André Luis Silvério Marchesini

Probabilidade e Cadeias de Markov: uma proposta para os Ensinos Fundamental e Médio

Santo André, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ANDRÉ LUIS SILVÉRIO MARCHESINI

PROBABILIDADE E CADEIAS DE MARKOV: UMA PROPOSTA PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Orientador: Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉ LUIS SILVÉRIO MARCHESINI,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANDRÉ RICARDO OLIVEIRA DA FONSECA.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silvério Marchesini, André Luis
PROBABILIDADE E CADEIAS DE MARKOV : UMA PROPOSTA PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO / André Luis Silvério Marchesini. — 2017.

78 fls.

Orientador: André Ricardo Oliveira da Fonseca

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Probabilidade. 2. Cadeias de Markov. 3. Matrizes. 4. Modelagem Matemática. I. Oliveira da Fonseca, André Ricardo. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 6 de NOVEMBRO de 2017.

Assinatura do autor: ____________________

Assinatura do orientador: André Fonseca

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato André Luis Silvério Marchesini, realizada em 24 de agosto de 2017:

Prof.(a) Dr.(a) **André Ricardo Oliveira da Fonseca** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paulo Henrique Trentin** (Fundação Educacional Inaciana Padre Sabóia de Medeiros) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Birajara Soares Machado** (Hospital Israelita Albert Einstein) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC

Dedico este trabalho a minha esposa Vanessa, que me apoiou em cada etapa, sempre compreensiva e me ajudando nos momentos mais difíceis e aos meus pais Valdecir e Eunice, por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Vanessa, que abdicou de tanta coisa nos últimos dois anos e meio para me apoiar nessa jornada.

Ao meu orientador Prof. Dr. André Ricardo de Oliveira Fonseca, que me apoiou e incentivou até mesmo nos momentos que eu estava completamente perdido.

A todos os professores do curso.

Aos meus colegas de curso, por estarem sempre dispostos a ajudar quando necessário.

À Universidade Federal do ABC.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM.

Enfim, agradeço a todos que colaboraram de alguma forma para que eu pudesse ultrapassar mais essa etapa em minha vida.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos um estudo de probabilidade e cadeias de Markov com enfoque da modelagem matemática. Inicialmente, colocamos de maneira sucinta algumas definições e teoremas de probabilidade. Em seguida, abordamos alguns exemplos de situações-problema que envolvem cadeias de Markov, a partir desses exemplos definimos seus elementos básicos (diagrama de transição, matriz de transição, vetor de estado), demonstramos alguns teoremas e fizemos um breve estudo sobre cadeias absorventes. Por último, apresentamos algumas atividades aplicadas no ensino fundamental e outras no ensino médio.

Palavras-chave: Probabilidade, Cadeias de Markov, Matrizes, Modelagem Matemática

ABSTRACT

In this master thesis we present a study of Probability theory and Markov chains focused on mathematical modeling. First, we briefly describe some Probability definitions and theorems. Then, we discuss some problem-solving examples involving Markov chains and from them we define the theory basic elements (transition diagram, transition matrix, state vector), demonstrate some theorems and perform a brief analysis of absorbing chains. Finally, we report some classroom activities implemented in elementary and high schools.

Keywords: Probability, Markov Chains, Matrices, Mathematical Modeling

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO 1

1 PROBABILIDADE 5
1.1 Introdução . . . 5
1.2 Algumas definições importantes . . . 6
1.3 Probabilidade . . . 8
1.3.1 Propriedades da probabilidade em espaço amostral finito . . . 10

2 CADEIAS DE MARKOV 15
2.1 Um Breve Histórico . . . 15
2.2 As Cadeias de Markov ou Processos de Markov . . . 16
2.3 Cadeia de Markov Absorvente . . . 31

3 MODELAGEM MATEMÁTICA 35
3.1 Um pouco sobre a modelagem matemática . . . 35
3.2 Modelagem Matemática no ensino fundamental e no ensino médio . . . 37

4 SUGESTÃO DE ATIVIDADES 39
4.1 Ensino Fundamental . . . 39
4.2 Ensino Médio . . . 45

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 49

A APÊNDICE A 53

B APÊNDICE B 55

C APÊNDICE C 59

D APÊNDICE D 61

E APÊNDICE E 65

F APÊNDICE F 73

G APÊNDICE G 75

Bibliografia 77

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática tem estado em foco de maneira negativa nos últimos anos, notícias como estas: "Desempenho do ensino médio em matemática é o pior desde 2005" (Folha de São Paulo, 08/09/2016), "Pisa[1]: sabemos menos de matemática do que em 2009" (Revista Época, 06/12/2016) têm se tornado frequentes, devido ao baixo desempenho dos alunos em avaliações como a Prova Brasil, que têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro e também é usada no calculo do IDEB[2], índice usado como base para a primeira reportagem citada.

Sou formado em licenciatura em Matemática pelo Instituto Municipal de Ensino Superior de Catanduva desde 2005. No início de 2006 passei num concurso e me mudei para a cidade de Itanhaém, e a partir de então leciono no município. Em 2008, ingressei também na rede estadual. Trabalho princialmente com ensino fundamental, em uma região carente, e em todos esses anos como professor percebi que o baixo desempenho dos alunos deve-se, em parte, a falta de motivação e ao desinteresse que os alunos têm pela matemática. É muito comum ouvirmos de alunos que eles não gostam desse componente curricular, que é muito difícil, ou ainda que a matemática ensinada na escola não serve em nada para a sua vida, também percebi que aulas mais interativas, mais "mão na massa" chamam mais a atenção e tem maior participação. Nesse trabalho buscamos fomentar o gosto pela matemática nos alunos, para isso nossa proposta é que as atividades sejam mais práticas, que possam motivar o aluno a perceber a importância da teoria que está sendo estudada.

A respeito do ensino da probabilidade temos nos Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática do Ensino Fundamental [5]:

1 Programme for International Student Assessment, é uma avaliação aplicada de forma amostral a estudantes de mais de 70 países, para saber mais acesse: www.oecd.org/pisa

2 Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino

> ”Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos”(p. 52)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio [4] destacam ainda mais a relevância do ensino da probabilidade colocando também sua importância em outras áreas além da matemática:

> ”As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.”(p.44,45)

Mesmo com a sua valia e com muitas aplicações, várias delas em situações do dia a dia, a probabilidade acaba sendo trabalhada pelos docentes de maneira superficial e pouco interessante, em 11 anos lecionando na rede pública, percebi, analisando minhas próprias práticas e também em conversas com colegas da área, que existe um certo descaso no ensino de probabilidade, pois os professores passam rapidamente pelo assunto, preferindo dar ênfase a conteúdos "mais importantes" por serem mais básicos.

Em questionário disponibilizado para ser respondido por professores que atuam no ensino fundamental e no ensino médio, dos professores que trabalham na rede pública, aproximadamente 57% dos que lecionam no ensino fundamental dizem trabalhar probabilidade de maneira rápida, dando prioridade a outros conteúdos, considerados mais importantes, e menos de 32% tem o hábito de usar atividades práticas, que julgamos serem muito mais atraentes, principalmente para alunos do Ensino Fundamental.

Buscamos contribuir com atividades de probabilidade que visam criar no aluno do Ensino Fundamental uma empatia com a matemática, tentando diminuir a rejeição que existe atualmente. No Ensino Médio a proposta é usar as Cadeias de Markov para mostrar a importância da probabilidade (trabalhando em conjunto com matrizes e sistemas lineares, conteúdos considerados sem ligação alguma por eles), usando alguns exemplos de aplicações práticas que podem ir desde uma analise de migração de uma população até a probabilidade de vitória ou derrota em um jogo, mostrando assim aos alunos, que estão prestes a escolher uma carreira, que a matemática pode ser usada como ferramenta nas mais diversas áreas.

1

PROBABILIDADE

1.1 INTRODUÇÃO

Segundo Alencar [1] a Teoria de Probabilidades teve início na França com estudos sobre jogos de azar. Antoine Gombaud (1607-1684), que era aficionado por jogos de cartas, discutia com Blaise Pascal (1623-1662) sobre as possibilidades de sucesso no jogo. Em 1654 Pascal, que havia se interessado pelo assunto, começou a se corresponder com Pierre de Fermat (1601-1665) dando origem a probabilidade finita.

Ainda segundo Alencar [1] a primeira obra sobre probabilidade é *De ludo Aleae* (Sobre Jogos de Azar), que era mais um manual para jogadores com alguma discussão de probabilidade, escrita por Girolamo Cardano (1501-1576) e publicada quase 90 anos após sua morte. Já o primeiro tratado sobre Teoria de Probabilidades foi um folheto intitulado *De Ratiociniis in ludo Aleae* (Sobre o Raciocínio em Jogos de Azar), escrito pelo holandês Christian Huygens (1629-1695) e data de 1657.

Outros nomes que contribuíram com o desenvolvimento inicial da probabilidade foram: Galilei Galilei (1564-1642) que em um fragmento escrito provavelmente entre 1613 e 1623, *Sopra le Scorpete dei Dadi* (Sobre os Jogos de Dados), resolve um problema relacionado com as probabilidades no lançamento de três dados; Abraham de Moivre (1667-1754) com seu livro chamado *Doctrine of Chances* (Doutrina do Acaso), de grande influência na época; e Jacques Bernoulli (1654-1705), que em sua obra *Ars Conjectandi* (A Arte de Conjecturar) abordou a lei dos grandes números.

Após essas contribuições iniciais o estudo das probabilidades foi aprofundado nos séculos 18 e 19 com destaque para as obras de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Siméon Poisson (1781-1840) e Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

1.2 ALGUMAS DEFINIÇÕES IMPORTANTES

Nesta seção faremos, de maneira breve, algumas definições que julgamos importantes para podermos definir probabilidade, utilizaremos como referências as obras de Hazzan [11], Bussab e Morettin [6], Alencar [1], Ross [16] e Dantas [8].

Vamos chamar de experimentos aleatórios aqueles que quando repetidos sob uma mesma condição apresentam um resultado impossível de prever com certeza. Mesmo sem saber exatamente qual resultado que irá ocorrer no experimento, podemos definir um conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer.

Definição 1.1 (Experimentos aleatórios)**.** Um experimento aleatório é aquele que quando realizado tem resultado que não pode ser previsto.

Mesmo não podendo prever o resultado de um experimento aleatório, em geral conseguimos descrever um conjunto com todos os resultados possíveis, chamaremos esse conjunto de espaço amostral do experimento e usaremos Ω para representá-lo.

Definição 1.2 (Espaço amostral)**.** Dado um experimento aleatório, o conjunto de todos resultados possíveis nesse experimento é chamado *espaço amostral* Ω.

Dado um experimento aleatório, com espaço amostral Ω, a cada subconjunto de Ω damos o nome de *evento*, geralmente usamos uma letra maiúscula do alfabeto $(A, B, \cdots, Y, Z)$ para indicar um evento. Dizemos que um evento A ocorre, se ao realizarmos um experimento e o resultado obtido pertencer a A.

Definição 1.3. (Evento) Dado o espaço amostral Ω de um experimento aleatório, todo subconjunto de Ω é um *evento*

Alguns casos importantes que devemos salientar são:

- Eventos que possuem um único elemento ($\#A = 1$) são chamados de eventos elementares.
- Se um espaço amostral Ω tem n elementos ($\#\Omega = n$), então Ω terá 2^n subconjuntos, logo, 2^n eventos, designaremos por $\mathcal{F}$ a família de subconjuntos de Ω.
- Um evento que é o próprio Ω é chamado de evento certo.
- O conjunto $\emptyset$ é chamado de evento impossível.

Usamos as operações de união, intersecção e complementação, usadas em conjuntos, para operar entre eventos, podendo assim combiná-los para formar novos eventos. Es-

sas operações também possuem propriedades análogas àquelas válidas para operações de conjuntos, segundo Morettin e Bussab [6].
Por exemplo:

a. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

b. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

c. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$

d. $\emptyset^C = \Omega$, $\Omega^C = \emptyset$

e. $A \cap A^C = \emptyset$

f. $A \cup A^C = \Omega$

g. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \Omega = \Omega$

h. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Se necessário ilustrar graficamente eventos, utilizamos diagramas de Venn, de forma análoga à teoria dos conjuntos. Na figura 1, temos um retângulo representando um espaço amostral Ω, círculos representando eventos A e B, e os pontos representando eventos elementares.

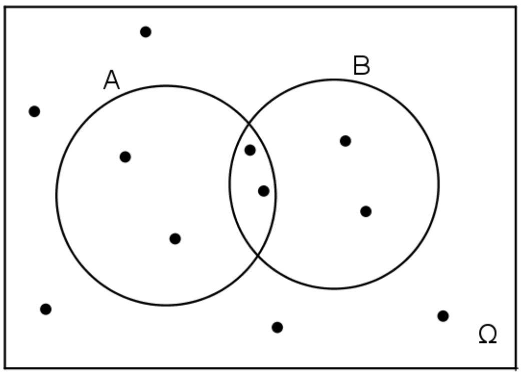


Figura 1: Espaço amostral e eventos aleatórios.

Definição 1.4 (Eventos mutuamente exclusivos)**.** Dados dois eventos A e B, esses eventos são mutuamente exclusivos ou mutuamente excludentes se, $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.5 (Frequência relativa)**.** Considerando um experimento aleatório com espaço amostral Ω, finito, isto é, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}$. Vamos supor que o experimento será repetido N vezes, nas mesmas condições. Seja n_i, o número de vezes que ocorre o evento elementar ω_i. Definimos como frequência relativa do evento $\{\omega_i\}$ como sendo o número f_i, tal que:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$$

Podemos destacar as seguintes propriedades da frequência relativa:

- $0 \leq f_i \leq 1 \quad \forall i$, pois $0 \leq \frac{n_i}{N} \leq 1$
- $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1$, pois
  $\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \cdots + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{N} = 1$

1.3 PROBABILIDADE

Sobre a definição de probabilidade Alencar [1] diz:

> ”A Teoria de Probabilidades é geralmente apresentada a partir de três enfoques: a abordagem clássica, o enfoque por frequência relativa e a abordagem axiomática. ”(p.40)

A abordagem clássica baseia-se na simetria do experimento, é definida para eventos equiprováveis e usa o conceito de probabilidade de forma cíclica; a abordagem por frequência relativa se justifica na experimentação; e a abordagem axiomática se desenvolve a partir de três axiomas estabelecidos por Andrei N. Kolmogorov (1903-1987).

