



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RICARDO SPARTANI

PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA VIA O PRINCÍPIO DE FERMAT

FORTALEZA

2017

RICARDO SPARTANI

PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA VIA O PRINCÍPIO DE FERMAT

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Matemática

...

Dedico esse trabalho à minha mãe Sueli
Novanta (*in Memoriam*).

AGRADECIMENTOS

À Deus, por sempre me dar forças para continuar.

Aos meus pais, Sueli e Paulo, por ajudar e apoiar minhas escolhas e sempre prezarem pela minha educação e estudo. Vocês são minhas referências.

À minha esposa, Juliana Calazans, por todo amor e dedicação. Por ser minha sustentação e motivação. Se cheguei até aqui, foi por você.

Ao meu filho, Luca, que veio a esse mundo durante essa caminhada e me ensinou mais do que eu poderia imaginar.

Ao meu irmão, Renato, que sempre me incentivou e esteve ao meu lado, apesar da distância. Sempre vi nos seus olhos o dom de ensinar.

À minha família, em especial a minha tia Ângela, minha avó Olga e minha sogra Neusa, que sempre estiveram por perto para me incentivar.

Ao meu amigo e grande incentivador profissional, professor Carlos Davyson, que sempre acreditou no meu potencial. Obrigado pelas oportunidades.

Ao meu orientador, Frederico Girão, pela grande paciência e apoio. Mesmo eu tendo muita dificuldade, principalmente em relação ao tempo, sempre me incentivou e acreditou em mim.

“Não é sobre chegar no topo do mundo e saber
que venceu.

É sobre escalar e sentir que o caminho te
fortaleceu.”

(Ana Vilela)

RESUMO

Os resultados geométricos apresentados nesse trabalho possuem como motivação inicial a utilização do Princípio de Fermat. Ele introduz os problemas gerando possíveis, e fortes, candidatos à solução. Posteriormente fazemos uso de outras ferramentas, entre elas Geometria Euclidiana e Cálculo, para mostramos que tal princípio nos deu o candidato correto. De fato, a utilização de um princípio básico, pode nos guiar até mesmo por questões difíceis. Utilizaremos esse processo principalmente para resolver problemas de minimização geométrica. Faremos uso também de propriedades de reflexão nas cônicas e de refração da luz, culminando no problema de encontrar a curva que minimiza o tempo de descida de um objeto entre dois pontos, proposto por Johann Bernouilli em 1696.

Palavras-chaves: Princípio de Fermat. Minimização Geométrica. Ciclóide.

ABSTRACT

The geometric results presented in this study have as initial motivation to use of Fermat's Principle. It introduces the problems by generating possible, and strong, candidates for solution. Later we make use of other tools, among them Euclidean Geometry and Calculus, to show that such a principle has given us the correct candidate. In fact, the use of a basic principle can guide us even through difficult issues. We will use this process mainly to solve problems of geometric minimization. We will also use reflection properties conics and refraction of light, culminating in the problem of finding the curve that minimizes the time of descent of an object between two points, proposed by Johann Bernoulli in 1696.

Keywords: Fermat's Principle. Geometric Minimization. Cycloid.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Trajetória de A para B	12
Figura 1.2 - B' simétrico a B	13
Figura 1.3 - Desigualdade triangular $AP'B'$	14
Figura 1.4 - Trajetória de A para B	15
Figura 1.5 - Simetrias para os extremos de $d(x)$ no intervalo $[0, L]$	16
Figura 2.1 - Trajetória do raio partindo de F	18
Figura 2.2 - Simetrias de F	18
Figura 2.3 - Linha poligonal $F'E'D'F''$	19
Figura 2.4 - Ponto fixo F	20
Figura 3.1 - Reflexão na parábola.	21
Figura 3.2 - Reta t na parábola δ	22
Figura 3.3 - Ponto T diferente de P da parábola δ	23
Figura 4.1 - Desigualdade triangular na elipse δ	24
Figura 4.2 - Reflexão na elipse δ	25
Figura 4.3 - Desigualdade triangular para o ponto P'	25
Figura 5.1 - Desigualdade triangular na hipérbole δ	26
Figura 5.2 - Reflexão na hipérbole δ	28
Figura 5.3 - Desigualdade triangular para o ponto P'	28
Figura 6.1 - Trajetória de A para B	30
Figura 6.2 - Elipse δ_d subconjunto do interior de δ_d'	30
Figura 6.3 - Intersecção da elipse com a circunferência.....	31
Figura 6.4 - Heron usando círculo.	31
Figura 6.5 - P coincide com o vértice A	33
Figura 6.6 - Raio maior ou igual que \overline{AB}	34
Figura 6.7 - B e C fiquem externos à circunferência λ	35
Figura 6.8 - Fermat-Steiner.....	35
Figura 7.1 - Desvio do meio A para o B	37
Figura 7.2 - Refração de A para B	38
Figura 7.3 - P à direita de N_B	39
Figura 8.1 - Construção da cicloide.....	41

Figura 8.2 - Equação paramétrica da cicloide.	42
Figura 8.3 - Queda livre.....	44
Figura 8.4 - Refração de A para B	45
Figura 8.5 - Laminação de A para B	45
Figura 8.6 - Ângulo θ com a trajetória.....	46
Figura 8.7 - Curva no plano.....	46

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. PROBLEMAS INICIAIS DE MINIMIZAÇÃO	12
2.1. Problema 1	12
2.2. Problema 1 (solução por cálculo)	14
2.3. Problema 2	18
3. MINIMIZAÇÃO NAS CÔNICAS	21
3.1. Propriedade reflexiva da parábola	21
3.2. Problema 3: Minimização na parábola	22
3.3. Propriedade reflexiva da elipse.....	23
3.4. Problema 4: Minimização na elipse.....	24
3.5. Propriedade reflexiva na hipérbole.....	26
3.6. Problema 5: Minimização na hipérbole.....	27
4. PROBLEMA DE HERON	30
5. PROBLEMA DE FERMAT-STEINER	33
6. MINIMIZAÇÃO COM MEIOS DIFERENTES: LEI DE SNELL	37
7. A CICLOIDE	41
8. PROBLEMA DE JOHANN BERNOULLI	44
9. CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
10. REFERÊNCIAS	50

1. INTRODUÇÃO

O matemático francês Pierre de Fermat, em agosto de 1657, enuncia o princípio do tempo mínimo (conhecido como Princípio de Fermat) em uma carta indexada à Monsieur Cureau de la Chambre. Nele, Fermat descreve que a luz, viajando de um ponto a outro, sempre percorre a trajetória de menor tempo. Inicialmente parece óbvio e sem muita importância, porém a relevância dele, por exemplo, para a ótica, supera as expectativas.

Nessa dissertação veremos que o Princípio de Fermat pode ser o motivador para resolução de grandes problemas. Ele entrará como pontapé inicial na criação de um candidato para resolução de minimizações geométricas. Além disso, será utilizado para as demonstrações de importantes propriedades óticas utilizadas no Ensino Médio.

Iniciaremos o trabalho com exemplos aparentemente mais básicos (Capítulo 2), mas que mesmo nesses casos o princípio funcionará com um norte inicial. Posteriormente veremos as aplicações do princípio aos problemas que envolvem reflexão nas cônicas e suas propriedades. Contemplaremos também dois grandes problemas da história da Matemática: Heron e Fermat-Steiner.

Por fim, culminaremos nosso estudo no problema de minimização do tempo de descida de um objeto entre dois pontos, proposto por Johann Bernouilli em 1696. Porém, antes dele, observaremos um problema que é motivador para a construção da famosa Lei da Refração (Lei de Snell), cuja ideia será utilizada para a resolução do problema de Bernouilli.

2. PROBLEMAS INICIAIS DE MINIMIZAÇÃO

Veremos nesse capítulo dois problemas iniciais de minimização de caminhos, cujo Princípio de Fermat atua como motivador.

2.1. Problema 1

São dados no plano dois pontos, A e B , e uma reta r , com A e B de um mesmo lado de r . Encontre o ponto P sobre a reta r que minimiza $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$.

Resolução: O princípio de Fermat nos diz que:

"A trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é um mínimo."

Admita que A e B estão imersos no mesmo meio. Neste caso tem-se que minimizar o tempo equivale a minimizar a distância.

Então consideremos um raio de luz que parte do ponto A em direção ao ponto B e que primeiramente reflete na reta r , supostamente espelhada. Pelo princípio de Fermat, esse ponto de reflexão na reta r é o nosso candidato para a minimização de $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$. O raio de luz tocará a reta r em um ponto P de tal forma que o ângulo de incidência (i) terá que ser igual ao ângulo de reflexão (s), como indica a figura 1.1.

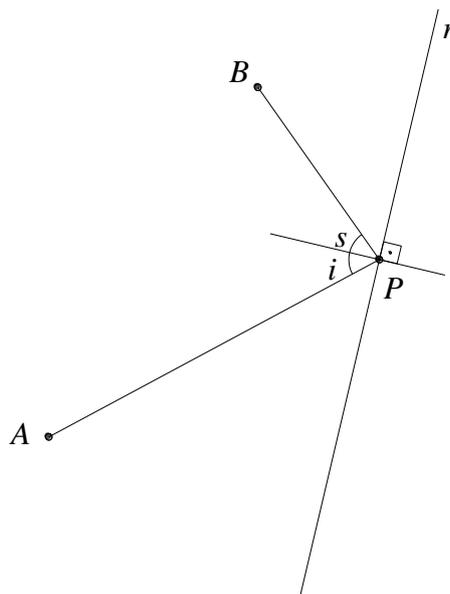


Figura 1.1 - Trajetória de A para B .

Agora, seja B' o ponto simétrico de B em relação à reta r .

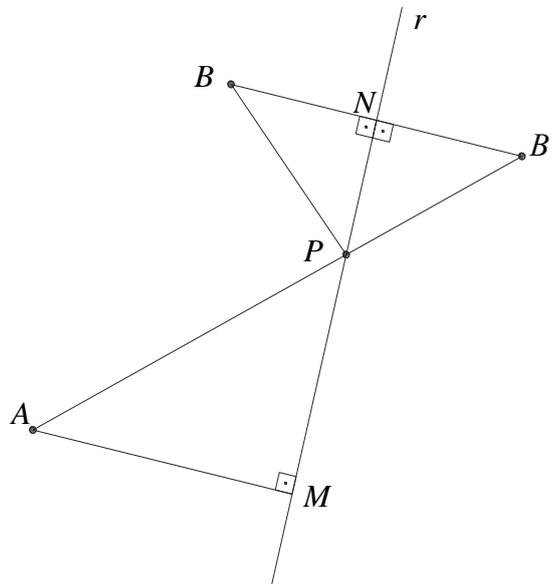


Figura 1.2 - B' simétrico a B .

