**Universidade de Brasília**

**Instituto de Ciências Exatas**

**Departamento de Matemática**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

# Proposta de aplicação no ensino de funções na educação básica

**Raul Maroja Ferreira**

Brasília

2017

**Raul Maroja Ferreira**

# Proposta de aplicação no ensino de funções na educação básica

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo

Brasília

2017

```
        Ferreira, Raul Maroja
F F383p    Proposta de aplicação no ensino de funções na edu-
        cação básica. / Raul Maroja Ferreira; orientador An-
        tônio Luiz de    Melo; co-orientador Rui  Seimetz. --
        Brasília, 2017.
           67 p.


           Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
        Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.


           1. História da Matemática.. 2. Contextualização Ma-
        temática.. 3. Funções afim e quadrática.. 4. Funções
        exponencial e logarítmica.. 5. Funções trigonométri-
        cas.. I. Melo, Antônio Luiz de ,orient.
        II. Seimetz, Rui ,co-orient. III. Título.
```

Ficha catalográfica elaborada automaticamente, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Proposta de aplicação no ensino médio de funções na educação básica

por

Raul Maroja Ferreira

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

## MESTRE

Brasília, 26 de julho de 2017.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Luiz de Melo– MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. José Eduardo Castilho– MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Sinval Braga de Freitas – SEEDF (Membro)

# Dedicatória

Dedico este trabalho a minha avó, pessoa com a qual pude aprender muito enquanto estive em sua presença. Minha história de vida teria sido completamente diferente não fossem seus ensinamentos.

*"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.*

**Nikolai Lobachevsky**

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha namorada, uma pessoa que sempre acreditou no meu potencial, e que nos momentos mais difíceis demonstrou uma força incrível para me ajudar.

A minha família, que sempre me amparou quando precisei e também me apoiou quando foi preciso.

Às amizades que fiz e às amizades que fortaleci ao longo desses dois anos e meio de PROFMAT; uma turma única com um espírito de cooperação incrível.

Aos meus amigos que não são do curso, foram sempre compreensivos e entenderam as minhas ausências para me dedicar ao mestrado.

Agradeço a toda equipe docente participante do PROFMAT, em especial ao meu orientador, Antônio Luiz de Melo, um ser humano incrível que, afora seu conhecimento acadêmico, demonstrou paciência ímpar para me orientar nesta dissertação. Não fosse ele provavelmente eu não teria concluído.

Por fim, agradeço aos meus alunos, principal fonte de motivação para o meu ingresso no PROFMAT. A escolha do tema também foi fruto do meu convívio em sala com eles.

# Resumo

O ensino de matemática passa por um momento importante de reflexão. Ao passo em que a sociedade e as relações humanas mudam ainda é muito comum perceber que alguns professores de matemática trabalham os conteúdos de forma tradicional. Essa rotina acaba cansando o aluno e faz com que perca o interesse em aprender Matemática. O debate em Educação Matemática é relativamente recente, mas ganha cada vez mais destaque no contexto atual. É necessário se pensar novas práticas para atrair o interesse do estudante do século XXI. As propostas do presente trabalho são: 1. Fornecer subsídios para o professor de matemática na abordagem de alguns conteúdos relacionados ao estudo de funções, seguindo duas propostas amplamente debatidas em Educação Matemática – a História da Matemática e a contextualização do ensino. 2. Fomentar a reflexão sobre as práticas pedagógicas atuais com o amparo da literatura a respeito do tema. 3. Influenciar positivamente o ensino de matemática na educação básica por meio de práticas desafiadoras.

**Palavras-chave:** Educação Matemática, estudo de funções, História da Matemática, contextualização.

# Abstract

Mathematics Teaching is under an important moment of reflection. Meanwhile society and human relations change, it is still very common to realize that Mathematics teachers still work contents in a traditional way. That routine ends up boring students and making them lose interest in learning Mathematics. The debate around Mathematics Education is relatively new, however there is a growing interest around the topic, and it is, then, necessary to think new ways of catching the interest of the student in the XXI century. The proposals of this article are: 1. Provide subsidies for the Mathematics teacher in the way they approach some contents, following two proposals widely discussed in Mathematics Teaching - the history of Mathematics and the contextualization of teaching. 2. Foment the discussion of current pedagogical practices with support of literature related to the topic. 3. Positively influence Mathematics Teaching in primary education through challenging practices.

**Keywords:** Mathematics Education, history of Mathematics, contextualization.

# Lista de Figuras

# Conteúdo

# INTRODUÇÃO

É cada vez mais comum de se ouvir, em um ambiente escolar, professores reclamando do comportamento e da disciplina de seus alunos. Reclamações como: "Essa geração de agora é muito ruim". Será que de fato isso ocorre?

A afirmação acima, dita por muitos professores, pode não ser o diagnóstico mais apurado para se compreender os desafios atuais por que passa um professor para lecionar nos dias de hoje. Para entender bem as mudanças ocorridas no processo de ensino-aprendizagem é necessário perceber que quase todas as relações e processos de trabalho mudaram ao longo das últimas décadas.

Várias profissões receberam, e vem recebendo, mudanças significativas em sua forma de trabalho. Não obstante, muitas profissões novas ainda surgem, e outras tantas deixam de existir. Alheio a todas essas mudanças, o processo de ensino, em muitos lugares, ainda é trabalhado de forma ultrapassada.

Para mudar essa concepção antiga, em primeiro lugar, as ações devem mudar. Os alunos de hoje têm uma expectativa de aula diferente da que os professores têm, e, para o processo de ensino funcionar, é necessário que essas expectativas se coadunem.

Portanto, o docente deve repensar suas práticas, de forma a preparar aulas que despertem o interesse do discente.

### O objetivo do trabalho

O objetivo do trabalho é apresentar sugestões de abordagens sobre funções – um assunto relevante e que apresenta muitas aplicações – no ensino fundamental e médio. Grande parte das aplicações de funções são associadas a conceitos da Física, possivelmente porque grande parte da teoria de funções foi desenvolvida por necessidades da própria física.

A dissertação apresenta propostas de abordagem para as principais funções trabalhadas na educação básica, seguindo sempre uma sequência:

1. História da Matemática – busca mostrar ao aluno como se deu a construção histórica de certos conceitos matemáticos. Tal prática é importante para transmitir confiança ao aluno. O discente deve saber que os conceitos matemáticos nem sempre foram um corpo sólido e imutável, pelo contrário, passaram por transformações e construções ao longo dos séculos.

2. Contextualização – objetiva trazer o aluno para o pólo ativo da prática. A intenção é inserir o aluno em um contexto de resolução de problemas, ele deve se colocar na situação de quem irá resolver o problema proposto. Espera-se que o aluno se desenvolva gradativamente, uma vez que as propostas seguem uma construção lógica em termos de dificuldade.

O trabalho busca dois resultados trabalhando sobre essas concepções:

1. Um aluno mais participativo, que se sinta provocado a saber mais sobre certo assunto.

2. Um professor mais preparado, munido de certas práticas que o ajudam em sala de aula.

Os capítulos que se seguem estão estruturados da seguinte forma:

O primeiro capítulo fala do ensino de matemática e contextualização e traz um panorama histórico e atual do processo de ensino. A análise é feita com apoio da literatura atual a respeito do tema. Ademais, o capítulo traz à tona o assunto Educação Matemática e alguns temas debatidos dentro deste eixo.

O segundo capítulo conta a história sobre as funções, ou seja, mostra a construção histórica para se chegar a definição atual que temos sobre funções. Para tanto, são destacadas as principais contribuições ao longo da história para se chegar a este conceito.

O terceiro capítulo abordará as funções trabalhadas pelos professores no ensino fundamental. Importante destacar que essas funções – afim e quadrática – também são trabalhadas no ensino médio. As práticas não estão restritas a nenhuma série, cabe ao professor analisar se a prática é cabível dentro do seu contexto.

O último capítulo traz as funções trabalhadas no Ensino Médio. Cabe salientar que alguns desdobramentos das contextualizações recaem em resultados que serão apenas vistos no ensino superior. Neste caso, o trabalho visa apenas munir o professor de um conhecimento mais robusto, não sendo necessária a reprodução em sala de aula. Para enriquecer a aula, o professor pode comentar de forma superficial, apenas os resultados dessa teoria.

# CAPÍTULO 1

# ENSINO DE MATEMÁTICA E CONTEXTUALIZAÇÃO

## 1.1 O aluno do século XXI

"E quando eu vou usar isso na minha vida?", essa provavelmente é a pergunta mais ouvida pelos professores da educação básica. Muitas vezes o professor não está preparado e acaba dando ao aluno uma resposta que não satisfaz, desmotivando o aluno. Essa falta de motivação faz com que o aluno perca o interesse na aprendizagem em matemática.

De acordo com Druck(2003, p.1), ex-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática "a qualidade do ensino da Matemática atingiu, talvez, seu mais baixo nível na história educacional do país". Para refletir sobre a informação do autor é necessário observar o processo de transformação pelo qual o mundo passou nas últimas décadas. As relações humanas mudaram e a expectativa sobre o jovem a ser formado no colégio hoje também é diferente.

Quando se observa a educação – não só matemática – do século XX, percebe-se uma clara distinção na relação professor-aluno. Àquela época, não era incomum o professor exigir bastante disciplina e rigor do aluno em sala, sendo permitido inclusive alguns tipos de punições físicas mais severas, proibidas nos dias de hoje.

Especificamente, as aulas de matemática seguiam o mesmo roteiro, com o modelo que se convencionou chamar de tradicional: o professor apresenta uma aula expositiva ao aluno, transmitindo os conhecimentos que julga mais importantes. O aluno, por sua vez, copia o que o professor tem a passar e em seguida busca fazer exercícios, que nada mais são do que a repetição do que o professor acabara de fazer no quadro. Ao chegar em casa, espera-se que este aluno faça mais exercícios muito parecidos com os que foram feitos em sala. O professor repete o discurso de que quantos mais exercícios o aluno fizer, mais ele aprenderá.

Não obstante o modelo tradicional de aula, importante destacar que à época a matemática era vista como uma disciplina pronta e acabada, trabalhada com um excesso de formalismo, mesmo nas séries iniciais. O aluno, supervalorizando a matemática formal, perdia qualquer confiança em sua intuição matemática e acreditava que seu papel na aula de matemática era passivo e desinteressante. Nesse cenário, o ensino de matemática começou a apresentar falhas, ao invés de se apropriar do conhecimento, os estudantes estavam se tornando bons feitores de questões, não havia uma assimilação do conteúdo de fato. Pouco tempo após as provas, os conteúdos eram esquecidos.

Essa concepção de educação (matemática) do século passado era reflexo do que se almejava enquanto formação de alunos. Naquele período, desejava-se com o modelo tradicional formar um aluno inteligente, disciplinado e rigoroso.

Nas últimas décadas, o papel da educação passou por mudanças e a sociedade espera por uma formação diferente do "novo" estudante. Pode-se dizer que hoje a escola almeja mais a formação do que a informação do jovem. Essa é a demanda da sociedade do século XXI, formar bons cidadãos – também com competências acadêmicas –, e não somente pessoas com bom conhecimento técnico.

Essa nova demanda social fica bem evidente quando os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (1997, p. 30) também fazem uma reflexão a respeito do tema, como é possível ver em

> O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transferido para se tornarpossível de ser ensinado, aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não sãopassíveis de comunicação direta aos alunos. [...]. Esse processo de transformação do saber científicoem saber escolar não passa apenas por mudanças de naturezaepistemológica, mas é influenciadopor condições de ordem social, e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários,como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber.

Além do acima exposto, os PCN (1997, p.15) também fazem alguns apontamentos com relação a concepção tradicional de ensino

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverterum ensino centrado emprocedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Háurgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologia compatíveis com aformação que hoje a sociedade reclama.

Ademais, o perfil do estudante do século XXI também passou por transformações.Se antes o aluno aceitava ser o polo passivo do aprendizado, hoje as relações são diferentes. Com livre acesso à internet e às informações, o aluno não se contenta mais em aprender determinados assuntos simplesmente porque a escola ou o professor desejam, ou porque cairá na prova. Deve haver uma motivação melhor, e isso exige uma preparação melhor do professor.

Na contramão de todas essas transformações, não é raro encontrar professores que ainda utilizam o modelo tradicional de ensino na matemática – aula expositiva, exercícios e dever de casa – (me incluo nesse grupo).

