



MIGUEL ALBUQUERQUE ORTIZ

A GEOMETRIA E O INFINITO

Santo André, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

MIGUEL ALBUQUERQUE ORTIZ

A GEOMETRIA E O INFINITO

Orientador: Prof. Dr. MÁRCIO FABIANO DA SILVA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO MIGUEL ALBUQUERQUE ORTIZ,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Ortiz, Miguel Albuquerque

A Geometria e o Infinito / Miguel Albuquerque Ortiz. — 2017.

124 fls. : il.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Geometria. 2. Infinito. 3. Área do Círculo. 4. História da Matemática. I. da Silva, Márcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 18 de outubro de 2017.

Assinatura do autor:



Assinatura do orientador:

Márcio Fabrício da Silva



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Miguel Albuquerque Ortiz, realizada em 21 de agosto de 2017:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Ana Carolina Boero

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Alexandre Lyberopoulos

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lyberopoulos** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Armando Traldi Junior** (Instituto Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Dedico este trabalho à minha filha de quatro patas, Pelanca, e também à minha esposa e fiel companheira, Luana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por proporcionar esse momento de conquista na minha vida e por toda a proteção e força que ele me deu nessa trajetória.

À minha mãe que me criou com muitas dificuldades financeiras e com seu exemplo de luta me fez buscar e alcançar os meus sonhos e objetivos.

À minha irmã Raquel por ter feito parte da minha vida e que hoje, se ainda estivesse aqui, estaria muito feliz com essa minha conquista.

À minha esposa Luana que sempre me incentivou e acreditou no meu potencial desde a época em que nos conhecemos até hoje.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva pela confiança, dedicação e paciência. Muito obrigado por tudo professor!

À todo o corpo docente do PROFMAT da UFABC, cuja disposição e empenho me proporcionou muito conhecimento.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela implantação do PROFMAT e a CAPES pelo auxílio financeiro permitindo a possibilidade de uma dedicação maior do meu tempo ao mestrado.

"Tão correto e tão bonito
O infinito é realmente
Um dos deuses mais lindos!"

(Renato Russo)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar como a Geometria e o Infinito estão relacionados, tomando como ponto de partida e referência a História da Matemática.

Apresentamos como os pitagóricos tiveram contato com este tema, o que na sequência culminou na conhecida "Crise dos Incomensuráveis", resultando no declínio e fim da escola pitagórica. Após esse período, na "Academia de Platão", com o matemático Eudoxo, a "Crise dos Incomensuráveis" foi solucionada. Eudoxo também forneceu apoio teórico, com o Método da Exaustão, para as descobertas de Arquimedes em relação ao cálculo da área do círculo.

Primeiramente, apresentamos e discutimos o que é o Infinito, tratando de temas como o Infinito Real e o Infinito Potencial. Analisamos, com exemplos, os diferentes tipos de infinitos que existem, a partir de conjuntos infinitos e suas propriedades.

Em seguida, passamos a explorar como Arquimedes conseguiu encontrar um algoritmo capaz de calcular, com uma excelente aproximação, a área do círculo, gerando, como consequência, um método eficiente para o cálculo do número π . Também mostramos como as médias geométricas e as médias harmônicas foram utilizadas na descoberta das relações entre as áreas e os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos no círculo.

Ao final, propomos atividades didáticas relacionadas com o tema dessa dissertação para professores e estudantes de Matemática do ensino básico.

Palavras-chave: Infinito e a Geometria, Método de Arquimedes, Área do círculo.

ABSTRACT

This work aims to present how Geometry and Infinity are related. Taking as a starting point and reference the History of Mathematics. We present how the Pythagoreans came into contact with this theme. What then has culminated in the era known as "The Crisis of the incommensurable". Resulting in the decline and end of the Pythagorean School. After this period, at the "Academy of Plato", with the mathematician Eudoxus, the "Crisis of the Incommensurable" was solved. Eudoxus, in addition, provided theoretical support, with the Exhaustion Method, for Archimedes' discoveries in relation to the calculation of the area of the circle.

First, we introduce and discuss what the Infinite is. Dealing with themes such as the Real Infinity and the Infinite Potential. We analyze, with examples, the different types of infinities that exist, from infinite sets and their properties.

Then we come to understand how Archimedes was able to find an algorithm capable of calculating, with an excellent approximation, the area of the circle. Generating, therefore, an efficient method for calculating the π number. We also show how the geometric averages and the harmonic averages were used in the discovery of the relations between the areas and the perimeters of the regular polygons inscribed and circumscribed in the circle.

At the end, we propose didactic activities related to the theme of this dissertation for teachers and students of Mathematics.

Keywords: Infinity and Geometry, Archimedes' Method, Space of the circle

LISTA DE NOMENCLATURAS

- A : ponto A .
- \overleftrightarrow{AB} : reta que passa pelos pontos A e B .
- \overrightarrow{AB} : semirreta com origem no ponto A e que passa pelo ponto B .
- \overline{AB} : segmento de reta com extremos nos pontos A e B .
- AB : medida do segmento de reta \overline{AB} .
- $A - B - C$: $B \in \overline{AC}$ e B está entre os pontos A e C .
- $\triangle ABC$: triângulo com vértices A, B e C .
- $\triangle ABC \sim \triangle DEF$: triângulo $\triangle ABC$ é semelhante ao triângulo $\triangle DEF$.
- $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$: triângulo $\triangle ABC$ é congruente ao triângulo $\triangle DEF$.
- \widehat{BAC} : ângulo com vértice em A formado pelas semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .
- $med(\widehat{BAC})$: medida do ângulo \widehat{BAC} .
- $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$: ângulo \widehat{BAC} é congruente ao ângulo \widehat{EDF} .
- $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$: segmento de reta \overline{AB} é congruente ao segmento de reta \overline{CD} .
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$: segmento de reta \overline{AB} é paralelo ao segmento de reta \overline{CD} .
- $\overline{AB} \perp \overline{CD}$: segmento de reta \overline{AB} é perpendicular ao segmento de reta \overline{CD} .
- $A(\triangle ABC)$: área do triângulo $\triangle ABC$.
- $Pol_{(n)}$: polígono regular com n lados.
- $A[Pol_{(n)}]$: área do polígono regular com n lados.
- $A[Pol_{(2n)}]$: área do polígono regular com $2n$ lados.
- \mathbb{N} : conjunto dos números naturais.
- \mathbb{Z} : conjunto dos números inteiros.
- \mathbb{R} : conjunto dos números reais.

- \mathbb{R}_+^* : conjunto dos números reais positivos e diferentes de zero.
- \in : pertence.
- \mathbb{Q} : Conjunto dos números racionais.
- \mathbb{Q}^c : Conjunto complementar dos racionais em \mathbb{R} ou, simplesmente, conjunto dos números irracionais.
- \mathbb{Q}_+^* : Conjunto dos números racionais não nulos e positivos.
- $d(P, \overrightarrow{AB})$: distância de um ponto P a uma semirreta \overrightarrow{AB} .
- $d(P, r)$: distância de um ponto P a uma reta r .
- M_G : média geométrica.
- M_H : média harmônica.
- p_n : perímetro do polígono inscrito que possui n lados.
- P_n : perímetro do polígono circunscrito que possui n lados.
- $\sup A$: supremo do conjunto A .
- $\inf A$: ínfimo do conjunto A .

CONTEÚDO

LISTA DE NOMENCLATURAS	xv
INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	5
1.1 Definições e Proposições	5
1.1.1 Conjuntos	5
1.1.2 Sequência e Séries	8
1.1.3 Congruência de Triângulos	16
1.1.4 Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos	21
1.1.5 Polígonos	34
1.1.6 Proposições sobre a tangente e a reta tangente à circunferência	45
1.1.7 Médias	47
2 UM POUCO SOBRE A IDEIA DE INFINITO	49
2.1 O que é o infinito?	49
2.1.1 Infinito Potencial	51
2.1.2 Infinito Real	52
2.1.3 A Parte e o Todo no Infinito	54
2.2 O Infinito nas demonstrações geométricas	57
2.2.1 Série dos Números Naturais	58
2.2.2 O Paradoxo de Aquiles e a tartaruga	61
3 EM BUSCA DA ÁREA DO CÍRCULO	65
3.1 Método da Exaustão	65
3.2 Método da dupla redução ao absurdo	67
3.3 Método de Arquimedes	73
3.3.1 O Método de Arquimedes aplicado ao hexágono regular numa circunferência.	73
3.3.2 Generalização do Método de Arquimedes	79
3.3.3 Polígonos inscritos e circunscritos e suas relações	93

4	APLICAÇÕES E ATIVIDADES	103
4.1	Atividades de Construção com Régua e Compasso	103
4.2	Resolução de problemas	115
4.3	Projetos	121
4.3.1	Projeto 1	121
4.3.2	Projeto 2	122
	Bibliografia	123

INTRODUÇÃO

Essa dissertação tem por motivação principal desenvolver uma pesquisa, e ao mesmo tempo, uma experiência com o desenvolvimento de conceitos e ideias que relacionam a Geometria e o Infinito. Tomando como ponto de partida a História da Matemática, pretendemos apresentar as descobertas, as crises e as ideias relacionadas ao conceito de infinito, não apenas por um ponto de vista histórico, mas por uma ótica investigativa e aplicada. Não há evidências conclusivas a respeito da origem da Matemática, mas de acordo com Garbi [15], Contador [7] e Caraça [11], o homem precisou aprimorar suas noções de contagem e medição a partir da invenção da agricultura. Nesse período (por volta de 9.000 a.C.)¹, o homem deixou de ser nômade e começou a produzir o seu próprio alimento. Com isso, o comércio se intensificou, as cidades surgiram. Por consequência, surgiram também os governos e as cobranças de impostos. A Matemática é fruto da revolução agrícola que disparou um longo processo de urbanização da humanidade e intensificou o comércio. É importante citar a análise feita por Caraça [11] a esse respeito:

"... à medida que a vida social vai aumentando de intensidade, isto é, que se tornam mais desenvolvidas as relações dos homens uns com os outros, a contagem impõe-se como uma necessidade cada vez mais importante e mais urgente." (CARAÇA, 1951, p.4)

De acordo com Contador [7], por volta de 5.000 a.C. surgiu a pecuária e a agricultura no vale do rio Nilo e na Mesopotâmia. Por volta de 3.000 a.C. ocorreu a invenção da roda. E por volta de 3.500 a.C. a criação da escrita cuneiforme, criada pelos sumérios. Por volta de 2.700 a.C. ocorreram as construções das pirâmides, tornando evidente os conhecimentos práticos de Geometria dos egípcios. A Matemática no Egito e na Mesopotâmia, nessa época, tinha um caráter indutivo. Garbi [15] escreve:

"Tratava-se, pois, de um aprendizado indutivo (ou empírico), em processo de observação de padrões que se repetiam e que, por indução, leva-

¹ Esse período é chamado pelos historiadores de Revolução Agrícola.

vam os pioneiros a crer que se estava diante de verdades gerais." (GARBI, 2006, p.10)

Ou seja, essa Matemática era feita sem uma demonstração com justificativa lógica. Essa abordagem durou 15 séculos, quando, no século VI a.C., os gregos, a partir do matemático e filósofo Tales de Mileto ² deu início a era da Matemática dedutiva. Sobre esse período, D' Ambrósio [9] escreve:

"Eles praticaram uma matemática utilitária, semelhante àquela dos egípcios, mas ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato, com objetivos religiosos e rituais. Começa assim um modelo de explicações que vai dar origem às ciências, à filosofia e à matemática abstrata." (D' AMBRÓSIO, 2010, p.35)

De acordo com a referência [3], Tales foi a primeira pessoa a tentar provar algum teorema geométrico. Após Tales, por volta de 586 a.C. a 500 a.C., viveu Pitágoras. Em 540 a.C., Pitágoras fundou uma escola³ voltada para o estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática. Sobre esse período, Garbi escreve:

"Embora Tales tenha sido o primeiro a declarar que as verdades matemáticas devem ser provadas pelo raciocínio, acredita-se que foram os pitagóricos os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas." (GARBI, 2006, p.26)

Hipásus de Metaponto (470 a.C.), membro da escola pitagórica, foi responsável pela descoberta das grandezas incomensuráveis, e por consequência, a descoberta da existência dos números irracionais. Essa descoberta deu início ao período conhecido como "Crise dos Incomensuráveis". Também, nessa mesma época, surgiu o filósofo Zenão de Eleia (450 a.C.), autor de importantes paradoxos, dentre esses, foi o criador do paradoxo de Aquiles e a tartaruga. A "Crise dos Incomensuráveis" e os paradoxos de Zenão deram impulso para o fim da escola pitagórica.

Após o fim da escola pitagórica foi fundada por volta de 386 a.C. pelo filósofo Platão⁴, a Academia de Platão. Nessa Academia surgiu um matemático que foi capaz de acabar com a crise dos incomensuráveis, Eudoxo de Cnidos ⁵, este foi responsável pela demonstração do Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis. Eudoxo, também foi o responsável pela demonstração do Método da Exaustão. Vê-se aqui a partir desse

² Tales viveu por volta de 640 a.C. a 564 a.C.

³ Escola pitagórica.

⁴ Platão viveu entre 427 a.C. até 347 a.C.

⁵ viveu no século II a.C.

período, com as demonstrações de Eudoxo, uma relação estreita entre a Geometria e o Infinito.

Após a era platônica, foi fundada a biblioteca de Alexandria. Nessa biblioteca trabalhava Euclides (por volta de 300 a.C.), autor dos 13 livros⁶ que reuniam todo o conhecimento matemático grego, desde à época de Tales até os últimos trabalhos realizados pela escola platônica.

No século III a.C. surge um grande matemático, Arquimedes de Siracusa (por volta de 287 até 212 a.C.). De acordo com Garbi:

"Hoje sabemos que o coeficiente de proporcionalidade da área do círculo em relação ao quadrado do raio é o célebre número π mas, até Arquimedes entrar em cena, nenhum matemático havia encontrado uma forma rigorosa de calculá-lo." (GARBI, 2006, p.81)

Foi na publicação denominada **A Medida de um Círculo** que Arquimedes demonstra que a área do círculo é igual a área de um triângulo retângulo com base e altura iguais ao perímetro e ao raio do círculo, respectivamente. Utilizando o Método da Exaustão, introduzido por Eudoxo, Arquimedes desenvolveu um algoritmo eficiente para o cálculo do número π . E esse é o ponto chave dessa dissertação. Pois é nesse trabalho de Arquimedes que o Infinito e a Geometria aparecem, mais uma vez, estreitamente relacionados.

Levando em consideração que os assuntos apresentados nos parágrafos anteriores são de alta relevância para o currículo básico de Matemática, pretendemos explorar esse período e o tema Geometria e o Infinito nos capítulos dessa dissertação. Outro motivo para essa escolha está relacionado com o grau de dificuldade que os estudantes têm em relação aos números irracionais. Atualmente, apenas a aplicação de uma fórmula como, por exemplo, πr^2 para calcular a área de um círculo não tem motivado os estudantes a aprenderem com prazer a Matemática. Principalmente porque o número π e outros números irracionais como, por exemplo, o $\sqrt{2}$ são vazios de significado para eles. Por isso, acreditamos que a História da Matemática e as demonstrações são de fundamental importância para o resgate do interesse desse estudante. Pensando nesses aspectos, essa dissertação está organizada da seguinte maneira:

- Capítulo 1: é o capítulo que apresenta os princípios, postulados, definições, proposições, teoremas e corolários que fundamentam os conceitos apresentados nos capítulos posteriores.

6 Os Elementos, de Euclides.

- Capítulo 2: nesse capítulo, começamos tratando do Infinito Potencial e Infinito Real. Mostramos que a parte e o todo, no Infinito, podem ser equivalentes, contrariando a intuição de um leigo, por exemplo. Após, tratamos de apresentar as demonstrações geométricas e o Infinito na visão dos pitagóricos através do estudo de séries. E finalizamos esse capítulo abordando o tema relacionado ao paradoxo de Aquiles e a tartaruga.
- Capítulo 3: nesse capítulo, apresentamos os resultados obtidos por Arquimedes em A Medida do Círculo. Começamos o capítulo tratando do tema relacionado ao Método da Exaustão. Na sequência, apresentamos como Arquimedes utilizava o método de dupla redução ao absurdo em suas demonstrações, chegando no resultado de que a área de um círculo de raio r e perímetro P tem área igual à de um triângulo retângulo de base P e altura r . Após, apresentamos o método de Arquimedes de duplicação de polígonos inscritos e circunscritos, para obter, por meio do Método da Exaustão, a área do círculo. E, no final, usamos as médias geométricas e harmônicas para relacionar as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos. Concluímos o capítulo relacionando os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos.
- Capítulo 4: nesse capítulo indicamos atividades de construção com régua e compasso, resolução de problemas e projetos, aplicando os conhecimentos que foram apresentados nos Capítulos 2 e 3.

PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentados princípios, postulados, definições, proposições, teoremas e corolários que fundamentam os conceitos apresentados nos capítulos posteriores.

1.1 DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES

1.1.1 Conjuntos

No início do capítulo 2 e ao longo dessa dissertação aparecem alguns termos, conceitos e definições relacionados a conjuntos. Pretendemos nessa subseção identificar e apresentar esses conceitos.

Conjuntos Numéricos

Abordaremos os conjuntos numéricos da seguinte maneira:

- Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- Conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- Conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad (1.1)$$

- Conjunto dos números irracionais:

$$\mathbb{Q}^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\} \quad (1.2)$$

Supremo e Ínfimo de um Conjunto

A compreensão de Supremo e Ínfimo de um conjunto é de fundamental importância no estudo de séries e sequências convergentes. De acordo com Ávila [12] um conjunto A de números reais é **limitado superiormente** se existe um número real k tal que $a \leq k$ para todo $a \in A$. Do mesmo modo, A é um conjunto **limitado inferiormente** se existe um número real k' tal que $k' \leq a$ para todo $a \in A$. O número real k é chamado de cota superior do conjunto A . E o número real k' é chamado de cota inferior do conjunto A .

Definição 1.1. Chama-se supremo (ou $\sup A$) de um conjunto de números reais A à menor de suas cotas superiores.

Para que um número real seja s seja considerado o supremo do conjunto A é necessário satisfazer as duas seguintes condições:

- i) $a \leq s$ para todo $a \in A$.
- ii) dado qualquer número real $\epsilon > 0$, existe um elemento $a \in A$ tal que $s - \epsilon < a$.

Definição 1.2. Chama-se ínfimo (ou $\inf A$) de um conjunto de números reais A à maior de suas cotas inferiores.

Um número real i será ínfimo de um conjunto A quando satisfazer as duas seguintes condições:

- i) $i \leq a$ para todo $a \in A$.
- ii) dado qualquer número real $\epsilon > 0$, existe um elemento $a \in A$ tal que $a < i + \epsilon$.

No capítulo 2 verificamos, a partir das relações entre conjuntos com uma quantidade infinita de elementos, que a parte e o todo podem ser equivalentes. Dessa forma, entender o que são conjuntos equivalentes e bijeção reforça e dá clareza às ideias e conceitos que são apresentados nesse capítulo.

A seguir, damos algumas definições e proposições que serão utilizados como base em algumas demonstrações apresentadas no capítulo 2.

Conjuntos Equivalentes e Conjuntos Infinitos

Considere o seguinte conjunto finito com n elementos $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

No livro de Lima [18] os Conjuntos Infinitos são definidos da seguinte maneira:

Definição 1.3 (Conjuntos Infinitos). Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, X é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$.

A seguir apresentaremos o que é uma bijeção entre dois conjuntos.

De acordo com Ávila¹ temos a seguinte definição para conjuntos equivalentes:

"Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade, ou a mesma potência, quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência. Em termos precisos, a correspondência de que estamos falando chama-se bijeção." (ÁVILA, 2001, p.33)

Com essa citação, podemos definir o que é um conjunto enumerável.

Definição 1.4 (Conjunto Enumerável). Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a \mathbb{N} .

Ainda tomando como referência o livro do Ávila, na citação apresentada anteriormente, são apresentados dois conceitos sem uma definição prévia: **cardinalidade e bijeção**.

"Diz-se que dois conjuntos quaisquer A e B têm a mesma cardinalidade, ou mesmo número de elementos, se eles forem equipotentes" (ÁVILA, 2001, p.33).

Assim, no livro de Lima², a definição de dois conjuntos com a mesma cardinalidade é apresentada da seguinte maneira:

Definição 1.5. Diz-se que dois conjuntos A e B têm o mesmo número cardinal quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f : X \rightarrow Y$

Ainda no mesmo livro, temos as definições sobre função injetora e sobrejetora, o que nos dá condições de conceituar o que é um bijeção entre dois conjuntos.

Definição 1.6 (Função Injetora). Uma função $f : X \rightarrow Y$ chama-se injetora quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y . Ou seja, f é injetiva quando

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$$

1 Ver a referência [12] da bibliografia.

2 Ver a referência [16] da bibliografia.

Definição 1.7 (Função Sobrejetora). Uma função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetora quando, para qualquer elemento $y \in Y$, existe um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definição 1.8 (Função Bijetora). Um função $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca (ou função bijetora) entre X e Y quando é injetora e sobrejetora.

Entender como se estabelece uma bijeção entre dois conjuntos infinitos possibilitou uma compreensão melhor em relação aos diferentes tipos de infinitos estudados na Matemática.

Ainda no capítulo 2, usamos o "Princípio de Indução Matemática"³, que pode ser anunciado da seguinte maneira:

Princípio 1.1 (Princípio da Indução Matemática). *Suponhamos que $P(n)$ seja uma propriedade relativa aos números naturais, com $n \geq n_0$. Suponhamos que*

- i. $P(n_0)$ é válida.
- ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n + 1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Esse princípio é um recurso importante em demonstrações, principalmente na Aritmética. No capítulo 2, utilizamos esta técnica para demonstrar a validade de uma conjectura feita pelos pitagóricos a respeito do termo geral da série dos números naturais.

1.1.2 Sequência e Séries

No capítulo 2 tratamos de algumas sequências e séries. Alguns conceitos relacionados a progressões e séries convergentes foram apresentados como argumentos sobre dízimas periódicas e, principalmente, para o tratamento que os pitagóricos davam para as séries, assim como uma solução compatível para o paradoxo de "Aquiles e a tartaruga", paradoxo este não solucionado pelos pitagóricos, devido à falta de uma teoria mais consistente a respeito de séries.

³ O "Princípio de Indução Matemática" é retirado do terceiro axioma de Peano.

Assim, apresentaremos algumas proposições e definições sobre sequências e séries, visto que o conhecimento desses conceitos fornecerá uma excelente base para a melhor compreensão dos temas tratados no capítulo 2.

Sequência

De acordo com as referências bibliográficas [12] e [21] chama-se sequência infinita uma função f definida no conjunto dos números naturais. Ou seja

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

É usual indicar a sequência por (a_n) ou

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

que são chamados de termos da sequência. Quando tomamos como domínio de f um conjunto finito $I \subset \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é finita.

Progressão Aritmética (P.A.)

Definição 1.9. Uma progressão aritmética (P.A.) é uma sequência (a_n) em que

$$a_{n+1} - a_n = r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde r é uma constante real, chamada de razão da P.A. A sequência (a_1, a_2, \dots, a_n) para a qual $a_{n+1} - a_n = r$ é chamada de progressão aritmética (finita) com razão r , primeiro termo a_1 e n termos.

No capítulo 2 será apresentado como os pitagóricos conseguiram encontrar um padrão para a soma dos termos de uma P.A., tomando como caso particular a sequência dos números naturais.

Observação 1.1.1. Com a Definição 1.9, é razoável esperar que o termo geral de uma P.A. de razão r , primeiro termo a_1 e n termos é $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, pois

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$\vdots \quad \text{.....} \quad \text{.....} \quad \text{.....}$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r = a_1 + (n-3) \cdot r + r = a_1 + (n-2) \cdot r$$

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-2) \cdot r + r = a_1 + (n-1) \cdot r$$

A prova se dá por indução matemática em n .

1° Passo: para $n = 1$ temos que $a_1 + (n-1) \cdot r = a_1$, de modo que a propriedade

$$P(n) : a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

é válida para $n = 1$.

2° Passo: suponha que $P(n)$ seja válida para $n > 1$.

3° Passo: mostremos que é válida $P(n+1)$.

De fato,

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1) \cdot r + r = a_1 + n \cdot r$$

Portanto, $P(n)$ vale, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Progressão Geométrica (P.G.)

Definição 1.10. Uma progressão aritmética (P.G.) é uma sequência (a_n) de termos não nulos em que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde q é uma constante real, chamada de razão da P.G. A sequência (a_1, a_2, \dots, a_n) para a qual $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ é chamada de progressão geométrica (finita) de razão q , primeiro termo a_1 e n termos.

Observação 1.1.2. Com a Definição 1.10, é razoável esperar que o termo geral de uma P.G. de razão q , primeiro termo a_1 e n termos é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, pois

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \quad \text{.....} \quad \text{.....} \quad \text{.....} \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-3} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

A prova se dá por indução matemática em n .

1°Passo: para $n = 1$ temos que $a_1 \cdot q^{n-1} = a_1$, de modo que a propriedade

$$P(n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

é válida para $n = 1$.

2°Passo: suponha que $P(n)$ seja válida para $n > 1$.

3°Passo: mostremos que é válida $P(n + 1)$.

De fato,

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$$

Portanto, $P(n)$ vale, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.11 (Soma dos n termos de uma P.A.). Dada uma P.A. com n termos, sendo S_n a soma dos n termos, então

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \tag{1.3}$$

onde a_1 é o primeiro termo e a_n é o n -ésimo termo da P.A.

Demonstração. A prova se dá por indução matemática em $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a propriedade

$$P(n) : S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1°Passo: para $n = 1$, temos $\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = a_1$, de modo que $P(n)$ é válida para $n = 1$.

2°Passo: suponha que $P(n)$ seja válida para $n > 1$.

3°Passo: mostremos que é válida para $P(n + 1)$.

De fato,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + a_1 + n \cdot r$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + 2a_1 + 2n \cdot r}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot n + [a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot n + 2a_1 + 2n \cdot r}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot n + a_1 \cdot n + n^2 \cdot r - n \cdot r + 2a_1 + 2n \cdot r}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{2a_1 \cdot n + n^2 \cdot r + 2a_1 + n \cdot r}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{2a_1 \cdot (n+1) + n \cdot r \cdot (n+1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(2a_1 + n \cdot r)(n+1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}$$

Portanto, $P(n)$ vale, $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

Proposição 1.12 (Soma dos n termos de uma P.G.). Dada uma P.G. com n termos, sendo S_n a soma dos n termos, então

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q} \quad (1.4)$$

onde a_1 é o primeiro termo, q é a razão ($q \neq 1$) e n é o número de termos da P.G.

Demonstração. A prova se dá por indução matemática em $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a propriedade

$$P(n) : S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1ºPasso: para $n = 1$, temos $a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{(1 - q^1)}{1 - q} = a_1$, de modo que $P(n)$ é válida para $n = 1$.

2ºPasso: suponha que $P(n)$ seja válida para $n > 1$.

3ºPasso: mostremos que é válida para $P(n+1)$.

De fato,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q} + a_1 \cdot q^n$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n) + (a_1 \cdot q^n) \cdot (1 - q)}{1 - q}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n + a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Portanto, $P(n)$ vale, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

De acordo com Ávila [12], uma sequência (a_n) é convergente se, à medida que o índice n cresce, o elemento a_n vai-se tornando arbitrariamente próximo de um certo número real L , chamado limite da sequência.

Definição 1.13. (Sequência Convergente) Diz-se que uma sequência (a_n) converge para o número real L , ou tem limite L se, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon .$$

Escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.⁴

De acordo com Lima [18] uma sequência (a_n) chama-se monótona quando $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De maneira mais específica, temos:

- (a_n) é uma sequência monótona decrescente quando $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (a_n) é uma sequência monótona crescente quando $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.14. *Toda sequência monótona decrescente e limitada é convergente.*

⁴ Uma sequência que não converge é dita divergente.

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência monótona decrescente e limitada. Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Como (a_n) é uma sequência monótona decrescente, temos

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{n-1} > a_n > a_{n+1} > \dots$$

Como a sequência é limitada, temos que

$$\inf X < (a_n) < \sup X.$$

Considere o número real a tal que $a = \inf X$. Logo, usando a definição 1.13, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

De fato, dado um número real $\epsilon > 0$, o número real $a + \epsilon$ não é cota inferior de X . Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < a_{n_0} < a + \epsilon$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow a + \epsilon > a_{n_0} > a_n > a > a - \epsilon.$$

Assim,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon.$$

Logo,

$$|a_n - a| < \epsilon,$$

o que resulta em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Portanto, a sequência (a_n) é convergente. \square

Observação 1.1.3. Considere a sequência (a_n) dada por $a_n = \left(\frac{1}{b}\right)^n$, com $b \in]1, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$a_1 = \frac{1}{b}, a_2 = \frac{1}{b^2}, a_3 = \frac{1}{b^3}, \dots, a_n = \frac{1}{b^n}, \dots$$

Como $b > 1$, temos que $b^n < b^{n+1}$. Assim, $\frac{1}{b^n} > \frac{1}{b^{n+1}}$, de modo que, $a_n > a_{n+1}$. Logo, (a_n) é uma sequência monótona decrescente. Além disso,

$$0 < b < b^n < b^{n+1}.$$

Por consequência, temos

$$0 < \frac{1}{b^n} < \frac{1}{b} < 1,$$

e então a sequência (a_n) é limitada, com $0 < a_n < 1$. Assim, pelas Definições 1.2 e 1.1 nota-se que a sequência (a_n) possui ínfimo igual a 0 e supremo igual a 1.

Como a sequência (a_n) é monótona e limitada, de acordo com a proposição 1.14, esta sequência converge para um número real L . Em acordo com a Definição 1.13, mostraremos que a sequência (a_n) converge para 0.

De fato, considere um número real $\epsilon > 0$. Como $0 < a_n < 1$, logo $\frac{1}{a_n} > 1 \Leftrightarrow b^n > 1$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, dessa forma temos

$$b^n > b^{n_0} > \frac{1}{\epsilon}$$

$$b^n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{b^n} < \epsilon$$

$$a_n < \epsilon$$

$$|a_n - 0| < \epsilon$$

Assim, de acordo com a Definição 1.13, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Nosso próximo objetivo é estudar a convergência de uma Série Geométrica.

