É um circuito, cuja corrente elétrica é obtida pela ação de geradores de tensão alternada, ou seja, tensão variável periodicamente, como, por exemplo, uma função senoidal. Para estudos de suas propriedades, aplica-se a Lei de Ohm relacionada com números complexos. Normalmente no Ensino Médio são estudados números complexos, mas sua possível aplicação a circuitos elétricos no Ensino Médio é o objetivo deste trabalho. A Figura 37 apresenta um circuito possível.

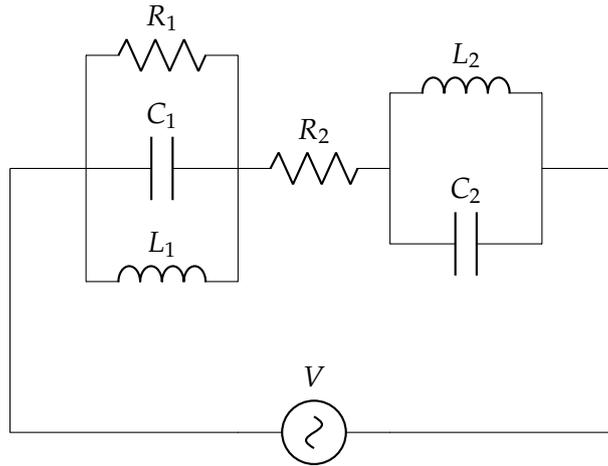


Figura 37: Circuito AC

Agora que já estudamos os principais elementos de um circuito elétrico, podemos aplicar os números complexos para determinar sua impedância, devido aos resistores, capacitores e indutores. Assim, podemos apresentar aos alunos do Ensino Médio uma aplicação de Números Complexos à Física. Analisaremos circuitos simples como RL, RC e RLC.

3.5 CIRCUITO RL

É um circuito formado apenas por indutores e resistores.

3.5.1 Circuito RL em Série

É quando o circuito contém apenas resistor(es) e capacitor(es) em série, como o apresentado na Figura 38.

A impedância do circuito RL em Série é

$$Z = R + X_L i \quad (3.1)$$

onde $X_L = \omega L$. O circuito está ilustrado na Figura 38.

Exemplo 3.1. Para um circuito RL Série como o da Figura 38, com indutância $L = 20 \text{ mH}$, resistência $R = 1 \text{ k}\Omega$, com sinal da fonte alternada de

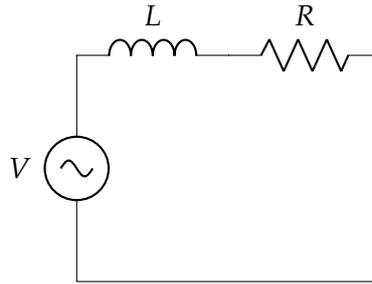


Figura 38: Circuito RL em Série

$V = 10 \cos(10000t) \text{ V}$, vamos calcular a impedância e a corrente do circuito.

Resolução: pela equação da fonte, temos que $\omega = 10000 \text{ rad/s}$, logo:

$$X_L = \omega L$$

$$X_L = 10000 \times 0,02$$

$$X_L = 200 \Omega$$

a impedância é

$$Z = 1000 + 200i \Omega$$

o módulo de Z é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{1000^2 + 200^2} \approx 1019,80 \Omega$$

e sua fase é

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{200}{1000}\right) \approx 11,31^\circ$$

$$Z \approx 1019,80 \angle 11,31^\circ \Omega.$$

A corrente no circuito é

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle 10000t}{1019,80 \angle 11,31^\circ}$$

$$I \approx 0,00981 \angle 10000t - 11,31^\circ \text{ A}$$

ou

$$I \approx 9,81 \angle 10000t - 11,31^\circ \text{ mA}.$$

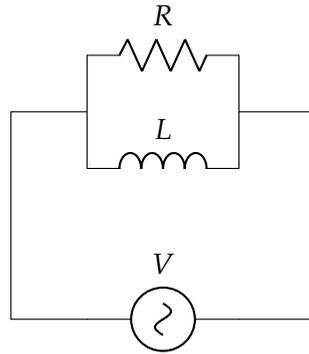


Figura 39: Circuito RL em Paralelo

3.5.2 Circuito RL em Paralelo

É o circuito que contém apenas resistor(es) e indutor(es) em paralelo, como apresentado na Figura 39.

A impedância do Circuito RL em Paralelo na forma cartesiana é calculada semelhante a forma de um resistor equivalente com resistores paralelos, ou seja:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L i} \quad (3.2)$$

Exemplo 3.2. Considere um circuito RL em Paralelo como o da Figura 39 com indutância $L = 50 \text{ mH}$, resistor $R = 500 \Omega$ com fonte alternada de $V = 10 \cos(1000t) \text{ V}$. Calcule a impedância e a corrente do circuito.

Resolução: pela equação da fonte, temos $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Logo,

$$X_L = \omega L$$

$$X_L = 1000 \times 0,05$$

$$X_L = 50 \Omega$$

a impedância é

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L i}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{500} + \frac{1}{50i}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{i + 10}{500i}$$

$$Z = \frac{500i}{10 + i}$$

multiplicando o numerador e o denominador por $10 - i$, obtemos

$$Z = \frac{500i}{10+i} \times \frac{10-i}{10-i}$$

$$Z = \frac{500 + 5000i}{101}$$

$$Z \approx 4,95 + 49,50i \Omega.$$

O módulo da impedância é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{4,95^2 + 49,5^2} \approx 49,75 \Omega$$

e o seu argumento é

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{49,50}{4,95}\right) \approx 84,29^\circ$$

$$Z = 49,75 \angle 84,29^\circ \Omega$$

A corrente no circuito é dada por

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle 1000\alpha t}{49,75 \angle 84,29^\circ}$$

$$I \approx 0,20100 \angle 1000\alpha t - 84,29^\circ A$$

ou

$$I \approx 201,00 \angle 1000\alpha t - 84,29^\circ mA.$$

3.6 CIRCUITO RC

É um circuito formado apenas por capacitores e resistores.

3.6.1 Circuito RC em Série

É quando o circuito contém apenas resistor(es) e capacitor(es) em série como ilustrado na Figura 40.

A impedância do Circuito RC em Série na forma cartesiana é

$$Z = R + X_C i. \tag{3.3}$$

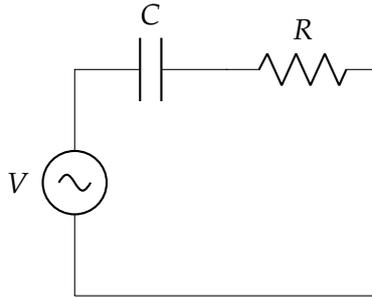


Figura 40: Circuito RC em Série

Lembrando que X_C é negativo como indica a Figura 23. O valor de X_C é fornecido pela Equação 2.17.

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}.$$

Exemplo 3.3. Considere um circuito RC em Série como o da Figura 40 com capacitor $C = 1 \mu F$, resistor $R = 1 k\Omega$ com sinal da fonte alternada de $V = 10 \cos(1000t) V$. Calcule a impedância e a corrente do circuito.

Resolução: pela equação da fonte, temos que $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, logo:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{1000 \times 0,000001}$$

$$X_C = -1000 \Omega$$

a impedância é

$$Z = 1000 - 1000i \Omega.$$

O seu módulo é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{1000^2 + (-1000)^2} \approx 1414,21 \Omega$$

e seu argumento é

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{-1000}{1000}\right) \approx -45,00^\circ$$

$$Z \approx 1414,21 \angle -45,00^\circ \Omega$$

a corrente do circuito é dada por

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle 1000\alpha t}{1414,21 \angle -45^\circ}$$

$$I \approx 0,0071 \angle 1000\alpha t + 45^\circ A$$

ou

$$I \approx 7,1 \angle 1000\alpha t + 45^\circ \text{ mA}.$$

3.6.2 Circuito RC em Paralelo

É o circuito que contém apenas resistor(es) e capacitor(es) em paralelo tal como se observa na Figura 41.

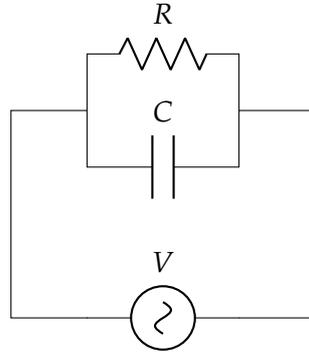


Figura 41: Circuito RC em Paralelo

A impedância do circuito RC em Paralelo é calculada de forma semelhante à forma de um resistor equivalente com resistores paralelos, ou seja:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C i} \quad (3.4)$$

Exemplo 3.4. Considere um circuito RC em Paralelo como o da Figura 41 com capacitor $C = 1 \mu F$, resistor $R = 1 k\Omega$ com sinal da fonte alternada de $V = 10 \cos(5000t) V$. Calcule a impedância e a corrente do circuito.

Resolução: pela equação da fonte, temos que $\omega = 5000 \text{ rad/s}$, logo:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{5000 \times 0,000001}$$

$$X_C = -200 \Omega$$

e a impedância é

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C i}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{1000} - \frac{1}{200i}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{i - 5}{1000i}$$

$$Z = \frac{1000i}{-5 + i}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $-5 - i$,

$$Z = \frac{1000i}{-5+i} \times \frac{-5-i}{-5-i}$$

$$Z = \frac{1000 - 5000i}{26}$$

$$Z \approx 38,46 - 192,31i \Omega.$$

A impedância na forma polar é $Z = |Z| \angle \theta$, onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{38,46^2 + (-192,31)^2} \approx 196,12 \Omega$$

é o módulo de Z e

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-192,31}{38,46}\right) \approx -78,69^\circ$$

é o seu argumento.

Assim,

$$Z \approx 196,12 \angle -78,69^\circ \Omega.$$

A corrente do circuito é

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle 5000\alpha t}{196,12 \angle -78,69^\circ}$$

$$I \approx 0,05099 \angle 5000\alpha t + 78,69^\circ A$$

ou

$$I \approx 51,00 \angle 5000\alpha t + 78,69^\circ mA.$$

3.7 CIRCUITO RLC

É o circuito que contém resistores, indutores e capacitores.

Circuito RLC em Série

É o circuito que contém resistores, indutores e capacitores em série, como aquele apresentado na Figura 42.

A impedância do Circuito RLC em Série é

$$Z = R + (X_L + X_C)i. \quad (3.5)$$

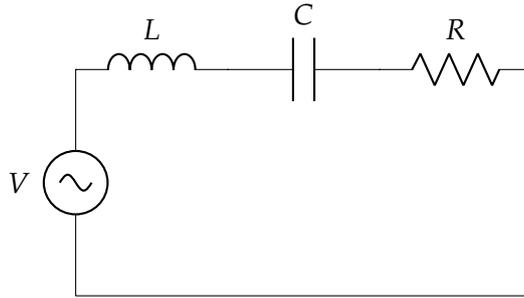


Figura 42: Circuito RLC em Série

Exemplo 3.5. Considere um circuito RLC em Série como o da Figura 42 com capacitor $C = 1 \mu F$, $L = 10 mH$, resistor $R = 1 k\Omega$ com sinal da fonte alternada de $V = 20 \cos(1000t) V$. Calcule a impedância e a corrente do circuito.

Resolução: pela equação da fonte, temos que $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. A reatância capacitiva é

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{1000 \times 0,000001}$$

$$X_C = -1000 \Omega$$

e a reatância indutiva é

$$X_L = \omega L$$

$$X_L = 1000 \times 0,01$$

$$X_L = 10 \Omega.$$

Agora podemos calcular a impedância:

$$Z = R + (X_L + X_C)i$$

$$Z = 1000 + (10 - 1000)i$$

$$Z = 1000 - 990i \Omega,$$

o seu módulo é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{1000^2 + (-990)^2} \approx 1407,16 \Omega$$

e o seu argumento é

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{-990}{1000}\right) \approx -44,71^\circ$$

$$Z \approx 1407,16 \angle -44,71^\circ \Omega$$

a corrente do circuito é

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{20 \angle 1000\alpha t}{1407,16 \angle -44,71^\circ}$$

$$I \approx 0,01421 \angle 1000\alpha t + 44,71^\circ \text{ A}$$

ou

$$I \approx 14,21 \angle 1000\alpha t + 44,71^\circ \text{ mA.}$$

Circuito RLC em Paralelo

É o circuito que contém resistores, indutores e capacitores em paralelo, como o apresentado na Figura 43.

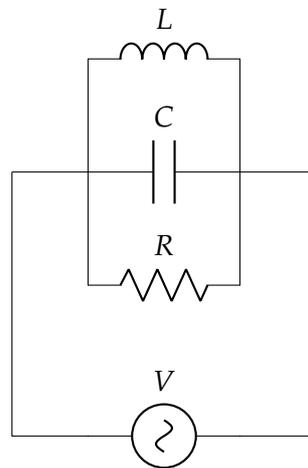


Figura 43: Circuito RLC em Paralelo

A impedância do Circuito RLC em Paralelo na forma cartesiana é calculada de modo semelhante à de um resistor equivalente com resistores paralelos, ou seja:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L i} + \frac{1}{X_C i}. \quad (3.6)$$

Exemplo 3.6. Considere um circuito RLC em Paralelo como o da Figura 43, com capacitor $C = 1 \mu\text{F}$, indutor $L = 10 \text{ mH}$, resistor $R = 1 \text{ k}\Omega$ com sinal da fonte alternada de $V = 20 \cos(1000t) \text{ V}$. Calcule a impedância e a corrente do circuito.

Resolução: os valores dos componentes são semelhantes ao do exemplo anterior, portanto os valores das reatâncias também serão, logo:

$$X_C = -1000 \Omega, X_L = 10 \Omega$$

e a impedância é

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L i} + \frac{1}{X_C i} \\ \frac{1}{Z} &= \frac{1}{1000} + \frac{1}{10i} - \frac{1}{1000i} \\ \frac{1}{Z} &= \frac{i + 100 - 1}{1000i} \\ Z &= \frac{1000i}{99 + i}.\end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $99 - i$, vem

$$\begin{aligned}Z &= \frac{1000i}{99 + i} \times \frac{99 - i}{99 - i} \\ Z &= \frac{1000 + 99000i}{9802} \\ Z &\approx 0,10 + 10,10i \Omega.\end{aligned}$$

O módulo de Z é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{0,10^2 + 10,10^2} \approx 10,10 \Omega$$

e o seu argumento é

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{10,10}{0,10}\right) \approx 89,43^\circ,$$

portanto, a forma polar da impedância é

$$Z \approx 10,10 \angle 89,43^\circ \Omega.$$

A corrente do circuito é dada por

$$\begin{aligned}I &= \frac{V}{Z} = \frac{20 \angle 1000\alpha t}{10,10 \angle 89,43^\circ} \\ I &\approx 1,98 \angle 1000\alpha t - 89,43^\circ \text{ A}.\end{aligned}$$

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Neste capítulo temos um roteiro para aplicação em aula sobre os números complexos com alunos de Ensino Médio.

- Tempo Previsto: 3 semanas.
- Objetivo: aplicar números complexos e compreender o significado deste, especificamente utilizar os números complexos para calcular a impedância através dos circuitos elétricos compostos por resistores, capacitores e indutores.
- Conteúdo e temas: apresentação dos números complexos na forma cartesiana e forma fasorial (polar), operações com números complexos, significado geométrico e defasagem de ondas senoidais.
- Competência e habilidades: compreender a analogia existente entre a passagem dos números reais (dos circuitos) aos números complexos na forma cartesiana e fasorial, aumento na capacidade de expressão por meio de números, em decorrência da apresentação do significado geométrico dos complexos e das operações sobre eles.
- Estratégias: serão apresentados aos alunos elementos conceituais relativos aos conteúdos por meio de exercícios exemplares, utilização de papel quadriculado para elaboração de gráficos, software como Geogebra para gráficos e Pspice para simulação de ondas dos circuitos elétricos.

Após apresentar a teoria sobre números complexos e elementos dos circuitos elétricos aos alunos, tem-se a aplicação dos exercícios. Temos inicialmente operações entre números complexos na forma cartesiana, transformação da forma cartesiana para polar e de polar para cartesiana, em seguida operações com números complexos na forma polar. Estes exercícios iniciais têm o objetivo de o aluno se familiarizar com as

operações com números complexos para aplicar estas operações nos circuitos elétricos. Completamos a aplicação com cálculos de equivalências apenas com resistores, capacitores, indutores, em seguida a união destes componentes. Tem-se também sugestão de resposta dos exercícios, cujo o objetivo de cada exercício é dado a seguir:

Objetivo do Exercício 1. Efetuar as quatro operações utilizando números complexos na forma cartesiana.

Objetivo do Exercício 2. Identificar a equivalência do número complexo na forma cartesiana e forma polar, transformando-o da cartesiana para forma polar e representar o resultado com o plano fasorial.

Objetivo do Exercício 3. Identificar a equivalência do número complexo na forma cartesiana e forma polar, transformando-o da forma polar para cartesiana.

Objetivo do Exercício 4. Efetuar as quatro operações utilizando números complexos na forma polar.

Objetivo do Exercício 5. Identificar a equivalência do número complexo na forma trigonométrica e forma polar, transformando-o da forma trigonométrica para forma polar.

Objetivo do Exercício 6. Aplicar a Lei de Ohm com números complexos na forma polar.

Objetivo do Exercício 7. Calcular a resistência equivalente de circuitos que contém apenas resistores.