## 1.2 Educação Matemática

Ante o cenário acima exposto, vários especialistas da área de educação passaram a discutir o tema. Especificamente na Matemática, o tema passou a ser muito debatido, principalmente nas décadas de 1960 e 1970, como reposta a deficiência que o modelo tradicional começava a apresentar. A reflexão a respeito da Educação Matemática expôs as fraquezas do modelo atual à época e, com isso, começaram a surgir diferentes propostas de abordagem dos assuntos matemáticos para sanar essas fraquezas.

Atualmente, a literatura acerca do tema é vasta e é possível encontrar uma série de trabalhos sobre o assunto. Importante destacar que a essência desses trabalhos apresenta uma perspectiva diferente do modelo tradicional. Enquanto nesse o aluno é polo passivo do processo de aprendizagem, naquele o aluno se torna protagonista do processo, o professor busca apenas mediar e orientar as experiências do aluno. Essa concepção atual recebe o nome de **teoria construtivista aplicada ao ensino** e sua intenção é permitir ao aluno uma apropriação verdadeira dos assuntos trabalhados naescola e não uma mera memorização.

Dentre as várias propostas de abordagem que vem sendo discutidas é possível destacar algumas. A resolução de problemas como proposta metodológica, a contextualização dos assuntos apresentados, a modelagem, o uso de computadores (linguagem LOGO e outros programas), a etnomatemática, a História da Matemática como motivação para o ensino de tópicos do currículo e o uso de jogos matemáticos no ensino são alguns exemplos de propostas de trabalho visando melhoria do ensino de matemática segundo uma perspectiva construtivista.

Neste contexto, o presente trabalho se propõe a explorar outras formas de aplicação do ensino de funções sobre dois eixos temáticos debatidos na Educação Matemática: a Contextualização dos assuntos abordados e a História da Matemática. Cabe frisar que o objetivo do trabalho não é esgotar o tema sobre os assuntos, tampouco apresentar um método infalível de ensino sobre funções, até porque o autor não acredita que tal método exista. Cada proposta terá a sua eficácia a depender do contexto em que é empregada.

## 1.3 Contextualização

Hoje, é senso comum que a contextualização é ferramenta importante para o ensino. No entanto, muitos pensam que contextualizar é encontrar aplicações práticas para a Matemática a qualquer custo. Deste pensamento errado, tem-se o resultado que se um determinado assunto não consegue ser contextualizado então ele não serve para ser ensinado.

É muito comum se referir ao termo contexto para se referir a uma situação específica. Num contexto educacional, entretanto, esse vocábulo não deve ser interpretado de maneira estrita. Em Matemática, a contextualização é bastante útil desde que abordada em sentido amplo. Cumpre destacar que nem todos os assuntos serão passíveis de contextualização e empregar essa técnica de maneira forçada e artificial pode trazer mais prejuízos do que benefícios ao processo de aprendizagem.

O Ministério da Educação (MEC) preconiza nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que a contextualização é um instrumento para mobilização de competências por parte do aluno. Espera-se que ele consiga solucionar problemas em certos contextos e mais, seja capaz de transferir esse aprendizado para outras situações, seja em um contexto pessoal ou produtivo.

> Em relação a todos esses significados convém destacar que é desejável que os problemas a serem trabalhados em sala de aula não sejam tratados separadamente. O que se recomenda é que os professores garantam que todos eles sejam explorados em situações mais ricas, contextualizadas, que possibilitem o desenvolvimento da interpretação, da análise, da descoberta, da verificação e da argumentação.

Para Fonseca (1995, p.1), a contextualização tem um papel de significação e transformação. Sem se afastar do conhecimento técnico, a Educação Matemática, neste caso, tem o papel de preparar o aluno para o contexto em que vive.

> As linhas de frente da Educação Matemática têm hoje um cuidado crescente com o aspecto sócio cultural da abordagem Matemática. Defendem a necessidade de contextualizar oconhecimento matemático a ser transmitido, buscar suas origens,acompanhar sua evolução,explicitar sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade do aluno. Éclaro que não se quer negar a importância da compreensão, nem tampouco desprezar a aquisição de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter navida social, nas opções, na produção e nos projetos de quem aprende.

D' Ambrósio (2001, p. 114 -115)apresenta ideia similar à de Fonseca em.

> Contextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado. (...). Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana... e assim justificam sua importância nos currículos.

Em resumo, a contextualização deve ser interpretada em sentido amplo. A contextualização correta de determinado assunto permitirá ao aluno a aplicação de um assunto específico em outras situações da sua realidade. Em outras palavras, contextualizar significa possibilitar ao aluno a faculdade de descontextualizar determinado conhecimento para ser novamente contextualizado em outra situação.

# CAPÍTULO 2

# A HISTÓRIA DAS FUNÇÕES

O conceito de função está presente nos mais diversos ramos da ciência, teve sua origem na antiguidade, quando cientistas e filósofos tentavam compreender a realidade e encontrar métodos e modelos que descrevessem fenômenos naturais. Segundo Caraça (1989), esta realidade apresenta duas características fundamentais: a interdependência, que faz com que todas as coisas estejam relacionadas umas com as outras e a fluência, que faz com que tudo no mundo esteja em permanente mudança.
"**Como estudar variações de quantidade num mundo constituído de partes que dependem umas das outras e que mudam a cada instante**? "

Ao contrário do que muitos pensam, o conceito de funções levou bastante tempo para ser aprimorado. Embora tenha sido explicitado apenas a partir do século XVIII, aparece em algumas ideias anteriores de forma implícita. Seu nascimento se deu quando os cientistas da época passaram a descrever os fenômenos de forma quantitativa, e não somente qualitativa.

Por volta de 1100 – quando os europeus entraram em contato com os povos do oriente através das viagens comerciais e das Cruzadas – os principais pensadores gregos tiveram suas ideias propagadas. Várias Universidades foram criadas e a abordagem acerca da ciência tomou nova forma.

A primeira ocorrência da noção intuitiva (informal) de função ocorreu na Universidade de

Paris. O Bispo Nicole Oresme (1323-1382), ao estudar o movimento uniformemente diforme (movimento com aceleração constante), representou em um gráfico (Figura 2.1) a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal que ele chamou de longitudes e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes, que ele denominou latitudes:

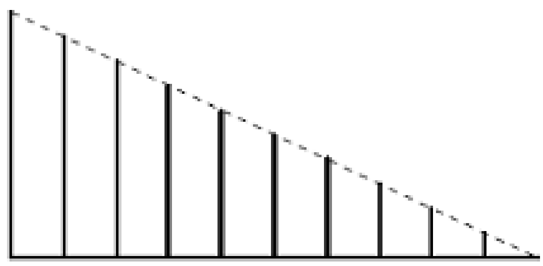

Figura 2.1: Representação gráfica do movimento uniformemente diforme
Fonte: Retirada de [3]

Por volta de 1600, foi a vez do cientista alemão Johannes Kepler (1571-1630) contribuir para o estudo das funções. A terceira Lei de Kepler afirma que *os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas*. A descrição quantitativa deste fenômeno físico expressa matematicamente a relação entre duas grandezas envolvidas, trazendo implicitamente em seu enunciado o conceito de relação. Além dele, o matemático François Viéte (1540-1603) é apontado como um dos responsáveis por ter diferenciado a Álgebra da Aritmética, fazendo uso de métodos mais gerais para analisar problemas.

Galileu Galilei (1564-1642), considerado o fundador da ciência moderna, ao questionar a física Aristotélica e a filosofia cristã foi perseguido. Teve que viver um período de sua vida em isolamento, período em que escreveu a obra *As duas novas ciências*. Nela enunciou a lei de queda dos corpos no vácuo: *o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço*. Assim como a lei de Kepler, essa lei traz em seu enunciado o conceito implícito de função.

Para se chegar a ideia intuitiva de função – relação entre grandezas que variam – se fez necessário primeiro a definição do que venha a ser uma variável, que se deu a partir da simbolização da álgebra. Os gregos e os hindus tiveram grande contribuição na introdução dos símbolos matemáticos, avançando também na resolução de equações indeterminadas. René Descartes (1596-1650) usou as primeiras letras do alfabeto para representar quantidades conhecidas e as últimas letras para representar quantidades desconhecidas, como é feito hoje.

Pierre de Fermat (1601-1665) – que teve grande contribuição no desenvolvimento de Teoria dos Números, teoria das equações, entre outros – conhecendo a representação algébrica simbólica utilizou um sistema de coordenadas e relacionou as duas variáveis que apareciam no final de uma equação a partir do seguinte princípio: "*Sempre que numa equação afinal encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva*". A relação entre incógnitas é estabelecida através de um lugar geométrico, isto é, o que conhecemos hoje como representação cartesiana de uma função, para Fermat era uma curva ou reta.

No século XVII, dois matemáticos se destacam, Sir Isaac Newton (1642-1727) e GottfriedWilhelm Leibniz (1646-1716), principalmente por suas contribuições em Cálculo. Newton, apesar de ter a Física como objeto de estudo, contribuiu para a ideia de função ao mostrar que qualquer "função" poderia ser descrita como uma série de potência, além disso, foi ele quem introduziu o termo "variável independente". Já Leibniz, foi responsável por introduzir os termos "constante", "variável" e "parâmetro".

Segundo Kline(1990) a definição mais explícita de função do século XVII foi dada por James Gregory, em 1667: "*uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável*". Essa outra *operação imaginável* era o cálculo do limite, que só seria esclarecida posteriormente.

Em 1700, Johann Bernoulli fez a publicação de um artigo com a definição de função, que acabou se popularizando entre os matemáticos: "*função de uma quantidade variável de uma quantidade composta de qualquer maneira a partir dessa variável e de quantidades constantes*".

Leonard Euler (1707-1793), na obra intitulada *Introdução à Análise Infinitesimal* define "*uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, por tal quantidade e por números ou quantidades constantes*". É ele quem introduz a notação $f(x)$ para representar uma função de $x$ (1734). Pode-se falar que o conceito de função não se originou com Euler, mas sem dúvida foi ele o responsável por tratar o cálculo como uma teoria formal de funções.

No século XVIII, o chamado problema da corda vibrante influencia a reformulação do conceito de função, pois a ideia de que uma função poderia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências era bem restrita na resolução de problemas de matemática aplicada do conceito como dependência funcional.

Ao final do século XVIII, os matemáticos perceberam a necessidade de formalizar o conceito de função.O assunto até ali vinha sendo tratado de maneira muito intuitiva e informal, havia bastante divergência conceitual nos trabalhos divulgados, era necessário uniformizar

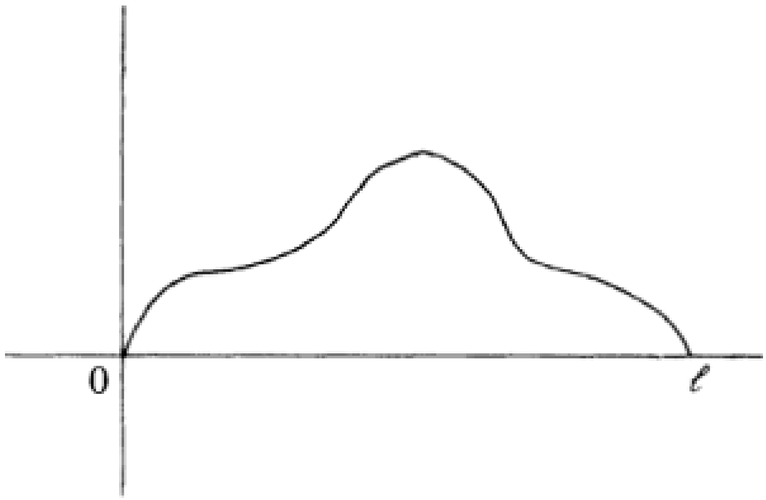


Figura 2.2: Problema da corda vibrante
Fonte: Retirada de [3]

a linguagem. Benhard Bolzano (1781-1848), considerado pioneiro nessa formalização, apresentou definições sobre funções contínuas e derivadas, além de relacionar a continuidade e a derivabilidade. O trabalho de Bolzano foi precursor para o estudo de outros matemáticos nessa área, como Cauchy, Cantor e Dedekind.