Definição 1.6 (Definição clássica)**.** A probabilidade de um acontecimento E, que é um subconjunto finito de um espaço amostral Ω, de resultados igualmente prováveis, é dada por:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Onde $n(E)$ e $n(\Omega)$ são as quantidades de elementos de E e de Ω, respectivamente.

Definição 1.7 (Definição frequentista de probabilidade)**.** Seja E um experimento e A um evento de um espaço amostral Ω. Suponhamos que E é repetido n vezes e seja fr_A a frequência relativa do evento. Então a probabilidade de A é definida como sendo o limite de fr_A quando n tende ao infinito.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} fr_A$$

Para Alencar [1] tanto a definição clássica quanto a por frequência relativa apresentam problemas, a primeira devido a definição cíclica de probabilidade e a segunda a convergência na série de experimentos.

Definição 1.8 (Definição axiomática de probabilidade)**.** Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral Ω. A cada evento A de Ω associa-se um número real, representado por $P(A)$ e denominado "probabilidade de A", que satisfaça os seguintes axiomas:

i $0 \leq P(A) \leq 1$

ii $P(\Omega) = 1$

iii $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Como consequência dados A e A^C temos então: $P(A) + P(A^C) = 1$ ou $P(A^C) = 1 - P(A)$

Usaremos aqui a definição axiomática, por ser a mais completa das três.

Exemplo 1.1. Vamos supor que queremos estudar as frequências de ocorrências dos naipes de um baralho de 52 cartas (13 de cada naipe). Uma maneira de fazer isso seria embaralhar o baralho e retirar uma carta, observar o naipe da mesma e colocá-lá de volta no baralho, repetindo o processo um certo número n de vezes, depois contar o número n_i de vezes que ocorreu cada naipe i, $i = copas(\heartsuit), epadas(\spadesuit), ouros(\diamondsuit), paus(\clubsuit)$. A distribuição de frequência do experimento realizado é determinada pelas proporções $\frac{n_i}{n}$. Repetindo novamente esse processo, só que agora $n'(n' \neq n)$ vezes, vamos ter outra distribuição de frequências, mas espera-se com padrão muito próximo do anterior.
Um modelo dessa situação pode ser criado da seguinte forma: primeiro observamos que só podem ocorrer quatro naipes, depois, devemos considerar que se trata de um baralho completo (52 cartas-13 de cada naipe) e sem marcações nas cartas, dessa forma não favorecendo nenhum naipe em particular. Fazendo essas suposições cada naipe deve ocorrer o mesmo número de vezes quando sorteamos n vezes, portanto, a proporção de ocorrência de cada naipe é $\frac{13}{52}$, ou seja, $\frac{1}{4}$, sendo assim, na tabela 1 temos um *modelo probabilístico* para nosso experimento.

Tabela 1: Modelo para sorteio de uma carta de um baralho.

Naipe	Copas($\heartsuit$)	Espadas($\spadesuit$)	Ouros($\diamondsuit$)	Paus($\clubsuit$)	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Exemplo 1.2. De um grupo de três mulheres(M) e dois homens(H), será sorteada uma pessoa. Queremos saber a probabilidade da pessoa sorteada ser do sexo masculino ou feminino. Da mesma forma que fizemos no exemplo anterior podemos criar um modelo. Primeiro observamos que só existem duas possibilidades: ou a pessoa sorteada é do sexo feminino(M) ou é do sexo masculino(H), depois devemos supor que o sorteio é honesto e dessa forma cada pessoa tem igual chance de ser sorteada, teremos assim o *modelo probabilístico* da tabela para o experimento.

Tabela 2: Modelo probabilístico para o exemplo 1.2

Sexo	M	H	Total
Frequência teórica	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Segundo Morettin e Bussab [6] todo experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual, como nos exemplos 1.1 e 1.2, terá seu *modelo probabilístico* especificado quando for estabelecido:

a. um *espaço amostral*, Ω, no caso discreto, da enumeração finita ou infinita, de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}$$

Onde cada elemento de Ω é um ponto amostral ou evento elementar.

b. uma probabilidade, $P(\omega)$ para cada ponto amostral de tal forma que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer evento A de Ω.

1.3.1 *Propriedades da probabilidade em espaço amostral finito*

Propriedade 1.1. *A probabilidade do evento certo é 1.*

De fato, o evento certo é $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ e por definição:
$P(\Omega) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Propriedade 1.2. *Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.*

1. Se $A = B$, por definição $P(A) = P(B)$ e portanto $P(A) \leq P(B)$.

2. Se $A \neq B$ e $A \subset B$.
   Seja $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ e $B = \{a_1, a_2, \cdots, a_r, a_{r+1} + \cdots, a_{r+q}\}$
   Então:

$$P(A) = p_1 + p_2 + \cdots + p_r \quad (1.1)$$
$$P(B) = p_1 + p_2 + \cdots + p_r + p_{r+1} + \cdots + p_{r+q} \quad (1.2)$$

   Como em 1.2 temos todos números não negativos, decorre que: $P(A) \leq P(B)$.
   No caso particular de $A = \emptyset$ temos $P(A) = 0$ e $P(B) \geq 0$, e portanto $P(A) \leq P(B)$.

Propriedade 1.3. *Se A é evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$.*

$\emptyset \subset A \subset \Omega$, logo, pela propriedade 1.2, $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ e portanto $0 \leq P(A) \leq 1$

Propriedade 1.4. *Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

$$P(A \cup B) = \sum_{a_j \in A \cup B} p_j$$
$$P(A) = \sum_{a_j \in A} p_j$$
$$P(B) = \sum_{a_j \in B} p_j$$

Quando somamos $P(A) + P(B)$ a probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cap B$ são somados duas vezes, pois estão em A e em B simultaneamente. Portanto $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ é a soma das probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cup B$, logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

No caso particular onde temos A e B mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset$ temos,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(\emptyset) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Propriedade 1.5. *Se A é um evento, então $P(A^C) = 1 - P(A)$.*

O evento A^C ocorre se A não ocorrer, logo:

$$A \cap A^C = \emptyset \tag{1.3}$$

$$A \cup A^C = \Omega \tag{1.4}$$

E pela propriedade 1.4 temos:

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) \tag{1.5}$$

Substituindo 1.4 em 1.5,

$$P(\Omega) \quad = \quad P(A) + P(A^C) \tag{1.6}$$

Pela propriedade 1.1 temos que $P(\Omega) = 1$, substituindo em 1.6:

$$\begin{aligned} 1 &= P(A) + P(A^C) \\ P(A^C) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

Definição 1.9. (Probabilidade Condicional) Seja Ω um espaço amostral e consideremos os eventos, A e B. A probabilidade do evento A , dado que o evento B já ocorreu é representada pelo símbolo $P(A \mid B)$. Calculando $P(A \mid B)$, temos o espaço amostral reduzido a B dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A, assim temos:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Podendo também ser escrita da seguinte forma:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Exemplo 1.3. Um dado é lançado e é observado o número da face de cima. Admitindo que trata-se de um dado equilibrado e que dessa forma temos probabilidades iguais a $\frac{1}{6}$ para todos os eventos elementares, qual é a probabilidade de:

a. observarmos um número múltiplo de 2 e primo simultaneamente?

b. observarmos um número múltiplo de 2 ou primo?

c. observarmos um número que não seja múltiplo de 2?

d. observarmos um número múltiplo de 2 dado que o número sorteado é primo?

Temos:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a. O único número primo par é o 2, logo temos um evento elementar, $A = \{2\}$.

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

b. Sejam os eventos:
B: ser múltiplo de 2.
$B = \{2, 4, 6\}$
C: ser número primo.
$C = \{2, 3, 5\}$
Calculando as probabilidades dos eventos B e C:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Como o que nos interessa é $B \cup C$, podemos usar a propriedade 1.4, já que no *item a* temos $B \cap C$:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

Substituindo os valores de $P(B)$, $P(C)$ e $P(B \cap C)$ temos:

$$\begin{aligned} P(B \cup C) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ P(B \cup C) &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

c. A probabilidade a ser calculada aqui é a do evento B^C, usando a propriedade 1.5 temos:

$$P(B^C) = 1 - P(B)$$

Substituindo o valor já calculado de $P(B)$

$$\begin{aligned} P(B^C) &= 1 - \frac{1}{2} \\ P(B^C) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d. Aqui devemos calcular probabilidade de B dado que já ocorreu C, usando a definição 1.9 temos:

$$P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

Substituindo o valor já calculado de $P(B)$

$$\begin{aligned} P(B \mid C) &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} \\ P(B \mid C) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2

CADEIAS DE MARKOV

2.1 UM BREVE HISTÓRICO

Andrei Andreyevich Markov nasceu em 14 de junho de 1856 em Ryazan, Rússia e morreu em 20 de julho de 1922 em São Petersburgo, Rússia. Markov matriculou-se na Universidade de São Petersburgo, onde foi professor e também obteve seu mestrado e doutorado. Além disso também era membro da Academia Russa de Ciências. Aposentou-se em 1905, mas continuou ensinando na universidade até sua morte.

Figura 2: Andrei Andreyevich Markov (1856-1922)

Segundo Silva [17]:

> ”Em linhas gerais os primeiros trabalhos matemáticos desenvolvidos por Markov ocorreram nas áreas de teoria dos números e análise, influenciado diretamente por seu professor e orientador, o matemático russo Pafnuty

> Lvovich Chebyshev (1821-1894). Chebyshev desenvolveu inúmeros teoremas e resultados matemáticos envolvendo frações contínuas, porém foi Markov que conseguiu estabelecer relações entre frações contínuas e a teoria das probabilidades”(p.62)

Cadeias de Markov foi o nome dado a um certo tipo de processo aleatório cuja principal característica é a de não manter nenhuma dependência com fatos ocorridos anteriormente, isto é, apenas o estado atual do processo pode influenciar onde ele vai em seguida, tal processo recebe esse nome devido ao fato de terem sido estudados pela primeira vez por Markov que publicou seus primeiros resultados sobre o tema em 1906. Ainda segundo Silva [17], os estudos iniciais envolvendo cadeias surgiram em um trabalho onde Markov estudava a probabilidade de ocorrer uma consoante em uma determinada posição de uma palavra qualquer, para ele tal probabilidade dependeria apenas da letra anterior ser uma vogal ou outra consoante, com essa ideia ele conseguiu relacionar a teoria das probabilidades com as "cadeias" por ele desenvolvidas, através de variáveis cujos valores mudam com o passar do tempo.

2.2 AS CADEIAS DE MARKOV OU PROCESSOS DE MARKOV

Como já foi dito anteriormente, uma ***cadeia de Markov*** ou ***processo de Markov*** é um processo aleatório que evolui com o tempo e que para prever onde ele vai em seguida dependemos apenas da sua posição atual, sem nenhuma dependência de onde ele esteve anteriormente.

Segundo Anton e Rorres [2]

> ”Se o estado do sistema em qualquer observação não pode ser predito com certeza, mas se a probabilidade de um certo estado ocorrer puder ser predita unicamente a partir do conhecimento do estado do sistema na observação imediatamente anterior, então o processo de mudança de um estado para o outro é chamado uma *cadeia* ou um *processo de Markov*.”(p.390)

Vamos iniciar com dois exemplos de situações enquadradas no que foi citado anteriormente como cadeia de Markov.

Exemplo 2.1. Em um país dividido em três regiões, fazendo uma analise de dados de censos demográficos, verificou-se que a cada censo:

- uma pessoa que mora na *região 1* tem $0,7$ de probabilidade de permanecer na mesma região, pode migrar para a *região 2* com probabilidade de $0,2$ e para *região 3* com probabilidade de $0,1$;
- uma pessoa que mora na *região 2* tem $0,6$ de probabilidade de permanecer na mesma região, probabilidade de $0,3$ de migrar para a *região 1* e probabilidade de $0,1$ de migrar para *região 3*;
- uma pessoa que mora na *região 3* tem $0,7$ de probabilidade de permanecer na mesma região, pode migrar para a *região 2* com probabilidade de $0,2$ e para *região 1* com probabilidade de $0,1$.

Exemplo 2.2. Um agente de transito é responsável por fiscalizar seis cruzamentos indicados na figura. Suponha que a cada 30 minutos ele pode ficar no cruzamento em que se encontra ou se deslocar para um dos cruzamentos adjacentes, sempre com probabilidade igual entre as escolhas possíveis. De A, por exemplo, ele pode ir até F, B ou ficar em A com probabilidades iguais à $\frac{1}{3}$; de C pode ir até B, F, D ou ficar em C com probabilidades de $\frac{1}{4}$ para cada mudança.

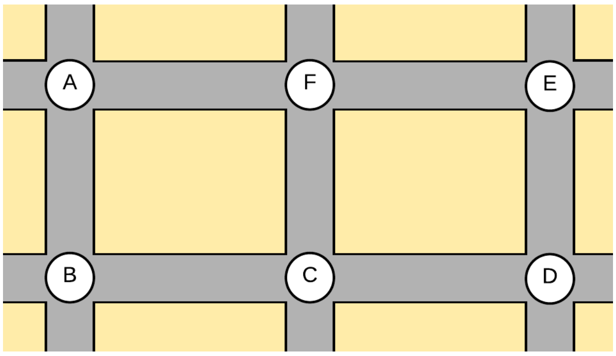


Figura 3: Exemplo 2.2

Nos dois exemplos apresentados o estado futuro depende apenas do seu estado atual, exemplos de situações onde podemos aplicar as cadeias de Markov são inúmeros pois elas modelam muitos fenômenos cotidianos como: processos de ramificação, epidemias, filas e enfileiramento de redes, processos de migração, gerenciamento de recursos e muitos outros, para mais detalhes ver Norris [14]. Ainda sobre as aplicações das cadeias de Markov Norris [14] diz:

> ”What makes them important is that not only do Markov chain model many phenomena of interest, but also the lack of memory property makes it pos-

> sible to predict how a Markov chain may behave, and to compute probabilities and expected values which quantify that behavior"(p.xiv)
>
> "O que as torna importantes é que cadeias de Markov não só modelam muitos fenômenos interessantes, mas também a falta de propriedade de memória possibilita prever como uma cadeia de Markov pode se comportar e calcular probabilidades e valores esperados que quantificam esse comportamento"(p.xiv tradução nossa)

No exemplo 2.1 cada uma das regiões é considerada um estado do sistema, sendo então 3 os estados possíveis, já no exemplo 2.2 os cruzamentos que devem ser fiscalizados pelo agente, são os estados possíveis, temos então 6 estados possíveis. Nos dois exemplos o sistema pode mudar de estado, no caso do exemplo 2.1 uma pessoa que mora na *região 1* pode mudar-se para a *região 2*, a *região 3* ou até mesmo escolher permanecer na região em que se encontra.