Objetivo do Exercício 8. Calcular a indutância equivalente de circuitos que contém apenas indutores.

Objetivo do Exercício 9. Calcular a capacitância equivalente de circuitos que contém apenas capacitores.

Objetivo do Exercício 10. Através de cálculos de impedância de circuitos contendo resistores, indutores e capacitores, observar o efeito que ela faz na onda original da fonte, como deslocamento horizontal que representa o ângulo de fase da impedância. Analisar os resultados obtidos dos cálculos através de simulações com uso de software PSPICE proporcionando a relação entre a teoria e a prática dos números complexos.

Exercício 1. Dados os números complexos $z_1 = (5, 7)$, $z_2 = (4, 3)$, efetue as operações:

a) $z_1 + z_2$:

Resolução: associamos a soma de $(5, 7)$ e $(4, 3)$ ao número complexo:

$$(5, 7) + (4, 3) = (5 + 4, 7 + 3)$$

$$(5, 7) + (4, 3) = (6, 10)$$

b) $z_1 - z_2$:

Resolução: associamos a diferença de $(5, 7)$ e $(4, 3)$ ao número complexo:

$$(5, 7) - (4, 3) = (5 - 4, 7 - 3)$$

$$(5, 7) - (4, 3) = (1, 4)$$

c) $z_1 z_2$:

Resolução: associamos o produto de $z_1 = (5, 7)$ e $z_2 = (4, 3)$ ao número complexo:

$$(5, 7) \times (4, 3) = (5 \times 4 - 7 \times 3, 5 \times 3 + 7 \times 4) = (10, 2) \times (8, 4)$$

$$(5, 7) \times (4, 3) = (-1, 43)$$

d) $z_1 : z_2$:

Resolução:

$$\frac{(5, 7)}{(4, 3)} = (5, 7) \left(\frac{4}{4^2 + 3^2}, \frac{-3}{4^2 + 3^2} \right)$$

$$\frac{(5, 7)}{(4, 3)} = (5, 7) \left(\frac{4}{25}, \frac{-3}{25} \right)$$

$$\frac{(5, 7)}{(4, 3)} = \left(5 \times \frac{4}{25} - 7 \times \left(\frac{-3}{25} \right), 5 \times \left(\frac{-3}{25} \right) + 7 \times \frac{4}{25} \right)$$

$$\frac{(5, 7)}{(4, 3)} = \left(\frac{41}{25}, \frac{13}{25} \right)$$

Exercício 2. Escreva os números complexos a seguir na forma polar:

a) $z = 10 + 5i$:

Resolução: usando a Equação 2.22 e a Equação 1.4:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} \approx 11,18$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right) = \arctan \left(\frac{5}{10} \right) \approx 26,57^\circ$$

$$z \approx 11,18 / 26,57^\circ$$

observe o gráfico da Figura 44.

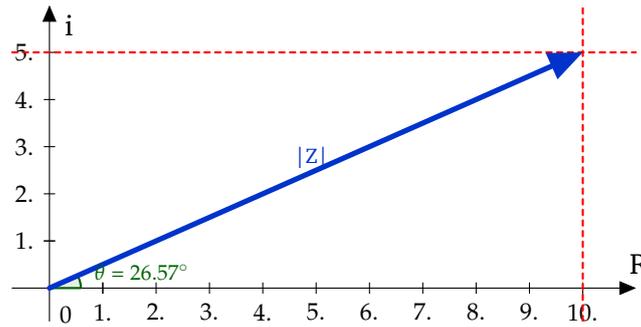


Figura 44: Plano Fasorial Exercício 2-a

b) $z = 1 - i$:

Resolução: fazendo do mesmo modo que na questão anterior, temos:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \approx 1,44$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 45^\circ$$

$$z \approx 1,44 \angle -45^\circ$$

o resultado está ilustrado na Figura 45.

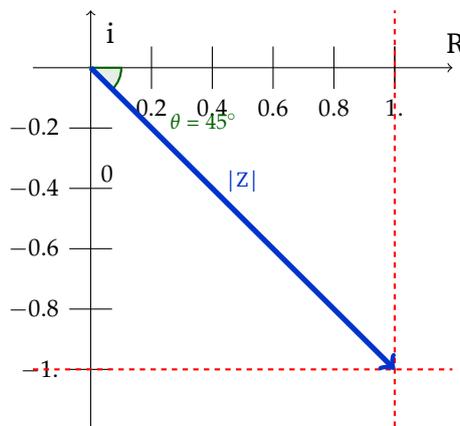


Figura 45: Plano Fasorial Exercício 2-b

c) $z = -500 - 200i$:

Resolução: temos:

$$|z| = \sqrt{(-500)^2 + (-200)^2} \approx 538,52$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-200}{-500}\right) \approx 201,80^\circ$$

$$z \approx 538,52 \angle 201,80^\circ$$

observe que a impedância está no terceiro quadrante como mostra a Figura 46.

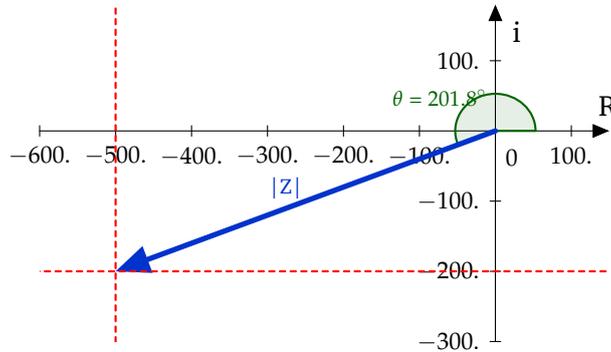


Figura 46: Plano Fasorial Exercício 2-c

Exercício 3. Escreva os números a seguir na forma cartesiana $z = a + bi$:

a) $z = 50 \angle 60^\circ$:

Resolução: usando a Equação 1.2, podemos escrever:

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 50(\cos(60^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ))$$

$$z \approx 25 + 43,30i$$

b) $z = 10,51 \angle 90^\circ$:

Resolução: temos:

$$z = 10,51(\cos(90^\circ) + i \operatorname{sen}(90^\circ))$$

$$z = 10,51i$$

c) $z = 33 \angle -30^\circ$:

Resolução: temos:

$$z = 33(\cos(-30^\circ) + i \operatorname{sen}(-30^\circ))$$

$$z \approx 28,59 - 16,50i$$

Exercício 4. Dados os números complexos $z_1 = 10 \angle 30^\circ$, $z_2 = 2 \angle 90^\circ$, efetue as operações:

a) $z_1 z_2$:Resolução: associamos o produto de z_1 e z_2 ao número complexo:

$$z_1 z_2 = 10 \times 2 \angle 30^\circ + 90^\circ$$

$$z_1 z_2 = 20 \angle 120^\circ$$

b) $z_1 : z_2$:Resolução: associamos o quociente de z_1 e z_2 ao número complexo:

$$z_1 : z_2 = \frac{10}{2} \angle 30^\circ - 60^\circ$$

$$z_1 : z_2 = 5 \angle -30^\circ$$

c) z_1^4 :Resolução: associamos a quarta potência de $z_1 = 10 \angle 30^\circ$ ao número complexo:

$$z_1 = 10^4 \angle 30^\circ \times 4$$

$$z_1 = 10000 \angle 120^\circ$$

Exercício 5. Escreva na forma polar as funções trigonométricas a seguir:a) $f(t) = 10 \cos(100t)$:

Resolução: temos:

$$f(t) = 10 \angle 100\alpha t$$

b) $f(t) = 20 \sin(10t)$:

Resolução: temos:

$$f(t) = 20 \sin(10t)$$

$$f(t) = 20 \cos(10\alpha t - 90^\circ)$$

$$f(t) = 20 \angle 10\alpha t - 90^\circ$$

c) $f(t) = 10 \sin(10t)$:

Resolução: temos:

$$f(t) = 10 \cos(10\alpha t - 90^\circ)$$

$$f(t) = 10 \angle 10\alpha t - 90^\circ$$

Exercício 6. Calcule na forma polar: tensão elétrica, corrente elétrica e impedância:

a) $V = 2 \text{ sen}(10t)$ V e $Z = 3 + 5i \Omega$:

Resolução: a tensão V na forma polar é

$$V = 2 \text{ sen}(10t) = 2 \cos(10\alpha t - 90^\circ)$$

$$V = 2 \angle 10\alpha t - 90^\circ \text{ V}$$

a impedância na forma polar é

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$|Z| \approx 5,83$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\theta \approx 59,04^\circ$$

$$Z \approx 5,83 \angle 59,04^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{2 \angle 10\alpha t - 90^\circ}{5,83 \angle 59,04^\circ}$$

$$I \approx 0,34 \angle 10\alpha t - 149,04^\circ \text{ A}$$

b) $V = 10 \cos(50t)$ V e $Z = 4 + 2i \Omega$:

Resolução: a tensão V na forma polar é

$$V = 10 \angle 50t \text{ V}$$

a impedância na forma polar é

$$|Z| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$|Z| \approx 4,47$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\theta \approx 26,57^\circ$$

$$Z \approx 4,47 \angle 26,57^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 50\alpha t}{4,47 \angle 26,57^\circ}$$

$$I \approx 2,34 \angle 50\alpha t - 26,57^\circ \text{ A}$$

c) $Z = 100\angle 60^\circ \Omega$ e $I = 0,5\angle 50t A$:

Resolução: neste exercício é necessário apenas calcular a tensão elétrica que passa pela impedância:

$$V = 100\angle 60^\circ \times 0,5\angle 50t$$

$$V = 50\angle 50t + 60^\circ V.$$

Exercício 7. Calcule a resistência equivalente:

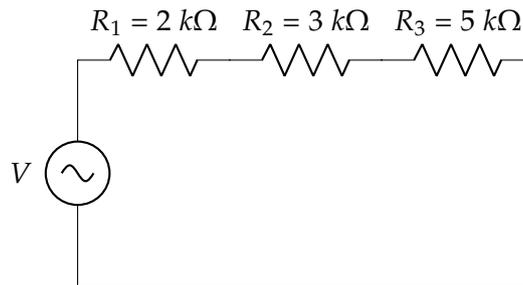


Figura 47: Resistores em Série do Exercício 7-a

a) Resolução do problema para o circuito da Figura 47: temos uma associação de resistores em série, então devemos somar os valores das resistências, logo:

$$R_{\text{equivalente}} = R_1 + R_2 + R_3 = 2 + 3 + 5 = 10\text{ k}\Omega$$

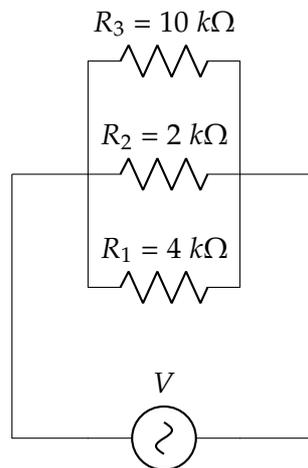


Figura 48: Resistores em Paralelo do Exercício 7-b

- b) Resolução do problema para o circuito da Figura 48: temos uma associação de três resistores em paralelo, então devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{5}{20} + \frac{10}{20} + \frac{2}{20} = \frac{17}{20}$$

$$R_{\text{equivalente}} = \frac{20}{17} \approx 1,18 \text{ k}\Omega$$

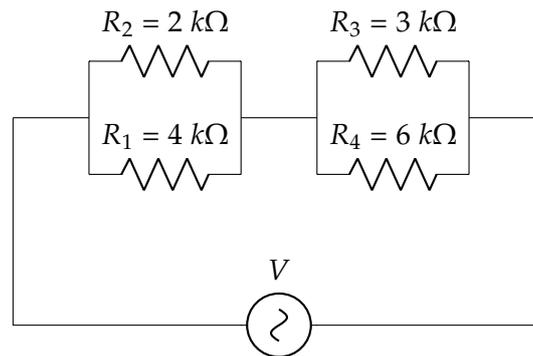


Figura 49: Resistores em Paralelo e em Série do Exercício 7-c

- c) Resolução do problema para o circuito da Figura 49: temos duas associações em paralelo e o resultado das duas em série:

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \text{ k}\Omega$$

$$R_{\text{equivalente1}} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente2}}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$R_{\text{equivalente2}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_{\text{equivalente}} = R_{\text{equivalente1}} + R_{\text{equivalente2}} \approx 1,33 + 2 \approx 3,33 \text{ k}\Omega$$

- d) Resolução do problema para o circuito da Figura 50: temos duas associações em paralelo, entre elas uma resistência em série. Resolvendo a primeira associação, temos:

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{5}{20}$$

$$R_{\text{equivalente1}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ k}\Omega$$

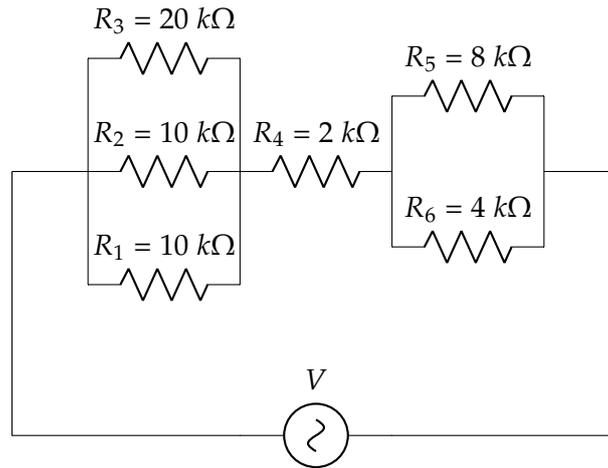


Figura 50: Resistores em Paralelo e em Série do Exercício 7-d

resolvendo a segunda associação:

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente2}}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$R_{\text{equivalente2}} = \frac{8}{3} \approx 2,67 \text{ k}\Omega$$

somando os resultados, pois agora temos três resistências em série:

$$R_{\text{equivalente}} = R_{\text{equivalente1}} + R_4 + R_{\text{equivalente2}} \approx 4 + 2 + 2,67 \approx 8,67 \text{ k}\Omega$$

Exercício 8. Calcule as indutâncias equivalentes nos circuitos a seguir:

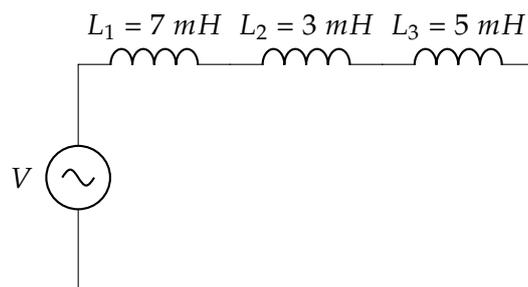


Figura 51: Indutores em Série do Exercício 8-a

a) Resolução do problema para o circuito da Figura 51: Temos uma associação de indutores em série, então devemos somar os valores dos indutores, logo:

$$L_{\text{equivalente}} = L_1 + L_2 + L_3 = 7 + 3 + 5 = 15 \text{ mH}$$

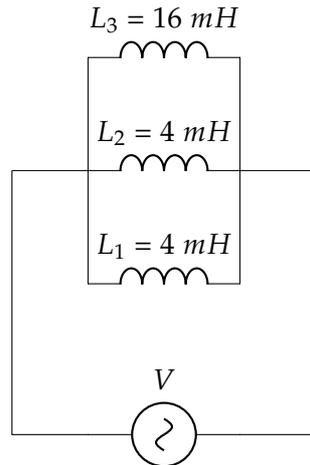


Figura 52: Indutores em Paralelo do Exercício 8-b

- b) Resolução do problema para o circuito da Figura 52: Temos uma associação de três indutores em paralelo, então devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

$$L_{\text{equivalente}} = \frac{16}{9} \approx 1,78 \text{ mH}$$

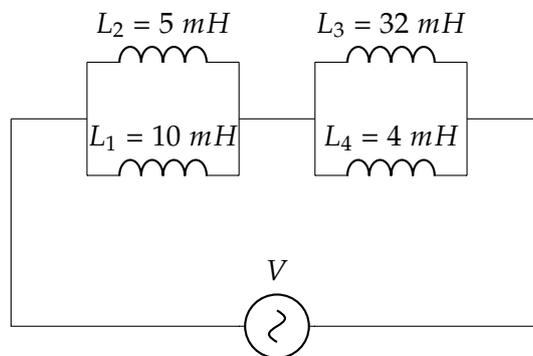


Figura 53: Indutores em Paralelo e em Série do Exercício 8-c

- c) Resolução do problema para o circuito da Figura 53: Temos duas associações em paralelo e o resultado das duas em série:

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

$$L_{\text{equivalente1}} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \text{ mH}$$

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente2}}} = \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} = \frac{1}{32} + \frac{1}{4} = \frac{1}{32} + \frac{8}{32} = \frac{9}{32}$$

$$L_{\text{equivalente2}} = \frac{32}{9} \approx 3,56 \text{ mH}$$

$$L_{\text{equivalente}} = L_{\text{equivalente1}} + L_{\text{equivalente2}} \approx 3,33 + 3,56 \approx 6,89 \text{ mH}$$

