



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**DIARLLEY EMANUEL LACERDA DE ALMEIDA LOIOLA SENA**

**DA GEOMETRIA EUCLIDIANA À GEOMETRIA PROJETIVA: ALGUMAS**  
**APLICAÇÕES DE HOMOTETIAS E DE CONSTRUÇÕES PROJETIVAS**

**FORTALEZA-CEARÁ**

**2017**

DIARLLEY EMANUEL LACERDA DE ALMEIDA LOIOLA SENA

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA À GEOMETRIA PROJETIVA: ALGUMAS  
APLICAÇÕES DE HOMOTETIAS E DE CONSTRUÇÕES PROJETIVAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Sena , Diarlley Emanuel Lacerda De Almeida Leiola .  
Da geometria euclidiana à geometria projetiva:  
algumas aplicações de homotetias e de construções  
projetivas (recurso eletrônico) / Diarlley Emanuel  
Lacerda De Almeida Leiola . - 2017 .  
1 CD-ROM: il.; 4 1/2 pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do  
trabalho acadêmico com 112 folhas, acondicionado em  
caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade  
Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia,  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional, Fortaleza, 2017 .  
Área de concentração: Matemática. .  
Orientação: Prof. Dr. Tiago Caála Ribeiro.

1. Geometria projetiva. 2. Homotetias. 3. Razão  
Cruzada. I. Título.

DIARLLEY EMANUEL LACERDA DE ALMEIDA LOIOLA SENA

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA À GEOMETRIA PROJETIVA: ALGUMAS  
APLICAÇÕES DE HOMOTETIAS E DE CONSTRUÇÕES PROJETIVAS.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 10 de novembro de 2017

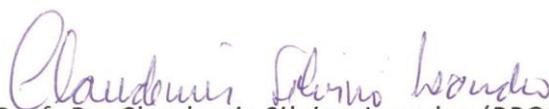
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (PROFMAT/UECE)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (UFC)



Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (PROFMAT/UECE)

Dedico esse trabalho à minha mãe, Maria Lacerda Almeida (*in memoriam*), que me ensinou a lutar pelos meus sonhos. Dedico também à minha noiva, fonte inesgotável de felicidade, grande estimuladora de meus estudos e inspiração para o meu trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Após um longo percurso, cheio de desafios e vitórias, foram muitos aqueles que me acompanharam nessa jornada. Porém algumas pessoas se tornaram mais marcantes nesse processo de obtenção do título de Mestre em Matemática.

Meu agradecimento especial à minha noiva Ângela Valéria Caracas, que fez parte de todos os momentos, me dando forças nos momentos difíceis e brindando comigo as vitórias conquistadas.

Agradeço ao meu primo e amigo Dr. Adonay Rodrigues Loiola, pelo acolhimento em sua residência e pelos conselhos fundamentais para manter firme a minha dedicação aos estudos, sempre me inspirei no seu zelo aos estudos.

Agradeço a minha família pela compreensão de minha ausência em momentos festivos e de reencontro, tive que abrir mão de muitos desses dias para dedicar-me aos estudos e a preparação deste trabalho.

Agradeço aos meus professores Ulisses Parente, Claudemir Silvino, João Montenegro, João Marques e Tiago Caúla que compartilharam comigo os seus conhecimentos.

Aos meus colegas de turma, pessoas formidáveis e sempre dispostos a dividirem os seus conhecimentos e que contribuíram para que a jornada fosse mais agradável.

Agradeço ao meu orientador Dr. Tiago Caúla Ribeiro pelos muitos conselhos e direcionamentos, tornando possível a realização dessa pesquisa e contribuindo de forma efetiva no meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

“A geometria existe, como já disse o filósofo, por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(Júlio César de Mello e Souza)

## RESUMO

As pesquisas e estudos na área de Educação Matemática, junto aos resultados descritos pelos estados e municípios em relação às avaliações externas de Matemática, nos mostram que existem enormes barreiras a serem enfrentadas na compreensão e percepção do espaço. Sendo difícil para os alunos compreenderem e realizarem desenhos os quais apresentem perspectivas e noções de profundidade. Nesse sentido, desenvolvemos parte desse trabalho com exibição de técnicas de desenho, fazendo uso de construções projetivas e de noções básicas da Geometria Projetiva. No que tange ao estudo da Geometria Plana, realizamos uma contextualização histórica, permeando por técnicas iniciais de prova do Teorema de Menelaus, utilizando esse teorema como motivador para apresentação e desenvolvimento das homotetias. Uma parte significativa desse estudo é mostrar e demonstrar as propriedades das homotetias e de suas compostas, bem como de suas aplicações a problemas não triviais e de nível olímpico. Outra parte é realizada na Geometria Projetiva, ampliando os conceitos geométricos e construtivos com a apresentação histórica e cultural dessa geometria, tendo como referência o Teorema de Desargues. Realiza-se uma metodologia para o Ensino Médio que visa o desenvolvimento de desenhos por meio de construções projetivas, bem como a significação de ideias que permeiam a percepção espacial, visando construir ferramentas que acrescentem noções espaciais através do desenho com técnicas projetivas. Por fim, mas não menos importante, exibimos alguns problemas de nível olímpico os quais fazem uso da razão cruzada e dos conjuntos harmônicos, de homotetias, construções projetivas e dos teoremas abordados no trabalho. Há teoremas não triviais que, após a abordagem realizada, tornam-se acessíveis e aparentemente simples, mostrando que um enfoque com as técnicas devidas pode tornar problemas complexos em temas simples e bastante instrutivos.

**Palavras-chave:** Geometria projetiva. Homotetias. Razão Cruzada.

## ABSTRACT

Research and studies in the area of Mathematics Education together with the results described by the states and municipalities in relation to the external evaluations of Mathematics show that there are enormous barriers to be faced in the comprehension and perception of space. It is difficult for students to understand and make drawings, which have perspectives and notions of depth. In this sense, we developed part of this work with exhibition of drawing techniques, making use of projective constructions and basic notions of Projective Geometry. Regarding the study of Plane Geometry, we performed a historical contextualization, permeating by initial techniques of proof of the Menelaus Theorem, using this theorem as motivator for presentation and development of the homotetias. A significant part of this study is to show and demonstrate the properties of homotetias and their compounds, as well as their applications to non-trivial and Olympic-level problems. Another part is realized in the Projective Geometry, extending the geometric and constructive concepts with the historical and cultural presentation of this geometry, having as reference the Theorem of Desargues. A methodology for High School is developed that aims at the development of drawings through projective constructions, as well as the meaning of ideas that permeate spatial notions, aiming to build tools that add spatial notions through design with projective techniques. Last, but not least, we present some Olympic-level problems that use cross ratio and harmonic sets, homotetias, projective constructs, and the theorems discussed in the paper. There are non-trivial theorems that, following the approach made in this work, become accessible and seemingly simple, showing that an approach with the proper techniques can make complex problems and themes simple and rather instructive.

**Keywords:** Projective geometry. Homothety. Cross Ratio.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Teorema de Desargues.....	22
Figura 2 – Parte de uma página da primeira edição impressa dos Elementos de Euclides e Página de rosto da tradução para o inglês dos Elementos de Euclides (1570). .....	24
Figura 3 – Teorema de Menelaus como igualdade de produtos.....	26
Figura 4 – Teorema de Menelaus .....	27
Figura 5 – Teorema de Menelaus em sua forma básica.....	27
Figura 6 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas.....	28
Figura 7 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas (2) .....	29
Figura 8 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas(3) .....	29
Figura 9 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas (4) .....	30
Figura 10 – Homotetias de centro O. ....	33
Figura 11 – Homotetias de retas com centro O .....	34
Figura 12 – Homotetias da figura ABCDE .....	35
Figura 13 – Homotetia Composta como produto da razão escalar por vetor.....	36
Figura 14 – Translações resultantes quando o produto das razões das Homotetias é igual a 1. ....	37
Figura 15 – Homotetia (H) composta de duas homotetias com razões cujo produto é diferente de 1: visão vetorial.....	38
Figura 16 – Homotetia composta: colinearidade entre os centros. ....	39
Figura 17 – Teorema de Menelaus .....	42
Figura 18 – Recíproca do Teorema de Menelaus .....	43
Figura 19 – Teorema de Menelaus para uma quadrilátero convexo .....	45
Figura 20 – Teorema de Desargues.....	47
Figura 21 – Demonstração do Teorema de Desargues .....	48
Figura 22 – Recíproca do Teorema de Desargues .....	49
Figura 23 – Demonstração da Recíproca do Teorema de Desargues .....	50
Figura 24 – Axioma 4 .....	52
Figura 25 – Quadrângulo PQRS .....	55
Figura 26 – Quadrângulos .....	55
Figura 27 – Quadrilátero pqrs .....	56
Figura 28 – Fileira de pontos e Feixe de retas.....	56