Observe que $\overline{BN} = \overline{B'N}$, $\angle PNB = \angle PNB'$ e que \overline{PN} é comum aos triângulos PNB e PNB' . Pelo caso de congruência LAL concluímos que os triângulos PNB e PNB' são congruentes, o que implica $\overline{PB} = \overline{PB'}$. Com isso $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'}$.

Observe agora que $i = s \Rightarrow \angle BPN \equiv \angle APM$. Mas como $\angle PNB = \angle PNB'$, temos que $\angle APM = \angle PNB'$. Logo $\overline{PB'}$ é prolongamento de \overline{AP} .

Agora provemos que P representa o ponto que torna a distância entre A e B' mínima:

Tomemos um ponto P' na reta r , distinto de P . Note que os pontos A , P' e B' formam um triângulo.

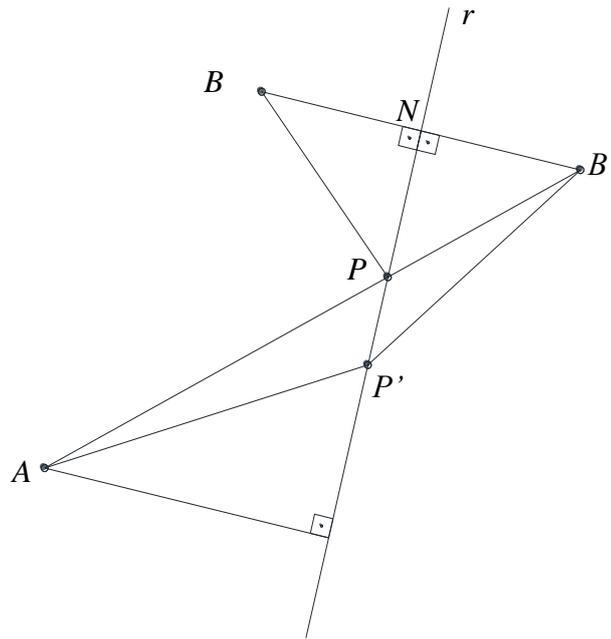


Figura 1.3 - Desigualdade triangular $AP'B'$.

Pela desigualdade triangular temos que o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados. Com isso $\overline{AB} < \overline{AP} + \overline{PB}$.

Logo, o ponto P sobre a reta r minimiza $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$; conseqüentemente minimiza $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$.

Principal referência do tópico:

SANTOS, Ednaldo S. dos; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. UFPB 2013. Disponível em: https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38881

2.2. Problema 1 (solução por cálculo)

Considere novamente o raio de luz partindo do ponto A , refletindo em r (no ponto P) e dirigindo-se ao ponto B . Agora, vamos minimizar $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$.

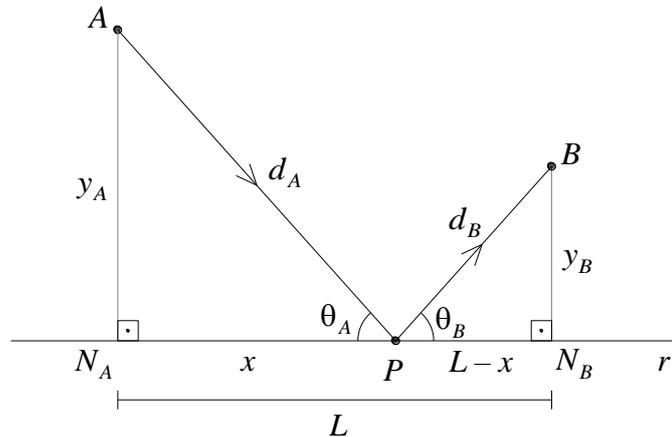


Figura 1.4 - Trajetória de A para B .

Observando na figura 1.4 os triângulos APN_A e BPN_B , podemos concluir facilmente (utilizando Teorema de Pitágoras) que $d_A = \sqrt{(y_A)^2 + x^2}$ e $d_B = \sqrt{(y_B)^2 + (L-x)^2}$. Assim, podemos modelar a função $d(x)$, que representa $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$, em função de x , visto que y_A , y_B e L são constantes. Logo:

$$d(x) = \sqrt{(y_A)^2 + x^2} + \sqrt{(y_B)^2 + (L-x)^2}$$

$$d(x) = \left((y_A)^2 + x^2 \right)^{1/2} + \left((y_B)^2 + (L-x)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{I})$$

Agora queremos fazer com que essa distância d seja mínima. Como $d(x)$ representa uma função real e contínua no intervalo $[0, L]$, tal função atingirá um valor mínimo e esse ponto será um ponto crítico da função em $(0, L)$ ou uma extremidade do intervalo $[0, L]$. Para encontrarmos o ponto crítico faremos a derivada de $d(x)$ ser nula. Assim, derivando (I) temos, pela regra da cadeia,

$$d'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2} \left((y_A)^2 + x^2 \right)^{-1/2} + (-2L + 2x) \cdot \frac{1}{2} \left((y_B)^2 + (L-x)^2 \right)^{-1/2} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} + \frac{(-L + x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} - \frac{(L - x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} = \frac{(L - x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} \quad (\text{II})$$

Observando novamente na figura 1 os triângulos APN_A e BPN_B , temos que

$$\frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} = \cos \theta_A \text{ e } \frac{(L - x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} = \cos \theta_B. \text{ Assim, substituindo em (II), temos}$$

$\cos \theta_A = \cos \theta_B$. Como θ_A e θ_B são ângulos agudos, concluímos que $\theta_A = \theta_B$.

Observe agora as simetrias das trajetórias dos extremos da função $d(x)$.

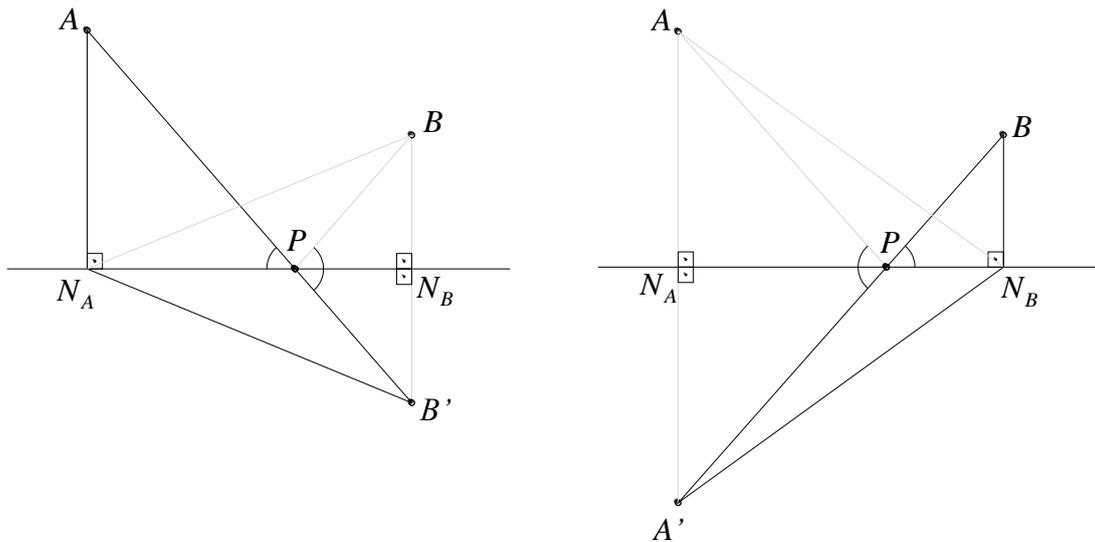


Figura 1.5 - Simetrias para os extremos de $d(x)$ no intervalo $[0, L]$.

Para $x = 0$ temos $d(0) = \overline{AN_A} + \overline{N_AB} = \overline{AN_A} + \overline{N_AB'}$. Pela desigualdade triangular em AN_AB' observamos que $\overline{AN_A} + \overline{N_AB'} > \overline{AB'}$.

Para $x = L$ temos $d(L) = \overline{BN_B} + \overline{N_BA} = \overline{BN_B} + \overline{N_BA'}$. Pela desigualdade triangular em BN_BA' observamos que $\overline{BN_B} + \overline{N_BA'} > \overline{BA'}$.

Logo o ponto crítico P para $\theta_A = \theta_B$ será o mínimo.

Principal referência do tópico:

SANTOS, Ednaldo S. dos; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. UFPB 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38881

2.3. Problema 2

Dado um triângulo ABC , encontre os pontos D , E e F sobre os lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente, de modo que o perímetro de DEF seja o menor possível.

Resolução: Tomemos o ponto F no lado \overline{AB} do triângulo ABC . Considere que um raio de luz parta do ponto F , reflita no lado \overline{BC} no ponto D , posteriormente reflita no lado \overline{AC} no ponto E , e finalmente retorne ao ponto F (figura 2.1). Pelo princípio de Fermat, os pontos D e E são os candidatos aos pontos que minimizam o caminho seguido pelo raio, gerando assim o triângulo DEF de menor perímetro possível.

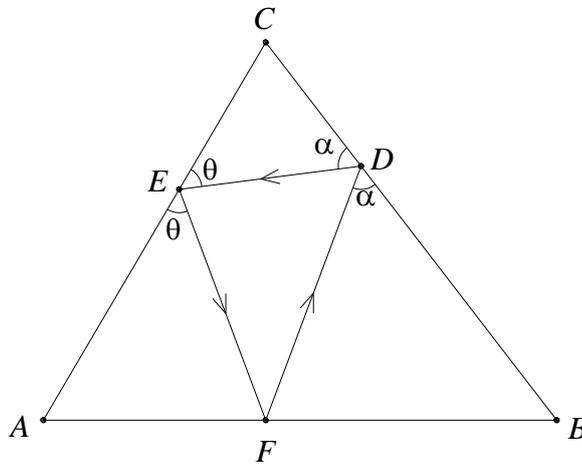


Figura 2.1 - Trajetória do raio partindo de F .

Considere agora os pontos F' e F'' simétricos do ponto F , respectivamente, em relação aos lados \overline{BC} e \overline{AC} .