De acordo com Lima⁵, uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ com um número infinito de parcelas.

Definição 1.15. (Série) Dada uma sequência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência (s_n) , tal que

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

⁵ Ver referência [18] na bibliografia.

Definição 1.16. O termo s_n chama termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se existir o limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente**. Caso contrário, a série será **divergente**.

Definição 1.17 (Série Geométrica). Consideremos uma P.G. com uma quantidade infinita de termos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$. A soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ é denominada **série geométrica**.

Proposição 1.18 (Série Geométrica Convergente). Dada uma P.G. infinita de termos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, com razão $0 < q < 1$, temos que esta série converge para um valor

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Demonstração. Sabemos pela Proposição 1.12 que a soma dos n termos de uma P.G. é dada por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q}$$

Como $q \in]0, 1[$, por consequência do resultado obtido na Observação 1.1.3, temos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

□

1.1.3 Congruência de Triângulos

Em algumas das demonstrações geométricas apresentadas nos capítulos 2 e 3 são utilizadas justificativas tomando como recurso a congruência entre triângulos. Desse forma, é conveniente conhecer os principais critérios de congruência entre triângulos.⁶

⁶ As definições e demonstrações a seguir são apresentadas pelo livro de Barbosa [2], e também pela referência [14].

Definição 1.19 (Definição de Congruência). Diremos que dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são congruentes quando $AB = CD$; diremos que dois ângulos \widehat{BAC} e \widehat{EDF} são congruentes quando $med(\widehat{BAC}) = med(\widehat{EDF})$.

Definição 1.20. Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Critérios de Congruência

Nesta dissertação apresentamos um dos critérios de congruência como postulado. Escolhemos o critério Lado, Ângulo, Lado - *LAL* como postulado. Com este, provamos os critérios Ângulo, Lado, Ângulo - *ALA* e Lado, Lado, Lado - *LLL*.

Postulado 1.1 (Critério Lado, Ângulo, Lado - *LAL*). Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ e uma correspondência biunívoca entre seus vértices $ABC \leftrightarrow A'B'C'$, com $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes e indicamos da seguinte maneira

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

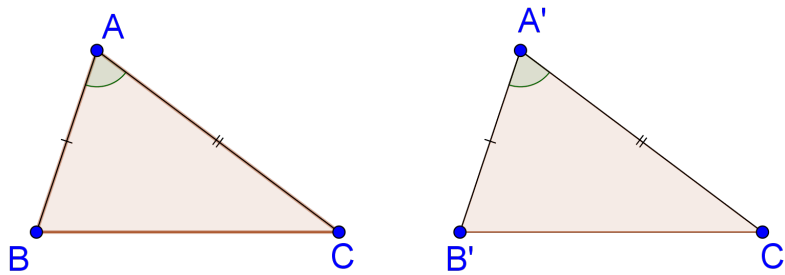


Figura 1: Critério de Congruência *LAL*.

Teorema 1.21 (Critério Ângulo, Lado, Ângulo - ALA). Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ e uma correspondência biunívoca entre seus vértices $ABC \leftrightarrow A'B'C'$, tais que $\widehat{A\hat{B}C} \equiv \widehat{A'\hat{B}'C'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\widehat{A\hat{C}B} \equiv \widehat{A'\hat{C}'B'}$, então, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

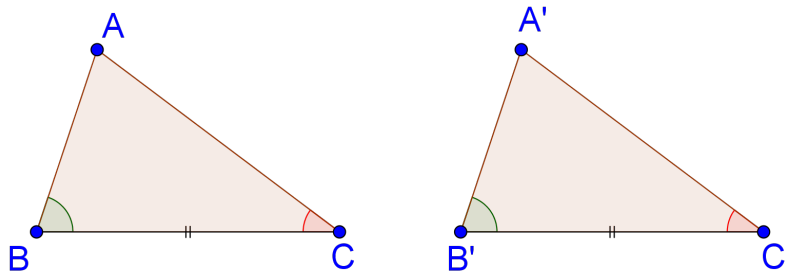


Figura 2: Critério de Congruência ALA.

Demonstração. Considere as condições apresentadas no enunciado do teorema 1.21 (ver figura 2).

Seja D um ponto da semirreta \overrightarrow{BA} , tal que $\overline{BD} \equiv \overline{B'A'}$.

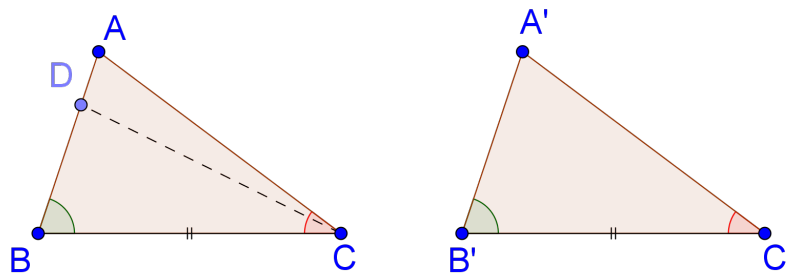


Figura 3: Demonstração do Critério de Congruência ALA.

Assim, os triângulos $\triangle DBC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo critério LAL^7 , pois $\overline{BD} \equiv \overline{B'A'}$, $\widehat{D\hat{B}C} \equiv \widehat{A\hat{B}C} \equiv \widehat{A'\hat{B}'C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

⁷ postulado 1.1.

Por consequência dessa congruência, temos que

$$\widehat{BCD} \equiv \widehat{B'A'C'}$$

Mas, $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'A'C'}$, de onde obtemos que $\widehat{BCD} \equiv \widehat{BCA}$. Como $A \in \overrightarrow{BD}$, concluímos que $D = A$ e $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. \square

Teorema 1.22 (Critério Lado, Lado, Lado - LLL). *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ e uma correspondência biunívoca entre seus vértices $ABC \leftrightarrow A'B'C'$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ então, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.*

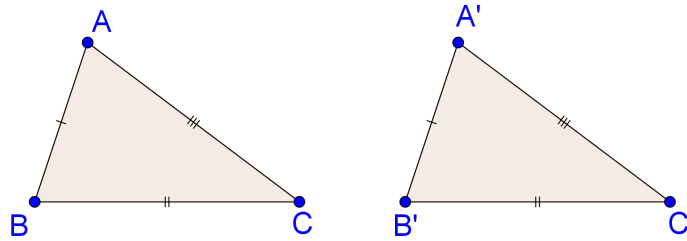


Figura 4: Critério de Congruência LLL.

Demonstração. No plano que contém o triângulo $\triangle ABC$, considere o ponto D no semiplano oposto ao ponto A em relação à reta \overleftrightarrow{BC} , de tal forma que $\overline{BD} \equiv \overline{B'A'}$ e $\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{DBC}$.

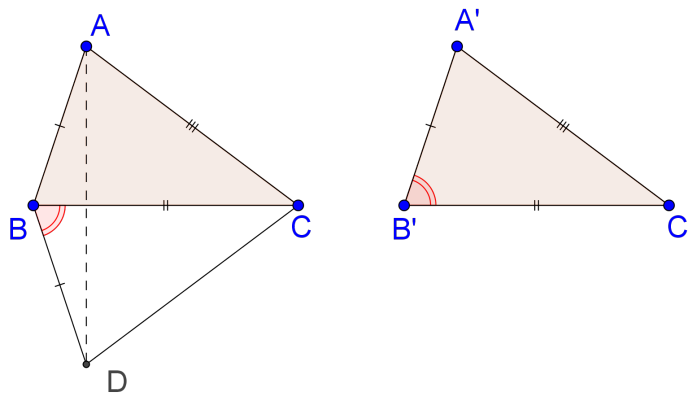


Figura 5: Demonstração - Critério de Congruência LLL.

Como $\overline{B'C'} \equiv \overline{BC}$, $\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{DBC}$ e $\overline{BD} \equiv \overline{B'A'}$, pelo critério *LAL* (postulado 1.1), concluímos que

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle DBC \quad (1.5)$$

Dessa forma temos que

$$\overline{A'B'} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{DB},$$

e então, o triângulo $\triangle DBA$ é isósceles (ver figura 5). Assim $\widehat{BDA} \equiv \widehat{BAD}$. Observe, também, que o triângulo $\triangle ACD$ é isósceles porque

$$\overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \equiv \overline{DC}$$

Logo,

$$\widehat{CDA} \equiv \widehat{CAD}$$

Como $\widehat{BDA} \equiv \widehat{BAD}$ e $\widehat{CDA} \equiv \widehat{CAD}$, obtemos

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$$

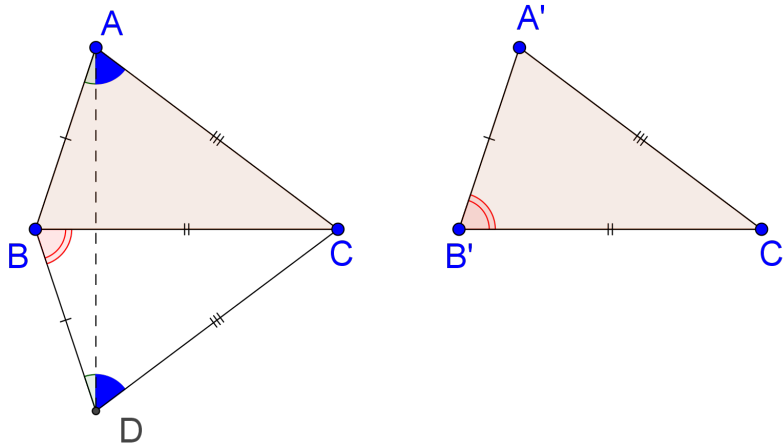


Figura 6: Continuação da Demonstração.

Como $\overline{BD} \equiv \overline{BA}$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DC}$, pelo critério *LAL* obtemos que

$$\triangle BAC \equiv \triangle BDC \quad (1.6)$$

Por 1.5 e 1.6, concluímos que

$$\triangle BAC \equiv \triangle B'A'C'.$$

Tendo como referência a construção apresentada na Figura 5, a demonstração foi apresentada para o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo. Caso o triângulo $\triangle ABC$ fosse retângulo ou obtusângulo, bastaria repetir o processo anterior construindo-se o ponto D a partir do vértice do triângulo $\triangle ABC$ em que o ângulo é reto ou obtuso.

□

1.1.4 Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos

Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

No capítulo 2 são apresentados exemplos e situações onde as grandezas comensuráveis e incomensuráveis são destaques na História da Matemática. Assim, é de fundamental importância compreender o que são essas grandezas e como elas se relacionam com o surgimento dos números irracionais.

- Primeiro, considere um segmento de reta \overline{AB} .
- Para medir \overline{AB} precisamos fixar um segmento padrão de medida u , chamado de segmento unitário.
- Se dividirmos o segmento \overline{AB} em n segmentos unitários, teremos que

$$AB = n.u \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

- Considere outro segmento de reta \overline{CD} , dividido em m segmentos unitários, tal que

$$CD = m.u \text{ com } m \in \mathbb{N}.$$

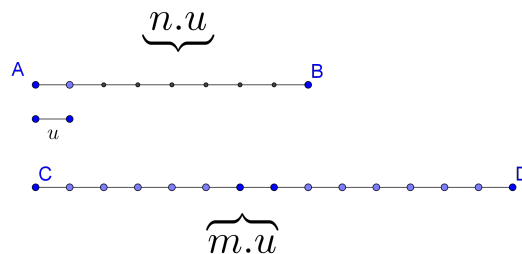


Figura 7: Esboço dos segmentos de reta \overline{AB} e \overline{CD} e o segmento unitário u .

- Observe que $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.
- Como u é uma medida comum tanto para \overline{AB} quanto para \overline{CD} , dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são medidas comensuráveis com a unidade u .

Há casos em que não é possível obter uma mesma unidade u comum aos dois segmentos. Nesse caso, um dos segmentos é considerado **incomensurável** com a unidade.

Exemplo 1.1. Considere um quadrado $ABCD$ de lado unitário u , tal que $AB = BC = CD = AD = u$. Queremos saber se a diagonal \overline{AC} deste quadrado é comensurável com a unidade u .

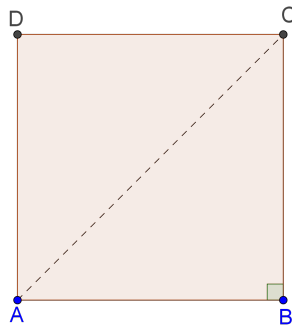


Figura 8: Quadrado $ABCD$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ABC$, teremos:

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ AC^2 &= 2u^2 \\ AC &= u \cdot \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Assim, observe que a razão

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Como $\sqrt{2}$ não é um número racional, concluímos que o segmento \overline{AC} não é comensurável com a unidade u dada pela medida do segmento \overline{AB} .

Observação 1.1.4. $\sqrt{2}$ é um número irracional. Para mostrar isso, suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Assim,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \left(\text{sendo } \frac{a}{b} \text{ uma fração irredutível} \right). \tag{1.8}$$

Elevando ambos os fatores ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ a^2 &= 2b^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Com isso, a^2 é par. Logo, a também é par.⁸ Assim, podemos escrever $a = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Por consequência, podemos reescrever a equação 1.9 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (2k)^2 &= 2b^2 \\ b^2 &= 2k^2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Com isso, b^2 é par. Logo, b também é par. Assim, por 1.9 e 1.10, temos que a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, o que é um absurdo, portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

Teorema de Tales

Proposição 1.23. Se um feixe de retas paralelas determina sobre uma transversal comum segmentos congruentes então determinará, sobre qualquer outra transversal, segmentos congruentes.

Demonstração. Considere quatro retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$, com A, B, C e D sobre uma reta r , A', B', C', D' sobre uma reta s , B entre A e C , C entre B e D e

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \tag{1.11}$$

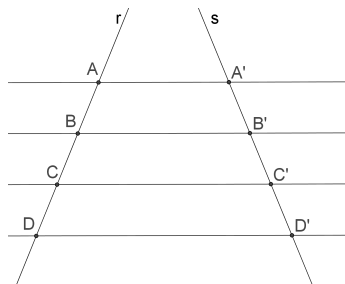


Figura 9: Transversais divididas em segmentos congruentes.

⁸ Se o número é ímpar então o seu quadrado é ímpar. Usando a contrapositiva: se o quadrado de um número não é ímpar então o número não é ímpar. O que equivale à seguinte proposição: se o quadrado de um número é par então o número é par.

- Considere uma reta t que passa por A' e tal que $t \parallel r$. Seja $\{E\} = t \cap \overleftrightarrow{BB'}$.
- Considere uma reta u que passa por B' e tal que $u \parallel r$. Seja $\{F\} = u \cap \overleftrightarrow{CC'}$.
- Considere uma reta v que passa por C' e tal que $v \parallel r$. Seja $\{G\} = v \cap \overleftrightarrow{DD'}$.

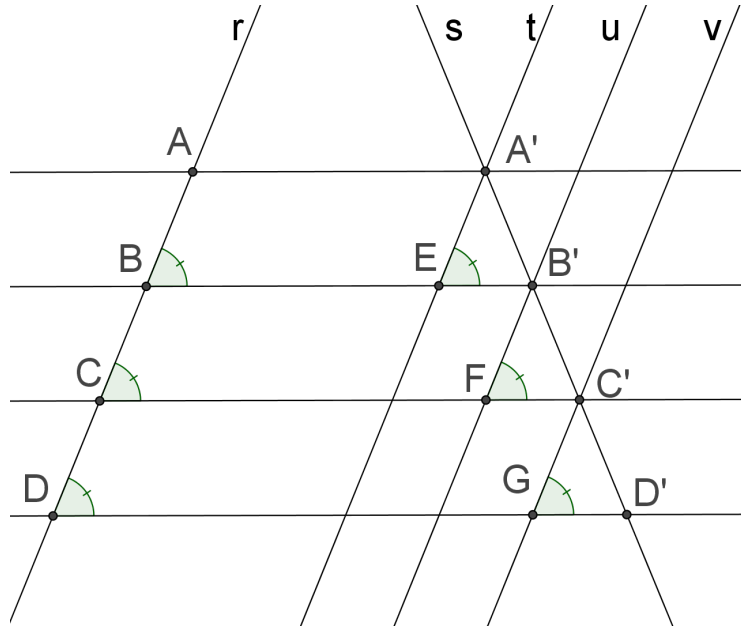


Figura 10: Retas t, u e v .

Como $\overline{AB} \parallel \overline{A'E}$ e $\overline{AA'} \parallel \overline{BE}$, temos o paralelogramo $ABEA'$. Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'E}$, ou seja, $AB = A'E$. Analogamente, mostramos que

$$BC = B'F \text{ e } CD = C'G .$$

Assim, por 1.11, concluímos que

$$\overline{A'E} \equiv \overline{B'F} \equiv \overline{C'G} .$$

Como $r \parallel t$ e $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ temos

$$\widehat{ABE} \equiv \widehat{A'EB'} .$$

E como $t \parallel u \parallel v$ temos:

$$\begin{aligned} \widehat{A'EB'} &\equiv \widehat{B'FC'} \equiv \widehat{C'GD'} \\ \widehat{EA'B'} &\equiv \widehat{FB'C'} \equiv \widehat{GC'D'} . \end{aligned}$$

Assim, pelo critério de congruência ângulo, lado, ângulo (ALA)⁹ concluímos que

$$\triangle A'EB' \equiv \triangle B'FC' \equiv \triangle C'GD'$$

por consequência, obtemos que

$$\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{C'D'}.$$

□

Observação 1.1.5. A demonstração da Proposição 1.23 foi feita para a situação ilustrada na figura 10. Podem ocorrer outras situações, como a ilustrada na figura 11:

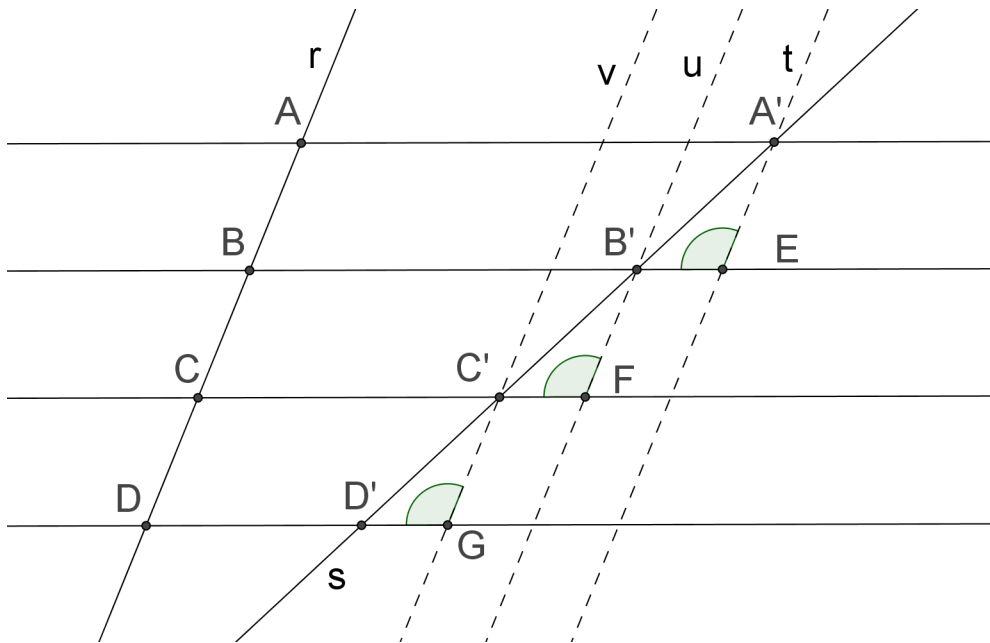


Figura 11: Retas t, u e v .

Neste caso, a demonstração seguiria do paralelismo entre as retas r, t, u e v que os suplementares dos ângulos $\widehat{A'EB'}$, $\widehat{B'FC'}$ e $\widehat{C'GD'}$ são congruentes e, portanto, os triângulos $\triangle A'EB'$, $\triangle B'FC'$ e $\triangle C'GD'$ são congruentes pelo critério ângulo, lado, ângulo - ALA. Assim, também obtemos que

$$\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{C'D'}.$$

De acordo com Garbi [15] para demonstrar o Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis, Eudoxo utilizou o seguinte postulado.

⁹ Teorema 1.21.

Postulado 1.2. Dados quatro segmentos de retas \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} , temos que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

sempre que, dados $m, n \in \mathbb{N}$ então

$$m \cdot AB > n \cdot CD \Leftrightarrow m \cdot EF > n \cdot GH$$

$$m \cdot AB = n \cdot CD \Leftrightarrow m \cdot EF = n \cdot GH$$

$$m \cdot AB < n \cdot CD \Leftrightarrow m \cdot EF < n \cdot GH .$$

Teorema 1.24 (Teorema de Tales). Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Demonstração. Considere quatro retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{DD'}$ e duas retas transversais r e s , de modo que $A, B, C, D \in r$, $A', B', C', D' \in s$, B está entre A e C , C está entre B e D .

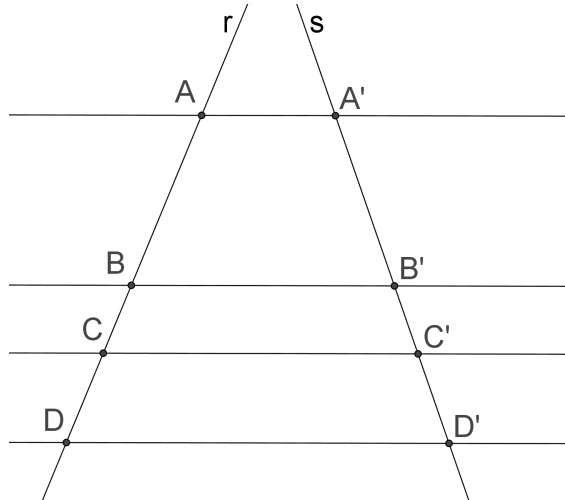


Figura 12: Paralelas e Transversais.

O que queremos mostrar é que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \tag{1.12}$$

Assim, precisamos considerar dois casos.

1º caso: \overline{AB} e \overline{CD} são **comensuráveis**.

Neste caso, existe um segmento unitário de medida u , tal que

$$AB = p \cdot u \text{ e } CD = q \cdot u \text{ com } p, q \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Traçamos um feixe de retas paralelas aos segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, de tal forma que essas paralelas do feixe dividam o segmento \overline{AB} em p partes congruentes, cada parte formando um segmento de tamanho u . Assim, o segmento $\overline{A'B'}$ será dividido também em p partes congruentes. Pela proposição 1.23, estas partes serão congruentes com tamanho unitário u' , de tal forma que

$$A'B' = p \cdot u'$$

Analogamente para o segmento $\overline{C'D'}$, concluímos que

$$C'D' = q \cdot u'$$

Logo,

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Assim, sendo \overline{AB} e \overline{CD} comensuráveis, temos que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

2º caso: \overline{AB} e \overline{CD} são **incomensuráveis**.¹⁰

Novamente, considere

$$CD = q \cdot u \text{ com } q, u \in \mathbb{N}.$$

Considere por hipótese um ponto E sobre a reta r , com $A - E - B$, tal que o segmento de reta \overline{BE} seja comensurável com a unidade u , sendo $BE = m \cdot u$ com $m \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\frac{BE}{CD} = \frac{m}{q} \in \mathbb{Q}$$

¹⁰ Essa parte da demonstração foi inspirada pelo artigo de Ávila [1].

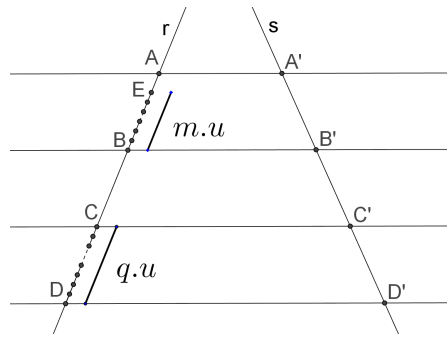


Figura 13: Esboço dos segmentos \overline{BE} e \overline{CD} .

Como temos $A - E - B$ e o ponto E pertence à reta r , temos

$$BE < AB$$

$$q \cdot BE < q \cdot BA$$

$$m \cdot CD < q \cdot BA .$$

Agora, pelo ponto E , traçamos um feixe de retas paralelas aos segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, de tal forma que essas paralelas do feixe dividam o segmento \overline{BE} em m partes congruentes, cada parte formando um segmento de tamanho u . Assim, sendo $\{E'\} = s \cap \overleftrightarrow{EE'}$ com $\overleftrightarrow{EE'} \parallel \overleftrightarrow{AA'}$, o segmento $\overline{B'E'}$ será dividido também em m partes congruentes. Pela proposição 1.23, estas partes serão congruentes com tamanho unitário u' , com $u' \in \mathbb{N}$. De tal forma que

$$B'E' = m \cdot u' .$$

Analogamente para o segmento $\overline{C'D'}$, concluímos que

$$C'D' = q \cdot u'$$

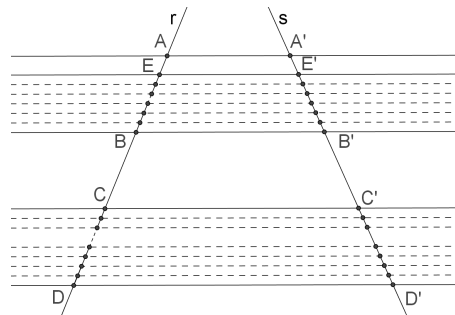


Figura 14: Esboço da construção dos segmentos $\overline{B'E'}$ e $\overline{C'D'}$.

Logo,

$$\frac{B'E'}{C'D'} = \frac{m}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Como $\overleftrightarrow{EE'} \parallel \overleftrightarrow{AA'}$ e $A - E - B$ temos que $A' - E' - B'$. Assim,

$$B'E' < A'B'$$

$$q \cdot B'E' < q \cdot A'B'$$

$$m \cdot C'D' < q \cdot A'B'$$

Logo,

$$m \cdot CD < q \cdot AB \Rightarrow m \cdot C'D' < q \cdot A'B'. \quad (1.13)$$

Repetindo o processo anterior a partir da reta s conseguimos provar a recíproca da implicação (1.13). Ou seja,

$$m \cdot CD < q \cdot AB \Leftrightarrow m \cdot C'D' < q \cdot A'B'. \quad (1.14)$$

De modo análogo demonstra-se que

$$m \cdot CD > q \cdot AB \Leftrightarrow m \cdot C'D' > q \cdot A'B'. \quad (1.15)$$

Nesse caso, basta supor que o ponto E está sobre a reta r de tal forma que temos, $E - A - B$ com $BE > AB$. E ainda, conseguimos demonstrar que

$$m \cdot CD = q \cdot AB \Leftrightarrow m \cdot C'D' = q \cdot A'B'. \quad (1.16)$$

Nesse caso, basta supor $E = A$ sobre a reta r .

Por (1.14), (1.15), (1.16) e, ainda, pelo Postulado de Eudócio 1.2, temos que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

□

Conhecendo assim o Teorema de Tales 1.24, um conceito fundamental que precisa ser definido é a proporcionalidade. No livro de Lima¹¹, temos a seguinte definição:

11 Ver referência [16] na bibliografia.

Definição 1.25 (Proporcionalidade). "Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais." (LIMA, 2002, p.107 – 108.)

Semelhança de Triângulos

De acordo com a referência [2], diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

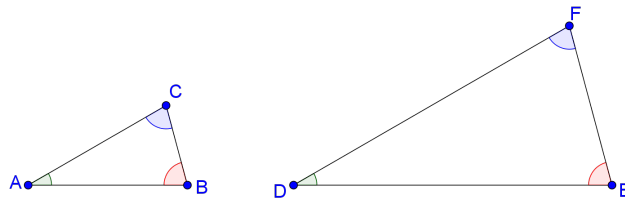


Figura 15: Triângulos ABC e DEF .

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$, isto é, são semelhantes os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ quando

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF} \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{DFE} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \end{array} \right.$$

Critérios de Semelhança

Seguem as demonstrações¹² de cada um dos casos de semelhança de triângulos.

¹² Todas as demonstrações dos critérios de semelhança foram inspiradas pelas demonstrações apresentadas no livro [2] da bibliografia.

Teorema 1.26 (Critério Ângulo, Ângulo - AA). *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca entre seus vértices $ABC \leftrightarrow DEF$, se $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$ e $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

Demonstração. No triângulo $\triangle ABC$ considere:

$$\text{med}(\widehat{BAC}) = \alpha, \text{med}(\widehat{ABC}) = \beta \text{ e } \text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma.$$

Como $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$ então $\text{med}(\widehat{EDF}) = \alpha$.

Como $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ então $\text{med}(\widehat{DEF}) = \beta$.

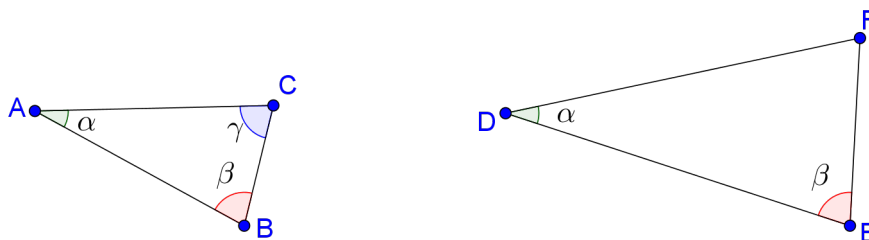


Figura 16: Caso de Semelhança AA.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° então, no triângulo $\triangle ABC$, temos:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

No triângulo $\triangle DEF$, já sabemos que $\text{med}(\widehat{EDF}) = \alpha$ e $\text{med}(\widehat{DEF}) = \beta$, assim, obtemos:

$$\text{med}(\widehat{DFE}) = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Logo,

$$\text{med}(\widehat{DFE}) = \gamma \text{ e } \widehat{DFE} \equiv \widehat{ACB}.$$

Agora, resta-nos provar que os lados correspondentes são proporcionais. Isto é, precisamos mostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \quad (1.17)$$

Sem perda de generalidade, suponha que $AB < DE$ (ver figura 16). Assim, existe um ponto H , com $H \in \overline{DE}$ e $D - H - E$ (ver a figura 17), de tal forma que $\overline{DH} \equiv \overline{AB}$.

- Marque o ponto H no segmento \overline{DE} .
- Trace uma reta r que passa pelo ponto H e que é paralela a \overline{EF} .
- Seja I o ponto de interseção de r com \overline{DF} .
- Obtemos \overline{HI} , com $\overline{HI} \in r$ e $\overline{HI} \parallel \overline{EF}$.