Definição 2.1 (Cadeia de Markov)**.** Consideremos uma cadeia de Markov com estados $1, 2, \cdots, k$. A probabilidade de o sistema que estava no estado i em qualquer observação estar no estado j na observação imediatamente posterior é denotada por p_{ij} e é chamada de *probabilidade de transição* do estado i ao estado j. A matriz $P = [p_{ij}]$ é chamada de *matriz de transição* da cadeia de Markov.

Em uma cadeia de Markov de k estados, sua matriz de transição tem o seguinte formato:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Cada uma das quatro linhas representa os estados anteriores e cada uma das quatro colunas o novo estado, dessa forma p_{12} é a probabilidade que o sistema vai mudar do estado 1 para o estado 2, p_{21} é a probabilidade que o sistema vai mudar do estado 2 para o estado 1, p_{22} é a probabilidade que o sistema vai permanecer no estado 2 logo após ter sido observado no estado 2, e assim por diante. Na montagem das matrizes de transição podemos também inverter a ordem das linhas e colunas, usando a matriz transposta, Anton [2], por exemplo, nos apresenta a matriz de transição com as colunas representando os estados anteriores e as linhas o novo estado, usaremos aqui a representação usada por Norris [14] e Taha [20], com as linhas representando os estados anteriores e as colunas o novo estado.

Uma alternativa para representar as probabilidades de transição entre estados e que também pode ajudar na construção da matriz de transição, é utilizar uma representação por diagrama, onde as setas indicam a probabilidade de mudança de um estado para outro. Veja como fica o diagrama do exemplo 2.1 na figura 4.

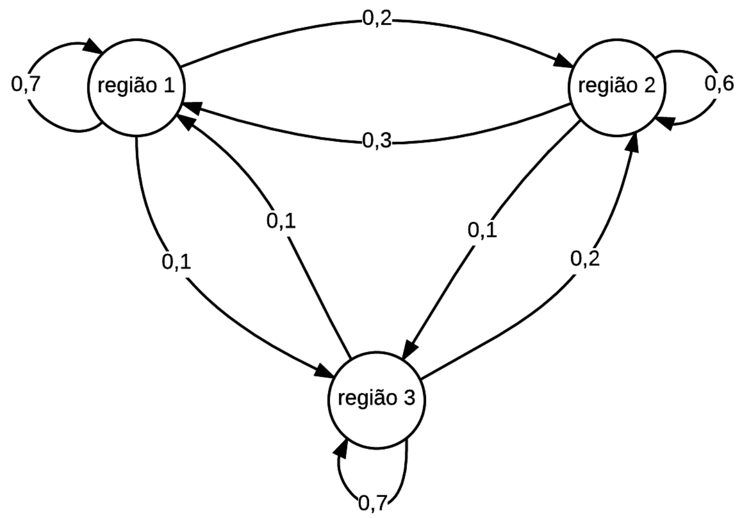


Figura 4: diagrama de transição exemplo 2.1

Na figura 4 a probabilidade de passar do estado *região 1* para o estado *região 2* é $0,2$, de passar do estado *região 3* para o *região 1* é $0,1$, de *região 1* permanecer em *região 1* é $0,7$, e assim por diante.

Vejamos agora a matriz de transição do exemplo 2.1:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Na primeira linha temos as probabilidades de transição da *região 1* para a *região 1*, *região 2* e *região 3* respectivamente.

Na segunda linha temos as probabilidades de transição da *região 2* para a *região 1*, *região 2* e *região 3* respectivamente.

Na terceira linha temos as probabilidades de transição da *região 3* para a *região 1*, *região 2* e *região 3* respectivamente.

Agora a matriz de transição do exemplo 2.2:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Nos exemplos 2.1 e 2.2 as matrizes de transição das cadeias de Markov têm a propriedade que a soma das entradas de cada linha resultam em 1, e isso não ocorre por acaso. Em uma matriz de transição $P = [p_{ij}]$ de uma cadeia de Markov de k estados temos que:

$$p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{ik} = 1 \tag{2.1}$$

Segundo Anton [2] uma matriz que obedeça a propriedade 2.1 é chamada de matriz de probabilidade, matriz estocástica ou matriz de Markov, como cada linha de uma matriz de transição tem a propriedade 2.1 podemos concluir que a matriz de transição de uma cadeia de Markov sempre é uma matriz estocástica.

Usando a propriedade 2.1 podemos simplificar o diagrama de transição da figura 4, como a probabilidade de mudança de um estado é 1, Norris [14] nos diz que podemos deixar de colocar as setas que ligam um estado a ele mesmo, visto que, elas não transmitem informação extra. Então o mesmo diagrama da figura 4 pode ser representado assim:

Na figura 5 podemos observar que saindo do estado *região 1* temos duas setas totalizando $0,3$ de probabilidade, como o total de probabilidade de mudanças do estado *região 1* deve ser 1, concluímos que a probabilidade restante, de $0,7$, se refere à probabilidade de permanecer no estado *região 1*, de maneira análoga concluímos as probabilidades de permanência em cada um dos outros estados.

Segundo Taha [20] os estados de uma cadeia de Markov podem ser classificados com base nas probabilidades de transição p_{ij} de P, da seguinte forma:

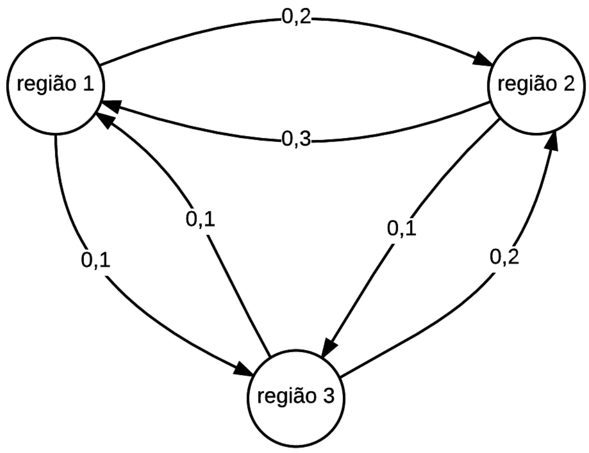


Figura 5: diagrama de transição simplificado do exemplo 2.1

a. Um estado j é **absorvente** se retornar para ele mesmo, com certeza, em uma transição isto é $p_{jj} = 1$.

b. Um estado j é **transiente** se puder alcançar outro estado mas não puder voltar ao estado em que estava com base em outro estado.

c. Um estado j é **recorrente** se a probabilidade de voltar ao estado em que estava com base em outros estados for 1. Isso pode acontecer se , e somente se, o estado não for transiente.

d. Um estado j é **periódico** com período $t > 1$ se um retorno só for possível em $t, 2t, 3t, \cdots$ etapas.

Geralmente não é possível determinar o estado de uma cadeia de Markov em uma observação aleatória, o que podemos é determinar as probabilidades de cada um dos estados possíveis, por exemplo, em uma cadeia de Markov de três estados, podemos descrever o estado possível em uma certa observação pelo vetor-linha abaixo, onde x_1 é a probabilidade de estar no estado 1, x_2 é a probabilidade de estar no estado 2 e x_3 é a probabilidade de estar no estado 3.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Temos então a seguinte definição:

Definição 2.2 (Vetor-estado)**.** O *vetor-estado* de uma observação de uma cadeia de Markov com k estados é um vetor linha x cujo $i-ésimo$ componente x_i é a probabilidade do sistema estar, naquela observação, no $i-ésimo$ estado.

Segundo Anton [2], as entradas de qualquer vetor-estado de uma cadeia de Markov são não-negativas e tem soma 1 e um vetor-linha com essa propriedade é chamado de *vetor probabilidade*.

Sabendo o vetor-estado $x^{(0)}$ de uma cadeia de Markov, podemos determinar os vetores-estado $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}, \cdots$ nas observações seguintes, usando o teorema abaixo.

Teorema 2.3. *se P é a matriz de transição de uma cadeia de Markov e $x^{(n)}$ é o vetor estado da $n-ésima$ observação então*

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}P$$

Demonstração. Seja P uma matriz de transição de uma cadeia de Markov de k estados, onde cada p_{ij} é a probabilidade de, estando em i, passar para o estado j após uma unidade de tempo.

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

E seja $x^{(n)}$ o vetor estado, da mesma cadeia de Markov, em uma observação qualquer $t = n$

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_k^{(n)} \end{pmatrix}$$

Onde
$x_1^{(n)}$ é a probabilidade de o sistema estar no estado 1 no instante $t = n$
$x_2^{(n)}$ é a probabilidade de o sistema estar no estado 2 no instante $t = n$
$\vdots$
$x_k^{(n)}$ é a probabilidade de o sistema estar no estado k no instante $t = n$

Sendo o vetor $x^{(n+1)}$ o vetor estado no instante $t = n + 1$, temos

$$x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \cdots & x_k^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Onde

$x_1^{(n+1)} = p(\text{ir de 1 para } 1 \cap \text{ estar no estado 1 no instante } t = n) + p(\text{ir de 2 para } 1 \cap \text{ estar no estado 2 no instante } t = n) + \cdots + p(\text{ir de } k \text{ para } 1 \cap \text{ estar no estado } k \text{ no instante } t = n)$

$x_2^{(n+1)} = p(\text{ir de 1 para } 2 \cap \text{ estar no estado 1 no instante } t = n) + p(\text{ir de 2 para } 2 \cap \text{ estar no estado 2 no instante } t = n) + \cdots + p(\text{ir de } k \text{ para } 2 \cap \text{ estar no estado } k \text{ no instante } t = n)$

$\vdots$

$x_k^{(n+1)} = p(\text{ir de 1 para } k \cap \text{ estar no estado 1 no instante } t = n) + p(\text{ir de 2 para } k \cap \text{ estar no estado 2 no instante } t = n) + \cdots + p(\text{ir de } k \text{ para } k \cap \text{ estar no estado } k \text{ no instante } t = n)$

Pela definição 1.9 podemos reescrever as sentenças da seguinte forma:

$x_1^{(n+1)} = p_{11}x_1^{(n)} + p_{21}x_2^{(n)} + \cdots + p_{k1}x_k^{(n)}$

$x_2^{(n+1)} = p_{12}x_1^{(n)} + p_{22}x_2^{(n)} + \cdots + p_{k2}x_k^{(n)}$

$\vdots$

$x_k^{(n+1)} = p_{1k}x_1^{(n)} + p_{2k}x_2^{(n)} + \cdots + p_{kk}x_k^{(n)}$

Agora partindo de $x^{(n+1)}$ e desenvolvendo a expressão, temos:

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \cdots & x_k^{(n+1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{11}x_1^{(n)} + \cdots + p_{k1}x_k^{(n)} & p_{12}x_1^{(n)} + \cdots + p_{k2}x_k^{(n)} & \cdots & p_{1k}x_1^{(n)} + \cdots + p_{kk}x_k^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_k^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \\
&= x^{(n)}P
\end{aligned}
$$

Logo, $x^{(n+1)} = x^{(n)}P$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Então pelo teorema 2.3, temos:

$$x^{(1)} = x^{(0)}P \tag{2.2}$$
$$x^{(2)} = x^{(1)}P \tag{2.3}$$
$$x^{(3)} = x^{(2)}P \tag{2.4}$$

Substituindo 2.2 em 2.3, temos:

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(0)}PP \\ x^{(2)} &= x^{(0)}P^{(2)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo 2.5 em $x^{(3)} = x^{(2)}P$, temos:

$$\begin{aligned} x^{(3)} &= x^{(0)}P^{(2)}P \\ x^{(3)} &= x^{(0)}P^{(3)} \end{aligned}$$

Continuando da mesma maneira obtemos a expressão $x^{(n)} = x^{(0)}P^{(n)}$ com $n = 1, 2, \cdots$, que é equivalente a expressão $x^{(n+1)} = x^{(n)}P$ do teorema 2.3.

Voltando agora ao exemplo 2.1, vamos construir um futuro provável de uma pessoa que na observação atual reside na *região 2*, dessa forma temos o vetor-estado inicial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Pelo teorema 2.3, temos então:

$$x^{(1)} = x^{(0)}P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,44 & 0,16 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)}P = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,44 & 0,16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,428 & 0,376 & 0,196 \end{pmatrix}$$

Dessa forma espera-se que, após a realização de três censos, uma pessoa que mora inicialmente na *região 2* pode mudar-se para a *região 1* com probabilidade de $0,428$, pode ficar na *região 2* com probabilidade de $0,376$ e pode mudar-se para *região 3* com a probabilidade de $0,196$.

Na tabela 3 temos as probabilidades até 20 mudanças de estado, com arredondamento em três casas decimais, é possível observar que com o passar do tempo o vetor-estado converge para um vetor fixo, após 13 censos temos valores fixos, probabilidade de $0,417$ de estar na *região 1*, probabilidade de $0,333$ de estar na *região 2* e $0,250$ de probabilidade de estar na *região 3*.