<b>Figura 29 – Correspondência Elementar .....</b>	<b>57</b>
<b>Figura 30 – Perspectividades .....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 31 – Triângulos em Perspectiva .....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 32 – Girard Desargues .....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 33 – Livro de Girard Desargues.....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 34 – Teorema de Desargues.....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 35 – Triângulos em perspectiva quanto a três pontos .....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 36 – Prova da colinearidade dos pontos D, E, F. ....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 37 – A última ceia na Arte Medieval: uma das 13 cenas da Taula de Sant Miquel.....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 38 – Desenho de Duccio di Buoninsegna. ....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 39 – The Entombment of Mary: Giotto di Bondone .....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 40 – Perspectiva de Filippo Brunelleschi: ilustração de manual do século XVI sobre como colocar uma figura em perspectiva.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 41 – A Última Ceia de Leonardo da Vinci. ....</b>	<b>69</b>
<b>Figura 42 – Desenho com três pontos de Fuga.....</b>	<b>70</b>
<b>Figura 43 – Estrutura básica para construções: um ponto de fuga centralizado em relação ao observador. ....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 44 – Desenhos possíveis com a estrutura básica com um ponto de fuga (Realizados em sala de aula). ....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 45 – Construção da estrutura básica com um ponto de fuga (1) .....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 46 – Construção da estrutura básica com um ponto de fuga (2) .....</b>	<b>73</b>
<b>Figura 47 – Algumas possibilidades com a estrutura de um ponto de fuga central em relação ao observador. ....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 48 – Resultados obtidos com alunos do 2º ano do ensino Médio fazendo uso da linha do horizonte e de dois pontos de fuga. ....</b>	<b>76</b>
<b>Figura 49 – Construção com dois pontos de fuga e reta auxiliar .....</b>	<b>77</b>
<b>Figura 50 – Construção de prédios e pirâmide em perspectiva parte 01 .....</b>	<b>77</b>
<b>Figura 51 – Construção de prédios e pirâmide em perspectiva parte 02 .....</b>	<b>78</b>
<b>Figura 52 – Imagens Elaboradas por Alunas com uso de Perspectivas e Pontos de Fuga .....</b>	<b>80</b>
<b>Figura 53 – Triângulo Medial .....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 54 – Triângulo Medial com baricentro G, ortocentro H e circuncentro O. ....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 55 – O Ponto Médio do Segmento HO na Reta de Euler.....</b>	<b>84</b>

<b>Figura 56 – Circulo de Nove Pontos – Demonstração por Homotetias .....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 57 – Circulo de Nove Pontos .....</b>	<b>86</b>
<b>Figura 58 – Teorema de Monge: Circunferências e as intersecções de suas retas tangentes .....</b>	<b>87</b>
<b>Figura 59 – Teorema de Monge Fazendo Uso de Triângulos em Perspectiva .....</b>	<b>88</b>
<b>Figura 60 – Construção para solução do PROBLEMA 04.....</b>	<b>89</b>
<b>Figura 61 – Invariância da razão cruzada por projetividade .....</b>	<b>90</b>
<b>Figura 62 – Razão Cruzada de Pontos Co-circulares: caso positivo. ....</b>	<b>93</b>
<b>Figura 63 – Razão Cruzada de Pontos Co-circulares: caso negativo. ....</b>	<b>93</b>
<b>Figura 64 – Invariância da Razão Cruzada por Projeção Estereográfica (01) .....</b>	<b>94</b>
<b>Figura 65 – Invariância da Razão Cruzada por Projeção Estereográfica (02) .....</b>	<b>95</b>
<b>Figura 66 – Cevianas Induzem Conjuntos Harmônicos, produzindo <math>(X, D; B, C) = -1</math> 97</b>	<b>97</b>
<b>Figura 67 – Quadrilátero completo para obter o conjunto harmônico (K, L, M, N). ....</b>	<b>98</b>
<b>Figura 68 – Construção do PROBLEMA 08.....</b>	<b>99</b>
<b>Figura 69 – Construção da Quarta Reta Harmônica Apenas Com Uso de Régua.....</b>	<b>100</b>
<b>Figura 70 – Teorema de Ceva.....</b>	<b>102</b>
<b>Figura 71 – Prova da Relação de Steiner .....</b>	<b>104</b>
<b>Figura 72 – Ponto de Lemoine.....</b>	<b>106</b>
<b>Figura 73 – Teorema de Carnot .....</b>	<b>106</b>
<b>Figura 74 – Prova do Teorema de Carnot.....</b>	<b>107</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
1.1	JUSTIFICATIVA .....	15
1.2	OBJETIVOS .....	16
<b>1.2.1</b>	<b>Geral.....</b>	<b>16</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Específicos .....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>18</b>
2.1	METODOLOGIA .....	19
<b>3</b>	<b>GEOMETRIA EUCLIDIANA: HOMOTETIAS E APLICAÇÕES .....</b>	<b>23</b>
3.1	TEOREMA DE MENELAUS: UMA PROVA POR ÁREAS .....	25
3.2	HOMOTETIAS .....	31
3.3	O TEOREMA DE MENELAUS COMO APLICAÇÃO DE HOMOTETIAS.....	41
3.4	UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE MENELAUS PARA POLÍGONOS CONVEXOS.....	44
3.5	O TEOREMA DE DESARGUES NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA .....	46
<b>4</b>	<b>GEOMETRIA PROJETIVA: ELEMENTOS PRIMITIVOS E AXIOMAS INICIAIS .....</b>	<b>51</b>
4.1	AXIOMAS.....	51
4.2	PROPOSIÇÕES DIRETAS A PARTIR DOS AXIOMAS .....	53
4.3	TRIÂNGULOS E QUADRÂNGULOS .....	54
4.4	PROJETIVIDADE E PERSPECTIVIDADE .....	56
<b>4.4.1</b>	<b>Projetividade .....</b>	<b>57</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Perspectividade .....</b>	<b>57</b>
4.5	PERSPECTIVAS E OS TRIÂNGULOS.....	58
<b>5</b>	<b>TEOREMA DE DESARGUES NA GEOMETRIA PROJETIVA .....</b>	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>UMA METODOLOGIA PARA AULAS NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO .....</b>	<b>65</b>
6.1	A HISTORIA DA GEOMETRIA PROJETIVA E A ARTE .....	65
6.2	O DESENHO DA PERSPECTIVA E A GEOMETRIA PROJETIVA .....	69
<b>6.2.2</b>	<b>Dois Pontos de Fuga e a Linha do Horizonte .....</b>	<b>75</b>
<b>6.2.3</b>	<b>Algumas considerações sobre a metodologia do desenho em perspectiva.....</b>	<b>78</b>
<b>7</b>	<b>APLICAÇÕES E RESOLUÇÕES DE ALGUNS PROBLEMAS.....</b>	<b>81</b>
7.1	O TRIÂNGULO MEDIAL E A RETA DE EULER.....	81

7.2	O CÍRCULO DE NOVE PONTOS .....	84
7.3	ALGUNS PROBLEMAS COM O USO DE HOMOTETIAS .....	86
7.4	PROBLEMAS ENVOLVENDO A GEOMETRIA PROJETIVA .....	89
<b>7.4.1</b>	<b>Conjuntos Harmônicos e Alguns Problemas Com Uso da Razão Cruzada .....</b>	<b>95</b>
<b>7.4.2</b>	<b>Construções Geométricas com o uso apenas de Régua .....</b>	<b>100</b>
7.5	O TEOREMA DE CARNOT .....	102
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>109</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>111</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 JUSTIFICATIVA

As pesquisas e estudos na área de Educação Matemática junto aos resultados apresentados pelos estados e municípios em relação às avaliações externas de Matemática, nos mostram que existem enormes barreiras a serem enfrentadas na compreensão e percepção do espaço, tanto no que diz respeito a forma e desenho quanto a normas e nomes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) indicam que o espaço percebido e visto pela criança é o seu espaço geométrico de estudo, mas apesar de significativo para a sua percepção visual, ela enfrenta grandes dificuldades em realizar desenhos e compreender a noção de profundidade.

No Ensino Médio essa situação permanece, sendo difícil para os alunos compreenderem e realizarem desenhos que apresentem perspectivas e noções de profundidade. Outra problemática é a interpretação matemática de problemas e suas ferramentas de resolução. Dificuldades semelhantes também são enfrentadas pelos professores de Matemática.