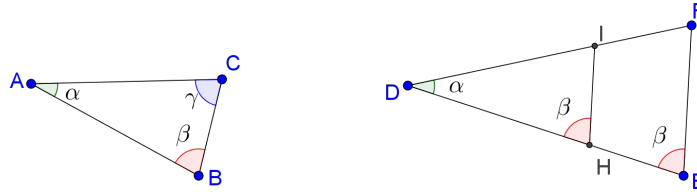


Figura 17: Transportando o \overline{AB} para o segmento \overline{DE} .

Como $\overline{HI} \parallel \overline{EF}$ então $\widehat{DEF} \equiv \widehat{DHI}$, ou seja, $\widehat{DHI} \equiv \widehat{ABC}$. Assim, pelo critério de congruência ângulo, lado, ângulo (ALA)¹³, $\triangle ABC \equiv \triangle DHI$.

Consequentemente, $AB = DH$, $AC = DI$ e $BC = HI$.

No $\triangle DEF$ podemos aplicar o Teorema de Tales 1.24 e obter que $\frac{DH}{HE} = \frac{DI}{IF}$. Como $D - H - E$ e $D - I - F$ então

$$\frac{DH}{DE} = \frac{DI}{DF}. \quad (1.18)$$

Substituindo $AB = DH$ e $AC = DI$ na equação (1.18), obtemos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

De maneira análoga, mostramos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

Portanto, vale a equação (1.17). □

Teorema 1.27 (Critério Lado, Ângulo, Lado - LAL \sim ¹⁴). Se em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ com $\widehat{BAC} \equiv \widehat{FEG}$ tem-se

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}, \quad (1.19)$$

então os triângulos são semelhantes.

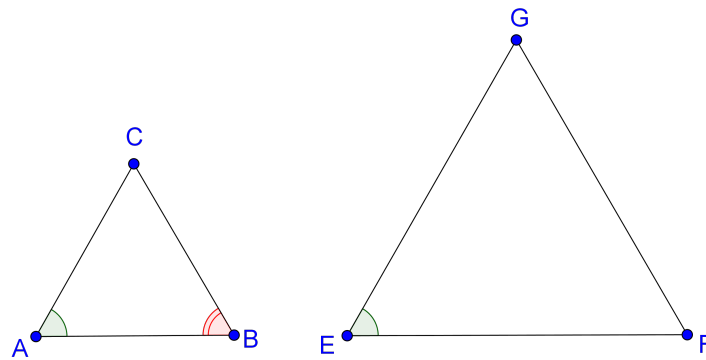


Figura 18: Caso de semelhança $LAL \sim$.

Demonstração. Considere um triângulo $\triangle HIJ$, tal que $\overline{HI} \equiv \overline{EF}$, $\widehat{IHJ} \equiv \widehat{BAC}$ e $\widehat{HJI} \equiv \widehat{ABC}$.

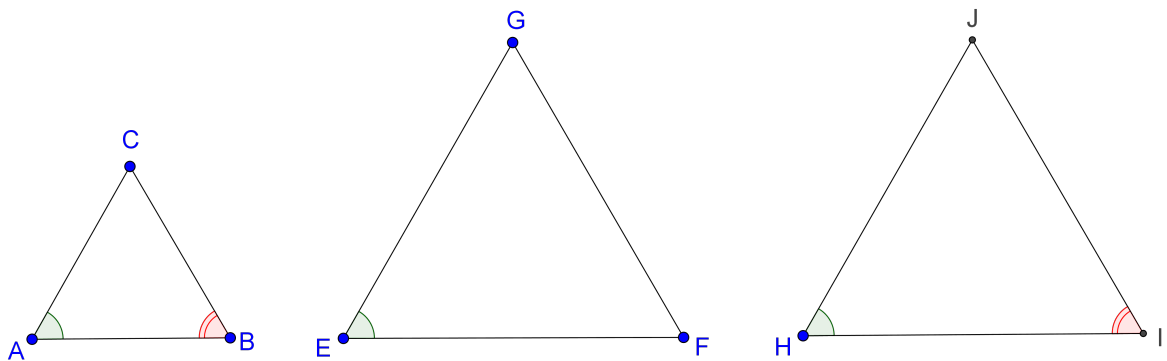


Figura 19: Triângulos: $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ e $\triangle HIJ$.

Observe que os triângulos $\triangle HIJ$ e $\triangle ABC$ são semelhantes pelo critério de semelhança ângulo, ângulo (AA).¹⁵ Logo:

$$\frac{AB}{HI} = \frac{AC}{HJ}. \tag{1.20}$$

¹³ Teorema 1.21.

¹⁴ Para diferenciarmos os critérios lado, ângulo, lado de congruência e semelhança, denotamos este último por $LAL \sim$.

¹⁵ Teorema 1.26.

Como $HI = EF$, obtemos em 1.20 que

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{HJ}$$

Segue de (1.19) que

$$\frac{AC}{HJ} = \frac{AC}{EG}.$$

Dessa forma, $HJ = EG$ e o triângulo $\triangle JHI$ é congruente ao triângulo $\triangle GEF$ pelo critério Lado, Ângulo, Lado (LAL)¹⁶, pois $JH = GE$, $med(\widehat{JHI}) = med(\widehat{GEF})$ e $HI = EF$.

Como $\triangle JHI \equiv \triangle GEF$ e $\triangle JHI \sim \triangle CAB$, temos que

$$\triangle GEF \sim \triangle CAB.$$

□

1.1.5 Polígonos

Especificamente no capítulo 3 tratamos de polígonos inscritos e circunscritos para ilustrar o método da exaustão. Nesta subsecção, apresentamos algumas definições e proposições que fornecem base para alguns argumentos utilizados no capítulo 3.

Definição 1.28 (Polígonos). Dados n pontos distintos de um plano A_1, A_2, \dots, A_n , com $n > 3$, três a três não colineares¹⁷ tais que dois segmentos quaisquer com extremidades nos pontos dados quando se cruzam sua intersecção é uma das extremidades dos dois segmentos, chamamos de polígono à reunião

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}.$$

Definição 1.29 (Polígono Convexo). Um polígono é convexo quando a reta que passa por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n - 2)$ vértices num mesmo semiplano determinada por ela.

¹⁶ Postulado 1.1.

¹⁷ Consideramos pontos consecutivos os pontos A_{n-1}, A_n, A_1 , assim como A_n, A_1, A_2 .

Exemplo 1.2. A figura 20 ilustra um exemplo de polígono convexo, enquanto que a figura 21 ilustra um polígono não convexo.

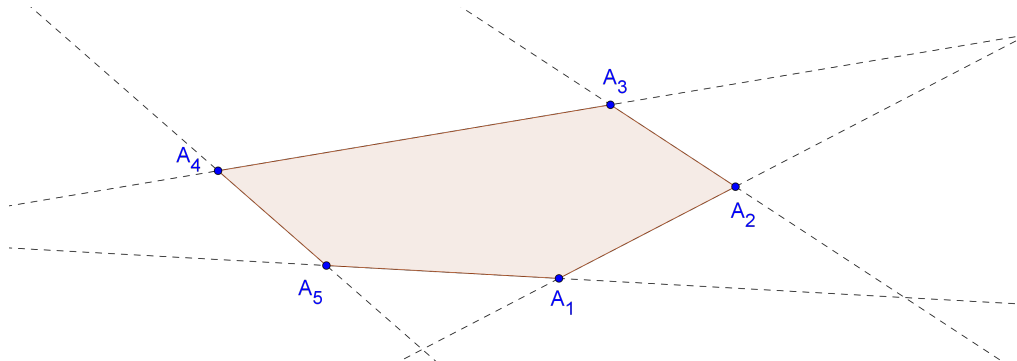


Figura 20: Polígono Convexo.

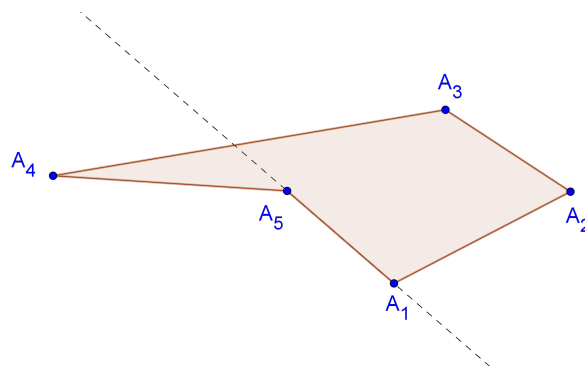


Figura 21: Polígono não Convexo.

Observe na figura 21 que o vértice A_4 está no semiplano oposto aos pontos A_3 e A_2 em relação à reta $\overleftrightarrow{A_1A_5}$.

Definição 1.30 (Polígono Regular). Um polígono convexo é regular se seus lados forem congruentes e seus ângulos internos forem congruentes.

As próximas duas definições foram retiradas diretamente do livro *IV "Os Elementos"* de Euclides [4] e são a base para o estudo desenvolvido por Arquimedes no desenvolvimento do seu método para o cálculo da área do círculo. Esse assunto será mais aprofundado no capítulo 3.

No livro *IV* de "Os Elementos", a definição 3 é apresentada da seguinte maneira:

"Uma figura retilínea é dita estar inscrita em um círculo, quando cada ângulo da inscrita toque a circunferência do círculo." (BICUDO, 2009, p.187)

Assim, podemos adaptar essa definição para polígonos inscritos em círculos.

Definição 1.31 (Polígono Inscrito). Um polígono está inscrito em um círculo, quando cada vértice do polígono pertence à circunferência que delimita o círculo.

A definição 4 dada por Euclides é apresentada da seguinte maneira:

"E uma figura retilínea é dita circunscrita a um círculo, quando cada lado da circunscrita seja tangente à circunferência do círculo."(BICUDO, 2009, p.187)

Adaptando essa definição para polígonos circunscritos em círculos, temos:

Definição 1.32 (Polígono Circunscrito). Um polígono está circunscrito a um círculo, quando cada lado do polígono é tangente à circunferência que delimita o círculo.

Definição 1.33 (Mediatriz). Dados dois pontos distintos A e B num plano π , a mediatriz de \overline{AB} é o lugar geométrico dos pontos P de π que equidistam de A e B .

Observação 1.1.6. A partir da definição 1.33, mostra-se que a mediatriz é uma reta perpendicular a \overline{AB} e que passa pelo ponto médio de \overline{AB} .

Proposição 1.34 (Circuncentro). As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

Demonstração. Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$. Seja r a mediatriz do lado \overline{AB} e seja s a mediatriz do lado \overline{BC} . Seja $\{D\} = r \cap s$, que existe pois, caso contrário, teríamos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.

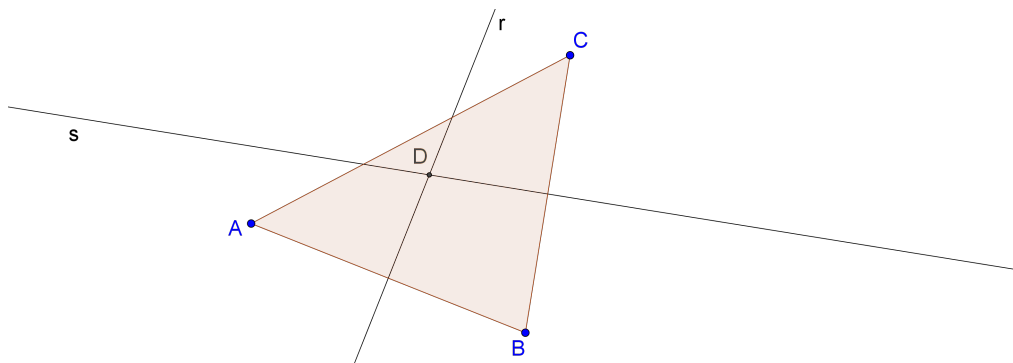


Figura 22: Triângulo $\triangle ABC$.

Como r é mediatriz de \overline{AB} , logo, $DA = DB$. Como s é mediatriz de \overline{BC} , logo, $DB = DC$. Assim, $DA = DC$, donde temos que D pertence à mediatriz do lado \overline{AC} . Logo,

as três mediatrizes do triângulo $\triangle ABC$ se interceptam no ponto D , que é conhecido como **circuncentro**. □

Corolário 1.35. *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

Demonstração. De fato, basta encontrarmos o circuncentro do triângulo,¹⁸ o qual é o centro do círculo que circunscreve o triângulo, pois o circuncentro, por construção, é equidistante dos três vértices do triângulo. Assim, o raio do círculo terá medida igual à medida do segmento que une o circuncentro a qualquer um dos vértices do triângulo. □

Proposição 1.36 (Polígono Regular Inscrito). *Todo polígono regular está inscrito a uma circunferência.*

Demonstração. Considere um polígono regular $A_1A_2 \dots A_n$ com n lados. Pelo Corolário 1.35 sabemos que existe uma circunferência λ que passa pelos vértices A_1, A_2 e A_3 , cujo centro é o ponto O , circuncentro do triângulo $\triangle A_1A_2A_3$.

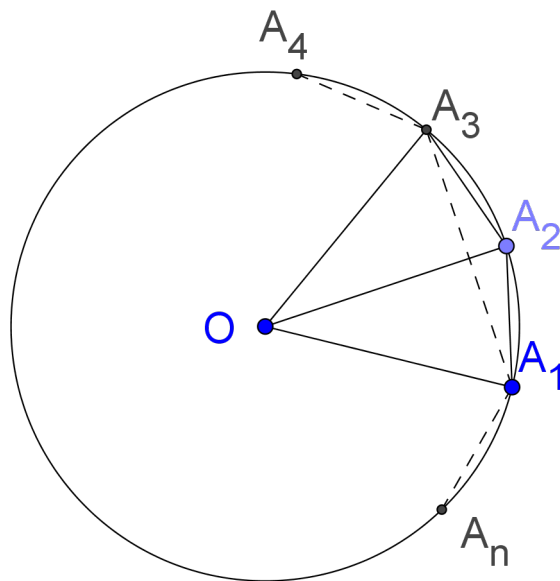


Figura 23: Demonstração da existência do polígono inscrito.

Como $\overline{OA_1} \equiv \overline{OA_2}$ temos que o triângulo $\triangle A_1OA_2$ é isósceles, logo,

$$\widehat{OA_1A_2} \equiv \widehat{OA_2A_1} .$$

¹⁸ veja a proposição 1.34.

O triângulo $\triangle A_2OA_3$ também é isósceles, logo,

$$O\widehat{A_2A_3} \equiv O\widehat{A_3A_2} .$$

Como o polígono $A_1A_2 \dots A_n$ é regular, pela Definição 1.30 sabemos que

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \overline{A_3A_4} \equiv \dots \equiv \overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_1} .$$

Além disso, pela mesma definição de polígono regular, sabemos que

$$A_1\widehat{A_2A_3} \equiv A_2\widehat{A_3A_4} .$$

Assim,

$$A_1\widehat{A_2O} \equiv A_4\widehat{A_3O}$$

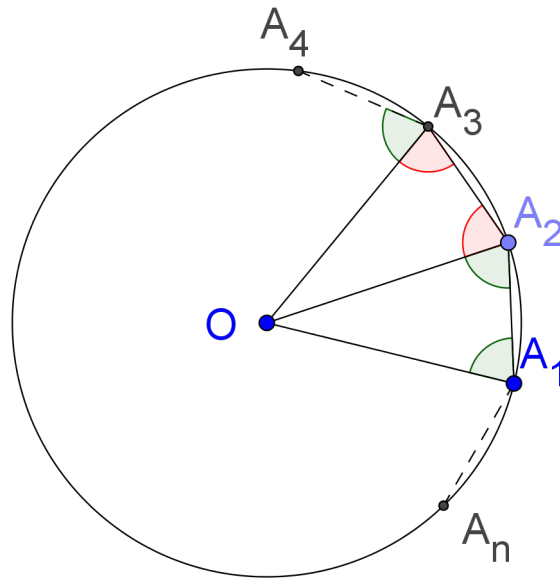


Figura 24: Continuação da demonstração da existência do polígono inscrito.

Como $\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_3A_4}$, $A_1\widehat{A_2O} \equiv A_4\widehat{A_3O}$ e $\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3}$ (pois O é circuncentro), concluímos, pelo critério de congruência *LAL*, que

$$\triangle OA_2A_1 \equiv \triangle OA_3A_4 ,$$

donde segue que

$$\overline{A_1O} \equiv \overline{A_4O} .$$

Assim, provamos que o ponto A_4 pertence à circunferência λ .

O mesmo processo de demonstração pode ser utilizado para provar que os pontos A_5, A_6, \dots, A_n do polígono regular $A_1A_2 \dots A_n$ pertencem a λ .

Portanto, o polígono regular $A_1A_2 \dots A_n$ está inscrito ao círculo delimitado por λ . \square

Definição 1.37. Dado um ângulo $B\hat{A}C$, dizemos que um ponto P pertence ao interior do ângulo $B\hat{A}C$ se P, B estiverem do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{AC} e se P, C estiverem do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{AB} .

Definição 1.38 (Bissetriz). Dado um ângulo $B\hat{A}C$, a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ é a semirreta \overrightarrow{AP} tal que P está no interior do ângulo $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}P \equiv P\hat{A}C$.

A partir da congruência de triângulos (caso ângulo - lado - ângulo) mostra-se que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos (do interior do ângulo) que equidistam dos lados do ângulo.

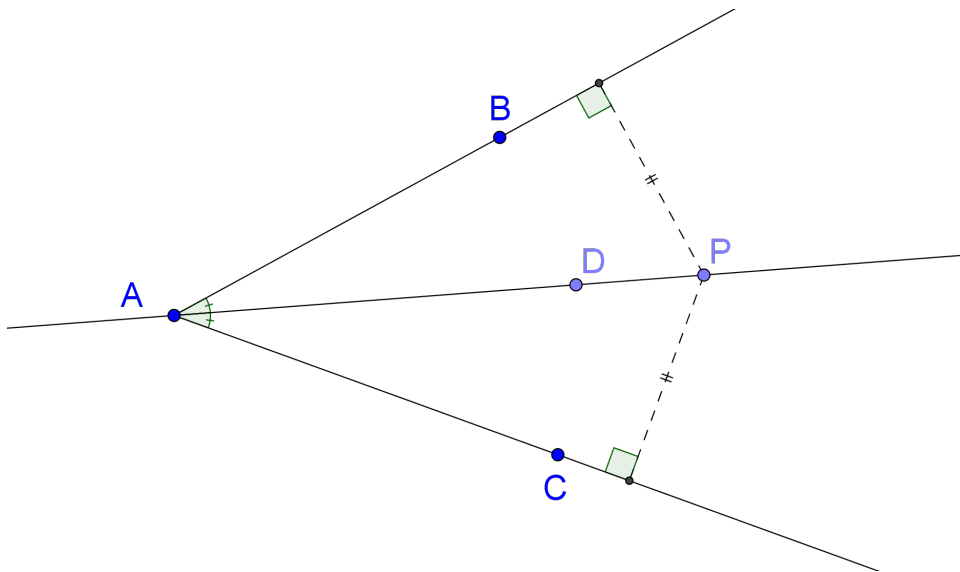


Figura 25: Bissetriz.

Definição 1.39 (Projeção Ortogonal). Considere uma reta r , um ponto P e uma reta s perpendicular à reta r , com $P \in s$. Seja $\{P'\} = s \cap r$. Assim, o ponto P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r .

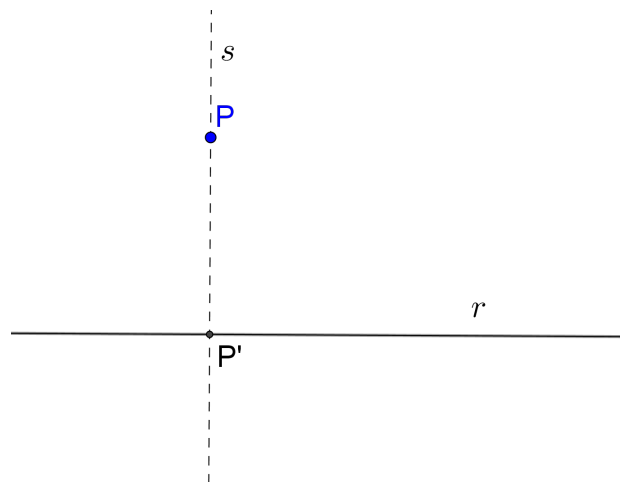


Figura 26: Projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r .

Definição 1.40 (Distância de um ponto a uma reta). A distância de um ponto P à uma reta r será indicada por $d(P, r)$. Sendo P' a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r , temos então que

$$d(P, r) = PP' .$$

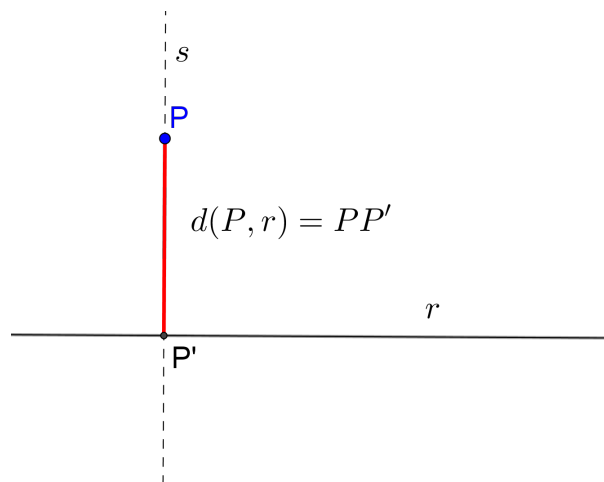


Figura 27: Distância do ponto P à reta r .

Proposição 1.41 (Incentro). *As três bissetrizes de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto.*

Demonstração. Nessa demonstração seguiremos os seguintes passos:

- Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$.
- Seja \overrightarrow{AD} a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, tal que $D = \overrightarrow{AD} \cap \overline{BC}$.
- Seja \overrightarrow{BE} a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, tal que $E = \overrightarrow{BE} \cap \overline{AC}$.
- Seja I o ponto de interseção das bissetrizes \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BE} .

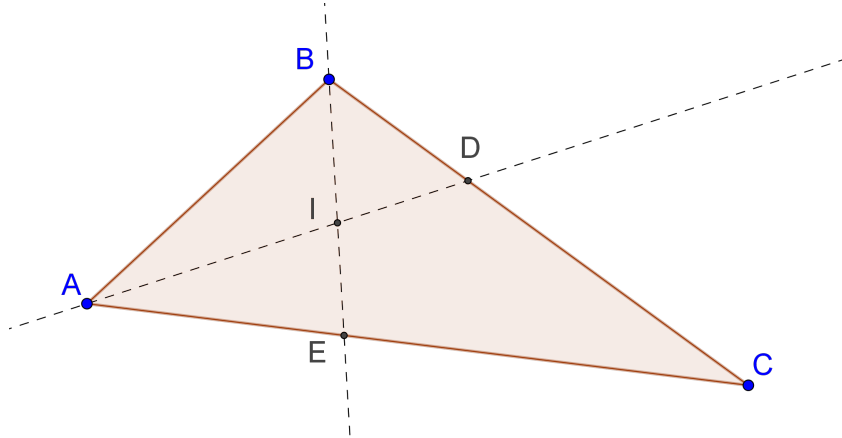


Figura 28: Encontro das bissetrizes de um triângulo.

Como $I \in \overrightarrow{AD}$, temos

$$d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{AC}) .$$

Como $I \in \overrightarrow{BE}$, temos

$$d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{BC}) .$$

Com isso obtemos que

$$d(I, \overline{AC}) = d(I, \overline{BC}) ,$$

de modo que o ponto I também pertence à bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Isso prova que o ponto I , chamado de incentro, pertence à interseção das três bissetrizes do triângulo $\triangle ABC$.

□

Corolário 1.42. *Todo triângulo possui uma circunferência inscrita.*

Demonstração. Para encontrar uma circunferência inscrita a um triângulo qualquer, seguimos os seguintes passos:

- Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$.

- Encontre o incentro I (ponto de encontro das bissetrizes).
- Trace uma reta r perpendicular ao lado \overline{AB} .
- Seja $\{D\} = r \cap \overline{AB}$.
- Trace a circunferência com centro em I passando em D .

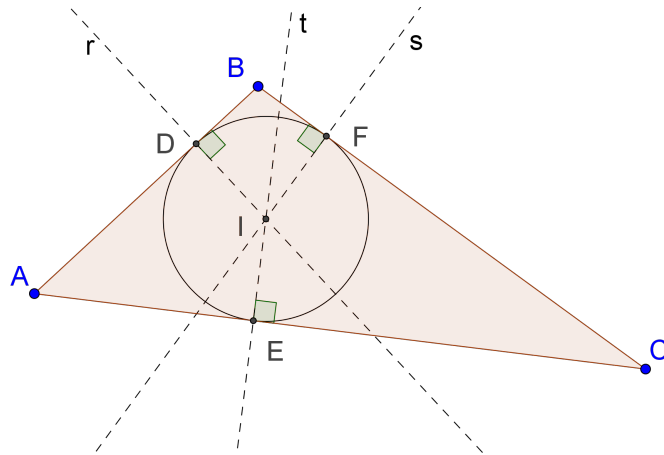


Figura 29: Triângulo circunscrito.

Justificativa:

Sendo s e t as retas perpendiculares aos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, $\{E\} = t \cap \overline{AC}$, $\{F\} = s \cap \overline{BC}$ e I o incentro do triângulo $\triangle ABC$, temos que

$$\overline{DI} \equiv \overline{EI} \equiv \overline{FI}.$$

Assim, a circunferência com centro em I que passa pelos pontos D , E e F é a circunferência inscrita no triângulo $\triangle ABC$.

□

Definição 1.43 (Centro do polígono regular). O centro de um polígono regular é o centro comum (incentro e circuncentro) das circunferências circunscrita e inscrita ao polígono.

Definição 1.44 (Apótema). Apótema de um polígono regular é o segmento de reta com uma extremidade no centro do polígono e a outra no ponto médio de um lado.

Da regularidade do polígono segue que o apótema de um polígono regular é perpendicular ao lado do polígono.

Proposição 1.45 (Polígono Regular Circunscrito). *Todo polígono regular admite uma circunferência inscrita.*

Demonstração. Considere o polígono regular $A_1A_2 \dots A_n$ com n lados. Pela Proposição 1.36, existe uma circunferência de centro O que é circunscrita ao polígono. Assim,

$$\triangle A_1OA_2 \equiv \triangle A_2OA_3 \equiv \triangle A_3OA_4 \equiv \dots \equiv \triangle A_{n-1}OA_n \equiv \triangle A_nOA_1, \quad (1.21)$$

pois todos esses triângulos são isósceles e todos os lados do polígono são congruentes.

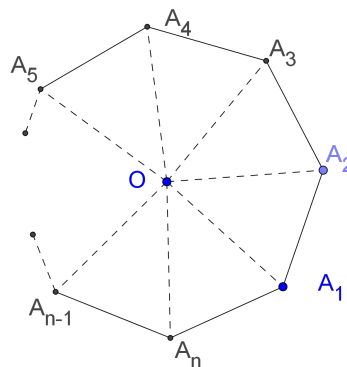


Figura 30: Construção do Polígono Regular Circunscrito.

Assim, o apótema em relação a cada um dos lados do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ será altura dos triângulos indicados em (1.21). Como todos esses triângulos são congruentes, todos os seus apótemas também serão congruentes. Logo, a circunferência com centro em O e raio igual à medida do apótema será a circunferência inscrita ao polígono $A_1A_2 \dots A_n$.

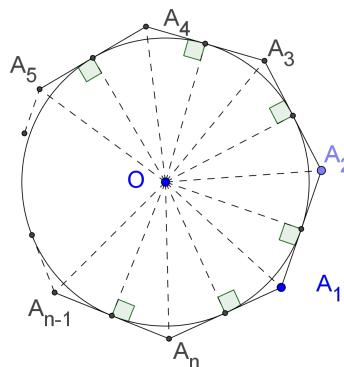


Figura 31: Polígono Regular Circunscrito.

Portanto, todo polígono regular admite uma circunferência inscrita a ele.

□

Definição 1.46 (Polígonos Semelhantes). Dois polígonos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

A seguinte proposição será utilizada no Capítulo 3.

Proposição 1.47. Dados dois polígonos regulares semelhantes P_1 e P_2 com n lados, sejam C_1 e C_2 as circunferências de raios r_1 e r_2 , respectivamente, tais que P_1 está inscrito em C_1 e P_2 está inscrito em C_2 . Temos que

$$\frac{A(P_1)}{A(P_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,$$

onde $A(P_1)$ e $A(P_2)$ são as áreas dos polígonos P_1 e P_2 , respectivamente.

Demonstração. Sejam $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ a sequência de vértices de P_1 , $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n$ a sequência de vértices de P_2 , A e C os centros de C_1 e C_2 , respectivamente.

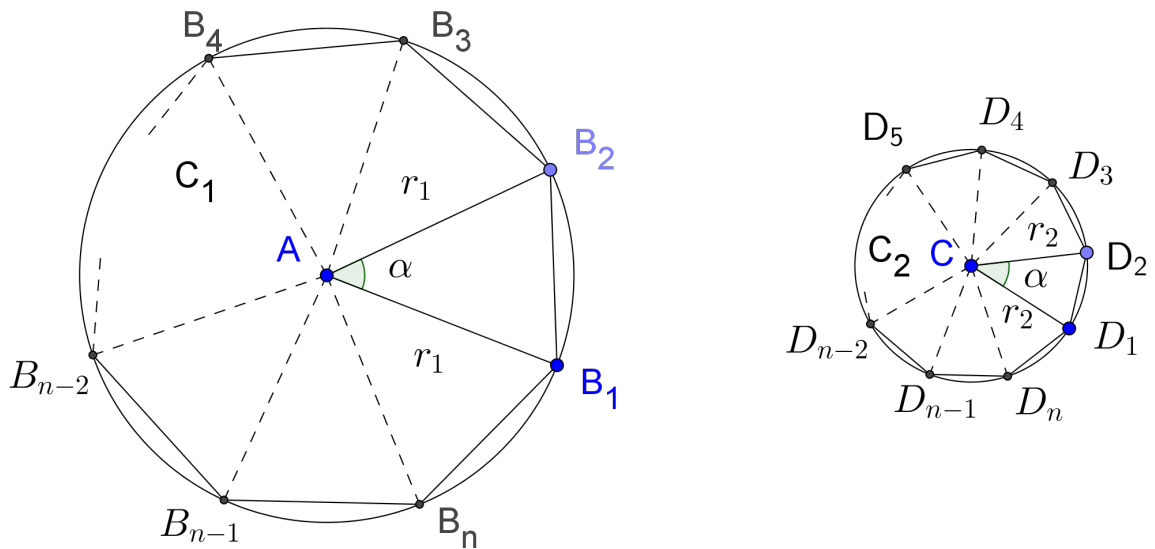


Figura 32: Polígonos P_1 e P_2 .