August Louis Cauchy (1789-1857) contribuiu para a formalização da Análise ao definir conceitos para continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de um função por meio de termos de limites. Em 1837, Peter Gustav LejeuneDirichlet (1805-1859), apresentou a Função de Dirichlet, função que não poderia ser escrita como uma série de Fourier:

$$D\left(x\right)=\begin{cases} 0, \; se\ x \text{ é } racional \\ 1, \; se\ x \text{ é } irracional \end{cases}$$

Os trabalhos de Dirichlet influenciaram dois matemáticos, Dedekind (1831-1916) e Riemann (1826-1866), que apresentaram o conceito a seguir para função: "*uma aplicação* $\varphi$ *de uma sistema S é uma lei, que associa a cada elemento s de S uma certa coisa, que é chamada imagem de se que escrevemos*$\varphi(s)$, *onde o domínio e o contradomínio podem ser qualquer conjunto, não somente números, mas de matrizes, vetores e mesmo de funções*" (BOYER, 1996)

A necessidade de maior rigor e formalismo na Análise Matemática no século XIX sugeriu que o conceito apresentado pelos dois últimos matemáticos ainda precisava ser refinado. A

Teoria dos Conjuntos, de Georg Cantor (1845-1918) sanou essa demanda. No século seguinte, a definição de Dirichlet, que havia sido aceita pela comunidade matemática, é reformulada pelo movimento Bourbaki (grupo de matemáticos – em sua maioria franceses – que assinou várias obras, uma espécie de sociedade anônima), utilizando conceitos da teoria de Cantor:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável s de $E$ e uma variável $y$ de $F$ é dita uma relação funcional de $E$ em $F$, se qualquer que seja $x \in E$ , existe somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a $x$ na relação considerada. Dá-se o nome de função a operação que desta associa a todo o elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a $x$ na relação dada; diz-se que $y$ é o valor da função para o elemento $x$, e que a função está determinada pela relação funcional e relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (Ruthing, 1984)

Percebe-se que o conceito de função passou por diversas mudanças e debates ao longo dos séculos.Apresentar essa história, mesmo que de maneira breve para o estudante, pode ser algo interessante. Como já exposto, hoje o estudante tem a ideia de que a matemática sempre foi uma ciência polida e acabada.Muitos alunos tem uma postura de medo diante da matéria, agem como se houvesse um manual ou mandamento matemático a ser seguido. Tal postura inibe a capacidade criativa do aluno e mina o seu aprendizado.

É necessário salientar que, a rigor, a definição de função é estabelecida por três elementos fundamentais: *domínio, contradomínio e lei de associação*. Isto é, uma função só fica bem definida se são conhecidos esses três elementos. Não muito raro, é possível encontrar em livros didáticos termos os quais fazem menção a função apenas por sua lei de associação – via de regra uma equação. O professor deve ter a sensibilidade neste momento. Abusos de linguagem, a depender do contexto, podem não ser tão graves quanto o uso excessivo da linguagem matemática formal. Não obstante, o uso abusivo deste tipo de linguagem pode levar à formação de concepções limitadas que dificultem ou mesmo impeçam o desenvolvimento futuro da aprendizagem matemática pelos alunos. Não há uma medida certa de informalização e formalização matemática, o professor deve analisar o contexto (faixa etária, nível socioeconômico, série, entre outros) para tomar a decisão mais acertada.

CAPÍTULO 3

# FUNÇÕES TRABALHADAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

## 3.1 A Função Afim

### 3.1.1 História da Matemática – A história das temperaturas

Os registros históricos existentes situam a primeira tentativa de estabelecer uma "escala de temperaturas" entre os anos 130 e 200 d.C., em que Galeano, médico grego cujos ensinamentos constituíram a base da prática clínica até o século XVII, teria sugerido que as sensações "quente" e "frio" fossem medidas com base em uma escala com quatro divisões numeradas acima e abaixo de um ponto neutro; para tal escala termométrica, atribuiu a temperatura "4 graus de calor" à água a ferver, a temperatura de "4 graus de frio" ao gelo e a temperatura "neutra" à mistura de quantidades iguais daquelas duas substâncias.

Muito embora o primeiro relato sobre escalas remonte do segundo século d.C., somente em 1714, com Gabriel Fahrenheit, surgiu a primeira escala universalmente aceita – Fahrenheit. Gabriel, fabricante holandês de instrumentos de precisão, construiu os primeiros termômetros de mercúrio precisos e repetitivos. Fahrenheit fixou o ponto inferior de sua escala de temperatura em uma mistura de gelo e sal – a temperatura mais baixa que conseguia produzir – e atribuiu-lhe o valor de 32 graus.

Hoje, como se sabe, três escalas detemperaturas são comumente utilizadas: Fahrenheit, Celsius e Kelvin. Frequentemente, faz-se necessária a conversão entre estas temperaturas e, para isso, se estabelece uma proporção entre os segmentos obtidos ao se utilizar um termômetro, como mostra a figura a seguir.

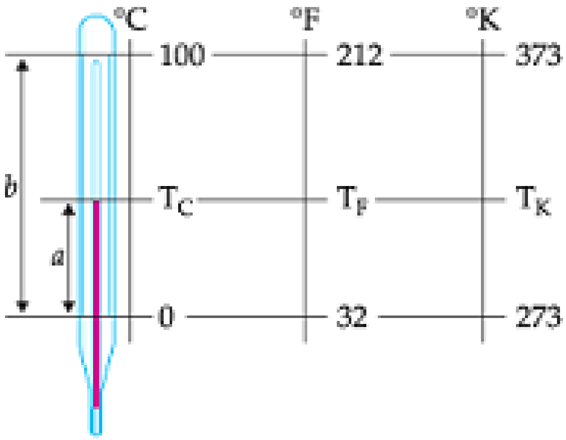


Figura 3.1: Conversão das unidades de temperatura
Fonte: sítio http://www.vestibulandoweb.com.br

Por proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_F - 32}{212 - 32} = \frac{T_K - 273}{373 - 273}$$

A partir disso, é possível obter as seguintes relações:

$$\frac{T_C}{5} = \frac{T_F - 32}{9} \text{ e } T_C = T_K - 273.$$

As relações acima representam possibilidades de se introduzir o conceito de função, uma vez que as relações entre as grandezas trabalhadas se dão por uma equação de primeiro grau.

Em diversos outros ramos das ciências é possível encontrar exemplos de aplicações que recaem em equações de primeiro grau, ou seja, assuntos que possibilitam uma abordagem sobre a ótica de funções afim. Abaixo, elencamos algumas possibilidades.

### Cinemática

$S(t) = S_0 + vt$ – estabelece a expressão do deslocamento de um móvel submetido a uma velocidade constante $v$;

$v\left(t\right) = v_0 + at$ - expressa da velocidade de um móvel submetido a uma aceleração constante $a$.

**Dinâmica**

$F(a) = ma$ – Segunda Lei de Newton para uma massa $m$;

$F(x) = kx$ – Lei de Hooke para um mola de constante de elasticidade $k$;

$T(d) = F.d$ – Trabalho de uma força $F$;

$Q(v) = mv$ – Quantidade de movimento de uma massa $m$ a uma velocidade $v$.

**Hidrost'atica**

$P(h) = d.g.h$ – Pressão hidrostática a uma altura $h$ sob uma densidade $d$ e gravidade $g$.

**Termometria**

$T(c) = (5/9)\ c\ +\ 32$ – Conversão entre a escala de Graus Celsius e Fahrenheit;

$T(c) = c\ +\ 273$ – Conversão entre a escala de Graus Celsius e Kelvin.

**Estequiometria**

$P(T) = (nR/V).T$ – Equação de Clayperon para gases ideais concentrados em volume constante.

**Eletrostática**

$U(i) = R.i$ – Primeira Lei de Ohm.

**Economia**

$P(x) = mx + Po$ – Modelo simplificado do preço de um determinado produto em funçãoda quantidade $x$ de unidades demandadas.

Os exemplos acima são apenas alguns dentre inúmeros modelos que podem ser encontrados nas ciências naturais, nas ciências sociais, nas engenharias, nas ciências da saúde e em diversas áreas. Nesses exemplos, observa-se que a variável independente $x$, usada normalmente nas aulas de matemática, vai sendo substituída por $t$, $a$, $v$, $c$, $i$,... de acordo com o modelo que se está estudando, enquanto a própria função $f$ vai sendo substituída por $S, V, T, U, P$.... etc. Isso é importante porque o estudante começa a perceber que o importante é apenas a relação linear entre as variações de duas grandezas, e não necessariamente entre $x$ e $y$,alem de verificar que determinadas quantidades em outras ciências variam de forma linear.

Outros exemplos podem ser elaborados pelo professor, buscando uma aplicação da função afim a uma situação mais próxima da realidade regional do estudante ao qual a aula se aplica.

### 3.1.2 Contextualização

Suponha que após a disponibilização em rede de um novo tipo de aplicativo para smartphones, a quantidade observada de downloads medidos nos primeiros dias foi dada por:

| Dia | Quantidade |
|---|---|
| 1 | 144 |
| 2 | 148 |
| 3 | 152 |
| 4 | 156 |

Se a quantidade de downloads continuar aumentando na mesma proporção, ou seja, 4 downloads a mais do que no dia anterior. Qual a quantidade de downloads estimados um ano após a data do lançamento? E em um momento posterior qualquer?

DEFINIÇÃO 3.1.1. *Define-se função afim pela expressão:*

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = ax + b,$$

*onde* $a$ *e* $b \in \mathbb{R}$.

O gráfico de $f$ é um reta não perpendicular ao eixo x. O coeficiente $a$ é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente $b$ é denominado coeficiente linear. Corresponde a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo $y$.

Dados dois pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ pertencentes ao gráfico de uma função afim,então é possível determinar o seu coeficiente angular $a$ por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

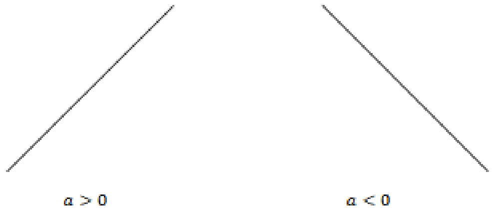


Figura 3.2: Esboço gráfico da Função Afim

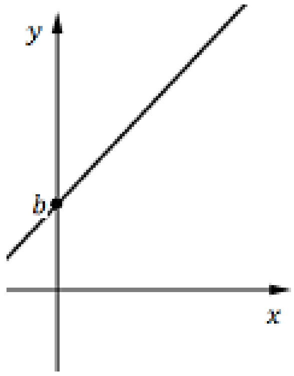


Figura 3.3: Coeficiente linear

Para o problema acima, tem-se que:

$$\frac{148-144}{2-1}=4,\frac{152-148}{3-2}=4,\frac{156-148}{4-2}=4.$$

Assim, se $Q$ é a quantidade de downloads esperados 365 dias depois então

$$\frac{Q-144}{365-1}=4.$$

Logo, $Q=4x364+144=1600$.Para um instante $x$ qualquer tem-se

$$\frac{Q-144}{x-1}=4\Rightarrow$$

$$Q=4.\left(x-1\right)+144\Rightarrow$$

$$Q=4x+140.$$

## 3.2 A Função Quadrática

### 3.2.1 História da Matemática – Épico de Eneida

O Épico Eneida, escrito por Vírgilio em I a.C., narra uma história da Grécia Antiga, por volta do século IX a.C., baseada na Lenda de Dido. A lenda conta um episódio das migrações fenícias para o ocidente mediterrâneo, mas destaca-se pelo romance contado entre Dido e Eneias.

Diz a lenda, que o Rei Muto, o rei da cidade de Tiro – antiga cidade fenícia – quando morreu legou o reino aos seus dois filhos: Pigmalião e Elisa (cujo nome tírio é Dido). Muito embora Pigmalião fosse criança, o povo o escolheu como rei. Elisa casou-se com seu tio Sicarbas, sacerdote de Héracles e segunda figura do Estado depois do Rei. Na tentativa de obter a enorme fortuna de seu cunhado, o Rei Pigmalião mandou matar Sicarbas. Horrorizada com o ato cruel do irmão, Dido resolveu fugir. Em segredo, carregou os barcos com os tesouros de seu falecido marido, Sicarbas, e fugiu com alguns nobres tírios que também estavam descontentes com o rei. A lenda conta ainda que, para atrasar o irmão durante a fuga, Dido atirou ao mar sacos cheios de areia, fazendo o irmão pensar que eram partes das riquezas de Sicarbas.