Tais problemas e dificuldades nos evidenciam a necessidade dos alunos e professores entrarem em contato com geometrias as quais os auxiliem na realização de desenhos e que os levem à compreensão dessas noções. Também é fundamental o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos os quais forneçam uma bagagem teórica que possa ser aplicada na resolução de problemas que exijam, além do desenho e da interpretação, cálculos corretos.

Nesse contexto, os teoremas da Geometria Projetiva e suas semelhanças com teoremas na Geometria Euclidiana podem se complementar, contribuindo para que o processo de ensino da Geometria seja mais prazeroso e completo para o aluno. As técnicas de desenho que podem ser acrescentadas ao currículo com o uso do desenho em perspectiva e dos pontos de fuga, possibilitam ao aluno uma melhor percepção da Matemática e da arte, vindo a gerar maior significação para o seu conhecimento.

Dentro desse contexto, percebe-se a necessidade de dar subsídio a alunos e professores para uma melhor compreensão dos teoremas da Geometria Euclidiana com suas aplicações à Geometria Projetiva. Assim, poderão ter um bom desempenho no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, dotando-se de técnicas geométricas para a resolução de problemas.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Geral

Esse trabalho tem por objetivo apresentar e desenvolver a Geometria por meio de teoremas e construções os quais possibilitem ao leitor ampliar as habilidades de desenho e perspectiva, levando-o a compreendê-la, bem como auxiliá-lo com técnicas e demonstrações de teoremas. Visa ainda, discorrer sobre as homotetias e aplicações destas, por exemplo o Teorema de Menelaus, na Geometria Euclidiana e aplicações da Geometria Projetiva, com posterior exposição de possibilidades no desenho em perspectiva, bem como na solução de problemas.

### 1.2.2 Específicos

- a) No decorrer desse estudo serão apresentados contextos, teoremas, histórias e obras de arte, os quais visam atender aos objetivos específicos citados a seguir;
- b) Apresentar a história dos teoremas e seus realizadores de forma sintética e contextualizada, de modo a tornar o trabalho mais relacionado com os períodos em que foram alcançados os resultados;
- c) Desenvolver o Teorema de Menelaus com demonstrações que tencionam uma melhor compreensão da geometria, bem como correlacioná-lo a outros teoremas e lemas, especificamente relacionados às homotetias;
- d) Expor e demonstrar os teoremas relacionados as transformações geométricas, mais precisamente aquelas que se correlacionam com resultados importantes sobre as homotetias e compostas de homotetias. Tornar as homotetias uma ferramenta tangível mostrando algumas de suas aplicações e resultados. Apresentar resultados na Geometria Projetiva, de modo a fixar as relações entre construções projetivas e resultados nas homotetias;
- e) Sintetizar o Teorema de Desargues na Geometria Projetiva, fazendo uso de um pequeno número de conceitos desta Geometria, dissertando parte da sua história e seu contexto com aplicações a arte no renascimento de forma a denotar seus aspectos culturais e multidisciplinares;

- f) Exibir os axiomas, as figuras que estruturam e as propriedades da Geometria Projetiva a fim de que sejam desenvolvidos seus conceitos primitivos, como modo de capacitar o leitor com ferramentas teóricas;
- g) Mostrar uma metodologia que envolva experiências de desenho com o uso de perspectivas, realizada com alunos do Ensino Médio, e as suas possibilidades de aplicação aos conceitos da Geometria Projetiva e do desenho com o uso apenas de régua;
- h) Dissertar e resolver problemas de nível olímpico, com a intenção de desenvolver habilidades e fixar os conhecimentos apresentados no decorrer do trabalho, fazendo uso das homotetias, de construções projetivas, dos teoremas abordados e de temas importantes no estudo dos conjugados harmônicos;
- i) Os objetivos elencados tem por finalidade exibir as homotetias na Geometria Euclidiana e resultados básicos da Geometria Projetiva, dando significado maior a esses, mostrando importantes teoremas e as consequências que estes têm no desenvolvimento da perspectiva, na resolução de problemas e demonstração de teoremas.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

No que diz respeito à Geometria Euclidiana, optamos pelos livros influentes na área e pela literatura nacional. Na demonstração e apresentação dos conceitos em Geometria Projetiva, temos como texto base o livro *Projective Geometry*, de COXETER, complementado por outros livros da literatura mundial citados no decorrer do trabalho.

Após exaustiva revisão de literatura, as publicações e dissertações relevantes sobre o estudo de geometrias não Euclidianas, em particular a Geometria Projetiva, mostram que a inserção destas geometrias no currículo da educação básica se configuram como uma possibilidade real e que tem espaço nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica - DCE.

No artigo publicado na Revista Bolema pelos autores (LOVIS e FRANCO, V. S. 2015), lembra que “No Ensino Médio as DCE recomendam apresentar aos estudantes noções de Geometrias não Euclidianas, ao abordar a (...) Geometria Projetiva (...)”, mostrando a partir de sua pesquisa qualitativa, a percepção dos professores participantes sobre as Geometrias não Euclidianas e dando uma amostra da importância de elaborarmos e estudarmos material sobre essas, já que a minoria dos professores tinha conhecimento de tais geometrias.

No referido artigo, os autores citam várias opiniões dos professores sobre a diferença entre as Geometrias não Euclidianas e a Geometria Euclidiana, nos apresentando que um fato importante no estudo de Geometrias não Euclidianas é o que as diferencia da Geometria Euclidiana, tanto nos aspectos formais como intuitivos do processo de apreensão destas Geometrias.

Alguns mencionam o fato de nosso globo ser uma superfície curva e não um “plano”, já outros percebem a noção intuitiva de que duas retas paralelas podem se encontrar no infinito, revelando que isso também diferencia as Geometrias. Intuitivamente e por meio de figuras apresentadas de outras geometrias aos professores, estes vão se apropriando de noções como a *perspectiva* da Geometria Projetiva.

Quanto a materiais para o aluno, (GONÇALVES 2013) expõe possibilidades de investigação e do estudo da Geometria Projetiva ainda no 9º ano do ensino fundamental, fornecendo uma proposta didática para que seja alcançado o aprendizado da Geometria Projetiva através de imagens e construções. Seu método é revelado por meio de atividades propostas que podem guiar também o professor para que se prepare para uma discussão mais profunda sobre essa Geometria.

São apresentadas em (GONÇALVES 2013), algumas técnicas de desenho e da perspectiva na Geometria Projetiva. Suas ideias servem de base para formularmos a nossa proposta para construção de desenhos na sala de aula.

O trabalho de (MALTEZ 2015) nos apresenta demonstrações dos teoremas na Geometria Projetiva, fazendo uso de conceitos da Geometria Descritiva e, apesar de não ser esse o enfoque do nosso estudo, ele demonstrou muita influência na parte matemática, nos auxiliando a desenvolver os teoremas aos quais apresentaremos e tendo conhecimento de técnicas de outra Geometria.

É apresentada uma metodologia por meio da arte em (MALTEZ 2015), que contribuiu para a identificação de possibilidades de apresentação da Geometria Projetiva por meio de obras de arte do Renascimento e sua influência na arte atual. Desse modo, também nos permitiu perceber o quanto esses conceitos geométricos estão presentes nas animações e jogos de computadores.

As demonstrações são consequências de uma seleção de conceitos os quais visam um entendimento mais amplo da geometria. Na Geometria Euclidiana, as realizamos de forma detalhada por meio de teoremas e proposições, sendo ilustradas sempre que possível. Na Geometria Projetiva, optamos por uma apresentação e desenvolvimento mais dedutivo e axiomático, fazendo uso de construções geométricas e propondo uma metodologia para a sala de aula através da História da arte e do desenho em perspectiva.

## 2.1 METODOLOGIA

Num primeiro momento, realizamos uma intensa pesquisa bibliográfica em artigos, dissertações, revistas e materiais publicados de reconhecimento nacional e internacional. Após tal pesquisa e leitura, foram selecionadas aquelas que se adequavam a proposta desse trabalho.

No decorrer da pesquisa foram identificadas técnicas que não são comuns de serem abordadas, optando então por discorrê-las. Alguns conceitos e definições são de conhecimento do leitor, mas, ainda assim foram mostrados de maneira completa, sem que haja a necessidade de o leitor recorrer a fontes complementares.

A parte relativa a educação e ao ensino da Geometria Projetiva por meio de desenhos e da perspectiva se baseou, principalmente, em dissertações publicadas no portal do PROFMAT, bem como em leituras de revistas na área de Educação Matemática.