Como o polígono P_1 é semelhante ao polígono P_2 , temos:

$$\frac{B_1B_2}{D_1D_2} = \frac{B_2B_3}{D_2D_3} = \dots = \frac{B_nB_{n-1}}{D_nD_{n-1}}.$$

Como ambos os polígonos P_1 e P_2 são regulares e possuem o mesmo número de lados, sabemos que os ângulos $B_1\widehat{A}B_2$ e $D_1\widehat{C}D_2$ são ângulos congruentes. Assim, sendo $med(B_1\widehat{A}B_2) = \alpha$, obtemos que $med(D_1\widehat{C}D_2) = \alpha$.

Como o triângulo $\triangle B_1AB_2$ é isósceles, pois $AB_1 = AB_2 = r_1$, e $\triangle D_1CD_2$ também é isósceles, pois $CD_1 = CD_2 = r_2$, temos que

$$med(A\widehat{B}_1B_2) = med(A\widehat{B}_2B_1) = med(C\widehat{D}_1D_2) = med(C\widehat{D}_2D_1).$$

Logo os triângulos $\triangle AB_1B_2$ e $\triangle CD_1D_2$ são semelhantes pelo critério ângulo, ângulo (de acordo com a proposição 1.26).

Observe que o polígono regular P_1 é formado por n triângulos congruentes ao triângulo $\triangle AB_1B_2$. Sendo $A(\triangle AB_1B_2)$ a área do triângulo $\triangle AB_1B_2$, temos

$$A(P_1) = n \cdot A(\triangle AB_1B_2) = \frac{n \cdot (AB_1) \cdot (AB_2) \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{n \cdot (r_1)^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}.$$

Analogamente, sendo $A(\triangle CD_1D_2)$ a área do triângulo $\triangle CD_1D_2$, temos

$$A(P_2) = n \cdot A(\triangle CD_1D_2) = \frac{n \cdot CD_1 \cdot CD_2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{n \cdot (r_2)^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{A(P_1)}{A(P_2)} = \frac{\left(\frac{n \cdot (r_1)^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} \right)}{\left(\frac{n \cdot (r_2)^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} \right)} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}.$$

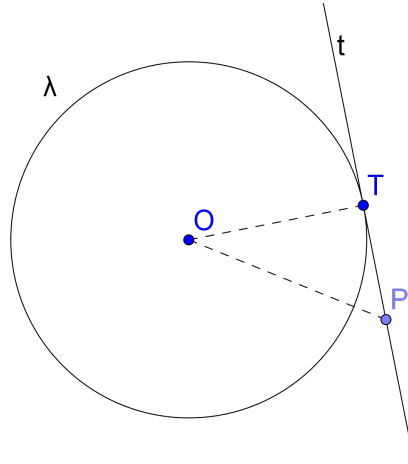
□

1.1.6 Proposições sobre a tangente e a reta tangente à circunferência

Definição 1.48 (Reta Tangente). Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intersecta a circunferência num único ponto, que é chamado de ponto de tangência.

Proposição 1.49. Se uma reta é tangente a uma circunferência então ela é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Demonstração. Considere um círculo λ com centro em O e t a reta tangente a λ no ponto T . Seja P o pé da perpendicular baixado do ponto O sobre a reta t . Suponha que $P \neq T$.

Figura 33: Círculo λ e reta t .

Dessa forma, temos que $\widehat{OPT} = 90^\circ$. Assim, o triângulo $\triangle OPT$ é retângulo em P e \overline{OT} é a hipotenusa do triângulo $\triangle OPT$. Logo $OT > OP$.

Como \overline{OT} é o raio do círculo λ , e como $OP < OT$, concluímos que o ponto P está no interior do círculo λ delimitado por λ .

Neste caso, a reta t intersectaria a circunferência em T e em mais um ponto, tornando a reta t uma secante, o que é absurdo. Portanto $P = T$. Isto é, a reta t é perpendicular ao segmento de reta \overline{OT} em T .

□

No capítulo 3, na subseção sobre polígonos circunscritos, usaremos alguns recursos da trigonometria. Esses recursos serão apresentados a seguir:

Proposição 1.50. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta},$$

sempre que $\tan \alpha, \tan \beta$ e $\tan(\alpha + \beta)$ estiverem definidos.

Demonstração. Sabemos que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\alpha + \beta)} \quad (1.22)$$

É conhecido que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha \quad (1.23)$$

e

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta . \quad (1.24)$$

Assim, podemos reescrever 1.22 como

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)} \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned} \quad (1.25)$$

□

1.1.7 Médias

No final do capítulo 3 apresentamos os resultados obtidos por Arquimedes a partir de equações que relacionam os polígonos inscritos e circunscritos. Esses resultados representam dois tipos de médias: a geométrica e a harmônica, definidas a seguir.¹⁹

Definição 1.51 (Média Geométrica). A média geométrica dos n números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é definida por

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

Definição 1.52 (Média Harmônica). A média harmônica dos n números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é definida por

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

¹⁹ Essas definições foram retiradas do livro [20] - ver bibliografia.

UM POUCO SOBRE A IDEIA DE INFINITO

2.1 O QUE É O INFINITO?

De acordo com o dicionário [6] infinito é algo que não tem fim ou que não tem limite, ilimitado.

A ideia de infinito é facilmente compreendida por todos nós. Porém, verificar conjecturas matemáticas nem sempre é uma tarefa fácil.

Quando pensamos e nos perguntamos "quantos números naturais existem?", a resposta é certa: infinitos. Porém, sabemos que o conjunto dos números pares é um subconjunto dos números naturais e intuitivamente acreditamos que, por ser um subconjunto, deve ter menos elementos do que o conjunto ao qual pertence, e assim, finalmente, podemos fazer a mesma pergunta "quantos números pares existem?". A resposta é curiosa: infinitos. Ou seja, o todo (conjunto dos números naturais) e a parte (conjunto dos números pares) são equivalentes.¹ Isso não ocorreria se esses dois conjuntos tivessem uma quantidade finita de elementos.

Exemplo 2.1. Um exemplo interessante é a representação geométrica do conjunto dos números reais. Essa representação é conhecida como reta real. Isto é, cada elemento do conjunto \mathbb{R} é representado por um único ponto nessa reta real e vice-versa.

Seja P o conjunto dos pontos da reta real. Tanto \mathbb{R} como P possuem infinitos elementos. Como há uma bijeção ² entre os elementos de \mathbb{R} e P , temos assim que esses dois conjuntos são equivalentes. Assim, a reta real representa geometricamente o conjunto \mathbb{R} .

¹ Veja a apresentação desse conceito no capítulo 1 em 1.1.1.

² Ver no capítulo 1 a definição 1.8.

Exemplo 2.2. Agora, considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}.$$

Este conjunto é um conjunto limitado pelos números 0 e 1, mas, mesmo sendo limitado, é um conjunto com infinitos elementos, assim como \mathbb{N} e \mathbb{R} . A bijeção $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} - 2 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-1} + 2, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

mostra que A e \mathbb{R} são equivalentes.

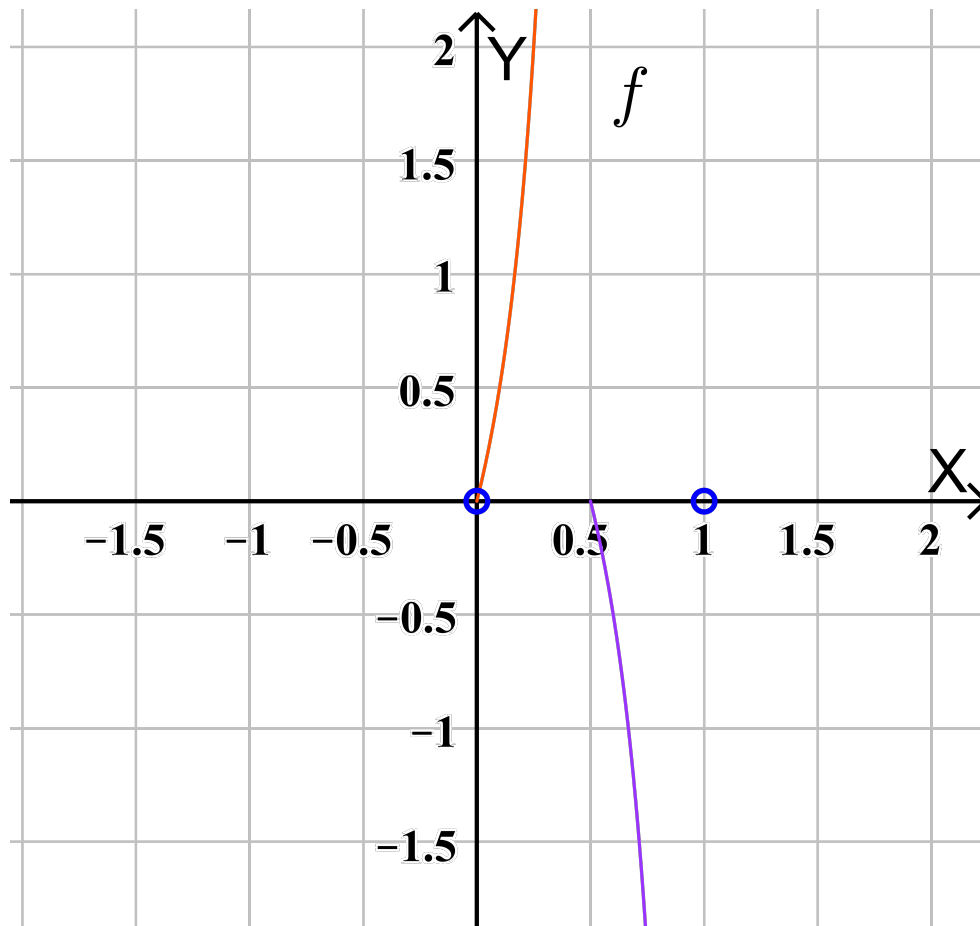


Figura 34: Gráfico de f .

Nota-se em A que não conseguimos determinar qual é o sucessor do número 0 nem qual é antecessor do número 1. Este conjunto é representado geometricamente através de um segmento de reta da reta real. Ou seja, é um infinito que conseguimos representar geometricamente.



Figura 35: Segmento da reta real representando o conjunto A .

Assim, é natural que apareça uma certa indagação: será que existem infinitos diferentes? E a resposta é incrível: sim, há infinitos diferentes. E, portanto, a explicação dada no dicionário [6] é insuficiente e incompleta diante dos conceitos matemáticos que surgiram no decorrer do desenvolvimento da Ciência.

Temos assim duas ideias implícitas de infinitos discutidas até aqui. Uma destas, conhecida como **Infinito Potencial** (ver exemplo 2.1), seria a reta real que contém todos os números reais. E a outra (ver exemplo 2.2), conhecida como **Infinito Atual ou Real**, apresentado pelo segmento de reta que representa o conjunto A .

2.1.1 *Infinito Potencial*

De acordo com o artigo escrito por Martínez [19], um andarilho na sucessão de seus passos, um após outro, sabe que sua caminhada pode se repetir indefinidamente. Ou seja, há a possibilidade do andarilho dar infinitos passos em sua caminhada, no entanto, sabemos que ele nunca conseguirá alcançar este objetivo, pois esta caminhada nunca chegará ao fim. Assim, Martínez define:

"O infinito potencial, a faculdade de ir "um pouco adiante", está ligado, assim, à noção de sucessor de um número natural. A cada número sempre sucede um outro, e não há um último, pois também este possuirá um sucessor."(MARTINEZ, Scientific American Brasil, n.15, 2000, p.7)

Exemplo 2.3. Quando efetuamos a divisão real de 1 por 3, obtemos como resultado cuja representação decimal tem infinitos dígitos:

$$1 \div 3 = 0,3333333\dots$$

Observamos que o dígito 3 se repete periódica e infinitamente. Chegamos a essa conclusão a partir da concepção de infinito potencial.

Por outro lado, podemos entender o número com infinitos dígitos $0,3333333\dots$ como uma série de frações que obedecem às leis de uma progressão geométrica (P.G.)³. De tal forma que podemos ter a igualdade:

$$0,3333333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \frac{3}{100.000} + \dots \quad (2.1)$$

A partir desta perspectiva, deixamos de lado o "Infinito Potencial" para analisar a possibilidade do "Infinito Real".

2.1.2 Infinito Real

O Infinito Real aparece com a idéia de um limite que converge. Veja, no exemplo a seguir, como o infinito real pode ser representado.

Exemplo 2.4. Embora a fração $\frac{1}{3}$ tenha uma representação decimal com infinitos dígitos, podemos construir esta fração com régua e compasso, representando-a como uma grandeza finita e comensurável.⁴

- Considere um segmento de reta \overline{AB} , tal que $AB = 1$.



Figura 36: Segmento de reta \overline{AB} .

- Trace a semirreta \overrightarrow{AC} , de tal forma que $0^\circ < \text{med}(\widehat{BAC}) < 180^\circ$.
- Trace a circunferência C_1 com centro em A , passando em C e raio $r = AC$.
- Trace a circunferência C_2 com centro em C , passando em A e raio $r = AC$.
- Marque o ponto D , tal que $\{D\} = \overrightarrow{AC} \cap C_2$, $D \neq A$.
- Trace a circunferência C_3 com centro em D , passando em C e raio $CD = AC = r$.

³ Ver no capítulo 1 a definição 1.10.

⁴ Tratamos desse assunto com maior profundidade no capítulo 1 na subseção 1.1.4.

- Marque o ponto E , tal que $\{E\} = \overrightarrow{AC} \cap C_3, E \neq C$.
A figura 37 ilustra a construção dada

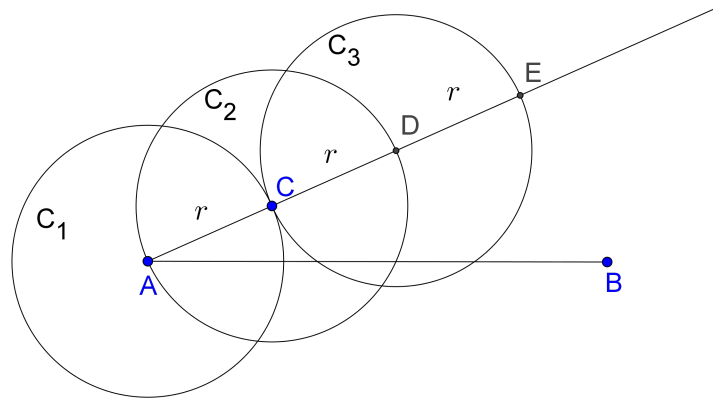


Figura 37: Sequência de Construções .

- Trace o segmento de reta \overline{BE} .
- Trace as retas r e s , de tal forma que $D \in r$ e $r \parallel \overline{BE}$ e $C \in s$ e $s \parallel \overline{BE}$.
- Marque os pontos F e G , de tal forma que $\{F\} = r \cap \overline{AB}$ e $\{G\} = s \cap \overline{AB}$.

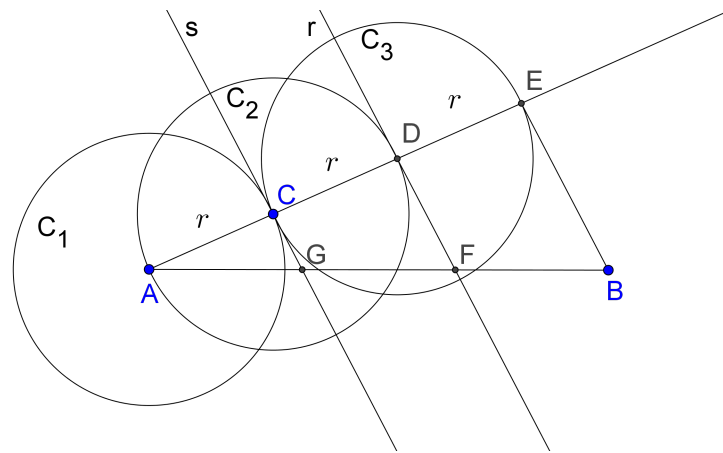


Figura 38: Construção, com régua e compasso, da fração geométrica $\frac{1}{3}$.

Pelo teorema de Tales, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{AG}{AB} &= \frac{AC}{AE} \\ \frac{AG}{1} &= \frac{r}{3r} \\ AG &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

A soma infinita (2.1) converge para $\frac{1}{3}$, pois é a série geométrica de razão $\frac{1}{10}$ e primeiro termo igual a $\frac{3}{10}$.

$$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \frac{3}{100.000} + \dots \quad (2.3)$$

Assim, a fração $\frac{1}{3}$ é a mais autêntica representante do conceito de Infinito Real, quando a olhamos do ponto de vista da construção geométrica, pois trata-se de uma medida comensurável com a unidade. No entanto, do ponto de vista da aritmética, a mesma fração é representante do conceito de Infinito Potencial, por admitir em sua expansão decimal infinitos dígitos.

De acordo com Martínez [19]:

"O infinito, em potência ou em ato, regula e estrutura a atividade matemática. Fazer Matemática, dizia Poincaré, é falar alguma coisa sobre o infinito, mesmo que nenhum matemático tenha feito, ou jamais venha a fazer, uma demonstração ou cálculo infinito..." (MARTINEZ, Scientific American Brasil, n.15, 2000, p.13).

2.1.3 A Parte e o Todo no Infinito

De acordo com a referência [5], Georg Cantor mostrou que a quantidade infinita de números naturais, embora seja a mesma quantidade dos números racionais, é distinta da quantidade infinita de números reais. Ou seja, Georg Cantor provou que o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é enumerável⁵ pois é possível estabelecer uma correspondência biunívoca⁶ entre os conjuntos \mathbb{Q} e \mathbb{N} . Cantor também provou que o conjunto dos números reais \mathbb{R} é um conjunto não enumerável, isto é, não é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os conjuntos \mathbb{N} e \mathbb{R} .

Exemplo 2.5. A próxima construção que faremos aparece no livro de Caraça [11]. Com ela, determinamos geometricamente uma relação biunívoca entre dois conjuntos distintos de números reais.

⁵ ver no capítulo 1 a definição 1.4.

⁶ ver no capítulo 1 a definição 1.8.

- Considere o triângulo retângulo $\triangle CAB$, retângulo em A .
- Considere D o ponto médio do lado \overline{AC} e E ponto médio do lado \overline{BC} .

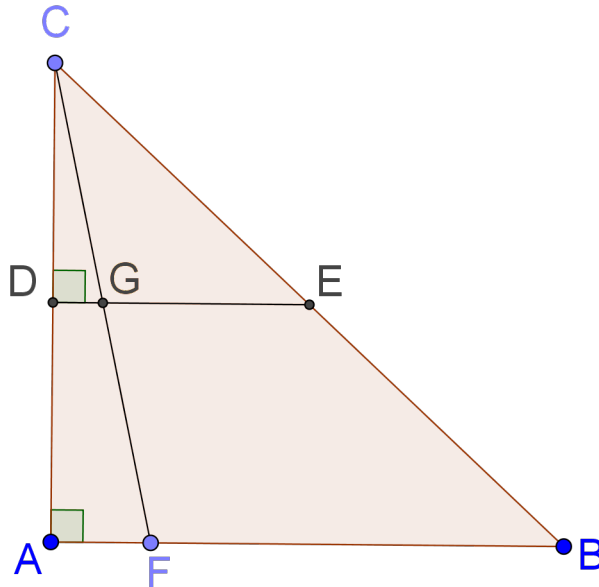


Figura 39: Triângulo retângulo CAB .

Assim, obtemos que os triângulos $\triangle DCE$ e $\triangle ACB$ são semelhantes, pelo critério lado, ângulo, lado (LAL \sim)⁷, pois os ângulos \widehat{ACB} e \widehat{DCE} são congruentes.

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = 2.$$

Por consequência, obtemos que:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE} = 2,$$

isto é,

$$AB = 2DE.$$

Também, por consequência da semelhança entre os dois triângulos, temos:

$$\widehat{CDE} \equiv \widehat{CAB}.$$

Logo, o segmento \overline{DE} é paralelo ao segmento \overline{AB} .

⁷ Proposição 1.27.

Queremos mostrar que o conjunto formado com os infinitos pontos que formam o segmento de reta \overline{DE} é equivalente ao conjunto dos infinitos pontos que formam o segmento de reta \overline{AB} . Para isso, siga os seguintes passos:

- Considere um ponto $F \in \overline{AB}$, $F \neq A$ e $F \neq B$.
- Seja $\{G\} = \overline{CF} \cap \overline{DE}$.

Observe que, com esta construção, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do segmento de reta \overline{DE} com os pontos do segmento \overline{AB} . Isto é, para cada ponto $F \in \overline{AB}$ há um **único ponto** $G \in \overline{DE}$ e vice-versa.

Portanto, o conjunto dos pontos que formam o segmento \overline{DE} é equivalente ao conjunto dos pontos que formam o segmento \overline{AB} .

Podemos tomar um segmento $\overline{XY} \subset \overline{AB}$ que seja congruente a \overline{DE} . Concluímos assim que \overline{XY} é equivalente a \overline{AB} .

Isso mostra que, no infinito, a parte e o todo podem ser equivalentes.

Observação 2.1.1. Como $AB = 2DE$, ou seja, AB é maior que DE , é natural imaginar que há mais pontos no segmento de reta \overline{AB} que em \overline{DE} . No entanto, mostramos que isso não é verdade.

De acordo com a referência [8], se um conjunto possui um número finito de elementos então ele não pode ser equivalente a nenhum de seus subconjuntos próprios.

Exemplo 2.6. Considere os conjuntos A e B , ambos os conjuntos com um número finito de elementos, de tal forma que B seja um subconjunto próprio de A .

Se A tem n elementos então B tem no máximo $n - 1$ elementos. Dessa forma, não é possível estabelecer uma relação biunívoca entre A e B , pois não há como estabelecer uma relação de sobrejetividade⁸ de B para A . Logo A e B não são conjuntos equivalentes.⁹

No entanto, se os conjuntos A e B , ambos, possuem infinitos elementos então é possível que um conjunto seja equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo. Por exemplo, o conjunto dos números pares é equivalente ao conjunto dos números naturais, mesmo sendo o conjunto dos números pares um subconjunto próprio dos

⁸ ver no capítulo 1 a definição 1.7.

⁹ ver no capítulo 1 a subseção 1.1.1

números naturais. Em geral, todo conjunto com infinitos elementos é equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo¹⁰.

2.2 O INFINITO NAS DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS

Caraça afirma em [11] o seguinte:

"Verifiquemos, no entanto, como um dado real que não pode ser posto de lado, que o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações, pela exploração metódica de todas as suas consequências.

Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Aquele princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de **princípio de extensão**." (CARAÇA, 1951, p.10)

Essa afirmação revela dois pontos fundamentais do estudo da Matemática. Um é a procura por um padrão e o outro é a tentativa de demonstrar que esse padrão é válido em todos os casos. E a ferramenta principal para efetuar esse tipo de demonstração é conhecida como o princípio da indução matemática.¹¹

Os pitagóricos¹² foram os pioneiros em reconhecer séries¹³ a partir de padrões geométricos. E, inicialmente, é dentro deste contexto que o conceito de infinito se apresenta nas demonstrações geométricas. Contador [7] apresenta algumas séries que foram obtidas e estudadas pelos pitagóricos.

- $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n + (n + 1) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n + 1)}{2}$ (série de números naturais).
- $1 + 3 + 5 + 7 \dots + 2n - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$ (série de números ímpares).
- $2 + 4 + 6 + \dots + 2n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n + 1)$ (série de números pares).

10 A prova dessa afirmação encontra-se demonstrada na referência [18], páginas 5 e 6.

11 Ver no capítulo 1 a apresentação do princípio 1.1.

12 Alunos da escola de Pitágoras, 540 a.C.

13 Ver no capítulo 1 a definição 1.15.

Vamos entender como, a partir de diagramas geométricos, os pitagóricos conseguiram encontrar um padrão que corresponde ao termo geral da série¹⁴ dos números naturais.

2.2.1 *Série dos Números Naturais*

Os diagramas pitagóricos das figuras 40 e 41 representam a sequência de n números naturais.

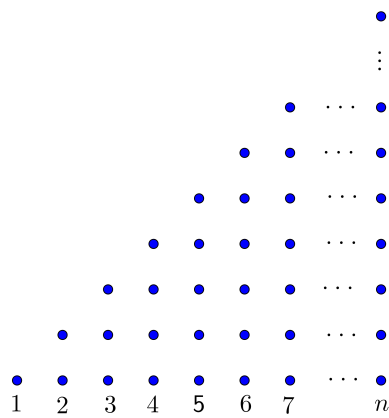


Figura 40: Diagrama pitagórico que representa a sequência de números naturais.

Observe que o diagrama (Figura 40) pode ser invertido, ficando da seguinte maneira:

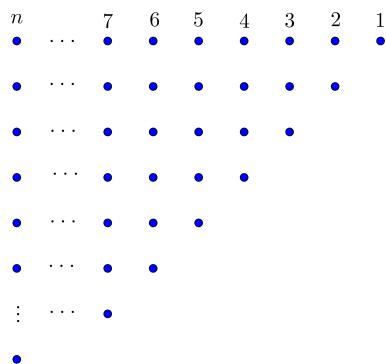


Figura 41: Diagrama pitagórico que representa a sequência de números naturais - invertido.

¹⁴ no capítulo 1 ver definição 1.16.

Ao juntarmos os diagramas das Figuras 40 e 41, obtemos um diagrama como na figura 42 formado por n colunas e $n + 1$ linhas.

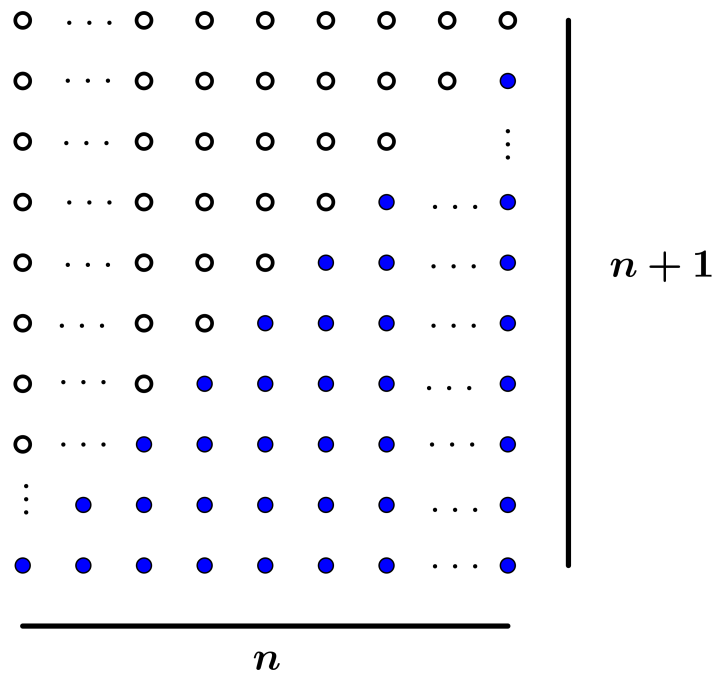


Figura 42: Diagrama pitagórico composto pela união dos diagramas das figuras 40 e 41.

Sendo

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n, \quad (2.4)$$

o diagrama apresentado na figura 42 representa $2S$. Por outro lado, $2S = n \cdot (n + 1)$, de modo que

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Logo,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (2.5)$$

A prova de que (2.5) é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$ segue do método da indução matemática.

Proposição 2.1. *Mostre que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. Assim, considere a seguinte proposição:

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Observe que a proposição $P(1)$ é verdadeira, pois

$$P(1) : \frac{1(1+1)}{2} = 1 .$$

Suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, a proposição $P(k)$ seja verdadeira. Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é uma proposição verdadeira.

De fato,

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2} . \quad (2.6)$$

Adicionado $k+1$ em ambos os lados da equação (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k + (k+1) &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k + (k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k + (k+1) &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

A equação (2.7) comprova que a proposição $P(k+1)$ também é verdadeira. Ou seja, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo n natural, $n \geq 1$. \square

O método da prova por indução garante que a equação (2.5) é válida para qualquer número natural $n \geq 1$, mas a aplicação do método se dá por indução finita.

Como os pitagóricos não tinham conhecimento sobre convergência de séries, como na atualidade, suas demonstrações eram muito baseadas em padrões geométricos.

De acordo com Garbi [15]:

"Embora Tales tenha sido o primeiro a declarar que as verdades matemáticas devem ser provadas pelo raciocínio, acredita-se que foram os pitagóricos os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas. Os pitagóricos foram, também, os primeiros a enxergar a Matemática como algo abstrato, pairando acima da realidade física." (GARBI, 2006, p.26)

2.2.2 O Paradoxo de Aquiles e a tartaruga

De acordo com Garbi [15], Hipasus de Metaponto (cerca de 470 a.C.), utilizando o Método de Redução ao Absurdo¹⁵, fez a descoberta da existência dos irracionais. Esse período é conhecido como a **Crise dos Incomensuráveis** e foi o início do fim da escola pitagórica. Dentre os pitagóricos, existia a crença de que o mundo era formado por números inteiros e por relações entre eles. Assim, naquela época, não cabia uma aceitação e um estudo adequado sobre as grandezas incomensuráveis¹⁶e, consequentemente, sobre os números irracionais. Foi nesse contexto que o filósofo grego Zenão de Eleia (450 a.C.) lançou o seu famoso paradoxo: "**O paradoxo de Aquiles e a tartaruga**".

De acordo com o paradoxo, Aquiles é mais rápido que a tartaruga e eles irão disputar uma corrida. Por causa da desvantagem de velocidade, a tartaruga irá partir à frente de Aquiles. Segundo Zenão, nessa corrida, Aquiles nunca consegue ultrapassar a tartaruga. Para melhor compreensão da situação, usaremos o exemplo apresentado por Devlin [13].

