SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS MAURÍCIO DE SOUSA

ARITMÉTICA, FRAÇÕES CONTÍNUAS E APLICAÇÕES À MÚSICA

PORTO VELHO
2017

CARLOS MAURÍCIO DE SOUSA

ARITMÉTICA, FRAÇÕES CONTÍNUAS E APLICAÇÕES À MÚSICA

Trabalho de conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT no polo da Universidade Federal de Rondônia - UNIR, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática Profissional.

Orientador: Prof. Dr. Tomás Daniel Menendez Rodriguez

PORTO VELHO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fundação Universidade Federal de Rondônia

Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

S725a Sousa, Carlos Maurício de.

Aritmética, frações contínuas e aplicações à música: Pesquisa bibliográfica / Carlos Maurício de Sousa. -- Porto Velho, RO, 2017.

56 f. : il.

Orientador(a): Prof. PhD Tomás Daniel Menéndez Rodríguez

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia

1.Divisão euclidiana. 2.Frações contínuas. 3.Afinação Musical. 4.Comma. I. Rodríguez, Tomás Daniel Menéndez. II. Título.

CDU 372.42

Bibliotecário(a) Luã Silva Mendonça CRB 11/905

CARLOS MAURÍCIO DE SOUSA

ARITMÉTICA, FRAÇÕES CONTÍNUAS E APLICAÇÕES A MÚSICA

Este trabalho foi julgado e aprovado para obtenção de título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Campus de Porto Velho - RO.

Porto Velho, 24 de novembro de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tomas Daniel Menendez Rodriguez
Orientador/Presidente
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr(a). Maria das Graças Viana de Sousa
UNIR

DEDICATÓRIA

A minha mãe Maria do Amparo Sousa e minha vó Francisca Isabel de Sousa (in memorian). Aos meus amigos. A minha esposa Caroline Leite Braga e ao meu sobrinho Luis Guilherme.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela oportunidade de chegar até aqui, sem ele nada disso seria possível.

Ao meu grande amigo e orientador Tomás Daniel Menéndez Rodriguez, pelos ensinamentos, forma inspiradora de ser professor e por acreditar em mim desde a graduação.

As minhas mães, Maria do Amparo Sousa e Francisca Isabel de Sousa (in memorian) por me incentivarem sempre nos estudos, além de me apoiarem.

Aos meus irmão Camila Felisberto e Luis Artur, por me apoiarem em todas as minhas decisões.

À minha amada esposa Caroline Leite Braga, pelo carinho, dedicação e paciência.

À Querida professora Maria das Graças por suas palavras de incentivo e inspiração.

Ao professor Eudes Barroso, pelo carinho e pela atenção.

Aos grandes professores Marinaldo Felipe, Flávio Batista Simão, Marizete Nink de Carvalho, Ronaldo Chaves e Adeilton Costa pelas contribuições em minha formação e pela boa amizade.

Ao meu grande amigo e companheiro de estudo Sézani Morais G. de Carvalho, por acreditar em meu potencial, pelo incentivo, pela dedicação, pela sua constante contribuição no desenvolvimento desse trabalho, pelas suas inúmeras revisões de texto.

Ao meu grande amigo Antônio Carlos Valério, que em tão pouco tempo de amizade me ajudou em muitos momento que precisei, mostrando sincera amizade e consideração.

Aos meus amigos Ricardo, Ademir e Gabriel que em 10 anos de amizade sempre contribuíram para o meu crescimento.

Aos meus grandes amigos e companheiros de estudos durante o mestrado: Valmir Taborda, Rosemar Erdmann, Luciano Pinto, Jonas Marquiole, Lázaro Carvalho e Eurilano Albuquerque pelos longos dias de estudo com os quais aprendi muito e evolui durante o curso, com eles construí uma forte amizade.

A todos os que contribuíram com minha formação, aos quais mencionei acima, e aos colaboradores que deixei de mencionar, a todos minha eterna gratidão.

"Se vi tão longe, foi por estar sobre ombros de gigantes."

Isaac Newton

RESUMO

A estreita relação entre a matemática e a música é conhecida desde a Grécia antiga. A Escola Pitagórica elaborou uma teoria da música, muito elogiada, baseada nos números. Uma pergunta bem antiga é sob quais critérios a música aceita alguns sons e rejeita outros? O que é afinação musical? Define-se como afinação, ou mais precisamente sistema de afinação, ao conjunto de sons primários utilizados para gerar a música, ou seja, no conjunto das frequências de todos os sons ($\mathbb{R}_+$), devem ser escolhidos aqueles que "servem para fazer música". Os sons escolhidos pelo sistema de afinação são denominados *sons afinados* ou *notas musicais.* O presente trabalho tem por objetivo mostrar a relação que pode ser estabelecida entre a aritmética e a determinação das notas e entre as frações contínuas e suas propriedades com o conceito de $comma$ na afinação musical. Primeiro é mostrado que afinar é não mais do que definir um algoritmo para escolher uma quantidade finita de pontos no intervalo $[1, 2[$ e que esta eleição é condicionada por algumas propriedades numéricas.

Palavras-chave: Divisão euclidiana. Frações contínuas. Afinação musical. Comma.

ABSTRACT

The narrow relationship between mathematics and music has been known since old Greece. The Pythagorean School elaborated a highly praised theory of music. Very compliment, based on numbers. A very old question is under what criterion does music accept some sounds and reject others? What is musical tuning? It is defined as tuning, or more accurately, the tuning system, to the set of primary sounds used to generate the music, in other words, in the set of frequencies of all sounds $(\mathbb{R}_+)$, those which are fit to make music should be chosen ". The sounds chosen by the tuning system are called tuned sounds or musical notes. The present work aims to show the relation that can be established between arithmetic and the determination of notes and between the continued fractions and their properties with the concept of $comma$ in musical tuning. First it is shown that tuning is no more than defining an algorithm to choose a finite amount of points in the interval $[1,2[$ and that this election is conditioned by some numerical properties.

Keywords:. Euclidean division. Continued fractions. Musical tuning. Comma.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

A matemática está presente em tudo, desde pequenos cálculos do cotidiano a proposições e teoremas de mais alta complexidade. Pitágoras acreditava que tudo poderia ser explicado por números e juntamente com a sociedade pitagórica realizou vários estudos em busca de comprovar sua teoria. Um desses estudos foi sobre a música, as características do som, a estrutura matemática das notas e a construção da escala musical. Até então a música era um mistério, um fenômeno curioso e desconhecido. Tendo curiosidade sobre esses fenômenos, Pitágoras projetou e construiu um instrumento composto por três cavaletes, dois fixos nas extremidades e um móvel, e uma corda esticada, que foi denominado monocórdio, e realizou um experimento movendo o cavalete livre e observando intuitivamente a alteração do som. Ao realizar esse experimento percebeu que dividindo a corda ao meio, ou seja, dividindo o comprimento por 2, o som produzido era o mesmo, só que mais agudo, assim 1/2 da corda produzia o mesmo som uma oitava acima e 2/3 do comprimento produzia uma nota distinta da inicial, a quinta nota da escala musical, a escala que já era conhecida por povos mais antigos. Com esse estudo Pitágoras descobriu que a escala musical era construída por meio de proporções da corda e que a frequência era inversamente proporcional ao seu comprimento, provando, definitivamente, que a música estava relacionada matemática. Em 2002 o matemático espanhol Vicent Liern publicou um artigo com o título *"Algoritmos matemáticos y afinación musical"* no qual apresentou um algoritmo para determinação das notas utilizando a aritmética e relacionando as notas musicais como uma sequência numérica.

O objetivo deste trabalho é explicar como foi definido esse algoritmo, buscando uma forma clara com a finalidade de facilitar a compreensão do leitor. Para tal, são apresentados todos os tópicos necessários para o entendimento. Em um primeiro momento é demonstrado que afinar consiste em definir um algoritmo para escolher uma quantidade finita de pontos no intervalo $[1,2[$ e que existem propriedades numéricas importantes relacionadas ao comportamento das notas musicais.

No capítulo 1 é realizado um apanhado histórico de como a música era compreendida pelo homem, no passado, além da enumeração de vários momentos históricos importantes para o desenvolvimento musical além da interpretação matemática para este fenômeno. No capítulo 2 são apresentadas proposições e teoremas de aritmética utilizados para a dedução do algoritmo para a determinação de notas musicais, o qual é descrito, em detalhes, no capítulo 3. No capítulo

4 apresentam-se algumas propriedades, proposições e teoremas sobre frações contínuas, conceitos estes utilizados para demonstrar alguns teoremas que são enunciados no capítulo 5, capítulo este onde será definido o conceito de *Comma*, que é o coeficiente pitagórico da última nota de um conjunto de notas considerado como uma afinação ideal. Nesta etapa do trabalho as notas musicais são tratadas como uma sequência numérica que converge para 1, ou seja, um conjunto de notas se aproximam de uma nota só, a qual permanece sempre afinada em razão de não haver dissonância com si mesma.

Alguns temas de Análise Real, embora necessários, foram omitidos em razão de não contemplarem o objetivo deste trabalho, sem com isto, comprometer o desenvolvimento e a compreensão dos assuntos abordados.

1 A MATEMÁTICA E A MÚSICA: O HOMEM EM MEIO AOS SONS

1.1 A ESTRUTURA DA MÚSICA

1.1.1 Estrutura intuitiva da música

A música é conhecida por qualquer indivíduo. É uma manifestação religiosa ou artística praticada pelo homem desde a antiguidade, sendo um mistério para ele por suas diversas características. A definição de música é feita primeiramente pela intuição, pelo sentimento causado no homem ao ter contato com ela, mais precisamente ao ouvi-la. Segundo Bennet:

> A música se estrutura intuitivamente em melodia, harmonia e ritmo, classificados a partir do sentimento no ser humano provocado por cada um deles.
> A melodia é definida na música como uma sequência de notas diferentes organizadas de uma forma que faça sentido para o ouvido.
> A harmonia é a reprodução simultânea de notas distintas, ou seja, que possuem sons diferentes. Essa combinação pode ser de dois tipos:
> - Consoantes: onde as notas possuem uma relação de semelhança, aproximação umas com as outras, tornando o som resultante agradável ao ouvido;
> - Dissonantes: onde as notas dissonam em maior ou menor grau, trazendo assim um sentimento de tensão a quem ouve a frase musical.
> O ritmo é definido como a duração da reprodução de cada nota em um determinado padrão, dentro da duração do conjunto, é uma divisão, uma batida regular, um pulso (ouvido ou sentido) que dá referência temporal ao ouvido. (BENNET, 1986, p. 11).

Além desses três elementos presentes na música, pode existir um quarto elemento que é inerente ao receptador, o qual está condicionado ao meio social, dependendo de sua interação com os mecanismos que criam este condicionante, formando assim o seu gosto musical, ou seja, para um indivíduo o estilo musical *heavy metal* é extremamente agradável e ao ouvi-lo consegue atingir um estado de paz, o que para outras pessoas chega a ser um absurdo por nem considerarem esse estilo como música. Por outro lado, o apreciador de *heavy metal* pode não suportar samba, por não despertar os mecanismos condicionantes que o fazem reconhecer aquilo que foi programado em sua mente durante sua criação e seu convívio com o meio ao qual esteve inserido ao longo da vida, ou seja, será que Beethoven seria um gênio da música se seu pai não fosse músico e não tivesse estimulado nele o gosto pela música? É possível que não, assim fica a interrogação do que é gosto musical.