As demonstrações aos teoremas são parte fundamental deste trabalho, uma vez que mostram a importância da apreensão dos conceitos básicos das Geometrias Euclidiana e Projetiva.

Alguns conceitos são realizados tendo em mente esta intrigante pergunta: “*É possível desenvolver uma geometria sem círculos, distâncias, ângulos, pontos intermediários e paralelismo?*”. A resposta, para a surpresa de muitos, é um sonoro “*sim*”. O que temos é a Geometria Projetiva, um belo e estimulante sistema de proposições, simples como as Euclidianas. A passagem de axiomas e teoremas “óbvios” para teoremas inesperados é vista como o espírito de trabalho Euclidiano, embora os detalhes sigam uma nomenclatura própria, as quais exigem uma percepção cautelosa. Por tal beleza na apresentação, e tamanha facilidade de diálogo com a geometria euclidiana, é que muitos dos seus teoremas foram transportados para esta. Teoremas “simples” na Geometria Projetiva ganham novos graus de dificuldade sob a ótica da Geometria Euclidiana, tendo aplicações a problemas avançados, que tornam mais agradável o estudo dos teoremas da Geometria Projetiva.

Gérard Desargues (1591 – 1661), um engenheiro e arquiteto francês que não era, de fato, um estudioso matemático, porém ávido pela prática e estudo de noções referentes à perspectiva, foi então o primeiro a introduzir o método projetivo na geometria.

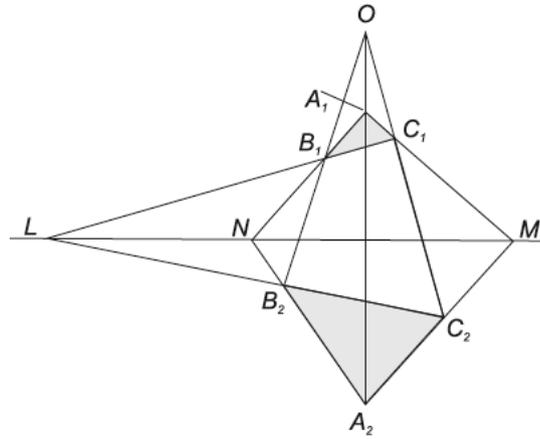
No Renascimento, as artes plásticas e a geometria – dois campos ligados pela necessidade de retratarem a realidade – passaram por uma revolução que as levou a outros níveis de representação e estudos. O Renascimento foi um período da História que começou na Itália, aproximadamente entre fins do século XIV e difundiu-se por toda a Europa até o fim do século XVI, marcado por um renovado interesse pela arte e que elegia a razão como principal forma para alcançar o conhecimento. A matemática e as ciências da natureza foram os grandes influenciadores do projeto estético dos artistas da época. Nesse período os artistas passaram a necessitar de técnicas e conceitos novos para que sua obra se tornasse uma boa representação da realidade, ou muitas vezes de sua fantasia (HEFEZ 1986).

A necessidade de simbolizar cenas onde os personagens refletiam seus estados emocionais e os ambientes em que se encontravam estivessem próximos ao real, fez com que a Geometria Euclidiana, com suas noções de semelhança, proporções e congruências, não fosse mais suficiente para tais obras. Observava-se a necessidade de *perspectivas* com olhares diferentes sobre a arte, principalmente nas obras dos pintores e na arquitetura. Apesar de só ter sido impressa postumamente, a primeira sistematização matemática do conceito de perspectiva foi realizada pelo italiano Leon Battista Alberti em 1435, que foi um filósofo da arquitetura e do urbanismo, pintor e escultor. O artigo de (HEFEZ) nos apresenta que a

proposta de Alberti foi a de pintar o que um só olho vê, recuperando na tela a sensação de profundidade com um jogo de luz e sombra e com a diminuição da intensidade da cor em função da distância. Com isso, a necessidade de um ponto de fuga, representando esse olho, e suas perspectivas a serem recuperadas na tela por meio de projeções.

Pela observação e estudo das técnicas que eram usadas em grande escala pelos artistas renascentistas de seu tempo, Desargues construiu os conceitos básicos da geometria projetiva, mas não foi levado muito a sério pelos matemáticos da época – estes interessados em temas relativos a recém criada geometria analítica. Apesar do pouco crédito dado por pesquisadores matemáticos de sua época, seu trabalho foi observado e redescoberto por Blaise Pascal que, aos 16 anos, elaborou um teorema muito interessante na geometria projetiva, e demonstrou-o com bastante riqueza de detalhes. Por não ser tão simples, e por suas características conceituais, muitos dos teoremas da geometria projetiva foram então transferidos para a geometria euclidiana, pela sua facilidade em ser observado no plano Euclidiano, com termos e apresentação própria. Daí, a importância de apresentá-los, inicialmente, em sua forma conhecida na geometria euclidiana, como motivador para entendê-los na sua origem conceitual – a Geometria Projetiva.

Duas grandes contribuições de Desargues à Geometria Projetiva foram a introdução do Plano Projetivo Real ( $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ), que aproxima a visualização das ideias projetivas no plano Euclidiano e também esclarece a noção de ponto no infinito, e seu famoso teorema fundamental sobre dois triângulos, citado em (EVES 2011) da seguinte forma: *Se dois triângulos, coplanares ou não, situam-se de maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de intersecção dos pares de lados correspondentes são colineares e vice-versa* (ver Figura 1).

**Figura 1 – Teorema de Desargues**

Fonte: Eves, 2011 pág. 360

### 3 GEOMETRIA EUCLIDIANA: HOMOTETIAS E APLICAÇÕES

O mais belo tratado de Geometria é *Os Elementos* escrito por Euclides no século III a.C. com noções básicas, também chamadas de entes primitivos, algumas das quais listamos abaixo, da tradução feita por Bicudo (2009) de *Os Elementos*.

1. Ponto é aquilo que nada é parte.
2. Linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.

(BICUDO, 2009, p. 97)

As definições acima são uma amostra da apresentação filosófica e concisa como os gregos sintetizavam os entes primitivos, de modo a não deixar dúvidas sobre tais entes. Apesar de suas grandes contribuições para a Matemática, não sabemos muito sobre Euclides, a não ser alguns fatos, como por exemplo, ele ter sido o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual foi professor. Desconhecem-se também sua data e local de nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. São muitos os relatos de histórias envolvendo Euclides, em uma delas, contada por Stobaues, é dito que Euclides, ao ser indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matemática que estava sendo ensinada, ordenou a seu escravo que desse a ele uma moeda “para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo”. É interessante citar a importância dos *Elementos* para o pensamento científico:

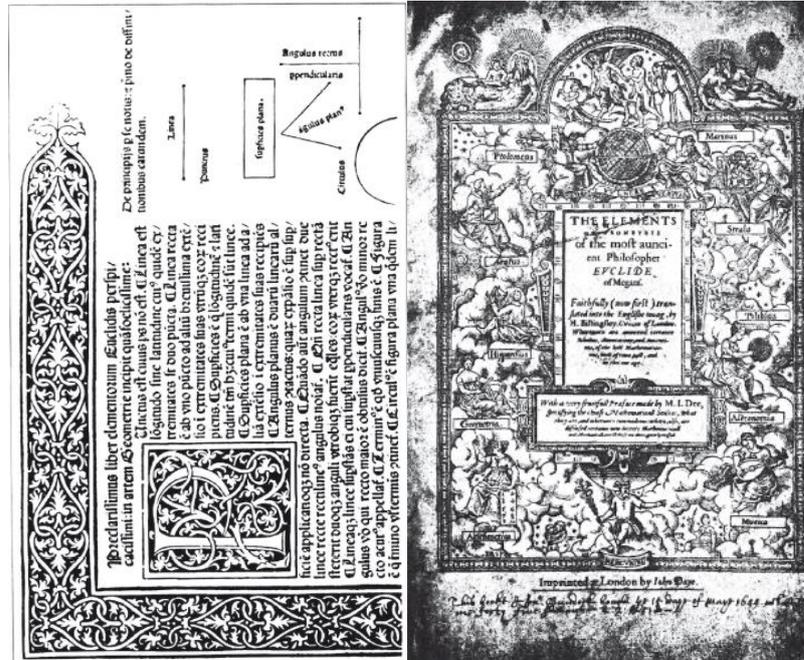
Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

(EVES, 2011, pág. 167)

Infelizmente, mesmo com tamanha divulgação e reprodução desse tratado, não se tem registro de nenhuma cópia dos *Elementos* que remeta ao período de seu autor. A cópia mais antiga que se tem conhecimento remete ao século X e, apesar daquela que foi mais reproduzida ter sido baseada em registros de 700 anos depois de Euclides, os teoremas e

demonstrações, salvo supressões e acrescimentos, permanecem como Euclides escreveu. Os historiadores baseiam isso nas citações de matemáticos do período de Euclides e em estudos feitos nos materiais mais antigos descobertos dos Elementos.