Exemplo 2.7. Aquiles vai competir uma corrida com uma tartaruga. Considere que esta corrida tenha um percurso total de 100 metros. Além disso, Aquiles é dez vezes mais rápido que a tartaruga. Por conta disso, a tartaruga dá início à corrida 10 metros à frente de Aquiles.

Começa a corrida.

Quando Aquiles chegar na marca dos 10 metros, a tartaruga terá percorrido 1 metro e estará na marca de 11 metros.

Quando Aquiles chegar nos 11 metros, a tartaruga estará na posição

$$\left(11 + \frac{1}{10}\right) m = 11,1m .$$

Quando Aquiles chegar na posição 11,1m a tartaruga estará na posição

$$\left(11 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\right) m = 11,11m .$$

Repetindo esse processo infinitamente, a tartaruga sempre estará à frente de Aquiles, por menor que fique a distância entre os dois.

¹⁵ É um método utilizado para fazer demonstrações de teoremas e proposições.

¹⁶ Ver no capítulo 1 a subseção 1.1.4.

Como os pitagóricos não sabiam ainda como lidar com o infinito real, este paradoxo de Zenão permaneceu em aberto. Com desenvolvimento da teoria sobre séries infinitas e do conceito de infinito, no século XIX, foram encontradas soluções satisfatórias para este e outros paradoxos de Zenão. Na época de Zenão não era concebível a ideia de que a série, por exemplo,

$$S = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^n + \dots \text{ com } n \in \mathbb{N}^*,$$

fosse um série que converge para um número real.

Caraça [11], quando relata esse período da **Crise dos Incomensuráveis e do Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga**, traz uma visão da escola pitagórica à respeito do infinito:

"considerando como infinito - um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um muito grande, do que o infinito moderno." (CARAÇA, 1951, p.74)

A visão equivocada dos pitagóricos em relação ao infinito real fez com que não existisse solução lógica que resolvesse o paradoxo de Zenão. Por isso, Zenão, mesmo sem ser um matemático, entrou para a História da Matemática, pois seus paradoxos colocavam em dúvida os conceitos e ideias que eram transmitidas pela escola de Pitágoras. Na próxima subseção apresentaremos uma solução para o "paradoxo de Aquiles e a tartaruga", utilizando os conhecimentos sobre séries que temos hoje.

Uma breve demonstração da solução para o problema do paradoxo de Aquiles e a tartaruga

Para demonstrar a solução para o problema do "paradoxo de Aquiles e a tartaruga", tomamos como referência os dados fornecidos no exemplo 2.7.

Seja S_1 a soma das distâncias percorridas por Aquiles. Assim,

$$S_1 = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots, \quad (2.8)$$

que é uma série geométrica de razão $\frac{1}{10}$ e primeiro termo igual a 10. Logo,

$$S_1 = \frac{100}{9}.$$

Agora, considere S_2 a soma das distâncias percorridas pela tartaruga. Assim,

$$S_2 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \quad (2.9)$$

Da equação (2.9), obtemos:

$$10 + S_2 = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \quad (2.10)$$

Pela equação (2.8) sabemos que,

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = S_1 = \frac{100}{9}$$

Assim, substituindo a equação (2.8) na equação (2.9), temos:

$$\begin{aligned} 10 + S_2 &= S_1 \\ S_2 &= \frac{10}{9}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como a tartaruga partiu da marca de 10 metros, a sua posição será:

$$10 + S_2 = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9}$$

Isto é, Aquiles e a tartaruga irão se encontrar na marca de $\left(\frac{100}{9}\right)$ metros. Como Aquiles é dez vezes mais rápido, ele certamente estará à frente da tartaruga a partir dessa marca.

Os exemplos e aplicações do conceito de Infinito que foram apresentados até aqui revelam a sua importância para a História e o desenvolvimento da Matemática. Estudar e compreender com maior precisão os diferentes Infinitos foi, e continuará sendo, fundamental para o progresso das ciências matemáticas. A educação matemática deve promover o acesso a esse conhecimento, tanto do ponto de vista histórico, quanto de suas aplicações.

O uso constante de calculadoras na sala de aula pode fazer com que se perca a possibilidade de discutir e explorar o conceito de infinito aplicado aos números.

Outro fato que deve se considerar é que no ensino de Geometria a noção de Infinito está muito presente. Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras a um quadrado de lado unitário, obtemos $\sqrt{2}$ como medida de sua diagonal. E muitas vezes, a incompreensão sobre que tipo de número ou medida é $\sqrt{2}$ se deve justamente pela falta de compreensão das diferenças existentes entre Infinito Real e Infinito Potencial.

No próximo capítulo, mostraremos a aplicação da noção de Infinito Real a partir do trabalho de Eudoxo e Arquimedes, o primeiro com o Método da Exaustão e o segundo

com a descoberta de um algoritmo para medir a área do círculo e, por consequência, a descoberta do número π .

EM BUSCA DA ÁREA DO CÍRCULO

De acordo com Contador [7] "A medida do círculo" é o nome do trabalho de Arquimedes, 287 a.C., no qual dá-se a prova de que a área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo, tendo como condição que a base desse triângulo deve ser igual ao perímetro do círculo e a altura do triângulo deve ser igual ao raio do círculo. Arquimedes, em sua época, já conhecia o método da Exaustão demonstrado por Eudoxo, nascido em 408 a.C.

3.1 MÉTODO DA EXAUSTÃO

De acordo com Garbi [15], desde a época de Eudoxo, geômetras gregos já haviam conjecturado que o círculo era o limite para uma família de polígonos inscritos, cujo número de lados tende ao infinito. Isto é, quanto maior o número de lados de um polígono inscrito em um círculo, mais próxima será a área do polígono em relação a área do círculo. Para ilustrar essa conjectura, veja a sequência de Figuras 43, 44 e 45.

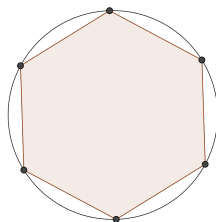


Figura 43: Hexágono Regular Inscrito no Círculo.

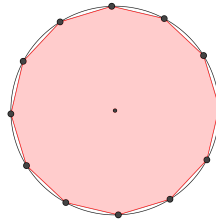


Figura 44: Dodecágono Regular Inscrito no Círculo.

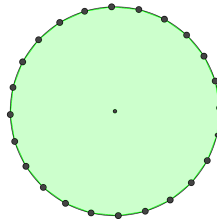


Figura 45: Tetracoságono Regular Inscrito no Círculo.

Da mesma maneira, podemos conjecturar utilizando polígonos circunscritos ao círculo. Veja as Figuras 46 e 47, nas quais estão ilustrados polígonos circunscritos a uma dada circunferência.

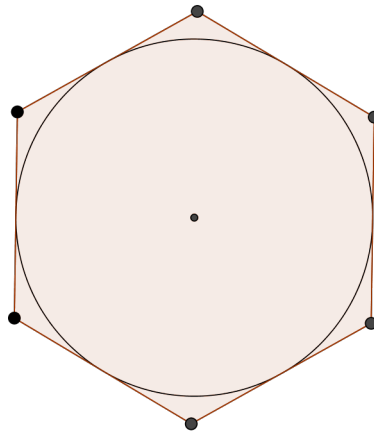


Figura 46: Hexágono regular circunscrito.

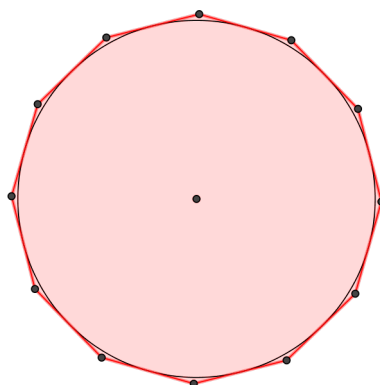


Figura 47: Dodecágono regular circunscrito.

Os exemplos das Figuras 46 e 47 levam a pensar que quanto maior o número de lados do polígono circunscrito, a aproximação da área do círculo com a área do polígono circunscrito fica cada vez melhor.

Observe que há um claro uso da ideia de limite inferior e limite superior para se chegar ao cálculo aproximado da área do círculo. Dessa forma, Arquimedes, com o método da Exaustão, buscava uma dedução da área do círculo.

Observamos que na época de Arquimedes, já se sabia que o perímetro da circunferência é proporcional a seu diâmetro ¹, mas ainda não se conhecia o coeficiente de proporcionalidade - hoje conhecido como número π .

3.2 MÉTODO DA DUPLA REDUÇÃO AO ABSURDO

Vamos entender como Arquimedes mostrou que a área A_c de um círculo com perímetro P e raio r é igual à área A_t de um triângulo retângulo de base P e altura r .

Proposição 3.1. *Considere um círculo C de raio r , perímetro P e área A_c e um triângulo retângulo com base P , altura r e área A_t . Assim, $A_c = A_t$.*

¹ Veja a proposição 3.3 a seguir.

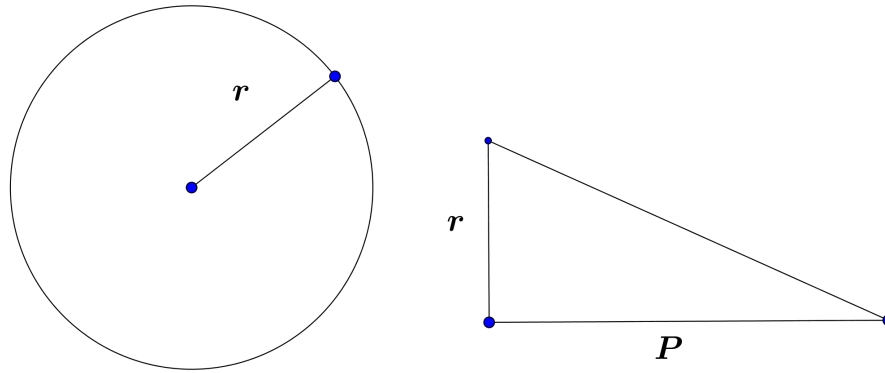


Figura 48: Igualdade de áreas demonstrada por Arquimedes.

Demonstração. A área do triângulo retângulo é dada por $A_t = \frac{Pr}{2}$. Sendo A_p a área de um polígono regular inscrito em C de n lados de medida l e apótema a , temos que $A_p = n \cdot \left(\frac{1}{2}al\right)$. Neste caso, $nl < P$ e $a < r$.

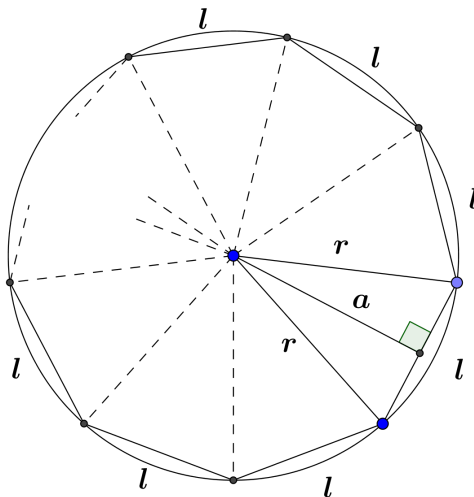


Figura 49: Polígono regular com n lados inscrito no círculo.

Suponha que $A_c > A_t$. Assim, existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $A_c - A_t = \epsilon$. Pelo método da exaustão, existe um polígono regular inscrito em C de n lados de medida l e apótema a , tal que $A_c - A_p < \epsilon$. Assim,

$$A_c - A_p < A_c - A_t,$$

donde segue que $A_p > A_t$, o que é absurdo, pois

$$A_p = n \left(\frac{la}{2}\right) < \frac{Pr}{2} = A_t.$$

Seja A'_p a área de um polígono regular circunscrito a C de n lados de medida l' e apótema a' , temos que $A'_p = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a' \cdot l'\right)$. Neste caso, $nl' > P$ e $a' = r$.

Suponha que $A_c < A_t$. Assim, existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $A_t - A_c = \alpha$. Pelo método da exaustão, existe um polígono regular circunscrito em C de n lados de medida l' e apótema $a' = r$, tal que $A'_p - A_c < \alpha$. Assim,

$$A'_p - A_c < A_t - A_c,$$

donde segue que $A'_p < A_t$, o que é absurdo, pois

$$A'_p = \frac{n \cdot a' \cdot l'}{2} = \frac{n \cdot l' \cdot r}{2} > \frac{Pr}{2} = A_t.$$

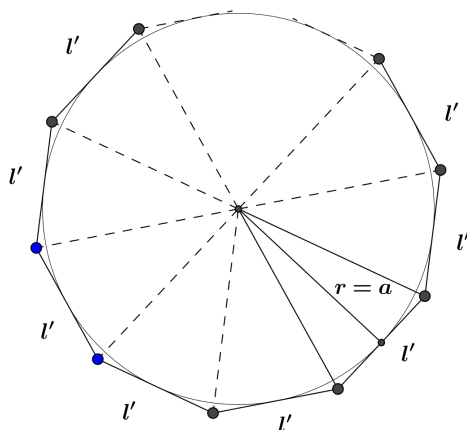


Figura 50: Polígono regular com n lados circunscrito no círculo.

Portanto, $A_t = A_c$.

□

Foi dessa maneira, usando o método da dupla redução ao absurdo, que Arquimedes demonstrou o resultado da Proposição 3.1.

Observação 3.2.1. Pela Proposição 3.1, a área de um círculo de raio r e perímetro P é

$$A_c = \frac{Pr}{2}. \quad (3.1)$$

Mas,

$$P = 2\pi r. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) na equação (3.1), obtemos:

$$A_c = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2 ,$$

que é a conhecida fórmula utilizada para calcular a área de um círculo de raio r .

O número π

De acordo com Garbi [15], no tempo de Arquimedes (287 a.C.) já era conhecido que Hipócrates descobrira e Eudócio provara que a área do círculo é proporcional ao quadrado do diâmetro (ou do raio), mas desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade.

Apresentaremos a seguir alguns resultados conhecidos por Arquimedes antes da elaboração do seu trabalho "A medida do Círculo".

Proposição 3.2. *Considere dois círculos com áreas A_1 e A_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente. Assim,*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}$$

Demonstração. ² Para as quatro grandezas A_1, A_2, r_1 e r_2 , temos três possibilidades:

$$\text{ou } \frac{A_1}{A_2} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} \quad \text{ou } \frac{A_1}{A_2} < \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} \quad \text{ou } \frac{A_1}{A_2} > \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} .$$

Suponha que

$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} . \tag{3.3}$$

Logo,

$$A_2 > \frac{A_1 \cdot (r_2)^2}{(r_1)^2}$$

Seja,

$$S = \frac{A_1 \cdot (r_2)^2}{(r_1)^2} \tag{3.4}$$

Assim, $0 < S < A_2$, isto é,

$$A_2 - S > 0 .$$

² Essa demonstração foi inspirada na demonstração apresentada no artigo [10].

Seja, $\epsilon = A_2 - S$. Pelo método da Exaustão existe um polígono regular P_2 , com área $A(P_2)$, inscrito no círculo de área A_2 tal que

$$A_2 - A(P_2) < \epsilon .$$

Assim,

$$A_2 - A(P_2) < A_2 - S$$

donde segue que

$$A(P_2) > S . \tag{3.5}$$

Agora, considere um polígono regular P_1 semelhante a P_2 e com área $A(P_1)$, inscrito no círculo de área A_1 . Dessa forma, temos a seguinte relação: ³

$$\frac{A(P_1)}{A(P_2)} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} .$$

Usando a equação (3.4) obtemos:

$$\frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} = \frac{A_1}{S} .$$

Assim,

$$\frac{A(P_1)}{A(P_2)} = \frac{A_1}{S}$$

e

$$\frac{S}{A(P_2)} = \frac{A_1}{A(P_1)} .$$

Como P_1 é um polígono inscrito no círculo de área A_1 , temos que

$$A_1 > A(P_1) ,$$

resultando que,

$$\frac{A_1}{A(P_1)} > 1 .$$

Desta forma,

$$\frac{S}{A(P_2)} > 1 .$$

Então

$$S > A(P_2) ,$$

o que é um absurdo (veja a desigualdade (3.5)). Assim, a hipótese (3.3) é falsa.

³ Veja no capítulo 1 a proposição 1.47.

De maneira análoga conseguimos provar que

$$\frac{A_1}{A_2} > \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} \quad (3.6)$$

também é uma hipótese falsa.

Logo, concluímos que a Proposição 3.2 é verdadeira por dupla redução ao absurdo. \square

Proposição 3.3. *Para qualquer círculo de área A_c e diâmetro $d = 2r$ vale que*

$$k = \frac{A_c}{d^2},$$

onde k é uma constante de proporcionalidade ($k \in \mathbb{R}^+$).

Demonstração. Sejam C_1 e C_2 dois círculos de áreas A_1 e A_2 , respectivamente, e diâmetros $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$, respectivamente.

Pela proposição 3.2 temos

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}.$$

Assim,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}.$$

Logo,

$$\frac{A_1}{(d_1)^2} = \frac{A_2}{(d_2)^2} = k, \quad (3.7)$$

sendo k uma constante real positiva, chamada de coeficiente de proporcionalidade. \square

Observação 3.2.2. *Com o desenvolvimento da Matemática, passara a ser usada a seguinte convenção:*

$$\frac{A_c}{(d)^2} = \frac{\pi}{4} \text{ e } \frac{A_c}{(r)^2} = \pi.$$

Dessa forma, Arquimedes sabia que ⁴ a área do círculo dividida pelo quadrado de seu raio era uma constante de proporcionalidade. Assim, conhecendo essa constante e o raio do círculo, seria possível encontrar uma fórmula da área do círculo em função

⁴ Veja a proposição 3.2.

de seu raio. Essa tal constante de proporcionalidade é o que definimos, atualmente, como sendo o número real π .⁵

Arquimedes nasceu em 287 a.C. na cidade de Siracusa, na ilha da Sicília e foi o maior gênio da Antiguidade. Ele estudou em Alexandria e de acordo com Garbi [15]:

"Ao final de sua carreira, com cerca de 75 anos, ele havia estendido as fronteiras da Matemática para muito além daquilo que recebera de Euclides e outros e a Humanidade teve que esperar 19 séculos para que, com Newton, surgisse alguém que a ele pudesse ser comparado." (GARBI, 2006, p.80)

De acordo com Contador [7], Arquimedes considerava polígonos regulares inscritos e circunscritos a um dado círculo, tendo chegado a estudar polígonos com 96 lados. O método de Arquimedes consistia em duplicar o número de lados dos polígonos e com o método da exaustão era possível estimar boas aproximações para o coeficiente de proporcionalidade $k = \frac{A_c}{d^2}$. Por razões didáticas, passaremos a escrever neste texto π , o qual representa $4k$. Com os trabalhos de Arquimedes, foram obtidas as seguintes aproximações

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Dessa forma, atribui-se a Arquimedes a criação de um método iterativo capaz de obter uma boa aproximação para π . Na próxima seção, exploramos o método criado por Arquimedes.

3.3 MÉTODO DE ARQUIMEDES

3.3.1 *O Método de Arquimedes aplicado ao hexágono regular numa circunferência.*

Consideremos um hexágono regular $ABCDEF$ de lado l inscrito numa circunferência com centro em O e raio r , como na Figura 51.

⁵ De acordo com a referência [17], não havia uma notação padronizada para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro. Leonhard Euler (1707 – 1783), a princípio, usava p ou c , mas, a partir de 1737, passou a adotar sistematicamente o símbolo π .

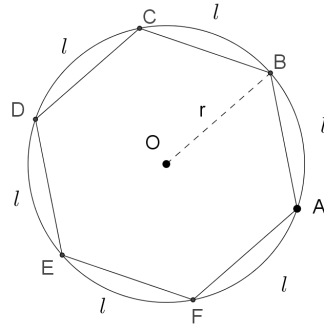


Figura 51: Hexágono regular inscrito numa circunferência.

O hexágono regular $ABCDEF$ é formado pelos seis triângulos congruentes:

$$\triangle AOB \equiv \triangle BOC \equiv \triangle COD \equiv \triangle DOE \equiv \triangle EOF \equiv \triangle FOA ,$$

de modo que

$$\text{med}(\widehat{AOB}) = \text{med}(\widehat{BOC}) = \text{med}(\widehat{COD}) = \text{med}(\widehat{DOE}) = \text{med}(\widehat{EOF}) = \text{med}(\widehat{FOA}) = 60^\circ .$$

Observe que o triângulo $\triangle AOB$ é equilátero, pois $\text{med}(\widehat{AOB}) = 60^\circ$ e, como $OB = OA = r$, sabemos que $\text{med}(\widehat{OBA}) = \text{med}(\widehat{OAB})$. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° obtemos que

$$\text{med}(\widehat{AOB}) = \text{med}(\widehat{OBA}) = \text{med}(\widehat{OAB}) = 60^\circ$$

e que

$$l = r . \tag{3.8}$$

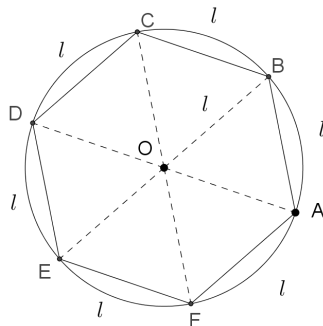
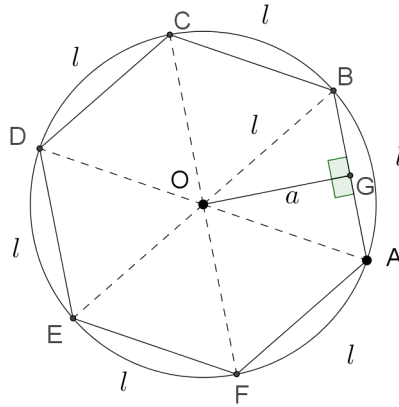


Figura 52: Hexágono regular inscrito formado por seis triângulos equiláteros congruentes.

Sejam \overline{OG} o apótema do triângulo $\triangle AOB$ e $a = OG$.

Figura 53: Apótema \overline{OG} .

Como o triângulo $\triangle AOB$ é equilátero então $A - G - B$ e \overline{OG} é também uma mediana do triângulo $\triangle AOB$, de modo que

$$AG = BG = \frac{l}{2}.$$

De acordo com (3.8), temos:

$$AG = BG = \frac{r}{2}. \quad (3.9)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle AOG$ (ver Figura 53), temos:

$$\begin{aligned} AO^2 &= GO^2 + AG^2 \\ r^2 &= a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ a &= \frac{r\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sendo $A(\triangle AOB)$ a área do triângulo $\triangle AOB$, temos que

$$\begin{aligned} A(\triangle AOB) &= \frac{AB \cdot OG}{2} \\ A(\triangle AOB) &= \frac{l \cdot a}{2} \\ A(\triangle AOB) &= \frac{r^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, a área do hexágono regular $ABCDEF$ é igual a

$$A(ABCDEF) = 6 \cdot A(\triangle AOB) = 6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}.$$

De acordo com o método da exaustão de Arquimedes, duplicando-se o número de lados do polígono regular inscrito no círculo, aproximamo-nos cada vez mais da área do círculo. A seguir, repetimos os procedimentos do hexágono regular inscrito no círculo para o dodecágono regular inscrito no mesmo círculo. As intersecções das mediatrizes dos lados do hexágono regular $ABCDE$ com a circunferência na qual o hexágono está inscrito dão origem aos pontos I, J, L, H, M e K (como ilustrado na Figura 54) e, assim, ao dodecágono regular $AIBJCLDHEMFK$.

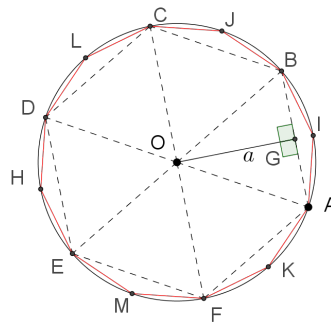


Figura 54: Dodecágono regular $AIBJCLDHEMFK$.

Com isto, obtemos os seguintes 12 triângulos isósceles congruentes

$$\begin{aligned} \triangle AOI &\equiv \triangle IOB \equiv \triangle BOJ \equiv \triangle JOC \equiv \triangle COL \equiv \triangle LOD \\ &\equiv \triangle DOH \equiv \triangle HOE \equiv \triangle EOM \equiv \triangle MOF \equiv \triangle FOK \equiv \triangle KOA , \end{aligned}$$

com

$$OA = OI = OB = OJ = OC = OL = OD = OH = OE = OM = OF = OK = r .$$

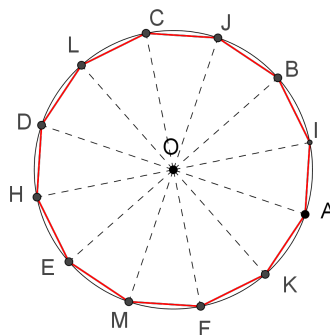


Figura 55: Dodecágono regular $AIBJCLDHEMFK$ formado por 12 triângulos isósceles.

Como todos os triângulos que formam este dodecágono são congruentes, temos que

$$med(\widehat{AOI}) = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ .$$

Em relação ao triângulo $\triangle AOB$,

- $AB = r$ (pois é a medida do lado do hexágono regular $ABCDEF$).
- Por (3.9) e (3.10) , $AG = \frac{r}{2}$ e $OG = a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Dessa forma (como ilustrado na Figura 56), temos que

$$GI = r - a = r - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r(2 - \sqrt{3})}{2} \tag{3.12}$$

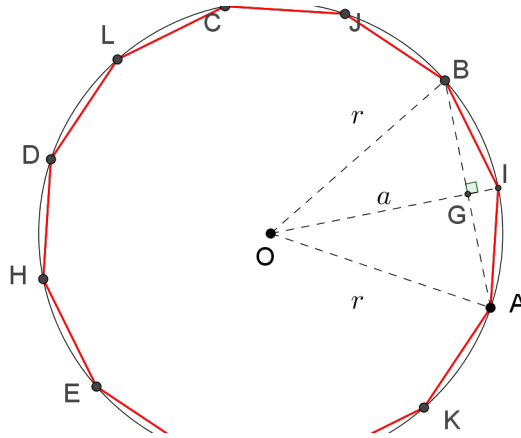


Figura 56: Dodecágono $AIBJCLDHEMFK$ e análise do triângulo $\triangle AOB$.

Sabemos que $\overline{OG} \perp \overline{AB}$ em G . Assim, o triângulo $\triangle IGB$ é retângulo em G . Logo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle IGB$:

$$\begin{aligned} BI^2 &= GI^2 + BG^2 \\ BI^2 &= \left[\frac{r(2 - \sqrt{3})}{2} \right]^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \\ BI &= r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dessa forma, conseguimos obter a medida do lado do dodecágono $AIBJCLDHEMFK$ em função de r . Agora, iremos obter a medida do apótema deste dodecágono.

Seja \overline{ON} um dos apótemas do dodecágono $AIBJCLDHEMFK$, tal que $ON = b$ e $N \in \overline{BI}$.

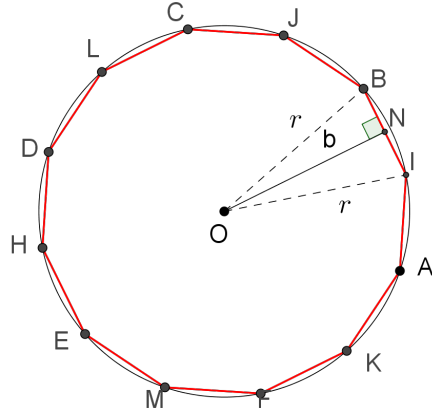


Figura 57: Dodecágono $AIBJCLDHEMFK$ e análise do triângulo $\triangle IOB$.

Como $\overline{ON} \perp \overline{BI}$ e como o triângulo $\triangle IOB$ é isósceles, N é ponto médio de \overline{BI} . Assim,

$$BN = \frac{BI}{2} = \frac{r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} .$$

No triângulo $\triangle ONB$ (ver Figura 57) podemos aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo:

$$\begin{aligned} OB^2 &= BN^2 + ON^2 \\ r^2 &= \left(\frac{r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right)^2 + b^2 \\ b &= \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sendo $A(\triangle IOB)$ a área do triângulo $\triangle IOB$, temos que

$$A(\triangle IOB) = \frac{BI \cdot ON}{2} = \frac{r^2}{4} . \tag{3.15}$$

Dessa forma, sendo $A(AIBJCLDHEMFK)$ a área do dodecágono regular $AIBJCLDHEMFK$, então

$$\begin{aligned} A(AIBJCLDHEMFK) &= 12 \cdot A(\triangle IOB) \\ A(AIBJCLDHEMFK) &= 12 \cdot \frac{r^2}{4} \\ A(AIBJCLDHEMFK) &= 3r^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Resumimos os resultados obtidos na tabela 1.

	Hexágono	Dodecágono
Lado	$l = r$	$r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
Apótema	$a = r \frac{\sqrt{3}}{2}$	$b = \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$
Área	$\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$	$3r^2$

Tabela 1: Resumo dos resultados com o hexágono regular inscrito e com o dodecágono regular inscrito.

Observamos que $3r^2 > \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$, de modo que ao duplicarmos o número de lados do hexágono, a área do polígono inscrito aumentou, aproximando-se da área do círculo. De acordo com a Proposição 3.2, a área do círculo A_c é proporcional ao seu raio r ao quadrado:

$$A_c = kr^2,$$

em que k é a constante de proporcionalidade entre a área do círculo e o seu raio ao quadrado. Quanto mais duplicações fizermos nos polígonos inscritos, mais próximos chegamos dessa constante k de proporcionalidade.

Além disso, observe que ao duplicarmos os lados do polígono inscrito conseguimos obter as medidas do lado, do apótema e da área em função do raio do círculo ao qual este polígono está inscrito. Arquimedes repetiu o processo de duplicação de lados do polígono regular até obter um polígono inscrito com 96 lados. Ao invés de repetirmos aqui os cálculos de Arquimedes, na próxima seção generalizamos esse método de duplicação de lados do polígono inscrito.

3.3.2 Generalização do Método de Arquimedes

Polígonos Inscritos

Considere um polígono regular de n lados com vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ inscrito em um círculo de raio r e centro em O .

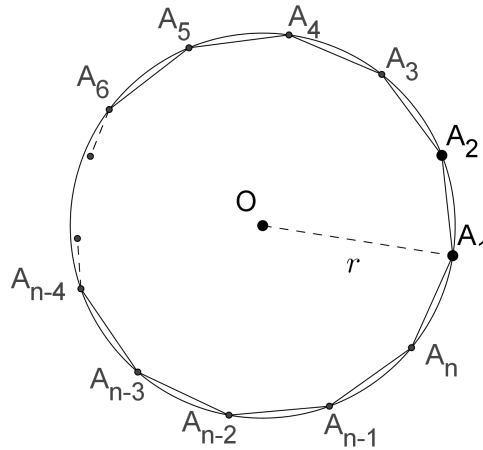


Figura 58: Polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ inscrito.