1.1.2 Origem do nome das notas

As notas musicais possuíam diferentes nomes de acordo com a língua de vários países, e a escala tinha início em diferentes notas. Eram utilizadas as letras do alfabeto local para representar as notas tornando o registro musical e a interpretação de obras de vários autores, de diferentes lugares, muito difíceis, por terem diferentes representações e escrita, já que em cada país a notação era particular da região.

Consta em registros históricos que foi o monge beneditino Guido D'Arezzo ($992 - 1050$), um célebre músico do século XI, que resolveu o problema dando nomes as notas, não se importando em que oitava a escala começava. Ele utilizou as iniciais dos versículos do hino cantochão de São João Batista, e além disso as notas com oitavas acima ou abaixo eram escritas de formas diferentes na partitura. O hino de são João Batista foi composto por Paulo Diácono ($720 - 799$), um monge beneditino e um historiador dos lombardos, do século VIII, sendo seus versos em latim da seguinte forma:

UT queant laxis

REsonare fibris

MIra gestorum

FAmuli tuorum,

SOLve polluti

LAbii reatum,

Sancte Iohannes

FIGURA 01: Ilustração do hino de São João Batista

Fonte:<http://3.bp.blogspot.com/_PFqvRHIvxv8/SfzeFSuHrVI/AAAAAAAAAAk/3Yiy6EGlpro/s400/untitled.bmp>

A tradução do hino é: Para que os servos possam, com suas vozes soltas, ressoar as maravilhas de vossos atos, limpa a culpa do lábio manchado, ó São João.

O Dó atual era chamado de **UT**, que foi substituído para facilitar o canto, terminando em uma vogal, e Si ainda não era utilizada. Mais tarde as notas foram associadas as primeiras letras do alfabeto ocidental, Dó $- C$, Ré $- D$, $Mi - E$, Fá $- F$, $Sol - G$, Lá $- A$ e $Si - B$, notações essa que são utilizadas até os dias atuais.

1.2 A MÚSICA VISTA COMO MAGIA

Segundo o artigo *A música das esferas*, da Sociedade das Ciências Antigas, os povos antigos usavam a música relacionando-a ao misticismo. Na mitologia grega o canto de Orfeu com uma lira sendo tocada como acompanhamento parava o movimento das águas de rios, movia pedras e amansava feras. A música era entendida como uma forma de magia. No mundo antigo a música era vista como um presente, um favor divino, concebido aos homens: na visão dos Hebreus, por Jubal; entre os Egípcios, por Osíris; entre os gregos, por Apolo ou Mercúrio e entre os Fenícios, por Hermes ou OLen. Esses seres metafísicos eram utilizados para representação de ideias e concepções. Acreditava-se que na música estavam todos os mistérios da criação e que sua prática mantinha os homens em comunhão com o mundo divino.

Esses povos perceberam alguns conceitos numéricos que expressavam as leis da natureza, como a unidade, o binário, o ternário, o quaternário, o quinquenário, o setenário, o octanário, o denário e o duodenário, conceitos estes que foram expostos em diversas manifestações culturais entre esses povos, por meio de deuses, heróis, mitos e arte. Os conceitos numéricos acima estão relacionados diretamente com a música: a nota musical (unidade); o bicorde (binário); o acorde (ternário); os intervalos de terça (ternário), de quarta (quaternário) e de quinta (quinquenário); a oitava (octonário); as sete notas da escala (setenário); a pauta (quinquenário) e os doze tons existentes (duodenário). Desta maneira, para os antigos a música era mais do que a união de som e tempo, era vista como uma manifestação da natureza invisível.

1.3 A CONSTRUÇÃO DA MÚSICA

Para Abdounur a música tornou-se um objeto de estudo a partir do problema da dissonância das notas, em outras palavras, a necessidade da organização das notas, chamada escala musical, que ocorreu de diversas maneiras com povos de diferentes períodos. Os caldeus destacavam fundamentalmente os números 4 e 7 na previsão de sucessos, sendo provavelmente por isso que fosse 7 o número de notas da antiga escala musical caldeia. Na Grécia foram desenvolvidos os tetracordes e a escala com 7 notas por teóricos da música como Pitágoras, Eratóstenes, Arquitas e Aristoxeno que apresentaram essa organização usando diferentes critérios. Os chineses desenvolveram a escala pentatônica que era reproduzida utilizando as notas dó, ré, mi, sol e lá e omitindo-se o fá e o si, essas notas eram comparadas, pelos chineses, aos cinco elementos da natureza: água, fogo, madeira, metal e terra. Pitágoras, com o experimento do monocórdio, descobriu que a escala musical era determinada a partir de uma nota reproduzida por uma corda, dividindo-a em frações. Esta descoberta pitagórica uniu a aritmética com a música. A percepção da relação entre divisão de números inteiros e sons foi bastante significativa na época e foi o primeiro registro de experimento na história da ciência, além de despertar no gênio de Samos a dúvida: *porque a razão entre números inteiros pequenos geram as consonâncias musicais?* Atribui-se a ele a descoberta das consonâncias, apesar de serem conhecidas por povos mais antigos. Pitágoras foi quem registrou o que chamou de consonâncias perfeitas: 1/2 (oitava), 2/3 (quinta) e 3/4 (quarta). Arquita desenvolveu uma teoria que relacionava velocidade e força com a altura das notas dizendo que *quanto mais forte e rápido o movimento, mais agudo o som produzido*, dessa forma foi estabelecida uma relação entre frequência e altura musical. Aristoxeno pregava que a música dependia da intuição e do ouvido do músico. Erastóstenes elaborou a partir da teoria de Aristoxeno e a aritmética uma diferenciação entre os intervalos musicais, usando a intuição e a matemática (ABDOUNUR, 2002).

1.4 A MÚSICA DO UNIVERSO

Os caldeus relacionaram estreitamente a música com a astrologia e a matemática. Assim, quem estudava as estrelas explicava o destino dos homens e a harmonia do Universo, misturando a especulação matemática com o simbolismo. Isto deu lugar para que numerosos fenômenos cósmicos fossem representados por comparação entre os comprimentos de "cordas esticadas". Desta forma ocorreu o surgimento de quatro relações que, pela sua importância, tomaram nomes próprios:

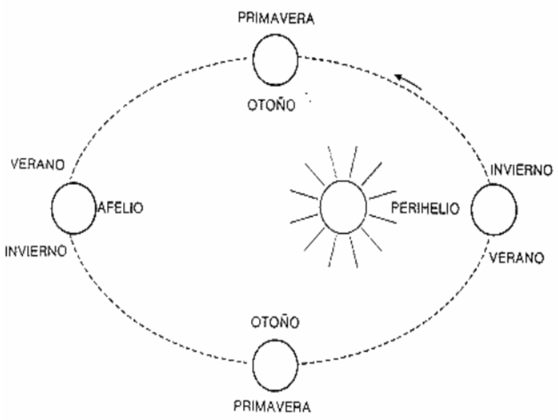
1/1 (uníssono), 2/1 (oitava), 3/2 (quinta), 4/3 (quarta) (LIERN, 2002).

Segundo Vera os tons da harmonia universal estão relacionados com as distâncias interplanetárias na seguinte forma: as distâncias Mercúrio - Vênus, Lua-Marte e Marte-Júpiter são de ½tom, as de Vênus - Sol, Júpiter-Saturno e Saturno - Zodíaco são de 1½ tons, e a distância Terra - Lua é de 1 tom. Somadas todas elas, obtém-se os sete tons. (VERA, 1937)

Segundo Abdounur Kepler julgava a experiência de Pitágoras com o monocórdio, para o estabelecimento de intervalos consonantes, incompleta. Acreditava que a experiência, por ser simples, teria levado os pitagóricos à desconsideração dos intervalos de terças e sextas com consonâncias, reproduzindo o experimento do monocórdio com um maior número de repartições da corda.

Kepler defendia a existência do conhecimento desde os antigos, de escalas musicais peculiares a cada planeta, que soavam como se estes soassem simples melodias, relacionando a velocidades dos planetas com as frequências emitidas. Considerava os movimentos dos planetas como uma música que traduzia a perfeição divina. Assim tentou explicar a variação de velocidade de um planeta por uma metáfora musical, associando movimentos rápidos e lentos, respectivamente, a notas agudas e graves em sua construção imaginativa. O astrônomo alemão considerou que a razão das velocidades extremas determinaria um intervalo musical representante do planeta referido. Para estabelecer essa relação Kepler usou a velocidade de cada planeta no periélio que é a posição do planeta mais próxima do sol e a velocidade do planeta no afélio que é o ponto diretamente oposto. A primeira lei de Kepler diz que os planetas se movem em elipses e que o sol não está no centro exato de suas orbitas, como mostra a Figura 02. A segunda lei diz que os planetas se movem mais rápido no periélio que no afélio. Kepler associou movimentos rápidos às notas agudas e movimentos lentos às notas graves e considerou a razão entre essas velocidades como um intervalo musical representando o planeta referido. Como exemplo tomemos a velocidade de Saturno no periélio e afélio que são respectivamente 135 e 106 arcos de segundo por dia, resultando em uma razão de 135/106, que é uma boa aproximação de 5/4, correspondente ao intervalo de terça maior. Como as diferenças são mínimas no ponto de vista musical (para o ouvido pequenas diferenças são imperceptíveis) ele obteve intervalos que representavam todos os planetas, Saturno 4/5 (terça maior), Júpiter 5/6 (terça menor), Marte 2/3 (quinta), Terra 15/16 (semitom), Vênus 24/25 (diese) e Mercúrio 5/12 (terça menor composta), com isso o astrônomo alemão organizou essas reflexões enunciando a seguinte lei: a altura de um som musical é proporcional à velocidade. Kepler conhecia ainda as leis de harmonia concernentes à relação entre intervalos musicais e comprimentos de cordas, bem como a lei fundamental dos harmônicos. Kepler afirmava que uma corda oscilante fornecia harmônicos superiores, correspondentes aos sons fundamentais das cordas de duas vezes, três vezes, n vezes mais curtas que a corda inicial. (ABDOUNUR, 2002)

FIGURA 02: Órbita da terra em relação as estações



Fonte: A música das Esferas – Sociedade das ciências antigas

1.5 A TEORIA MUSICAL DE DESCARTES

Nos textos de Abdounur, no que se refere à ideia de Série Harmônica, é dito que Descartes defendia que nenhuma frequência poderia ser ouvida sem que sua oitava superior, de alguma maneira, também o fosse. Afirmava que a oitava se apresentava como o único intervalo simples produzido pela divisão da corda inteira. Descartes explicou que nenhuma frequência consonante com uma nota daquele intervalo poderia ser dissonante com a outra. Para o filosofo francês, da mesma forma que existiam apenas três números concordantes, existiam também somente três consonâncias principais sendo elas a quinta, a terça maior e a terça menor, as quais davam origem a quarta e as duas sextas.

Na linguagem do pensador francês, a nota mais grave era mais poderosa do que a mais aguda, pois o comprimento da corda que gera a primeira contém todos aqueles comprimentos pertinentes às menores, enquanto que o contrário não ocorre.

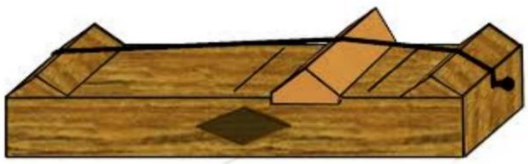
Descartes estabeleceu ainda a proibição do aparecimento do trítono na harmonia musical, por corresponder à razão de números grandes e primos entre si, bem como por encontrar-se distante, no que concerne a sensibilidade auditiva humana, de qualquer das relações simples referentes às consonâncias (ABDOUNUR, 2002).