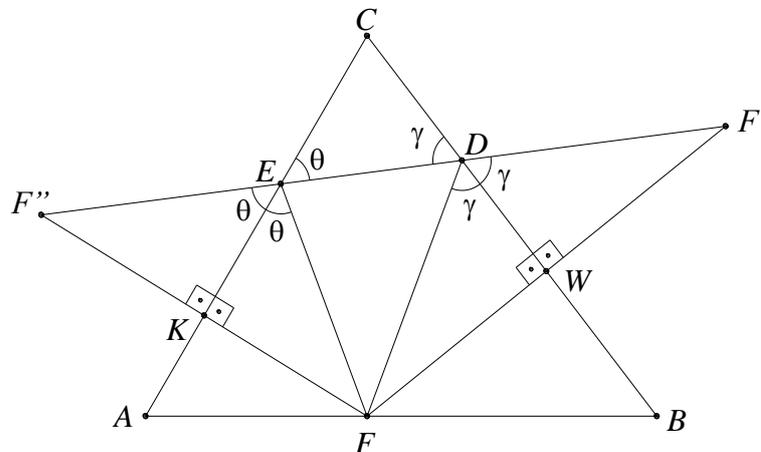


Figura 2.2 - Simetrias de F .

Na figura 2.2 observe que:

(i) $\overline{FK} = \overline{KF''}$, $\angle F''KE = \angle FKE$ e \overline{KE} é comum aos triângulos FKE e $F''KE$. Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos $\overline{FE} = \overline{F''E}$ e $\angle F''EK \equiv \angle FEK = \theta$.

(ii) $\overline{FW} = \overline{WF'}$, $\angle F'WD = \angle FWD$ e \overline{WD} é comum aos triângulos FWD e $F'WD$. Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos $\overline{FD} = \overline{F'D}$ e $\angle F'DW \equiv \angle FDW = \gamma$.

Por (i) e (ii) concluímos que $\overline{F'F''}$ é um segmento de reta que passa por D e E e corresponde ao perímetro do triângulo DEF .

Tomemos agora os pontos $D' \in \overline{BC}$, com D' diferente de D e $E' \in \overline{AC}$, com E' diferente de E .

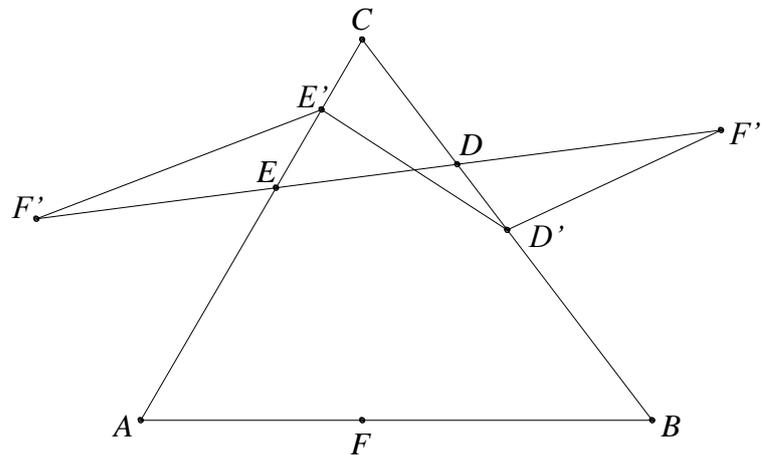


Figura 2.3 - Linha poligonal $F'E'D'F''$.

Observe na figura 2.3 que a linha poligonal $F'E'D'F''$ terá comprimento maior que $\overline{F'F''}$, pois F , E , D e F'' são colineares. Logo, fixado F , os pontos D e E minimizam o perímetro do triângulo.

Agora encontremos F em \overline{AB} para que $\overline{F'F''}$ seja mínimo:

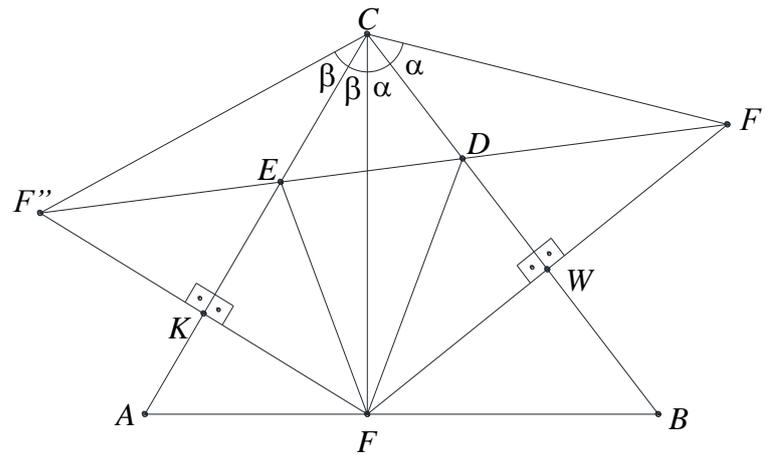


Figura 2.4 - Ponto fixo F.

Observe que os triângulos FCF' e FCF'' são isósceles e de respectivas mediatrizes \overline{BC} e \overline{CA} .

No triângulo ABC temos $\angle ACB$ constante e de medida $\alpha + \beta$. Com isso $\angle F'CF''$ também é constante, pois possui medida $2\alpha + 2\beta$. Assim, para $\overline{F'F''}$ mínimo temos que ter $\overline{F'C}$ e $\overline{F''C}$ mínimos.

Para $\overline{F'C}$ e $\overline{F''C}$ mínimos temos que ter \overline{CF} mínimo, já que $\overline{F''C} = \overline{F'C} = \overline{FC}$.

Logo \overline{CF} é a altura relativa ao lado \overline{AB} .

Principais referências do tópico:

MANFRINO, Radmila B.; Ortega, José Antonio G.; DELGADO, Rogelio V.; *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Berlin: Birkhäuser, 2009.

SANTOS, Ednaldo S. dos; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. UFPB 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38881

3. MINIMIZAÇÃO NAS CÔNICAS

Para as minimizações nas cônicas, veremos antes de cada problema a respectiva propriedade de reflexão. Assim ficará mais fácil identificar a importância da utilização do princípio nos problemas.

3.1. Propriedade reflexiva da parábola

Sendo uma parábola construída de material reflexivo, um feixe de retas paralelas ao eixo de simetria refletirá no foco.

Demonstração: Seja a parábola δ com diretriz d e foco F .

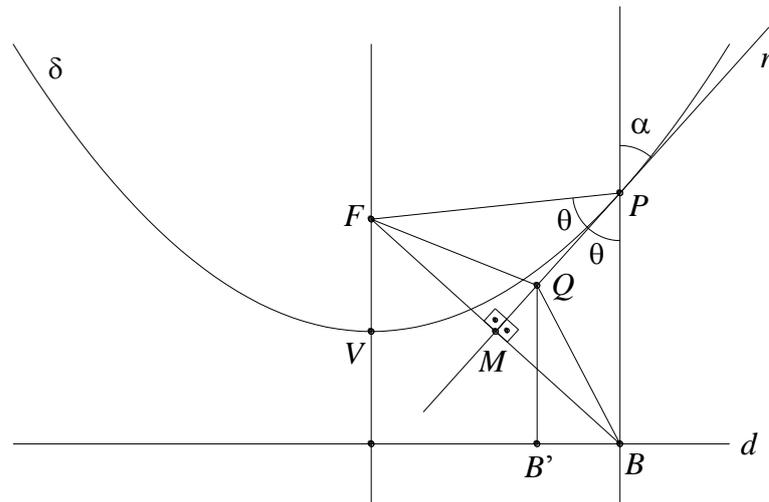


Figura 3.1 - Reflexão na parábola.

Tomemos um ponto $P \in \delta$. Pela definição de parábola temos que $\overline{FP} = \overline{PB}$.

Tracemos agora a reta r , passando por P , de tal forma que r seja bissetriz do ângulo $\angle FPB$. Vamos mostrar primeiramente que r é tangente à parábola no ponto P . Para isso observe que no triângulo FPB , r também é mediatriz do lado \overline{FB} , pois, FPB é isósceles com $\overline{FP} = \overline{PB}$.

Tomemos agora um ponto $Q \in r$, com Q diferente de P . Como r é mediatriz de \overline{FB} , $\overline{FQ} = \overline{QB}$. Observe que $\overline{QB} > \overline{QB'}$, pois no triângulo QBB' , \overline{QB} é hipotenusa e $\overline{QB'}$ é cateto. Com isso, Q é externo à parábola. Logo a parábola δ e a reta r possuem apenas um ponto de intersecção, concluindo assim que r é tangente.

Observe ainda que $\alpha = \theta$, pois são ângulos opostos pelo vértice P . Concluimos assim que o raio paralelo ao eixo de simetria da parábola refletirá no foco.

3.2. Problema 3: Minimização na parábola

Considere uma parábola de foco F e diretriz r . Dado um ponto C na região convexa do plano determinada pela parábola, encontre o ponto P da parábola que minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF}|$.

Resolução: Pela propriedade reflexiva da parábola podemos garantir que um feixe paralelo ao eixo de simetria, que passa por C , refletirá no foco F . Pelo princípio de Fermat, o ponto de reflexão na parábola é o nosso provável ponto de minimização de $|\overline{CP}| + |\overline{PF}|$.

Considere a parábola δ com foco F . Tomemos a reta t paralela ao eixo de simetria que passa por C e possui intersecção com a reta diretriz r no ponto Q . Essa reta refletirá no ponto $P \in \delta$ e seguirá para F .

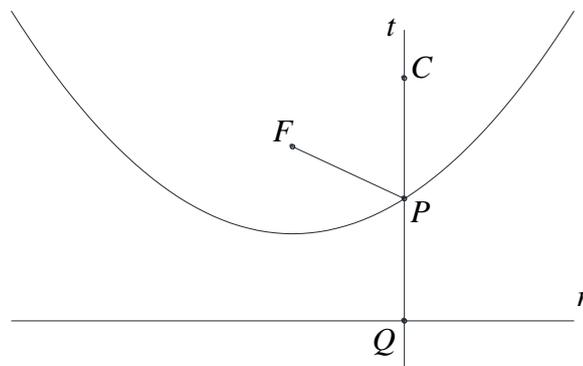


Figura 3.2 - Reta t na parábola δ .

Agora vamos verificar que P minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF}|$:

Considere um ponto $T \in \delta$, com T diferente de P .

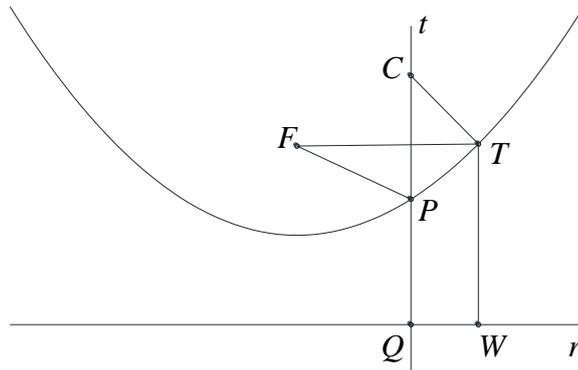


Figura 3.3 - Ponto T diferente de P da parábola δ .