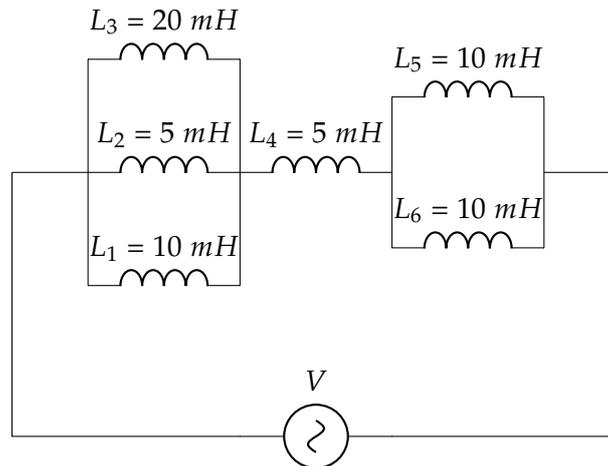


Figura 54: Indutores em Paralelo e em Série do Exercício 8-d

- d) Resolução do problema para o circuito da Figura 54: temos duas associações em paralelo, entre elas uma resistência em série. Resolvendo a primeira associação:

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$$

$$L_{\text{equivalente1}} = \frac{20}{7} \approx 2,86 \text{ mH}$$

resolvendo a segunda associação:

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente2}}} = \frac{1}{L_5} + \frac{1}{L_6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

$$L_{\text{equivalente2}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ mH}$$

somando os resultados, pois agora temos três resistências em série:

$$L_{\text{equivalente}} = L_{\text{equivalente1}} + L_4 + L_{\text{equivalente2}}$$

$$L_{\text{equivalente}} \approx 2,86 + 5 + 5 \approx 12,86 \text{ mH}$$

Exercício 9. Calcule as capacitâncias equivalentes nos circuitos a seguir:

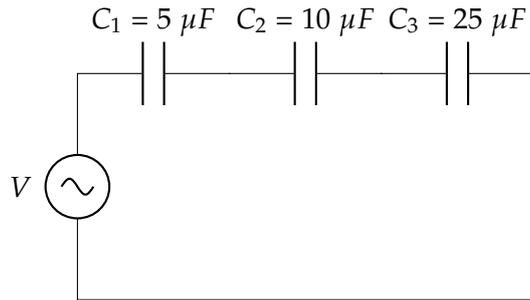


Figura 55: Capacitores em Série do Exercício 9-a

- a) Resolução do problema para o circuito da Figura 55: temos uma associação de três capacitores em série, então devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25} = \frac{10}{50} + \frac{5}{50} + \frac{2}{50} = \frac{17}{50}$$

$$C_{\text{equivalente}} = \frac{50}{17} \approx 2,94 \mu F$$

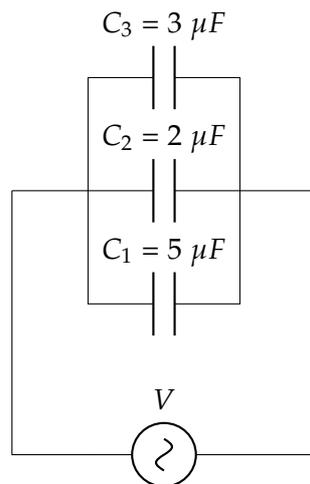


Figura 56: Capacitores em Paralelo do Exercício 9-b

- b) Resolução do problema para o circuito da Figura 56: temos uma associação de capacitores em paralelo, então devemos somar os valores dos capacitores, logo:

$$C_{\text{equivalente}} = C_1 + C_2 + C_3 = 5 + 2 + 3 = 10 \mu F$$

- c) Resolução do problema para o circuito da Figura 57: temos duas associações em paralelo e o resultado das duas em série. A primeira associação em paralelo:

$$C_{\text{equivalente1}} = C_1 + C_2 = 3 + 2 = 5 \mu F$$

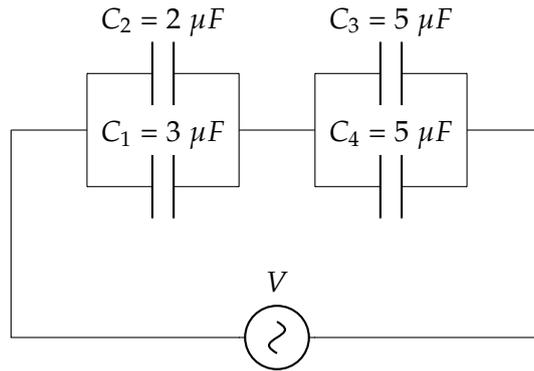


Figura 57: Capacitores em Paralelos e em Série do Exercício 9-c

a segunda associação em paralelo:

$$C_{\text{equivalente1}} = C_3 + C_4 = 5 + 10 = 15 \mu F$$

como as capacitâncias equivalentes encontradas estão em série, devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{C_{\text{equivalente1}}} + \frac{1}{C_{\text{equivalente2}}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

$$C_{\text{equivalente}} = \frac{15}{4} = 3,75 \mu F$$

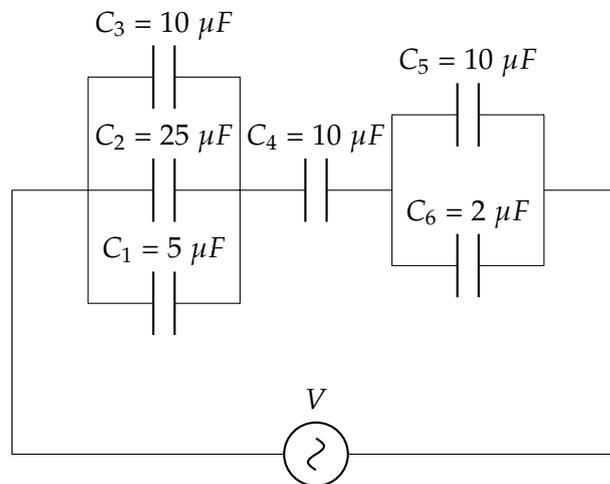


Figura 58: Capacitores em Paralelo e em Série do Exercício 9-d

- d) Resolução do problema para o circuito da Figura 58: temos duas associações em paralelo e o resultado das duas em série com C_4 . A primeira associação em paralelo:

$$C_{\text{equivalente1}} = C_1 + C_2 + C_3 = 5 + 25 + 10 = 40 \mu F$$

a segunda associação em paralelo:

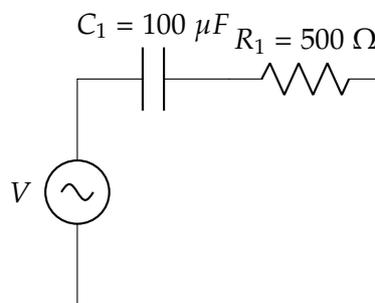
$$C_{\text{equivalente2}} = C_5 + C_6 = 10 + 2 = 12 \mu F$$

como as capacitâncias equivalentes encontradas estão em série, devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{C_{\text{equivalente1}}} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{\text{equivalente2}}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{25}{120}$$

$$C_{\text{equivalente}} = \frac{120}{25} = 4,8 \mu F$$

Exercício 10. Calcule as impedâncias equivalentes na forma cartesiana, forma polar e simule o resultado com o software Pspice:



Frequência da fonte 1 kHz e amplitude 10 V.

Figura 59: Circuito RC em Série do Exercício 10-a.

- a) Resolução do problema para o circuito da Figura 59: a parte complexa é calculada pela expressão $X_C = -\frac{1}{\omega C}$, logo:

$$X_C = -\frac{1}{2\pi f C} = -\frac{1}{2 \times 3,14 \times 1000 \times 0,0001} = -\frac{1}{0,628} \approx -1,59 \Omega$$

a impedância na forma cartesiana é

$$Z \approx 500 - 1,59i \Omega$$

a forma polar da impedância é

$$Z = |Z| \angle \theta$$

calculada pelas expressões

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

substituindo os valores, temos:

$$|Z| = \sqrt{500^2 + (-1,59)^2} = 502,53 \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1,59}{500}\right) = -0,18^\circ$$

$$Z = 502,53 \angle -0,18^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 1000 \alpha t}{502,53 \angle -0,18^\circ}$$

$$I \approx 0,020 \angle 0,18^\circ + 6280 \alpha t \text{ A ou } I \approx 20,00 \angle 0,18^\circ + 6280 \alpha t \text{ mA}$$

o gráfico da impedância na forma polar é observado na Figura 60 e a simulação está representada na a Figura 82.

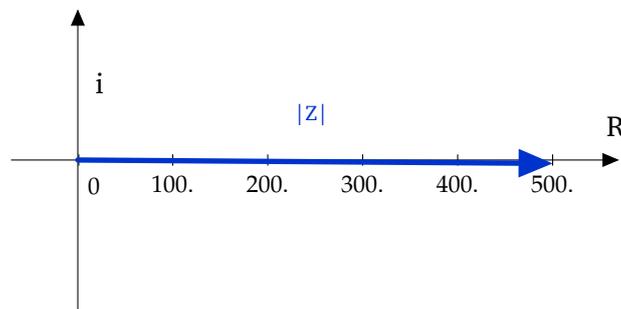
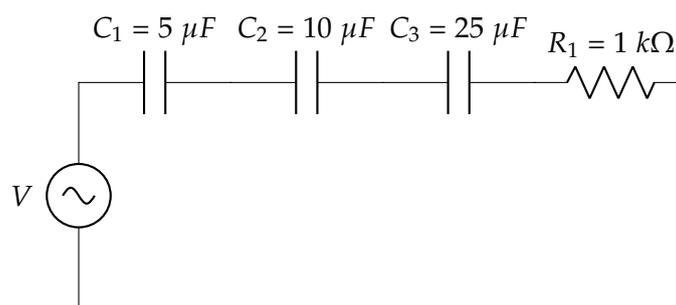


Figura 60: Impedância do Exercício 10-a na Forma Fasorial



Frequência da fonte 2 kHz e amplitude 10 V.

Figura 61: Circuito RC com Capacitores em Série do Exercício 10-b

- b) Resolução do problema para o circuito da Figura 61: primeiro devemos calcular a capacitância equivalente, onde os três capacitores estão em série, estes valores

são semelhantes ao exercício 3a, no qual encontramos $C \approx 2,94 \mu F$. Agora calculamos a parte complexa:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C} = -\frac{1}{2 \times 3,14 \times 100 \times 0,0000294} \approx -541,62 \Omega$$

logo, a impedância na é

$$Z \approx 1000 - 541,62i \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{1000^2 + (-541,62)^2} = 294,35 \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-541,62}{1000}\right) = -28,44^\circ$$

$$Z = 1137,26 \angle -28,44^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10/2 \times 3,14 \times 100 \text{at}}{1137,26 \angle -28,44^\circ}$$

$$I \approx 0,00879 \angle 28,44^\circ + 628 \text{at A ou } I \approx 8,79 \angle 28,44^\circ + 628 \text{at mA}$$

a tensão no resistor é

$$V_{R_1} = R_1 I$$

$$V_{R_1} = 1000 \times 0,003397 \angle 28,44^\circ + 628 \text{at}$$

$$V_{R_1} \approx 3,4 \angle 28,44^\circ + 628 \text{at V.}$$

O gráfico da impedância na forma polar é observado na Figura 62 e a simulação está representada na Figura 83.

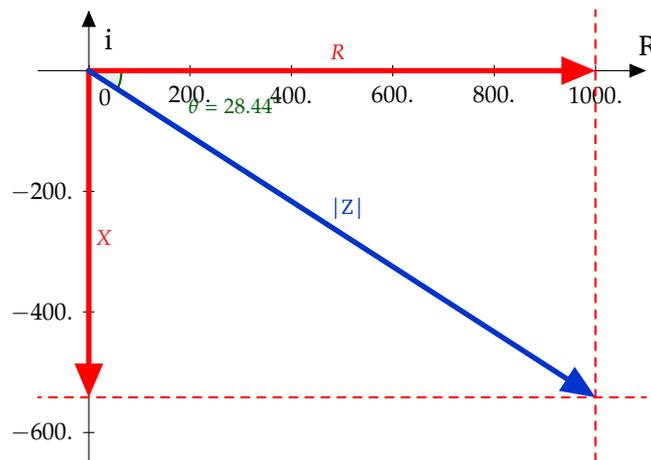
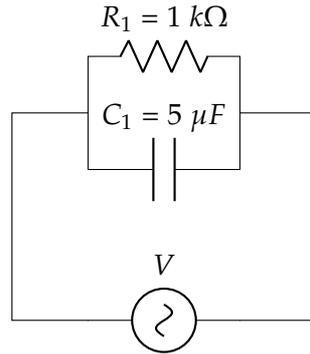


Figura 62: Impedância do Exercício 10-b na Forma Fasorial



Frequência da fonte 2 kHz e amplitude 10 V.

Figura 63: Circuito RC em Paralelo do Exercício 10-c

- c) Resolução do problema para o circuito da Figura 63: desta vez temos um capacitor em paralelo com um resistor, encontrando a reatância capacitiva, temos:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C} = -\frac{1}{2 \times 3,14 \times 2000 \times 0,000005} \approx -15,92 \Omega$$

a impedância na forma cartesiana é calculada semelhante a forma de um resistor equivalente com resistores paralelos

$$\frac{1}{Z_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{X_C} \approx \frac{1}{1000} - \frac{1}{15,92i} \approx \frac{15,92i - 1000}{15920i} \approx \frac{15920i}{15,92i - 1000}$$

$$Z_{\text{equivalente}} \approx \frac{15920i}{15,92i - 1000} \times \frac{15,92i + 1000}{15,92i + 1000} \approx \frac{-253446,4 + 15920000i}{-253,45 - 1000000}$$

$$Z_{\text{equivalente}} \approx 0,25 - 15,92i \Omega$$

Observação 4.0.1. Como o circuito da Figura 63 apresenta resistor e capacitor paralelo, significa que terão o mesmo sinal da fonte. Não teria significado uma análise de onda na forma em que está, portanto é necessário colocar um resistor em série para poder analisar os resultados influenciados por esta associação.

Escolhendo um resistor de $R_2 = 10 \Omega$, temos:

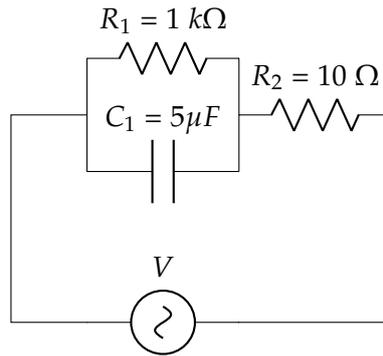
O valor da impedância equivalente muda para

$$Z_{\text{equivalente}} \approx (10 + 0,25) - 15,92i \approx 10,25 - 15,92i \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{10,25^2 + (-15,92)^2} = 18,93$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-15,92}{10,25}\right) = -57,22^\circ$$

$$Z = 18,93 \angle -57,22^\circ \Omega$$



Frequência da fonte 2 kHz e amplitude 10 V.

Figura 64: Segundo Circuito RC em Paralelo do Exercício 10-c

a corrente elétrica

$$I \approx \frac{10\angle 2 \times 3,14 \times 2000\alpha t}{18,93\angle -57,22^\circ}$$

$$I \approx 0,52826\angle 57,22^\circ + 12560\alpha t \text{ A ou } I \approx 528,26\angle 57,22^\circ + 12560\alpha t \text{ mA}$$

a tensão no resistor é

$$V_{R_2} = R_2 I$$

$$V_{R_2} = 10 \times 0,52826\angle 57,22^\circ + 12560\alpha t$$

$$V_{R_2} \approx 5,28\angle 57,22^\circ + 12560\alpha t \text{ V}$$

o gráfico na forma polar é observado na Figura 65 e a simulação está representada na Figura 84.

- d) Resolução do problema para o circuito da Figura 66: temos dois capacitores paralelos em série com dois resistores paralelos. A primeira associação em paralelo (capacitores):

$$C_{\text{equivalente}} = C_1 + C_2 = 3 + 2 = 5 \mu F$$

a segunda associação em paralelo (resistores):

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{4000}$$

$$R_{\text{equivalente1}} = 800 \Omega$$

a reatância capacitiva é

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 100 \times 0,000005} \approx -318,47 \Omega$$

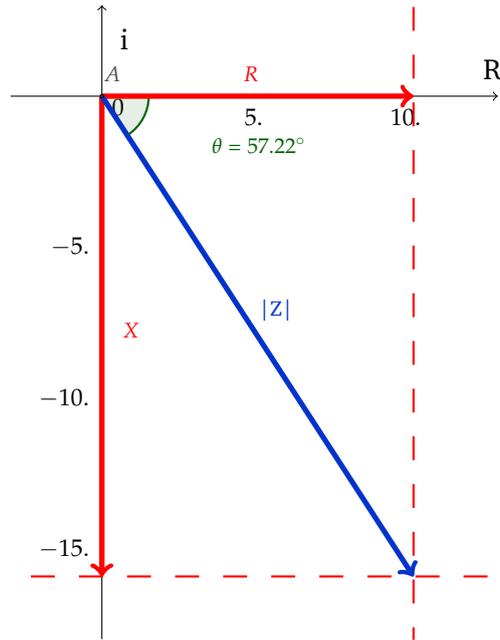
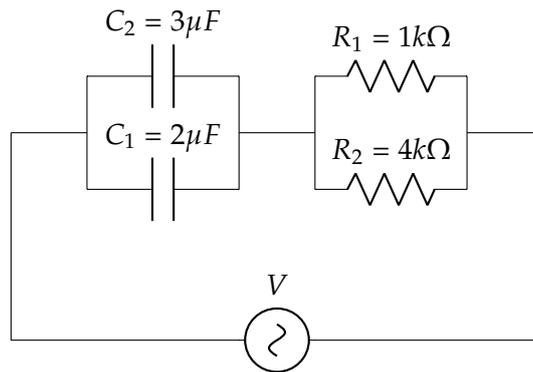


Figura 65: Impedância do Segundo Circuito do Exercício 10-c na Forma Fasorial



Frequência da fonte 100 Hz e amplitude 10 V.