1.6 O EXPERIMENTO DO MONOCÓRDIO

Os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a.C. quando Pitágoras, por meio de experiências com sons do monocórdio que é um instrumento composto de uma corda esticada sobre dois cavaletes fixo e um cavalete móvel tal como a Figura 03, encontrou relações proporcionais entre a frequência e o comprimento da corda que emite um som qualquer. Ele descobriu que tomando uma nota inicial reproduzida por uma corda e, sem perda de generalidade, considera-la como 1, as outras notas serão determinadas por meio de proporções dessa corda, como mostra a Figura 04. Exemplificando: Seja $Dó$ essa nota inicial, temos que as demais notas serão determinadas a partir do comprimento da corda que produz o som de $Dó$, assim:

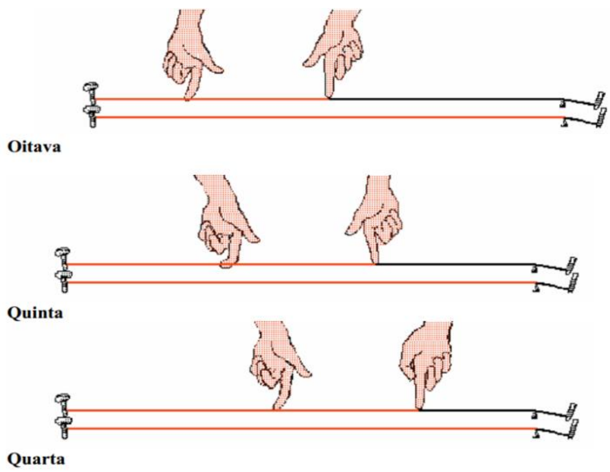
$$\begin{array}{cccccccc} Dó & Ré & Mi & Fá & Sol & Lá & Si & Dó \\ 1 & \frac{8}{9} & \frac{64}{81} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{16}{27} & \frac{128}{243} & \frac{1}{2} \end{array}$$

FIGURA 03: Monócordio



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2016/10/monocordio1.png>

FIGURA 04: Tocando o monocórdio



Fonte: <http://auladeviola.com/wp-content/uploads/2015/07/tocando_monocordio.png>

A descoberta da relação entre razão de números inteiros e tons musicais mostrou-se significativa na ocasião. Assim, a partir deste experimento, Pitágoras descobriu relações entre a matemática e a música associando, respectivamente, aos intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas; as quais correspondem às frações de uma corda que fornece as notas mais agudas dos intervalos referidos, quando se produz a nota mais grave pela corda inteira.

A descoberta de intervalos consonantes foi atribuída a Pitágoras, embora provavelmente estes já fossem conhecidos desde muito antes em distintas culturas antigas. Segundo Abdounur:

> O pensador de Samos justificou a relação de pequenos números inteiros as consonâncias pelo fato de que os números 1, 2, 3 e 4 geravam toda a perfeição. Os pitagóricos consideravam o número quatro como a origem de todo o universo, todo o mundo material, representando a matéria em seus quatro elementos: o fogo, o ar, a terra e a água (ABDOUNUR, 2002, p. 6).

A importância destes números para a escola pitagórica emerge ainda no cenário musical ao considerar o tetracorde – o sistema de quatro sons cujos extremos encontravam-se a um intervalo de quarta justa.

Qualquer vibração de ar que atinge o ouvido pode ser interpretada como um tom musical o qual pode ser exibido como uma somatória de um número infinito de oscilações vibratórias simples correspondentes aos sons parciais deste tom musical. As primeiras componentes na série harmônica correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da série de Fourier que determinam, portanto, razões de pequenos números inteiros relacionados às consonâncias pitagóricas, tanto uma corda como colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos e assim sucessivamente. Desta forma podemos construir intervalos a partir de harmônicos da mesma nota.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: ALGUNS CONCEITOS DE ARITMÉTICA

A primeira parte do trabalho tem como objetivo apresentar de forma clara uma descrição matemática da afinação musical por meio de um algoritmo para determinação das notas a partir de uma nota padrão (diapasão), o qual foi apresentado pelo matemático espanhol Vicent Liern em seu artigo "Algoritmos matemáticos y afinacion musical" em 2002. Para isso usaremos alguns elementos da aritmética como *divisão euclidiana ou divisão com resto* (que foi apresentada no livro VII dos "Elementos de Euclides", escrito por volta de 300 a.C.) e *Congruência* que é uma das ferramentas de extrema importância nos estudos da divisão euclidiana com ênfase no resto e que foi apresentada na obra "*Disquisitiones Arithmeticae"* de Karl Friedrich Gauss publicada em 1801. Esses temas são apresentados nos cursos de "Teoria dos Números" e "Álgebra Moderna" de forma mais aprofundada. Neste capítulo serão apresentados apenas teoremas e definições que serão necessários para resolução dos problemas apresentados no desenvolvimento do trabalho.

2.1 ALGORITMO DA DIVISÃO

Antes de enunciarmos o Teorema que define a divisão euclidiana, enunciaremos o Teorema de Eudoxius (cerca de 375 a.C.) que é apresentado erroneamente, segundo alguns matemáticos, como o "princípio de Arquimedes".

Teorema 2.1. Dados a e b inteiros com $b \neq 0$ então a é múltiplo de b ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, correspondendo a cada par de inteiros a e $b \neq 0$ existe um inteiro q tal que

- Para $b > 0$, $qb \leq a < (q+1)b$;
- Para $b < 0$, $qb \leq a < (q-1)b$.

Demonstração: Seja $b \neq 0$ um inteiro qualquer, então podemos escrever o conjunto dos inteiros como a união infinita dos conjuntos:

$$\mathbb{Z} = \cdots \cup \{-qb, -qb+1, \dots, -(q-1)b-1\} \cup \dots$$
$$\dots \cup \{-2b, \dots, -b-2, -b-1\} \cup$$
$$\cup \{-b, -b+1, \dots, -2, -1\} \cup$$

$$\cup \{0, 1, 2, \dots, b-2, b-1\} \cup$$
$$\cup \{b, b+1, b+2, \dots, 2b-1\} \cup$$
$$\cup \{2b, 2b+1, \dots, 3b-1\} \cup \dots$$
$$\dots \cup \{qb, qb+1, \dots, (q+1)b-2, (q+1)b-1\} \cup \dots$$

Observe que esses conjuntos são disjuntos, ou seja, dado $a \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$ temos que a pertence a um e somente um desses conjuntos, portanto para $b > 0$, temos

$$qb \leq a \leq (q+1)b - 1 < (q+1)b \Rightarrow qb \leq a < (q+1)b.$$

Agora, para $b < 0$, temos que

$$qb \leq a < (q+1)b < (q-1)b \Rightarrow qb \leq a < (q-1)b.$$

Logo podemos concluir que dados a e b inteiros, $b \neq 0$, a é múltiplo de b ou encontra-se entre dois múltiplos consecutivos de b.

Exemplo 2.1: Se $a = 11$ e $b = 4$, devemos tomar $q = 2$

$$2 \cdot 4 \leq 11 < 3 \cdot 4$$

Para $a = -11$ e $b = 4$, basta tomarmos $q = -3$

$$-3 \cdot 4 \leq -11 < (-3+1) \cdot 4$$

Para $a = 3$ e $b = -2$, tomamos $q = -1$

$$(-1) \cdot (-2) \leq 3 < (-1-1) \cdot (-2)$$

Tendo como base o teorema de Eudoxius podemos enunciar o teorema que define a divisão euclidiana.

Teorema 2.2. Sejam a e b dois números pertencentes ao conjunto dos inteiros e $b \neq 0$ então, existem inteiros q e r tais que:

$$a = bq + r, \text{ com } \quad 0 \leq r < |b| \qquad (r = 0 \Leftrightarrow b|a)$$

(q é chamado de *quociente* e r de *resto* da divisão de a e b).

Demonstração: Usando o Teorema de Eudoxius.

como $b > 0$, existe q que satisfaz a seguinte expressão:

$$qb \leq a < (q+1)b$$

Subtraindo qb em cada um dos membros temos que:

$$0 \leq a - qb < b$$

Desta forma, se definirmos $r = a - qb$ teremos:

$$0 \leq r < b$$

O que nos garante a existência de q e r. Agora devemos mostrar que q e r são únicos.

Para mostrar que q e r são únicos, vamos supor que existam q_1 e r_1 tais que:

$$a = q_1 b + r_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Com isto é verdade dizer que:

$$(bq + r) - (q_1 b + r_1) = 0 \Rightarrow b(q - q_1) = r_1 - r,$$

O que implica que $b|(r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos, $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b|(r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica que $r_1 = r$. Logo $q_1 b = qb \Rightarrow q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$.

O que prova o Teorema enunciado.

Embora tenha sido enunciado no Teorema 2 a restrição $b > 0$, não é necessário, pois utilizando a equação $qb \leq a < (q-1)b$ teríamos encontrado q e r também para $b < 0$. Assim podemos enunciar o Algoritmo da divisão da seguinte forma: Dados dois inteiros a e b, $b \neq 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$ com $0 \leq r < |b|$.

2.2 CONGRUÊNCIA

Seja m um número natural e $m \neq 0$. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de suas divisões euclidianas por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m escreve-se:

$$a \equiv b \bmod m$$

Quando a relação $a \equiv b$ mod m for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso:

$$a \not\equiv b \text{ mod } m.$$

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b$ mod 1, isso torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1, Portanto, consideraremos sempre $m > 1$.

Para verificar se dois números são congruentes não é preciso efetuar a divisão euclidiana e comparar os restos, temos que aplicar a seguinte proposição.

Proposição 2.1. Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$. Dizemos que $a \equiv b$ mod m se, e somente se, $m|(b - a)$.

Demonstração: Efetuando a divisão euclidiana de a e b por m temos:

$$a = qm + r, \text{ com } 0 < r < m \text{ (1)}$$

$$b = q_1 m + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < m \text{ (2)}$$

Fazendo (2) – (1) teremos:

$$b - a = (q_1 - q)m + (r_1 - r)$$

Assim, podemos concluir que $a \equiv b$ mod m se, e somente se,

$$r_1 - r = 0 \;\; \Rightarrow \;\; r_1 = r$$

O que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m|b - a$.

Proposição 2.2. Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b \; e \; c \in \mathbb{Z}$, são válidos os seguintes itens:

(i) $a \equiv a$ (mod m), (Reflexiva)

(ii) se $a \equiv b$ (mod m), então $b \equiv a$ (mod m), (Simétrica)

(iii) se $a \equiv b$ (mod m) e $b \equiv c$ (mod m), então $a \equiv c$ (mod m). (Transitiva)

Demonstração:

(i) Sabemos que,

$$m|0 \Rightarrow m|a - a \Rightarrow a \equiv a \text{ (mod } m)$$

(ii) Temos que

$$m|b-a \implies b-a=km \implies -(a-b)=km \implies a-b=(-k)m \implies$$

$$\implies b \equiv a \ (mod\ m).$$

(iii) se $a \equiv b$ (mod m) e $b \equiv c$ (mod m), temos que

$$m|b-a \quad b-a=km \text{ e } c-b=k_1 m$$

Somando as equações teremos,

$$(b-a)+(c-b)=(k+k_1)m \implies c-a=(k+k_1)m \implies a \equiv c \text{ (mod } m).$$

Decorre, imediatamente, das propriedades acima, que a congruência, módulo um inteiro fixado m, é uma relação de equivalência.