Podemos decompor esse polígono (Figura 58) nos n triângulos congruentes

$$\triangle A_1OA_2 \equiv \triangle A_2OA_3 \equiv \dots \equiv \triangle A_{n-1}OA_n \equiv \triangle A_nOA_1 .$$

Como o polígono é regular, sabemos que

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 = l .$$

Sendo \overline{OB} o apótema do triângulo isósceles $\triangle A_1OA_2$, com $OB = a_n$, temos que $\overline{OB} \perp \overline{A_1A_2}$ e B é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, de modo que

$$A_1B = A_2B = \frac{l}{2} .$$

Como o triângulo $\triangle A_1BO$ é retângulo em B , podemos aplicar o teorema de Pitágoras para obtermos a medida do apótema \overline{OB} :

$$(A_1O)^2 = (A_1B)^2 + (OB)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (a_n)^2$$

$$a_n = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2} \tag{3.17}$$

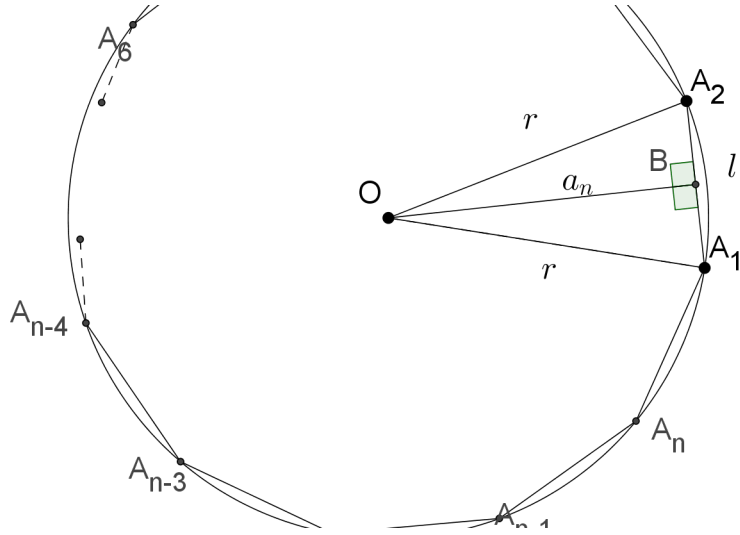


Figura 59: Apótema \overline{OB} .

Seja $A(\triangle A_1OA_2)$ a área do triângulo $\triangle A_1OA_2$,

$$A(\triangle A_1OA_2) = \frac{(A_1A_2)(OB)}{2} = \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4}. \tag{3.18}$$

Como o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ é formado por n triângulos congruentes ao triângulo $\triangle A_1OA_2$, podemos calcular a área deste polígono. Sendo $A[Pol_{(n)}]$ a área do polígono regular inscrito $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$, temos

$$A[Pol_{(n)}] = n \cdot A(\triangle A_1OA_2)$$

$$A[Pol_{(n)}] = \frac{nl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4}. \tag{3.19}$$

Usando o recurso de Arquimedes, duplicaremos o número de lados do polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$, gerando um novo polígono que terá $2n$ lados.

Para executarmos a duplicação, basta traçarmos as mediatrizes de cada um dos lados do polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$. Com a intersecção destas mediatrizes com a circunferência obtemos vértices do polígono duplicado. A união do conjunto destes vértices, os quais serão denotados por $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n$, com o conjunto dos vértices do polígono anterior $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ fornecerá todos os vértices do polígono que possui $2n$ lados:

$$A_1B_1A_2B_2 \dots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$$

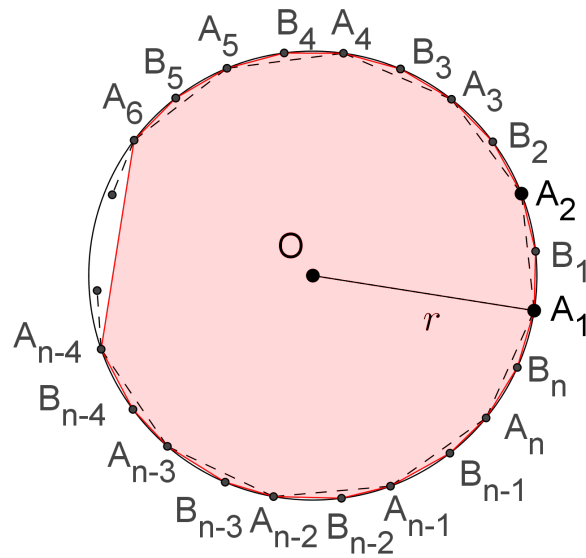


Figura 60: Esboço do polígono inscrito $A_1B_1A_2B_2 \dots A_nB_n$.

O polígono de $2n$ lados $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$ também é regular e

$$A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n = B_nA_1 .$$

Notemos que o polígono duplicado $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$ é formado por $2n$ triângulos isósceles, de tal maneira que todos estes triângulos são congruentes ao triângulo $\triangle A_1OB_1$.

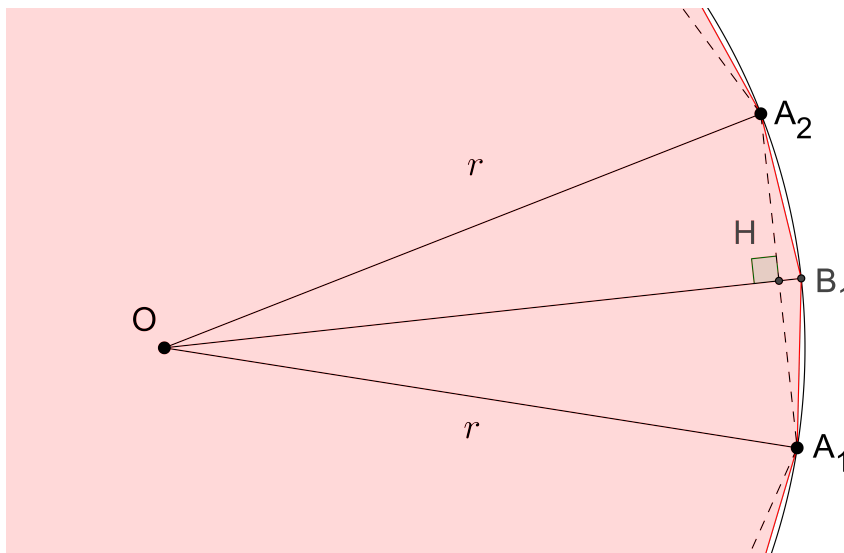


Figura 61: Triângulo $\triangle A_1OB_1$.

Em relação ao triângulo $\triangle A_1OA_2$ (como na Figura 61) seja H o ponto de intersecção de $\overline{OB_1}$ com $\overline{A_1A_2}$. Como $\overline{OB_1}$ é um segmento de reta que está contido na mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, então H é ponto médio de $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{OB_1} \perp \overline{A_1A_2}$ no ponto H . Assim:

$$A_1H = A_2H = \frac{A_1A_2}{2} = \frac{l}{2}.$$

Sabemos que $OB_1 = r$ e $OH = a_n$, assim, $B_1H = r - a_n$. Por (3.17)

$$B_1H = r - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}$$

ou seja,

$$B_1H = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l^2}}{2}.$$

Desta forma, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle B_1HA_2$ (ver figura 61), temos:

$$\begin{aligned} (B_1A_2)^2 &= (B_1H)^2 + (A_2H)^2 \\ (B_1A_2)^2 &= \left(\frac{2r - \sqrt{4r^2 - l^2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \\ B_1A_2 &= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim, acabamos de determinar a medida do lado do polígono regular

$$A_1B_1A_2B_2 \dots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n.$$

Seja \overline{OI} o apótema do triângulo $\triangle B_1OA_2$. Como o triângulo $\triangle B_1OA_2$ é isósceles temos que I é ponto médio de $\overline{B_1A_2}$ e, por (3.20),

$$A_2I = \frac{B_1A_2}{2} = \frac{\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2}.$$

Sendo $OI = b_n$, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle OIA_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} (OA_2)^2 &= (OI)^2 + (A_2I)^2 \\ r^2 &= (b_n)^2 + \left(\frac{\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2} \right)^2 \\ b_n &= \frac{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

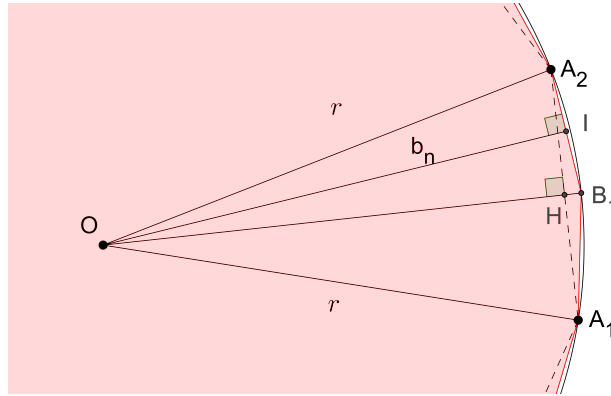


Figura 62: Apótema \overline{OI} do polígono duplicado.

Seja $A(\triangle B_1OA_2)$ a área do $\triangle B_1OA_2$, temos

$$\begin{aligned}
 A(\triangle B_1OA_2) &= \frac{(B_1A_2)(OI)}{2} \\
 A(\triangle B_1OA_2) &= \frac{(\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}) \left(\frac{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2} \right)}{2} \\
 A(\triangle B_1OA_2) &= \frac{rl}{4}. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Seja $A[Pol_{(2n)}]$ a área do polígono $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$, temos que

$$A[Pol_{(2n)}] = (2n)A(\triangle B_1OA_2) = \frac{nrl}{2}. \tag{3.23}$$

A seguinte tabela resume os resultados que obtivemos até aqui nesta seção.

	Polígono inscrito com n lados	Polígono inscrito com $2n$ lados
Lado	l	$\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}$
Apótema	$\frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2}$
Área	$\frac{nl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4}$	$\frac{nlr}{2}$

Tabela 2: Resumo dos resultados obtidos com os polígonos inscritos.

A seguir, faremos os cálculos de medida de lado, apótema e área para os polígonos de n e $2n$ lados regulares circunscritos a um círculo de raio r .

Polígonos Circunscritos

Considere um polígono regular $Pol_{(n)}$ de n lados $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$, com lado de medida L , circunscrito a um círculo de centro O e raio r .

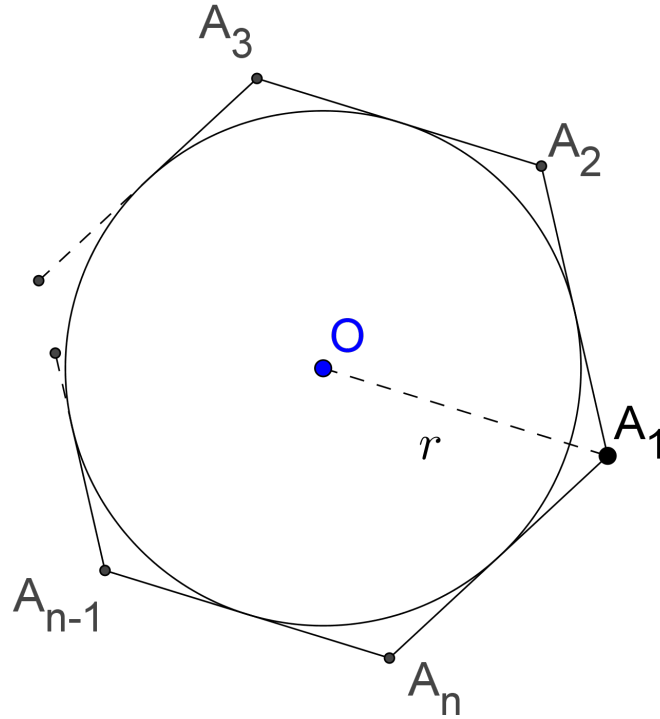


Figura 63: Esboço do polígono $Pol_{(n)}$.

Como $Pol_{(n)}$ é regular, então

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 = L$$

e $Pol_{(n)}$ é formado por n triângulos congruentes ao triângulo $\triangle A_1OA_2$ (caso LAL).

Sendo C o ponto de tangência do lado $\overline{A_1A_2}$ com o círculo inscrito no polígono $Pol_{(n)}$, temos que $\overline{OC} \perp \overline{A_1A_2}$, de modo que \overline{OC} é o apótema do triângulo $\triangle A_1OA_2$. Além disso, como o triângulo $\triangle A_1OA_2$ é isósceles, temos que C é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, de modo que

$$A_1C = A_2C = \frac{L}{2}.$$

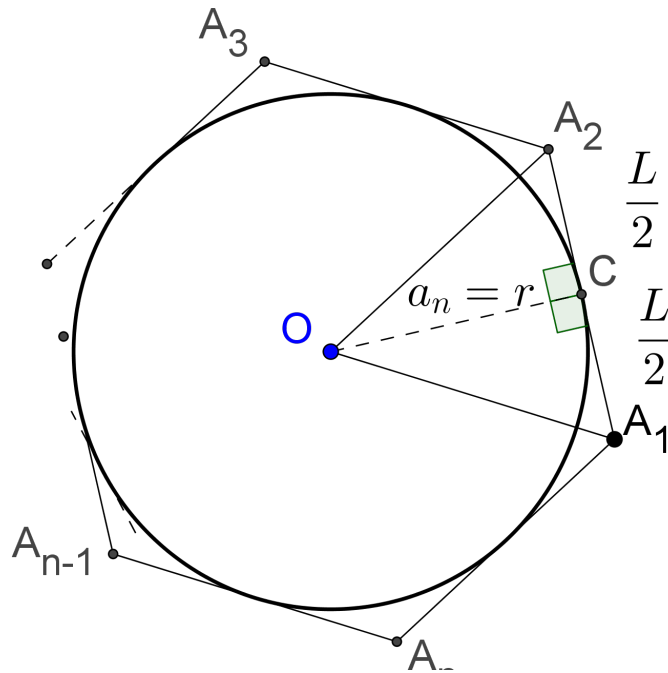


Figura 64: Triângulo $\triangle A_1OA_2$.

Se $OC = a_n = r$ e $A(\triangle A_1OA_2)$ a área do triângulo $\triangle A_1OA_2$, temos

$$A(\triangle A_1OA_2) = \frac{(A_1A_2)(OC)}{2} = \frac{Lr}{2}. \tag{3.24}$$

Assim, sendo $A[Pol_{(n)}]$ a área do polígono $Pol_{(n)}$, então

$$A[Pol_{(n)}] = nA(\triangle A_1OA_2) = \frac{nLr}{2}. \tag{3.25}$$

Observação 3.3.1. Observe que $\triangle OCA_2 \equiv \triangle OCA_1$ pelo critério de congruência LAL.

⁶ Logo, $\widehat{COA_2} \equiv \widehat{COA_1}$, de modo que

$$med(\widehat{COA_2}) = med(\widehat{COA_1}) = \theta, \tag{3.26}$$

⁷ com $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Podemos calcular o comprimento do lado do polígono regular $Pol_{(n)}$ em função do ângulo θ :

$$\tan \theta = \frac{A_2C}{OC} = \frac{\frac{L}{2}}{r}$$

ou seja,

$$L = 2r \tan \theta. \tag{3.27}$$

⁶ Ver no capítulo 1 postulado 1.1.

⁷ Com o objetivo de deixar as demonstrações mais claras e objetivas, na sequência desta seção, utilizaremos alguns recursos trigonométricos em algumas demonstrações.

Fazendo a duplicação do número de lados do polígono circunscrito $Pol_{(n)}$

Por (3.26), temos que $med(A_1OA_2) = 2\theta$.

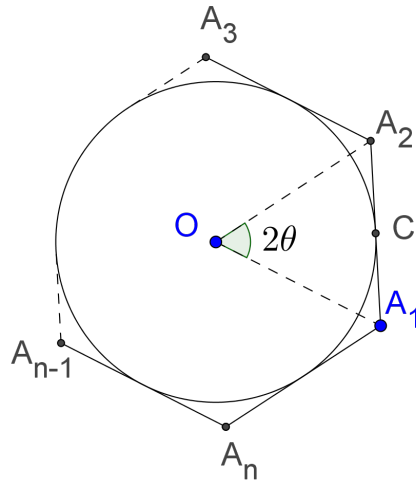


Figura 65: Ponto C.

- Considere r a mediatriz do lado $\overline{A_1A_2}$, s a bissetriz do ângulo $A_2\widehat{O}C$ e t a bissetriz do ângulo $A_1\widehat{O}C$ (como na Figura 66).

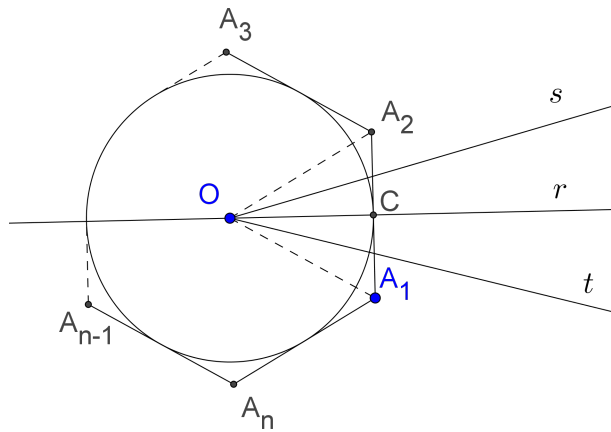


Figura 66: Construção do polígono com $2n$ lados.

Considere os seguintes pontos de intersecção:

- D é ponto de intersecção da bissetriz s com a circunferência.
- E é ponto de intersecção da bissetriz t com a circunferência.

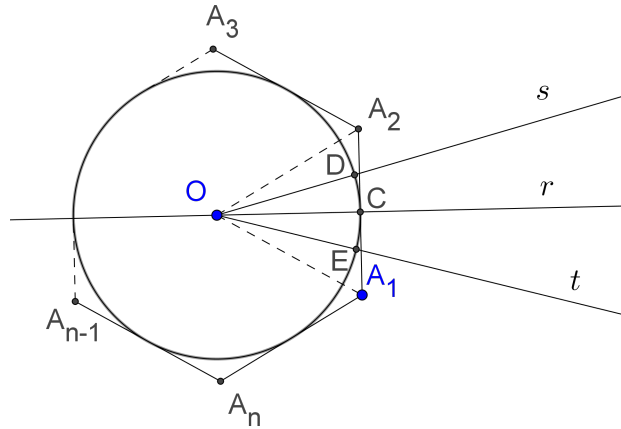


Figura 67: Construção do polígono com $2n$ lados.

- Considere u a reta tangente à circunferência no ponto D e v a reta tangente à circunferência no ponto E .

Como $med(D\hat{O}E) = \theta$ e $0^\circ < \theta < 90^\circ$, temos que $u \cap v \neq \emptyset$. Seja $\{F\} = u \cap v$.

- Sejam $\{G\} = u \cap \overline{OA_2}$ e $\{H\} = v \cap \overline{OA_1}$.

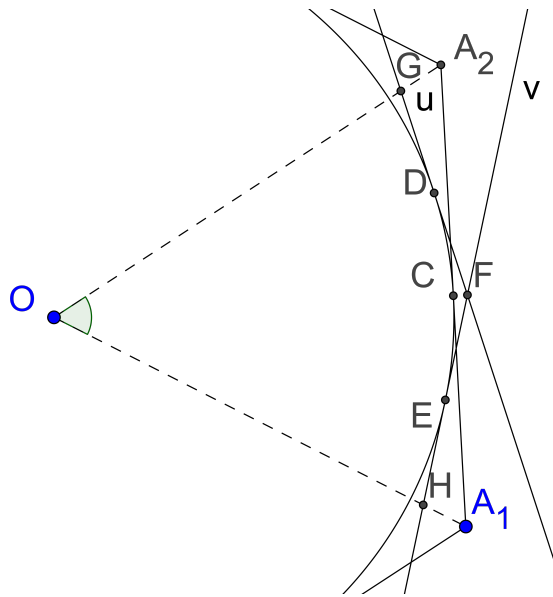


Figura 68: Construção do polígono com $2n$ lados.

- Assim, construímos dois lados do polígono $Pol_{(2n)}$: \overline{FG} e \overline{FH} .

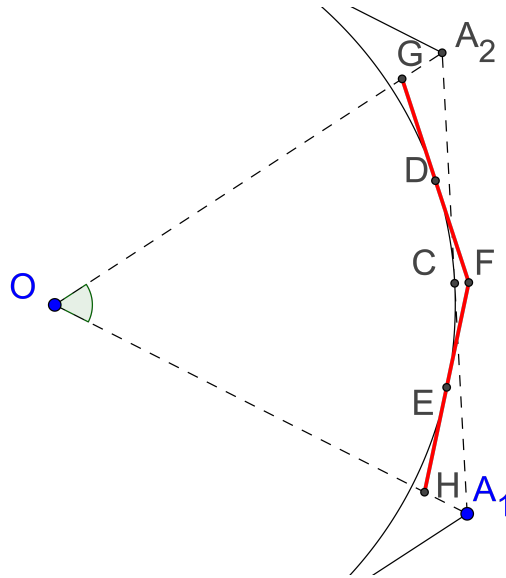


Figura 69: Construção de dois lados do polígono com $2n$ lados.

Repetindo os mesmos passos para cada um dos lados do polígono $Pol_{(n)}$, obteremos dois novos lados do polígono duplicado, de tal forma que este novo polígono terá $2n$ lados.

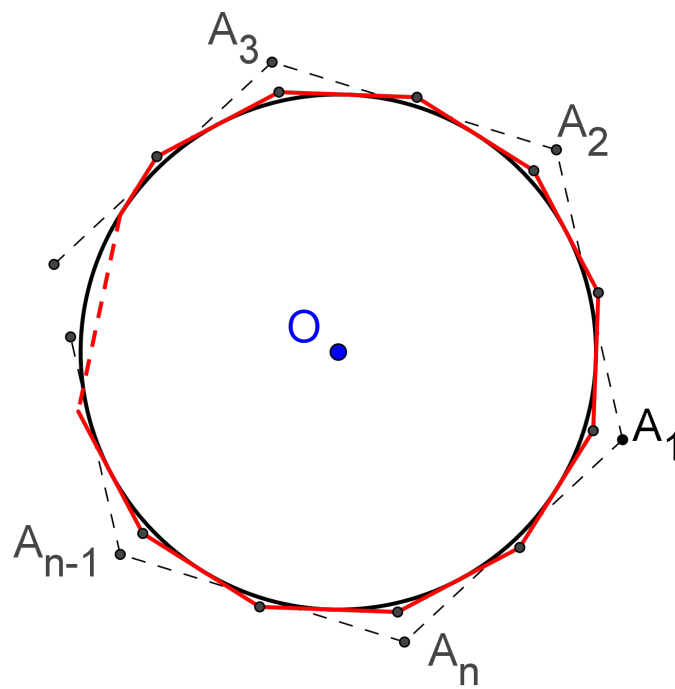


Figura 70: Esboço do polígono com $2n$ lados.

Determinando a medida do lado do polígono circunscrito duplicado

O nosso objetivo agora é determinar a medida do lado L_d do polígono duplicado.

Seja $Pol_{(2n)}$ o polígono com $2n$ lados, obtido a partir do polígono $Pol_{(n)}$ - conforme descrito anteriormente. O polígono $Pol_{(2n)}$ é formado por $2n$ triângulos congruentes ao triângulo $\triangle FOG$.

Por (3.26), $med(C\hat{O}A_2) = med(F\hat{O}G) = \theta$, pois os pontos O, C e F são colineares, assim como O, G e A_2 .

Como os pontos O e D pertencem à bissetriz s , temos que

$$med(D\hat{O}G) = med(D\hat{O}F) = \frac{med(F\hat{O}G)}{2} = \frac{\theta}{2}.$$

Seja $GF = L_d$ a medida do lado do polígono $Pol_{(2n)}$. Como o ponto D é ponto de tangência do lado \overline{GF} com a circunferência então $\overline{OD} \perp \overline{GF}$. Logo, $med(O\hat{D}G) = 90^\circ$.

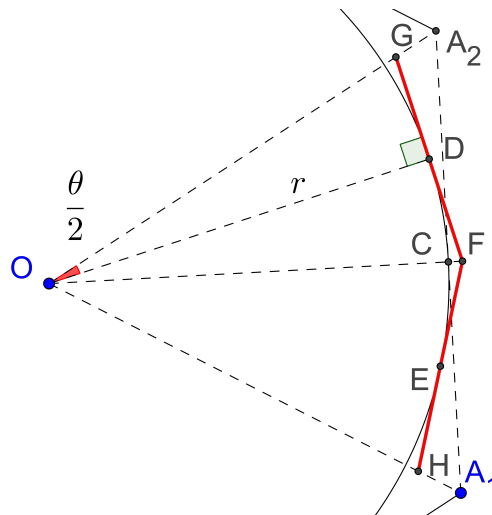


Figura 71: Analisando um dos lados do polígono $Pol_{(2n)}$.

Como $D\hat{O}G \equiv D\hat{O}F$ e $O\hat{D}G \equiv O\hat{D}F$ então temos que

$$\triangle ODG \equiv \triangle ODF$$

pelo critério *ALA*.⁸ Assim, $\overline{GD} \equiv \overline{FD}$, ou seja,

$$GD = \frac{GF}{2} = \frac{L_d}{2}.$$

⁸ Ver no capítulo 1 o teorema 1.21.

Como o triângulo $\triangle ODG$ é retângulo em D , temos que

$$\begin{aligned}\tan(D\hat{O}G) &= \frac{GD}{OD} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{L_d}{2}\right)}{r} \\ L_d &= 2r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}\tag{3.28}$$

Por (3.27) e (3.28),

$$\tan \theta = \frac{L}{2r} \text{ e } \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{L_d}{2r}.$$

Da trigonometria ⁹ temos que:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

isto é,

$$\tan \theta = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\tag{3.29}$$

Substituindo (3.27) e (3.28) na equação (3.29), obtemos:

$$\frac{L}{2r} = \frac{2 \left(\frac{L_d}{2r}\right)}{1 - \left(\frac{L_d}{2r}\right)^2}\tag{3.30}$$

Desenvolvendo a equação (3.30), podemos encontrar a medida do lado do polígono $Pol_{(2n)}$ em função da medida do lado do polígono $Pol_{(n)}$:

$$\begin{aligned}\frac{L}{2r} &= \frac{\frac{L_d}{r}}{1 - \frac{(L_d)^2}{4r^2}} \\ \frac{L}{2r} &= \frac{\frac{L_d}{r}}{\frac{4r^2 - (L_d)^2}{4r^2}}\end{aligned}$$

⁹ Ver no capítulo 1 a proposição 1.50.

$$\frac{L}{2r} = \frac{4rL_d}{4r^2 - (L_d)^2}$$

$$L(4r^2 - L_d^2) = 8r^2L_d$$

$$LL_d^2 + 8r^2L_d - 4r^2L = 0, \quad (3.31)$$

que é uma equação do 2º grau em L_d , cujo discriminante é

$$\Delta = 64r^4 + 16L^2r^2 > 0.$$

Assim, a raiz positiva de (3.31) é

$$L_d = \frac{-4r^2 + 2r\sqrt{4r^2 + L^2}}{L}, \quad (3.32)$$

que corresponde à medida do lado do polígono $Pol_{(2n)}$.

Portanto, sendo $A(\triangle FOG)$ a área do triângulo $\triangle FOG$, temos

$$A(\triangle FOG) = \frac{OD \cdot GF}{2} = \frac{rL_d}{2}$$

$$A(\triangle FOG) = \frac{r \left(\frac{2r\sqrt{4r^2 + L^2} - 4r^2}{L} \right)}{2}$$

$$A(\triangle FOG) = \frac{r^2(\sqrt{4r^2 + L^2} - 2r)}{L} \quad (3.33)$$

Como o polígono duplicado $Pol_{(2n)}$ é formado por $2n$ triângulos congruentes ao triângulo $\triangle FOG$, sendo $A[Pol_{(2n)}]$ a área do polígono $Pol_{(2n)}$, então

$$A[Pol_{(2n)}] = \frac{2nr^2(\sqrt{4r^2 + L^2} - 2r)}{L} \quad (3.34)$$

A tabela 3 resume os resultados que obtivemos até aqui no estudo dos polígonos circunscritos:

	Polígono circunscrito com n lados	Polígono circunscrito com $2n$ lados
Lado	L	$\frac{-4r^2 + 2r\sqrt{4r^2 + L^2}}{L}$
Apótema	r	r
Área	$\frac{nLr}{2}$	$\frac{2nr^2(\sqrt{4r^2 + L^2} - 2r)}{L}$

Tabela 3: Resumo dos resultados obtidos com os polígonos circunscritos.

Ainda é possível estabelecer uma relação entre o lado l do polígono inscrito com o lado L do polígono circunscrito. É que faremos na próxima subseção.

3.3.3 Polígonos inscritos e circunscritos e suas relações

Estudaremos, agora, os polígonos inscritos e circunscritos de maneira simultânea no círculo de raio r e centro O .

Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ os n vértices do **polígono regular inscrito de n lados**, de tal forma que

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 = l .$$

Sejam $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ os n vértices do **polígono regular circunscrito de n lados**, de tal forma que

$$B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n = B_nB_1 = L$$

e O, A_i e B_i sejam colineares, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$.

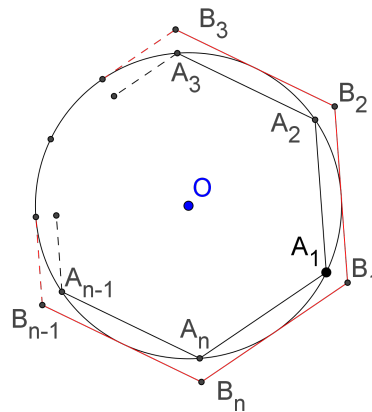


Figura 72: Esboço dos polígonos inscrito e circunscrito de n lados.

Observe que é possível construir o polígono circunscrito de n lados a partir do polígono inscrito de n lados, simplesmente tomando-se, por exemplo, B_1 e B_2 de modo que O, A_1 e B_1 sejam colineares, assim como O, A_2 e B_2 , e tal que $\overline{B_1B_2}$ seja tangente à circunferência de centro O e raio r .