Pela definição de parábola temos $\overline{FP} = \overline{PQ}$ e $\overline{FT} = \overline{TW}$, onde W é o pé da perpendicular em r traçada do ponto T .

Observe que $\overline{CP} + \overline{PF} = \overline{CP} + \overline{PQ}$ e $\overline{CT} + \overline{TW} = \overline{CT} + \overline{TF}$. Usando desigualdade triangular em CTW temos que $\overline{CW} < \overline{CT} + \overline{TW}$. Note ainda que $\overline{CQ} < \overline{CW}$, pois \overline{CW} é a hipotenusa do triângulo CQW . Assim, $\overline{CQ} < \overline{CT} + \overline{TW} \Rightarrow \overline{CP} + \overline{PQ} < \overline{CT} + \overline{TW}$. Logo $\overline{CP} + \overline{PF} < \overline{CT} + \overline{TF}$.

Logo o ponto P minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF}|$.

Principal referência do tópico:

AKOPYAN, Arseny V.; ZASLAVSKY, Alexey. A.; *Geometry of Conics*. USA: AMS, 2007. (Mathematical World, v. 26).

3.3. Propriedade reflexiva da elipse

Sendo uma elipse construída de material reflexivo, um raio de luz que parte de um dos focos refletirá no outro foco.

Demonstração: Considere a elipse δ de focos F_1 e F_2 . Seja r a semirreta que passa pelo foco F_1 e toca a elipse δ no ponto P . Tomemos $B \in r$ tal que $\overline{PB} = \overline{PF_2}$ e tracemos o segmento de reta $\overline{BF_2}$. Considere também t como mediatriz de $\overline{BF_2}$ no triângulo PBF_2 .

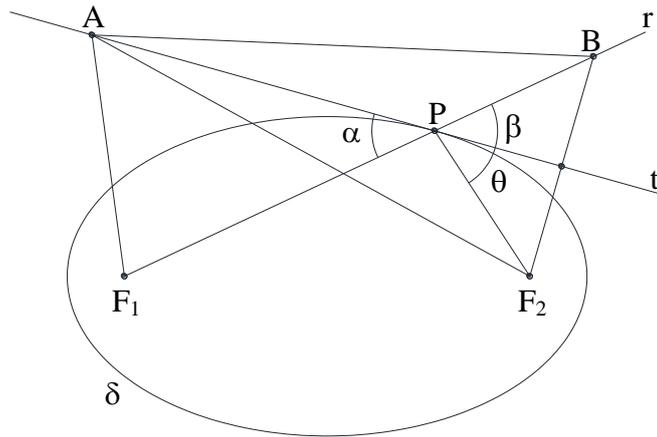


Figura 4.1 - Desigualdade triangular na elipse δ .

Primeiramente vamos mostrar que t é tangente à elipse δ no ponto P :

Para isso tomemos o ponto $A \in t$, e, como t é mediatriz de $\overline{BF_2}$, temos que $\overline{AB} = \overline{AF_2}$. Assim observe que $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{AF_1} + \overline{AB}$, que por sua vez é maior que $\overline{BF_1}$, pela desigualdade triangular em ABF_1 . Pela definição da elipse temos que $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$. Com isso temos que $\overline{F_1P} + \overline{PB} = 2a \Rightarrow \overline{BF_1} = 2a$, então $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} > 2a$. Assim, $A \notin \delta, \forall A \in t$ com $A \neq P$. Portanto, t é tangente à elipse δ no ponto P .

Agora vamos mostrar que os ângulos de incidência e de reflexão α e θ possuem medidas iguais:

Para isso observe que o triângulo PBF_2 é isósceles de base $\overline{BF_2}$. Como t é mediatriz de $\overline{BF_2}$ passando por P , também será bissetriz do ângulo $\angle BPF_2$, o que implica que $\beta = \theta$. Como $\alpha = \beta$ (o.p.v.), concluímos que $\alpha = \theta$.

3.4. Problema 4: Minimização na elipse

Considere uma elipse de focos F_1 e F_2 . Seja C um ponto no interior da elipse.

Encontre o ponto P da elipse que minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF_2}|$.

Resolução: Pela propriedade reflexiva da elipse podemos garantir que um feixe que sai de F_1 , passando por C , refletirá na elipse em direção ao foco F_2 . Pelo princípio de Fermat, o ponto de reflexão na elipse é o nosso candidato ao ponto de minimização de $|\overline{CP}| + |\overline{PF_2}|$.

Considere a elipse δ com focos F_1 e F_2 . Tomemos P como o ponto de intersecção da semirreta $\overline{F_1C}$ com a elipse δ .

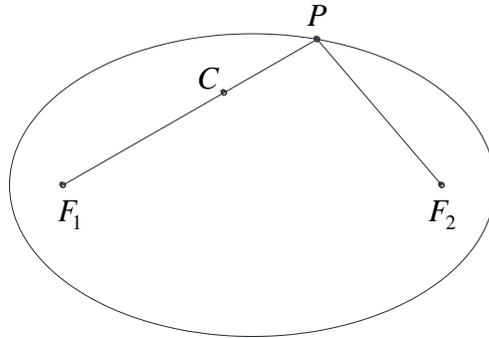


Figura 4.2 - Reflexão na elipse δ .

Agora vamos verificar que P minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF_2}|$:

Considere um ponto $P' \in \delta$, com P' diferente de P .

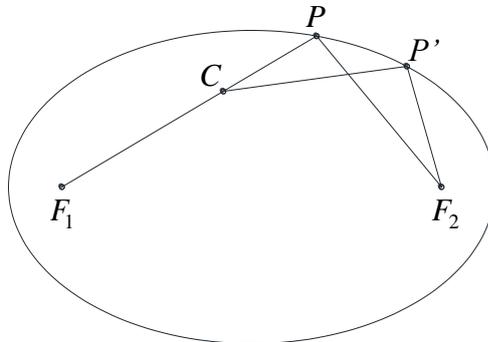


Figura 4.3 - Desigualdade triangular para o ponto P' .

Observe que $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P'} + \overline{P'F_2}$. Pela desigualdade triangular em F_1CP' temos:

$$\begin{aligned} \overline{F_1P} + \overline{PF_2} &= \overline{F_1P'} + \overline{P'F_2} < \overline{F_1C} + \overline{CP'} + \overline{P'F_2} \\ \Rightarrow \overline{F_1C} + \overline{CP} + \overline{PF_2} &< \overline{F_1C} + \overline{CP'} + \overline{P'F_2} \\ \Rightarrow \overline{CP} + \overline{PF_2} &< \overline{CP'} + \overline{P'F_2} \end{aligned}$$

Logo, o ponto P minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF_2}|$.

Principais referências do tópico:

AKOPYAN, Arseny V.; ZASLAVSKY, Alexey. A.; *Geometry of Conics*. USA: AMS, 2007. (Mathematical World, v. 26).

MARTINS, Cesar P.; *Tópicos de Geometria Analítica: Elipse*. UFG 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=39726

3.5. Propriedade reflexiva na hipérbole

Sendo uma hipérbole construída de material reflexivo, um raio de luz dirigido a um dos focos refletirá em direção ao outro foco.

Demonstração: Considere a hipérbole δ de focos F_1 e F_2 . Sejam s a reta que passa pelo foco F_1 e toca a hipérbole δ no ponto P , e k a reta que passa pelos pontos P e foco F_2 . Tomemos $B \in s$ tal que $\overline{PB} = \overline{PF_2}$ e tracemos o segmento de reta $\overline{BF_2}$. Considere também a mediatriz t do segmento $\overline{BF_2}$.

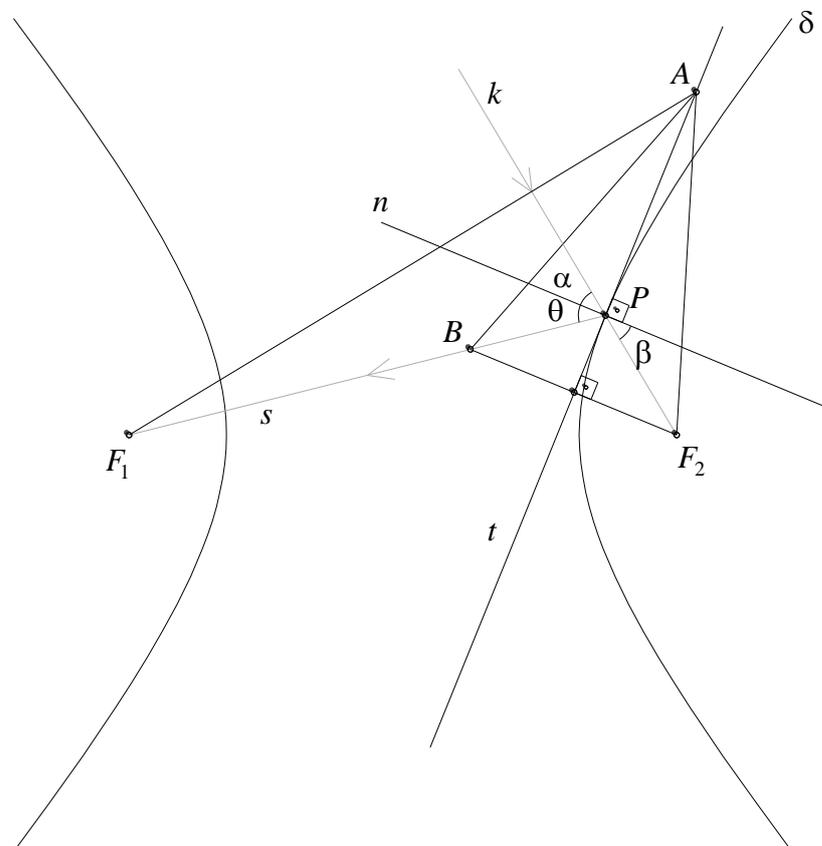


Figura 5.1 - Desigualdade triangular na hipérbole δ .

Primeiramente vamos mostrar que t é tangente à hipérbole δ no ponto P .

Para isso, tomemos o ponto $A \in t$. Pela desigualdade triangular em ABF_1 , temos $\overline{AF_1} < \overline{AB} + \overline{BF_1} \Rightarrow \overline{AF_1} - \overline{AF_2} < \overline{AB} + \overline{BF_1} - \overline{AF_2}$. Mas, como t é mediatriz de $\overline{BF_2}$, temos que $\overline{AB} = \overline{AF_2}$. Com isso, $\overline{AF_1} - \overline{AF_2} < \overline{AB} + \overline{BF_1} - \overline{AB} \Rightarrow \overline{AF_1} - \overline{AF_2} < \overline{BF_1}$ (III).