Dizemos que um número inteiro é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um número $r \in (0,1,\ldots,m-1)$. Além disso, dados $x, y \in (1,2,\ldots,m-1)$, com $x \neq y$, x e y não são congruentes módulo m. Desse modo, para determinar o resto da divisão de um número x por m, basta encontrar o número natural $r \in (0,1,\ldots,m-1\,)$ que seja congruente a x módulo m.

Dado R um sistema completo de resíduos módulo m, a divisão euclidiana pode ser enunciada de forma generalizada como segue abaixo:

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existem $q, r \in \mathbb{Z}$ univocamente determinados tais que

$$a = bq + r \text{ com } r \in R.$$

Esse enunciado trata-se da *divisão com resto em* R.

Chamaremos de *sistema completo de resíduos* módulo m a todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números $(0,1,\ldots,m-1\,)$, sem repetições e numa ordem qualquer. Portanto, um *sistema completo de resíduos* módulo m possui m elementos.

Definição 2.1: O conjunto dos inteiros $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ é um *sistema completo de resíduos* módulo m se

(i) $r_i \not\equiv r_j$ mod m para $i \neq j$

(ii) Para todo inteiro n existe um r_i tal que $n \equiv r_i$ mod m.

É claro que, se $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ são m números inteiros, dois a dois não congruentes módulo m, então eles formam um *sistema completo de resíduos* módulo m. De fato, os restos da divisão dos a_i por m são dois a dois distintos, o que implica que são os números $(0, 1, \dots, m-1)$ em alguma ordem.

A congruência é uma ferramenta muito poderosa da aritmética pelo fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição multiplicação de números inteiros, como segue na proposição.

Proposição 2.3. Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.

(i) Se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a + c \equiv b + d \bmod m$.
(ii) Se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $ac \equiv bd \bmod m$.

Demonstração:

Do fato de que $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, temos que $m|b-a$ e $m|d-c$.

(i) Por definição de divisão temos que $m|(b-a)+(d-c) \Rightarrow m|(b+d)-(a+c) \Rightarrow a+c \equiv b+d \bmod m$.
(ii) Desenvolvendo $bd - ac = bd - ad + ad - ac = d(b-a) + a(d-c)$ o que implica que $ac \equiv bd \bmod m$.

Corolário 2.3.1 Para todos $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \bmod m$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \bmod m$.

Demonstração: Usando a seguinte identidade

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Como $a \equiv b \bmod m \Rightarrow m|(a-b)$, implica que $m|(a^n - b^n) \Rightarrow a^n \equiv b^n \bmod m$.

Proposição 2.4. Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que

$$a + c \equiv b + c \bmod m \Leftrightarrow a \equiv b \bmod m.$$

Demonstração: Se $a \equiv b \bmod m$, segue-se imediatamente da proposição 3 que $a + c \equiv b + c \bmod m$, pois $c \equiv c \bmod m$.

Reciprocamente, se $a + c \equiv b + c \bmod m$, então $m|b + c - (a + c)$, o que implica que $m|b - a$ e, consequentemente, $a \equiv b \bmod m$.

A proposição acima mostra que é válido o cancelamento com relação à adição. No entanto, não vale para multiplicação, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. Como $6 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 24$ e $8|24$, temos que $6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5 \bmod 8$, e, no entanto, $9 \not\equiv 5 \bmod 8$.

O cancelamento para multiplicação é apresentado na seguinte proposição.

Proposição 2.5. Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Temos que

$$ac \equiv bc \text{ mod } m \Leftrightarrow a \equiv b \text{ mod } \frac{m}{mdc(c,m)}.$$

Demonstração:

Como $\frac{m}{mdc(c,m)}$ e $\frac{c}{mdc(c,m)}$ são primos entre si, ou seja $mdc(\frac{m}{mdc(c,m)}, \frac{c}{mdc(c,m)}) = 1$, temos que $ac \equiv bc$ mod $m \Leftrightarrow m \Big|(b-a)c \Leftrightarrow \frac{m}{mdc(c,m)}\Big|(b-a)\frac{c}{mdc(c,m)} \Leftrightarrow \frac{m}{mdc(c,m)}|b-a \Leftrightarrow a \equiv b$ mod $\frac{m}{mdc(c,m)}$.

Corolário 2.5.1 Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $mdc(c, m) = 1$. Temos que $ac \equiv bc$ mod $m \Leftrightarrow a \equiv b$ mod m.

Proposição 2.6. Sejam $a, k, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $mdc(k, m) = 1$. Se $a_1, \dots, a_m$ é um sistema completo de resíduos módulo m, então $a + ka_1, \dots, a + ka_m$ também é um sistema completo de resíduos módulo m.

Demonstração: Do corolário acima, para $i, j = 0, \dots, m-1$, temos que $a + ka_i \equiv a + ka_j$ mod $m \Leftrightarrow ka_i \equiv ka_j$ mod $m \Leftrightarrow a_i \equiv a_j$ mod $m \Leftrightarrow i = j$.

Isso mostra que $a + ka_1, \dots, a + ka_m$ são , dois a dois, não congruentes módulo m e, portanto, formam um sistema completo de resíduos módulo m.

A seguir serão enunciadas algumas propriedades de congruências relacionadas com a multiplicação.

Proposição 2.7. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m, n, m_1, \dots, m_r$ inteiros maiores do que 1. Temos que

(i) Se $a \equiv b$ mod m e $n|m$, então $a \equiv b$ mod n;
(ii) $a \equiv a$ mod m, $\forall\ i = 1, \dots, r \Leftrightarrow a \equiv b$ mod $mmc(m_1, \dots, m_r)$;
(iii) Se $a \equiv b$ mod m, então $mdc(a, m) = mdc(b, m)$.

Demonstração:

(i) Se $a \equiv b$ mod m, então $m|b-a$. Como $n|m$ e $m|b-a$, segue-se que $n|b-a$, o que implica que $a \equiv b$ mod n.

(ii), se $a \equiv b$ mod m_i, $i = 1, \dots, r$, então $m_i|b-a$, para todo i. Com isso $b-a$ é um múltiplo de cada m_i, segue-se que o $mmc(m_1, \dots, m_r)|b-a$, provando que $a \equiv b$ mod $mmc(m_1, \dots, m_r)$. A recíproca decorre do item (i).

(iii) Se $a \equiv b \bmod m$, então $m|b-a$ e, portanto, $b = a + tm$ com $t \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo lema de Euclides, temos que $mdc(a, m) = mdc(a + tm, m) = (b, m)$.

As propriedades acima são de extrema importância para a compreensão da aritmética dos restos.

Com os conceitos, teoremas e propriedades de aritmética apresentados nesse capítulo pretende-se tornar clara a compreensão da primeira parte do algoritmo para determinação das notas musicais. No próximo capítulo serão apresentados os primeiros passos para o entendimento do algoritmo, aplicando as proposições expostas neste capítulo.

3 A ARITMÉTICA NA AFINAÇÃO MUSICAL

Neste capítulo será apresentado o algoritmo para a determinação de notas musicais a partir de uma nota padrão (diapasão). Para tanto, serão aplicados os conceitos de aritmética constantes no capítulo anterior.

Foi Pitágoras sem dúvida, o primeiro pensador ocidental que atribuiu à música e as demais coisas, um caráter numérico. A partir do experimento do monocórdio ele deduziu que um som musical produzido por uma corda vibrante varia em razão inversa ao seu comprimento, ou seja, q*uanto mais curta seja a corda, mais aguda será a nota produzida e quanto mais longa, mais grave será a nota produzida.* Assim, dividindo uma corda em duas com a metade do seu comprimento a nota musical produzida por elas será a mesma que a corda original só que mais aguda, sendo chamada de oitava acima, ou primeira oitava superior.

O algoritmo que será apresentado se baseia no sistema de afinação pitagórico. Serão enunciados alguns axiomas que são fundamentais para a sustentação teórica desta afinação.

O sistema de afinação pitagórico se fundamenta em três axiomas:

a) A música se baseia em sete notas. O fato de serem sete os sons fundamentais não representam uma originalidade pitagórica, pois os Caldeus já o consideravam assim.

b) A frequência de uma nota pode ser multiplicada ou dividida por 3 o número de vezes que se desejar, em outras palavras, o comprimento da corda pode ser multiplicado ou dividido por três iteradas vezes.

c) A frequência de uma nota pode ser multiplicada ou dividida por 2 o número de vezes que se desejar, o que representa a alteração de oitavas acima ou abaixo. Dividir ou multiplicar por 2 tem um papel fundamental nesse algoritmo, fazendo com que a nota encontrada a partir de outra fique na mesma oitava que a inicial, ou seja, tendo um coeficiente entre 1 e 2.

Os três axiomas acima constituem a base para a determinação, a partir de uma nota padrão qualquer, as demais notas musicais. Para que uma nota musical qualquer seja classificada como nota padrão, denominada pelos teóricos da música como diapasão, é necessário a obediência a algumas propriedades matemáticas, as quais serão vistas no decorrer do capítulo.

3.1 SOM PADRÃO: O DIAPASÃO

Dada uma corda de comprimento l que produz uma frequência f, os sons obtidos ao multiplicar l por 3^n e 2^m, $n, m \in \mathbb{Z}$ são também sons afinados dentro do sistema pitagórico, com o inconveniente de a corda inicial poder ter qualquer comprimento $l \in \mathbb{R}_+$, então qualquer som s pode ser obtido tomando uma corda com comprimento l_0 de modo que para alguns $n, m \in \mathbb{Z}$, o produto $3^n 2^m$ produz esse som s.

Para que este sistema de afinação seja absoluto, e, portanto, aplicável, é preciso impor uma condição: uma nota, que denominaremos "nota padrão" ou diapasão, faça parte das notas determinadas a partir dela. Considere uma nota padrão caracterizada pela sua frequência f_0. Diz-se que o som de frequência f esta afinado no sistema pitagórico se existirem números inteiros n e m tais que $\frac{3^n}{2^m} = f$. Evidentemente isto significa que o sistema de afinação que será definido não é um autêntico critério de seleção de notas afinadas, pois não há nenhuma eleição dos sons que não são considerados afinados para o ouvido, em decorrência de alguns desses sons serem imperceptíveis aos ouvidos humanos.

Os pitagóricos, conhecedores desta inconveniência, resolveram esse problema assim como os músicos, impuseram condições ao comprimento inicial da corda. Considerou-se um som padrão e se exigiu que o comprimento l da corda fosse aquele que, para alguns $n, m \in \mathbb{Z}$, o produto $3^n 2^m l$ produzisse o som que se usa como padrão, no caso, o som de frequência $440\ Hz$.

Condição 3.1. Uma corda de comprimento l será válida se existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que o produto $3^n 2^m l$ produz o som de $440\ Hz$.

Para a definição do algoritmo são necessárias algumas notações que serão apresentadas a seguir.

3.2 NOTAÇÕES

a) As 7 notas fundamentais, a partir das quais são obtidas todas as outras, recebem em música os nomes $dó, ré, mi, f$á$, sol, l$á e si. Nesse caso será estabelecida uma bijeção das notas com os possíveis restos da divisão por 7, $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, da seguinte forma:

$$Dó = 0; Ré = 1; Mi = 2; Fá = 3; Sol = 4; Lá = 5; Si = 6.$$

b) O restante das notas será obtido mediante as "alterações" das notas fundamentais, que podem ser de dois tipos:

1) Se da alteração de uma nota r obtém-se uma nota s, distinta das fundamentais, de modo que a frequência de s é mais alta do que a de r, essa alteração é chamada *sustenido*, e representada por $\#$.