Figura 66: Circuito RC em Série com Capacitores e Resistores em Paralelos do Exercício 10-d

a impedância é

$$Z \approx 800 - 318,47i \, \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{800^2 + 318,47^2} = 861,06 \, \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-318,47}{800}\right) = -21,71^\circ$$

$$Z = 861,06 \angle -21,71^\circ \, \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 100 \alpha t}{861,06 \angle -21,71^\circ}$$

$$I \approx 0,01161 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ A ou } I \approx 11,61 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ mA}$$

a corrente no resistor R_1 é obtida como indicado no apêndice, onde temos

$$I_{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{R_1} = (0,01161 \angle -21,71^\circ + 628at) \frac{4000}{1000 + 4000} \approx 0,009288 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ A}$$

$$I_{R_1} \approx 9,29 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ mA}$$

a corrente em R_2 é

$$I_{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_{R_2} = (0,01161 \angle -21,71^\circ + 628at) \frac{1000}{1000 + 4000} \approx 0,002322 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ A}$$

$$I_{R_2} \approx 2,32 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ mA}$$

a tensão nos resistores são

$$V_{R_{equivalente}} = I_{R_1} R_1$$

$$V_{R_{equivalente}} \approx (0,009288 \angle -21,71^\circ + 628at) \times 1000$$

$$V_{R_{equivalente}} \approx 9,29 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ V}$$

as correntes nos capacitores são obtidas de forma semelhante utilizando a reatância capacitiva. A corrente no capacitor C_1 é

$$I_{C_1} = I \frac{X_{C_2}}{X_{C_1} + X_{C_2}} = I \frac{-\frac{1}{\omega C_2} i}{-\frac{1}{\omega C_1} i - \frac{1}{\omega C_2} i}$$

$$I_{C_1} = I \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$I_{C_1} = (0,01161 \angle -21,71^\circ + 628at) \frac{3 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-6}} \approx 0,006966 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ A}$$

$$I_{C_1} \approx 6,97 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ mA}$$

a corrente em C_2 é

$$I_{C_2} = I \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$I_{C_2} = (0,01161 \angle -21,71^\circ + 628at) \frac{2 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-6}} \approx 0,004644 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ A}$$

$$I_{C_2} \approx 4,64 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ mA}$$

em resumo, temos os resultados

$$I \approx 11,61 \angle -21,71^\circ + 628at \text{ mA}$$

$$I_{R_1} \approx 9,29 \angle -21,71^\circ + 628 \alpha t \text{ mA}$$

$$I_{R_2} \approx 2,32 \angle -21,71^\circ + 628 \alpha t \text{ mA}$$

$$I_{C_1} \approx 6,97 \angle -21,71^\circ + 628 \alpha t \text{ mA}$$

$$I_{C_2} \approx 4,64 \angle -21,71^\circ + 628 \alpha t \text{ mA}$$

$$V_{R_1} = V_{R_2} \approx 9,29 \angle -21,71^\circ + 628 \alpha t \text{ V}$$

$$Z = 861,06 \angle -21,71^\circ \Omega.$$

O gráfico da impedância na forma polar é observado na Figura 67, simulação da corrente está representada na Figura 85 e da tensão na Figura 86.

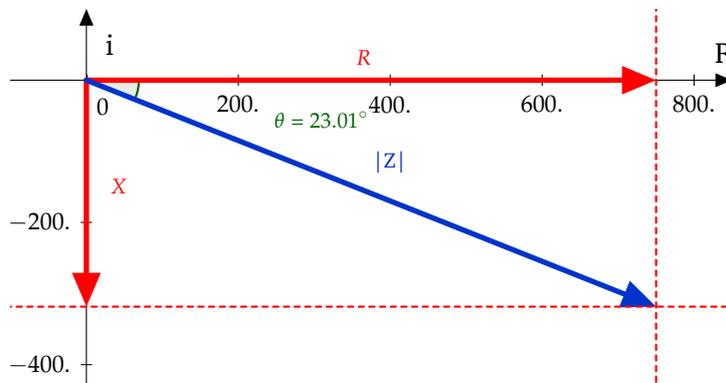
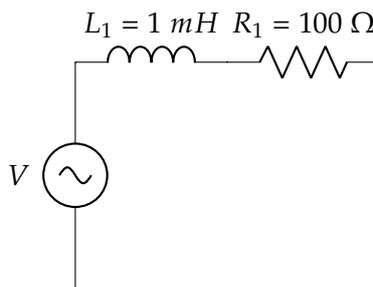


Figura 67: Impedância do Exercício 10-d na Forma Fasorial



Frequência da fonte 10 kHz e amplitude 10 V

Figura 68: Circuito RL em Série do Exercício 10-e

- e) Resolução do problema para o circuito da Figura 68: a parte complexa é calculada pela expressão $X_L = \omega L$,

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3,14 \times 10000 \times 0,001 = 62,8 \Omega$$

a impedância na forma cartesiana é

$$Z = 100 + 62,8i \, \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{100^2 + 62,8^2} = 118,08 \, \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{62,8}{100}\right) = 32,12^\circ$$

$$Z = 118,08 \angle 32,12^\circ \, \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 10000 \alpha t}{118,08 \angle 32,12^\circ}$$

$$I \approx 0,00847 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t \, A \text{ ou } I \approx 8,47 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t \, mA$$

a tensão no resistor é

$$V_{R_1} = R_1 I$$

$$V_{R_1} = 100 \times 0,00847 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t$$

$$V_{R_1} \approx 0,85 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t \, V.$$

O gráfico na forma polar é observado na Figura 69 e a simulação está representada na Figura 87.

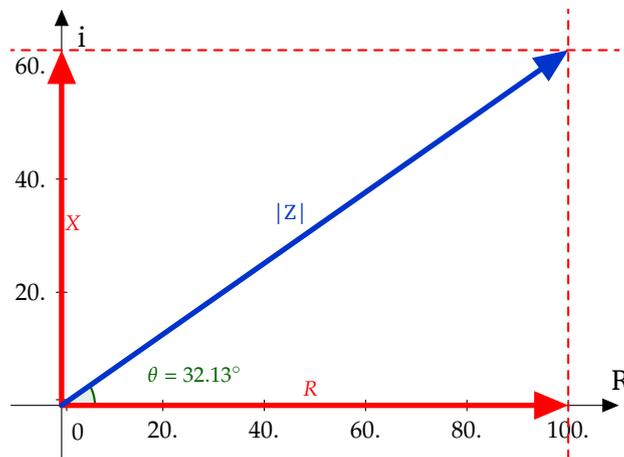
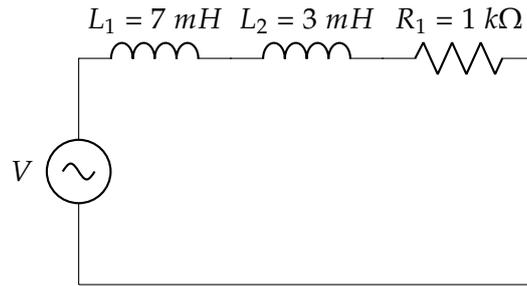


Figura 69: Impedância do Exercício 10-e na Forma Fasorial



Frequência da fonte 10 kHz e amplitude 10 V .

Figura 70: Circuito RL com Indutores em Série do Exercício 10-f

- f) Resolução do problema para o circuito da Figura 70: temos dois indutores em série com um resistor. A primeira associação em série (Indutores):

$$L_{\text{equivalente1}} = L_1 + L_2 = 7 + 3 = 10 \text{ mH}$$

encontrando a reatância indutiva, temos:

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3,14 \times 10000 \times 0,01 = 628 \Omega$$

a impedância é

$$Z = 1000 + 628i \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{1000^2 + 628^2} = 1180,84 \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{628}{1000}\right) = 32,13^\circ$$

$$Z = 1180,84 \angle 32,13^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 10000 \alpha t}{1180,84 \angle 32,12^\circ}$$

$$I \approx 0,00847 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t \text{ A ou } I \approx 8,47 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t \text{ mA}$$

a tensão no resistor é

$$V_{R_1} = R_1 I$$

$$V_{R_1} = 1000 \times 0,00847 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t$$

$$V_{R_1} \approx 8,47 \angle -32,12^\circ + 62800 \alpha t \text{ V}$$

a tensão no indutor L_1 é

$$V_{L_1} = X_L i I$$

lembrando que o número complexo i na forma fasorial é $1\angle 90^\circ$, temos

$$V_{L_1} = (2 \times 3,14 \times 10000 \times 0,007\angle 90^\circ) \times (0,00847\angle -32,12^\circ + 62800\alpha t)$$

$$V_{L_1} \approx 3,72\angle 57,87^\circ + 62800\alpha t$$

a tensão no indutor L_2 é

$$V_{L_2} = (2 \times 3,14 \times 10000 \times 0,003\angle 90^\circ) \times (0,00847\angle -32,12^\circ + 62800\alpha t)$$

$$V_{L_2} \approx 1,60\angle 57,87^\circ + 62800\alpha t$$

resumindo, temos os resultados

$$Z = 1180,84\angle 32,13^\circ \Omega$$

$$I \approx 8,47\angle -32,12^\circ + 62800\alpha t \text{ mA}$$

$$V_{R_1} \approx 8,47\angle -32,12^\circ + 62800\alpha t \text{ V}$$

$$V_{L_1} \approx 3,72\angle 57,87^\circ + 62800\alpha t$$

$$V_{L_2} \approx 1,60\angle 57,87^\circ + 62800\alpha t.$$

O gráfico da impedância na forma polar é observado na Figura 71 e a simulação dos resultados obtidos está representada na Figura 88.

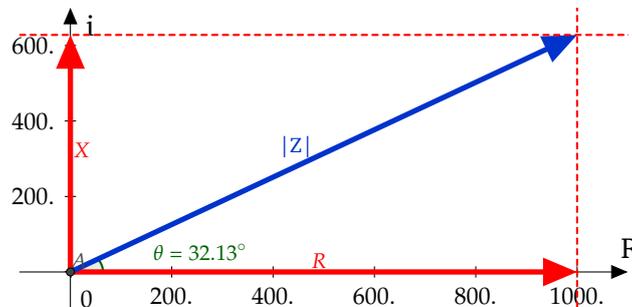
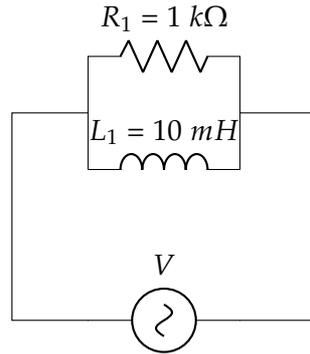


Figura 71: Impedância do Exercício 10-f na Forma Fasorial

- g) Resolução do problema para o circuito da Figura 72: desta vez temos um indutor em paralelo com um resistor. A reatância indutiva é

$$X_L = 2 \times \pi \times f \times L = 2 \times 3,14 \times 10000 \times 0,01 = 628 \Omega$$



Frequência da fonte 10 kHz e amplitude 10 V .

Figura 72: Circuito RL em Paralelo do Exercício 10-g

a impedância na forma cartesiana é calculada semelhante a forma de um resistor equivalente com resistores paralelos, ou seja

$$\frac{1}{Z_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{X_L} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{628i} = \frac{628i + 1000}{628000i}$$

$$Z_{\text{equivalente}} = \frac{628000i}{1000 + 628i}$$

$$Z_{\text{equivalente}} = \frac{628000i}{1000 + 628i} \times \frac{1000 - 628i}{1000 - 628i} = \frac{628000000i + 394384000}{1000000 + 394384}$$

$$Z_{\text{equivalente}} \approx 282,84 + 450,38i\ \Omega$$

Observação 4.0.2. Como o circuito é paralelo, significa que o resistor e o indutor terão o mesmo sinal da fonte, ou seja, do mesmo modo feito no Circuito RC em Paralelo é necessário colocar um resistor em série para poder analisar os resultados influenciados por esta associação.

Escolhendo um resistor de $R_2 = 100\ \Omega$, temos a configuração como na Figura 73. e o valor da impedância é

$$Z_{\text{equivalente}} \approx (100 + 282,84) + 450,38i \approx 382,84 + 450,38i\ \Omega$$

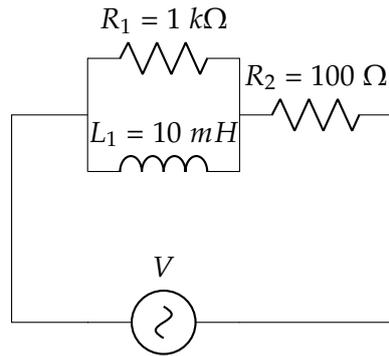
$$|Z| = \sqrt{382,84^2 + 450,38^2} = 591,11\ \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{450,38}{382,84}\right) = 49,63^\circ$$

$$Z = 591,11 \angle 49,63^\circ\ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 10000 \alpha t}{591,11 \angle 49,63^\circ}$$



Frequência da fonte 10 kHz e amplitude 10 V.

Figura 73: Segundo Circuito RL em Paralelo do Exercício 10-g

$$I \approx 0,01691 \angle -49,63^\circ + 62800 \alpha t \text{ A ou } I \approx 16,91 \angle -49,63^\circ + 62800 \alpha t \text{ mA}$$

a tensão no resistor R_2 é

$$V_{R_2} = R_2 I$$

$$V_{R_2} = 100 \times 0,0169 \angle -49,63^\circ + 62800 \alpha t$$

$$V_{R_2} \approx 1,69 \angle -49,63^\circ + 62800 \alpha t \text{ V.}$$

O gráfico na forma polar é observado na Figura 74 e a simulação utilizando o software Pspice está representada na Figura 89.

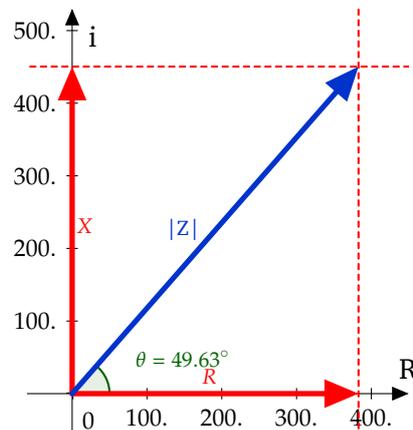
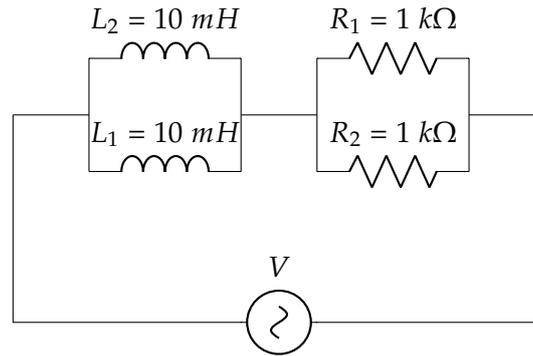


Figura 74: Impedância do Segundo Circuito do Exercício 10-g na Forma Fasorial



Frequência da fonte 10 kHz e amplitude 10 V.

Figura 75: Circuito RL em Série com Indutores e Resistores em Paralelos do Exercício 10-h

- h) Resolução do problema para o circuito da Figura 75: temos dois indutores paralelos em série com dois resistores paralelos. A a indutância da primeira associação em paralelo é

$$\frac{1}{L_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 5 \text{ mH}$$

a resistência da segunda associação em paralelo é

$$\frac{1}{R_{\text{equivalente1}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}, R_{\text{equivalente1}} = 500 \Omega$$

a reatância indutiva é

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3,14 \times 10000 \times 0,005 = 314 \Omega$$

a impedância é

$$\begin{aligned} Z &= 500 + 314i \Omega \\ |Z| &= \sqrt{314^2 + 500^2} \approx 590,42 \Omega \\ \theta &= \arctan\left(\frac{314}{500}\right) \approx 32,13^\circ \\ Z &\approx 590,42 \angle 32,13^\circ \Omega \end{aligned}$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 10000 \alpha t}{590,42 \angle 32,13^\circ}$$

$$I \approx 0,01694 \angle -32,13^\circ + 62800 \alpha t \text{ A ou } I \approx 16,94 \angle -32,13^\circ + 62800 \alpha t \text{ mA}$$

a tensão nos terminais dos resistores R_1 e R_2 pode ser obtida através do produto da corrente I pela resistência equivalente da associação dos resistores R_1 e R_2 , cuja foi obtida no exercício (10-e).

$$V_{R_{\text{equivalente}}} = I_{R_1} R_1$$

as correntes nos resistores R_1 e R_2 são iguais, ou seja,

$$I_{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{R_1} \approx (0,01694 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t) \frac{1000}{1000 + 1000} \approx 0,00847 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ A}$$

$$I_{R_1} \approx 8,47 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ mA}$$

a tensão nos resistores são

$$V_{R_{equivalente}} = I_{R_1} R_1$$

$$V_{R_{equivalente}} \approx (0,00847 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t) \times 1000$$

$$V_{R_{equivalente}} \approx 8,47 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ V}$$

as correntes nos indutores são obtidas de forma semelhante utilizando a reatância indutiva. A corrente no indutor L_1 é

$$I_{L_1} = I \frac{X_{L_2}}{X_{L_1} + X_{L_2}} = I \frac{\omega L_2 i}{\omega L_1 i + \omega L_2 i}$$

$$I_{L_1} = I \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

$$I_{L_1} \approx (0,00847 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t) \times \frac{0,001}{0,001 + 0,001}$$

$$I_{L_1} = 0,004235 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t$$

$$I_{L_1} \approx 4,24 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ mA}$$

que é o mesmo valor de I_{L_2} .