Observe agora que $\overline{BF_1} = \overline{PF_1} - \overline{PB} = \overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ (IV). Pela definição da hipérbole temos que $\overline{F_1P} - \overline{PF_2} = 2a$. Juntando (III) e (IV), concluímos que $\overline{AF_1} - \overline{AF_2} < 2a$. Assim, $A \notin \delta, \forall A \in t$ com $A \neq P$. Portanto, t é tangente à hipérbole δ no ponto P .

Agora vamos mostrar que os ângulos de incidência e de reflexão α e θ possuem medidas iguais.

Para isso, observe que o triângulo PBF_2 é isósceles de base $\overline{BF_2}$. Tomemos também a reta normal n que passa por P . Como t é mediatriz de $\overline{BF_2}$ passando por P , também será bissetriz do ângulo $\angle BPF_2$, o que implica que $\beta = \theta$. Como $\alpha = \beta$ (o.p.v.), concluímos que $\alpha = \theta$.

3.6. Problema 5: Minimização na hipérbole

Considere uma hipérbole de focos F_1 e F_2 . Dado um ponto C na região côncava do plano determinada pela hipérbole, encontre o ponto P (pertencente ao ramo da hipérbole mais próximo de F_2) que minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF_1}|$.

Resolução: Pela propriedade reflexiva da hipérbole podemos garantir que um feixe que passa por C em direção ao foco F_2 , refletirá na hipérbole em direção ao foco F_1 . Pelo princípio de Fermat, o ponto de reflexão na hipérbole é o nosso provável ponto de minimização de $|\overline{CP}| + |\overline{PF_1}|$.

Considere a hipérbole δ com focos F_1 e F_2 . Tomemos P como o ponto de intersecção da semirreta $\overline{CF_2}$ com o ramo da hipérbole mais próximo de F_2 .

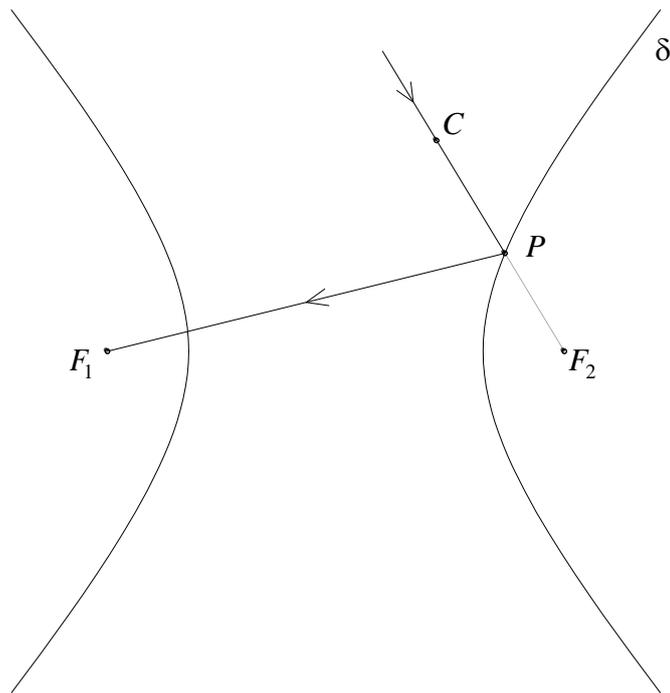


Figura 5.2 - Reflexão na hipérbole δ .

Agora vamos verificar se P minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF_1}|$.

Considere um ponto $P' \in \delta$, com P' diferente de P .

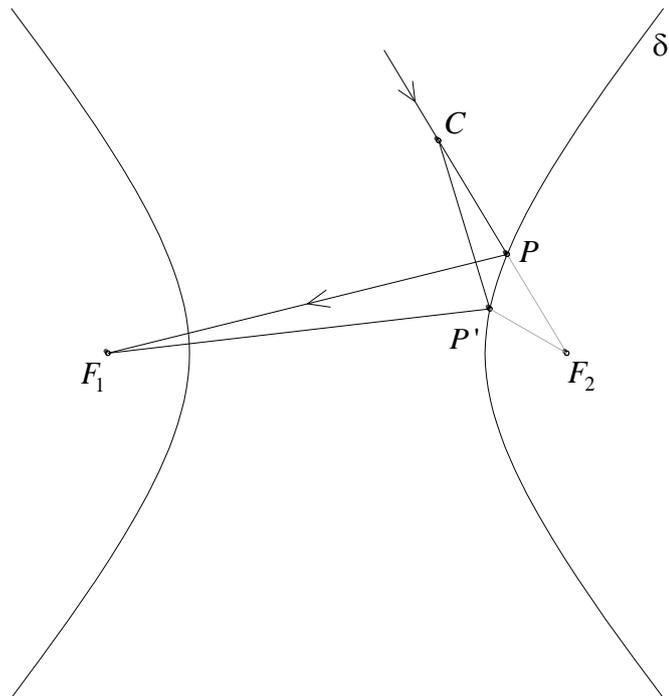


Figura 5.3 - Desigualdade triangular para o ponto P' .

Pela definição da hipérbole temos:

$$(V) \overline{F_1P} - \overline{PF_2} = 2a \quad \therefore \overline{PF_2} = \overline{F_1P} - 2a$$

$$(VI) \overline{F_1P'} - \overline{P'F_2} = 2a \quad \therefore \overline{P'F_2} = \overline{F_1P'} - 2a$$

Pela desigualdade triangular em F_2CP' temos que $\overline{CP} + \overline{PF_2} < \overline{CP'} + \overline{P'F_2}$. (VII)

Substituindo V e VI em VII, temos:

$$\overline{CP} + \overline{PF_1} - 2a < \overline{CP'} + \overline{P'F_1} - 2a$$

$$\Rightarrow \overline{CP} + \overline{PF_1} < \overline{CP'} + \overline{P'F_1}$$

Logo, o ponto P minimiza $|\overline{CP}| + |\overline{PF_1}|$.

Principal referência do tópico:

AKOPYAN, Arseny V.; ZASLAVSKY, Alexey. A.; *Geometry of Conics*. USA: AMS, 2007. (Mathematical World, v. 26).

4. PROBLEMA DE HERON

Problema de Heron usando círculo:

Dados dois pontos A e B fora de uma circunferência λ , encontre o caminho mais curto que começa em A , toca na circunferência e termina em B .

Solução: Tomemos dois pontos A e B externos a uma circunferência λ . Considere que um raio de luz parte do ponto A , toca a circunferência λ no ponto P e em seguida termina sua trajetória no ponto B . Pelo princípio de Fermat, o ponto de reflexão na circunferência é o nosso provável ponto de minimização de $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$.

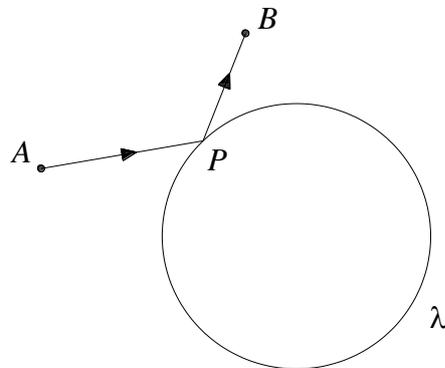


Figura 6.1 - Trajetória de A para B .

Tomemos agora um ponto $X \in \lambda$. O conjunto dos pontos P do plano que atendem a condição $\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{XA} + \overline{XB}$ é uma elipse δ com focos em A e B e tal que $X \in \delta$.

De forma geral, chamemos de δ_d a elipse de focos A e B que atende a condição $\overline{PA} + \overline{PB} = d$. Assim, essa elipse δ_d tem a característica de ser um subconjunto do interior de $\delta_{d'}$ se e somente se $d < d'$. Veja a figura 6.2.

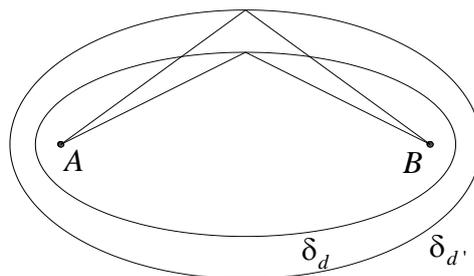


Figura 6.2 - Elipse δ_d subconjunto do interior de $\delta_{d'}$.

Tomemos agora um ponto $Q \in \lambda$, de tal forma que $\overline{QA} + \overline{QB} = d_Q$ seja mínimo. Então Q pertencerá a elipse δ_Q de focos A e B . Se esse ponto Q existir, ele será o ponto P citado no começo da resolução, pois atenderá ao princípio de Fermat.

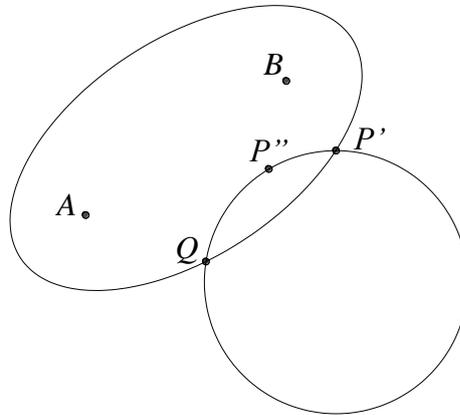


Figura 6.3 - Intersecção da elipse com a circunferência.

Como queremos minimizar d_Q , δ_Q só poderá tocar λ em um ponto.

De fato, se tomarmos P' outro ponto pertencente a δ_Q e λ , então cada ponto P'' pertencente ao arco $\widehat{QP'}$ estaria no interior de δ_Q (veja figura 6.3). Com isso podemos concluir que $\overline{P''A} + \overline{P''B} < \overline{QA} + \overline{QB}$. Portanto, Q não seria o ponto que minimiza. Contradição. Assim, $Q \in \delta_Q$ minimiza $\overline{QA} + \overline{QB} = d_Q$ quando δ_Q for tangente a λ .

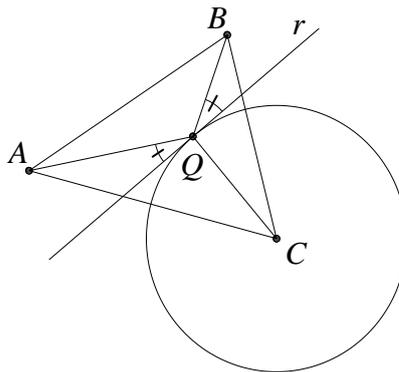


Figura 6.4 - Heron usando círculo.