2) Se da alteração de uma nota r obtém-se uma nota s distinta das fundamentais, de modo que a frequência de s é mais baixa do que a de r, essa alteração é chamada de *bemol*, e representada por b.

Um som pode ter várias alterações de mesmo nome, ou seja, vários *sustenidos* ou vários *bemóis*.

As notações citadas acima servirão como base para apresentação da definição do algoritmo matemático para a determinação das notas musicais a partir de uma nota diapasão. O entendimento dessas notações é de extrema importância para a compreensão do algoritmo que será enunciado a seguir.

3.3 ALGORITMO MATEMÁTICO

O algoritmo matemático para a determinação das notas musicais se baseia na divisão euclidiana apresentada no capítulo anterior. A dedução do algoritmo começa ao se escrever todos os números inteiros a na forma $a = 7k + r$, com $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $k \in \mathbb{Z}$, havendo uma relação de equivalência R sobre o conjunto dos números inteiros. Deste modo, dados quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que $(a, b) \in R \Leftrightarrow 7 \mid b - a$, o que equivale a dizer que dois números inteiros estão relacionados se, e somente se, deixam o mesmo resto na divisão por 7 ou ainda que são congruentes módulo 7. A relação aqui definida cumpre as propriedades *reflexiva, simétrica* e *transitiva*, mostrando que é uma relação de equivalência. Agrupando todos os números inteiros em *classes de equivalência*. O algoritmo tem os seguintes passos.

Primeiro Passo:

Escreve-se o conjunto dos números inteiros como uma matriz de infinitas linhas e sete colunas, na qual as colunas dividem todos os números em conjuntos de números que deixam o mesmo resto na divisão por 7, tal como a seguir:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

<u>Segundo Passo:</u>

Aplica-se a divisão euclidiana, $a = 7k + r,\ k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r \leq 6$, escrevendo-se uma tabela que represente os números inteiros classificados em "caixas" de 4 linhas e 7 colunas, onde cada termo da tabela é o resto da divisão por 7, do número que ocupava seu lugar. Para determinar uma nota distinta da inicial é preciso dividir a tomar 2/3 do comprimento da inicial, ou seja, determinar a quinta nota da escala. Quando $k = 0$ temos a linha com os inteiros $0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6, que será a linha inicial, mas não começará por Dó $= 0$, pois como a próxima nota é a quinta, quando chegar em Fá $= 3$, esta terá um sustenido. Como temos 7 notas e todas são determinadas através de quintas, ou seja de 4 em 4, cada caixa irá conter 28 números. A linha onde $k = 0$ é a inicial, sendo acima dela o inicio das caixas de notas com alteração de $bemol$, a caixa -1, e após três linhas abaixo o início das caixas de notas com alteração de $sustenido$, a caixa 1. Para termos todas as fundamentais na caixa 0 devemos começar por Fá $=$ 3, assim de quinta em quinta, todas as fundamentais sem alterações estarão na caixa 0. Na sequência, segue-se assinalando de 4 lugares sucessivamente (o que chamaremos "salto"), começando pelo 3 da primeira linha (caixa 0), como mostra o Quadro 01.

QUADRO 01: Restos da divisão por 7

	k	Resto (r)							
	......	....							
	-4	0	1	2	3	4	5	6	
Caixa -1	-3	0	1	2	3	4	5	6	Com 1 bemol b
	-2	0	1	2	3	4	5	6	
	-1	0	1	2	3	4	5	6	
	0	0	1	2	3	4	5	6	
Caixa 0	1	0	1	2	3	4	5	6	fundamentais
	2	0	1	2	3	4	5	6	
	3	0	1	2	3	4	5	6	
	4	0	1	2	3	4	5	6	
Caixa 1	5	0	1	2	3	4	5	6	Com 1 sustenido #
	6	0	1	2	3	4	5	6	
	7	0	1	2	3	4	5	6	
	......	....							

Cada vez que for contado a partir de um quadrado marcado de verde 4 lugares, realiza-se um salto, da esquerda para direita e multiplica-se por 3 a frequência da nota ou divide-se por 3 o comprimento da corda a qual emite o som da nota, pois a frequência é inversamente proporcional ao comprimento e cada vez que um salto é realizado da direita para esquerda, a frequência é dividida por 3 ou multiplicado por 3 o comprimento da corda que a produz.

Na prática, como a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda que a produz, isso significa que dada uma corda de comprimento l_0 que produza um som afinado $Dó$, com a qual se pretende obter um som afinado $Lá$ pertencente à mesma oitava, é necessário reduzir o tamanho da corda de l_0 para

$$l_1 = \frac{2^4}{3^3} l_0 = \frac{16}{27} l_0 = 0,\overline{592} l_0$$

realizando 3 saltos da esquerda para a direita, partindo de 0 (segunda linha da caixa 0) para 4 (segunda linha da caixa 0), de 4 (segunda linha da caixa 0) para 1 (terceira linha da caixa 0) e de 1 (terceira linha da caixa 0) para 5 (terceira linha da caixa 0), resultando com isso, que a corda deve ser dividida 3 vezes por 3, ou seja, dividida por 3^3. Para colocar a nota na mesma oitava (coeficiente que multiplica a frequência entre 1 e 2), esta deve ser multiplicada por 2^4.

Para obter uma nota $Sí\ bemol$ a partir de uma nota Sol é preciso realizar 3 saltos da direita para a esquerda, devendo, assim, multiplicar a frequência f da nota dada por 3^{-3}, e para colocá-la dentro da mesma oitava deve-se dividir por 2^{-5}. Dessa maneira obtemos $f_1 = \frac{3^{-3}}{2^{-5}} f = \frac{32}{27} f = 1,\overline{185 f}$. Neste caso, se a corda que produz a nota sol tem comprimento l_0 a nova corda, que produzirá a nota $si\ bemol$ terá o comprimento $l_1 = \frac{2^5}{3^3} l_0 = 0{,}84375\ l_0$.

Exemplo 3.1 Dada a nota $Dó = 0$, para obter um $Lá = 5$, é preciso efetuar 3 saltos da esquerda para direita, portanto $Lá = 3^3\ Dó$. Para colocá-lo dentro da mesma oitava (entre 1 e 2) deve-se dividir 3^3 por 2^4, assim $Lá = \frac{3^3}{2^4} Dó$.

Alguns exemplos aos leitores:

1) Como obter um $Fá^{\#}$ a partir de um $Dó$ dentro da mesma oitava?
2) Como obter um Mi^b a partir de um $Ré$ dentro da mesma oitava?

Esse procedimento pode ser aplicado na criação de novos instrumentos, temperando a escala na forma que for possível. A Figura 05 ilustra a escala natural de Dó, com os tons da esquerda para direita de $Dó$, $Ré$, Mi, $Fá$, Sol, $Lá$ e $Sí$, feita à mão, utilizando-se bastões para aterramento cortados com um arco de serra nas medidas encontradas a partir da nota de um bastão inteiro, que com a ajuda de um aparelho que capta frequências musicais (afinador de violão) foi visto que emitia um Si^b., e do algoritmo aqui apresentado. Os sons obtidos no experimento foram aproximações das notas da escala de *Dó* em decorrência da imprecisão mecânica nos cortes efetuados, além das possíveis diferenças e impurezas presentes no material utilizado.

FIGURA 05: Escala de Dó construída a mão com bastão para aterramento.

Fonte: Foto tirada pelo autor.

O algoritmo apresentado deve ter suscitado o seguinte questionamento: *De que forma é determinado o expoente da potência de base 2, presente no algoritmo?* No próximo tópico será feita a dedução da expressão que gera esses coeficientes que dão origem às notas distintas da inicial.

3.4 GENERALIZAÇÃO DO ALGORITMO

Dada uma corda com comprimento l_0 que produz um som s, quando seu comprimento é dobrado, a corda produz o mesmo som uma oitava abaixo (mais grave) e quando seu comprimento é reduzido à metade, produz o mesmo som uma oitava acima (mais agudo). Isso significa que a frequência multiplicada ou dividida por 2 não resulta em uma nova nota musical. Ao se dividir o comprimento da corda por 3 o som produzido pela corda será a quinta nota da escala, este procedimento determinar um som distinto do inicial, ou seja, se a frequência for multiplicada ou dividida por 3 a nota resultante será distinta da nota inicial.

Assim dada uma nota N_0 com uma frequência f_0 ao se dividir o comprimento da corda que a produz por 3 a frequência será multiplicada por 3, e esse procedimento pode ser feito iteradas vezes. Desse modo, dado $n \in \mathbb{Z}$, n é inteiro pelo de os saltos serem tanto da esquerda para direita como da direita para esquerda, a nova frequência será

$$f_1 = 3^n f_0.$$

Mas esse resultado não está na mesma oitava de N_0, para resolver esse problema deve-se multiplicar o comprimento da corda por $2^m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$f_1 = \frac{3^n}{2^m} f_0.$$

Chamando de $a_{n,m} = \frac{3^n}{2^m}$, para que a nota resultante esteja na mesma oitava de N_0, a_n deve pertencer ao intervalo [1,2[, ou seja, $1 \leq a_{n,m} < 2$, ou ainda:

$$1 \leq \frac{3^n}{2^m} < 2 \leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2^m}{3^n} \leq 1 \leftrightarrow \frac{3^n}{2} < 2^m \leq 3^n \leftrightarrow \log_2 3^n - 1 < m \leq \log_2 3^n$$

O que implica que $m = \lfloor \log_2 3^n \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira do número real x (maior inteiro menor ou igual que x).

Com isso, conclui-se que a sequência pitagórica que define as "notas musicais" é dada pela expressão:

$$a_n = \frac{3^n}{2^{\lfloor \log_2 3^n \rfloor}}.$$

Esta sequência determina os valores das frequências consideradas afinadas segundo a afinação pitagórica a partir de uma "nota padrão" de frequência f_0.

O Quadro 02 mostra os valores da sequência pitagórica para as sete notas musicais principais conhecidas, considerando sua ordem de geração a partir das "caixas" definidas pela relação de equivalência.

Como os saltos na tabela são feitos de 4 em 4, tem-se a progressão aritmética $4n + 3$, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Para $n = 0$ a primeira nota na caixa 0 na tabela é o $Fá = 3$, obtendo as classes $\{[3] + [4] = [0], [0] + [4] = [4], [4] + [4] = [1], [1] + [4] = [5], [5] + [4] = [2],$ $[2] + [4] = [6]\}$

QUADRO 02: Valores da sequência Pitagórica para as sete notas musicais principais conhecidas.

n	**Nota**	**Coeficiente**	**Frequencia padrão (Hz)**
3	$Fá$	1	391,111
0	$Dó$	1,5	495,000
4	Sol	1,125	586,667
1	$Ré$	1,6875	347,654
5	$Lá$	1,265625	440,000
2	Mi	1,8984375	521,481
6	Si	1,423828125	660,000

Colocando as notas na ordem usual da afinação musical com as 7 notas $Dó,\ Ré,\ Mi,$ $Fá,\ Sol,\ Lá$ e Si, obtém-se:

QUADRO 03: Valores da sequência pitagórica para as sete notas musicais principais conhecidas na ordem da escala.