Seguiram rumo à África, onde os povos indígenas os receberam de maneira amistosa. Dido pediu ao rei Jarbas que negociasse parte de suas terras com ela, para que ela pudesse se estabelecer no novo continente. Ficou acertado entre os dois que ela poderia comprar toda a quantidade de terra que conseguisse cercar com a pele de um boi. Dido mandou cortar o couro de um boi em tirar bem finas e as uniu, formando um longo fio que delimitou um território bastante vasto. Dido ergueu a cidade de Cartago no terreno que lhe foi concedido pelos indígenas. Como a região a ser escolhida ficava à beira mar, eles decidiram que o formato do terreno seria um semicírculo a ser contornado pela corda.

Figura 3.4: Dido e seu povo, cortando o couro de um boi
Fonte: Retirada de [21]

A história acima, que ilustra uma questão de otimização, pode despertar em muitos estudantes de ensino fundamental o desejo de saber as razões (matemáticas) que fazem com que a forma da curva que circula uma região influencia no valor da área delimitada por ela. O professor pode estimular esse desejo fazendo atividades laboratoriais de modo que os próprios estudantes concluam que a melhor forma de se obter área máxima delimitada por uma curva é o círculo. Assim sendo, o mesmo pode introduzir inicialmente a função quadrática que é uma das funções elementares com ricas propriedades de otimização.

### 3.2.2 Contextualização.

EXEMPLO 3.2.1. *Com um pedaço de 120 cm de barbante, qual a região retangular de maior área a ser formada?*

DEFINIÇÃO 3.2.2. *Define-se a função quadrática pela expressão:*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

*onde* $a$, $b$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$.
*O gráfico de* $f$ *é uma parábola, como mostra a figura a seguir.*

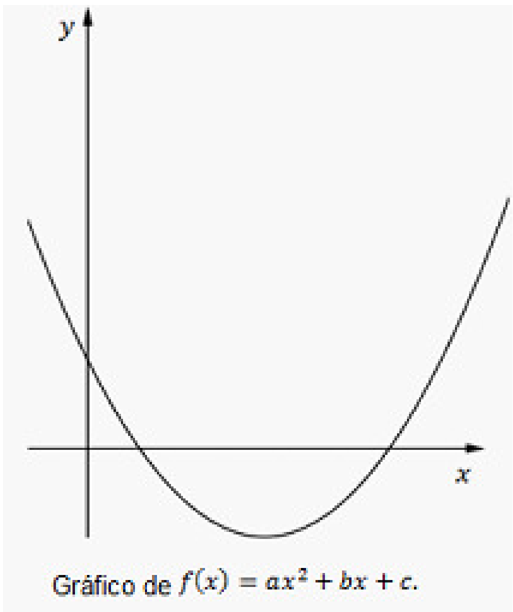


Figura 3.5: Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$

*A parábola que descreve a função $f$ pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo. Se $a > 0$, a concavidade da parábola será voltada para cima e, se $a < 0$, a concavidade da parábola será voltada para baixo. A figura abaixo ilustra a situação.*


Figura 3.6: Concavidade de $f(x) = ax^2 + bx + c$

*Os zeros ou raízes da função quadrática são os valores reais que atribuídos ax tornam $f$ nula, ou seja, $f(x) = 0$. Geometricamente, são as abscissas dos pontos onde a curva da parábola intersecta o eixo $x$. As raízes $x_1$ e $x_2$ portanto serão as soluções da equação de 2Âº grau $f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$.*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; e \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

*quando $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$*
*Quando $a > 0$ $(a < 0)$ $f$ assumirá o mínimo (máximo) valor possível $(y_v)$. Tem-se que $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Ademais, esse valor é alcançado quando $x_v = -\frac{b}{2a}$. O par ordenado $(x_v,\ y_v)$ é chamado de vértice da parábola.*

O que se espera para o problema 1 motivado acima:
Considere um retângulo de dimensões $x$ e $y$, como mostra a figura a seguir. Nesse caso, a área $A$ e o perímetro $P$ podem ser expressos por:

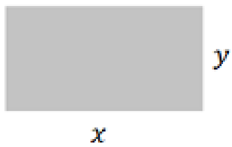


Figura 3.7: Retângulo $XY$

$$\textit{Área(A) e Perímetro (P)}\begin{cases} A = x \cdot y \\ P = 2 \cdot (x + y) \end{cases}$$

Levando em consideração que $P = 120$, é possível constatar que $x + y = 60$ e $y = 60 - x$. Substituindo a última equação na relação de área, encontra-se:

$$A\,(x) = x.(60 - x)$$

ou

$$A\,(x) = -x^2 + 60x.$$

A expressão acima indica que $A(x)$, para $0 < x < 60$, é uma função quadrática e seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.Assim, é possível encontrar o valor de $x$ $(x_v)$ para o qual a área é máxima

$$x_v = \frac{-b}{2a},$$

onde $a$ e $b$ são coeficientes da equação de segundo grau $y = ax^2 + bx + c$. Em particular, tem-se que:

$$x_v = \frac{-60}{2.(-1)} = 30.$$

Logo, quando $x = 30\ cm$ o retângulo definirá uma região de área máxima, igual a 900 $cm^2$.

O professor dever ter sensibilidade para trabalhar esse assunto a depender da série de aplicação. É interessante instigar a ideia de área máxima a partir da história narrada no Épico de Eneida.O aluno deve se colocar na situação de resolver o problema e obter a área máxima. Importante destacar que a pergunta feita neste momento talvez só seja respondida em outro momento, quando aluno estiver preparado para essa parte da matéria. Mesmo que o aluno não seja capaz de responder, o professor deve provocá-lo, mostrando que a área varia à medida que se mudam as dimensões do retângulo.

| $x$ $(cm)$ | $y$ $(cm)$ | Área $(cm^2)$ |
|---|---|---|
| 10 | 50 | 500 |
| 20 | 40 | 800 |
| 30 | 30 | 900 |
| 40 | 20 | 800 |
| 50 | 10 | 500 |

Tomando alguns valores para $x$, o aluno percebe que há uma variação na área da região retangular. Em princípio a área aumenta quando $x$ é aumentado. É fácil constatar que a área da região não aumentará sempre, haverá um momento em que a área começará a diminuir, estamos interessados no ponto em que a área seja máxima.

Exemplo 3.2.3. *Com o mesmo pedaço de barbante construa um hexágono regular e depois um octógono regular, compare a área limitada por essas regiões com a área da região construída no problema anterior.*

A área da região limitada por um hexágono regular, $A_h$, de lado $l$ pode ser expressa por:

$$A_h = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2},$$

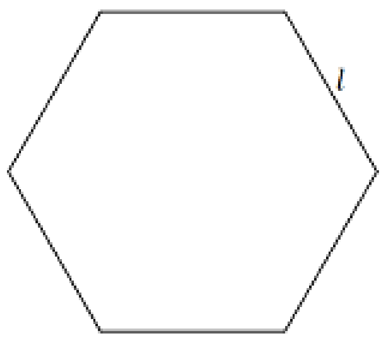


Figura 3.8: Hexágono regular

Sendo $P = 120$, temos que $l = 20$, logo a área da região limitada pelo hexágono será:

$$A_h = \frac{3.20^2\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}\ cm^2.$$

Sendo $A_q$ a área da região limitada pelo quadrado no primeiro problema, tem-se que:

$$A_h > A_q.$$

É possível calcular a área da região limitada por um octógono regular considerando-o uma justaposição de 8 triângulos isósceles com ângulo central medindo 45°. Logo, basta calcular a área da região limitada por um desses triângulos e multiplicar o resultado por 8 para se chegar a área da região limitada pelo octógono.

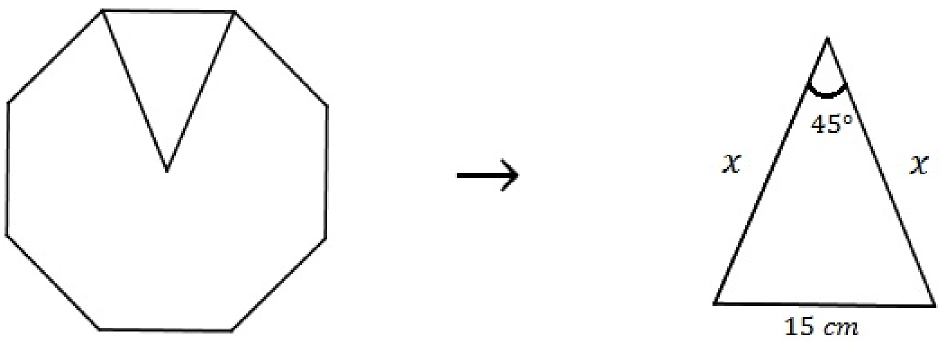


Figura 3.9: Octógono regular

Pela Lei dos Cossenos, tem-se:

$$15^2{=}x^2{+}x^2{-}2{\cdot}x \cdot x \cdot \cos 45° \Rightarrow$$

$$225 = 2x^2{-}2x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}{\Rightarrow}$$

$$225 = x^2(2{-}\sqrt{2}){\Rightarrow}$$

$$x^2{=}\frac{225}{2{-}\sqrt{2}}{=}\frac{225\left(2{+}\sqrt{2}\right)}{2}$$

A área da região limitada pelo triângulo ($A_t$) será:

$$A_t = \frac{x^2 sen\ 45°}{2}$$

$$A_t = \frac{\frac{225\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$A_t = \frac{450(\sqrt{2}+1)}{8}\ cm^2$$

Portanto, a área da região limitada pelo octógono regular ($A_o$) será:

$$A_o = 8 \cdot A_t$$

$$A_o = 8 \cdot \ \frac{450\left(\sqrt{2}+1\right)}{8}$$

$$A_o = 450\left(\sqrt{2}+1\right) cm^2$$

Comparando-se as três regiões:

$$A_o > A_h > A_q$$

Analisando os desenhos dos polígonos regulares é razoável conjecturar que quanto maior for o número de lados, maior será a área da região limitada por esse polígono.

Tal resultado se coaduna com a Desigualdade Isoperimétrica, que afirma que se uma figura plana define uma área $A$ e perímetro $P$, então a área máxima é obtida quando a figura é um círculo de perímetro $P$. A seguir, a versão simplificada desse teorema, para polígonos regulares.

TEOREMA 3.2.4. *Seja $C$ um polígono regular com perímetro$P$, e $A$ a área da região delimitada por essa curva, então*

$$4\pi A \leq P^2$$

*Observação: A igualdade ocorrerá apenas se a região for um círculo.*

*Demonstração.* Considere um polígono regular convexo de $n$ lados comperímetro fixo igual a $P$, lado de medida $l$, apótema de medida $a$ e centro $O$.

Para se calcular a área da região limitada pelo polígono regular convexo de $n$ lados, considere o triângulo isósceles – $V_1V_2O$ – formado por dois vértices consecutivos do polígono regular e o centro $O$, $\overline{OH}$ é altura relativa a base $V_1V_2$. Como mostra a figura a seguir.