**Figura 2 – Parte de uma página da primeira edição impressa dos Elementos de Euclides e Página de rosto da tradução para o inglês dos Elementos de Euclides (1570).**



Fonte: Adaptado de( EVES, 2011, p. 171-172).

Os objetos geométricos são também introduzidos nas definições de Euclides. Nesse capítulo serão apresentadas relações entre pontos e retas, tais como a colinearidade. Para isso realizaremos um trabalho cuidadoso com teoremas nos triângulos, teoremas esses que serão importantes na compreensão dos resultados mostrados no capítulo seguinte.

O ensino e a aprendizagem da Geometria ficaram por um longo tempo em segundo plano nos currículos do ensino básico de matemática das escolas, sendo até mesmo retirado por completo em alguns casos. Para (PAVANELLO 1993), o abandono do ensino da Geometria nas salas de aula pode ser explicado devido ao contexto histórico-político do problema. A autora nos esclarece que apesar do abandono da geometria no ensino ser uma tendência geral, era um problema mais evidente no ensino público, problema agravado pelo fato do professor poder elaborar seu programa de acordo com a necessidade de seus alunos. Esse fato possibilitou que professores de matemática, sentindo dificuldades para trabalhar com a geometria, fossem excluindo-a de suas aulas ou a deixando para o final do ano letivo, usando a possível necessidade de tempo para lecionar os outros conteúdos, como um motivo para não abordá-la.

Como resultado de pesquisas na área de Educação Matemática e amplamente debatido nos artigos, encontros e publicações da área, tem-se que o pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização, ou seja, a criança é capaz de identificar uma figura apenas observando sua forma, aparência física e geral, enfim, por sua imagem. A partir daí, têm início as representações mentais que lhe permitirão trazer à memória objetos do espaço. Assim, o estudo da Geometria não só por teoremas e fórmulas é essencial para o aprendizado.

Neste contexto, percebe-se como é significativo e interessante o ensino da Geometria no Ensino Médio, uma vez que os alunos tiveram pouco contato com esta na Educação Básica. A capacitação do estudante com habilidades necessárias para seu desenvolvimento espacial e geométrico deve ser parte fundamental do currículo do Ensino Médio e o professor deve dispensar um tempo para suprir os problemas decorrentes da ausência desse aprendizado na Educação Básica.

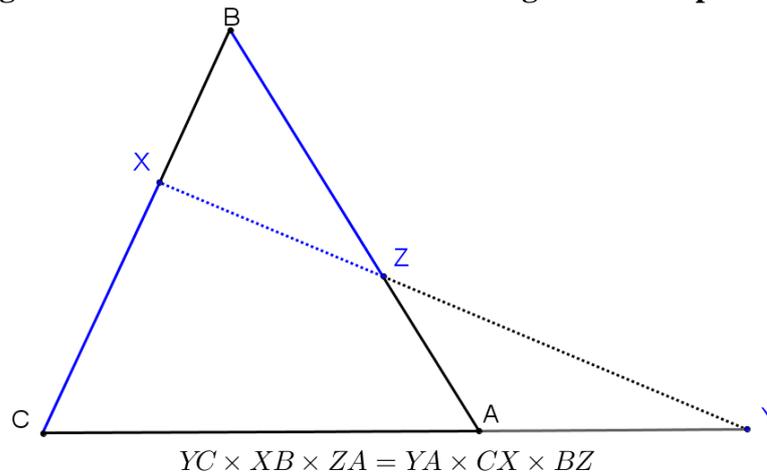
No que tange às necessidades de realizar técnicas de resolução de problemas, as demonstrações são essenciais para dar maior confiança ao professor. Com esse intuito, desenvolvemos a parte relativa a Geometria Euclidiana, iniciando pelo importante Teorema de Menelaus.

### 3.1 TEOREMA DE MENELAUS: UMA PROVA POR ÁREAS

Os teoremas que norteiam nosso texto têm, em sua definição na Geometria Euclidiana Plana, uma forte relação com o teorema de Menelaus, sendo esse o motivo de iniciarmos pela sua apresentação, uma vez que, o utilizaremos de forma sistemática na demonstração do Teorema de Desargues.

O Teorema de Menelaus em sua forma básica pode ser escrito como: *Dada uma reta que intersecta (corta) os três lados de um triângulo, seis segmentos são construídos nos lados. O produto de três segmentos não adjacentes é igual ao produto dos outros três.*

**Figura 3 – Teorema de Menelaus como igualdade de produtos.**



Fonte: Elaborada pelo autor

Normalmente, em vez de uma igualdade entre produtos, o Teorema de Menelaus apresenta a relação como um quociente entre os segmentos não adjacentes, cujo valor é igual a 1 ou igual a  $-1$  (se são utilizados segmentos direcionados). Em (MUNIZ NETO 2013) temos a seguinte apresentação do Teorema de Menelaus:

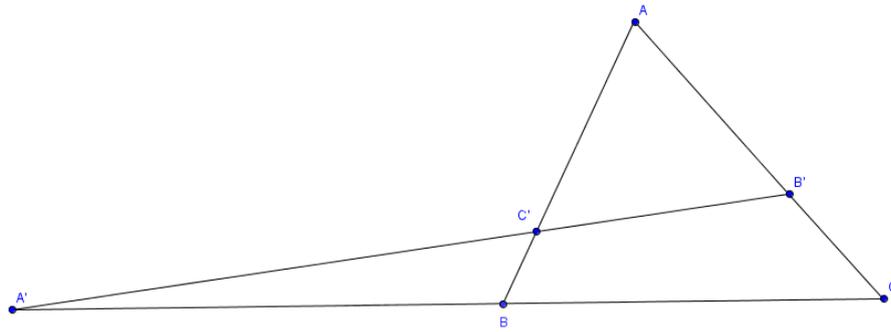
*Seja ABC um triângulo e A'B'C' pontos sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC. Então*

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1$$

*se, e só se, os pontos A', B' e C' forem colineares<sup>1</sup> (ver Figura 4).*

<sup>1</sup> Neste caso XY foi considerado como segmento ordinário que une X e Y, orientado de X para Y. Assim  $XY = -YX$ . Ainda, dados X, Y e Z pontos colineares, denota-se

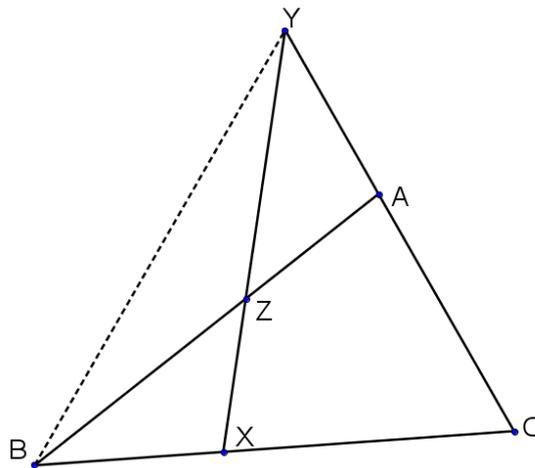
$$\frac{XY}{YZ} = \begin{cases} \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}, & \text{se } XY \text{ e } YZ \text{ têm mesmas orientações.} \\ -\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}, & \text{se } XY \text{ e } YZ \text{ têm orientações distintas.} \end{cases}$$

**Figura 4 – Teorema de Menelaus**

Fonte: Adaptada de Caminha.

O Teorema de Menelaus é, porém, um nome criado fora de seu tempo. Na verdade, Menelaus desenvolveu um teorema análogo para a geometria esférica. O teorema para a geometria euclidiana foi exposto depois de Menelaus. No entanto, a maioria das referências menciona o teorema para geometria plana como “Teorema de Menelaus”.

Devido a sua importância nos resultados que iremos exibir, é relevante a demonstração para esse teorema. Segue uma prova por áreas, baseada no seguinte enunciado, também chamada de *versão básica do Teorema de Menelaus*:

**Figura 5 – Teorema de Menelaus em sua forma básica**

Fonte: Elaborada pelo Autor.