Nota	**Coeficiente**	**Frequência padrão (Hz)**
$Dó$	1,5	495,000
$Ré$	1,6875	347,654
Mi	1,8984375	521,481
$Fá$	1	391,111
Sol	1,125	586,667
$Lá$	1,265625	440,000
Si	1,423828125	660,000

Com o método aqui descrito é possível gerar uma quantidade infinita de "notas afinadas" dentro de uma mesma oitava, mas na prática isto não tem muito sentido, pois matematicamente a nota $Dó^{\#}$ é distinta da nota $Ré^{b}$, mas para o ouvido humano essa diferença é imperceptível, fazendo com que o ouvido considere que as notas possuem o mesmo som. Instrumentos temperados os quais tem notas delimitadas, são ajustados para trabalhar com 12 sons distintos demarcados dentro de um padrão aceitável de afinação, como violão ou a guitarra, trompete, o piano e alguns instrumentos não temperados por exemplo temos o violino e sax. Os instrumentos temperados têm a escala como representa o Quadro 3.

QUADRO 04: Escala com acidentes

$Dó$	$Dó^{\#}$	$Ré$	$Ré^{\#}$	Mi	$Fá$	$Fá^{\#}$	Sol	$Sol^{\#}$	$Lá$	$Lá^{\#}$	Si	$Dó$
$Dó$	$Ré^{b}$	$Ré$	Mi^{b}	Mi	$Fá$	Sol^{b}	Sol	$Lá^{b}$	$Lá$	Si^{b}	Si	$Dó$

Para resolver esse problema deve ser acrescentado então algum critério que permita definir quando terá um número razoável de notas afinadas dentro de uma mesma oitava. O normal seria parar de criar notas quando comecem a se repetir os sons, porém, como a sequência pitagórica gera números irracionais isto nunca acontecerá, e deve-se, então, aceitar como iguais os sons que sejam muito parecidos, no caso do $bemol$ e do $sustenido$ entre duas notas consecutivas. Assim, como o primeiro termo da sequência é 1, pode ser assumido como critério para fechar um ciclo (um conjunto aceitável de notas afinadas dentro de uma mesma oitava), os valores das sequências em que o coeficiente pitagórico da última nota gerada esteja mais próximo de 1. Nesse número razoável de notas o coeficiente pitagórico da última nota, que estará mais próximo de 1, será chamado de $comma$ e para provar esta hipótese serão utilizados alguns conceitos de sequências numéricas, como subsequências e limite de uma sequência e alguns conceitos de frações contínuas, que serão apresentados no próximo capítulo.

4 ALGUNS CONCEITOS DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

O algoritmo pitagórico para determinação das notas musicais gera números irracionais. O manuseio desses números torna-se muito mais prático quando se utiliza frações contínuas para representá-los. Alguns conceitos sobre esse assunto serão extremamente úteis para demonstrar os teoremas apresentados na definição de $comma$.

Dado um número racional $\frac{u_0}{u_1}$, com $mdc(u_0, u_1) = 1$ e $u_1 > 0$, aplicando o algoritmo de Euclides obtém-se as seguintes equações:

$$
\begin{array}{ll}
u_0 = u_1 a_0 + u_2, & 0 < u_2 < u_1 \\
u_1 = u_2 a_1 + u_3, & 0 < u_3 < u_2 \\
u_2 = u_3 a_2 + u_4, & 0 < u_4 < u_3 \\
u_3 = u_4 a_3 + u_5 & 0 < u_5 < u_4 \\
\vdots & \vdots \\
u_{j-1} = u_j a_{j-1} + u_{j+1} & 0 < u_{j+1} < u_j \\
u_j = u_{j+1} a_j &
\end{array}
$$

Escrevendo $\alpha_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$ para $0 \leq i \leq j$, as equações acima podem se representadas por:

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}},\ 0 \leq i \leq j - 1 \text{ e } \alpha_j = a_j$$

Quando $i = 0$ e $i = 1$, então $\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ e $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$. Substituindo a segunda equação na primeira, resulta em:

$$\alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}},$$

Substituindo $\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3}$,

$$\alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}}$$

Repetindo sucessivas vezes esse processo, obtém-se

$$\frac{u_0}{u_1} = \alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_j}}}$$

Essa expressão é chamada de expansão em $fração\ contínua$ de $\frac{u_0}{u_1}$. Por definição o denominador u_1 é positivo, mas o mesmo não pode ser afirmado para u_0 e portanto a_0 pode ser positivo, negativo ou zero. No entanto, $0 < u_{i+1} < u_i$, $0 \leq i < j$ a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é composta por inteiros positivos.

Para representar uma $fração\ contínua$ será usada a notação $[a_0, a_1, \ldots, a_j]$, ou seja, dada a sequência (a_i), $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \neq 0$, denotamos:

$$[a_0] = a_0,$$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

$$[a_0, a_1, a_2, a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

...

$$[a_0, a_1, \ldots, a_i] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}}$$

Estas frações são chamadas de primeiro, segundo, terceiro, ... $convergentes$, respectivamente, da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n]$. É claro que o $n - ésimo$ convergente é igual à própria fração contínua.

A fração contínua é chamada de $simples$, se todos os a_i são inteiros que são chamados de quocientes parciais ou somente parciais

Exemplo 4.1: No desenvolvimento de $\frac{79}{28}$ por frações contínuas, tem-se

$$79 = \mathbf{2} \cdot 28 + 23$$

$$28 = \mathbf{1} \cdot 23 + 5$$

$$23 = \mathbf{4} \cdot 5 + 3$$

$$5 = \mathbf{1} \cdot 3 + 2$$

$$3 = \mathbf{1} \cdot 2 + 1$$

$$2 = \mathbf{2} \cdot 1 + 0$$

Logo, $mdc(79{,}28) = 1$, pois 1 é o último resto não nulo na sequência de divisões sucessivas.

Agora, usando as igualdades $\frac{79}{28}$ pode ser escrito na forma de $fração\ contínua$ da seguinte forma:

$$\frac{79}{28} = 2 + \frac{23}{28} = 2 + \frac{1}{\frac{28}{23}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{23}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{23}{5}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{3}{5}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{5}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}}$$

$$\frac{79}{28} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = [2, 1, 4, 1, 1, 2]$$

A representação de números por frações contínuas é uma ferramenta muito útil quando se trata de números irracionais já que são usadas para encontrar uma boa aproximação racional desses números.

Em geral tem-se definido o número racional $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ que é não nulo para $n \geq 1$. Outra definição é dada por recorrência de direita a esquerda da seguinte maneira:

$$x_0 = a_n, \qquad x_{i+1} = a_{n-1-i} + \frac{1}{x_i}, [a_0, \ldots, a_n] = x_n$$

Denotando $r_n = [a_0, a_1, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, onde p_n e q_n são números naturais primos (considerando que se $a_0 = 0$, então $p_0 = 0\ e\ q_0 = 1$).

A sequência r_n se denomina fração contínua determinada pela sequência (a_n). Os números racionais r_n são chamadas de reduzidas.

Proposição 4.1: (p_n) e (q_n) satisfazem a recorrência

$p_{n+2} = a_{n+2}\, p_{n+1} + p_n$ e $q_{n+2} = a_{n+2}\, q_{n+1} + q_n$, para todo $n \geq 0$. Temos ainda

$p_0 = a_0\,,\ p_1 = a_0 a_1 + 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1$. Além disso,

$p_{n+1}\, q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n,\ \forall n \geq 0.$

Demonstração:

Por indução em n, provaremos que se $t_k > 0$, para $k > 1$ então

$[t_0;\ t_1, t_2, \dots, t_k] = \frac{x_k}{y_k}$ onde as sequências (x_n) e (y_n) são definidas por

$x_0 = t_0,\ y_0 = 1,\ x_1 = t_0 t_1 + 1, y_1 = t_0, x_{n+2} = t_{n+2}\, x_{n+1} + x_n$ e

$y_{n+2} = t_{n+2}\ y_{n+1} + y_n,\ \forall n$. Suponha que a afirmação seja válida para $k = n$.

Então para $k = n + 1$ temos:

$$[t_0;\ t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}] = \left[t_0;\ t_1, t_2, \dots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right] = \frac{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}} =$$

$$= \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} = \frac{t_{n+1} x_n + x_{n-1}}{t_{n+1} y_n + y_{n-1}}.$$

Por outro lado, as igualdades

• $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1$

•$p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2} = (a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_{n+1} - (a_{n+2} q_{n+1} + q_n) p_{n+1} =$

$= -(p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1})$

mostram que $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, o que implica, em particular, que os p_n, q_n dados pelas recorrências acima são primos entre si, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.1. A relação $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$ se verifica para todo $i \geq 0$, onde p_i e q_i são, respectivamente, o numerador e denominador da $i - ésimo$ convergente.

Demonstração: Para $i = 0$ tem-se $p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1 = (-1)^0$ uma vez que $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$. Supondo válida para i provaremos para $i + 1$.

Sabe-se, do teorema anterior, que

$$p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1} \text{ e } q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}$$

Logo,

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (a_{i+1}p_i + p_{i-1})q_i - p_i(a_{i+1}q_i + q_{i-1})$$

$$= a_{i+1}p_iq_i + p_{i-1}q_i - a_{i+1}p_iq_i - p_iq_{i-1}$$

$$= (-1)(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i)$$

Utilizando a hipótese de indução, obtém-se

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1}$$

O que conclui a demonstração.

Desse teorema obtém-se um corolário que será útil em problemas que aparecerão posteriormente.

Corolário 4.1.1 Para todo convergente $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ tem-se que $mdc(p_i, q_i) = 1$.

Demonstração: Pelo teorema 4.1 tem-se que $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$. Isto implica que qualquer divisor comum de p_i e q_i deve ser um divisor de 1 ou -1. Logo o máximo divisor comum de p_i e q_i deve ser igual a 1.

Pode -se observar que de $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, \forall\, n \geq 0$, *dividindo por* p_nq_{n+1} obtém-se:

$$r_{n+1} - r_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}} \qquad (4.1)$$

4.1 APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Seja α um irracional e seja $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, isto é, a_1 é a parte inteira de α, o maior inteiro menor do que α. Tem-se:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1}$$

Donde $x_1 = \frac{1}{\alpha - a_1}$ é irracional e $x_1 > 1$. Então pode-se escrever x_1 também na forma

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$$

Onde $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor$, x_2 irracional e $x_2 > 1$. Repetindo, n vezes este processo, obtém-se:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}$$

Onde todos os a_i $(i > 1)$ são inteiros maiores ou iguais a 1 e todos os x_i são irracionais maiores do que 1. Como cada x_i é irracional esse processo pode ser feito iteradas vezes. Utilizando as equações acima tem-se:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_2}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_3}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{x_4}}}}$$

Definindo assim $[a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n\to\infty} [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Exemplo 4.2: Escrevendo a expansão de $\sqrt{3}$.

Chamando de $a_1 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Então,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}$$

Como $a_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$, tem-se

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

Obtendo

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

Logo,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

Como $a_3 = \lfloor \sqrt{3} + 1 \rfloor = 2$, tem-se

$$\sqrt{3} + 1 = x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

Resolvendo a equação para x_3 obtem-se

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Observe que $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$, então desta forma, continuando o processo, será obtida a sequência $a_1, a_2, a_3, ...$ onde os valores são 1,1,2,1,2,1,2, ... logo a fração contínua infinita representando a $\sqrt{3}$ será dada por:

$$\sqrt{3} = [1,1,2,1,2,1,2, ...] = [1, \overline{1,2}]$$

Que é chamada de fração contínua periódica.

Exemplo 4.3: Descrever $\log_2 3$ por meio de fração contínua para se obter uma aproximação racional.

Sabe-se que de $\log_2 3 = 1{,}584962007$ ..., escolhendo alguns coeficientes e escrevendo como fração contínua, tem-se:

$$\log_2 3 = [1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

Com esses coeficientes obtém-se a fração $\frac{1054}{665} = 1{,}584962406$ ... que proporciona dá uma aproximação de 6 casa decimais.