Considerando o triângulo $V_1V_2O$, tem-se que $V_1V_2 = l$, $OH = a$ e $\alpha = \frac{\pi}{n}$ A área da região

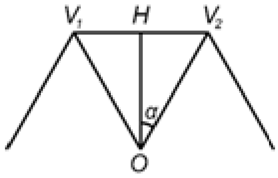


Figura 3.10: Polígono regular de $n$ lados

limitada pelo triângulo $V_1V_2O$ pode ser expressa por:

$$B_n = \frac{l.a}{2}$$

Mas, em particular:

$$\tan\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{l}{2}}{a} = \frac{l}{2a} \Rightarrow$$

$$a = \frac{l}{2 \cdot \tan\frac{\pi}{n}}$$

Logo:

$$B_n = \frac{l^2}{4 \cdot \tan\frac{\pi}{n}}$$

A área da região limitada pelo polígono pode ser determinada fazendo-se:

$$A_n = nB_n$$

$$A_n = \frac{nl^2}{4 \cdot \tan\frac{\pi}{n}}$$

A partir da relação $P = n \cdot l \Rightarrow l = \frac{P}{n}$, tem-se:

$$A_n = \frac{P^2}{4n \cdot \tan\frac{\pi}{n}}$$

Como o perímetro é fixo, para se analisar o comportamento de $A_n$, basta observar o que ocorre na expressão $n.\tan\frac{\pi}{n}$ a medida que $n$ aumenta, ou seja, analisar o limite de $n \cdot \tan\frac{\pi}{n}$ quando $n$ tende ao infinito:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\pi}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{?\longrightarrow\infty} \frac{\pi \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$

Fazendo $\frac{\pi}{n} = k$, temos que $k \to 0$ quando $n \to \infty$, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{k\to 0} \frac{\pi \tan k}{k} = \pi \cdot \lim_{k\to 0} \frac{sen\ k}{k} \cdot \frac{1}{\cos k} = \pi \cdot 1 = \pi$$

Por outro lado, a função $f(x) = \frac{x}{\tan x}$, $0 < x \leq 1$ é decrescente, visto que

$$f'(x) = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{x^2} = \frac{sen\ k \cdot \cos x - x}{x^2 \cos^2 x},$$

e, para $0 < x < 1$, tem-se que

$$sen\ x < x \Rightarrow sen\ x \cdot \cos x < x\cos x < x$$

isto é, $f'(x) < 0$, $0 < x < 1$, implicando a monotonicidade crescente de $f$. Assim

$$A(n) = A_n = \frac{P^2}{4\pi} \cdot f\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

é crescente e, portanto, $A_m < A_n$, para todo $m < n$ e

$$A_P \leq \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{n\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{P^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{P^2}{4\pi}$$

Para concluir, basta observar que para uma circunferência

$$A_P = \frac{P^2}{4\pi}$$

□

# CAPÍTULO 4

# FUNÇÕES TRABALHADAS NO ENSINO MÉDIO

## 4.1 A Função Exponencial e a Função Logarítmica

### 4.1.1 História da Matemática – Lenda de Sissa

A história do xadrez tem origem controversa. Dentre as teorias existentes, uma é amplamente difundida, a história de que o jogo tenha surgido na Índia. A célebre lenda conta a história de um rei que perdeu muitos soldados – sendo um deles o seu filho – para vencer uma guerra. Entristecido pelo ocorrido, acabou se afastando parcialmente de suas obrigações enquanto rei. Passou-se um tempo e o rei foi procurado por um jovem brâmane – pobre e modesto. Ele solicitava uma audiência com o rei para apresentar o jogo que havia criado, pretendia mostrar ao rei alguma distração, algo para se divertir. O brâmane mostrou ao rei que para vencer o jogo precisaria da ajuda de todas as peças. O rei ficou fascinado pelo fato de um simples jogo retratar tão bem a realidade com relação à guerra, ele viu, através do jogo, que um rei sem a dedicação dos seus súditos pouco pode fazer.

Para recompensar o súdito que criara o jogo o rei pediu que ele solicitasse qualquer coisa que quisesse. O súdito então pediu seu pagamento da seguinte maneira: um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, duas para a segunda, quatro para a terceira, e assim dobrando, até a sexagésima quarta (última) casa do tabuleiro. O rei ficou surpreso com a simplicidade do pedido do brâmane e ordenou que realizassem seu desejo. Após um tempo seu vizir – ministro nomeado por soberano – lhe comunicou que era impossível satisfazer essa demanda, pois a quantidade de trigo pedida estava muito acima do que eles podiam produzir. A quantidade pedida pelo brâmane pode ser analisada na tabela a seguir:

| Casa do Tabuleiro | Quantidade de grãos |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 8 |
| 5 | 16 |
| 6 | 32 |
| 7 | 64 |
| 8 | 128 |
| 9 | 256 |
| 10 | 512 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| 60 | 576.460.752.303.423.000 |
| 61 | 1.152.921.504.606.850.000 |
| 62 | 2.305.843.009.213.690.000 |
| 63 | 4.611.686.018.427.390.000 |
| 64 | 9.223.372.036.854.780.000 |

A quantidade de trigo pedida pelo brâmane é igual à soma

$$Q = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

Que pode ser calculada pela soma dos termos de uma PG com 64 termos e razão 2, isto é,

$$Q = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615 \; grãos.$$

Levando em consideração a produção de trigo da época, seriam necessários 61.000 anos para produzir a quantidade a ser paga.

A história acima ilustra com clareza como certa quantidade pode aumentar (decrescer) rapidamente quando utilizamos expressão com potências.Para obtermos mais informações sobre o comportamento dessas potencias, faremos uma apresentação das duas funções que definem esse comportamento: a função exponencial e a função logarítmica.

Definição 4.1.1. *Define-se a função exponencial de base a pela expressão:*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto y = f(x) = a^x,$$

*onde*$a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$. *Com relação ao gráfico de* $f$ *é possível dizer:*

- *Sua curva está toda acima do eixo* $x$, *pois* $f(x) = a^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- *Intersecta o eixo* $y$ *no ponto de ordenada 1, pois* $f(0) = a^0 = 1$.
- *Se* $a > 1$ $(0 < a < 1)$, *será crescente (decrescente).*
- *Terá um dos seguintes aspectos abaixo.*

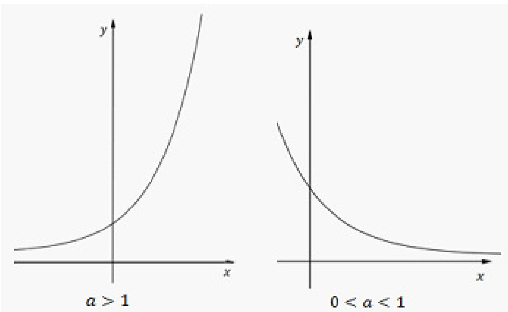


Figura 4.1: Gráfico da Função Exponencial

Antes de contextualizarmos a função exponencial definiremos a sua inversa, a função logarítmica, para usar conjuntamente as propriedades dessas duas funções.

### 4.1.2 História da Matemática – Os babilônios e a matemática financeira

Historicamente, os babilônios aproximaram o valor do número de Euler, em cálculos financeiros, mas não há indícios da compreensão desse fato, pelo caráter empírico da Matemática. Um tablete de argila dos antigos babilônios, datado de cerca de 1700 a.C., propõe um problema envolvendo uma questão de investimento: "Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?"

Em termos matemáticos atuais, ao final de cada ano, o capital atual deverá ser multiplicado por um fator 1,2. Assim, após $x$ anos, o capital terá aumentado $1,2^x$. Como o problema acima solicita o tempo necessário para o capital dobrar, isto significa resolver a equação exponencial $1,2^x = 2$.

Enquanto em três anos o capital será multiplicado por um fator $1,2^3 = 1,728$, em quatro anos o valor será multiplicado por $1,2^4 = 2,076$. Assim, o tempo estimado se encontra entre três e quatro anos. Para resolver esse problema, John Napier (1550-1617) criou as tábuas logarítmicas (Figura 4.2), tabelas com aproximações para diversas potências de expoentes racionais. Para preencher a tabela de forma apurada, assim como os babilônios, Napier utilizou o processo de interpolação linear, que consiste em estabelecer uma relação de proporcionalidade direta, de modo que $x$ divide o intervalo de 3 para 4 anos de modo proporcional ao capital 2, que divide o intervalo $1,2^3 = 1,728$ e $1,2^4 = 2,076$.

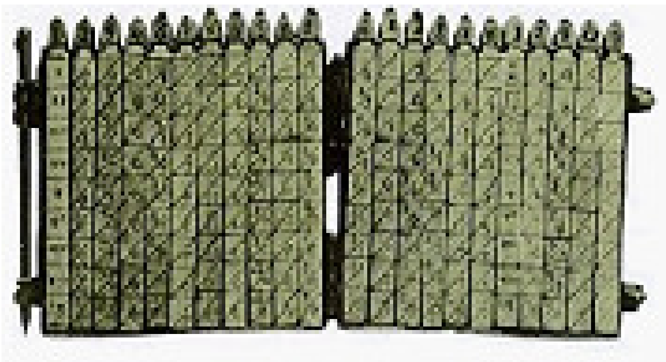

Figura 4.2: Tábua elaborada por Napier
Fonte: http://www.di.ufpb.br/raimundo/Revolucao_dos_Computadores/Histpage1.htm

Hoje em dia, com o advento das calculadoras eletrônicas, tal prática não é mais comum. No entanto, àquela época, as tabelas tinham grande utilidade em cálculos como este.

Definição 4.1.2. *Define-se a função logarítmica de base a pela expressão:*

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = \log_a x$$

*onde* $0 < a \neq 1$. *Com relação a função* $f$, *tem-se as seguintes propriedades:*

- *Se* $0 < a \neq 1$, *então as funções* $f$ *e* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *tal que* $g(x) = a^x$, *são inversas uma da outra.*
- *A função* $f$ *é crescente (decrescente) quando* $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

*Com relação ao gráfico de* $f$, *é possível observar:*

- *Está todo à direita do eixo* $y$ $(x > 0)$.
- *Intersecta o eixo* $x$ *no ponto de abscissa 1, ou seja,* $f(1) = \log_a 1 = 0$.
- *Se* $a > 1$ $(0 < a < 1)$, *será crescente (decrescente).*
- *É simétrico do gráfico da função* $g(x) = a^x$, *em relação à reta* $y = x$ *(bissetriz dos quadrantes ímpares).*
- *Apresenta um dos aspectos abaixo.*

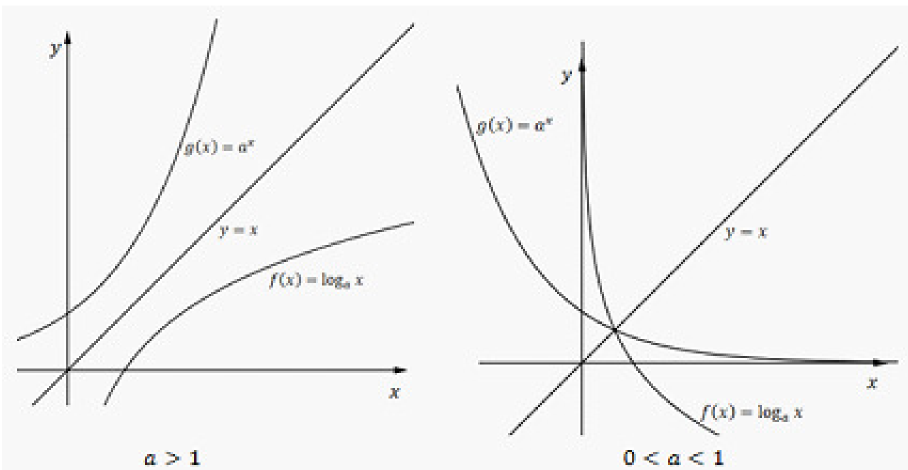


Figura 4.3: Gráfico da Função Logarítmica

É possível generalizar a ideia proposta no problema utilizando-se logaritmos.

$$M = C \cdot (1+r)^t \Leftrightarrow \log_a M = \log_a C \cdot (1+r)^t \quad \Rightarrow$$

$$\log_a M \ = \log_a C \ + t \cdot \log_a (1+r) \ \Rightarrow t = \log_{1+r} \left(\frac{M}{C}\right)$$

Observação: De modo geral, em problemas financeiros envolvendo juros compostos, o cálculo do valor futuro ou Montante $(M)$ em função do capital inicial (C), aplicado a uma taxa de juros compostos$(r)$, aplicado durante uma unidade de tempo $(t)$ é dado por:

$$M = C \cdot (1+r)^t$$

Por exemplo, imagine que uma pessoa dispõe de R\$ 5000,00 para comprar um carro que custa hoje R\$ 40000,00. Considere ainda que esse dinheiro (R\$ 5000,00) seja investido sob o regime de juros compostos de 28% a cada dois anos. Sabendo que a cada dois anos o carro sofre uma desvalorização de 19% do seu valor anterior, em quanto tempo essa pessoa conseguirá comprar o carro? Dados: $\log 2 \ = 0,3$ e $\log 3 \ = 0,48$.