Tabela 3: Vetores-estado exemplo 2.1.

n	${x_1}^{(n)}$	${x_2}^{(n)}$	${x_3}^{(n)}$
0	0	1	0
1	$0,300$	$0,600$	$0,100$
2	$0,400$	$0,440$	$0,160$
3	$0,428$	$0,376$	$0,196$
4	$0,432$	$0,350$	$0,218$
5	$0,429$	$0,340$	$0,231$
6	$0,426$	$0,336$	$0,238$
7	$0,423$	$0,334$	$0,243$
8	$0,420$	$0,334$	$0,246$
9	$0,419$	$0,334$	$0,247$
10	$0,418$	$0,333$	$0,248$
15	$0,417$	$0,333$	$0,250$
20	$0,417$	$0,333$	$0,250$

Vamos analisar o exemplo 2.2, supondo que o agente inicie seu turno no cruzamento *1*, dessa forma temos o vetor-estado inicial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Pelo teorema 2.3, temos então:

$$x^{(1)} = x^{(0)}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & \frac{2}{9} & \frac{7}{36} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)}P = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & \frac{2}{9} & \frac{7}{36} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{7}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{97}{432} & \frac{97}{432} & \frac{37}{216} & \frac{11}{144} & \frac{11}{144} & \frac{49}{216} \end{pmatrix}$$

Tabela 4: Vetores-estado exemplo 2.2.

n	${x_1}^{(n)}$	${x_2}^{(n)}$	${x_3}^{(n)}$	${x_4}^{(n)}$	${x_5}^{(n)}$	${x_6}^{(n)}$
0	1	0	0	0	0	0
1	0,333	0,333	0	0	0	0,333
2	0,306	0,222	0,194	0	0,083	0,194
3	0,225	0,225	0,171	0,076	0,076	0,227
4	0,206	0,193	0,200	0,094	0,108	0,200
5	0,183	0,183	0,195	0,117	0,117	0,205
6	0,173	0,171	0,200	0,127	0,129	0,200
7	0,165	0,165	0,199	0,135	0,135	0,201
8	0,160	0,160	0,200	0,140	0,140	0,200
9	0,157	0.157	0,200	0,143	0,143	0,200
10	0,154	0,154	0,200	0,147	0,146	0,200
15	0,151	0,151	0,200	0,150	0,149	0,200
20	0,150	0,150	0,200	0,150	0,150	0,200
25	0,150	0,150	0,200	0,150	0,150	0,200

Assim como no exemplo 2.1, a tabela 4 mostra que, conforme é aumentado o número de mudanças de estado, as probabilidades tendem para um valor fixo, que chamamos de *vetor estado de estacionário* e veremos mais adiante.

Definição 2.4 (Matriz regular)**.** Uma matriz de transição é ***regular*** se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.

Para demonstração do teorema 2.6 precisaremos do lema 2.5

Lema 2.5. *Seja M uma matriz de transição de uma cadeia de Markov, e $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. Se $y = xM$, então $\sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i$. Se a matriz M tiver todas as entradas positivas e duas coordenadas $x_i \neq 0$ e $x_j \neq 0$ tais que $\frac{x_i}{x_j} \notin \mathbb{R}^+$, então a desigualdade é estrita.*

Demonstração. Observemos que

$$\sum_{j=1}^n |y_j| = \sum_{j=1}^n |x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \cdots + x_n a_{nj}| \leq \sum_{j=1}^n |x_1| a_{1j} + |x_2| a_{2j} + \cdots + |x_n| a_{nj} = |x_1| (\sum_{k=1}^n a_{k1}) + \cdots + |x_n| (\sum_{k=1}^n a_{kn})$$

Considerando que cada $(\sum_{k=j}^n a_{kj}) = 1$ para $j = 1, 2, \cdots, n$ temos

$$\sum_{j=1}^n |y_j| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Além disso, a desigualdade será estrita quando houver sinais trocados entre os termos x_i distintos e não nulos como afirma a hipótese.

□

Teorema 2.6 (Teorema de Perron-Frobenius, caso Markoviano)**.** *Seja M uma matriz de transição de uma cadeia de Markov, então*

(i) Se λ é autovalor de M, então $|\lambda| \leq 1$;

(ii) $\lambda = 1$ é autovalor de M.

Demonstração. (i) Seja $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \neq 0$ um autovetor qualquer de M, com autovalor associado λ, isto é $uM = \lambda u$, assim, pelo lema 2.5, $|\lambda| \sum |u_i| \leq \sum |u_i|$, o que implica que $\lambda \leq 1$.

(ii) Lembrando que a soma de cada uma das linhas da matriz de transição é igual a 1, segue-se que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M = 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, que mostra que $\lambda = 1$ é autovalor.

□

Teorema 2.7. *Se P é uma matriz de transição de uma cadeia de Markov regular, então:*

(i) Existe um único vetor-probabilidade q tal que $q.P = q$;

(ii) Para qualquer vetor-probabilidade inicial x_0, a sequência de vetores de estado x_0, x_0P, $x_0P^2, \cdots, x_0P^n$ tende a q como um limite, ou seja, $x_0P^n \longrightarrow q$ quando $n \longrightarrow \infty$. O vetor q é chamado de vetor de estado estacionário.

Demonstração. A existência de q está garantida pelo teorema 2.6, mostraremos a unicidade posteriormente, vamos iniciar mostrando que $x_0P^n \longrightarrow q$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Como se trata de uma cadeia de Markov regular, existe r natural tal que P^r tem todas as entradas positivas, ou seja, $p^r_{ij} > 0$, para todo i, j.

Existe $0 < \delta < 1$, daí temos que $P^r_{ij} > \delta q$. Agora, seja $\varepsilon = 1 - \delta$ e Π a matriz quadrada cujas linhas sejam iguais a q e considere a matriz Q tal que $P^r = (1 - \varepsilon)\Pi + \varepsilon Q$.

Note que $\Pi P = \Pi$, assim, aplicando o princípio de indução sobre n, temos que

$$P^{nr} = (1 - \varepsilon^n)\Pi + \varepsilon^n Q^n$$

Multiplicando a igualdade por P^j para $j \in \mathbb{N}$, temos

$$P^{nr+j} = (1-\varepsilon^n)\Pi P^j + \varepsilon^n Q^n P^j$$

Mas $\Pi P = \Pi$ e portanto $\Pi P^j = \Pi$, logo

$$\begin{aligned} P^{nr+j} &= (1-\varepsilon^n)\Pi + \varepsilon^n Q^n P^j \\ P^{nr+j} &= \Pi - \varepsilon^n \Pi + \varepsilon^n Q^n P^j \\ P^{nr+j} - \Pi &= \varepsilon^n (Q^n P^j - \Pi) \end{aligned}$$

Lembrando que $\|A\| = sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax\|;\ \|x\| = 1$, temos que

$$\|P^{nr+j} - \Pi\| = \varepsilon^n \|Q^n P^j - \Pi\|$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos $\|P^{nr+j} - \Pi\| \longrightarrow 0$, logo $x_0 P^{nr+j} \longrightarrow q$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Para mostrar que q é o único vetor de probabilidade que satisfaz esta equação, vamos supor que r é um outro vetor probabilidade tal que $rP = r$, então para $n = 1, 2, \cdots$ temos:

$$rP^n = r$$

Como $x_0 P \longrightarrow q$, quando $n \longrightarrow \infty$ resulta em $q = r$ □

Desenvolvendo um pouco a expressão $qP = q$ do teorema 2.7 temos

$$\begin{aligned} qP &= q \\ 0 &= q - qP \\ 0 &= q(I - P) \\ (I-P)q &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Portanto podemos também expressar $qP = q$ pelo sistema linear homogêneo 2.6, que tem um único vetor-solução q com entradas não-negativas que satisfazem a condição $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Voltando aos exemplos 2.1 e 2.2, agora podemos calcular o vetor estado estacionário de cada um deles.

No exemplo 2.1 a matriz de transição é

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Dessa forma $(I - P)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,4 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Usando 2.6, temos

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,4 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Resolvendo o sistema obtemos os valores de q_1 e q_2 em função de q_3

$$q_1 = \frac{5}{3}q_3$$
$$q_2 = \frac{4}{3}q_3$$

Colocando $q_3 = s$, sendo s é uma constante qualquer, a solução de 2.7 tem a forma

$$q = s\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Para fazer do vetor q um vetor de probabilidade

$$s = \frac{1}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

logo

$$q = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{4}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

Escrevendo esses valores na forma decimal, podemos observar que até a terceira casa decimal os valores são os mesmos obtidos na tabela 3.

$$q = \begin{pmatrix} 0,41666... & 0,33333... & 0,25 \end{pmatrix}$$

2.3 CADEIA DE MARKOV ABSORVENTE

Existe um tipo específico de cadeias de Markov que não tem a propriedade de o vetor estado tender para valor fixo, o vetor estado estacionário, essas cadeias são chamadas de cadeias absorventes, nelas temos pelo menos um estado absorvente, aqueles que uma vez atingidos é impossível sair dele.

Em cadeias de Markov absorventes podemos determinar o número esperado de passos antes de o processo ser absorvido e a probabilidade de absorção por qualquer estado absorvente.

Definição 2.8 (Cadeia de Markov absorvente)**.** Um estado i é chamado de estado absorvente se $p_{ii} = 1$, um estado que não é absorvente é chamado de estado de transição. Dizemos que uma cadeia de Markov é absorvente se nela existe ao menos um estado absorvente, além disso deve ser possível, partindo de qualquer estado, atingir um estado absorvente, independente do número de passos necessário para isso.

Segundo Taha [20], trabalhando com cadeias absorventes devemos reorganizar a matriz de transição em quatro submatrizes, da seguinte forma:

$$P = \begin{pmatrix} N & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Onde:

- N é uma matriz que contém as probabilidades de se ir de um estado não absorvente para qualquer outro estado não absorvente.
- A é uma matriz que contém as probabilidades de se ir de qualquer estado não absorvente para um estado absorvente.
- 0 é uma matriz zero que reflete as probabilidades de ir de um estado absorvente para um estado não absorvente.
- I é uma matriz identidade que representa as probabilidades de se permanecer dentro de um estado absorvente.

Ainda segundo Taha [20], o tempo esperado no estado j começando no estado i é o elemento (i, j) da matriz $(I - N)^{-1}$, o tempo esperado para a absorção, a partir de de cada estado, é dado pela matriz coluna $(I - N)^{-1}1$ onde 1 é o vetor coluna unitário de todos os elementos 1 e a probabilidade de absorção, a partir de cada estado, é dada pela matriz $(I - N)^{-1}A$.

Para tornar mais fácil a compreensão vamos analisar o exemplo a seguir:

Exemplo 2.3. Em um jogo o jogador começa com *3 pontos*, a cada rodada ele tem $0,4$ de probabilidade de ganhar *1 ponto* e $0,6$ de probabilidade de perder *1 ponto*. O jogador vence se atingir *6 pontos* e se chegar a *0 pontos* é derrotado. Essa situação pode ser expressa como uma cadeia de Markov absorvente.

Nessa situação os estados possíveis são: *0 ponto*, *1 ponto*, *2 pontos*, *3 pontos*, *4 pontos*, *5 pontos*, *6 pontos*. Por exemplo, do estado *2 pontos* ele pode ir ao estado *1 ponto* com $0,6$ de probabilidade ou para o estado *3 pontos* com $0,4$ de probabilidade, chegando ao estado *0 ponto* ou *6 pontos* não é mais possível sair deles. Veja a matriz de transição e o diagrama de transição.

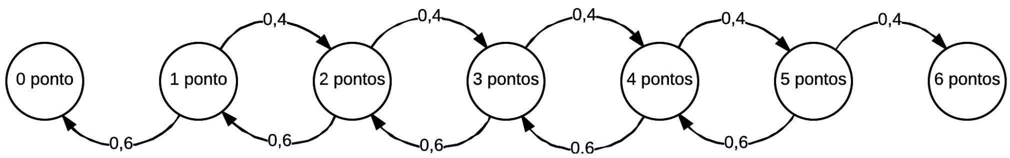


Figura 6: diagrama de transição

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reorganizando a matriz como em 2.8

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dai temos

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Podemos nesse exemplo calcular o número médio de jogadas até o jogo acabar usando $(I - N)^{-1}1$

$$(I - N)^{-1}1 = \begin{pmatrix} \frac{211}{133} & \frac{130}{133} & \frac{4}{7} & \frac{40}{133} & \frac{16}{133} \\ \frac{195}{133} & \frac{325}{133} & \frac{10}{7} & \frac{100}{133} & \frac{40}{133} \\ \frac{9}{7} & \frac{15}{7} & \frac{19}{7} & \frac{10}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{135}{133} & \frac{225}{133} & \frac{15}{7} & \frac{325}{133} & \frac{130}{133} \\ \frac{81}{133} & \frac{135}{133} & \frac{9}{7} & \frac{195}{133} & \frac{211}{133} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{473}{133} \\ \frac{850}{133} \\ \frac{57}{7} \\ \frac{1100}{133} \\ \frac{793}{133} \end{pmatrix}$$

Como o jogo começa com *3 pontos* o número médio de jogadas até a absorção (vitória ou derrota) é $\frac{57}{7}$ ou seja aproximadamente 8 rodadas.

Já a probabilidade de absorção (vitória ou derrota) é obtida calculando $(I - N)^{-1}A$.

$$(I-N)^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{211}{133} & \frac{130}{133} & \frac{4}{7} & \frac{40}{133} & \frac{16}{133} \\ \frac{195}{133} & \frac{325}{133} & \frac{10}{7} & \frac{100}{133} & \frac{40}{133} \\ \frac{9}{7} & \frac{15}{7} & \frac{19}{7} & \frac{10}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{135}{133} & \frac{225}{133} & \frac{15}{7} & \frac{325}{133} & \frac{130}{133} \\ \frac{81}{133} & \frac{135}{133} & \frac{9}{7} & \frac{195}{133} & \frac{211}{133} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{633}{665} & \frac{32}{665} \\ \frac{117}{133} & \frac{16}{133} \\ \frac{27}{35} & \frac{8}{35} \\ \frac{81}{133} & \frac{52}{133} \\ \frac{243}{665} & \frac{422}{665} \end{pmatrix}$$

Novamente, considerando o início do jogo com *3 pontos*, a probabilidade de vitória é de $\frac{8}{35}$, aproximadamente $22,9\%$ e a probabilidade de derrota é de $\frac{27}{35}$, aproximadamente $77,1\%$.

Para mais exemplos de situações-problema que envolvem cadeias de Markov absorventes ver Taha [20].

3

MODELAGEM MATEMÁTICA

Vale ressaltar que, nossa intenção nesse trabalho não é nos aprofundarmos no estudo da modelagem matemática, faremos uma breve explanação sobre o assunto que será usado apenas como ferramenta de aprendizagem, buscando tornar as aulas de matemática mais atrativas aos alunos e também mostrando como ela está presente na resolução de problemas do cotidiano. Para informações mais aprofundadas consultar Bassanezi [3].