Sejam C o ponto médio do lado $\overline{A_1A_2}$, D o ponto de tangência do lado $\overline{B_1B_2}$ com a circunferência e θ a medida do ângulo $\widehat{COA_2}$.

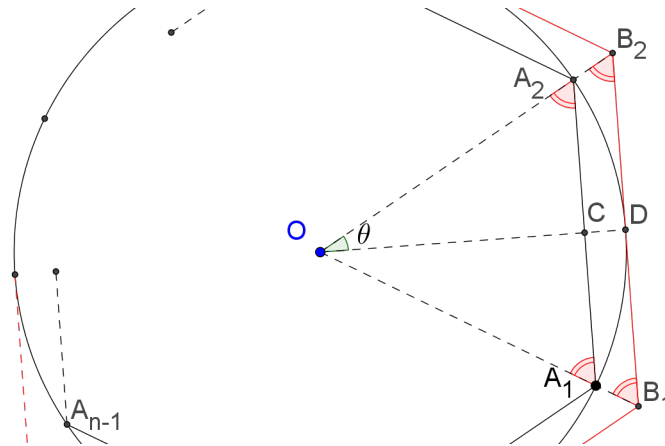


Figura 73: Triângulos $\triangle A_1OA_2$ e $\triangle B_1OB_2$.

Temos $med(\widehat{OCA_2}) = 90^\circ$, pois os pontos O e C pertencem a mediatriz de $\overline{A_1A_2}$.

Também $med(\widehat{ODB_2}) = 90^\circ$, pois o ponto D é ponto de tangência do lado $\overline{B_1B_2}$ com a circunferência. Logo,

$$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$$

e então

$$\widehat{OA_2C} \equiv \widehat{OB_2D} .$$

Como o triângulo $\triangle A_1OA_2$ é isósceles e $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$ segue que

$$\widehat{OB_1D} \equiv \widehat{OA_1C} \equiv \widehat{OA_2C} \equiv \widehat{OB_2D} .$$

Assim, $\widehat{OB_2D} \equiv \widehat{OB_1D}$ e $\widehat{ODB_1} \equiv \widehat{ODB_2}$, donde

$$\widehat{DOB_2} \equiv \widehat{DOB_1} .$$

Portanto, os triângulos $\triangle ODB_1$ e $\triangle ODB_2$ são congruentes pelo critério Ângulo, Lado, Ângulo - *ALA*.¹⁰ Consequentemente, D é o ponto médio de $\overline{B_1B_2}$ e

$$B_2D = B_1D = \frac{L}{2} .$$

¹⁰ Ver no capítulo 1 a proposição 1.21.

Como C é ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, temos:

$$A_2C = \frac{l}{2}.$$

No triângulo retângulo $\triangle OCA_2$, temos:

$$\tan \theta = \frac{A_2C}{OC}.$$

Sabemos que \overline{OC} é o apótema do polígono inscrito. De acordo com (3.17), temos:

$$OC = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\left(\frac{l}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}\right)} \\ \tan \theta &= \frac{l}{\sqrt{4r^2 - l^2}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

No triângulo retângulo $\triangle ODB_2$, temos:

$$\tan \theta = \frac{B_2D}{OD} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{r} = \frac{L}{2r}. \quad (3.36)$$

Por (3.35) e (3.36), obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{l}{\sqrt{4r^2 - l^2}} &= \frac{L}{2r} \\ L &= \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}} = \frac{2rl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4r^2 - l^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Arquimedes descobriu que havia uma relação entre as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos. E a primeira que apresentaremos é a seguinte:

Teorema 3.4 (Arquimedes - Área do Polígono inscrito com $2n$ lados). *A área do polígono inscrito é obtida através da média geométrica das áreas do polígonos inscrito e circunscrito com a metade do número de lados.*

Demonstração. Sejam $Ai_{(n)}$, $Ac_{(n)}$, $Ai_{(2n)}$ as áreas dos polígonos inscrito de n lados, circunscrito de n lados e inscrito de $2n$ lados, respectivamente.

Mostraremos que

$$Ai_{(2n)} = \sqrt{Ai_{(n)} \cdot Ac_{(n)}}$$

Por (3.19), (3.25) e (3.23) temos:

$$Ai_{(n)} = \frac{nl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4}$$

$$Ac_{(n)} = \frac{nLr}{2}$$

$$Ai_{(2n)} = \frac{nlr}{2}$$

Pelo resultado obtido em (3.37), também, temos que

$$L = \frac{2rl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4r^2 - l^2}$$

Mas,

$$Ai_{(n)} \cdot Ac_{(n)} = \left(\frac{nl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4} \right) \left(\frac{nLr}{2} \right)$$

$$Ai_{(n)} \cdot Ac_{(n)} = \left(\frac{nl\sqrt{4r^2 - l^2}}{4} \right) \left(\frac{nr}{2} \right) L$$

$$Ai_{(n)} \cdot Ac_{(n)} = \frac{n^2 l^2 r^2}{4} .$$

Logo,

$$\sqrt{Ai_{(n)} \cdot Ac_{(n)}} = \frac{nlr}{2} = Ai_{(2n)} . \quad (3.38)$$

□

A segunda relação descoberta por Arquimedes é o seguinte.

Teorema 3.5 (Arquimedes - Área do Polígono circunscrito com $2n$ lados). *A área do polígono circunscrito com $2n$ lados é obtida através da média harmônica das áreas do polígono inscrito com $2n$ lados e do polígono circunscrito com n lados.*

Demonstração. Sejam $Ac_{(2n)}$, $Ac_{(n)}$, $Ai_{(2n)}$ as áreas dos polígonos circunscrito de $2n$ lados, circunscrito de n lados e inscrito de $2n$ lados, respectivamente.

Mostraremos que

$$Ac_{(2n)} = \frac{2 \cdot Ac_{(n)} \cdot Ai_{(2n)}}{Ac_{(n)} + Ai_{(2n)}}.$$

Por (3.34), (3.25) e (3.23), temos:

$$\begin{aligned} Ac_{(2n)} &= \frac{2nr^2(\sqrt{4r^2 + L^2} - 2r)}{L} \\ Ac_{(n)} &= \frac{nrL}{2} \\ Ai_{(2n)} &= \frac{nrL}{2}. \end{aligned}$$

Segue de (3.37) que

$$l = \frac{2rL}{\sqrt{4r^2 + L^2}} = \frac{2rL\sqrt{4r^2 + L^2}}{4r^2 + L^2}. \quad (3.39)$$

Assim,

$$\begin{aligned} Ai_{(2n)} &= \frac{nrL}{2} \\ Ai_{(2n)} &= \left(\frac{nr}{2}\right) \cdot \left(\frac{2Lr}{\sqrt{4r^2 + L^2}}\right) \\ Ai_{(2n)} &= \frac{nLr^2}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Observe que

$$\begin{aligned} 2 \cdot Ac_{(n)} \cdot Ai_{(2n)} &= 2 \cdot \frac{nrL}{2} \cdot \frac{nLr^2}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \\ 2 \cdot Ac_{(n)} \cdot Ai_{(2n)} &= \frac{n^2 \cdot r^3 \cdot L^2}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Ac_{(n)} + Ai_{(2n)} &= \frac{nrL}{2} + \frac{nLr^2}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \\ Ac_{(n)} + Ai_{(2n)} &= \frac{nrL\sqrt{4r^2 + L^2} + 2nLr^2}{2\sqrt{4r^2 + L^2}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por (3.41) e (3.42), temos:

$$\begin{aligned} \frac{2.Ac_{(n)}.Ai_{(2n)}}{Ac_{(n)} + Ai_{(2n)}} &= \frac{\left(\frac{n^2 \cdot r^3 \cdot L^2}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \right)}{\left(\frac{nrL\sqrt{4r^2 + L^2} + 2nLr^2}{2\sqrt{4r^2 + L^2}} \right)} \\ \frac{2.Ac_{(n)}.Ai_{(2n)}}{Ac_{(n)} + Ai_{(2n)}} &= \frac{2nr^2L}{2r + \sqrt{4r^2 + L^2}} \\ \frac{2.Ac_{(n)}.Ai_{(2n)}}{Ac_{(n)} + Ai_{(2n)}} &= \frac{2nr^2(\sqrt{4r^2 + L^2} - 2r)}{L} \\ \frac{2.Ac_{(n)}.Ai_{(2n)}}{Ac_{(n)} + Ai_{(2n)}} &= Ac_{(2n)} \end{aligned} \tag{3.43}$$

□

As relações (3.4) e (3.5) descobertas por Arquimedes nos dão duas fórmulas de recorrências eficazes para o cálculo das áreas do polígonos inscrito e circunscrito, e assim, com o método da exaustão, obtemos um algoritmo para o cálculo aproximado da área do círculo.

A relação dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos

Arquimedes também encontrou uma relação entre os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos. Para apresentarmos essa relação, primeiro iremos calcular os perímetros dos polígonos com n lados inscritos e circunscritos no círculo de raio r . E, na sequência, calcularemos os perímetros dos polígonos com $2n$ lados inscritos e circunscritos.

Sendo p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito no círculo de centro O e raio r , então

$$p_n = n.l . \tag{3.44}$$

Sendo $p_{(2n)}$ o perímetro do polígono regular inscrito de $2n$ lados, como o lado deste polígono inscrito mede, por (3.20), $\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}$ temos:

$$p_{(2n)} = 2n \cdot \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}} \tag{3.45}$$

Se P_n denota o perímetro do polígono regular circunscrito de n lados, então

$$P_n = n.L . \tag{3.46}$$

Se $P_{(2n)}$ denota o perímetro do polígono regular circunscrito de $2n$ lados, como o lado deste polígono circunscrito mede, por (3.32), $\frac{-4r^2 + 2r\sqrt{4r^2 + L^2}}{L}$, então

$$P_{(2n)} = (2n) \cdot \frac{2rL}{2r + \sqrt{4r^2 + L^2}}$$

$$P_{(2n)} = \frac{4nrL}{2r + \sqrt{4r^2 + L^2}} = \frac{2n \cdot (-4r^2 + 2r\sqrt{4r^2 + L^2})}{L} \quad (3.47)$$

Com os cálculos desses perímetros, Arquimedes chegou à descoberta dos seguintes resultados:

Proposição 3.6 (Arquimedes - Perímetro do polígono inscrito com $2n$ lados). O perímetro do polígono inscrito com $2n$ lados é obtido através da média geométrica do perímetro do polígono inscrito de n lados com o perímetro do polígono circunscrito de $2n$ lados. Isto é,

$$p_{(2n)} = \sqrt{p_n \cdot P_{(2n)}} \quad (3.48)$$

Demonstração. Pela equação (3.45), temos que:

$$p_{(2n)} = 2n \cdot \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}}.$$

Assim,

$$(p_{(2n)})^2 = 4n^2 \cdot (2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}). \quad (3.49)$$

Por (3.44) e (3.47), temos

$$p_n \cdot P_{(2n)} = (n \cdot l) \cdot \frac{4nrL}{2r + \sqrt{4r^2 + L^2}}$$

isto é,

$$p_n \cdot P_{(2n)} = \frac{4n^2 r l L}{2r + \sqrt{4r^2 + L^2}} \quad (3.50)$$

Mas, por (3.37),

$$L = \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}}.$$

Consequentemente,

$$p_n \cdot P_{(2n)} = \frac{4n^2 r l \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2r + \sqrt{4r^2 + \frac{4r^2 l^2}{4r^2 - l^2}}}$$

$$\begin{aligned}
 p_n \cdot P_{(2n)} &= \frac{\frac{8n^2 r^2 l^2}{\sqrt{4r^2 - l^2}}}{2r\sqrt{4r^2 - l^2} + 4r^2} \\
 p_n \cdot P_{(2n)} &= \frac{8n^2 r^2 l^2}{2r\sqrt{4r^2 - l^2} + 4r^2} \\
 p_n \cdot P_{(2n)} &= \frac{4n^2 r l^2}{\sqrt{4r^2 - l^2} + 2r} \\
 p_n \cdot P_{(2n)} &= \left(\frac{4n^2 r l^2}{\sqrt{4r^2 - l^2} + 2r} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{4r^2 - l^2} - 2r}{\sqrt{4r^2 - l^2} - 2r} \right) \\
 p_n \cdot P_{(2n)} &= \frac{4n^2 r l^2 \cdot (\sqrt{4r^2 - l^2} - 2r)}{(4r^2 - l^2) - 4r^2} \\
 p_n \cdot P_{(2n)} &= -4n^2 r (-2r + \sqrt{4r^2 - l^2}) \\
 \\
 p_n \cdot P_{(2n)} &= 4n^2 \cdot (2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}) \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

Por (3.49) e(3.51), obtemos:

$$p_n \cdot P_{(2n)} = (p_{(2n)})^2$$

isto é,

$$p_{(2n)} = \sqrt{p_n \cdot P_{(2n)}} . \tag{3.52}$$

□

Proposição 3.7 (Arquimedes - Perímetro do polígono circunscrito de 2n lados). *O perímetro do polígono circunscrito de 2n lados é obtido através da média harmônica dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito com a metade do número de lados. Isto é,*

$$P_{(2n)} = \frac{2P_n \cdot p_n}{P_n + p_n} \tag{3.53}$$

Demonstração. Por (3.44) e (3.46), temos que

$$2 \cdot P_n \cdot p_n = 2(nL) \cdot (nl) = 2n^2 L l . \tag{3.54}$$

Substituindo a equação (3.39) na equação (3.54), obtemos:

$$2P_n p_n = 2n^2 L \left(\frac{2Lr}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \right)$$

isto é,

$$2P_n p_n = \frac{4n^2 L^2 r}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \quad (3.55)$$

Também temos que

$$P_n + p_n = nL + nl = n \left(L + \frac{2Lr}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \right). \quad (3.56)$$

Assim,

$$\frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} = \frac{\frac{4n^2 L^2 r}{\sqrt{4r^2 + L^2}}}{n \left(L + \frac{2Lr}{\sqrt{4r^2 + L^2}} \right)}$$

$$\frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} = \frac{4nL^2 r}{L(\sqrt{4r^2 + L^2}) + 2Lr}$$

$$\frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} = \frac{4nrL}{2r + \sqrt{4r^2 + L^2}}$$

isto é,

$$\frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} = P_{(2n)}. \quad (3.57)$$

□

APLICAÇÕES E ATIVIDADES

Em alguns livros didáticos ou apostilas de alguns sistemas de ensino, fórmulas e teoremas são apresentados sem demonstração ou estímulo para o uso da dedução lógica. Trata-se assim de uma Matemática sem significado e de difícil aceitação por parte dos alunos. Compreendendo essa problemática da Educação, pretendemos neste capítulo propor atividades que estimulem o aluno à investigação de resultados já conhecidos, como o cálculo da área do círculo. Dessa vez, não por uma linha metodológica de fórmulas, mas por um caminho prático e dedutivo.

Começaremos com atividades que retomam o ensino de desenho geométrico e na sequência pretendemos aplicar os conhecimentos apresentados no capítulo 3 na resolução de problemas. No final deste capítulo, apresentamos uma proposta de intervenção didática com a aplicação de dois projetos.

4.1 ATIVIDADES DE CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO

Nesta seção, propomos atividades de construção com régua e compasso em relação a alguns resultados apresentados nessa dissertação. Para essas construções, utilizaremos o software de geometria dinâmica GeoGebra.¹

¹ Outros softwares de geometria dinâmica também podem ser utilizados na execução dessas atividades.

Atividade 1. *Construa com régua e compasso um hexágono regular com lado de medida dada igual a 5.*

Resolução 1. 1. *Trace uma circunferência com centro num ponto O e raio 5. Seja A um ponto qualquer desta circunferência.*

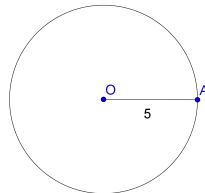


Figura 74: 1º Passo - Círculo com centro O passando em A .

2. *Trace uma circunferência com centro em A passando em O , encontrando, assim, os pontos de intersecção B e C entre as duas circunferências construídas.*

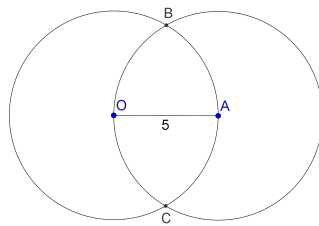


Figura 75: 2º Passo - pontos de intersecção B e C .

3. *Trace uma circunferência com centro em B passando em A , e outra com centro em C passando em A . Obtemos assim mais dois pontos de intersecção D e E , como ilustrado na figura 76.*

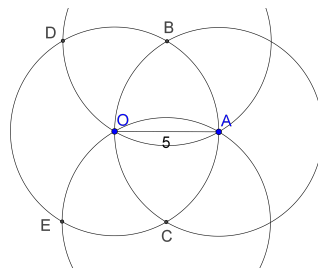


Figura 76: 3º passo - pontos de intersecção D e E .

4. Trace uma circunferência de centro em D passando em B , obtendo o ponto de intersecção F , como ilustrado na figura 77.

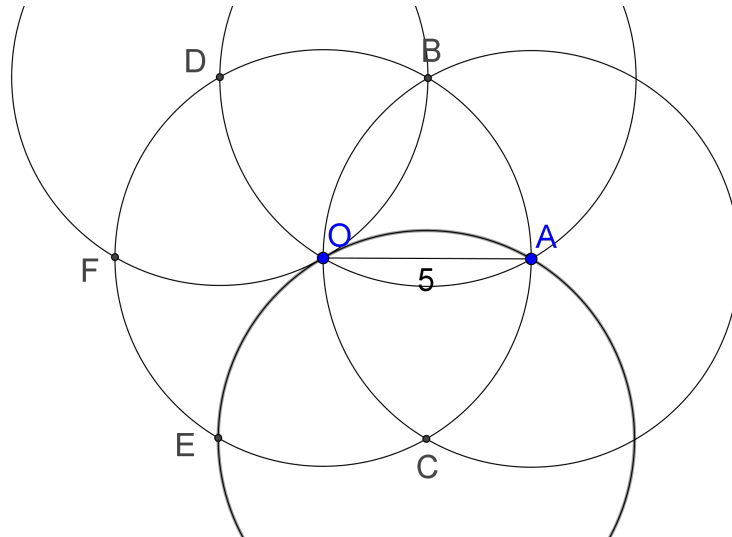


Figura 77: 4º passo - ponto de intersecção F .

5. Trace os segmentos de reta \overline{AB} , \overline{BD} , \overline{DF} , \overline{EF} , \overline{CE} , e \overline{AC} . Obtemos o hexágono regular $ABDFEC$, com lado medindo 5.

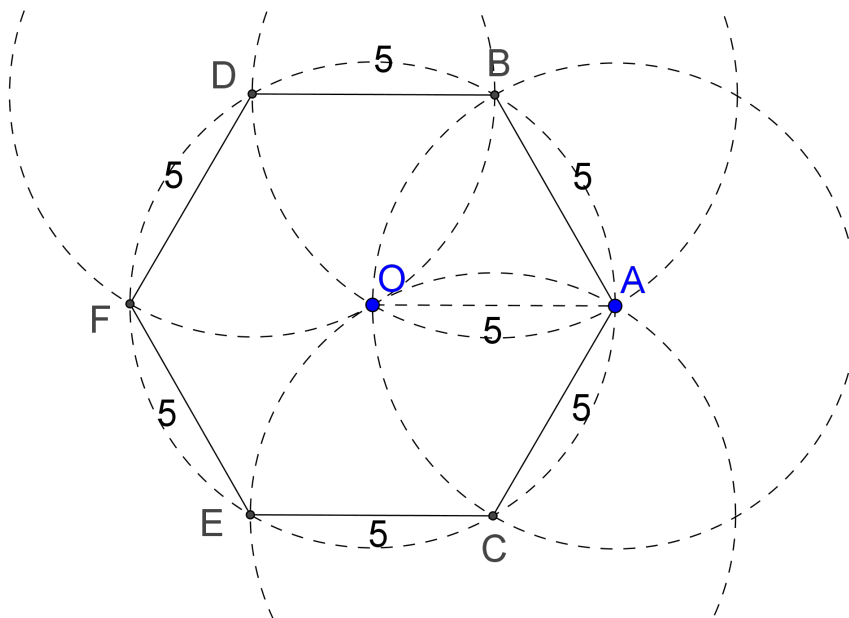


Figura 78: 5º passo - hexágono regular $ABDFEC$.

Atividade 2. Justifique a construção feita na Atividade 1.

Resolução 2. Por construção, os pontos A, B, C, D, E, F pertencem à circunferência de centro O que passa por A , de modo que

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 5 .$$

Além disso, por construção, $AB = AC = OA = 5$, $BD = OB = 5$, $CE = OC = 5$. Assim, os triângulos $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBD$, $\triangle OCE$ e $\triangle ODF$ são equiláteros e congruentes, pelo caso LLL.

Além disso, como

$$med(\widehat{EOC}) + med(\widehat{COA}) + med(\widehat{AOB}) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

então \vec{OE} e \vec{OB} são semirretas opostas. E como

$$med(\widehat{AOB}) + med(\widehat{BOD}) + med(\widehat{DOF}) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

então \vec{OA} e \vec{OF} são semirretas opostas.

Consequentemente, \widehat{EOF} e \widehat{AOB} são ângulos opostos pelo vértice, de modo que $med(\widehat{EOF}) = 60^\circ$. Como $OF = OE = 5$, temos assim que o triângulo $\triangle EOF$ é equilátero e congruente aos triângulos $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBD$, $\triangle OCE$ e $\triangle ODF$.

Segue que $\overline{AB} \equiv \overline{BD} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{FE} \equiv \overline{EC} \equiv \overline{CA}$ e $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDF} \equiv \widehat{DFE} \equiv \widehat{FEC} \equiv \widehat{ECA} \equiv \widehat{CAB}$.

Portanto, o hexágono $ABDFEC$ é regular e está inscrito na circunferência de centro O .

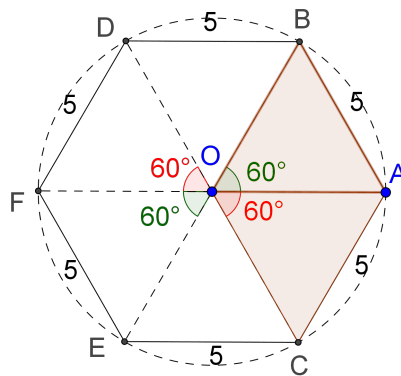


Figura 79: Hexágono regular $ABDFEC$.

Construções Básicas: Mediatriz e Bissetriz.

Exemplo 4.1 (Construção da Mediatriz de um segmento dado). Dado um segmento de reta \overline{AB} , encontre a reta m mediatriz de \overline{AB} .

Construção:

1. Trace uma circunferência com centro em A passando em B .
2. Trace uma circunferência com centro em B passando em A .
3. Obtemos dois pontos de intersecção, C e D .
4. Trace a reta que passa pelos pontos C e D . Essa será a reta m mediatriz do segmento de reta \overline{AB} .

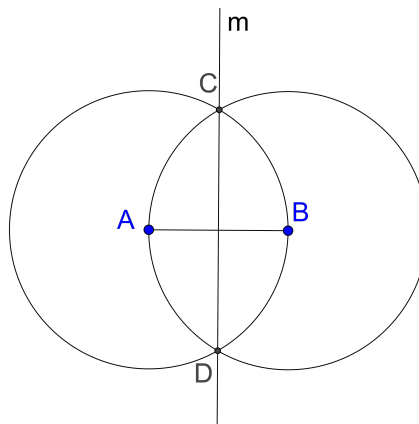


Figura 80: Mediatriz m .

Observação 4.1.1. Por construção, temos (na Figura 80) que $CA = CB$ e $DA = DB$, de modo que C e D equidistam de A e B .

Assim, os pontos C e D pertencem à mediatriz de \overline{AB} , que é uma reta. Como por C e D passa uma única reta, então \overline{CD} é a reta mediatriz de \overline{AB} .

Exemplo 4.2 (Construção da Bissetriz de um ângulo dado). Dado um ângulo \widehat{ABC} , determine sua bissetriz.

Construção:

1. Trace uma circunferência λ com centro em B com raio qualquer.
2. Marque os pontos de intersecção D e E , tal que $\{D\} = \overrightarrow{BA} \cap \lambda$ e $\{E\} = \overrightarrow{BC} \cap \lambda$.
3. Siga os passos indicados no exemplo 4.1 e trace a mediatriz r do segmento \overline{DE} .

A bissetriz do ângulo \widehat{ABC} é a semirreta \overrightarrow{BP} , com $P \in r$ qualquer e P pertencente ao interior do ângulo \widehat{ABC} .

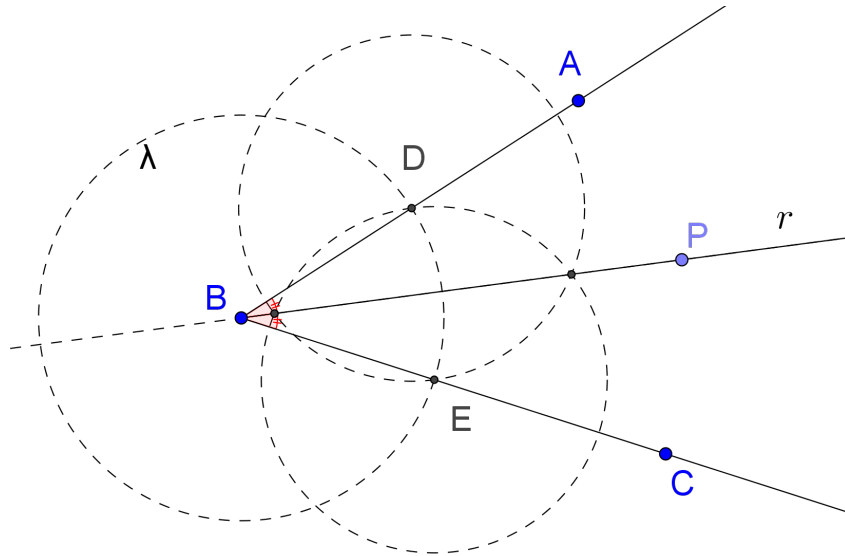


Figura 81: Bissetriz do ângulo \widehat{ABC} .

Observação 4.1.2. Note que $B \in r$, pois, por construção, $BD = BE$. Sendo M o ponto médio de \overline{DE} , temos que $M \in r$, de modo que B, M e P são colineares. Além disso, os triângulos $\triangle MDB$ e $\triangle MEB$ são congruentes, de onde segue que $\widehat{DBM} \equiv \widehat{EBM}$.

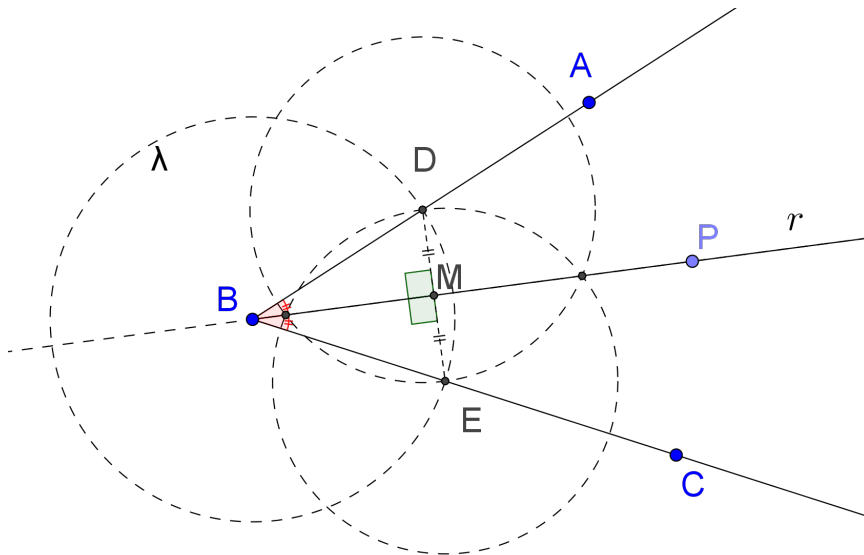


Figura 82: Bissetriz r .

Observação 4.1.3. Observe também que se Y é um ponto qualquer da bissetriz do ângulo $\widehat{A\hat{B}C}$ então

$$d(Y, \overrightarrow{BA}) = d(Y, \overrightarrow{BC}) .$$

De fato, sejam H e I as projeções ortogonais de Y sobre, respectivamente, as semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} . Assim, $\widehat{YHB} \equiv \widehat{YIB}$. Como Y é um ponto da bissetriz do ângulo $\widehat{A\hat{B}C}$ então $\widehat{YBH} \equiv \widehat{YBI}$.

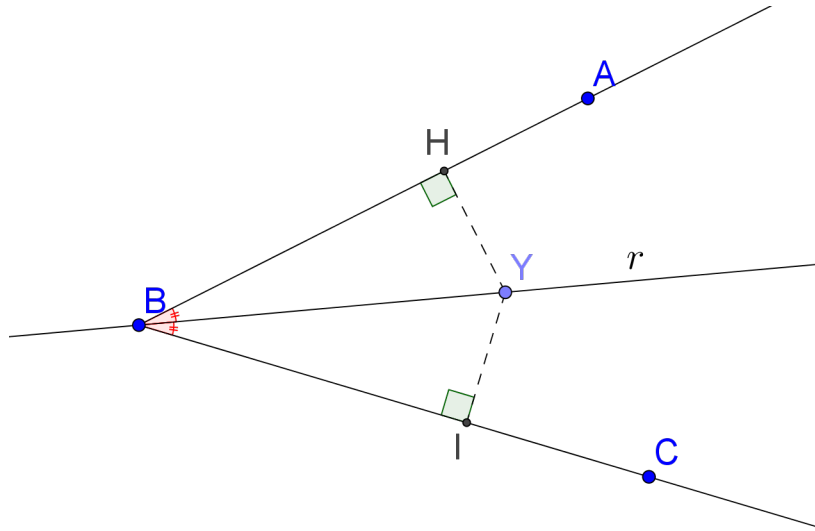


Figura 83: Construção dos segmentos \overline{HY} e \overline{IY} .