Investimento:

$$M = C \cdot (1+r)^t \Rightarrow M = 5000.(1,28)^{\frac{t}{2}}.$$

Preço do carro:

$$P = 40000 \cdot (0,81)^{\frac{t}{2}}$$

Essa pessoa conseguirá comprar o carro quando o dinheiro investido $(M)$ for igual ao preço do carro $(P)$, ou seja

$$5000 \cdot (1,28)^{\frac{t}{2}} = 40000.(0,81)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{1,28^{\frac{t}{2}}}{0,81^{\frac{t}{2}}} = \frac{40000}{5000} \Rightarrow \left(\frac{128}{81}\right)^{\frac{t}{2}} = 8 \Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{128}{81}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 8 \ \Rightarrow \frac{t}{2} \cdot \log\frac{128}{81} = \log 2^3 \quad \Rightarrow$$

$$t = 2 \cdot \frac{\log 2^3}{\log \frac{2^7}{3^4}} = 2 \cdot \frac{3 \cdot \log 2}{7\log 2 \ - 4\log 3} == \frac{6 \cdot 0,3}{7 \cdot 0,3 - 4 \cdot 0,48} = \frac{1,8}{0,18} = 10$$

Portanto, essa pessoa conseguirá comprar o carro 10 anos após o investimento.

### 4.1.3 Contextualização

EXEMPLO 4.1.3. *Suponha que uma aplicação financeira dobra o valor de um capital $C$ ao final de um determinado período de tempo $T$ – um ano, por exemplo – quando aplicado a uma taxa de juros simples (100%). Se for facultado a um investidor aplicar, no mesmo período – um ano – sob regime de juros compostos em $k$ subperíodos, dividindo-se para isso a taxa de juros por $k$, qual o valor máximo que esse investimento proporcionaria?*

Para o problema acima, considere que $M$ seja o montante resultante ao final da aplicação de um ano.

Considerando-se o regime de juros simples

$$M_1 = C + C = 2 \cdot C$$

Se o ano for dividido em dois subperíodos, ou seja, dois semestres, a taxa de juros por semestre será de 50% $\left(\frac{100\%}{2}\right)$.

$$M_2 = C.\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \cdot C$$

Ainda, se o ano for dividido em quatro trimestres, a taxa de juros por período será de 25% $\left(\frac{100\%}{\text{Â¨}4}\right)$.

$$M_{3=}C.\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,44141 \cdot C$$

Caso se considerasse uma aplicação diária, ou seja, a divisão em 360 subperíodos, a taxa de juros seria $100\%/360 = 0,28\%$, o que resultaria em $M_{360} = 2,73626 \cdot C$ . Por essa análise inicial percebe-se que o montante resultante está aumentando. O professor pode provocar a curiosidade de seus alunos perguntando por exemplo se essa quantidade cresce indefinidamente se continuarmos com esse procedimento.

Em geral, para $n$subperíodos sob regime de juros compostos, a uma taxa de $\left(\frac{100}{n}\%\right)$ teremos.

$$M_n = C.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A demonstração da proposição a seguir se encontra no *Apêndice A* da dissertação.

PROPOSIÇÃO 4.1.4. *A sequência $M_n = C.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, ou seja, se $n_1 < n_2$, então $M_{n_1} < M_{n_2}$.*

O valor máximo proporcionado pelo investimento será determinado por

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} C.\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Fazendo $\frac{1}{n} = x$, tem-se que $n \to \infty \Rightarrow x \to 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Por L'Hôpital, segue-se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{??\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = Ce$$

Isto, o valor máximo proporcionado por esse investimento seria igual a $Ce$, onde $Ce \approx 2,7182C$, ou seja, 171,82% de ganho.

Para efeitos de exemplo, a dissertação trabalhou com três subperíodos para o problema proposto (2, 3 e 360), cabe ao professor perceber a necessidade de se trabalhar com mais ou menos subperíodo. A ideia é que os discentes percebam que a sequência é crescente, mas ao mesmo tempo tem um "limite superior". A depender da série de aplicação, é possível determinar o "limite superior" dessa sequência.

Maor (2008, p.47) destaca ainda a observação ingênua do:

> [...] comportamento peculiar da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$para valores grandes de n deve parecer de fato intrigante. Suponha que se consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses, 1 + 1/n. à medida que n aumenta, 1/n fica cada vez mais próximo de 0 e assim 1 + 1/n fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor grande de n „realmente grande" (...) a expressão 1 + 1/n pode ser substituída por 1. Agora, elevado a qualquer potência é sempre igual a 1. Portanto, parece que $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de $n$ deve se aproximar do número 1.

### 4.1.4 Outro Contexto

Outra abordagem importante é observar a aplicação da exponencial no crescimento populacional por meio de equações diferenciais. Estudar equações diferenciais no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie é um assunto importante em campos que vão da medicina à ecologia, passando pela economia global.

Antes de iniciar, importante lembrar que o assunto equações diferenciais não é trabalhado na educação básica, não obstante, os resultados oriundos dessa prática podem ser utilizados em sala para fomentar o ensino. Muitas escolas trabalham com turmas avançadas, que estudam algumas matérias do ensino superior.

Uma hipótese simples e aceita sobre a variação da população é que a taxa de variação $y$ é proporcional (O economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) foi o primeiro a perceber que muitas populações biológicas crescem a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798) ao valor atual de $y$, isto é:

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y,$$

onde a constante de proporcionalidade $r$ é chamada de **taxa de crescimento ou declínio**.

Supondo a condição inicial $y\,(0) = y_o$, tem-se:

$$\frac{dy/dt}{y} = r$$

Integrando ambos os lados com relação a $t$, obtem-se:

$$\int \frac{dy/dt}{y} = \int rdt \Rightarrow \text{lny} \ = r.t + C \ \Rightarrow y = e^{rt+C}$$

Para $t = 0$:

$$y = y_0 e^{rt}$$

Logo, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial apresentado acima prevê que a população crescerá o decrescerá exponencialmente (a depender do sinal de $r$). Sob condições ideais, é razoável se pensar que o modelo acima seja preciso para descrever populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. No entanto, é claro que tais condições ideais não podem perdurar indefinidamente, em algum momento, limitações sobre espaço, suprimento de comida ou outros recursos limitarão a taxa de crescimento ou decrescimento, o que acabará inibindo o comportamento exponencial.

**Crescimento Logístico:** Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento depende, realmente, da população, substitui-se a constante $r$ na equação acima por uma função$h(y)$, ficando assim, com a equação

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y$$

Pretende-se com $h$ representar uma situação mais próxima da realidade, ou seja, quando $y$ for pequeno, espera-se que $h(y)$ seja um valor próximo de $r$, ao passo que, quando $y$ assumir valores suficientemente grandes, $h(y)$ diminua, assumindo valores negativos $(h\,(y) < 0)$. A função $h\,(y) = r - ay$, em que $a$ é uma constante positiva descreve, de forma simples, a situação almejada. Substituindo $h\,(y)$ na equação acima, tem-se

$$dy/dt = (r - ay)\,y$$

A equação acima é conhecida como equação de Verhulst ou equação logística. Muitas vezes é conveniente escrever a equação sob a forma:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y,$$

onde$K = \frac{r}{a}$, $K > y$ .

A constante $r$ é chamada de taxa de crescimento intrínseco, ou seja, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. A constante $K$ é considerada a capacidade ambiental de sustentação ou nível de saturação. Se $y \neq 0$ e $y \neq K$, é possível escrever a última equação sob a forma

$$\frac{dy}{(1 - y/K)\,y} = r\ dt$$

Por frações parciais, é possível reescrever o primeiro membro.

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right)dy = r\ dt$$

Integrando ambos os lados, obtém-se

$$\ln|y| \ - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| \ = rt + c,$$

onde $c$ é uma constante arbitrária a ser determinada pela condição inicial $y\,(0) = y_0$. Como $0 < y < K$ é possível eliminar os módulos dos logaritmos e aplicar exponencial em ambos os lados, ficando com

$$\frac{y}{1 - (y/K)} = C \cdot e^{rt},$$

onde $C = e^c$. Fazendo $y\,(0) = y_0$, tem-se que $C = y_0/[1 - (y_0/K)]$. Substituindo esse valor de $C$ na equação acima, encontra-se a expressão para $y$

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (k - y_0)\,e^{-rt}}$$

Note ainda que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \ = \frac{y_0 K}{y_0} = K$$

Ou seja, após um longo período de tempo, a população fica próxima ao nível de saturação $K$, independente do tamanho inicial da população.

## 4.2 As Funções Trigonométricas

### 4.2.1 História da Matemática –Eratóstenes de Cirênia

Eratóstenes, bibliotecário e diretor da Biblioteca de Alexandria, de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra. Ele notou que, na cidade egípcia Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia do verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Em Alexandria, situada ao norte de Siena, esse fato não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão preso perpendicularmente ao solo, Eratóstenes constatou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o sol estava aproximadamente $7^o$ mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 5000 estádios – estádio era uma unidade de medida usada na Grécia Antiga. A imagem abaixo ilustra a situação descrita.

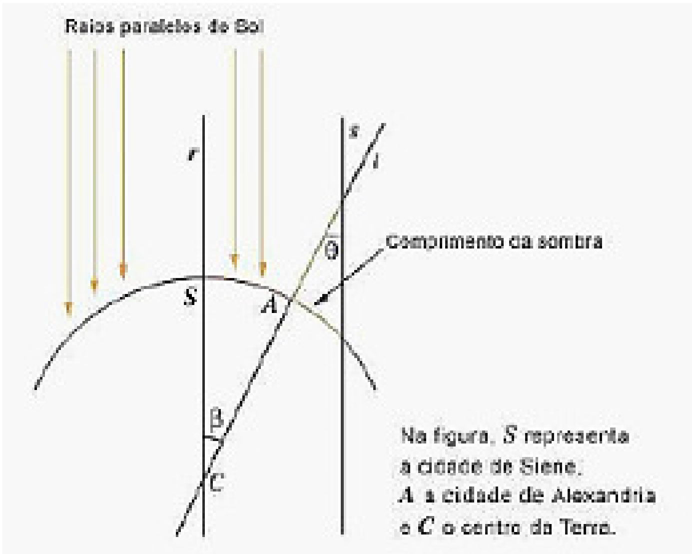


Figura 4.4: O cálculo de Eratóstenes
Fonte: Retirada de [26]

Como $7^o$ corresponde a $1/50$ de $360^o$ graus, Alexandria deveria estar a $1/50$ do comprimento completo da circunferência da Terra ao norte de Siena. Logo a medida da circunferência da Terra calculada por Eratóstenes era de 50x5000 estádios. Infelizmente não é possível saber ao certo qual foi a medida utilizada por Eratóstenes para se referir ao estádio, uma vez que eles tinham diferentes tipos de estádios. Se ele considerou o estádio equivalente a $1/6$ de quilômetro, o valor de seu cálculo é bem próximo do esperado de 40000 quilômetros. O diâmetro da Terra é obtido dividindo-se o comprimento da circunferência por $\pi$.

### 4.2.2 Contextualização

Uma das aplicações da função trigonométrica na medicina é mostrada no monitoramento da pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa. Pressão arterial é a força que o sangue exerce sobre as paredes das artérias ao ser bombeado pelo coração para todos os tecidos e órgãos do corpo humano.

A aferição da pressão sanguínea é dada por dois valores: a pressão sistólica, que é o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue, e a pressão diastólica, que é o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, ambas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80 mm Hg, onde o primeiro valor é a pressão sistólica e o segundo a pressão diastólica.

Observe no gráfico abaixo, a variação de pressão sanguínea, em mm Hg, de uma pessoa, em função do tempo, em segundos, pode ser entendida como uma função trigonométrica, cuja lei é dada por:

$$P\left(t\right) = 100 - 20.\cos\left(\frac{8\pi}{3}.t\right)$$

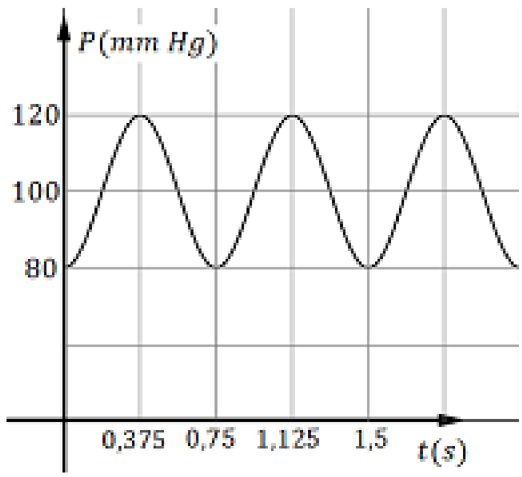


Figura 4.5: Gráfico da variação da pressão sanguínea
Fonte: o autor

A partir do texto apresentado, sabendo que as pressões são medidas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco, quantos batimentos cardíacos por minuto esse coração dá?