3.1 UM POUCO SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao tentarmos entender, explicar ou agir sobre uma situação real, na maior parte das vezes precisamos simplificar tal situação, para diminuir os custos ou até mesmo por ser impossível estudá-la da maneira como se apresenta, nessas situações devemos selecionar argumentos e parâmetros que consideramos essenciais, para podermos formalizá-los em um sistema artificial que chamamos de modelo.

Bassanezi [3] nos diz que a definição de modelo matemático é dada de diferentes formas por diversos autores, a sua definição é a seguinte: modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Além disso nos diz que a formulação dos modelos matemáticos se dá de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações estudadas, sendo classificados como:

- Linear ou não linear, dependendo das características de suas equações básicas.
- Estático ou dinâmico, quando representa a forma do objeto ou quando simula variações de estágios de um fenômeno.

- Educacional, quando é simplificado apresentando um número pequeno ou simples de suposições, quase sempre com soluções analíticas.
- Estocástico ou analítico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios.

A modelagem matemática é um processo utilizado para obtenção de um modelo, e também para sua validação, é uma forma de abstrair e generalizar com a finalidade de prever tendências, Bassanezi [3] diz que:

> ”A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.” (p.16)

A modelagem matemática é muito abrangente e pode ser vista tanto como um método científico de pesquisa, sendo usada em várias áreas como a Biologia, a Física, a Química, a Astrofísica entre outras, quanto também como uma estratégia de ensino-aprendizagem.

Para modelarmos um problema ou situação real devemos seguir uma sequência de etapas, simplificadas no esquema da figura 7 elaborada por Bassanezi [3].

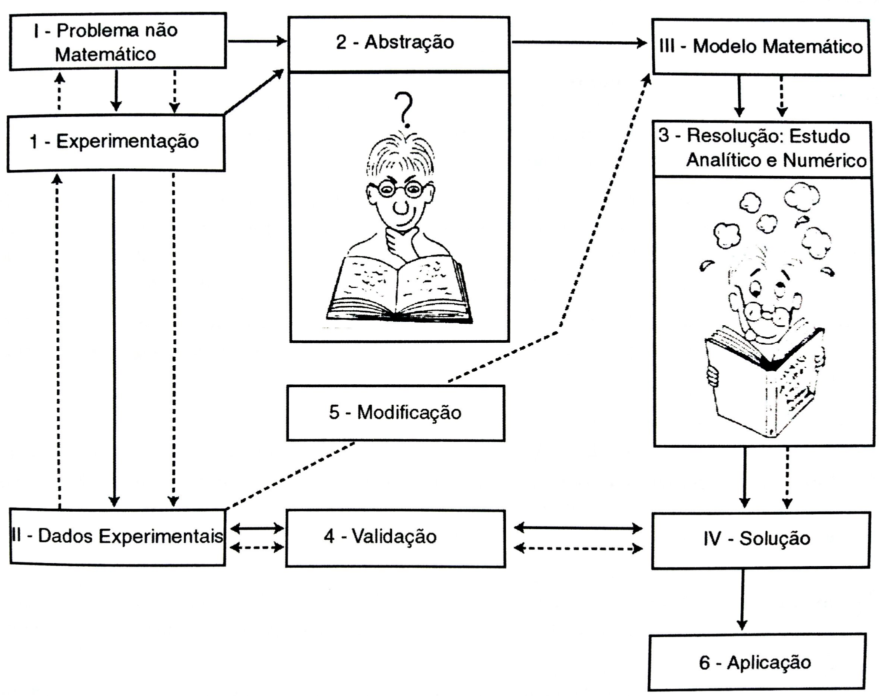


Figura 7: Esquema de uma modelagem matemática (fonte: Bassanezi, 2002, p. 27)

No esquema da figura 7 as setas continuas representam a primeira aproximação, já as setas pontilhadas, a busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado, tornando dessa forma a Modelagem Matemática um processo dinâmico.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO

Ao analisarmos os questionamentos dos nossos alunos a respeito da matemática, sobre sua utilidade, o porquê de estar aprendendo aquilo, devemos também questionar nossas práticas como professores em sala de aula, será que realmente faz algum sentido ensinarmos fórmulas, métodos prontos, usando a matemática apenas para desenvolver determinadas habilidades intelectuais? Ou deveríamos usar instrumentos aplicáveis aos usos cotidianos? Fazendo esses questionamentos Bassanezi [3] destaca a importância de nós professores, valorizarmos o que ensinamos de modo que o conhecimento seja interessante, por ser útil, e estimulante por ser prazeroso, e nos propõe a busca de uma prática de ensino-aprendizagem que possa unir o ensino dos conteúdos necessários a resultados práticos, mostrando aos alunos a importância da matemática pelo fato dela poder ser tão agradável quanto interessante, tratando a matemática dessa forma a modelagem tem se mostrado muito eficaz.

O fato da modelagem tratar de problemas reais e traduzi-los para uma linguagem matemática e também poder ser trabalhada em diversos níveis de complexidade, vai de encontro com nossa proposta de mostrar ao aluno uma matemática mais presente em problemas do cotidiano. Sobre o uso de modelagem matemática no ensino Bassanezi [3] nos diz que:

> ”A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural.”(p.38)

Ainda pensando na modelagem como método de ensino, segundo Campos [7] podemos empregá-la em vários níveis escolares, desde a matemática elementar até a pós-graduação, pois ela pode sofrer alterações para podermos adequá-la, levando sempre em consideração o nível de ensino, o tempo disponível e etc. Ainda segundo Campos [7] temos:

> ”Os principais objetivos da modelagem matemática como estratégia pedagógica são:
>
> - aproximar a Matemática de outras áreas do conhecimento;
> - salientar princípios inerentes à Educação Crítica presentes na Matemática e que são importantes para a formação do aluno;
> - relacionar situações do cotidiano com a Matemática curricular e, assim, fomentar o interesse pela disciplina;
> - estimular a criatividade e incentivar investigações e reflexões;
> - melhorar a compreensão e a apreensão de conceitos matemáticos;
> - desenvolver a habilidade para resolver problemas.”(p.47,48)

O uso da modelagem matemática como método de ensino é um importante instrumento da aplicação da matemática na solução de problemas reais, além disso, cria um ambiente no qual os alunos podem realizar simulações e perceber que um mesmo modelo pode ser usado em diferentes situações. Ainda sobre o uso da modelagem como método de ensino Silva [17] destaca:

> ”...a modelagem matemática consiste em um gradual processo, no qual o sujeito desenvolve suas estratégias e formas de ações para analisar e investigar determinada situação-problema. Consiste em um importante método para a aprendizagem da matemática, pois envolve o desenvolvimento de um comportamento investigativo e reflexivo durante sua ação no estudo de um problema matemático. Pode-se dizer que este processo não se restringe apenas à apropriação dos conceitos e ideias limitados pela situação-problema investigada. Em determinada investigação surge também a possibilidade de abordar outros conceitos e ideias que estão na periferia do problema...”(p.23,24)

4

SUGESTÃO DE ATIVIDADES

Para a elaboração das atividades consultamos Rodrigues [15], Ferreira [10], Delatorre [9], Soares Junior [19], Lamberti [13], Silva, Barone e Basso [18], que trazem situações-problema, aplicações para cadeias de Markov, sugestões de aulas, atividades com o uso de softwares e jogos educacionais.

Apresentamos aqui duas propostas, uma para o ensino fundamental e outra para o ensino médio. Na atividade destinada ao ensino fundamental buscamos que o aluno seja capaz de construir por si só um conceito de probabilidade e criar um modelo probabilístico que resolva as situações ali apresentadas. Já na atividade do ensino médio o intuito de apresentar a modelagem matemática através de um modelo pronto, as cadeias de Markov, fazendo a analise de situações-problema que se enquadrem no modelo apresentado. Todas as atividades e planos de aulas se encontram em anexo no apêndice.

4.1 ENSINO FUNDAMENTAL

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática [5] a finalidade do estudo de probabilidade é fazer com que os alunos percebam que usando experimentações e simulando situações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e fazer a comparação dos seus resultados com a probabilidade prevista por um modelo matemático. Para tanto, precisam de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão.

Para Bussab e Morettin [6] trabalhar com probabilidade se trata de criar modelos probabilísticos:

> "Com suposições adequadas, e sem observarmos diretamente o fenômeno aleatório de interesse, podemos criar um *modelo teórico* que reproduza de maneira razoável a distribuição de frequências, quando o fenômeno é observado diretamente. Tais modelos são chamados *modelos probabilísticos*..."(p.103)

A presente atividade buscava justamente que os alunos, do 8º ano e 7º ano, que ainda não tiveram nenhum contato com definições formais de probabilidade, formulassem seus próprios conceitos de probabilidade e criassem um modelo para resolver situações simples de probabilidade, isso através da realização de experimentos práticos.

A atividade foi realizada com 50 alunos, 27 alunos do 7º ano A e 23 alunos do 8º ano A da Escola Municipal Eugênia Pitta Rangel Veloso, na cidade de Itanhaém, São Paulo.

Começamos com um questionário que buscava entender como o aluno se relacionava com a matemática, a questão que mais chamou a atenção foi "A matemática desperta em você algum sentimento?", 28 alunos responderam essa pergunta com um sentimento negativo, o sentimento mais recorrente foi "medo". Apenas com esses questionários já foi possível perceber que a matemática não é bem vista pela maior parte dos alunos, o que mostra a necessidade de uma mudança na forma de ensinarmos matemática, tentando torná-la mais atrativa, principalmente para os alunos do ensino fundamental, para que os alunos possam encarar a matemática de maneira mais natural, entendendo que ela está presente no seu cotidiano.

Após o questionário iniciamos um breve debate em torno da palavra probabilidade, como é uma palavra muito comum, que aparece na mídia constantemente, muitos alunos disseram já terem ouvido nos noticiários, em programas esportivos, previsão do tempo, entre outros exemplos citados. Alguns alunos tinham uma boa ideia do que se tratava, uma aluna do 7º ano chegou a dizer "probabilidade é a chance de alguma coisa acontecer", com essa ideia de "chance de algo acontecer"demos início ao experimento prático.

Foram formados seis grupos, cada um recebeu uma moeda e um dado. Todos foram convidados a analisar qual era a chance de obtermos "cara"e "coroa" no lançamento de uma moeda, também sobre a chance de obtermos qualquer um dos números de um dado de seis lados, facilmente concluíram que a chance de "cara" no lançamento da moeda era de "uma em duas"e a chance de obtermos 2 no lançamento de um dado era "uma em seis", aproveitando essas colocações pedi que escrevessem o que estavam me falando usando uma fração. Conseguimos estabelecer então que, a chance de tirarmos "cara", assim como a de "coroa"era de $\frac{1}{2}$ e no dado a chance de cada número era $\frac{1}{6}$.

Fiz a proposta de realizarmos dois experimentos, com o objetivo de testarmos os valores encontrados. Primeiro cada grupo devia lançar uma moeda 10 vezes, observar a face voltada para cima e anotar em uma tabela, as informações coletadas foram colocadas na lousa e comparamos os resultados obtidos com os resultados previstos inicialmente; foi observado que os resultados não eram exatamente os previstos, com a exceção de um grupo que obteve 5 "caras"e 5 "coroas", com a união dos resultados ficamos com $\frac{25}{40}$ para "cara"e $\frac{15}{40}$ para "coroa", fazendo a conversão para porcentagem puderam observar que o esperado era 50% para cada e o valor obtido foi $62,5\%$ "cara"e $37,5\%$ "coroa", um pouco longe do valor esperado, pedi para repetirem o experimento, agora com 40 lançamentos por grupo. Novamente os resultados foram reunidos no quadro, $\frac{72}{160}$ para "cara"e $\frac{88}{160}$, em porcentagem 45% "cara"e 55% "coroa", pedi que eles analisassem os novos valores e concluíram que seria difícil chegar no valor esperado, mas que o valor atual era mais próximo.

Figura 8: Alunos do 7º ano realizando experimento com moeda.

De maneira análoga realizamos um experimento com um dado, os alunos observaram que novamente os resultados não eram exatamente os previstos, na primeira parte com 20 lançamentos por grupo, os resultados agrupados nos deram os seguintes valores, $23,8\%$ "face 1", $11,3\%$ "face 2", 15% "face 3", $16,3\%$ "face 4", $16,3\%$ "face 5"e $21,3\%$ "face 6"sendo que o esperado era de aproximadamente $16,7\%$ para cada face. Aumentamos o número de lançamentos para fazer uma nova analise, com 60 lançamentos por grupo, tivemos os seguintes valores aproximados, $20,4\%$ "face 1", $13,8\%$ "face 2", 15% "face 3", $15,4\%$ "face 4", $16,3\%$ "face 5"e $19,1\%$ "face 6". Eles perceberam que novamente com um maior número de lançamentos chegamos mais próximo do resultado esperado.

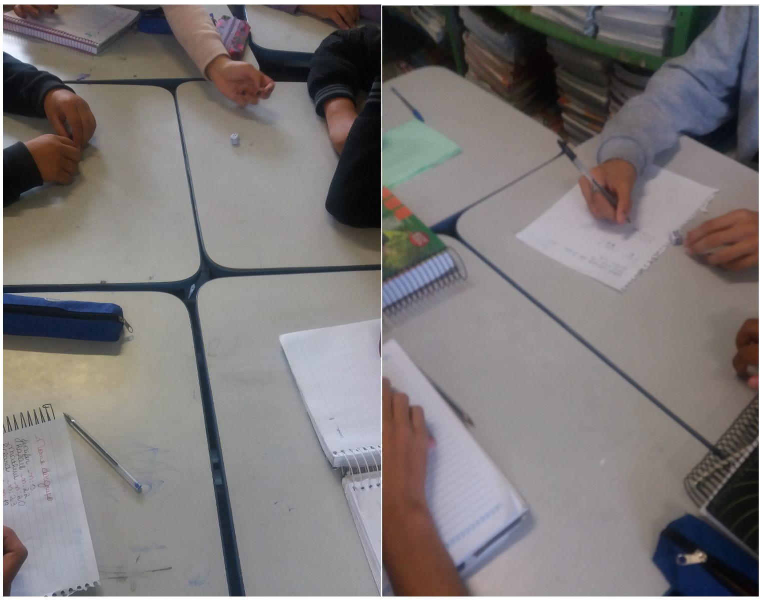


Figura 9: Alunos do 8º ano realizando experimento com dado.