Em resumo, temos os resultados

$$Z \approx 590,42 \angle 32,13^\circ \Omega$$

$$I \approx 16,94 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ mA}$$

$$I_{R_1} = I_{R_2} \approx 8,47 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ mA}$$

$$V_{R_1} = V_{R_2} \approx 8,47 \angle -32,13^\circ + 62800\alpha t \text{ V.}$$

O gráfico na forma polar da impedância é observado na Figura 76 e a simulação é observada na Figura 90.

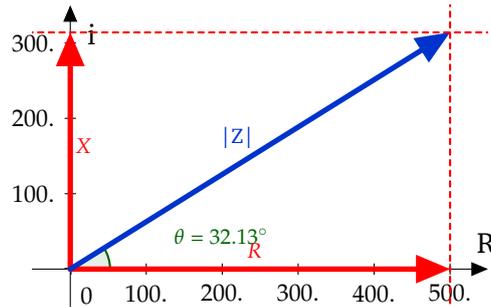
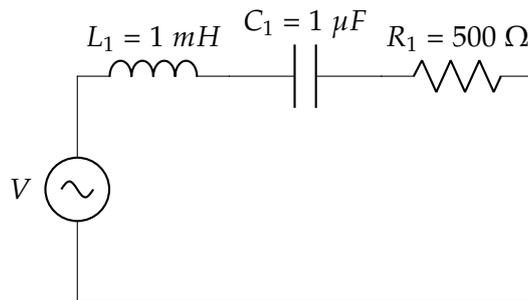


Figura 76: Impedância do Exercício 10-h na Forma Fasorial



Frequência da fonte 1 kHz e amplitude 10 V

Figura 77: Circuito RLC em Série do Exercício 10-i

- i) Resolução do problema para o circuito da Figura 77: temos um indutor em série com capacitor que também está em série com um resistor. A reatância indutiva é

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3,14 \times 1000 \times 0,001 = 6,28i \Omega$$

a reatância capacitiva é

$$X_C = -\frac{1}{2\pi fC} = -\frac{1}{2 \times 3,14 \times 1000 \times 0,000001} \approx -159,24i \Omega$$

a impedância é

$$Z = R_1 + (X_L + X_C)i = 500 + (6,28 - 159,24)i = 500 - 152,96i \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{500^2 + (-152,96)^2} \approx 522,87 \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-152,96}{500}\right) = -17,01^\circ$$

$$Z \approx 522,87 \angle -17,01^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 1000 \alpha t}{522,87 \angle -17,01^\circ}$$

$$I \approx 0,01913 \angle 17,01^\circ + 6280 \alpha t \text{ A ou } I \approx 19,13 \angle 17,01^\circ + 6280 \alpha t \text{ mA.}$$

O gráfico na forma polar é observado na Figura 78 e a simulação está representada na Figura 91.

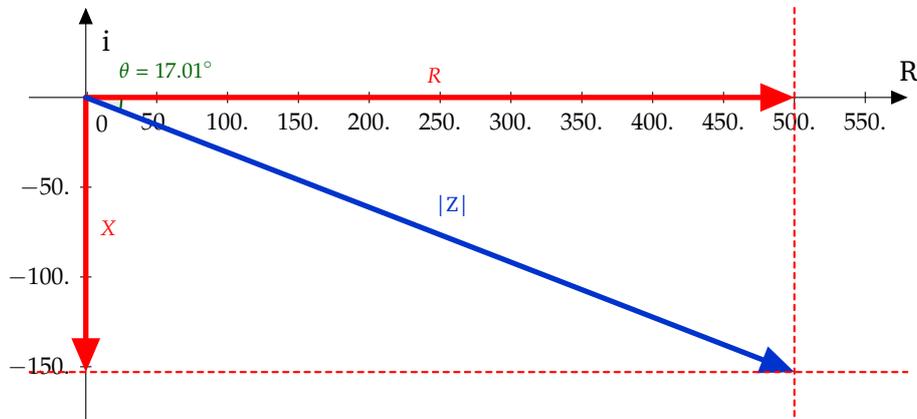
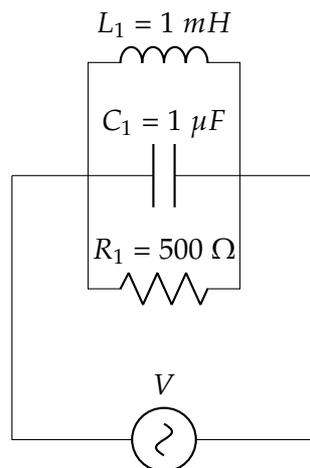


Figura 78: Impedância do Exercício 10-i na Forma Fasorial



Frequência da fonte 4 kHz e amplitude 10 V

Figura 79: Circuito RLC em Paralelo do Exercício 10-j

- j) Resolução do problema para o circuito da Figura 79: temos um indutor, um capacitor e um resistor paralelos entre eles. A reatância indutiva é

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3,14 \times 4000 \times 0,001 = 25,12 \text{ } \Omega$$

A reatância capacitiva é

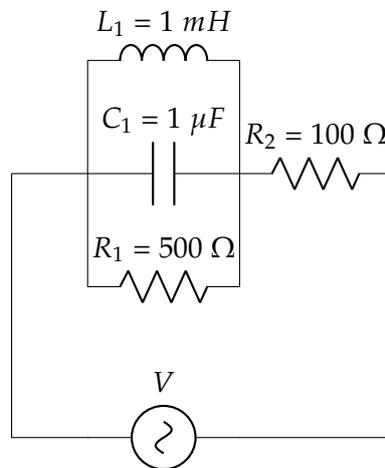
$$X_C = -\frac{1}{2\pi fC} = -\frac{1}{2 \times 3,14 \times 4000 \times 0,000001} \approx -39,81 \text{ } \Omega$$

a impedância é

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_{\text{equivalente}}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \approx \frac{1}{500} + \frac{1}{25,12i} - \frac{1}{39,81i} \\ \frac{1}{Z_{\text{equivalente}}} &\approx \frac{1000,03i + 19905 - 12560}{500013,6i} \approx \frac{1000,03i + 7345}{500013,6i} \\ Z_{\text{equivalente}} &\approx \frac{500013,6i}{7345 + 1000,03i} \\ Z_{\text{equivalente}} &\approx \frac{500013,6i}{7345 + 1000,03i} \times \frac{7345 - 1000,03i}{7345 - 1000,03i} \approx \frac{3672599892i + 500028600,41}{7345^2 - (1000,03i)^2} \\ Z_{\text{equivalente}} &\approx \frac{3672599892i + 500028600,41}{54949085,00} \\ Z_{\text{equivalente}} &\approx 9,10 + 66,84i \Omega.\end{aligned}$$

Observação 4.0.3. Como o circuito é paralelo, significa que o resistor, indutor e capacitor terão o mesmo sinal da fonte, ou seja, do mesmo modo feito no Circuito RC Paralelo é necessário colocar um resistor em série para poder analisar os resultados influenciados por esta associação.

Escolhendo um resistor de $R_2 = 100 \Omega$, temos a configuração como na Figura 80.



Frequência da fonte 1 kHz e amplitude 10 V.

Figura 80: Segundo Circuito RLC em Paralelo do do Exercício 10-j

A impedância é

$$Z_{\text{equivalente}} \approx (9,10 + 100) + 66,84i \approx 109,10 + 66,84i \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{109,10^2 + 66,84^2} \approx 127,95 \Omega$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{66,84}{109,10}\right) = 31,49^\circ$$

$$Z = 127,95 \angle 31,49^\circ \Omega$$

a corrente elétrica é

$$I = \frac{V}{Z} \approx \frac{10 \angle 2 \times 3,14 \times 4000 \alpha t}{127,95 \angle 31,49^\circ}$$

$$I \approx 0,0782 \angle -31,49^\circ + 25120 \alpha t \text{ A ou } I \approx 7,82 \angle -31,49^\circ + 25120 \alpha t \text{ mA}$$

tensão de saída em R_2 é

$$V_{R_2} = R_2 I$$

$$V_{R_2} = 100 \times 0,0782 \angle -31,49^\circ + 25120 \alpha t$$

$$V_{R_2} \approx 7,82 \angle -31,49^\circ + 25120 \alpha t \text{ V.}$$

O gráfico na forma polar é observado na Figura 81 e a simulação está representada na Figura 92.

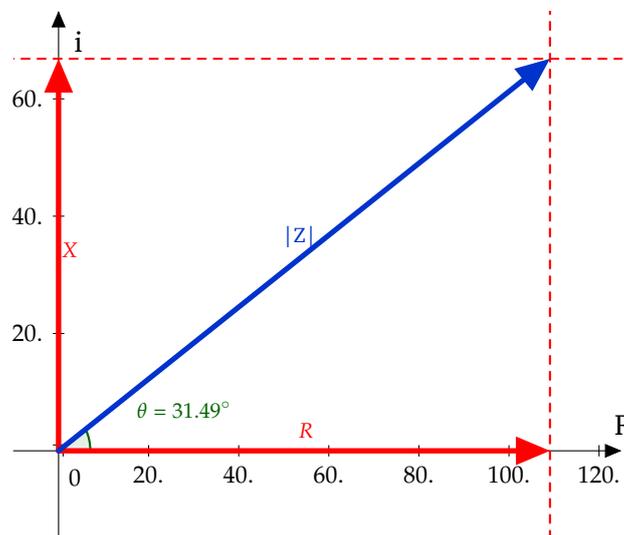


Figura 81: Impedância do Segundo Circuito do Exercício 10-j na Forma Fasorial

Observação 4.0.4. *Para as simulações dos circuitos do exercício 10 foi utilizado o software PSPICE. Elas estão ilustradas nas Figuras de números 82 a 91. Cada imagem está no tamanho original da simulação e rotacionada em 270 graus a fim de que sua qualidade não fosse prejudicada.*

4.1 APLICAÇÃO COM ALUNOS

O tema dos números complexos é estudado normalmente no final do segundo bimestre do ano letivo no 3º ano do Ensino Médio. No início da realização deste trabalho de conclusão houve a oportunidade de aplicar alguns conceitos relacionados ao tema proposto com os alunos (3º Ano Ensino Médio de 2016) da Escola Estadual Maria de Lourdes Vieira, localizado no bairro Parque Paulistano na cidade de São Paulo, cuja diretoria regional de ensino é a Leste 2.

No início houve uma introdução sobre as raízes negativas, suas aplicações nas equações do segundo grau e equações polinomiais. Em seguida, foi apresentado as grandezas elétricas como diferença de potencial, corrente e resistência elétrica, todavia eles já tinham um conhecimento prévio destes elementos, pois foram estudados em Física no mesmo semestre.

Foi apresentado a impedância, reatância capacitiva e indutiva, estes considerados conceitos novos aos estudantes do ensino médio. Estes conceitos foram relacionados com os números complexos e também utilizados fasores na impedância.

A introdução teórica foi apresentada na lousa. Os exercícios propostos foram realizados no caderno individualmente e corrigidos em seguida. Eles calcularam as impedâncias dos circuitos elétricos através de exercícios, como observados nas Figuras 93, 94, 95 e 96.

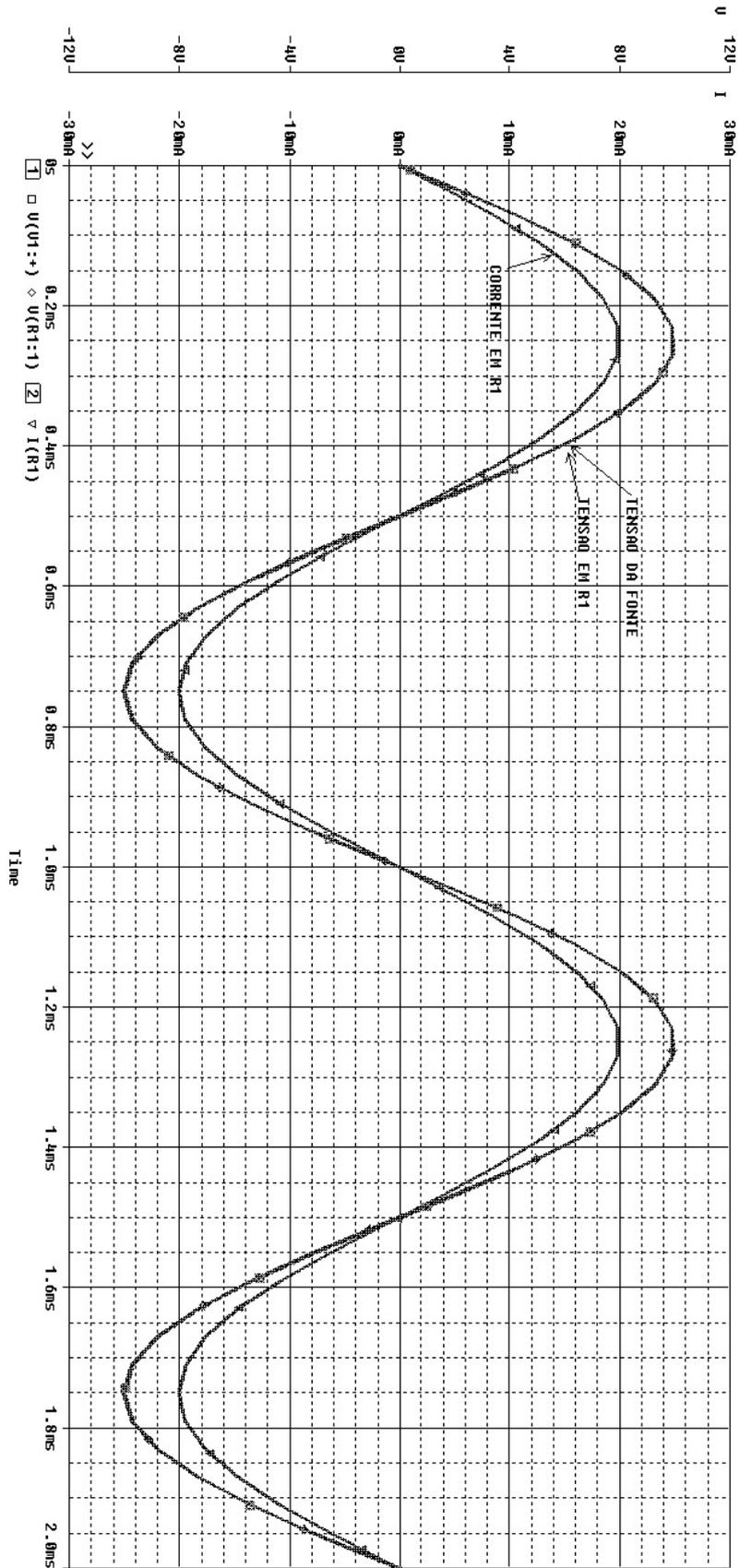


Figura 82: Simulação do Circuito do Exercício 10-a. As ondas de tensão da fonte, corrente do circuito e tensão no resistor estão em fase, como calculado anteriormente.

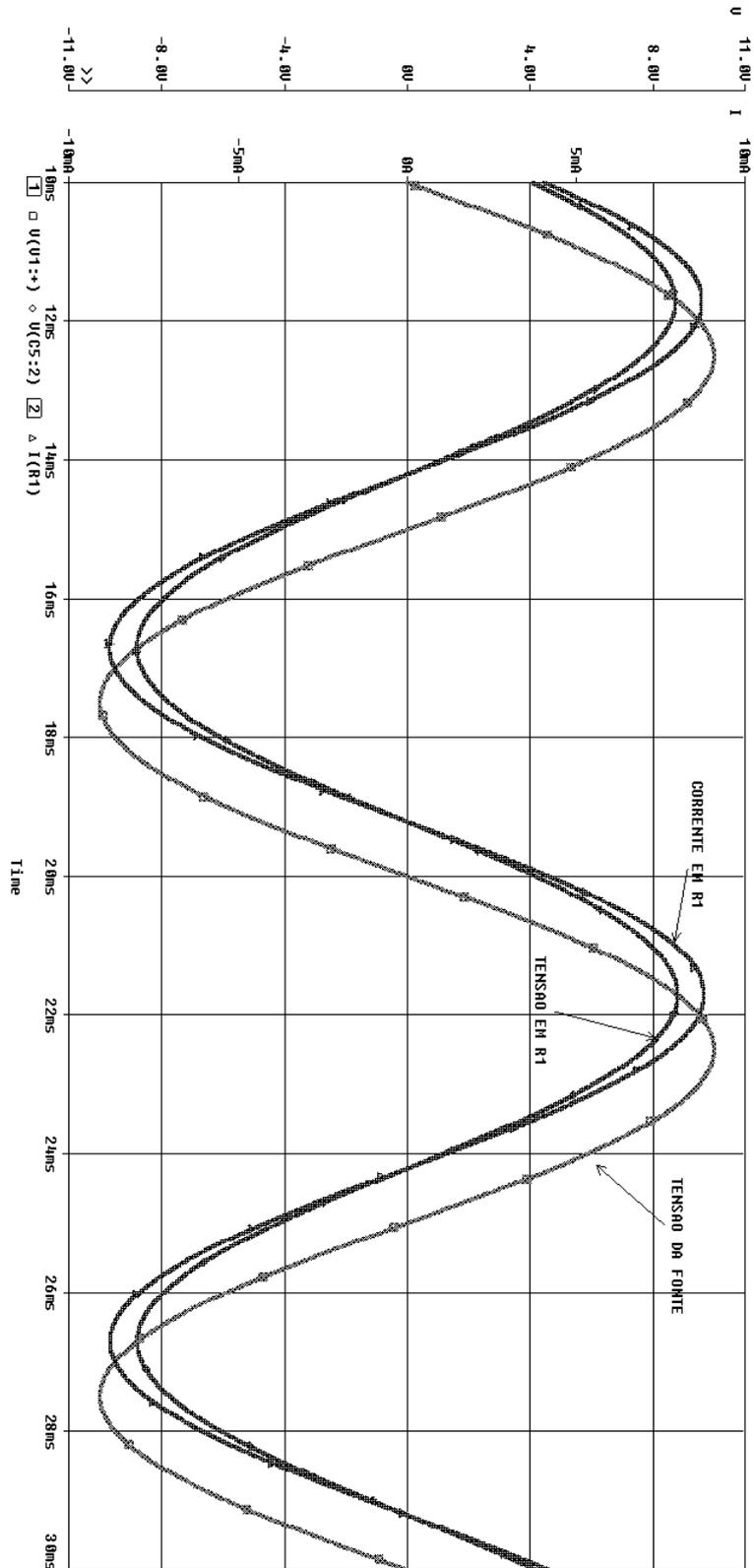


Figura 83: Simulação do Circuito do Exercício 10-b. As ondas de tensão e corrente no resistor estão em fase entre elas e ambas defasadas em $0,789\text{ ms}$, ou seja, estão $28,40^\circ$ “atrasadas” em relação à tensão da fonte. Ele corresponde ao ângulo de fase obtido no cálculo da impedância do circuito.