### 4.2.3 O Ciclo Trigonométrico

Tome sobre um plano o sistema cartesiano $xOy$. Considere a circunferência $\alpha$ de centro $O$ e raio $r = 1$. Note que o comprimento da circunferência é $2\pi$, pois $r = 1$.

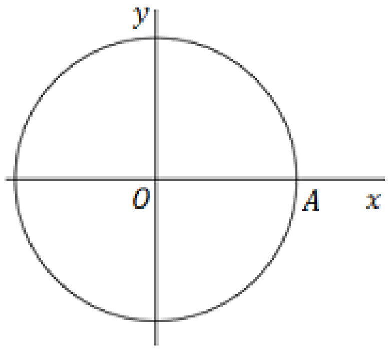


Figura 4.6: Circunferência no plano cartesiano

A aplicação de $\mathbb{R}$ sobre $\alpha$ que associa cada número real $x$ a um único ponto P da circunferência $\alpha$ da seguinte forma:

- Se $x = 0$, então $P$ coincide com $A$.
- Se $x > 0$, então se realiza, a partir de $A$, um percurso de comprimento $x$, no sentido anti-horário, e se marca $P$ como o ponto final do percurso.
- Se $x < 0$, então se realiza, a partir de $A$, um percurso de comprimento$x$, no sentido horário, e se marca$P$ como o ponto final do percurso.

A circunferência $\alpha$ acima é definida como ciclo trigonométrico.

#### Função Seno

DEFINIÇÃO 4.2.1. *Dado um número real $x$ e sua imagem $P$, no ciclo trigonométrico, define-se função seno de $x$ como sendo a ordenada $(\overline{OP_1})$ de $P$ em relação ao sistema $xOy$.*

Em outras palavras, define-se função seno pela expressão:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = sen\ x$$

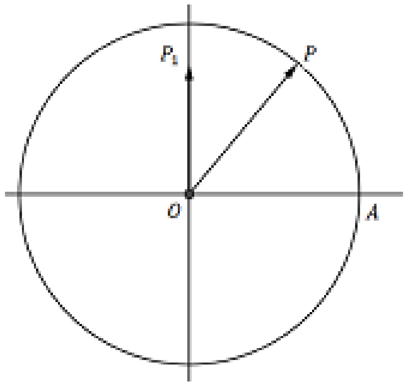


Figura 4.7: Função Seno na circunferência

Propriedades:

- A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$.
- Se $x$ é do primeiro ou segundo quadrante, então $f$é positivo.
- Se $x$ é do terceiro ou quarto quadrante, então $f$ é negativo.
- Se $x$ percorre o primeiro ou quarto quadrante, então $f$ é crescente.
- Se $x$ percorre o segundo ou terceiro quadrante, então $f$ é decrescente.
- A função seno é periódica e seu período é $2\pi$.

Seu gráfico terá a seguinte forma:

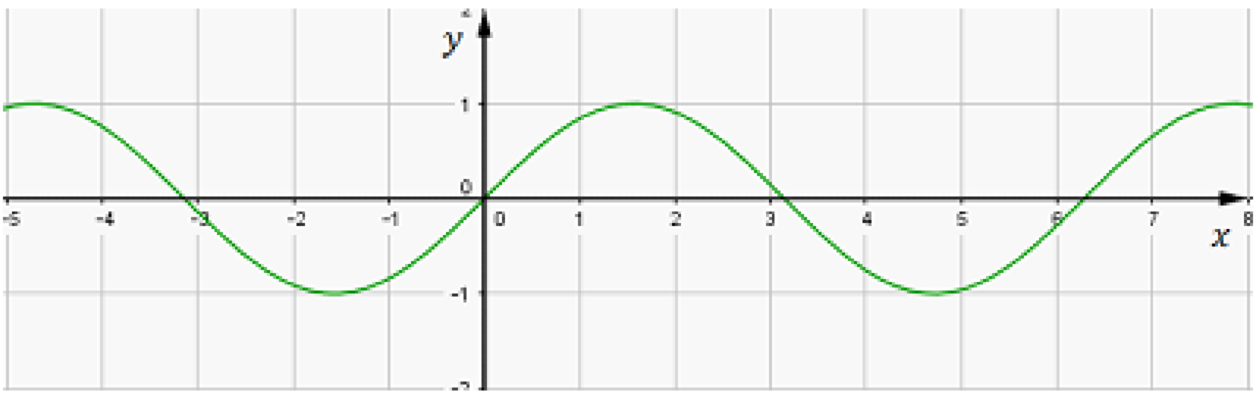


Figura 4.8: Representação gráfica da Função Seno

**Função Cosseno**

Definição 4.2.2. *Dado um número real $x$ e sua imagem $P$, no ciclo trigonométrico, define-se função cosseno de $x$ como sendo a abscissa $(\overline{OP_2})$ de $P$ em relação ao sistema $xOy$.*

Em outras palavras, define-se função cosseno pela expressão:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = \cos x$$

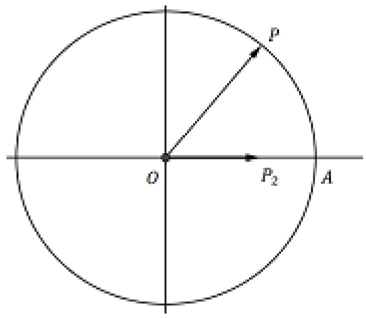


Figura 4.9: Função Cosseno na circunferência

Propriedades:

- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.
- Se $x$ é do primeiro ou quarto quadrante, então $f$é positivo.
- Se $x$ é do segundo ou terceiro quadrante, então $f$ é negativo.
- Se $x$ percorre o terceiro ou quarto quadrante, então $f$ é crescente.
- Se $x$ percorre o primeiro ou segundo quadrante, então $f$ é decrescente.
- A função seno é periódica e seu período é $2\pi$.

Seu gráfico terá a seguinte forma:

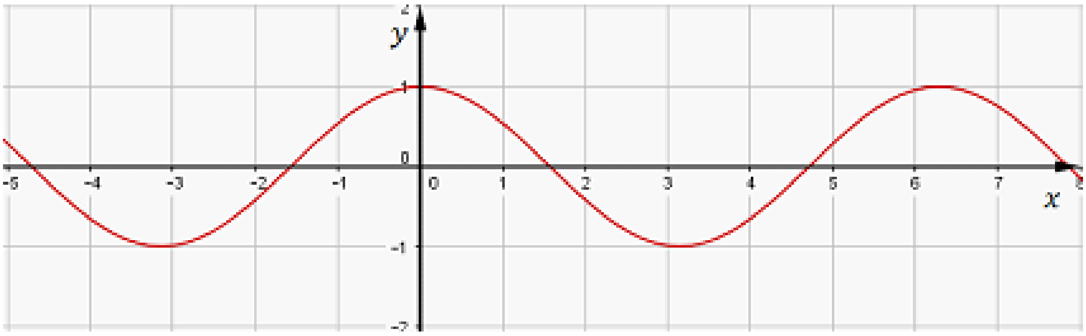


Figura 4.10: Representação gráfica da Função Cosseno

**Função Tangente**

DEFINIÇÃO 4.2.3. *Dado um número real $x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P$ sua imagem no ciclo. Considere a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja $T$ sua intersecção com a reta tangente a $\alpha$ em $A$. Define-se função tangente de $x$ como sendo a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.*

De outra maneira, define-se função tangente pela expressão:

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = \tan x$$

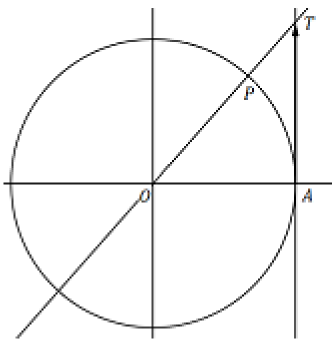


Figura 4.11: Função Tangente na circunferência

Propriedades:

- O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.
- A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

- Se $x$ é do primeiro ou terceiro quadrante, então $f$ é positiva.
- Se $x$ é do segundo ou quarto quadrante, então $f$ é negativa.
- $f$é sempre crescente.
- A função tangente é periódica e seu período é $\pi$.

Seu gráfico terá a seguinte forma:

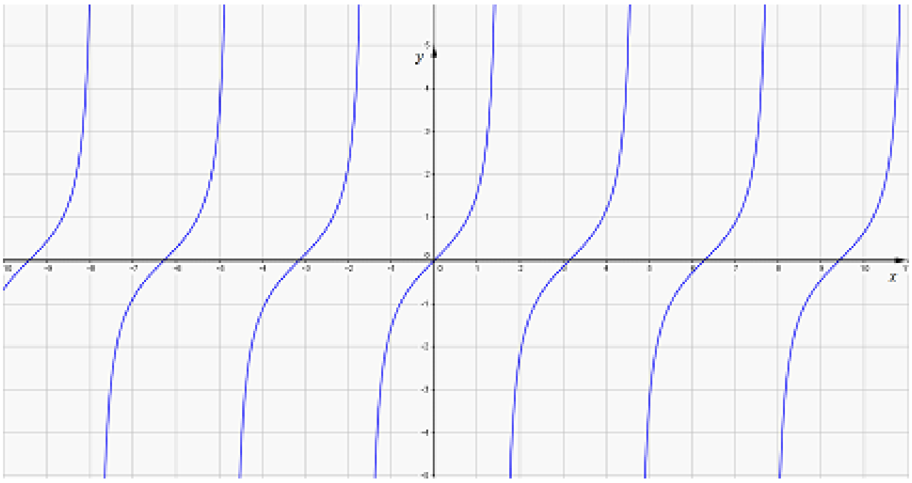

Figura 4.12: Representação gráfica da Função Tangente

Voltando ao problema acima proposto, o professor tem a possibilidade de resolver o trabalho com o aluno sem a necessidade de aprofundar no tema. Utilizando apenas as informações apresentadas e o gráfico. Sabendo que a aferição é feita no intervalo de dois batimentos, o aluno pode medir o tempo passado entre duas sístoles consecutivas ou duas diástoles – equivale ao período da função – obtendo o valor 0,75 segundos. Logo, se o coração realiza um batimento a cada 0,75 segundos, realizará 80 batimentos por minuto.

## 4.3 Outras funções

Outras funções, apesar de não serem formalmente tratadas na Matemática básica, têm grande importância para outras ciências. Muitos resultados dessas funções são trabalhados em Física e Química, por exemplo. Dentre as diversas funções existentes, destacam-se as polinomiais, as racionais, as irracionais e as funções definidas por mais de uma sentença.

Há ainda a possibilidade de se trabalhar outros assuntos da Matemática sobre outra ótica, como por exemplo o estudo de cônicas no terceiro ano. Para esboçar o gráfico de uma elipse, definida pela equação$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, é possível que o professor considere as funções

$$f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \ e \ f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

A partir desse ponto é possível trabalhar com os alunos conceitos como gráfico, domínio, contradomínio e conjunto imagem.

Ainda em cônicas, a equação que define uma hipérbole$\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\right)$pode ser trabalhada segundo duas funções irracionais para a determinação de seu gráfico.

$$f_1 = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + x^2} \ e \ f_2 = -\frac{a}{b}\sqrt{a^2 + x^2}$$

Vários aspectos comparativos podem ser abordados de posse dessas quatro funções, a saber: seus domínios e suas imagens são diferentes. As funções que definem a elipse não estão definidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ao passo que as hipérboles estão.

A seguir, elencamos alguns exemplos de equações trabalhadas no ensino médio que podem ser vistas sobre a ótica de funções. Importante frisar que as possibilidades existem tanto para os professores de outras ciências aplicadas, quanto para os professores de Matemática. Enquanto aqueles podem decidir por fazer uma abordagem num contexto de funções, existe para estes a possibilidade de se contextualizar certa função a ser trabalhada por meio de um dos exemplos a seguir.

**Funções Irracionais:**

$v(d) = \sqrt{v_0^2 + 2ad}$ – Equação de Torriceli.

$T(l) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ – Período para um pêndulo simples.

$T(R) = k\sqrt{R^3}$ – Terceira Lei de Kepler.

$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ – Velocidade de um satélite.

**Funções Racionais:**

$d(V) = \frac{m}{V}$ – Densidade.

$F(r) = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$ – Força de atração gravitacional.