Com uma ideia inicial de como calcular uma probabilidade, definida pelos alunos como uma fração onde no numerador era colocado o valor esperado e no denominador todos os valores possíveis, fizemos uma atividade para mostrar aos alunos que a definição de um espaço amostral correto é primordial, e que deve-se ter cuidado ao determiná-lo.

Foi proposto um jogo, onde eram arremessados 2 dados, os resultados possíveis foram repartidos entre três grupos da seguinte maneira: o *grupo A* ficou com os números 2, 3, 4 e 5; o *grupo B* com os números 6, 7 e 8; e o *grupo C* com os números 9, 10, 11 e 12. A cada arremesso dos dados foi verificada a soma das faces voltadas para cima, recebeu um ponto o grupo que possuía o número da soma, consideramos vencedor o grupo que obtivesse mais pontos depois de 50 lançamentos. Cada aluno teve o direito de escolher de qual grupo faria parte, antes da escolha foram questionados sobre as chances de vitória de cada grupo, se existia algum grupo em vantagem ou desvantagem, a maior parte dos alunos escolheu o *grupo C*, para a maior parte deles o *grupo B* tinha menos chances por possuir um número a menos, e muitos disseram escolher o *grupo C*, pois achavam que era mais fácil saírem números grandes nos dados.

Figura 10: Alunos do 7º ano participando do jogo.

Figura 11: Alunos do 8º ano fazendo a escolha do grupo no jogo.

Antes de iniciarmos os lançamentos informei a eles que o provável vencedor era o *grupo B*, e que no final faríamos o calculo das probabilidades. Durante a realização do jogo alguns alunos reclamaram, dizendo que tinha algum problema no dado, pois estava saindo muito 7, no final o *grupo B* ficou com 22 pontos, *grupo A* com 16 pontos e *grupo C* com 14 pontos.

Após a realização do experimento convidei-os a entender o que havia acontecido. Pedi que me dissessem quando tínhamos soma 6 dos dados, anotando os resultados vimos que pode ser obtida tendo $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$, da mesma forma fizemos a soma 2, que é obtida apenas com $(1, 1)$, completamos todos os valores no quadro e a partir daí eles perceberam que realmente o *grupo B* levava vantagem, dai alertei a eles sobre a importância de uma boa definição de um espaço amostral, visto que se não for observado corretamente, torna nosso cálculo da probabilidade inválido.

Para concluir foi entregue a cada aluno um mapa como da figura 12 e disse para eles que cada um agora era um guarda de trânsito e que aquele mapa era do local onde eles trabalhavam, começariam seu dia de trabalho no *cruzamento A* e a cada 30 minutos eles deveriam mudar de esquina, poderiam escolher qualquer esquina adjacente àquela em que estivessem, cada um faria dez mudanças de esquina e antes mesmo de começarem eu já sabia três cruzamentos que não teria nenhum guarda fiscalizando após essas dez mudanças, ficaram intrigados, eu anotei os cruzamentos em um caderno dizendo que mostraria a eles após as dez mudanças. No final, depois de organizar os resultados no quadro, mostrei o caderno e realmente não havia nenhum aluno nos cruzamentos anotados, todos queriam saber como dava pra saber isso, aproveitei para falar um pouco mais sobre as aplicações da probabilidade e que essa previsão foi possível através do uso de Cadeias de Markov, que usava probabilidade para prever acontecimentos a partir de uma situação inicial já sabida, no nosso caso era o fato de todos começarem no *cruzamento A*, alguns alunos chegaram a repetir o experimento iniciando de outros cruzamentos para verificar se o que eu falava era verdade, alguns alunos do 8º ano fizeram muitos questionamentos, discutimos sobre outras situações nas quais poderíamos aplicar cadeias de Markov.

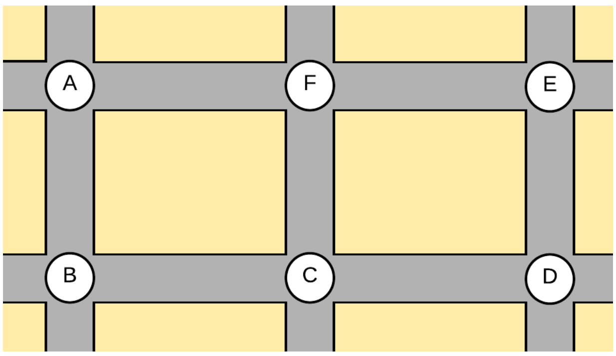


Figura 12: Mapa entregue aos alunos

4.2 ENSINO MÉDIO

A atividade aplicada no ensino médio, foi escolhida buscando mostrar aos alunos do 3º ano, que estão prestes a escolher uma carreira, a importância e a presença da matemática nas mais diversas áreas, relacionando matrizes e probabilidades, conteúdos que para eles são tão distantes, e também apresentando um pouco da modelagem matemática, útil na resolução de problemas das mais diversas áreas, segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio [4]:

> ”No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.”(p.40)

A atividade foi realizada com 20 alunos de 3º ano D, período noturno da Escola Estadual Professora Sílvia Jorge Pollastrini, em Itanhaém, São Paulo.

Antes de começarem a atividade propriamente dita, os alunos responderam um questionário no qual buscamos entender como eles veem a matemática e se conseguem visualizar a aplicação da probabilidade e de matrizes no cotidiano. Dos alunos presentes, três deles não responderam às questões, quinze alunos tiveram praticamente a mesma resposta, dizem que a matemática é importante pois está presente em muitas coisas do cotidiano, os outros dois disseram que não sabem, pois não gostam de matemática. Mesmo a maior parte da classe considerando importante a matemática, os alunos nem sequer lembravam de ter estudado matrizes e probabilidade, o que dificultou um pouco a realização da atividade.

Depois de conversar um pouco com a sala, iniciamos os exercícios, como os alunos apresentaram bastantes dificuldades, os exercícios propostos foram resolvidos com intervenção, na *atividade 1* foi pedido para eles resolverem usando um diagrama de árvore, iniciei a resolução e os alunos conseguiram concluir, o objetivo era calcular a probabilidade de estar no *posto A* após três mudanças de posto, então pedi que calculassem agora a probabilidade após dez mudanças. Imediatamente alguns alunos disseram que seria complicado continuar pois o diagrama já estava muito grande, comecei a falar para eles sobre a modelagem matemática, citando algumas áreas onde podemos usá-las e sua ajuda na resolução de problemas do cotidiano, muitos alunos demonstraram interesse fazendo alguns questionamentos, como, por exemplo, se em psicologia poderia usar a modelagem e também em outras profissões que para eles nunca teriam nada relacionado com matemática.

Figura 13: Alunos do 3º ano durante a realização das atividades.

Apresentei a eles um modelo já existente para resolver esse problema e qualquer outro que tivesse as mesmas características, disse que se tratava de uma situação que chamávamos de cadeias de Markov, analisamos quais eram essas características e fizemos a nova resolução, infelizmente os alunos não lembravam como trabalhar com matrizes, e alguns disseram que nem estudaram o conteúdo, a partir daqui as resoluções foram apresentadas a eles, mas eles não conseguiram realizar os cálculos, mesmo assim ficaram bastante atentos e participativos.

O segundo exercício pedi para construírem o diagrama de transição e também a matriz de transição a partir dos casos apresentados, muitos alunos participaram e conseguiram montar o objetivo, novamente na parte de cálculos apenas acompanharam a resolução.

No último problema fiz a proposta de eles montarem a matriz e o diagrama como no segundo problema, de início eles não acreditaram que o problema poderia ser resolvido com o modelo proposto, analisamos juntos o problema e fizemos a montagem de um diagrama de transição na lousa, propus que montassem a matriz de transição, dois alunos conseguiram, apresentei os cálculos e finalizei com uma conversa com os alunos sobre como a matemática estava presente até mesmo onde a gente não esperava, a participação foi muito boa e até mesmo os alunos que no início dos trabalhos estavam indiferentes participaram bastante.

De maneira geral a atividade foi bastante produtiva, apesar das grandes dificuldades dos alunos que apresentavam muita defasagem de conteúdos, os alunos participaram e se mostraram curiosos com os problemas e a forma como foram solucionados. Muitos questionamentos foram feitos sobre outras situações onde poderíamos usar o mesmo modelo para solução, lembramos que buscamos justamente uma matemática mais atrativa, mostrando alguma aplicação aos conteúdos estudados por eles e por ser muito abrangente as cadeias de Markov se mostram uma excelente ferramenta para ser usada tanto no 2º ano quanto no 3º ano do ensino médio.

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo sendo a probabilidade, uma área da matemática com diversas aplicações e com a possibilidade de ser ensinada com atividades práticas, vemos que ela é pouco trabalhada, principalmente no ensino fundamental, momento que acreditamos ser essencial para fazer com que o aluno passe a enxergar a matemática de maneira diferente da que se apresenta atualmente.

A atividade realizada pelo 7º ano e 8ºano surtiu resultado muito bom, por se tratar de duas salas que leciono, pude observar que durante a realização das atividades os alunos participaram muito mais da aula, até mesmo alunos que normalmente não realizam as atividades ou que apresentam muita defasagem de conteúdos. É obvio que uma atividade diferenciada demanda um pouco mais de trabalho por parte do professor, que deve estar com tudo muito bem planejado, pois deve guiar o aluno no caminho que propôs.

Seguem abaixo relatos de alguns alunos sobre terem ou não gostado desta nova proposta de aula, principalmente comparando com aulas convencionais. De maneira geral todos gostaram e participaram ativamente.

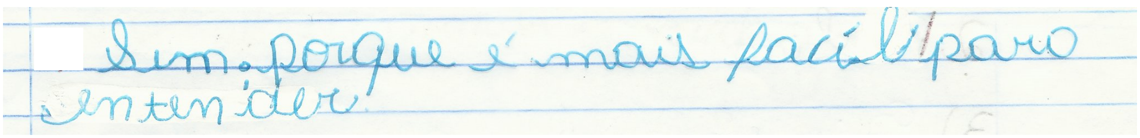


Figura 14: Resposta aluno 1

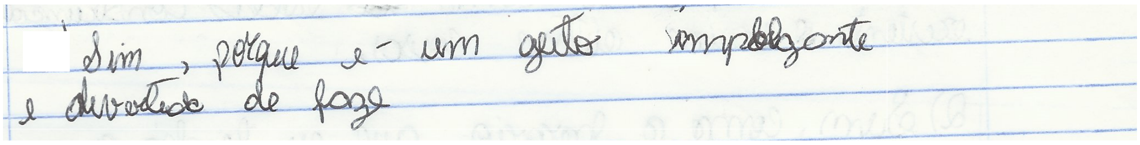


Figura 15: Resposta aluno 2

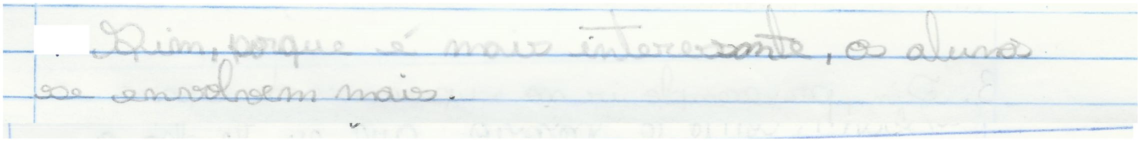


Figura 16: Resposta aluno 3

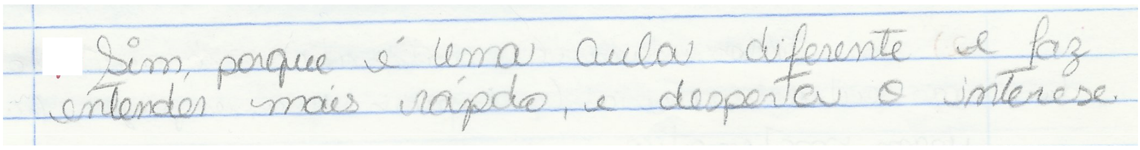


Figura 17: Resposta aluno 4

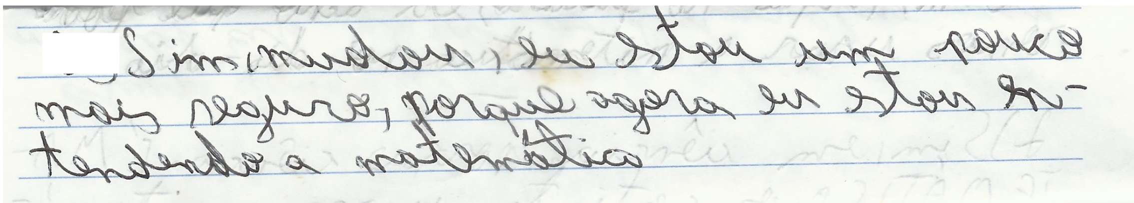


Figura 18: Resposta aluno 5

A tabela 5 traz os resultados gerais (em porcentagem de acertos por questão) da avaliação feita após as atividades, vale frisar que foi o primeiro contato dos alunos com a probabilidade. Os resultados foram muito bons, pois cotidianamente não atingimos, nas salas participantes, 50% de acertos por questão. Destacamos aqui o *aluno 2* e o *aluno 5* , alunos que apresentam muitas dificuldades de aprendizagem, e mesmo assim acertaram 6 de 9 e 8 de 9, respectivamente, na avaliação.

Tabela 5: Resultados da atividade avaliativa 7º ano e 8º ano.

Número da questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Porcentagem de acertos	61	84	73	45	66	66	73	41	52

No Ensino Médio, mesmo não conseguindo trabalhar da maneira desejada, visto que os alunos apresentavam grande defasagem de conteúdos, além do desinteresse inicial, no final da atividade a maior parte dos alunos estava interagindo, fazendo perguntas, querendo saber mais, principalmente sobre as aplicações das cadeias de Markov, o que nos mostra que, mesmo com as dificuldades apresentadas, os alunos ainda podem demonstrar interesse quando o assunto estudado trata de situações reais, que eles conseguem visualizar.