As aproximações por frações contínuas possibilitam a precisão necessária e/ou o erro tolerável para determinados estudos envolvendo números irracionais. O número real $\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028 84$ ... é um exemplo de dificuldade em cálculos que necessitam de um pouco mais de precisão, sua expansão em frações contínuas é dada por $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]$.

Onde são encontradas algumas aproximações que foram descobertas por grandes matemáticos do mundo antigo, como a de Arquimedes que é $\frac{22}{7} = 3{,}142857142857$ ... e outra melhor aproximação é $\frac{355}{113} = 3{,}14159292035398223$ ...(MOREIRA, 2011, p. 2)

A seguir serão apresentadas algumas propriedades das convergentes que serão de extrema importância para demonstração de alguns resultados pertinentes ao estudo proposto.

Teorema 4.2 A sequência $r_1, r_2, r_3, \dots$ dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $r_1 < r_3 < r_5 < r_7 < \cdots < r_{2n+1}$

(ii) $r_2 > r_4 > r_6 > \cdots > r_{2n}$

(iii) $r_{2n+1} < r_{2n+2} < r_{2n}$.

Demonstração: Pelo teorema 4.1, tem-se que:

$$p_i q_{i-1} - p_i - p_{i-1} q_i = (-1)^i$$

Sendo válida independente da fração contínua ser finita ou não. Dividindo toda a equação por $q_i q_{i-1}$ obtem-se:

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}}$$

Como $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ tem-se que

$$r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}} \qquad (4.2)$$

Desenvolvendo:

$$r_i - r_{i-2} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i}{q_i q_{i-2}}$$

Pelo fato de $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, obtém-se

$$r_i - r_{i-2} = \frac{(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) q_{i-2} - p_{i-2}(a_i q_{i-1} + q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} = \frac{a_i (p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1})}{q_i q_{i-2}} =$$

$$= \frac{a_i (-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}}$$

Ou seja,

$$r_i - r_{i-2} = \frac{a_i (-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}} \qquad (4.3)$$

Para $i = 2$ e $i = 3$, em (1), obtem-se, respectivamente,

$r_2 - r_1 = \frac{1}{q_2 q_1} > 0$ e $r_3 - r_2 = -\frac{1}{q_3 q_2} < 0$

Onde todos os q_i são positivos.

Para $i = 3$ a equação resulta em $r_3 - r_1 = \frac{a_3}{q_3 q_1} > 0$, pois a_3, q_3 e q_1 são, todos positivos. Sendo assim, $r_1 < r_3$, $r_1 < r_2$ e $r_2 > r_3$, o que implica, por transitividade, que $r_1 < r_3 < r_2$. Fazendo, agora $i = 3$ e $i = 4$ em (4.2) e $i = 4$ em (4.3), obtém-se $r_3 < r_4 < r_2$. Repetindo sucessivamente este processo obtém-se a seguinte sequência de desigualdades:

$$r_5 < r_6 < r_4$$

$$r_7 < r_8 < r_6$$

$$\vdots$$

Combinando essas desigualdades obtém-se

$$r_1 < r_3 < r_5 < r_7 < \cdots < r_{2i+1} < r_{2n} < \cdots < r_6 < r_4 < r_2$$

Concluindo assim a demonstração.

O teorema acima demonstrado prova que os convergentes de índice ímpar formam uma sequência crescente e limitada superiormente e os convergentes de índice par formam uma sequência decrescente e limitada inferiormente, sequências estas que são convergentes, sendo esse um teorema importante sequências de números reais em Análise.

Lema 4.1. Com as notações anteriores existe um único número real $\alpha > 0$ tal que:

$$0 \leq r_0 < r_2 < r_4 < \cdots < \alpha < \cdots < r_5 < r_3 < r_1 \qquad (4.4)$$

Note que as reduzidas de ordem par são menores e as de ordem ímpar maiores que:

$\alpha = [a_0, a_1, \dots]$.

Lema 4.2. Seja α um número real positivo.

a) Se α é racional, então $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ para algum *n* natural (fração contínua simples);

b) Se α é irracional, então $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ (fração contínua infinita).

Sendo estas expressões são únicas.

Todos os conceitos aqui apresentados podem ser encontrados de forma mais detalhada em MOREIRA, IMPA 2011, MARQUES, SBM 2013 e SANTOS, IMPA 2011.

Com as proposições, teoremas, lemas e propriedades anteriormente apresentados é possível demonstrar o teorema chave para a consideração da existência de uma afinação ideal, mais precisamente, um conjunto de notas cujo coeficiente de afinação pitagórico está mais próximo de 1, ou seja, o conjunto que se comporta como uma nota só, havendo assim, menor possibilidade de dissonância entre essas notas, além de ser possível realizar o cálculo do limite inferior da sequência que define essas notas musicais.

5 A SEQUÊNCIA DE NOTAS DA AFINAÇÃO PITAGÓRICA

No capítulo 3 foi apresentado que a expressão que descreve o coeficiente das notas na afinação pitagórica, a qual define as “notas musicais” é dada por:

$$a_n = \frac{3^n}{2^{\lfloor \log_2 3^n \rfloor}}, n \in \mathbb{Z}.$$

Note que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ tem-se $1 \leq a_n < 2$.

A expressão não é totalmente apropriada em razão de não explicitar a ideia das sete notas fundamentais nem o número de alterações da nota calculada a partir de uma nota inicial com alterações de bemóis e sustenidos. Para resolver este problema, considerando que partimos inicialmente $Fá$, a_0 representará a nota $Fá = 3$ e as seguintes expressões permitem determinar exatamente a nota correspondente e o número de alterações:

(i) $N(n) = 4n + 3 - 7.\left\lfloor \frac{4n+3}{7} \right\rfloor$ (número da nota);

Sendo por isso que $Fá$ é a primeira nota da sequência, pois para $n = 0$ tem-se

$$N(0) = 4 \cdot 0 + 3 - 7\left\lfloor \frac{4 \cdot 0 + 3}{7} \right\rfloor = 3 = a_0.$$

(ii) $A(n) = \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ (número de alterações).

O fato de ser $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ a distância da linha que a nota padrão se encontrava, dividida por 7, pois cada linha tem exatamente 7 notas.

Exemplo 5.1: Para $n = 4$, tem-se $N(4) = 19 - 7\left\lfloor \frac{19}{7} \right\rfloor = 5 = Lá$ e $A(4) = \left\lfloor \frac{4}{7} \right\rfloor = 0$. Por tanto, a_4 representa a nota $Lá$ sem alterações.

Já para $n = -7$, obtem-se:

$N(-7) = -25 - 7\left\lfloor \frac{-25}{7} \right\rfloor = 3 = Fá$ e $A(-7) = \left\lfloor \frac{-7}{7} \right\rfloor = -1$, pelo que concluímos que a_{-7} representa a nota $Fá$ com uma alteração negativa, ou seja um $Fá$ $bemol$ $(Fá^b)$.

As expressões acima definidas determinam uma quantidade infinita e enumerável de notas, porém, é impossível construir instrumentos musicais que reproduzam estes infinitos sons e, caso possível fosse essa construção, o ouvido humano seria incapaz de distingui-os.

O seguinte "axioma" dos músicos ajuda na abordagem matemática do problema.

Axioma dos músicos: *Considerando que as sete notas musicais devem estar presentes no conjunto de notas, ou seja, na construção da música; a quantidade de sons diferentes estará determinada pelo número de alterações que precise dessas notas.*

Mostraremos que a quantidade de notas estará determinada pela "convergência" da sequência $(a_n), n \in \mathbb{Z}$.

Para estudar a convergência da sequência anterior, será conveniente expressá-la com sub-índices naturais para usar os resultados conhecidos para sequências de números reais.

Dividiremos a sequência em três partes: as sete notas fundamentais (o conjunto F), a subsequência que contém os sustenidos (s_k) e a subsequência que contém os bemols (b_k), ficando da seguinte maneira:

$$F = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^5}{2^7}, \frac{3^6}{2^9}\right\}, s_k = \frac{3^{6+k}}{2^{\lfloor \log_2 3^{6+k} \rfloor}}, \quad k \geq 1 \text{ e } b_k = \frac{3^{-k}}{2^{\lfloor \log_2 3^{-k} \rfloor}}, \quad k \geq 1.$$

Como as sete notas fundamentais sempre devem ser consideradas (segundo o "axioma" dos músicos), deixaremos, por enquanto, o conjunto F separado e estudaremos a sequência definida como:

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} s_k, & n = 2k-1 \\ b_k, & n = 2k \end{cases} \quad \text{, Com } n \in \mathbb{N}.$$

A sequência $(\tilde{a}_n)$ assim definida não é convergente, mas, para os conjuntos afinados, usaremos todas as notas de 0 a n e é sabido a quantidade de notas a considerar para se obter estes conjuntos são aquelas n notas para as quais a_n está mais próximo de 1, então, para tal será aplicado o conceito de limite inferior da sequência.

Definição 5.1 Se $\{c_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais, para cada $k \in \mathbb{N}$ se pode definir um conjunto $m_k = inf\{c_n : n \in \mathbb{N}, n \geq k\}$. Se $m = \lim_{k\to\infty} m_k$ $(-\infty \leq m \leq +\infty)$. O número m é chamado de limite inferior de $\{c_n\}_{n\geq 1}$ e se denota $m = \lim_{k\to\infty} c_n$.

Para provar que $\underline{lim}_{n\to\infty} \tilde{a}_n = 1$ serão usados alguns resultados da teoria das frações continuas apresentados no capítulo anterior.

Teorema 5.1 Se α é um número real arbitrário, então $\underline{\lim}_{n\to\infty}(n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor) = 0$, onde *o* $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ representa o limite inferior da sequência (b_n).

A demonstração desse teorema é feita aplicando os conceitos de frações contínuas apresentados acima.

Demonstração:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que α é um número irracional positivo. Seja $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ a sequência das reduzidas de α.

Pela expressão (4.1) tem-se que $|r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ e pela expressão (4.4) do Lema 4.1 obtém-se

$|\alpha - r_n| < |r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{{q_n}^2}$, pois $1 \leq q_n < q_{n+1}$ para todo n.

De (4), considerando os termos pares, tem-se que $\frac{\mathrm{p}_{2n}}{q_{2n}} < \alpha$ e daí que $|\alpha - r_{2n}| = \left|\alpha - \frac{\mathrm{p}_{2n}}{q_{2n}}\right| < \frac{1}{{q_{2n}}^2}$. Como $\alpha - \frac{\mathrm{p}_{2n}}{q_{2n}} > 0$ obtém-se $\alpha q_{2n} - \mathrm{p}_{2n} < \frac{1}{q_{2n}} < 1 \Rightarrow \mathrm{p}_{2n} = \lfloor \alpha q_{2n} \rfloor$. Daí que $\alpha q_{2n} - \lfloor \alpha q_{2n} \rfloor < \frac{1}{q_{2n}}$.

Como a subsequência (q_{2n}), $n \geq 0$ é crescente, resulta que o $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\alpha q_{2n} - \lfloor \alpha q_{2n} \rfloor) = 0$, e daí que $\underline{\lim}_{n\to\infty}(n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor) = 0$, como queríamos demonstrar.