### 4.3.1 Contextualização

Exemplo 4.3.1. *Uma operadora de telefone celular oferece aos seus clientes duas opções de planos pós-pagos com tarifas reduzidas ou elevadas de acordo com as condições de seus clientes. As opções de planos variam de acordo com o tempo a ser contratado, em minutos. Caso o cliente exceda o tempo da franquia contratada, as ligações excedentes serão cobradas adicionalmente, por minuto. Veja a tabela abaixo com as descrições das tarifas mensais:*

| *Planos* | *Franquia* | *Valor das ligações excedentes por minuto* |
|---|---|---|
| *150 minutos* | *R$ 40,00* | *R$ 0,08* |
| *300 minutos* | *R$ 50,00* | *R$ 0,05* |

*Qual dos planos é mais vantajoso para um cliente, baseando-se em seu consumo médio mensal?*

Considere $C_{150}$ e $C_{300}$ os valores a serem pagos, em reais, nos planos de 150 minutos e 300 minutos, respectivamente. Assim, tem-se:

$$C_{150} = \begin{cases} 40, \ se \ 0 \leq t \leq 150 \\ 40 + 0,08\,(t - 150)\,, \ se \ t > 150. \end{cases}$$

$$C_{300} = \begin{cases} 50, \ se \ 0 \leq t \leq 300 \\ 50 + 0,05\,(t - 300)\,, \ se \ t > 300. \end{cases}$$

onde $t$ é o tempo das ligações excedentes a franquia, em minutos.

Ambas as funções apresentam comportamentos distintos a depender do momento $t$. A seguir o gráfico que descreve o comportamento das relações acima.

Até 150 minutos, pela conta $C_{150}$ o cliente pagará um valor fixo de R$ 40,00, a partir desse momento, as ligações excedentes passam a ser cobradas. Há um momento em que o valor pago em $C_{150}$ ultrapassa o valor a ser pago em $C_{300}$. A partir desse momento, o plano $C_{300}$ passa a ser mais vantajoso financeiramente.

Queremos saber, portanto, a resposta da seguinte equação:

$$40 + 0,08\,(t - 150) = 50 \Rightarrow t = 275.$$

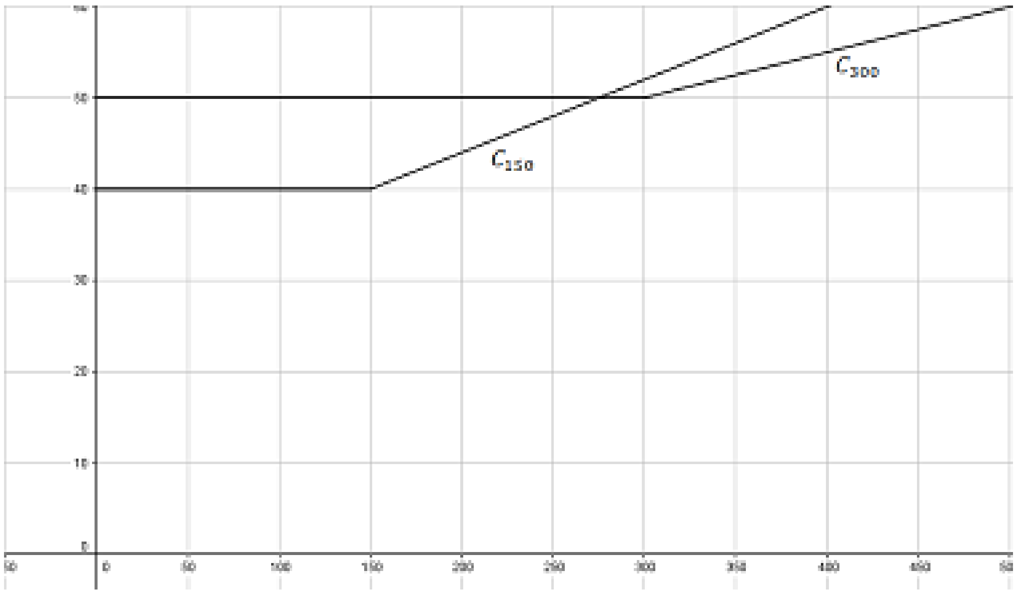


Figura 4.13: Representação gráfica do *Exemplo 4.3.1*

Ou seja, se o cliente costuma usar mais de 275 minutos por mês, o plano $C_{300}$ será mais econômico, caso contrário, o plano $C_{150}$ será mais econômico.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação se propôs a oferecer mais uma via ao docente no processo de aprendizagem. Ao longo do desenvolvimento, ficou claro para o autor que este assunto será cada vez mais debatido nas escolas e universidades.

A educação brasileira clama por mudanças em todos os aspectos. Mudanças estruturais e mudanças de paradigma. Com relação a primeira, pouco pode se fazer, a não ser esperar políticas públicas por parte dos gestores públicos. Com relação a segunda, esta sim está em nosso campo de atuação e o professor deve buscar se atualizar às novas demandas da sociedade.

O trabalho buscou, em quase sua totalidade, abordar o assunto de funções trazendo exemplos históricos e depois uma contextualização para introduzir o assunto. Cabe destacar que essas não são as únicas estratégias existentes, tampouco as mais eficazes. Cabe ao professor não se acomodar e pesquisar diferentes maneiras de atingir seus alunos. Lembrando sempre que as especificidades de cada lugar são determinantes no modo de agir, não há um modelo universal a ser seguido.

Atualmente, o professor tem a sua disposição um recurso muito valioso que é o computador. Existe uma diversidade de atividades propostas e recursos multimídia disponíveis gratuitamente. O professor deve apenas ter o cuidado ao fazer a filtragem desses materiais. A internet democratiza bastante os materiais bons, mas também os ruins.

É importante mencionar que para obter êxito na aplicação dessas ideias, o professor deve se preparar previamente. Antes de iniciar o assunto, o professor deve fazer um planejamento no qual os objetivos e estratégias de ensino estejam bem definidos, a intenção é prevenir possíveis problemas que impeçam de se alcançar o objetivo.

Cumpre observar ainda que o professor não deve agir estritamente dentro do assunto proposto neste trabalho: funções. Importante que as práticas aqui trazidas sirvam como fomento para o professor buscar aplicar essas estratégias em outros ramos da Matemática que aqui não foram trabalhados.

Por fim, percebe-se que o assunto funções é aplicável em diversas áreas do conhecimento, possibilitando assim uma interdisciplinaridade entre diferentes ramos da ciência. Ressalte-se que nessas propostas todos os envolvidos devem participar da elaboração e do desenvolvimento do projeto. Assim, cada um contribuirá para que os objetivos sejam alcançados.

# Bibliografia


[1] BALDINO, Roberto Ribeiro. **O "Mundo-Real" e o Dia-a-Dia na produção de Significados Matemáticos**. Bolema, 1996.

[2] BATSCHELET, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas** / E. Batschelet; tradução de Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. Rio de Janeiro, Interciência; São Paulo, 1978.

[3] BOTELHO, Leila. **Um breve histórico do conceito de Função**. Leila Botelho. Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro.

[4] BOYCE, William E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno** / William E. Boyce, Richard C. DiPrima; tradução de Valéria Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[5] CABRAL, Paulo. **Breve História da Medição de Temperaturas**. Instituto Eletrotécnico Português (IEP). Portugal.

[6] CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9a edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

[7] D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2.Brasilia. 1989. P. 15-19.

[8] DANTE, Luiz Roberto **Projeto Teláris: matemática: ensino fundamental 2** / Luiz Roberto Dante. – 2.ed. – São Paulo: Ática, 2015.

[9] DRUCK, Suely. **O drama do ensino da matemática**. Folha de S. Paulo – São Paulo, 2003.

[10] Fernandes, Susana S. **A contextualização no ensino de matemática – um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do Distrito Federal.**

[11] FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise I**. $2^a$ Edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1996.

[12] FIGUEIREDO, Djairo G. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1997.

[13] FONSECA, Maria C. F. R. **Por que ensinar Matemática**. Presença Pedagógica, Belo Horizonte, v.1, n. 6, mar/abril, 1995.

[14] Gasperi, Wlasta N. H. De. **A História da Matemática como instrumento para interdisciplinaridade na educação básica**.

[15] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 1: Conjuntos Funções**. Ed. Atual, São Paulo. 1977.

[16] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 3: Trigonometria**. Ed. Atual, São Paulo. 1977.

[17] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 2: Logaritmos**. Ed. Atual, São Paulo. 1977.

[18] KLEINER, Israel. **Evolution of the Function Concept: A Brief Survey**. The college mathematics Journal, 1989.

[19] KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, v.1, Oxford University Press, 1990.

[20] LIBEN. LS. (org.). 11987). **Development & Learning: Conflict or Congruense?** New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[21] Limberger, Roberto. **Abordagens do problema isoperimétrico**, S.P. : s.n., 2011.

[22] LOMAS, Fernando Herrero**. Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio** / Fernando HerreroLomas. São Carlos – SP. 2016.

[23] MACIEL, Paulo Roberto Castor. **A construção do conceito de função através da história da matemática**, Rio de Janeiro, 2011.

[24] MAOR, Eli. e: **A História de um Número**. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008

[25] MOL, Rogério Santos**. Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[26] Moraes, Paulo Sérgio de Andrade. **Abordagens da desigualdade isoperimétrica no ensino básico** / Paulo S. de A. Moraes. – Salvador, 2013.

[27] Moreira, Carlos G. T. de A. **A desigualdade Isoperimétrica**. Matemática Universitária NÂº 15, dezembro de 1993, 13-19.

[28] OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de, 1980 – **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**

[29] POMMER, Wagner M., **O número de Euler: Possíveis abordagens no ensino básico**. Seminários de Ensino de Matemática, SEMA-FEUSP, 2010.

[30] Portal MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.

[31] Portal MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.

[32] RÜTHING, D. **Some Definitions of The Concept of Function fromJoh. Bernoullito N. Bourbaki**.The Mathematical Intelligencer, vol. 6 , n° 4, 1984, p. 72-77.

[33] SILVA, CharlesonClivandir de Araujo. **A desigualdade isoperimétrica**, João Pessoa, 2013.

[34] SILVA, Fernanda Laureano. **Uma proposta pedagógica no ensino do Cálculo**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2010.

[35] WEIR, Maurice D. **Cálculo (George b. Thomas Jr.) volume 1**,– São Paulo: Addison Wesley, 2009.

# APÊNDICE A

# APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.1.4

Antes de demonstrar a *PROPOSIÇÃO 4.1.4* , se faz necessário apresentar e demonstrar dois lemas básicos a serem utilizados na demonstração.

**Lema A1 (Desigualdade de Bernoulli):** *Dado um número real* $r > -1$ *então*

$$(1+r)^n \geq 1 + n.r, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Por indução a desigualdade é válida para $n = 1$. Suponha que seja válida para algum número natural $n_0 > 1$, isto é,

$$(1+r)^{n_0} \geq 1 + n_0\cdot$$

Para $n_0 + 1$, tem-se que

$$(1+r)^{n_0+1} = (1+r)^{n_0}(1+r) \geq (1 + n_0 \cdot r)(1+r)$$

$$= 1 + n_0 \cdot r + r + n_0 \cdot r^2 \ \geq 1 + (n_0+1)\, r$$

Portanto a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

**Lema A2:** *Dados dois números positivos $x$ e $y$ então*

$$(xy^n)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{x+ny}{1+n},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

com a igualdade valendo para $x = y$.

*Demonstração.* Sejam $x$ e $y$ números reais positivos. Se $x = y$ então a igualdade é imediata. Suponha $x \neq y$, seja $k = \frac{x}{y}$, isto é, $x = ky$.

Observe que

$$\left(\frac{k+n}{1+n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1},$$

como $\frac{k-1}{n+1} > -1$, segue do Lema A1 que

$$\left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,.\frac{(k-1)}{n+1} = k$$

Isto é,

$$\left(\frac{k+n}{1+n}\right)^{n+1} \geq k,\ ou\ seja,\ \ k^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{k+n}{1+n}.$$

Concluindo a prova do lema. □

*Demonstração. PROPOSIÇÃO 4.1.4*:
Dado $n \in \mathbb{N}$, faça $x = 1$ e $y = 1 + \frac{1}{n}$ no Lema A2. Assim

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1 + n.\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1+n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Isto é, $M_n < M_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

□