A reta r que passa pelo ponto Q e é tangente à δ_Q e λ , é perpendicular ao raio \overline{CQ} , onde C é o centro de λ . Pelo princípio da reflexão na elipse temos que \overline{CQ} é bissetriz do ângulo $\angle AQB$. Logo $\angle CQB \equiv \angle CQA$. Com isso concluímos que o ponto Q é o ponto P citado no início pelo princípio de Fermat.

Principais referências do tópico:

MANFRINO, Radmila B.; Ortega, José Antonio G.; DELGADO, Rogelio V.; *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Berlin: Birkhäuser, 2009.

SANTOS, Ednaldo S. dos; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. UFPB 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38881

5. PROBLEMA DE FERMAT-STEINER

Problema de Fermat-Steiner:

Dados três pontos A , B e C não colineares, encontre o ponto P , no interior ou nos lados do triângulo ABC , de modo que a soma das distâncias de P aos vértices do triângulo seja mínima.

Demonstração: Podemos primeiramente considerar duas possíveis situações:

Caso 1) O ponto P coincide com um dos vértices do triângulo ABC ;

Caso 2) O ponto P é interno ao triângulo ABC .

Caso 1:

Sem perda de generalidade, suponha que o ponto P coincide com o vértice A .

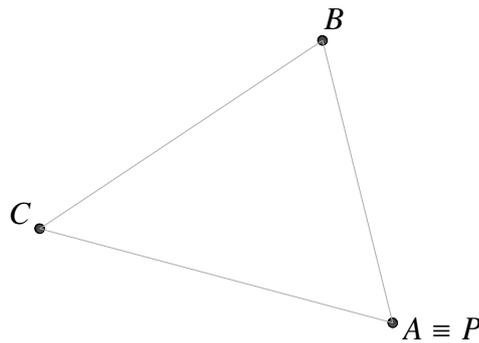


Figura 6.5 - P coincide com o vértice A .

Queremos encontrar o valor mínimo para a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

Como P coincide com A , então $\overline{PA} = 0$, $PA = 0$, o que resulta $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PB} + \overline{PC}$. Nesse caso, para garantir que $\overline{PB} + \overline{PC}$ tenha soma mínima, A tem que ser o vértice oposto ao maior lado do triângulo ABC .

Logo, quando P coincide com um dos vértices, para que se tenha a soma mínima de $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$, P precisa estar no vértice oposto ao maior lado de ABC .

Caso 2:

Tomemos agora uma circunferência λ centrada em A em um dos vértices do triângulo ABC , por exemplo, em A . Considere o ponto P pertencente à circunferência λ .

Observemos primeiramente uma circunferência de raio maior ou igual que \overline{AB} . Observe a figura 6.6.

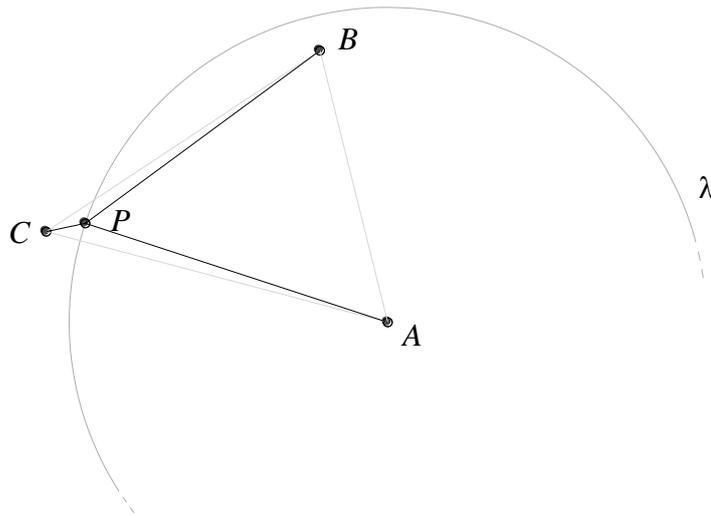


Figura 6.6 - Raio maior ou igual que \overline{AB} .

De fato, como B está interno à circunferência, $\overline{PA} \geq \overline{AB}$, pois \overline{PA} é raio de λ . Pela desigualdade triangular em BPC , temos que $\overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{BC}$. Assim, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{AB} + \overline{BC}$, tornando o ponto B mais adequado para minimizar do que P (caso 1).

Por analogia, o mesmo acontece caso tomemos um raio para λ maior que \overline{AC} .

Tomemos então a circunferência λ de tal forma que B e C fiquem externos a ela.

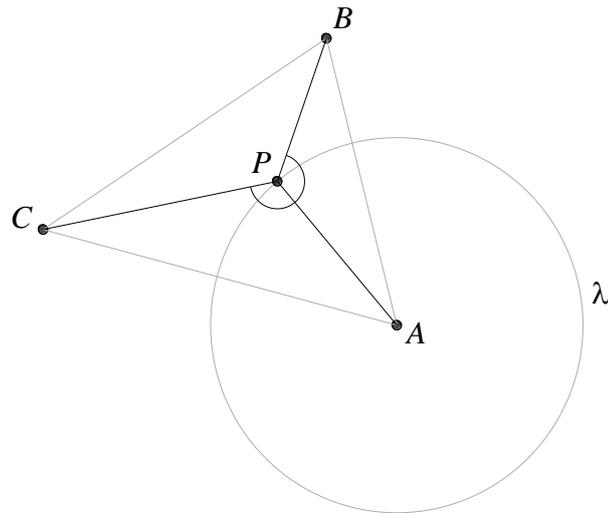


Figura 6.7 - B e C ficam externos à circunferência λ .

Pelo problema de Heron no círculo, demonstrado anteriormente, para minimizar $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$, P tem que ser o ponto de tangência entre a circunferência centrada em A e uma elipse de focos B e C . Com isso, também encontramos anteriormente que, $\angle APB \equiv \angle APC$.

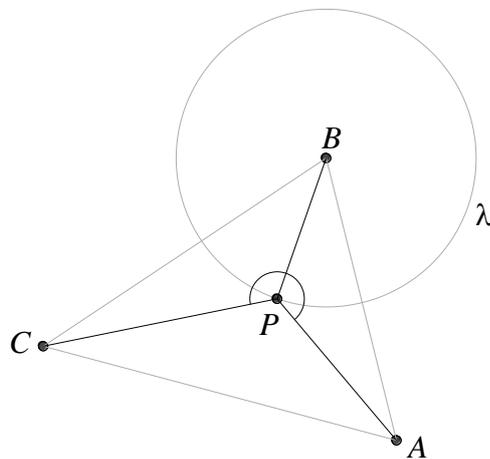


Figura 6.8 - Fermat-Steiner.

Trocando os papéis de A , B e C , sem perda de generalidade, se centrarmos agora a circunferência λ em B , com as mesmas características anteriores (Figura 6.8), P satisfaz $\angle APB \equiv \angle BPC$. Logo $\angle APB \equiv \angle APC \equiv \angle BPC = 120^\circ$.

Principais referências do tópico:

MANFRINO, Radmila B.; Ortega, José Antonio G.; DELGADO, Rogelio V.; *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Berlin: Birkhäuser, 2009.

SANTOS, Ednaldo S. dos; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. UFPB 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38881

6. MINIMIZAÇÃO EM MEIOS DIFERENTES: LEI DE SNELL

São dados no plano uma reta r e dois pontos, digamos A e B , em lados opostos de r . Encontre o ponto P sobre r que minimiza $n_A \cdot |\overline{AP}| + n_B \cdot |\overline{PB}|$, com n_A e n_B constantes reais, $n_A \geq 1$ e $n_B \geq 1$.

Resolução: Tomemos uma reta r que divide o plano em dois semiplanos, meio A e meio B , de tal forma que as velocidades de propagação da luz nesses semiplanos sejam diferentes. Sejam também dois pontos A e B localizados nos respectivos semiplanos.

Consideremos então um raio de luz que parte do ponto A em direção ao ponto B . Nomearemos de P o ponto de intersecção da trajetória do raio de luz com a reta r .

Pelo princípio de Fermat, a luz se propaga entre dois pontos no menor tempo possível, mesmo existindo velocidades diferentes entre os semiplanos.

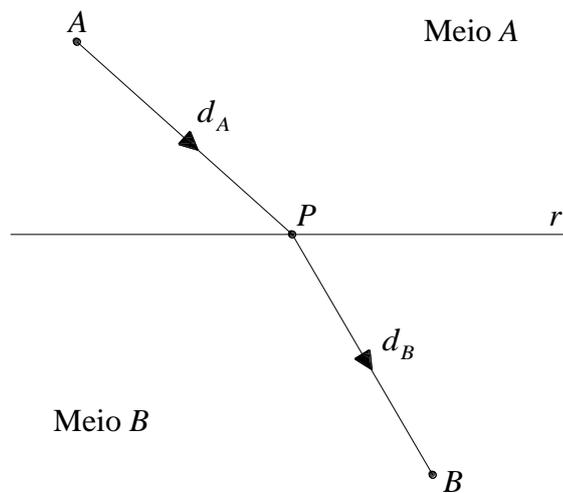


Figura 7.1 - Desvio do meio A para o B.

Sejam t_1 e t_2 os tempos gastos para percorrer as distâncias $d_A = \overline{AP}$ e $d_B = \overline{PB}$, respectivamente. O tempo total t para que a luz chegue em B será a soma dos tempos gastos em cada meio. Logo,

$$t = t_1 + t_2 \text{ (VIII).}$$

Como as velocidades em cada meio são constantes temos $v = \frac{d}{t}$. Substituindo em

(VIII), temos $t = \frac{d_A}{v_1} + \frac{d_B}{v_2} = \frac{1}{v_1}d_A + \frac{1}{v_2}d_B$ e, como v_1 e v_2 são constantes, podemos

escrever

$$t = n_A d_A + n_B d_B \text{ (IX),}$$

com n_A e n_B constantes positivas (índices de refração dos meios).

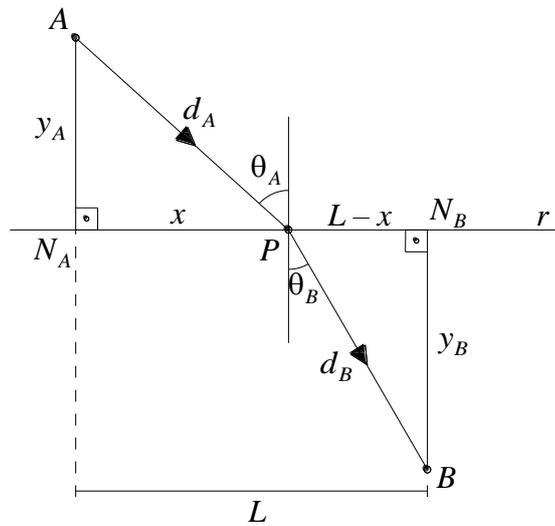


Figura 7.2 - Refração de A para B.