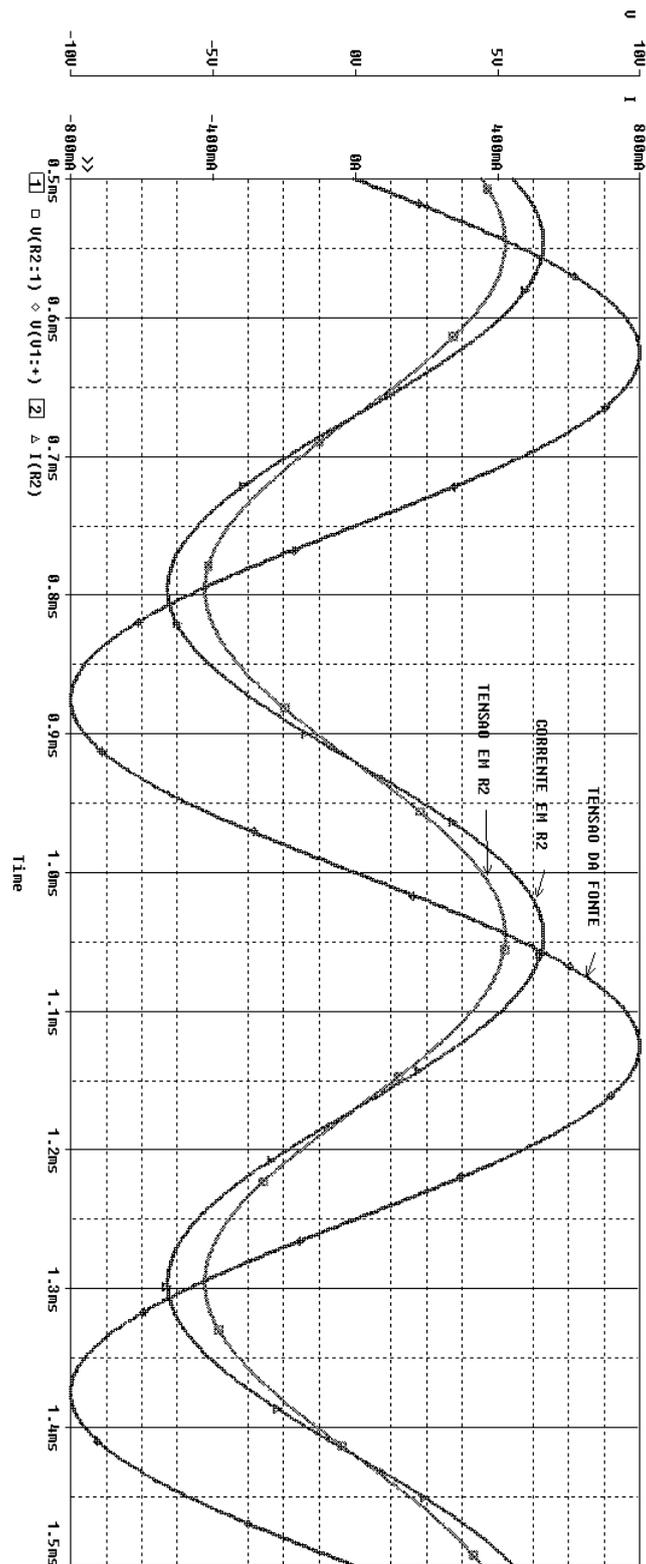


Figura 84: Simulação do Segundo Circuito do Exercício 10-c. A onda de tensão e corrente estão em fase e adiantadas em $0,079\text{ ms}$ em relação a tensão da fonte, ou seja, $56,88^\circ$. Este valor corresponde ao valor encontrado na impedância.

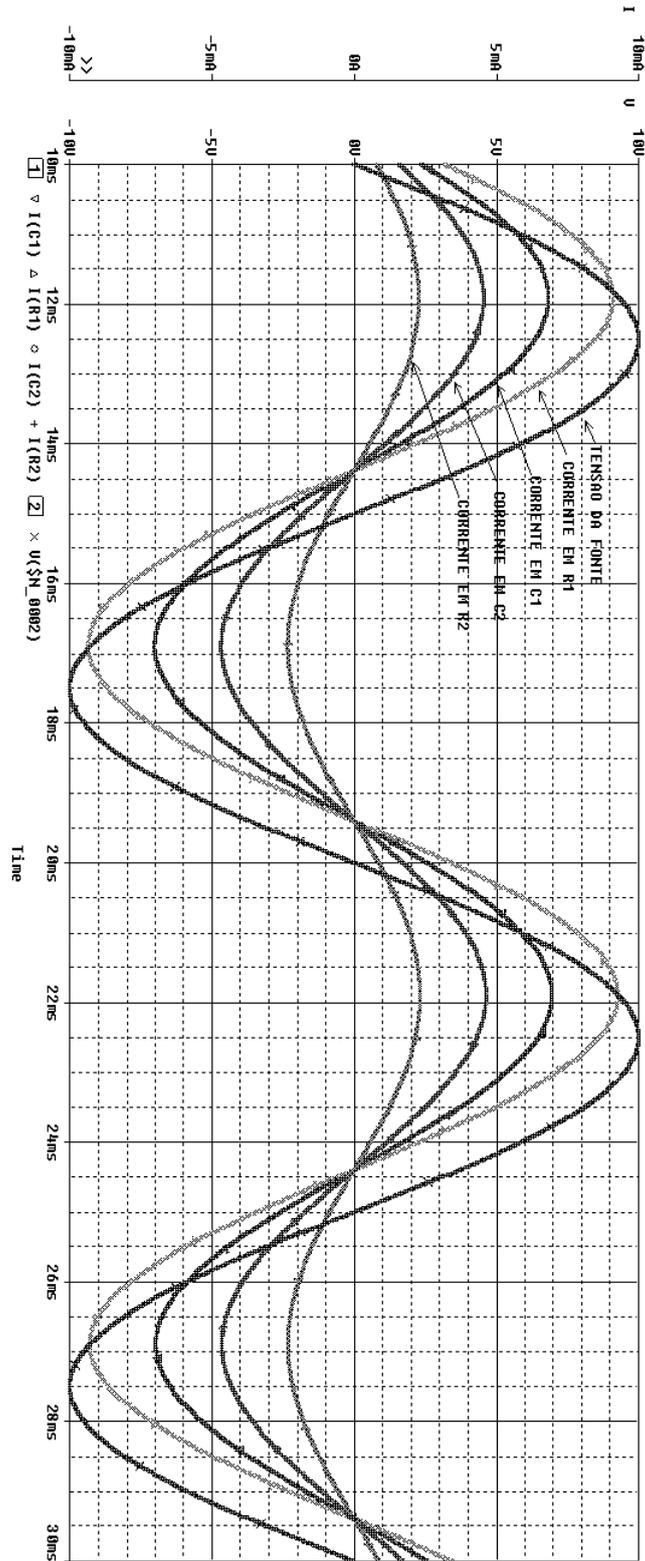


Figura 85: Simulação do Circuito do Exercício 10-d. As ondas de corrente estão em fase, mas atrasadas em relação a onda de tensão da fonte em $0,59\text{ ms}$, que corresponde aproximadamente a $-21,24^\circ$, próximo ao calculado.

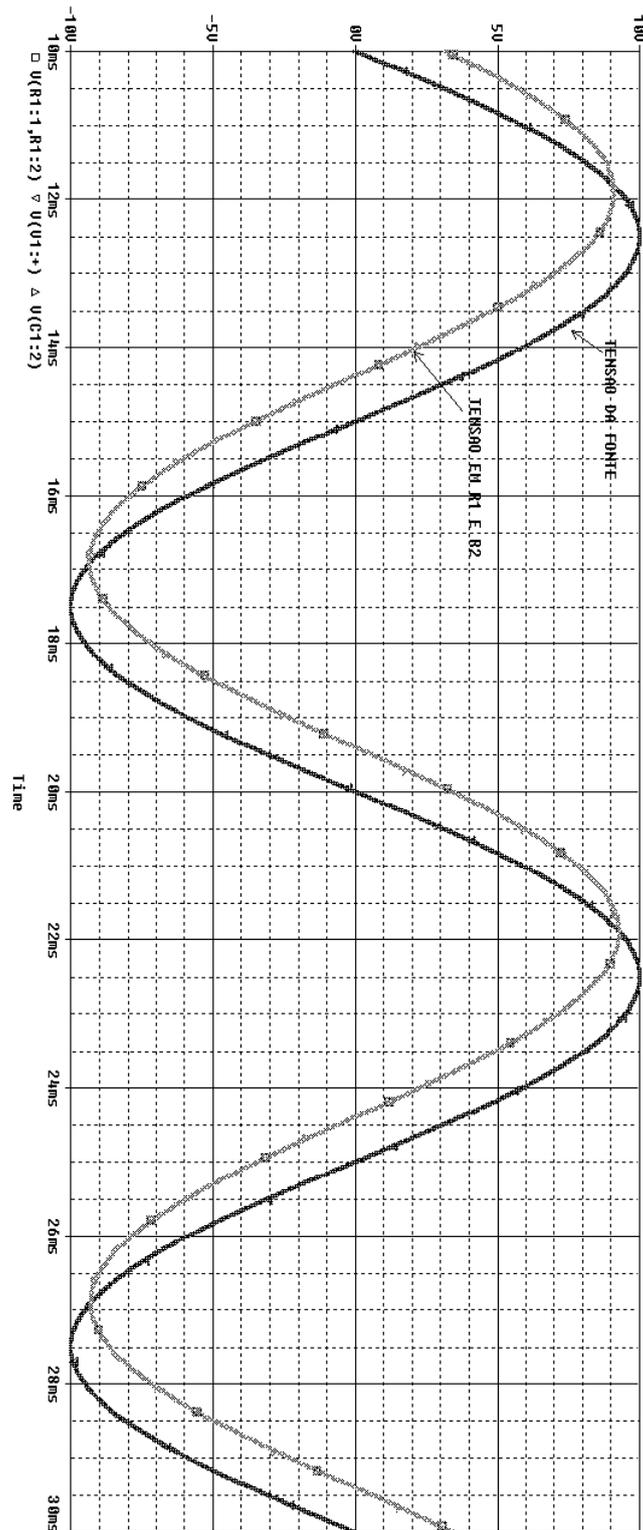


Figura 86: Segunda Simulação do Circuito do Exercício 10-d. A tensão nos resistores está adiantada em $0,59\text{ ms}$ e corresponde aproximadamente a $21,24^\circ$, próximo ao obtido no cálculo da impedância do circuito.

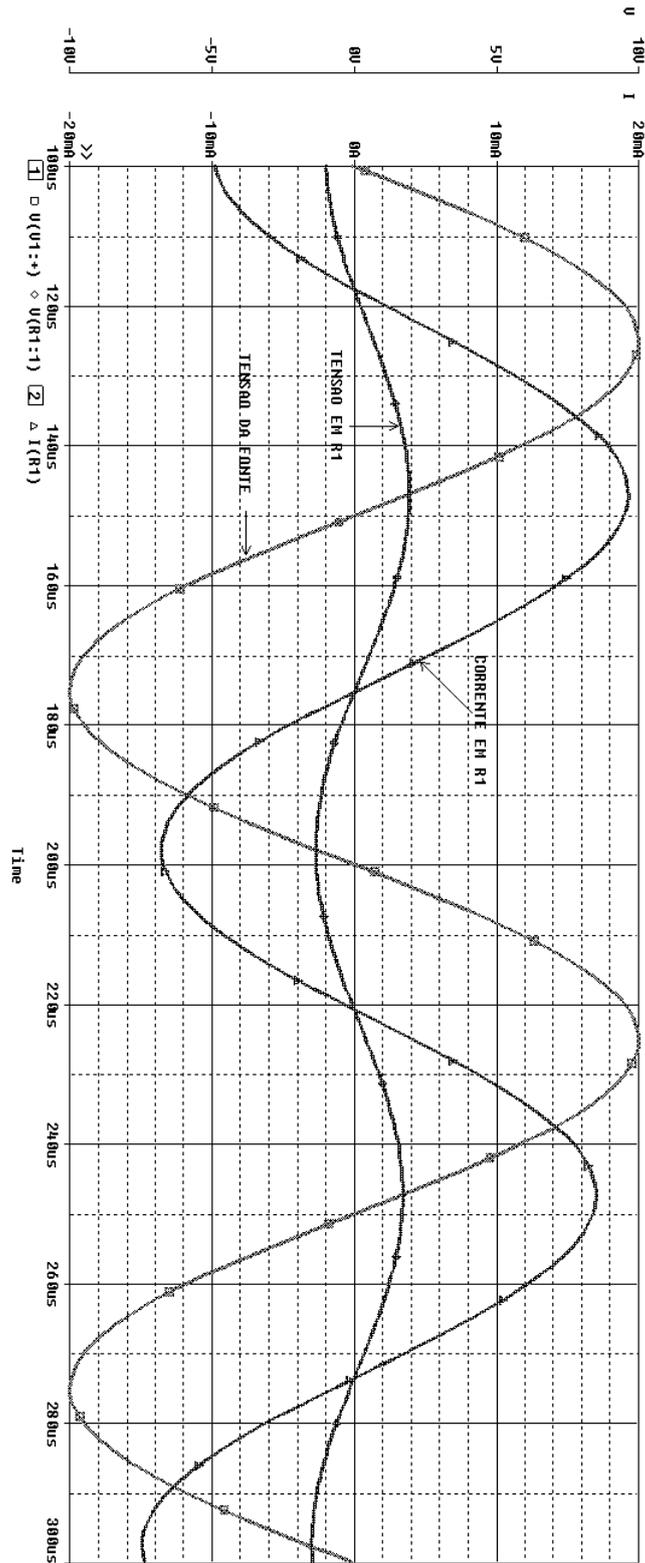


Figura 87: Simulação do Circuito do Exercício 10-e. As ondas de tensão no resistor estão em fase, mas atrasadas em $9 \mu s$ e corresponde aproximadamente a $-32,40^\circ$, próximo ao obtido no cálculo da impedância do circuito.