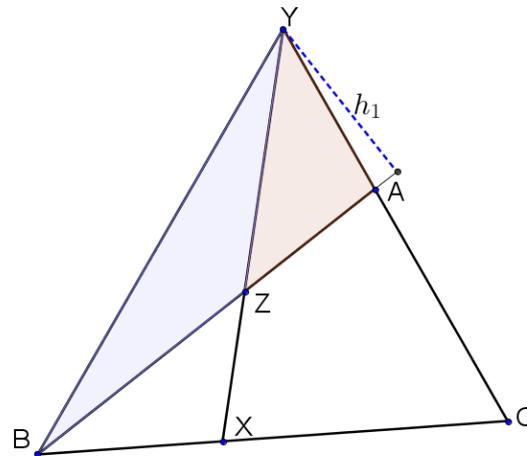
Seja  $ABC$  um triângulo, e sejam  $X, Y$  e  $Z$  pontos nas retas formadas por  $BC, CA$  e  $AB$  respectivamente (ver Figura 5). Se  $X, Y$  e  $Z$  são colineares, então

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

**Prova:** Denotaremos por  $(PQR)$  a área do  $\Delta PQR$ . Considerando o triângulo abaixo (ver Figura 6), vejamos que

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{(AYZ)}{(BYZ)} \quad (1)$$

**Figura 6 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas.**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

De fato,

$$(AYZ) = \frac{AZ \cdot h_1}{2} \quad (i)$$

$$(BYZ) = \frac{ZB \cdot h_1}{2} \quad (ii)$$

por (i) e (ii), segue-se que

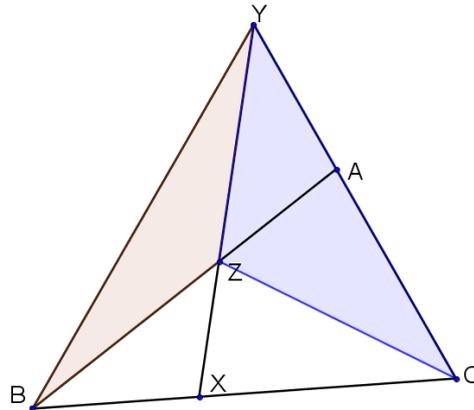
$$\frac{(AYZ)}{(BYZ)} = \frac{\frac{AZ \cdot h_1}{2}}{\frac{ZB \cdot h_1}{2}}$$

$$\therefore \frac{(AYZ)}{(BYZ)} = \frac{AZ}{ZB}.$$

Vejamos também que,

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(BYZ)}{(CYZ)} \quad (2)$$

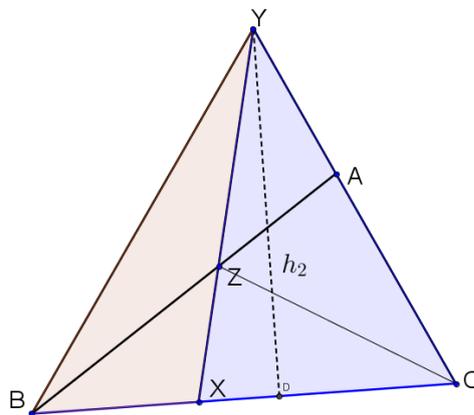
**Figura 7 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas (2)**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Ora,  $(CXY) = (CXZ) + (CYZ)$  (\*) e  $(BXY) = (BXZ) + (BYZ)$  (\*\*).

**Figura 8 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas(3)**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como,

$$(BXY) = \frac{BX \cdot h_2}{2} \quad (iii)$$

e

$$(CXY) = \frac{CX \cdot h_2}{2} \quad (iv)$$

então,

$$\frac{(BXY)}{(CXY)} = \frac{\frac{BX \cdot h_2}{2}}{\frac{CX \cdot h_2}{2}} = \frac{BX}{XC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XC \cdot (BXY) = BX \cdot (CXY).$$

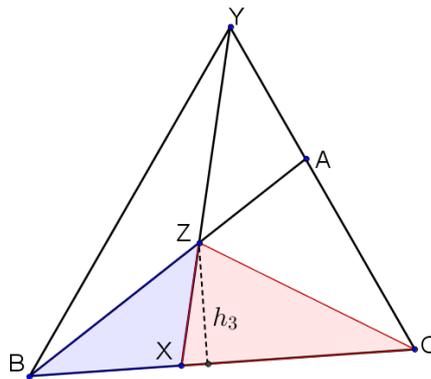
Por (\*) e (\*\*),

$$\begin{aligned} XC \cdot [(BXZ) + (BYZ)] &= BX \cdot [(CXZ) + (CYZ)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow XC \cdot (BXZ) + XC \cdot (BYZ) &= BX \cdot (CXZ) + BX \cdot (CYZ) \end{aligned} \quad (v)$$

Mas, observando a (Figura 9),

$$\begin{aligned} \frac{(BXZ)}{(CXZ)} &= \frac{\frac{BX \cdot h_3}{2}}{\frac{CX \cdot h_3}{2}} = \frac{BX}{XC} \\ \therefore XC \cdot (BXZ) &= BX \cdot (CXZ) \end{aligned} \quad (***)$$

**Figura 9 – Teorema de Menelaus: Demonstração por áreas (4)**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Logo, por (\*\*\*) em (v), segue-se que

$$XC \cdot (BYZ) = BX \cdot (CYZ)$$

donde

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(BYZ)}{(CYZ)}.$$

De modo análogo a (1), obtém-se que

$$\frac{CY}{YA} = \frac{(CYZ)}{(AYZ)} \quad (3)$$

Vale a seguinte igualdade

$$\frac{(AYZ)}{(BYZ)} \cdot \frac{(BYZ)}{(CYZ)} \cdot \frac{(CYZ)}{(AYZ)} = 1.$$

Daí, e por (1), (2) e (3), podemos concluir que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

■

O Teorema de Menelaus completo requer que façamos outras considerações, sendo assim o demonstraremos por meio de homotetias.

### 3.2 HOMOTETIAS

Serão necessários alguns resultados e teoremas envolvendo as homotetias, portanto as definiremos e exibiremos propriedades e algumas de suas consequências. (LIMA, 2011) nos apresenta que a homotetia de centro  $O$  e razão  $k \neq 0$  no plano  $\Pi$  é uma transformação  $H: \Pi \rightarrow \Pi$  que associa a cada ponto  $P$  em  $\Pi$  o ponto  $P_1 = H(P)$  tal que  $\overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ .

Na notação vetorial temos, ainda segundo (LIMA, 2011), que dados os pontos  $P$  e  $Q$  no plano, com  $H(P) = P_1$  e  $H(Q) = Q_1$ , ocorre

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OQ} - k \cdot \overrightarrow{OP} = k \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = k \cdot \overrightarrow{PQ}$$

ou seja,

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = k \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (1)$$

Assim, as homotetias ampliam ou reduzem segmentos.

Uma semelhança de razão  $r$  no plano  $\Pi$ , onde  $r$  é um número real positivo, é uma transformação  $\sigma: \Pi \rightarrow \Pi$  tal que

$$d(\sigma(P), \sigma(Q)) = r \cdot d(P, Q), \text{ com } P, Q \in \Pi.$$

Podemos então concluir que uma homotetia de razão  $r$  é uma semelhança de razão  $|r|$ . De fato temos, por (1), que

$$d(H(P), H(Q)) = |\overrightarrow{P_1Q_1}| = |r \cdot \overrightarrow{PQ}| = |r| \cdot |\overrightarrow{PQ}| = |r| \cdot d(P, Q).$$

**PROPOSIÇÃO 3.2.1** Toda semelhança é um transformação injetiva.

**Prova.** Dada a semelhança  $\sigma$ , se  $A \neq B$  então  $d(A, B) \neq 0$  logo

$$d(\sigma(A), \sigma(B)) = r \cdot d(A, B) \neq 0$$

Donde conclui-se que  $\sigma(A) \neq \sigma(B)$ .

■

**PROPOSIÇÃO 3.2.2** Uma semelhança  $\sigma$  transforma uma reta  $s$  numa reta  $s' = \sigma(s)$ .

**Prova.** Basta observarmos, inicialmente que, sendo  $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ , pela relação de semelhança que leva  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$  e  $C$  em  $C'$ , é possível concluir que  $d(A', C') + d(C', B') = d(A', B')$ . Com isso temos que a semelhança leva segmento em segmento de reta, e ainda preserva a ordenação desses pontos colineares.