5.1 MELHORES AFINAÇÕES: O *COMMA*

5.1.1 O limite inferior da sequência pitagórica e a afinação

Voltando agora para sequência pitagórica, a qual define os sons afinados das notas, além das sete notas fundamentais, fica definida a expressão:

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} s_k = \dfrac{3^{6+k}}{2^{\lfloor \log_2 3^{6+k} \rfloor}}, & n = 2k - 1 \\ b_k = \dfrac{3^{-k}}{2^{\lfloor \log_2 3^{-k} \rfloor}}, & n = 2k \end{cases}$$

Note que em geral as duas expressões s_k *e* b_k tem a forma $\tilde{a}_m = \frac{3^m}{2^{\lfloor \log_2 3^m \rfloor}}$.

Observe que, escrevendo $3^m = 2^{m \log_2 3}$, pode-se representar os termos da sequência $(\tilde{a}_m)$, como $\tilde{a}_m = 2^{m \log_2 3 - \lfloor m \log_2 3 \rfloor}$. Aplicando o teorema 5.1 tem-se que $\underline{lim}_{m\to\infty}(m \log_2 3 - \lfloor m \log_2 3 \rfloor) = 0$, resultando, da continuidade da função exponencial de base 2 que $\underline{lim}_{m\to\infty} \tilde{a}_m = 1$ o que prova que as subsequências s_k e b_k convergem para o número 1 e que o número ideal de notas para uma boa afinação é aquele que tem o coeficiente que mais se aproxima de 1.

5.1.2 O conceito de $Comma$

O importante resultado anteriormente demonstrado permite definir a precisão do sistema de afinação denominado *comma*.

Definição 5.2 Dados $(\tilde{a}_n), n \geq 1$ e $\varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon < 1$, considere $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ o primeiro (menor) número natural tal que $\tilde{a}_{m_0} < 1 + \varepsilon$. Chamam-se de notas musicais com precisão ε ao conjunto $N_\varepsilon = \{\tilde{a}_n : n < m_0(\varepsilon)\} \cup F$. O número $1 + \varepsilon$ é chamado de *comma* do conjunto.

Assim, se $\varepsilon = 0{,}068$ o conjunto das notas afinadas se reduz às sete notas fundamentais, $1 = Fá$, $\frac{3}{2} = Dó$, $\frac{3^2}{2^3} = Sol$, $\frac{3^3}{2^4} = Ré$, $\frac{3^4}{2^6} = Lá$, $\frac{3^5}{2^7} = Mi$, $\frac{3^6}{2^9} = Si$.

Depois das 7 notas clássicas, como se observa no quadro 4, a primeira vez que se aproxima de 1, ou seja, da nota inicial, é quando toma-se as primeiras 17 notas, para o $comma\ \varepsilon = 0{,}014$, o que explica por que a maioria das músicas que escutamos na atualidade é construída para o “temperamento musical” de 17 notas (12 reconhecidas pelo ouvido) para o $comma\ \varepsilon = 0{,}014$ que são elas: $1 = Fá$, $\frac{3}{2} = Dó$, $\frac{3^2}{2^3} = Sol$, $\frac{3^3}{2^4} = Ré$, $\frac{3^4}{2^6} = Lá$, $\frac{3^5}{2^7} = Mi$, $\frac{3^6}{2^9} = Si$, $\frac{3^7}{2^{11}} = Fá^{\#}$, $\frac{3^8}{2^{12}} = Dó^{\#}$, $\frac{3^9}{2^{14}} = Sol^{\#}$, $\frac{3^{10}}{2^{15}} = Ré^{\#}$, $\frac{3^{11}}{2^{17}} Lá^{\#}$, $\frac{2^2}{3} = Si^b$, $\frac{2^4}{3^2} = Mi^b$, $\frac{2^5}{3^3} = Lá^b$, $\frac{2^7}{3^4} = Ré^b$ e $\frac{2^8}{3^5} = Sol^b$.

Entende-se por temperamento musical ao processo feito para dividir ou “temperar” a oitava. Se for considerado que um temperamento permite uma melhor afinação quanto mais perto se encontra a nota inicial da final observar-se-á que após a escolha de 17 notas para se obter um melhor “tempero”, seriam necessárias 99 notas, porém, uma afinação com tal número de notas seria um desperdício considerando as limitações da audição humana. No Quadro 05 são apresentados os valores dos coeficientes, o número de cada nota e o número de alterações, e são destacados em vermelho os $commas$ de cada conjunto de afinação ideal até as 99 notas.

QUADRO 05: cálculos dos coeficientes realizados numa planilha eletrônica.

n	k	a_n	$N(n)$	A_n	n	k	a_n	$N(n)$	A_n
0	0	1	3	0	51	29	1,95059	0	4
1	1	1,5	0	0	52	−23	1,45989	2	−4
2	2	1,125	4	0	53	30	1,46294	4	4
3	3	1,6875	1	0	54	−24	1,94652	5	−4
4	4	1,265625	5	0	55	31	1,09721	1	4
5	5	1,8984375	2	0	56	−25	1,29768	1	−4
6	6	1,423828125	6	0	57	32	1,64581	5	4
7	7	1,067871094	3	1	58	−26	1,73024	4	−4
8	−1	1,333333333	6	−1	59	33	1,23436	2	4
9	8	1,601806641	0	1	60	−27	1,1535	0	−4
10	−2	1,777777778	2	−1	61	34	1,85154	6	4
11	9	1,20135498	4	1	62	−28	1,53799	3	−4
12	−3	1,185185185	5	−1	63	35	1,38865	3	5
13	10	1,802032471	1	1	64	−29	1,02533	6	−5
14	−4	1,580246914	1	−1	65	36	1,04149	0	5
15	11	1,351524353	5	1	66	−30	1,36711	2	−5
16	−5	1,053497942	4	−1	67	37	1,56224	4	5
17	12	1,013643265	2	1	68	−31	1,82281	5	−5
18	−6	1,404663923	0	−1	69	38	1,17168	1	5
19	13	1,520464897	6	1	70	−32	1,21521	1	−5
20	−7	1,872885231	3	−1	71	39	1,75752	5	5
21	14	1,140348673	3	2	72	−33	1,62027	4	−5
22	−8	1,248590154	6	−2	73	40	1,31814	2	5
23	15	1,710523009	0	2	74	−34	1,08018	0	−5
24	−9	1,664786872	2	−2	75	41	1,97721	6	5
25	16	1,282892257	4	2	76	−35	1,44024	3	−5
26	−10	1,109857915	5	−2	77	42	1,4829	3	6
27	17	1,924338385	1	2	78	−36	1,92032	6	−6
28	−11	1,479810553	1	−2	79	43	1,11218	0	6
29	18	1,443253789	5	2	80	−37	1,28022	2	−6
30	−12	1,973080737	4	−2	81	44	1,66827	4	6
31	19	1,082440342	2	2	82	−38	1,70695	5	−6
32	−13	1,315387158	0	−2	83	45	1,2512	1	6
33	20	1,623660513	6	2	84	−39	1,13797	1	−6
34	−14	1,753849544	3	−2	85	46	1,8768	5	6
35	21	1,217745385	3	3	86	−40	1,51729	4	−6
36	−15	1,169233029	6	−3	87	47	1,4076	2	6
37	22	1,826618077	0	3	88	−41	1,01153	0	−6
38	−16	1,558977373	2	−3	89	48	1,0557	6	6
39	23	1,369963558	4	3	90	−42	1,34871	3	−6
40	−17	1,039318248	5	−3	91	49	1,58355	3	7
41	24	1,027472668	1	3	92	−43	1,79827	6	−7
42	−18	1,385757664	1	−3	93	50	1,18766	0	7
43	25	1,541209002	5	3	94	−44	1,19885	2	−7
44	−19	1,847676886	4	−3	95	51	1,78149	4	7
45	26	1,155906752	2	3	96	−45	1,59847	5	−7
46	−20	1,231784591	0	−3	97	52	1,33612	1	7
47	27	1,733860128	6	3	98	−46	1,06564	1	−7
48	−21	1,642379454	3	−3	99	53	1,00209	5	7
49	28	1,300395096	3	4	100	−47	1,42086	4	−7
50	−22	1,094919636	6	−4	101	54	1,50314	2	7

Legenda: *Dó=0, Ré=1, Mi=2, Fá=3, Sol=4, Lá=5, Si=6.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática está em toda parte, desde a enumeração de objetos até o mais complexo teorema. A natureza está sempre se modificando e o homem precisa conhecer, dominar e adaptar-se a essas modificações. Para Pitágoras tudo era descrito por meio de números, e além dele muitos outros gênios compartilhavam desta crença, por exemplo temos a frase famosa *A Matemática é o alfabeto com o qual Deus criou o universo* de Galileu (1564-1642). Fenômenos e padrões eram um mistério para o homem e ao mesmo tempo despertava a curiosidade de explica-los, surgindo as perguntas: será que tudo é regido por um criador? Qual o sentido da vida? A terra se move? O que é o dia? O que é a luz? O que é o som? grande parte desses questionamentos começaram a partir de hipóteses matemáticas.

O ensino de matemática hoje nas escolas necessita de professores que apresentem aplicações da matemática para os alunos, despertando assim a curiosidade e a vontade de aprender. Muitos alunos necessitam apenas de um incentivo, o motivo para desenvolver o estudo dessa ciência. O presente trabalho mostra a matemática de um outro perfil, uma outra face mais dinâmica e divertida, criando a música a partir dela. Um dos objetivos nesse texto é disponibilizar uma ferramenta para o professor que se vê em apuros no momento em que é questionado pelo aluno como perguntas do tipo: para que serve a matemática? Em que se aplica? Sendo a relação entre matemática e música uma interessante resposta, pois a música é um exemplo prático de aplicação matemática nas entrelinhas do cotidiano, não tão simples quanto a enumeração de objetos ou um mero cálculo de trocos em uma operação comercial, respostas essas que são vista como clichê para os estudantes.

No desenvolvimento desde trabalho foi mostrado que essas duas ciências, ou artes, tem mais relação do que uma simples divisão fracionária de tempo, semi-breve, colcheia, semi-colcheia, fusa, e semi-fusa. A música é descrita claramente por física no estudo das ondas e frequências. Esse texto mostra a música de um ponto de vista aritmético, com conceitos que embora sejam complexos para o ensino básico dá um total suporte para o tema ser apresentado na prática para os alunos. Também mostra que a matemática é uma ferramenta de extrema importância para a ciência e principalmente para o homem, que desde os tempos antigos alimenta uma ambição, tentar explicar o porquê de tudo.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música**: **O pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras, 2ªed., 2002.

BENNETT, Roy. **Uma breve história da música**. 1986.

CARRIÓN, Vicente Liern. **Algoritmos matemáticos y afinación musical**. 2002.

CARRIÓN, Vicente Liern. **Métodos numéricos em Matemática**. Revista "EPSILON" N° 30: S.A.E.M "THALES". Sevilla, 1994.

CHAILLEY, Jacques; CHALLAN, Henri. **Théorie complète de la musique**. 1947.

DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio. **Introdução à teoria dos números**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

DE SOUSA, Carlos Maurício e MENÉNDEZ RODRÍGUEZ, Tomás Daniel. **Música e aritmética.** II Cloquio de Matemática da Região Norte. UFOPA, Santarém, 2012.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** Coleção PROFMAT. – Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1**. Projeto Euclides, 2008.

MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentes.** Coleção textos universitários; Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MENÉNDEZ RODRÍGUEZ, T. D **Notas da conferencia sobre a Matemática e a afinação musical**, ministrada no SESC. Porto Velho, 1999.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas**. 2011.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. Tópicos de Teoria dos Números. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Sociedade das ciências antigas. **Música das Esferas.** http://www.sca.org.br/artigos.html.

VERA, Francisco. **Historia de la ciencia**. J. Gil, 1937.