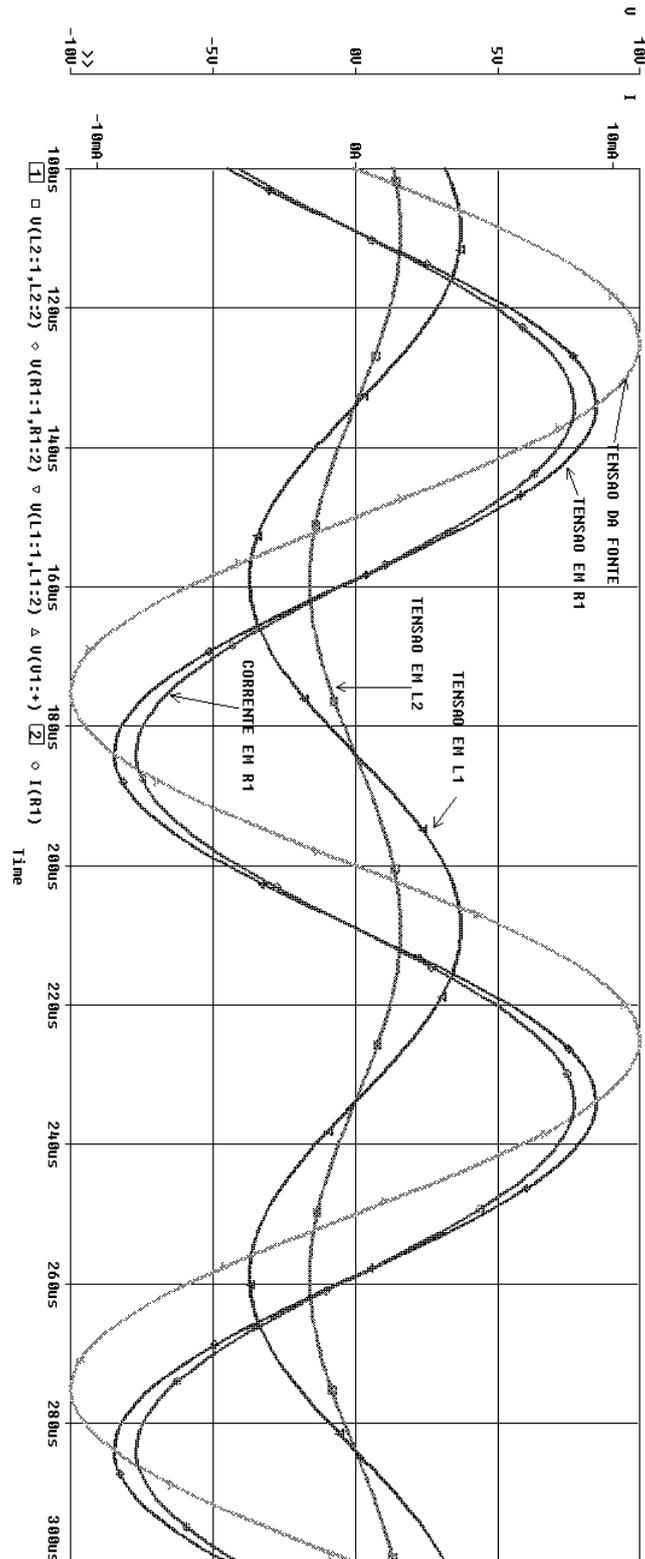


Figura 88: Simulação do Circuito do Exercício 10-f. As ondas de tensão do resistor e da corrente estão em fase e ambas atrasadas em $9,22 \mu\text{s}$, aproximadamente $-33,18^\circ$ em relação ao sinal de tensão da fonte. As ondas de tensão nos indutores estão em fase, mas ambas adiantadas em $16 \mu\text{s}$, ou seja, $57,6^\circ$ em relação ao sinal da fonte. Valores próximos aos obtidos nos cálculos anteriores.

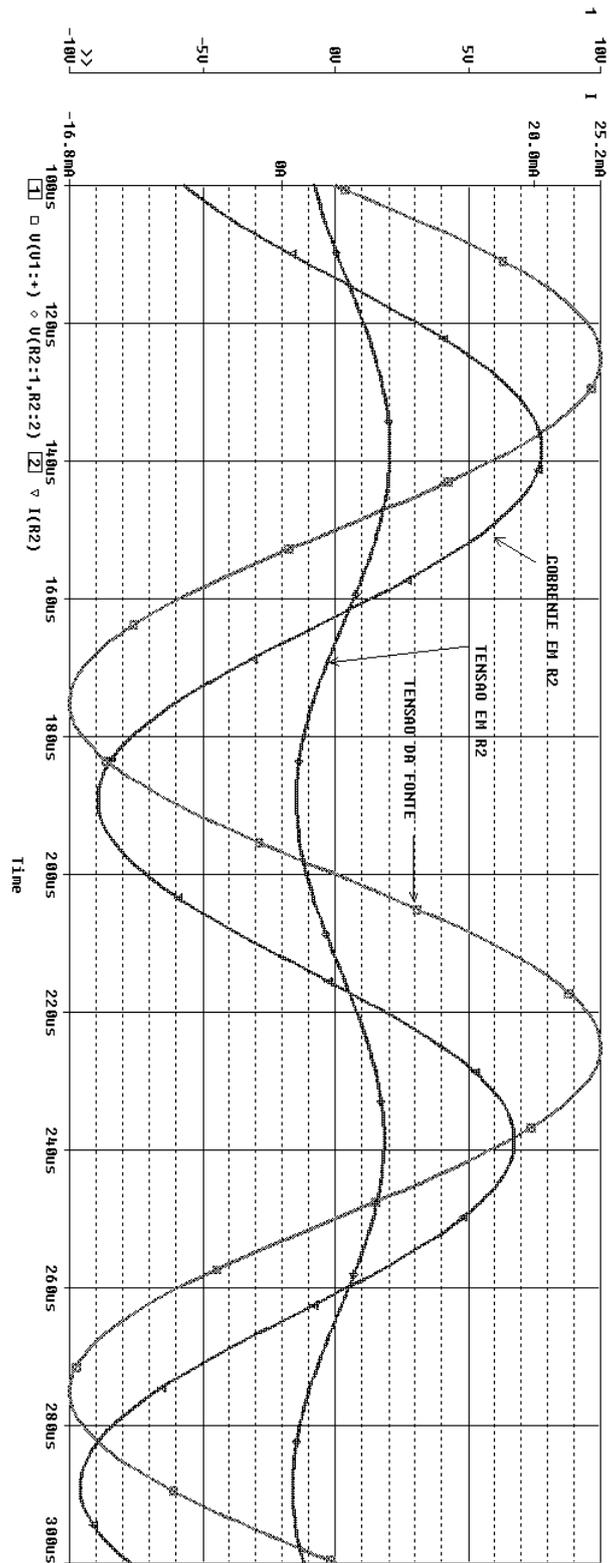


Figura 89: Simulação do Segundo Circuito do Exercício 10-g. As ondas de tensão e corrente do resistor R_2 estão em fase, mas atrasadas em $14,257 \mu\text{s}$ em relação ao sinal da fonte, que corresponde aproximadamente a $-51,33^\circ$.

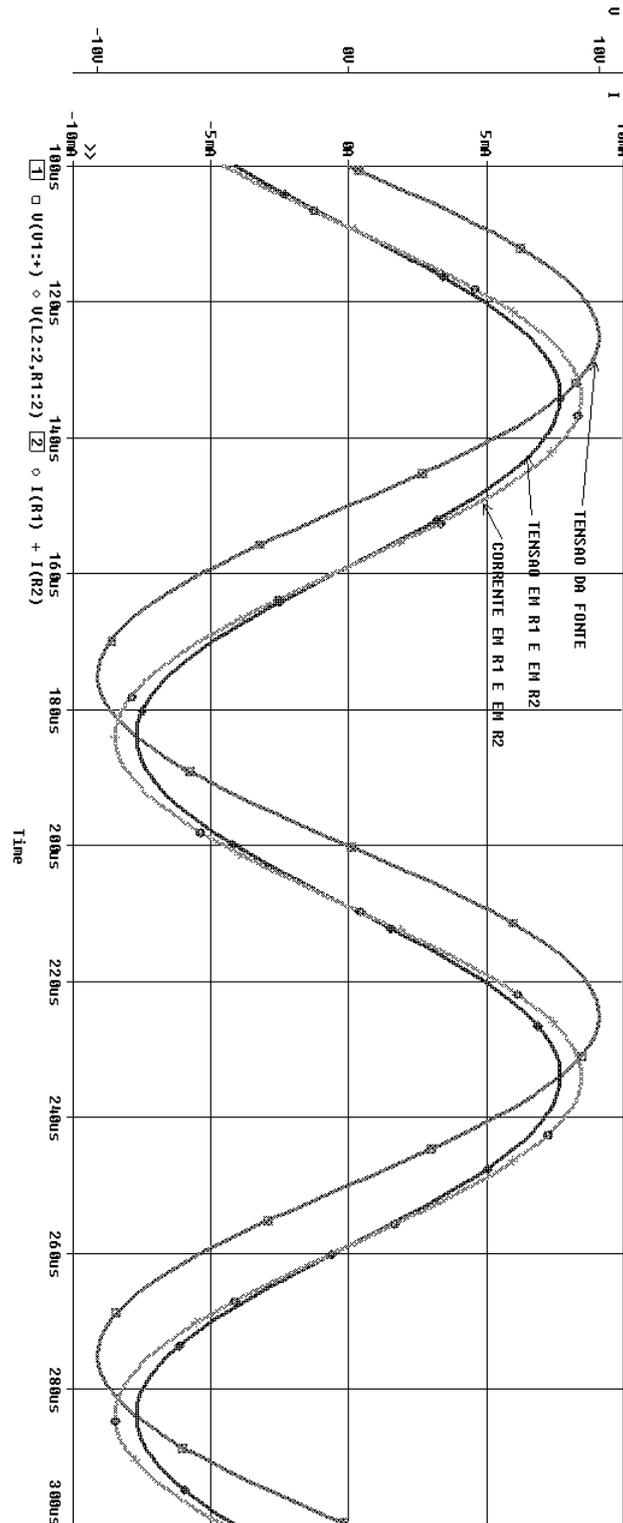


Figura 90: Simulação do Circuito do Exercício 10-h. As ondas de tensão e corrente nos resistores R_1 e R_2 estão em fase, mas ambas atrasadas em $9 \mu s$ em relação ao sinal da fonte e corresponde a aproximadamente $-32,40^\circ$.

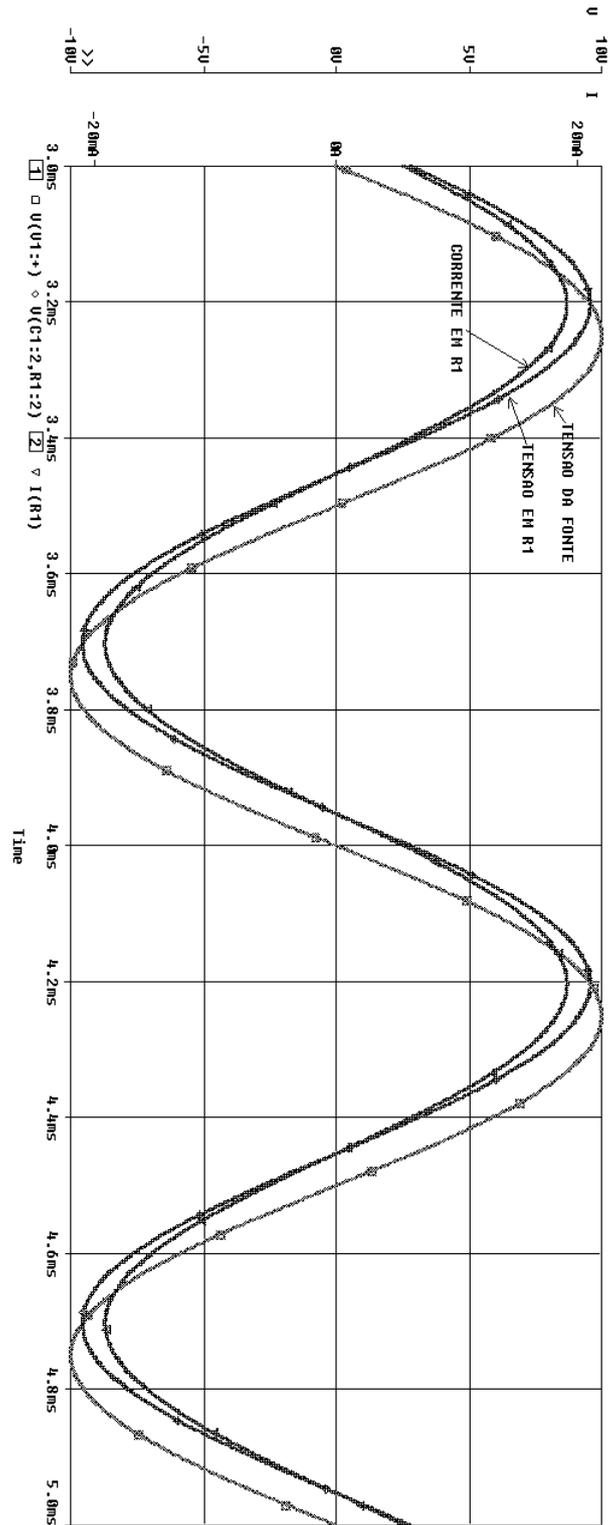


Figura 91: Simulação do Circuito do Exercício 10-i. As ondas de tensão e corrente estão em fase e ambas adiantadas de $0,049\text{ ms}$ em relação ao sinal da fonte e corresponde a aproximadamente $17,64^\circ$, próximo ao valor calculado.

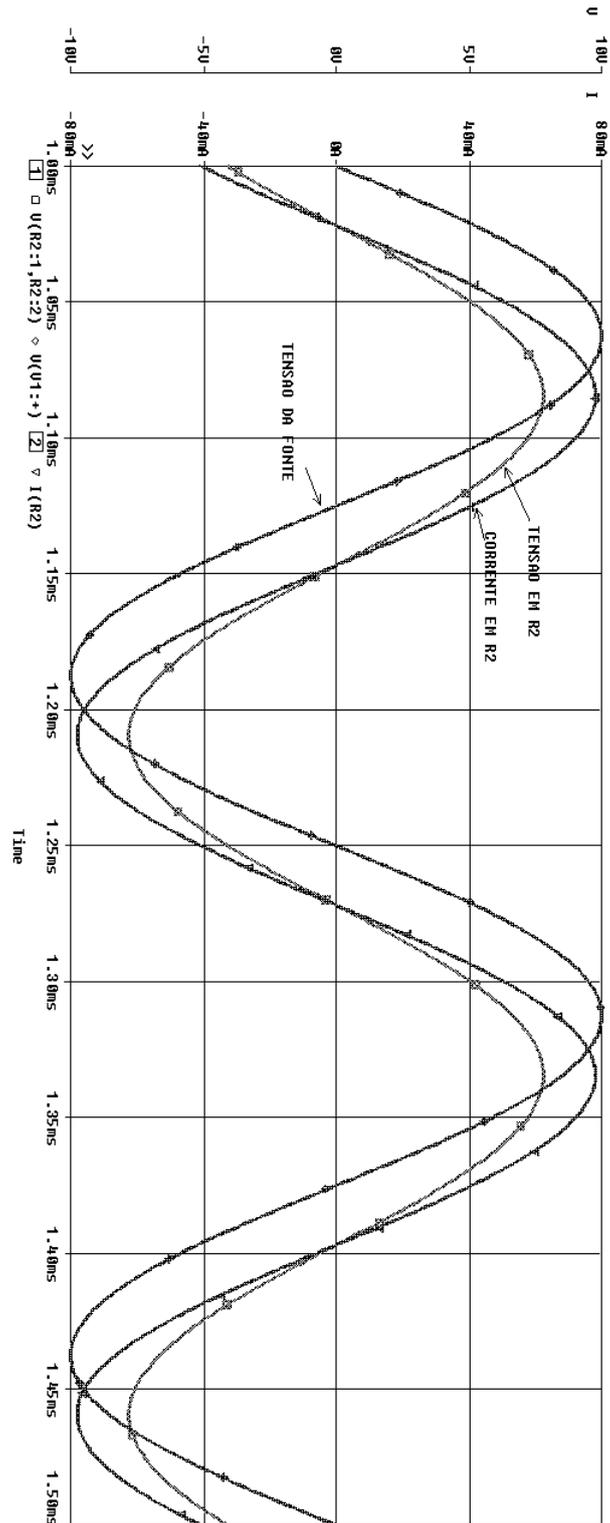


Figura 92: Simulação do Segundo Circuito do Exercício 10-j. As ondas de tensão e corrente em R_2 estão em fase e ambas atrasadas de $24,169 \mu\text{s}$ em relação ao sinal da fonte e corresponde a aproximadamente $-34,80^\circ$, próximo ao valor calculado.