Observando na figura 7.2. os triângulos APN_A e BPN_B , podemos concluir facilmente (utilizando o Teorema de Pitágoras) que $d_A = \sqrt{(y_A)^2 + x^2}$ e $d_B = \sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}$.

Substituindo essas expressões em (IX), podemos expressar o tempo t em função do segmento x , visto que y_A , y_B , L , n_A e n_B são constantes. Logo,

$$\begin{aligned} t(x) &= n_A \sqrt{(y_A)^2 + x^2} + n_B \sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2} \\ &= n_A \left((y_A)^2 + x^2 \right)^{1/2} + n_B \left((y_B)^2 + (L - x)^2 \right)^{1/2} \text{ (X)} \end{aligned}$$

Agora queremos fazer com que esse tempo t seja mínimo. Como $t(x)$ representa uma função real e contínua no intervalo $[0, L]$, tal função atingirá um valor mínimo e esse ponto será um ponto crítico da função em $(0, L)$ ou uma extremidade do intervalo $[0, L]$. Para

encontrarmos o ponto crítico faremos a derivada de $t(x)$ ser nula. Assim, derivando (X) temos, pela regra da cadeia,

$$t'(x) = n_A \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} \left((y_A)^2 + x^2 \right)^{-1/2} + n_B \cdot (-2L + 2x) \cdot \frac{1}{2} \left((y_B)^2 + (L - x)^2 \right)^{-1/2}$$

Assim, num ponto x onde a derivada é nula deve-se ter

$$n_A \cdot \frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} + n_B \cdot \frac{(-L + x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} = 0, \text{ ou seja}$$

$$n_A \cdot \frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} = n_B \cdot \frac{(L - x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} \quad (\text{XI})$$

Observando novamente na figura 7.2. os triângulos APN_A e BPN_B , temos que

$$\frac{x}{\sqrt{(y_A)^2 + x^2}} = \text{sen } \theta_A \text{ e } \frac{(L - x)}{\sqrt{(y_B)^2 + (L - x)^2}} = \text{sen } \theta_B. \text{ Assim, substituindo em (XI), temos}$$

$$n_A \cdot \text{sen } \theta_A = n_B \cdot \text{sen } \theta_B.$$

Concluimos então que P que minimiza $n_A \cdot |AP| + n_B \cdot |PB|$ é o ponto que atende a condição $n_A \cdot \text{sen } \theta_A = n_B \cdot \text{sen } \theta_B$, onde θ_A e θ_B são, respectivamente, os ângulos de incidência e de refração nos meios de índices n_A e n_B . Na física, essa proporção é chamada de Lei de Snell.

Observe que consideramos o ponto P entre N_A e N_B . Vejamos o que aconteceria caso tomássemos o ponto P a direita de N_B :

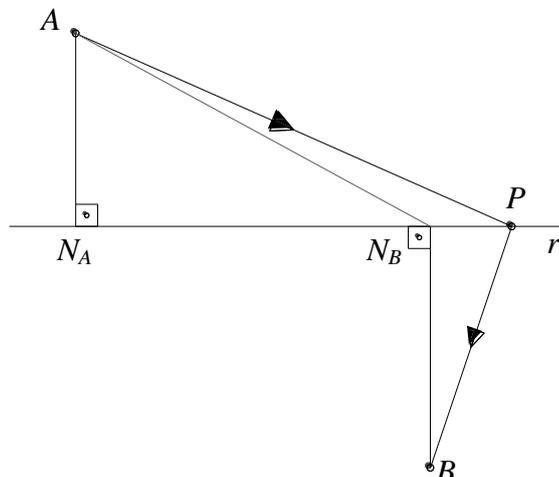


Figura 7.3 - P à direita de N_B .

Note que $\overline{AP} > \overline{AN_B}$ e $\overline{PB} > \overline{N_B B}$, o que implica em $\overline{AP} + \overline{PB} > \overline{AN_B} + \overline{N_B B}$. Logo P não pode estar à direita de N_B . De forma análoga P não poderá estar à esquerda de N_A .

Principal referência do tópico:

GUZMÁN, Miguel de; *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991. (O Prazer da Matemática).

7. A CICLÓIDE

Dentro do estudo das curvas na história da Matemática podemos destacar uma que teve grande importância: a cicloide. Ela foi estudada por vários matemáticos e cientistas, destacando-se Galileu Galilei, Roberval, Torricelli, Huygens, Fermat, Johan Bernoulli e Jakob Bernoulli, em vários períodos diferentes da história. Teve grande aplicação na Física e na Mecânica, sendo portadora de diversas propriedades importantes. Duas delas são:

- Tautócrona: Independentemente do ponto inicial de um determinado objeto, este sempre levará o mesmo tempo para chegar ao ponto mais baixo;
- Braquistócrona: Significa ser a curva de descida mais rápida entre dois pontos de alturas diferentes em verticais distintas.

Mas afinal, como é uma cicloide? Como construir essa curva?

Considere uma circunferência de raio r sobre uma reta horizontal. Marcamos agora o ponto mais baixo que pertence à circunferência. Chamaremos esse ponto de P . Quando colocamos a circunferência para girar sobre a reta (sem escorregar), a trajetória seguida pelo ponto P assemelha-se a um arco. Essa curva é chamada cicloide. Observe a figura 8.1:

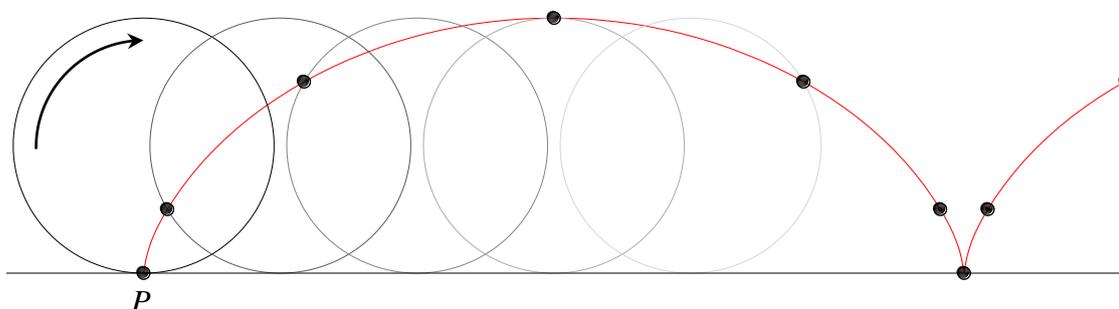


Figura 8.1 - Construção da cicloide.

Vamos encontrar agora uma equação que modele a cicloide em um plano de coordenadas cartesianas.

Equação Paramétrica da Cicloide:

Primeiramente consideremos um par de eixos ortogonais de tal forma que a circunferência de raio r seja tangente ao eixo x , e que seu centro C esteja no eixo y . Localizemos o ponto P , que escreverá a cicloide, na origem do sistema. Colocamos a

circunferência para girar um pouco e localizemos a posição do ponto P , chamado agora de P' e o novo centro C' . Observe a figura 8.2:

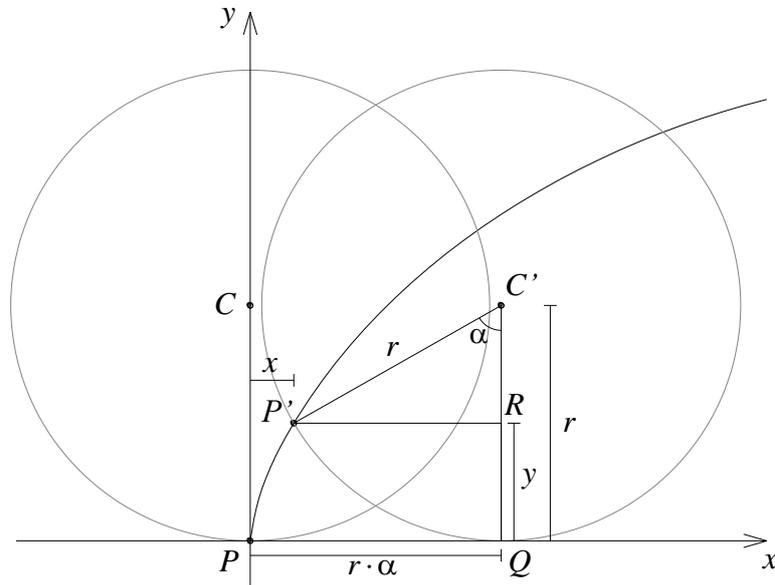


Figura 8.2 - Equação paramétrica da cicloide.

Observe que pela rotação da circunferência podemos perceber que o arco $\widehat{P'Q}$ tem o mesmo comprimento do segmento \overline{PQ} . Se chamarmos o ângulo $\angle QC'P'$ de α , em radianos, temos que $\overline{PQ} = \widehat{P'Q} = r \cdot \alpha$.

Analisando as coordenadas (x, y) do ponto P' no plano temos que:

$$\begin{aligned} x &= \overline{PQ} - \overline{P'R} = r \cdot \alpha - r \cdot \text{sen } \alpha \\ y &= \overline{RQ} = \overline{C'Q} - \overline{C'R} = r - r \cdot \text{cos } \alpha \end{aligned}$$

Logo, a equação paramétrica (com parâmetro α) da cicloide é representada por:

$$\begin{cases} x = r \cdot \alpha - r \cdot \text{sen } \alpha \\ y = r - r \cdot \text{cos } \alpha \end{cases}$$

Principais referências do tópico:

GUZMÁN, Miguel de; *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991. (O Prazer da Matemática).

CORDEIRO, Ana Carolina F.; *O que é a Curva Cicloide: Ideias Centrais no Ensino da Matemática*. IFSP 2013. Disponível em:

http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7464/mod_resource/content/0/TCC_Ana%20Cordeiro.pdf

BOYER, Carl B.; *História da Matemática*. 2ª Ed, São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

8. PROBLEMA DE JOHANN BERNOULLI

São dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ no plano xy , com $y_A > y_B$ e $x_A \neq x_B$. Suponha que o plano xy está sujeito a um campo gravitacional vertical. Queremos construir uma curva de A até B de modo que se soltarmos uma partícula em A , ela chegará em B no menor tempo possível. Determine esta curva.