Agora, sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos em  $s$ , com  $\sigma(A) = A'$ ,  $\sigma(B) = B'$  e seja  $s'$  a reta que passa pelos pontos  $A'$  e  $B'$ . Dado qualquer ponto  $C$  na reta  $s$ , vamos verificar que sua imagem  $\sigma(C) = C'$  deverá pertencer a reta  $s'$ . Suponhamos que  $C$  pertença ao segmento  $AB$ . Então, pelo que vimos acima,  $C'$  está no segmento  $A'B'$ , logo  $C'$  pertence a reta que liga  $A'$  a  $B'$ . Analogamente, podemos verificar os casos em que  $B$  está entre  $C$  e  $A$  ou  $A$  está entre  $B$  e  $C$ .

Com isso mostramos que os pontos da reta  $s$  são transformados pela semelhança  $\sigma$  em pontos da reta  $s'$ .

Agora vamos mostrar a recíproca. Para tal, sem perda de generalidade, seja  $C'$  um ponto da reta  $s'$  e suponhamos que  $A'$  esteja entre  $B'$  e  $C'$ . Seja  $C$  o ponto da reta  $s$ , tal que  $A$  esteja entre  $B$  e  $C$  e  $k \cdot d(C, A) = d(C', A')$ . Assim  $\sigma(C)$  é um ponto de  $s'$ , com  $A'$  entre  $B'$  e  $C'$  tal que  $d(\sigma(C), A') = d(C', A')$ , logo  $\sigma(C) = C'$ . Assim todos os pontos de  $s'$  são imagens de pontos da reta  $s$  por  $\sigma$ . Concluimos então que  $\sigma(s) = s'$ .

■

**PROPOSIÇÃO 3.2.3** Semelhança preserva ângulo entre retas.

**Prova.** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas intersectando-se no ponto  $A$ ; e  $B$  e  $C$  pontos distintos de  $A$  pertencentes a  $r$  e  $s$ , respectivamente. Sejam agora  $\sigma(A) = A'$ ,  $\sigma(B) = B'$ ,  $\sigma(C) = C'$ ,  $k$  a razão da semelhança,  $\sigma(r) = r'$  e  $\sigma(s) = s'$ . Daí ocorre que

$$d(A', B') = k \cdot d(A, B),$$

$$d(A', C') = k \cdot d(A, C),$$

$$d(B', C') = k \cdot d(B, C).$$

Logo, por (LLL) os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes. Com isso os ângulos correspondentes são iguais, e daí o ângulo formado pelas retas  $s'$  e  $r'$  é igual ao formado pelas retas  $r$  e  $s$ .

■

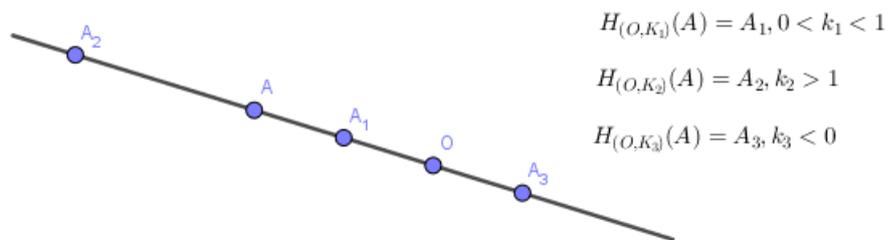
Um interessante resultado da proposição acima é o fato de, por preservar ângulos, a semelhança não altera a relação entre os pontos de um triângulo e seus lados. Assim, podemos obter o seguinte resultado.

**COROLÁRIO 3.2.1** Semelhança preserva os pontos notáveis de um triângulo.

Denotaremos por  $H_{O,k}$  a homotetia de centro  $O$  e razão  $k$ .

Segue na Figura 10 uma ilustração do que ocorre com o ponto  $A$  em relação a algumas homotetias de mesmo centro  $O$ , mas com razões diferentes.

**Figura 10 – Homotetias de centro  $O$ .**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se  $k > 0$  a homotetia chama-se *direta* e se  $k < 0$ , *inversa*. Se  $k = 1$  então  $H_{O,k} = H_{O,1}$ , a transformação *identidade* (WAGNER 2007). Podemos dizer ainda que quando  $k = -1$ , a transformação é uma simetria (rotação de  $180^\circ$  em torno de um ponto) em relação ao centro  $O$ .

As homotetias possuem as seguintes propriedades:

**PROPRIEDADE 1 (Colinearidade)** Se  $H_{O,k}$  leva  $A$  em  $A'$ , então  $O, A$  e  $A'$  são colineares.

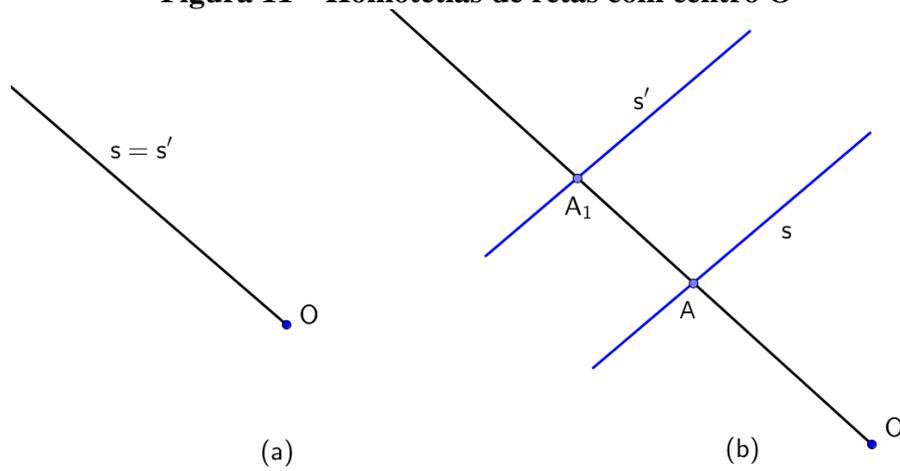
**PROPRIEDADE 2** Se  $H(A) = A', H(B) = B'$  e  $H(C) = C'$ , e  $A, B, C$  são colineares, então  $A', B', C'$  são também colineares.

**PROPRIEDADE 3 (Concorrência)** Se  $H_{O,k}(A) = A', H_{O,k}(B) = B'$  e  $H_{O,k}(C) = C'$ , então  $AA', BB', CC'$  são concorrentes em  $O$ .

**PROPRIEDADE 4** Se o centro  $O$  de uma homotetia pertence a uma reta  $s$  então a imagem  $s'$  é coincidente com  $s$  (ver Figura 11(a)).

**PROPRIEDADE 5 (Paralelismo)** Se  $H_{O,k}(A) = A'$  e  $H_{O,k}(B) = B'$ , então  $AB \parallel A'B'$ . Em outras palavras, se o centro  $O$  de uma homotetia  $H_{O,k}$  não pertence a uma reta  $s$ , então a imagem  $s'$  será uma reta paralela a  $s$  (ver Figura 11(b)).

**Figura 11 – Homotetias de retas com centro O**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos agora obter alguns resultados interessantes sobre as homotetias.

**PROPOSIÇÃO 3.2.4**  $(H_{O,k})^{-1} = H_{O,\frac{1}{k}}$ .

**Prova.** Sejam  $H = H_{O,k}$ ,  $H' = H_{O,\frac{1}{k}}$ ,  $A_1 = H(A)$ ,  $A' = H'(A_1)$ , vamos provar que  $A' = A$ .

Assim  $H'$  será a inversa de  $H$ . Ora, por  $H$ , temos que

$$\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Mas, temos por  $H'$  que,

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OA_1}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$$

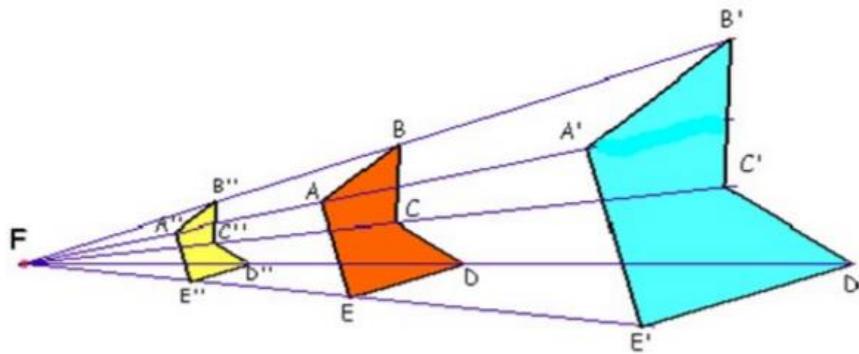
ou seja,

$$A' = A.$$

■

Vejam os exemplos de homotetias na Figura 12 em relação ao polígono  $ABCDE$ .