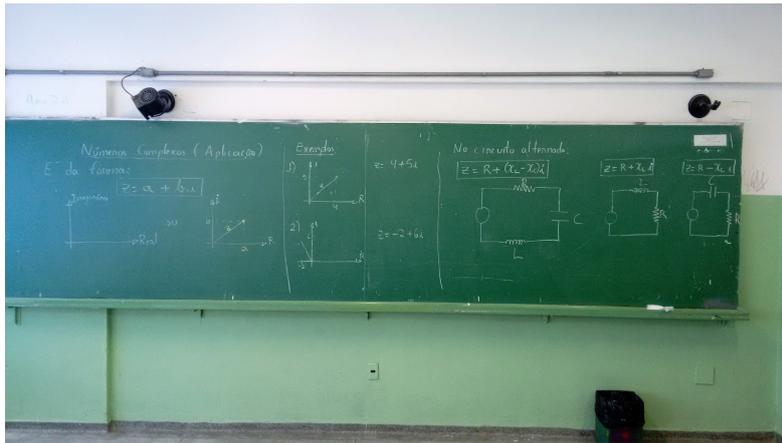


Figura 93: Resumo da Aula Aplicada sobre Números Complexos

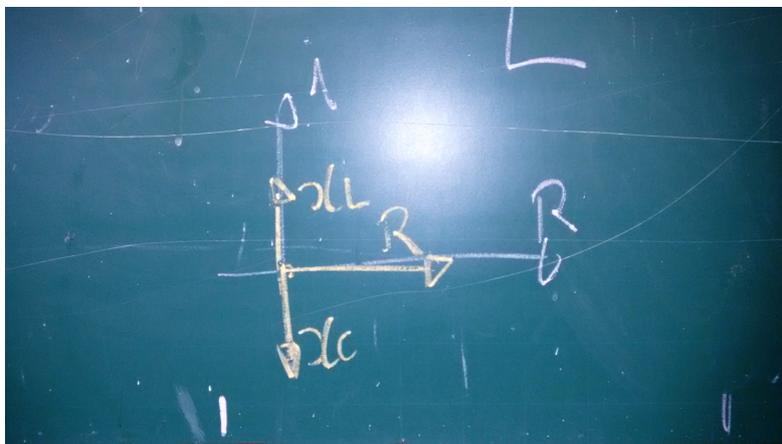


Figura 94: Introdução sobre Gráfico de Fasores

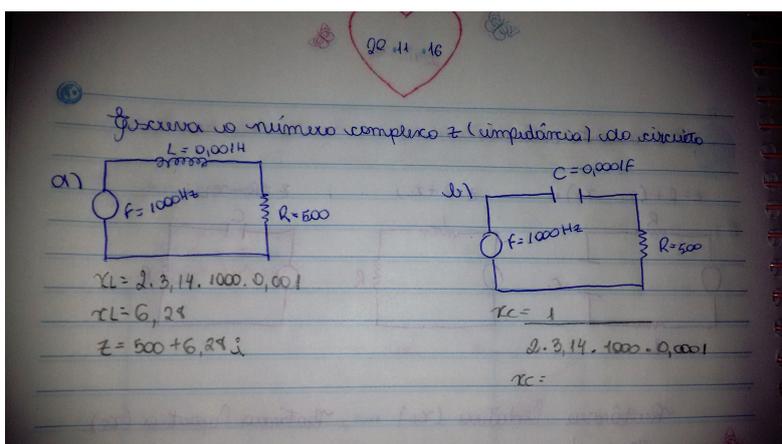


Figura 95: Exercícios Realizados pelo Aluno

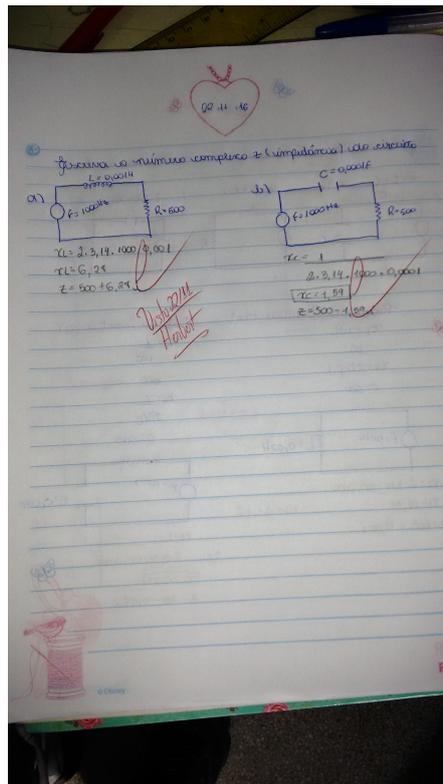


Figura 96: Exercícios Realizados pelo Aluno

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho proposto colaborou para que os alunos do 3º Ano do Ensino Médio da Escola Estadual Maria de Lourdes Vieira, percebessem uma aplicação dos números complexos indo além do conceito de “radiciação de números negativos” ou “encontrar raízes de polinômios”. A inclusão de fasores ajudou a compreensão sobre o efeito da defasagem causado pelas reatâncias, ou seja, a parte complexa do número complexo, além disto, ajudou na compreensão de temas estudados em Física do Ensino Médio, como por exemplo, a Lei de Ohm e funções trigonométricas estudados em Matemática.

Como a escola não possui laboratório, apresentei a simulação dos circuitos RC, RL e RLC através de um computador de uso pessoal, mas projetando a imagem através do aparelho retroprojetor. Perguntei aos alunos o que eles acharam, e disseram que acharam o tema interessante porque conseguiram observar os cálculos e o resultado na prática mesmo sendo através de um simulador.

Achei interessante o fato de alguns alunos assemelharem o uso do diagrama fasorial com vetores, pois este tema também é de difícil compreensão para muitos alunos do ensino médio.

Este trabalho também colaborou para que eu me aprofundasse sobre os números complexos, como as operações com números fasoriais que não é comum no Ensino Médio, mas é possível aplicá-los com o uso de circuitos elétricos. Além disto, aprendi conceitos como impedância com parte complexa, cujo tema conhecia, mas não compreendia.

Através desta pesquisa, sinto-me motivado a continuar aplicando estas atividades nos anos seguintes, pois percebi que uma teoria aliado a prática enriquece o aprendizado do aluno, ajudando-o a conhecer algumas profissões, por exemplo: Engenharia Elétrica.

O curso de PROFMAT foi muito importante na minha evolução didática e teórica. Pretendo continuar estudando, pois a conclusão deste curso me motivou nas realizações de atividades com os alunos, e ajudou a melhorar a minha prática de ensino.



IMPEDÂNCIA NOS CIRCUITOS ELÉTRICOS

Vamos determinar neste adendo a relação entre a tensão aplicada por um gerador elétrico que fornece uma diferença de potencial senoidal num circuito contendo resistências, indutores e capacitores, no regime permanente. Vamos começar com um circuito em série contendo um gerador, um resistor, um indutor e um capacitor. Esses três últimos elementos, denominados passivos, oferecem resistência à passagem da corrente elétrica. Esta resistência é chamada impedância. Numa segunda seção vamos determinar a impedância de dois elementos ligados em série. Numa terceira seção, vamos determinar a impedância de dois elementos ligados em série. O que chamamos genericamente como elementos podem ser combinações de resistências, indutores e capacitores.

A.1 CIRCUITO RLC

Quando nos deparamos com uma resistência conectada a um **circuito elétrico em série** percorrido por uma **corrente elétrica** I , a queda de potencial medida em suas extremidades é igual a $V_R = RI$, onde R é uma constante denominada **resistência**. Se houver um indutor conectado ao circuito, a queda de potencial nas suas extremidades é igual a $V_L = L(dI/dt)$, onde L é uma constante chamada **indutância** e dI/dt é a derivada da corrente elétrica em relação ao tempo. Se houver um capacitor conectado ao circuito, a queda de potencial medida nas extremidades do capacitor é $V_C = Q/C$, onde C é uma constante chamada **capacitância** e Q é a **carga elétrica** acumulada nas placas do capacitor. Lembramos que a carga Q no capacitor e a corrente I no circuito estão ligadas por

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (\text{A.1})$$

Com isto, a relação da queda de potencial no indutor, no resistor e no capacitor são

$$V_L = L \frac{d^2 Q}{dt^2}, \quad V_R = R \frac{dQ}{dt}, \quad V_C = \frac{1}{C} Q. \quad (\text{A.2})$$

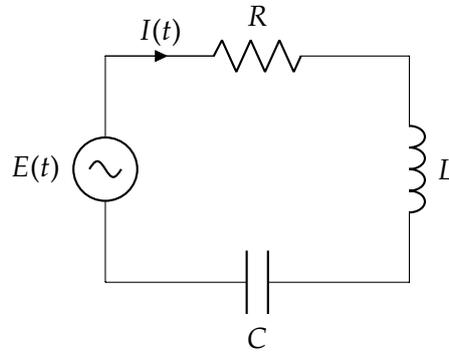


Figura 97: Circuito RLC em série.

Consideremos um circuito elétrico RLC em série (Veja a Figura 97), no qual se conectou um **gerador elétrico** que fornece um potencial $E(t)$ ao circuito. A **Lei de Kirchoff** estabelece que a soma das quedas de potencial em cada elemento do circuito é igual ao potencial fornecido pelo gerador

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t). \quad (\text{A.3})$$

Para determinar a solução desta equação diferencial, precisamos determinar a solução geral da equação homogênea

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0, \quad (\text{A.4})$$

para, em seguida, procurar uma solução particular da equação não homogênea (A.3). Toda solução de (A.4) cai exponencialmente para zero, graças à resistência R que dissipa a energia elétrica transformando-a em calor. Como na equação homogênea não há um gerador para sustentar a corrente, esta cai rapidamente para zero, na verdade, exponencialmente, independentemente da carga inicial do capacitor. A solução geral da equação homogênea (A.4) é chamada de transiente, uma vez que cai rapidamente a zero. Esta é a solução que impõe uma sobrecarga ao circuito e, por vezes, causa a queima de algum dos seus componentes.

Embora importante, a solução transiente é irrelevante para o funcionamento posterior do circuito, quando a parte transiente se torna muito pequena. A partir de então, o

circuito entra em regime permanente de funcionamento onde, quem comanda, é uma solução particular de (A.3). Vamos analisar esta equação quando

$$E(t) = V_m \cos(\omega t), \quad (\text{A.5})$$

onde V_m é a diferença de potencial máxima fornecida pela fonte e

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{A.6})$$

é a **frequência** da diferença de potencial fornecida pela fonte, o gerador de energia. Esta não é uma hipótese restritiva uma vez que qualquer fonte periódica pode ser decomposta pela sua série de Fourier em senos e cossenos. A corrente alternada que recebemos em casa é periódica e obedece à equação (A.5). Neste adendo utilizaremos o radiano nos argumentos das funções trigonométricas, ao contrário dos capítulos anteriores, quando usamos graus.

Para determinar uma solução particular da equação (A.3), é conveniente lembrar que $E(t) = V_m \cos(\omega t)$ é a parte real do número complexo

$$V(t) = V_m \cos(\omega t) + iV_m \sin(\omega t) = V_m \text{cis}(\omega t) = V_m \angle(\omega t), \quad (\text{A.7})$$

onde cis é a abreviatura de cosseno mais i seno. Usando a fórmula de Euler,

$$V(t) = V_m \exp(i\omega t). \quad (\text{A.8})$$

Vamos determinar uma solução particular da equação diferencial

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t) = V_m \exp(i\omega t) \quad (\text{A.9})$$

sem nos esquecer de que a grandeza física de interesse é a parte real da sua solução. Uma solução particular de (A.9) é dada por

$$Q(t) = Q_m \exp(i\omega t). \quad (\text{A.10})$$

Derivando-a duas vezes

$$\frac{dQ}{dt}(t) = Q_m(i\omega) \exp(i\omega t), \quad \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) = -Q_m \omega^2 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.11})$$

e substituindo-a em (A.9) obtemos

$$\left(Li^2 \omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C} \right) Q_m \exp(i\omega t) = V_m \exp(i\omega t). \quad (\text{A.12})$$

Como $Q(t) = Q_m \exp(i\omega t)$ e $V(t) = V_m \exp(i\omega t)$ obtemos

$$\left(Li^2 \omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C} \right) Q(t) = V(t). \quad (\text{A.13})$$

Considerando que I é a derivada da carga Q em relação ao tempo t ,

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{dQ}{dt}(t) = \frac{1}{Li^2\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}} \frac{dV}{dt}(t) \\ &= \frac{i\omega}{Li^2\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}} V_m \exp(i\omega t) \\ &= \frac{i\omega}{Li^2\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}} V(t) \end{aligned}$$

ou, dividindo o numerador e o denominador por $i\omega$,

$$I(t) = \frac{1}{Li\omega + R + \frac{1}{Ci\omega}} V(t) = \frac{V(t)}{Z}, \quad (\text{A.14})$$

onde

$$Z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = R + iX. \quad (\text{A.15})$$

é um número complexo denominado **impedância** do circuito. O número real

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} = X_L - X_C \quad (\text{A.16})$$

é a **reatância** do circuito, sendo

$$X_L = L\omega \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{C\omega} \quad (\text{A.17})$$

as reatâncias **indutivas e capacitivas**, respectivamente.

Foi a fórmula (A.14)

$$I(t) = \frac{V(t)}{Z} \quad (\text{A.18})$$

que proporcionou o ensinamento de eletrotécnica aos alunos do segundo grau, uma vez que utiliza apenas o conceito de número complexo. A equação (A.18) é denominada de **Lei de Ohm** e escrita comumente na forma

$$V = Z I, \quad (\text{A.19})$$

quando omitimos os argumentos das funções V e I . Conhecidos V e Z , calculamos I , que é uma função complexa. Não podemos nos esquecer que a corrente física é a parte real de I .

O argumento principal θ da impedância Z pertence ao intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ e é dado por

$$\theta = \arctan \left(\frac{X}{R} \right). \quad (\text{A.20})$$

Ao escrever o Z na forma polar,

$$Z = |Z| \angle \theta, \quad (\text{A.21})$$

obtemos

$$I(t) = \frac{V_m}{|Z|} \angle(\omega t - \theta). \quad (\text{A.22})$$

Quando $X > 0$, o θ será positivo e $-\theta$ será negativo. Neste caso se diz que a corrente está θ radianos atrasada em relação à tensão. Quando $X < 0$, o θ será negativo e $-\theta$ será positivo. Neste caso se diz que a corrente está θ radianos à frente da tensão. O ângulo θ é chamado de **fasor** pois ele indica o quanto a corrente está defasada em relação à tensão.

A.2 ELEMENTOS LIGADOS EM SÉRIE

Vamos considerar elementos passivos ligados em série com impedâncias Z_1, Z_2, \dots, Z_n e determinar a impedância de um elemento equivalente que poderia substituí-los no circuito. Veja a Figura 98.

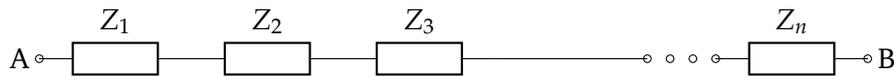


Figura 98: Impedâncias em Série

A corrente I percorre os elementos Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Vamos denotar por V a diferença de potencial entre pontos A e B . Sendo V_{Z_1} a diferença de potencial nas extremidades de Z_1 , V_{Z_2} a diferença de potencial nas extremidades de Z_2 e sucessivamente V_{Z_n} a diferença de potencial nas extremidades de Z_n ,

A tensão V da fonte é igual a soma de todas as tensões das impedâncias

$$V = V_{Z_1} + V_{Z_2} + V_{Z_3} + \dots + V_{Z_n}$$

e $V = ZI$, temos

$$ZI = Z_1I + Z_2I + Z_3I + \dots + Z_nI$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n.$$

Esta é a fórmula que nos permite calcular a impedância Z do elemento equivalente, usando as impedâncias individuais de cada elemento.

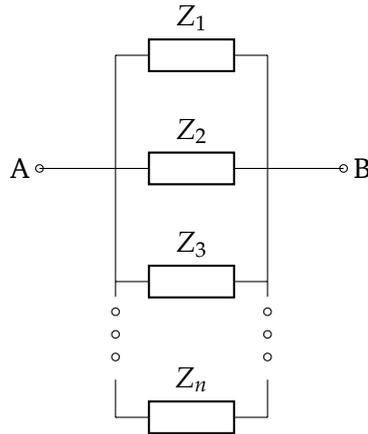


Figura 99: Impedâncias em Paralelo

A.3 ELEMENTOS LIGADOS EM PARALELO

Nesta seção vamos considerar os elementos passivos ligados em paralelo com impedâncias Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Vamos denominar por Z a impedância do elemento equivalente a ambos. Agora, os elementos estão submetidos à mesma diferença de potencial V , que é a diferença de potencial entre os pontos A e B . Veja a Figura 99.

O elemento Z_1 é percorrido por uma corrente I_{Z_1} , o elemento Z_2 é percorrido por uma corrente I_{Z_2} e assim sucessivamente. A soma das correntes individuais das impedâncias é igual a corrente I do circuito

$$I = I_{Z_1} + I_{Z_2} + I_{Z_3} + \dots + I_{Z_n}$$

$$\frac{V}{Z} = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \frac{V}{Z_3} + \dots + \frac{V}{Z_n}$$

temos

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Dois elementos ligados em paralelo

Nesta seção vamos considerar dois elementos passivos do circuito ligados em paralelo, veja a Figura 100. O elemento Z_1 é percorrido por uma corrente I_{Z_1} e o elemento Z_2 é percorrido por uma corrente I_{Z_2} . A expressão para impedância equivalente é

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

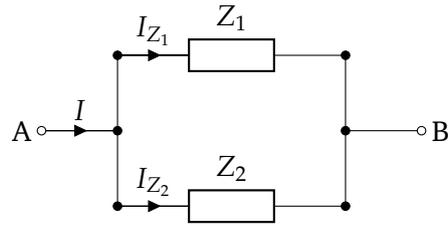


Figura 100: Duas Impedâncias em Paralelo.

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

temos

$$V = IZ$$

$$V = I \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

as impedâncias estão submetidas a mesma tensão $V = V_{Z_1} = V_{Z_2}$, temos

$$V = I_{Z_1} Z_1$$

$$I \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = I_{Z_1} Z_1$$

a corrente na impedância Z_1 é

$$I_{Z_1} = I \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Do mesmo modo encontramos a corrente em Z_2

$$I_{Z_2} = I \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA, Victor; **Números Complexos**: São Paulo, Livraria Nobel S. A.
- [2] Decon-FEEC-Unicamp, **Circuitos Elétricos**: <http://www.decom.fee.unicamp.br/bal-dini/EA513/Cap10.pdf>.
- [3] CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego; **Matemática 3**: São Paulo, Quadrante.
- [4] Ebah, **Manual do Circuitikz**: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAhCx4AJ/manual-circuitikz>.
- [5] Youtube, **CIRCUITO EN AC TEORICO**: <https://www.youtube.com/watch?v=JqsH5ymWxR0>.
- [6] Youtube, **Impedância - O que é e como calcular!**: <https://www.youtube.com/watch?v=fCH6HMyd8kU>.
- [7] Youtube, **Gerando código TikZ para GeoGebra em código Latex**: <https://www.youtube.com/watch?v=beUSEBoci5c>