Resolução: Primeiramente, não importa por onde a partícula desça, quando ela tiver descido h , sua velocidade v , pela queda livre dos corpos, será $\sqrt{2gh}$.

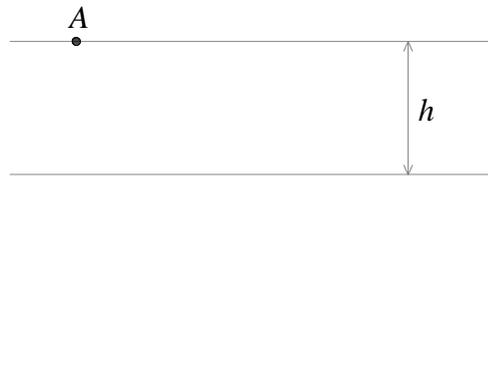


Figura 8.3 - Queda livre.

Pelo princípio de Fermat, a luz viaja de um ponto para outro no menor tempo possível. Sabemos ainda que a luz possui velocidade diferente conforme o meio que se propaga, isso é chamado de refração.

Pela Lei de Snell temos que se a luz propaga-se de um meio 1 para um meio 2, ela sofre um desvio segundo a razão $n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \Rightarrow \frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2} = k$, sendo n_1 e n_2 os índices de refração; θ_1 e θ_2 os ângulos de refração; v_1 e v_2 as velocidades da luz, respectivamente nos meios 1 e 2, e k uma constante.

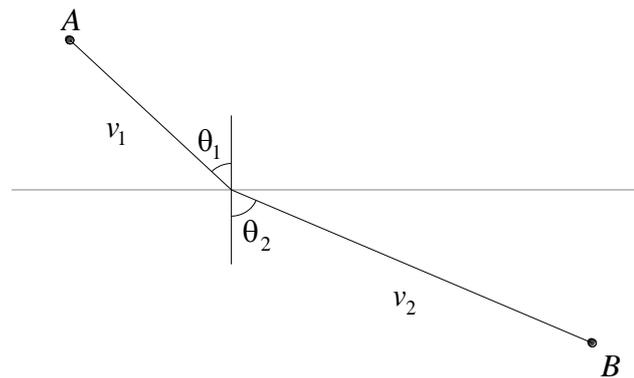


Figura 8.4 - Refração de A para B.

Agora imaginemos uma laminação l horizontal de vários meios ópticos entre os pontos A e B, de tal forma que a luz siga propagando-se com velocidades $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$ (veja figura 8.5).

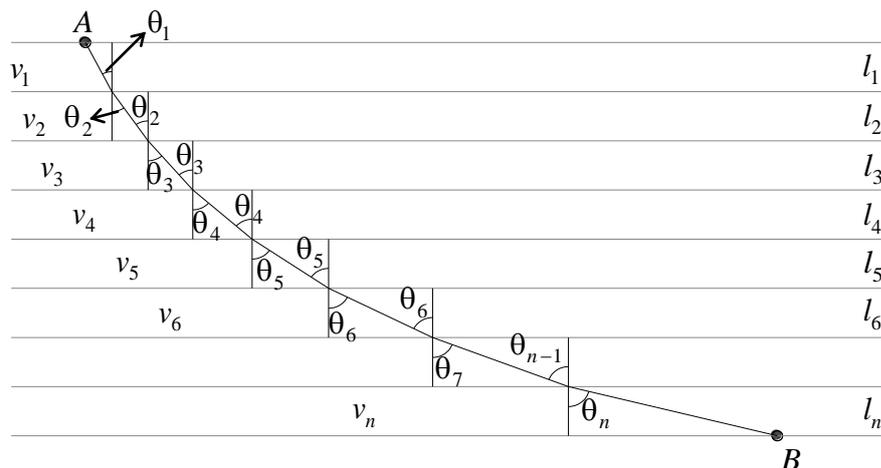


Figura 8.5 - Laminação de A para B.

O caminho percorrido pela luz nessa situação seria de tempo mínimo, de modo que

$$\frac{\text{sen } \theta_x}{v_x} = k .$$

Como inicialmente, pela queda livre, já sabemos que $v = \sqrt{2gh}$, temos que o caminho percorrido será tal que $\frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{2gh}} = k$, sendo θ o ângulo que a trajetória forma com a vertical.

Observe a figura 8.6:

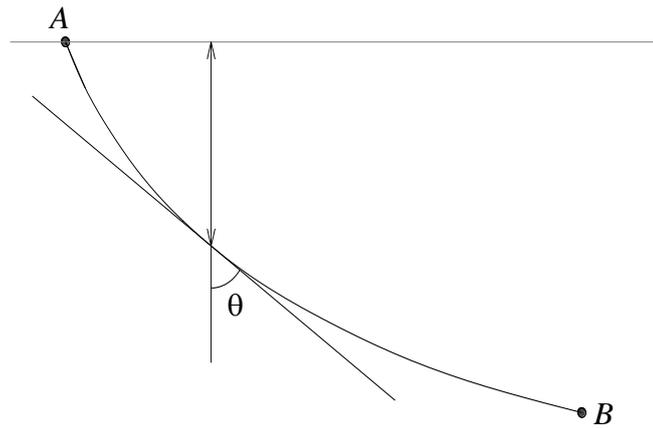


Figura 8.6 - Ângulo θ com a trajetória.

Agora vamos analisar se essa curva é a ciclóide.

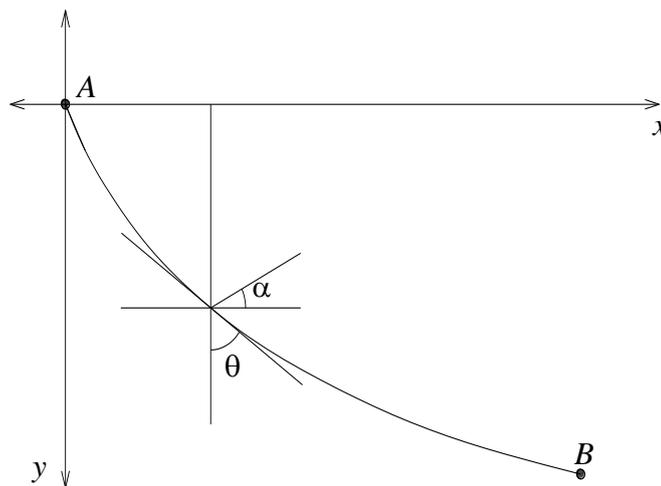


Figura 8.7 - Curva no plano.

Vimos anteriormente que a ciclóide possui equação paramétrica dada por:

$$\begin{cases} x = r \cdot \alpha - r \cdot \text{sen } \alpha \\ y = r - r \cdot \text{cos } \alpha \end{cases}$$

Como estamos trabalhando com o eixo vertical invertido, temos então:

$$\begin{cases} x = r \cdot \alpha - r \cdot \text{sen } \alpha \\ y = r \cdot \text{cos } \alpha - r \end{cases}$$

Derivando, podemos representá-la da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\alpha} = r - r \cdot \cos \alpha \\ \frac{dy}{d\alpha} = -r \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{r(1 - \cos \alpha)}{-r \cdot \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{-\sin \alpha}.$$

Como a derivada representa a inclinação da reta tangente à curva, podemos escrever

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{dx}{dy} = \frac{1 - \cos \alpha}{-\sin \alpha} \\ &= -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= -\sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} \\ &= -\sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} \\ &= -\sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}} \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ &= -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ assim } \theta = \left| \frac{\alpha}{2} \right|. \end{aligned}$$

Observe também que $v = \sqrt{2gh}$ e $h = -y$ implicam $h = r - r \cdot \cos \alpha$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g(r - r \cdot \cos \alpha)} \\ &= \sqrt{2gr(1 - \cos \alpha)} \\ &= \sqrt{2gr} \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ &= 2\sqrt{gr} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\text{sen } \theta}{v} = \frac{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{gr} \cdot \text{sen } \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}},$$

que representa uma constante independente de α e, portanto, a cicloide tem a propriedade que procuramos.

Principais referências do tópico:

GUZMÁN, Miguel de; *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991. (O Prazer da Matemática).

CORDEIRO, Ana Carolina F.; *O que é a Curva Cicloide: Ideias Centrais no Ensino da Matemática*. IFSP 2013. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7464/mod_resource/content/0/TCC_Ana%20Cordeiro.pdf

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos maiores desafios para um matemático é a resolução de problemas de alta complexibilidade. Não só o “resolver pelo resolver”, mas sim encontrar soluções que possam ser seguidas como referências. Utilizar estruturas de fácil compreensão para esses problemas, às vezes se torna mais complexo do que simplesmente encontrar respostas.

Nesse trabalho podemos ver um pouco dessa saga. Resolver problemas historicamente importantes tendo como base inicial um princípio de fácil compreensão e aceitação. O princípio de Fermat, apesar de básico, demonstra possuir uma relevante importância, tornando palpável para iniciantes a compreensão desses problemas.

Aprofundando um pouco mais o nosso conhecimento, nos deparamos com o estudo da curva Ciclóide, que nesse trabalho tivemos um pequeno contato, comparado à gama de propriedades que podemos encontrar. Uma curva que possui vasta aplicação e estudo extremamente interessante não deve ser esquecida pelo leitor. Proponho com esse trabalho a ampliação do estudo do princípio de Fermat e da Ciclóide.

Eis porque aceitei esse trabalho. Tornar a matemática mais simples é um desafio constante para todos os estudiosos da área. Mostrar que, sim, matemática foi feita para todos, é um grande caminho a ser percorrido.

REFERÊNCIAS

GUZMÁN, Miguel de; *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991. (O Prazer da Matemática).

AKOPYAN, Arseny V.; ZASLAVSKY, Alexey. A.; *Geometry of Conics*. USA: AMS, 2007. (Mathematical World, v. 26).

MANFRINO, Radmila B.; Ortega, José Antonio G.; DELGADO, Rogelio V.; *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Berlin: Birkhäuser, 2009.

SANTOS, Ednaldo S. dos; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. UFPB 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38881

MARTINS, Cesar P.; *Tópicos de Geometria Analítica: Elipse*. UFG 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=39726

CORDEIRO, Ana Carolina F.; *O que é a Curva Cicloide: Ideias Centrais no Ensino da Matemática*. IFSP 2013. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7464/mod_resource/content/0/TCC_Ana%20Cordeiro.pdf

MAGALHÃES, Cícero T.; *Caminhos mínimos e desigualdades envolvendo elementos geométricos*. 2012. Disponível em: http://www.obm.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2012/caminhos_minimos.pdf

BOYER, Carl B.; *História da Matemática*. 2ª Ed, São Paulo: Edgar Blucher, 1996.