Sobre cadeias de Markov, mesmo sendo algo bastante complexo, notamos que pode ser trabalhada no ensino médio, adaptando-se ao nível dos alunos, como um tópico de probabilidade, uma vez que têm como pré-requisitos apenas matrizes e probabilidade, e permitem resolver problemas de situações cotidianas bastante complexos que teriam solução inviável com as técnicas normalmente ensinadas. Uma opção para facilitar os cálculos que são extensos é o uso de softwares como o Maxima[1] ou até mesmo Microsoft Excel.

Esperamos que este trabalho seja usado por professores para o enriquecimento de suas aulas e levado aos alunos dos ensinos fundamental e médio.

1 Disponível gratuitamente em http://maxima.sourceforge.net/pt/download.html

A

APÊNDICE A

Questionário aplicado a professores, sobre o ensino de probabilidade no ensino fundamental e ensino médio.

1. Em qual rede você leciona?(Se lecionar nas duas, escolha uma e responda o questionário todo baseando-se no trabalho realizado nessa rede)
   ( )Pública
   ( )Privada

2. Em qual estado você leciona?

3. Em qual nível de ensino você leciona?
   ( )Ensino Fundamental
   ( )Ensino Médio
   ( )Ensino Fundamental e Ensino Médio

4. Sobre o ensino de probabilidade no Ensino Fundamental.
   ( )Você o faz de maneira rápida, priorizando outros conteúdos, muitas vezes considerados mais importantes.
   ( )Não prioriza nenhum conteúdo, dando a mesma importância a todo conteúdo ensinado.

5. Ainda sobre o ensino de probabilidade no Ensino Fundamental.
   ( )Tem o hábito de usar atividades praticas, fazendo com que os alunos realizem experimentos para construir o conceito de probabilidade.

( )Já ensinou probabilidade através de atividades práticas mas não faz isso frequentemente.
( )Não costuma utilizar atividades práticas, ou usa muito raramente.

6. Sobre o ensino de probabilidade no Ensino Médio.
   ( )Você o faz de maneira rápida, priorizando outros conteúdos, muitas vezes considerados mais importantes.
   ( )Não prioriza nenhum conteúdo, dando a mesma importância a todo conteúdo ensinado.

7. Ainda sobre o ensino de probabilidade no Ensino Médio.
   ( )Tem o hábito de usar atividades praticas, fazendo com que os alunos realizem experimentos para construir o conceito de probabilidade.
   ( )Já ensinou probabilidade através de atividades práticas, mas não faz isso frequentemente.
   ( )Não costuma utilizar atividades práticas, ou usa muito raramente.

8. Para você, qual é a principal dificuldade no ensino da matemática?

B

APÊNDICE B

Plano de aula para o ensino fundamental.

Objetivo

Fazer com que o aluno crie uma definição de probabilidade através de atividades práticas.

Conteúdo

Probabilidades.

Público alvo

Alunos do 7º e 8º anos do ensino fundamental.

Tempo estimado

4 aulas (50 minutos cada)

Material necessário

Moedas e dados.

Desenvolvimento

Atividade 1

Os Alunos serão separados em grupos, cada grupo receberá uma moeda e um dado, podendo utilizá-los, se necessário, para responder os seguintes questionamentos:

Se lançarmos uma moeda quais são os resultados possíveis?

Se lançarmos um dado quais são os resultados possíveis?

Espera-se que o aluno perceba que ao realizar os experimentos, mesmo sem saber exatamente qual resultado vai acontecer, podemos definir os resultados possíveis, por exemplo, ao lançar um dado de seis faces o resultado certamente será um número do conjunto $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, obter o resultado 7, por exemplo, é impossível.

Mais algumas questões são colocadas:

Qual é a chance de dar cara?

Qual é a chance de dar coroa?

Você acha que essas chances são iguais?

Deve-se trabalhar com o aluno para que ele perceba que, sozinho, quando lançamos uma moeda são dois resultados possíveis, portanto se estamos usando uma moeda honesta as chances são iguais, no caso, uma chance em duas possíveis, chegando nesse ponto, mais uma questão é colocada:

É possível escrever essas chances usando frações?

É importante ressaltar que em todo processo as conclusões devem partir dos alunos, cabendo ao professor apenas conduzir a atividade para que eles cheguem aos objetivos.

De maneira análoga realizamos a atividade usando o dado.

Ao final da atividade o aluno deve perceber que a probabilidade é uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de total de casos possíveis.

Atividade 2

Os alunos agora, ainda em grupo, devem verificar os resultados obtidos na *atividade 1*, através do lançamento da moeda e do dado.

Cada grupo deve lançar a moeda 10 vezes e anotando o resultado obtido, após os 10 lançamentos cada grupo vai verificar o resultado obtido, anotando-os no quadro para a comparação com os resultados previstos inicialmente. Dificilmente em 10 lançamentos teremos 5 caras e 5 coroas, devemos questioná-los sobre a validade da previsão inicial, usando como exemplo o valor mais discrepante obtido entre aos grupos, e também fazendo um cálculo geral, com os resultados de todos os grupos, fazendo-os perceber que quando temos uma probabilidade não quer dizer que o valor obtido vai ser exatamente aquele, mas com um número maior de lançamentos as diferenças tendem a diminuir. Para evidenciar ainda mais isso, os grupos devem realizar novamente os lançamentos, agora com 50 lançamentos cada grupo, esse número de lançamentos já deve ser suficiente para chegarmos a um número mais próximo dos 50% esperados, confirmando a ideia de que a repetição dos lançamentos exaustivamente nos traz um número mais próximo da probabilidade calculada.

De maneira análoga devemos refazer a atividade usando um dado, como temos mais possibilidades envolvidas, o uso do dado é ainda mais efetivo para o objetivo dessa atividade, que é mostrar que dificilmente a probabilidade esperada é obtida, e que conforme aumentamos o número de lançamentos esse resultado se aproxima da probabilidade calculada inicialmente.

Atividade 3

Com uma boa ideia inicial de probabilidade faremos uma atividade para mostrar que uma boa definição do espaço amostral (*total casos possíveis*) é muito importante e que nossa ideia inicial nem sempre é a mais correta.

Dividimos o quadro em três partes, destinando cada uma delas a um grupo que será formado por livre escolha dos alunos, o *grupo A* fica com os números 2, 3, 4 e 5; o *grupo B* com os números 6, 7 e 8; e o *grupo C* com os números 9, 10, 11 e 12.

Um jogo é proposto: lançamos 2 dados, verificamos a soma dos números obtidos nas faces superiores, e recebe um ponto o grupo que tiver o resultado obtido, vence a partida o grupo com o maior número de pontos depois de 50 lançamentos.

Os alunos são convidados a analisar a situação, para isso podemos colocar algumas questões como:

Os grupos tem a mesma chance de vitória?

Qual grupo está em vantagem ou desvantagem?

Casa um fazendo a sua analise da situação deve escolher um grupo, indo até a lousa e escrevendo seu nome no espaço correspondente ao grupo escolhido.

O que se espera aqui é a conclusão intuitiva de que o *grupo B* tem chance menor de vitória, visto que tem uma quantidade menor de números.

Realizamos os lançamentos e anotamos os pontos um a um no quadro, 50 lançamentos devem ser suficientes para que o *grupo B* vença, se necessário estabeleça um número de lançamentos maior para garantir isso. Após a realização do experimento analisamos como cada uma das soma pode ser obtida, o soma 6, por exemplo, pode ser obtida com $(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)$, já a soma 2 é obtido apenas com $(1,1)$, dessa forma o *grupo B* que aparentemente tinha desvantagem, na verdade tinha vantagem em relação aos demais, mostrando a importância de uma analise cuidadosa para determinar o espaço amostral.

Para finalizar os alunos devem resolver as atividades em anexo (*apêndice C*).

C

APÊNDICE C

Atividade para verificação de aprendizagem ensino fundamental.

Para cada um dos experimentos abaixo você deve considerar dados honestos, moedas honestas, etc.

1. No lançamento de um dado temos mais chances em obter a face 2 do que a face 4?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   ( ) Não sei

2. No lançamento de uma moeda a probabilidade de sair cara é igual a $\frac{1}{2}$?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   ( ) Não sei

3. É mais provável obter cara, no lançamento de uma moeda, do que a face 1, no lançamento de um dado?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   ( ) Não sei

4. Retirando-se ao acaso uma carta de um baralho com 52 cartas, é mais provável retirar um rei do que um ás? Obs: um baralho contém 4 cartas de cada, 4 cartas "as", 4 cartas "dois", 4 cartas "três", e assim por diante.

( ) Sim

( ) Não

( ) Não sei

5. Temos duas urnas, a primeira com oito bolas, sendo quatro pretas e quatro brancas, a segunda com seis bolas, sendo quatro pretas e duas brancas. Um jogo consiste em retirar ao acaso uma única bola de uma das duas urnas. Vence o jogo quem retirar uma bola preta. Você teria mais chance de vencer o jogo se escolhesse a:

   ( ) primeira urna;

   ( ) segunda urna;

   ( ) qualquer uma das duas;

   ( ) Não sei.

6. Se lançarmos uma moeda temos probabilidade de $\frac{1}{2}$ tanto para "cara" quanto para "coroa", então se lançarmos uma moeda 50 vezes, a chance de 25 caras é:

   ( ) muito provável de ocorrer;

   ( ) pouco provável de ocorrer;

   ( ) impossível de ocorrer;

   ( ) Não sei.

7. Numa caixa há nove bolinhas numeradas de 1 a 9. A chance de o número 5 sair na primeira retirada é :

   ( ) $\frac{1}{9}$;

   ( ) $\frac{5}{9}$;

   ( ) Não sei.

8. Em um saco foram colocadas 10 bolinhas, 4 são azuis, 4 são verdes e 2 são brancas. Retirando ao acaso uma bolinha qual é a probabilidade dela ser azul?

9. Na escola Eugênia Pitta foram vendidos 250 números de uma rifa, sabendo que eu comprei 5 números dessa rifa calcule a probabilidade de um número meu ser sorteado.

D

APÊNDICE D

Plano de aula para o ensino médio.

Objetivo

Apresentar um pouco do conceito de Modelagem Matemática, analisar e resolver situações-problema usando modelagem com cadeias de Markov.

Conteúdo

Probabilidades, matrizes.

Público alvo

Alunos do 3º ano do ensino médio.

Tempo estimado

4 aulas (50 minutos cada)

Material necessário

Lousa e giz.

Desenvolvimento

Antes de começarem a atividade os alunos devem responder um questionário que busca entender como eles veem a matemática e qual sua relação com ela, as cinco primeiras questões serão respondidas antes da atividade e a sexta questão depois de terminar as três situações problema.

Situação-problema 1

A primeira situação-problema é apresentada com o objetivo de que os alunos resolvam usando os conhecimentos já adquiridos de probabilidade, se necessário serão orientados a resolverem o problema utilizando um diagrama de árvore, dependendo do nível da turma talvez seja necessário iniciar a resolução com eles.

Após a resolução, discutir como cada um chegou ao resultado e propor uma ampliação do problema, pedindo que calculem qual é a probabilidade do guarda estar no posto A no final de seu turno de trabalho de 8 horas, que corresponde a 16 mudanças de posto, espera-se que os alunos percebam que a cada mudança de posto o diagrama de árvore aumenta exponencialmente, tornando inviável a resolução dessa forma.

Nesse momento devemos falar um pouco sobre como é possível criarmos modelos matemáticos para resolvermos alguns problemas, apresentando de uma maneira não tão formal a modelagem Matemática e suas aplicações, citando alguns exemplos e mostrando que está presente nas mais diversas áreas. Finalizamos mostrando que no caso do nosso problema, já existe um modelo criado para resolvê-lo, que serve para resolver qualquer outro problema que se enquadre naquele tipo de situação.

Analisaremos a situação-problema 1, agora já mostrando que se trata de uma situação que se encaixa perfeitamente no que chamamos de cadeia de Markov, devemos apresentar o diagrama de transição, a matriz de transição e o vetor estado, construindo cada um deles com a ajuda dos alunos, para resolução do problema é necessário usar multiplicação de matrizes, no caso do cálculo de um estado muito avançado é aconselhável usar algum software como o Maxima, visto que, a multiplicação com matrizes é bastante trabalhosa e não é nosso foco na atividade. Na resolução dos três primeiros estados devemos fazer a comparação com os resultados obtidos no diagrama de árvore, validando assim o modelo para os alunos.

Situação-problema 2

Na situação-problema 2, tendo como exemplo a situação-problema 1, os alunos devem montar o diagrama de transição, a matriz de transição e o vetor estado inicial, para facilitar o trabalho é oferecido um modelo para que eles apenas completem.

O objetivo da situação-problema 2 é calcular as probabilidades após 4 períodos (4 mudanças de estado), por se tratar de uma matriz $3x3$ e apenas 4 estados é possível fazer os cálculos sem utilizar nenhum software.

Situação-problema 3

A situação-problema 3 é um pouco diferente das duas anteriores, não fica tão explícita a solução utilizando cadeias de Markov, portanto devemos dar o respaldo necessário, ajudando na interpretação do problema, para que o aluno consiga perceber que se trata de uma cadeia de Markov, a partir dessa ajuda inicial montar a matriz de transição e o vetor estado inicial para assim efetuar os cálculos.

Nos três casos devemos mostrar os cálculos para um número elevado de estados, podendo assim mostrar aos alunos uma outra característica presente nas cadeias de Markov, que é tendencia do vetor estado para um determinado valor fixo, que chamamos de *vetor de estado estacionário*.

Vale ressaltar que o objetivo da atividade é mostrar que conteúdos como matrizes e probabilidades podem ser usados de forma conjunta e também mostrar a utilidade da matemática para resolver diversas áreas, através da modelagem, ajudando esses alunos que estão prestes a escolher uma carreira a entender melhor a presença da matemática em muitas situação cotidianas.

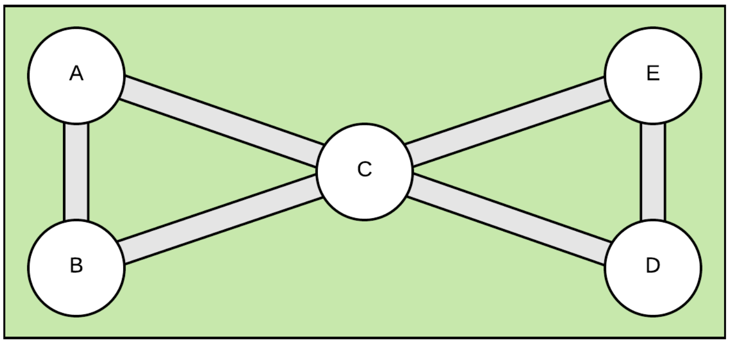
E

APÊNDICE E

Situações-problema e soluções (ensino médio).