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° , obtemos que

$$\widehat{BYH} \equiv \widehat{BYI} .$$

Como $\widehat{YBH} \equiv \widehat{YBI}$, $\widehat{BYH} \equiv \widehat{BYI}$ e \overline{BY} é lado comum para os triângulos $\triangle BYH$ e $\triangle BYI$, pelo critério de congruência ALA, concluímos que

$$\triangle BYH \equiv \triangle BYI$$

Portanto,

$$HY = IY .$$

Atividade 3. Dado um hexágono regular $ABCDEF$, trace a circunferência circunscrita à ele.

Resolução 3. 1. Considere o hexágono regular $ABCDEF$.

2. Trace a mediatriz r do lado \overline{AB} .
3. Trace a mediatriz s do lado \overline{BC} .
4. Seja $\{G\} = r \cap s$, que existe pois, caso contrário A, B e C seriam colineares.
5. Trace a circunferência com centro em G passando em A .

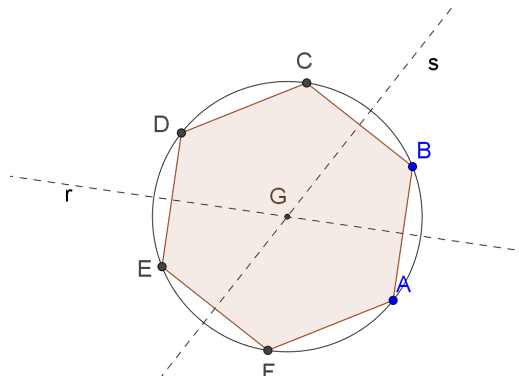


Figura 84: Hexágono regular inscrito.

Atividade 4. Justifique a construção feita na atividade 3.

Resolução 4. O ponto G é circuncentro do triângulo $\triangle ABC$ pois as mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto, conforme a proposição 1.34. Assim,

$$AG = BG = CG .$$

Logo, o triângulo $\triangle BGC$ é isósceles, donde segue que $G\hat{B}C \equiv G\hat{C}B$. Como o hexágono é regular sabemos que

$$\overline{BC} = \overline{CD}$$

e

$$med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{BCD}) .$$

Assim,

$$G\hat{B}A \equiv G\hat{C}D .$$

Como $\overline{GC} \equiv \overline{GB}$, $G\hat{B}A \equiv G\hat{C}D$ e $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$, concluímos que os triângulos $\triangle GBA$ e $\triangle GCD$ são congruentes pelo critério LAL. Consequentemente,

$$GB = GD .$$

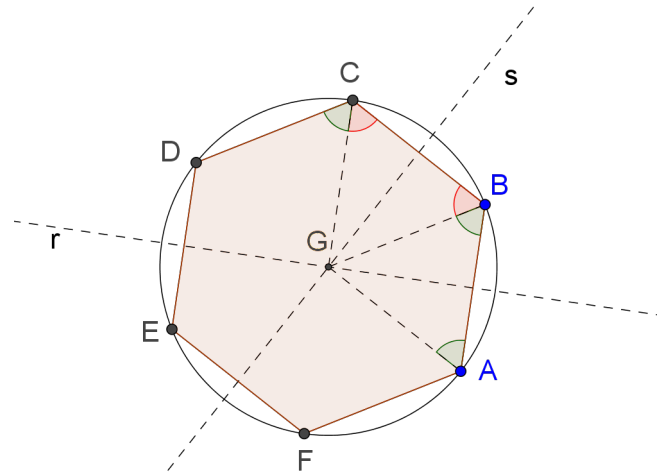


Figura 85: Hexágono regular inscrito.

Analogamente, mostra-se que F pertence à circunferência que passa por A , B e C .

Agora, observe que $\overline{DE} \equiv \overline{BC}$, pois são os lados do hexágono regular; $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$, pois B e D pertencem à circunferência de centro G que passa por A . Segue da congruência dos ângulos internos do hexágono regular $ABCDEF$ que $\widehat{GDE} \equiv \widehat{GBC}$. Assim, os triângulos $\triangle GBC$ e $\triangle GDE$ são congruentes, donde segue que $GE = GC$.

Portanto, E pertence à circunferência de centro G que passa por A , B , C , D e F .

Atividade 5. Dado um hexágono regular $ABCDEF$, trace o círculo inscrito a este polígono.

Resolução 5. 1. Considere um hexágono regular $ABCDEF$.

2. Trace a mediatriz r do lado \overline{AB} .
3. Marque os pontos de intersecção G e H , tais que $\{G\} = r \cap \overline{AB}$ e $\{H\} = r \cap \overline{DE}$.
4. Trace a mediatriz s do lado \overline{BC} .
5. Marque os pontos de intersecção I , J e K , tal que $\{I\} = s \cap \overline{BC}$, $\{J\} = s \cap \overline{EF}$ e $\{K\} = r \cap s$.
6. Trace a mediatriz t do lado \overline{CD} .
7. Marque os pontos de intersecção L e M , tais que $\{L\} = t \cap \overline{AF}$ e $\{M\} = t \cap \overline{CD}$.
8. Trace a circunferência com centro em K passando em G .

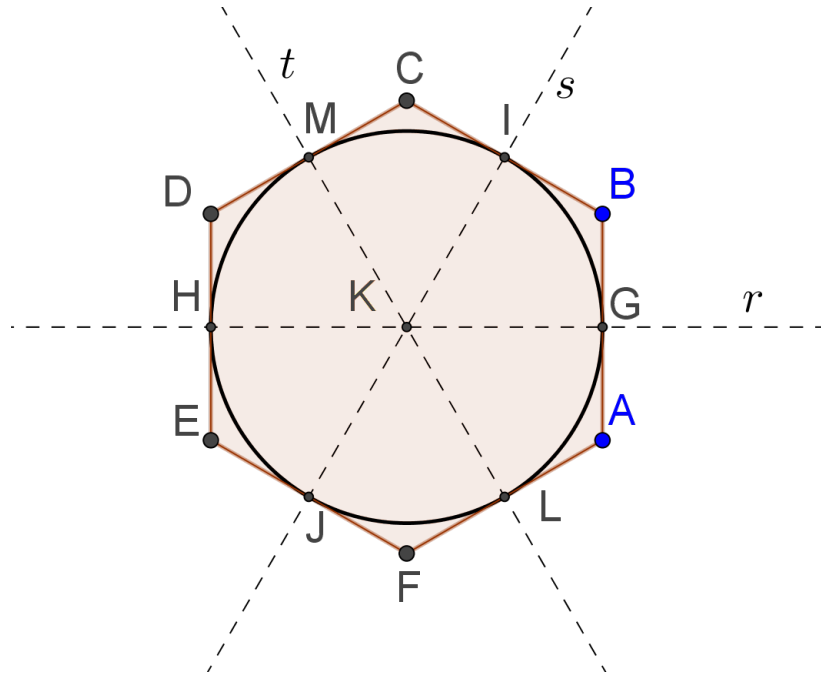


Figura 86: Hexágono regular circunscrito.

Atividade 6. Justifique a construção feita na atividade 5.

Resolução 6. O ponto K pertence à intersecção das mediatrizes r e s (veja a figura 86). Assim, conforme o resultado obtido na atividade 4, temos que K é o centro da circunferência que circunscreve o polígono regular $ABCDEF$. Logo,

$$AK = BK = CK = DK = EK = FK .$$

Pelos resultados obtidos nas atividades 1 e 2, sabemos que o hexágono regular $ABCDEF$ é formado por 6 triângulos equiláteros congruentes, isto é,

$$\triangle AKB \equiv \triangle BKC \equiv \triangle CKD \equiv \triangle DKE \equiv \triangle EKF \equiv \triangle FKA$$

Consequentemente, as alturas dos triângulos equiláteros congruentes são também congruentes, o que resulta em

$$GK = IK = MK = HK = JK = LK .$$

Assim, a circunferência que tem centro em K e que passa pelo ponto G também passa pelos pontos de tangência I, M, H, J e L .

Atividade 7. Dado um hexágono regular $ABCDEF$ inscrito num círculo, construa com régua e compasso um polígono regular com 12 lados inscrito no mesmo círculo.

Resolução 7. 1. Repita a construção realizada na atividade 3 e obtenha o hexágono regular $ABCDEF$ inscrito no círculo λ de centro O e raio AO .

2. Trace a reta r mediatriz de \overline{AB} .

3. Trace a reta s mediatriz de \overline{BC} .

4. Trace a reta t mediatriz de \overline{CD} .

5. Marque os pontos de interseção G e H , tais que $\{G, H\} = r \cap \lambda$.

6. Marque os pontos de interseção I e J , tal que $\{I, J\} = s \cap \lambda$.

7. Marque os pontos de interseção K e L , tal que $\{K, L\} = t \cap \lambda$.

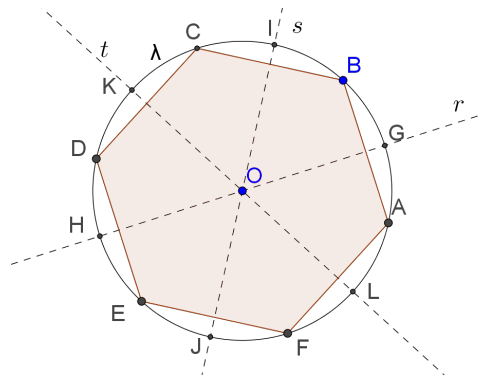


Figura 87: Construção do polígono regular de 12 lados.

8. Trace o polígono $AGBICKDHEJFL$.

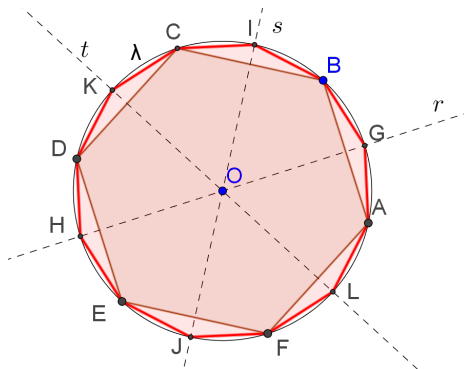


Figura 88: Polígono regular $AGBICKDHEJFL$

Atividade 8. Dado um hexágono regular $ABCDEF$ circunscrito num círculo, construa com régua e compasso um polígono regular com 12 lados circunscrito no mesmo círculo.

- Resolução 8.** 1. Repita os procedimentos na atividade 5 e construa o hexágono regular $ABCDEF$ circunscrito ao círculo λ de centro O .
2. Marque os pontos de tangência J, K, L, M, N e P , tais que $J \in \overline{AB}$, $K \in \overline{BC}$, $L \in \overline{CD}$, $M \in \overline{DE}$, $N \in \overline{EF}$ e $P \in \overline{AF}$.
3. Trace a reta suporte r da bissetriz do ângulo $\widehat{B\hat{O}J}$.
4. Trace a reta suporte s da bissetriz do ângulo $\widehat{A\hat{O}J}$.
5. Trace a reta suporte t da bissetriz do ângulo $\widehat{B\hat{O}K}$.
6. Trace a reta suporte u da bissetriz do ângulo $\widehat{C\hat{O}K}$.
7. Trace a reta suporte v da bissetriz do ângulo $\widehat{C\hat{O}L}$.
8. Trace a reta suporte w da bissetriz do ângulo $\widehat{D\hat{O}L}$.

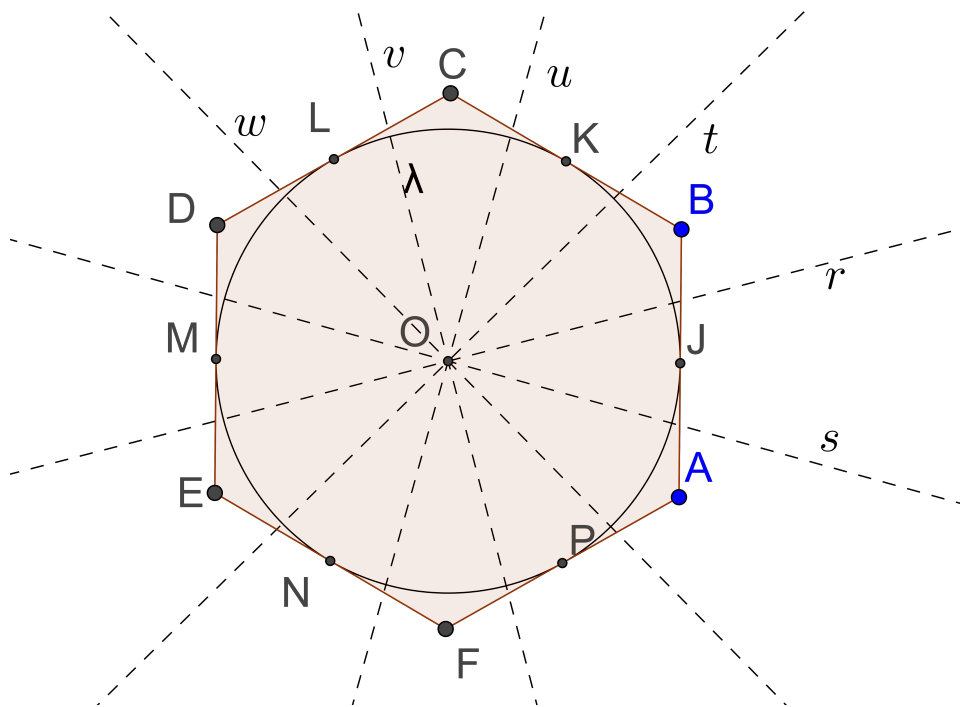


Figura 89: Construção do polígono regular circunscrito com 12 lados.

9. Marque os pontos de intersecção das retas suportes dessas bissetrizes com a circunferência λ .
10. Trace retas tangentes à circunferência λ no pontos obtidos no passo anterior.
11. Os pontos de intersecção determinados pelas retas tangentes traçadas no passo anterior são os vértices do polígono regular de 12 lados.

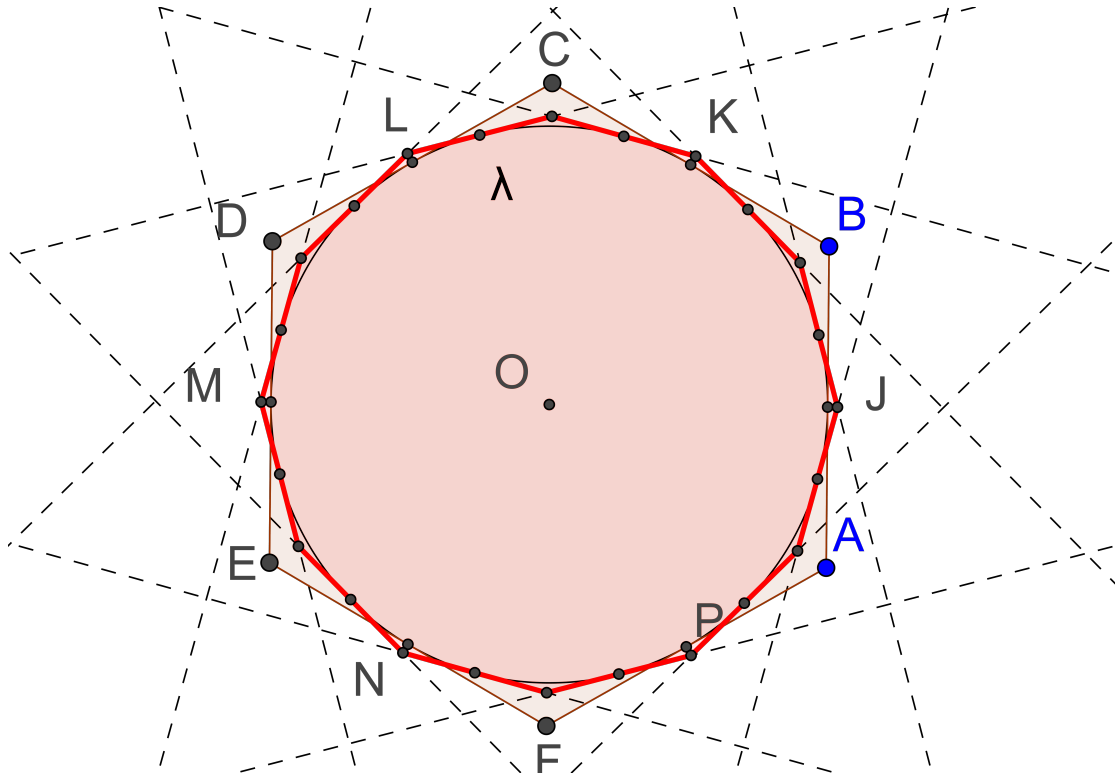


Figura 90: Polígono regular circunscrito com 12 lados.

4.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Atividade 9. Calcule a área do hexágono regular inscrito no círculo de raio 1.

Resolução 9. Considere o hexágono regular $ABCDEF$ inscrito no círculo de centro O e raio $OA = 1$.

Sabemos que o hexágono regular $ABCDEF$ é formado por 6 triângulos congruentes ao triângulo $\triangle AOB$.

Seja $A[Pol_6]$ a área do polígono regular $ABCDEF$ e seja $A(\triangle AOB)$ a área do triângulo $\triangle AOB$, assim temos:

$$A[Pol_6] = 6.A(\triangle AOB) .$$

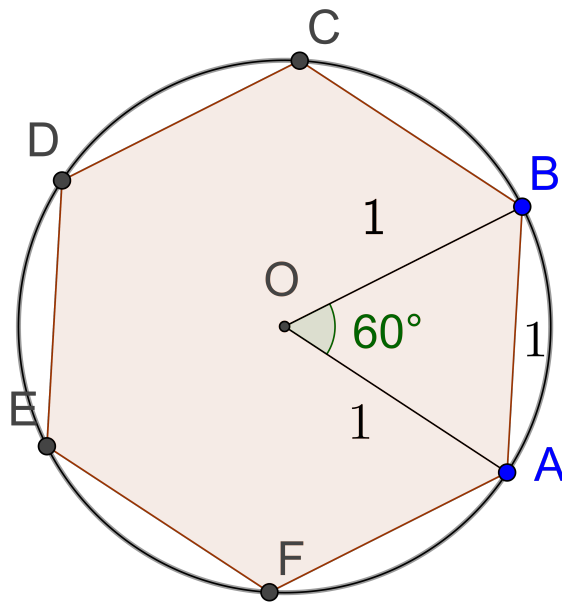


Figura 91: Hexágono regular inscrito $ABCDEF$.

Observe que o triângulo $\triangle AOB$ é equilátero, assim:

$$A(\triangle AOB) = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \text{sen } 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

isto é,

$$A(\triangle AOB) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Assim,

$$A[Pol_6] = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Atividade 10. Calcule a área do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio 1.

Resolução 10. Considere o hexágono regular $ABCDEF$ circunscrito a um círculo de centro O e raio $OM = 1$, tal que M é ponto médio do segmento \overline{AB} .

O hexágono $ABCDEF$ é formado por 6 triângulos congruentes ao triângulo equilátero $\triangle AOB$. Seja $A[Pol_6]$ a área do polígono regular $ABCDEF$ e seja $A(\triangle AOB)$ a área do triângulo $\triangle AOB$. Assim, temos:

$$A[Pol_6] = 6 \cdot A(\triangle AOB).$$

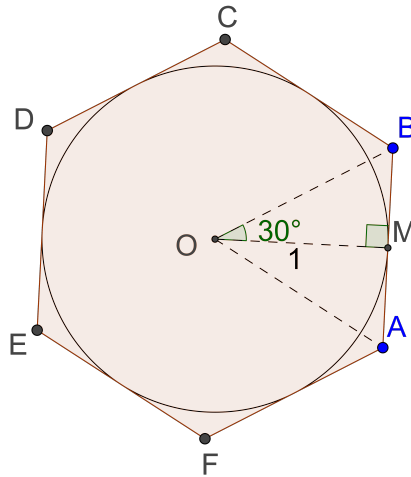


Figura 92: Hexágono regular circunscrito $ABCDEF$.

Observe (ver Figura 92) que o triângulo $\triangle AOB$ por ser equilátero, é tal que sua altura \overline{OM} pertence à bissetriz do ângulo \widehat{AOB} , donde segue que

$$\text{med}(\widehat{AOB}) = 30^\circ .$$

Assim, no triângulo retângulo $\triangle OMB$, temos:

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OB} .$$

Logo,

$$OB = \frac{2\sqrt{3}}{3} = AB .$$

A área do triângulo $\triangle AOB$ é dada por

$$A(\triangle AOB) = \frac{AB \cdot OM}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

Dessa forma, a área do hexágono regular circunscrito $ABCDEF$ é igual a

$$A[\text{Pol}_6] = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} .$$

Observação 4.2.1. Tomando como referência os resultados obtidos nas Atividades 9 e 10, sendo A_c a área do círculo de raio 1, então temos:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < A_c < 2\sqrt{3} .$$

Atividade 11. Calcule a área do dodecágono regular inscrito no círculo de raio 1.

Resolução 11. No capítulo 3 desta dissertação, foi apresentado o seguinte resultado obtido por Arquimedes:

$$Ai_{(2n)} = \sqrt{Ai_{(n)} \cdot Ac_{(n)}}$$

onde

- $Ai_{(n)}$: a área do polígono inscrito de n lados.
- $Ac_{(n)}$: a área do polígono circunscrito de n lados.
- $Ai_{(2n)}$: a área do polígono inscrito de $2n$ lados.

Pelos resultados obtidos nas atividades 9 e 10 temos:

$$Ai_{(6)} = \frac{3\sqrt{3}}{2} ,$$

$$Ac_{(6)} = 2\sqrt{3} .$$

Sendo $Ai_{(12)}$ a área do dodecágono regular inscrito no círculo de raio 1, temos:

$$Ai_{(12)} = \sqrt{Ai_{(6)} \cdot Ac_{(6)}}$$

isto é,

$$Ai_{(12)} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}}$$

resultando em

$$Ai_{(12)} = 3 .$$

Observação 4.2.2. Poderíamos resolver a atividade 11 de outras maneiras, como a seguir.

Considere o dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$ inscrito no círculo de centro O e raio $OA = 1$. Este dodecágono por ser regular é formado por 12 triângulos isósceles e congruentes ao triângulo $\triangle AOB$. Assim,

$$med(\widehat{AOB}) = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ .$$

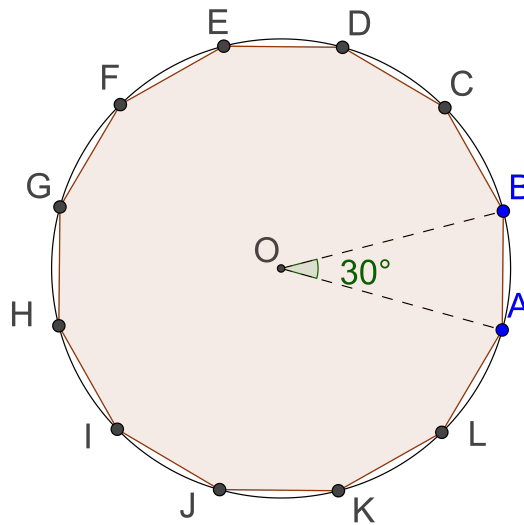


Figura 93: Dodecágono regular inscrito.

Seja $A(\triangle AOB)$ a área do triângulo $\triangle AOB$, então

$$A(\triangle AOB) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4}.$$

Seja $A[Pol_{12}]$ a área do dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$, temos:

$$A[Pol_{12}] = 12 \cdot A(\triangle AOB) = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3.$$

Observe, assim, que chegamos ao mesmo resultado apresentado na atividade 11.

Atividade 12. Calcule a área do dodecágono regular circunscrito ao círculo de raio 1.

Resolução 12. Por 3.5, temos:

$$Ac_{(12)} = \frac{2 \cdot Ac_{(6)} \cdot Ai_{(12)}}{Ac_{(6)} + Ai_{(12)}},$$

onde

- $Ac_{(12)}$: a área do polígono circunscrito de 12 lados.
- $Ac_{(6)}$: a área do polígono circunscrito de 6 lados.
- $Ai_{(12)}$: a área do polígono inscrito de 12 lados.

Pelos resultados obtidos nas atividades 10 e 11, temos:

$$Ac_{(6)} = 2\sqrt{3}.$$

$$Ai_{(12)} = 3.$$

Logo,

$$A_{C(12)} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{3}) \cdot 3}{2\sqrt{3} + 3} = 4 - 12\sqrt{3}.$$

Atividade 13. Com os resultados obtidos nas atividades 10 e 11, estime um valor aproximado para a área do círculo de raio 1 (Dica: utilize o modelo de comparação utilizado na observação 4.2.1).

Resolução 13. Seja A_c a área do círculo de raio 1. Pelos resultados obtidos nas atividades 10 e 11, sabemos que

$$A_{i(12)} < A_c < A_{C(12)},$$

isto é,

$$3 < A_c < 24 - 12\sqrt{3}.$$

Tomando uma aproximação de duas casas decimais, $24 - 12\sqrt{3} \approx 3,22$, assim,

$$3 < A_c < 3,22.$$

Atividade 14. Com base nos resultados e nos procedimentos que foram tomados nas resoluções das atividades 8, 9, 10 e 11, podemos acreditar que estamos ficando cada vez mais perto da verdadeira área do círculo de raio 1? Justifique a sua resposta.

Resolução 14. Essa é uma resolução que pode ser dada de muitas maneiras. O importante é conter na resposta, de maneira implícita ou explícita, o método da exaustão como procedimento.

Atividade 15. Considerando polígonos inscritos e circunscritos no círculo de raio 1, faça os devidos cálculos e complete a tabela a seguir:

Número de Lados	Área do polígono regular inscrito	Área do polígono regular circunscrito
6		
12		
24		
48		
96		

Tabela 4: Tabela com as áreas do polígonos inscritos e circunscritos.

Com esta atividade, podemos obter aproximações para π , pois conforme tratamos no capítulo 3, a razão da área do círculo pelo seu raio ao quadrado gera uma constante de proporcionalidade ². Assim, considerando um círculo de raio 1 e área A_c , teremos

$$\frac{A_c}{1^2} = \pi ,$$

em que π é uma constante de proporcionalidade. Ou seja, temos

$$A_c = \pi .$$

A Atividade 15 tem por objetivos mostrar para o aluno como obter uma aproximação para o número π pelo Método de Arquimedes. Também, oferecer uma melhor compreensão do Método da Exaustão, e com isso, um melhor entendimento do processo de aproximação de áreas de polígonos inscritos e circunscritos. É possível também, com o Método de Arquimedes, compreender de uma maneira mais clara como o Infinito é uma ferramenta importante para a demonstração de teoremas.

Para finalizarmos este capítulo, na próxima seção, apresentaremos alguns projetos que podem ser executados em sala de aula. Alguns desses projetos foram retirados da referência [3].

4.3 PROJETOS

4.3.1 Projeto 1

Os alunos devem se reunir em grupos para realizar uma pesquisa que responda as perguntas a seguir. Nessa pesquisa, os alunos devem achar fontes bibliográficas e, ao final do projeto, devem apresentar para a turma os resultados obtidos.

1. Quem foi Arquimedes?
2. Arquimedes viveu em Siracusa, na ilha da Sicília. Como era Siracusa por volta de 240 a.C.? Como Arquimedes participava da vida da cidade?
3. O que é um número irracional? Como eles surgiram?
4. O número π é irracional? Por quê?
5. Como o número π contribui atualmente para o avanço da tecnologia?

² essa constante de proporcionalidade é o número π .

4.3.2 Projeto 2

Os alunos devem se reunir em grupos para realizar uma pesquisa que responda as perguntas a seguir. Nessa pesquisa, os alunos devem achar fontes bibliográficas e, ao final do projeto, devem apresentar para a turma os resultados obtidos.

1. O que é o Infinito Real e o Infinito Potencial? Dê exemplos.
2. Quem foi Georg Cantor?
3. Quais foram as principais descobertas realizadas por Georg Cantor?
4. Escreva um texto comparando e contrastando o conceito matemático de infinito com a ideia de infinito como ela ocorre em alguma outra área ou é vista de outro ponto de vista. Use qualquer fonte que desejar, mas lembre-se de creditar as ideias e afirmações dizendo de quais fontes foram tiradas.
5. Encontre, escreva e esteja preparado para apresentar ou explicar uma demonstração de pelo menos um dos seguintes fatos estabelecidos por Cantor:
 - a. O conjunto dos números racionais é do mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais.
 - b. O conjunto dos números reais não é do mesmo tamanho que o conjunto dos naturais.
 - c. Nenhum conjunto é do mesmo tamanho que o conjunto de todos os seus subconjuntos. (Isso implica que há infinitos tamanhos diferentes de conjuntos infinitos!)

BIBLIOGRAFIA

- [1] ÁVILA, G. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática. *Brasília: Revista do Professor de Matemática*, v. 7, p. 5–10, 2010.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Tradução Elza Gomide e Helena Castro, 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- [4] BICUDO, I. *Os Elementos/Euclides*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [5] CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M.; BIANCONI, R. *Lógica e Aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia. Versão preliminar: Notas de Aula*, v. 1, 2006.
- [6] CEGALLA, D. P. *Dicionário escolar da língua portuguesa*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2008.
- [7] CONTADOR, P. R. M. *Matemática: uma breve história*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- [8] COURANT, R.; ROBBINS, H.; DE CARVALHO, J. B. P. *O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- [9] D'AMBRÓSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papyrus Editora, 2010.
- [10] DE CARVALHO, S. P. A área e o perímetro de um círculo. *Primeiro Colóquio de Matemática da Região Sudeste - UFMG, Minas Gerais*. Disponível em: <<http://www.emis.ams.org/journals/em/docs/coloquios/SE-1.02.pdf>>. Acesso em: 01 de Junho de 2017, 2011.
- [11] DE JESUS CARAÇA, B. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

- [12] DE SOUZA ÁVILA, G. S. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.
- [13] DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, 2002.
- [14] DOLCE, OSVALDO, P. J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana–vol. 9*. São Paulo: Editora Atual, 2005.
- [15] GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências*. 5.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [16] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. *A Matemática do Ensino Médio - volume 1*. v.1. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [17] LIMA, E. L. *Meu professor de matemática: e outras histórias*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [18] LIMA, E. L. *Análise real volume 1: Funções de uma variável real*. v.1. 9.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [19] MARTINEZ, J. D. L. O infinito é um paradoxo na matemática. *Scientific American Brasil, Especial: As diferentes faces do infinito*, , n. 15, p. 6–13, 2000.
- [20] MORGADO, AUGUSTO CÉSAR E CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [21] YAMASHIRO, SEIZEN, S. S. A. D. O. *Matemática com aplicações tecnológicas*. São Paulo: Blucher, 2014.