Situação-problema 1

Um guarda patrimonial deve patrulhar a praça representada pela figura abaixo. Ele deve ficar em postos de vigia por exatamente 30 minutos, passado esse tempo ele deve se deslocar a um posto de vigia adjacente, por exemplo, se ele está no *posto A* pode ir para o *posto B* ou para o *posto C* com igual probabilidade. Qual é a probabilidade do guarda estar no *posto A* após três mudanças de posto, tendo iniciado a guarda no *posto D*?



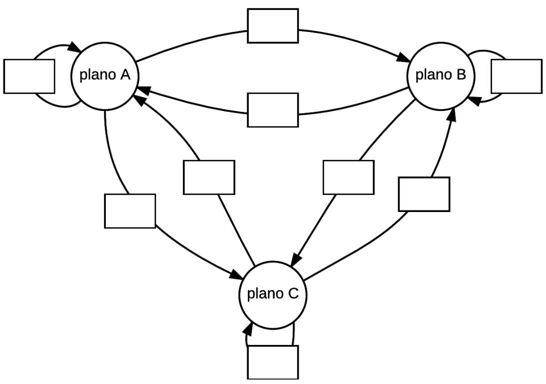
Situação-problema 2

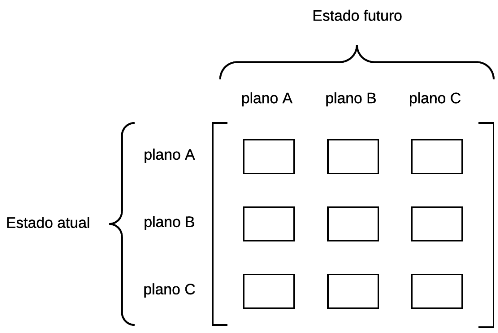
Uma operadora de celular oferece três planos de dados aos seus clientes, *plano A*, *plano B* e *plano C*, a cada período de três meses o cliente pode mudar de plano ou simplesmente permanecer no plano que se encontra. Observando o histórico de mudanças percebeu-se que:

- um cliente que tem o *plano A* tem probabilidade de $0,2$ de mudar para o *plano B*, tem probabilidade de $0,1$ de mudar para o *plano C* e probabilidade de $0,7$ de permanecer no *plano A*.
- um cliente que tem o *plano B* tem probabilidade de $0,2$ de mudar para o *plano A*, tem probabilidade de $0,2$ de mudar para o *plano C* e probabilidade de $0,6$ de permanecer no *plano B*.
- um cliente que tem o *plano C* tem probabilidade de $0,1$ de mudar para o *plano A*, tem probabilidade de $0,1$ de mudar para o *plano B* e probabilidade de $0,8$ de permanecer no *plano C*.

Estando um cliente no *plano C* atualmente, qual é a probabilidade desse cliente estar utilizando cada um dos planos no final de 1 anos(4 períodos)?

Para ajudar na resolução do problema complete o diagrama de transição e a matriz de transição abaixo.





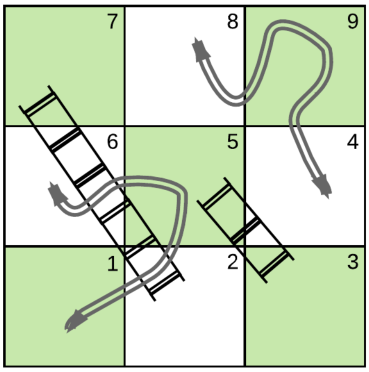
Situação-problema 3

Certamente você deve conhecer ou já deve ter tido contato em algum momento com o jogo "escadas e serpentes", nesse jogo se cair em uma casa onde se encontra uma escada, você avança até a casa do topo da escada, se cair em uma casa onde está uma serpente, você deve voltar à casa do fim da serpente.

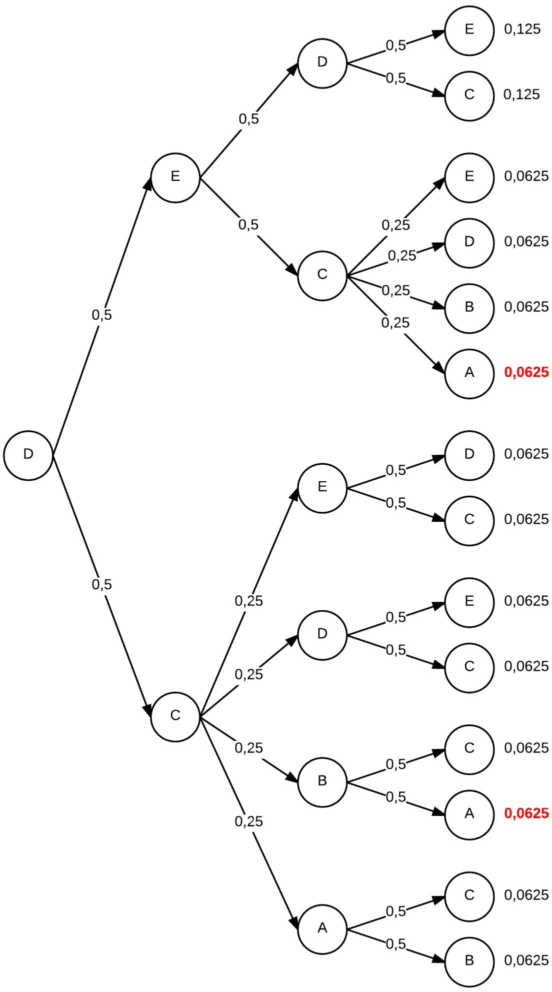
Para essa atividade vamos usar um tabuleiro reduzido, de 9 casas representado pela figura abaixo, para caminhar entre as casas o jogador lança uma moeda, se der cara avançamos uma casa, se der coroa avançamos duas.

Qual é a probabilidade de um jogador estar em cada uma das casas após 3 lançamentos da moeda?

A partir de quantos lançamentos a probabilidade de vitória é maior que 0,5?



Resolução *Situação-problema 1* usando árvore de probabilidades.



Resolução *Situação-problema 1* usando cadeias de Markov.

Temos o vetor estado inicial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,50 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0,50 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

$$x^{(1)} = x^{(0)}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,50 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,50 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 & 0,25 & 0,375 & 0,125 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)}P = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 & 0,25 & 0,375 & 0,125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,50 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 & 0,375 & 0,125 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Tabela 6: Vetores-estado exemplo Situação-problema 1.

n	${x_1}^{(n)}$	${x_2}^{(n)}$	${x_3}^{(n)}$	${x_4}^{(n)}$	${x_5}^{(n)}$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	0,50	0	0,50
2	0,125	0,125	0,250	0,375	0,125
3	0,125	0,125	0,375	0,125	0,250
4	0,156	0,156	0,313	0,219	0,156
5	0,156	0,156	0,344	0,156	0,188
6	0,164	0,164	0,328	0,180	0,164
7	0,164	0,164	0,337	0,164	0,172
8	0,166	0,166	0,332	0,170	0,166
9	0,166	0,166	0,334	0,166	0,168
10	0,167	0,167	0,333	0,167	0,167
11	0,167	0,167	0,333	0,167	0,167
12	0,167	0,167	0,333	0,167	0,167

Resolução *Situação-problema 2*.

Temos o vetor estado inicial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Então:

$$x^{(1)} = x^{(0)}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,17 & 0,16 & 0,67 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)}P = \begin{pmatrix} 0,17 & 0,16 & 0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,218 & 0,197 & 0,585 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = x^{(3)}P = \begin{pmatrix} 0,218 & 0,197 & 0,585 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,251 & 0,220 & 0,529 \end{pmatrix}$$

Tabela 7: Vetores-estado Situação-problema 2.

n	${x_1}^{(n)}$	${x_2}^{(n)}$	${x_3}^{(n)}$
0	0	0	1
1	0,100	0,100	0,800
2	0,170	0,160	0,670
3	0,218	0,197	0,585
4	0,251	0,220	0,529
5	0,272	0,235	0,492
6	0,287	0,245	0,468
7	0,297	0,251	0,452
8	0,303	0,255	0,442
9	0,307	0,258	0,435
10	0,310	0,260	0,430
15	0,315	0,263	0,422
20	0,316	0,263	0,421
25	0,316	0,263	0,421

Resolução *Situação-problema 3*.

Temos o vetor estado inicial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então:

$$x^{(1)} = x^{(0)}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)}P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 & 0,250 & 0,125 & 0,375 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = x^{(3)}P = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 & 0,250 & 0,125 & 0,375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,188 & 0,063 & 0,125 & 0,188 & 0,438 \end{pmatrix}$$

Tabela 8: Vetores-estado Situação-problema 3.

n	${x_1}^{(n)}$	${x_2}^{(n)}$	${x_3}^{(n)}$	${x_4}^{(n)}$	${x_5}^{(n)}$
0	1	0	0	0	0
1	0	0	$0,5$	$0,5$	0
2	$0,25$	$0,25$	0	$0,25$	$0,25$
3	$0,125$	$0,125$	$0,250$	$0,125$	$0,375$
4	$0,188$	$0,063$	$0,125$	$0,188$	$0,438$
5	$0,094$	$0,094$	$0,125$	$0,156$	$0,531$
10	$0,054$	$0,036$	$0,053$	$0,062$	$0,796$
15	$0,023$	$0,016$	$0,023$	$0,027$	$0,911$
20	$0,010$	$0,007$	$0,010$	$0,012$	$0,961$
25	$0,004$	$0,003$	$0,004$	$0,005$	$0,983$
30	$0,002$	$0,001$	$0,002$	$0,002$	$0,992$
35	$0,001$	$0,001$	$0,001$	$0,001$	$0,996$

F

APÊNDICE F

Questionário ensino fundamental.

1. Você considera a matemática importante? Explique.
2. Você consegue visualizar a aplicação da matemática em outras áreas do conhecimento, ou até mesmo em situações cotidianas? Explique
3. Os conteúdos matemáticos estudados em sala apresentam uma utilidade para o nosso dia a dia? Explique.
4. Os conteúdos estudados na matemática, na sua opinião, são interessantes? Por quê?
5. Você tem dificuldades em entender a matemática da forma como os professores apresentam os conteúdos? Explique.
6. Você já ouviu falar de probabilidade? Para você o que é probabilidade?
7. A matemática desperta em você algum tipo de sentimento? Justifique.

   Responder a questão 8 após a realização da atividade.

8. Após a realização das atividades, analisando suas respostas nas questões de 1 até 7, você mudou a sua opinião em relação a alguma questão respondida? O que você achou da atividade?

G

APÊNDICE G

Questionário ensino médio.

1. Você considera a matemática importante? Explique.
2. A matemática desperta em você algum tipo de sentimento? Justifique.
3. Os conteúdos estudados na matemática, na sua opinião, são interessantes? Por quê?
4. No 2º ano vocês estudaram probabilidade e matrizes, você consegue visualizar alguma situação onde esses conteúdos são aplicados de forma conjunta? Explique
5. Sobre matrizes e probabilidades você têm alguma ideia de como esses dois tópicos estão presentes em nosso cotidiano? Explique.

   Responda a última questão após a apresentação.

6. Considerando suas respostas nas questões anteriores, após a apresentação das situações-problema, você mudou de alguma forma sua maneira de ver a matemática ou os conteúdos apresentados.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALENCAR, M. S.; ***Probabilidade e processos estocásticos***, Érica, São Paulo, 2008.

[2] ANTON, H.; RORRES, C.; ***Álgebra linear com aplicações***, Bookman, Porto Alegre, 2001.

[3] BASSANEZI, R. C.; ***Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia***, Contexto, São Paulo, 2009.

[4] BRASIL, Ministério da Educação(MEC);Secretária da Educação Média e Tecnológica(Semtec); ***Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio***, Brasília, 2000.

[5] BRASIL, Ministério da Educação(MEC);Secretária de Educação Fundamental; ***Parâmetros Curriculares Nacionais:Matemática.***, Brasília, 1998.

[6] BUSSAB, W. O. e MORETTIN, L. G.; ***Estatística Básica***,Saraiva, São Paulo, 2004.

[7] CAMPOS, C. R.;WODEWOTZKI, M. L. L.;JACOBINI O. R.;***Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática***, Autêntica, Belo Horizonte, 2013.

[8] DANTAS, C. A. B.; ***Probabilidade : um curso introdutório***, EDUSP, São Paulo, 1997.

[9] DELATORRE, H. T.; ***Aplicações das Cadeias de Markov no Ensino Médio***, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2016.

[10] FERREIRA, S. R. I.; ***Aplicações de matrizes no ensino médio***, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

[11] HAZZAN, S.; ***Fundamentos de matemática elementar, 5***,Atual, São Paulo, 2002.

[12] KEMENY, J. G.; SNELL, J. L.; ***Finite Markov Chains***, Springer-Verlag, New York, 1976.

[13] LAMBERTI, F. A.; ***Cadeias de Markov e aplicações*** Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015

[14] NORRIS, J. R.; ***Markov Chains***, Cambridge University Press, New York, 1997.

[15] RODRIGUES, W. C.; ***Cadeias de Markov: Uma aula para alunos do ensino médio*** Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

[16] ROSS, S. M.; ***Probabilidade : um curso moderno com aplicações***, Bookman, Porto Alegre, 2010.

[17] SILVA, R. S.; ***Cadeias de Markov e Modelagem Matemática: da abstração pseudo-empírica à abstração refletida com uso de objetos virtuais*** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

[18] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.; ***Cadeias de Markov e Geogebra: Modelagem Matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais.*** In: Jornada Nacional de Educação Matemática, 5., Passo Fundo, 2014.

[19] SOARES JÚNIOR, G. P.; ***Cadeias de Markov: Uma Proposta de Ensino Aprendizagem*** Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da conquista, 2014.

[20] TAHA, H. A.; ***Pesquisa operacional***, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2008.