**Figura 12 – Homotetias da figura ABCDE**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Apresentaremos mais alguns resultados importantes sobre as homotetias, os quais auxiliarão nas ideias necessárias à demonstração do Teorema de Menelaus. Mas, antes disso, vejamos a definição de Combinações afins e suas aplicações ao estudo das homotetias por meio dos vetores.

A soma de vetores é algo já trabalhado neste texto, mas faz sentido falarmos em soma de pontos? No decorrer de algumas demonstrações podem ser necessários cálculos relacionados a pontos, em vez de vetores. Sendo assim, observemos que um vetor pode ser definido como a diferença de dois pontos; esse conceito já era utilizado pelos pioneiros do cálculo vetorial, Burali-Forti e Marcolongo. O significado da palavra “vetor” varia entre “o condutor” e “o transportador”; de fato como  $B - A = \overrightarrow{AB}$ , temos formalmente,  $B = \overrightarrow{AB} + A$ , o que permite a interpretação de que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  transporta o ponto  $A$  para o ponto  $B$ .

Sigamos a definição apresentada em (LIMA 2011), de acordo com a convenção acima: podemos definir para dois pontos  $A, B$ , e números reais  $\lambda, \mu$ , com  $\lambda + \mu = 1$ , um novo ponto, a *combinação afim*  $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$ . Por definição,

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot B = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ se } \lambda + \mu = 1.$$

Como  $\lambda = 1 - \mu$ , temos

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot B = (1 - \mu) \cdot A + \mu \cdot B = A + \mu \cdot (B - A) = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Veja que  $A + \mu \cdot \overrightarrow{AB} = C$ , equivale a  $\overrightarrow{AC} = \mu \cdot \overrightarrow{AB}$ .

**TEOREMA 3.2.1** Sejam as homotetias  $H_1 = H_{O_1, k_1}, H_2 = H_{O_2, k_2}, H = H_{O, k}$ , e ainda, seja  $H = H_2 \circ H_1$ . Então,

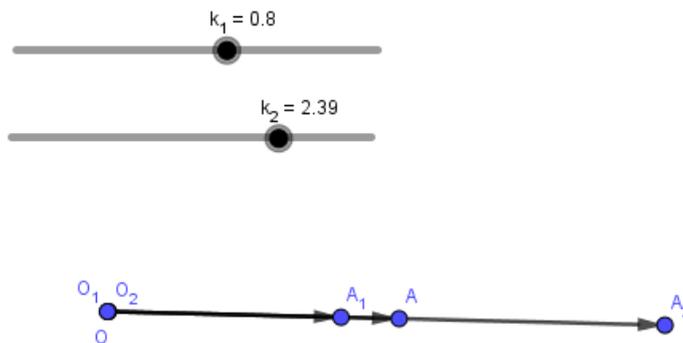
(i)  $k_1 \cdot k_2 = 1$  se, e somente se,  $H$  é uma translação.

(ii) Se  $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ , então  $H$  é uma homotetia de razão  $k_1 \cdot k_2$ .

**Prova.** O caso em que os centros coincidem é trivial, vejamos:

Seja  $H_1(A) = A_1$ , donde  $\overrightarrow{OA_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{OA}$ , fazendo  $O_1 = O$ . Seja ainda,  $H_2(A_1) = A_2$ , donde  $\overrightarrow{OA_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{OA_1}$ , logo é verdade que  $\overrightarrow{O[H_2 \circ H_1(A)]} = \overrightarrow{OA_2} = k_2 \cdot (k_1 \cdot \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OH_{O, k_1 \cdot k_2}(A)}$ . Como  $A$  é arbitrário, conclui-se que  $H_2 \circ H_1 = H_{O, k_1 \cdot k_2}$ , o que nos dá  $k = k_1 \cdot k_2$ .

**Figura 13 – Homotetia Composta como produto da razão escalar por vetor.**



Fonte: Elaborado Pelo Autor.

(i) Sejam  $A$  um ponto qualquer,  $H_1(A) = A_1$  e  $H_2(A_1) = A_2$ , donde  $H(A) = A_2$ . Vetorialmente, teremos

$$\overrightarrow{O_1A_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A}$$

ainda,

$$\overrightarrow{O_2A_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{O_2A_1}$$

Donde segue-se que,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_2A_2} &= k_2 \cdot (\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A_1}) \\ &= k_2 \cdot (\overrightarrow{O_2O_1} + k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A}) \\ &= k_2 \cdot \overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A} \end{aligned}$$

Daf teremos que,

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A_2}$$

Segue-se daí,

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AO_1} - \overrightarrow{O_2O_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A} \quad (*)$$

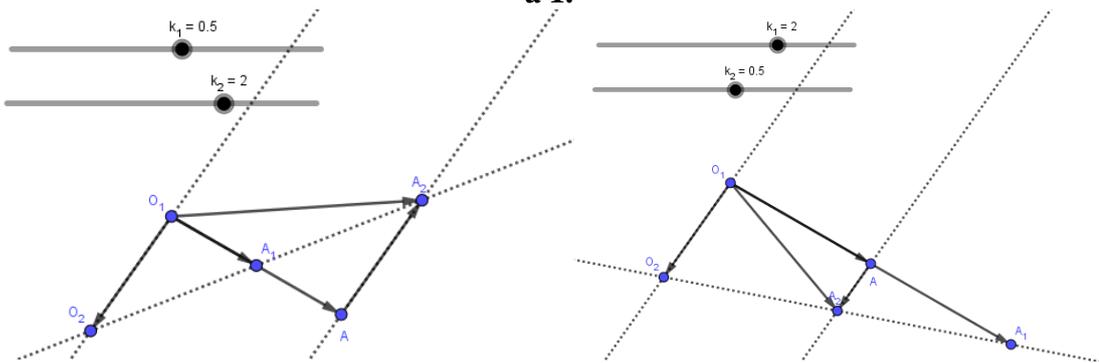
Em particular, quando  $k_1k_2 = 1$ ,  $H$  será uma translação. De fato, por (\*) teremos,

$$\overrightarrow{AH(A)} = \overrightarrow{AA_2} = (1 - k_2) \cdot \overrightarrow{O_1O_2} =: v.$$

Isto implica que  $\overrightarrow{AH(A)}$  é constante e igual a  $v$ , para todo  $A \in \Pi$ .

Ora, considerando a translação  $T_v$  do plano que leva o ponto  $A$  no ponto  $A' = A + v$ , com  $v = (1 - k_2) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ , podemos concluir que  $H(A) = T_v(A), \forall A \in \Pi$ , donde segue que  $H = T_v$ .

**Figura 14 – Translações resultantes quando o produto das razões das Homotetias é igual a 1.**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

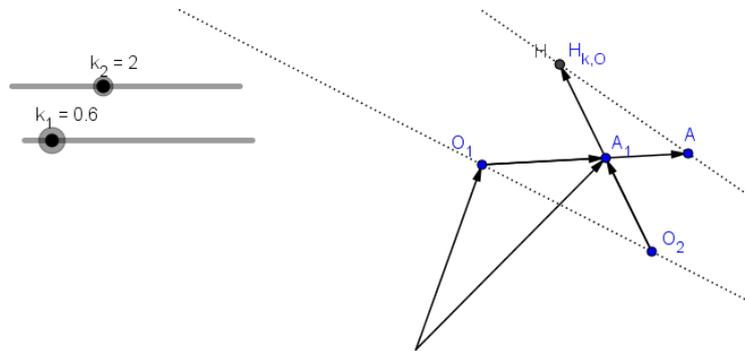
(ii) Agora, para provarmos que  $H$  é uma homotetia, devemos então provar que existem um ponto  $O$  e um número real  $k \neq 0$ , de modo que

$$k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH(A)} = \overrightarrow{OA_2}, \forall A \in \Pi.$$

Daí,

$$\begin{aligned} k\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2A_2} \\ k\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OO_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA}) \\ (k - k_2k_1)\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OO_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1\overrightarrow{O_1O} \end{aligned} \quad (**)$$

**Figura 15 – Homotetia (H) composta de duas homotetias com razões cujo produto é diferente de 1: visão vetorial.**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

Tal igualdade equivale a  $\overrightarrow{OA_2} = k \overrightarrow{OA}$ . Logo, (\*\*) nos diz que o vetor  $\overrightarrow{OO_2} + k_2 \cdot \overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1 \cdot \overrightarrow{O_1O}$  é um múltiplo de qualquer vetor, uma vez que  $A$  é arbitrário. Logo esse vetor deverá ser nulo. Assim,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO_2} + k_2 \cdot \overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1 \cdot \overrightarrow{O_1O} = \vec{0} \\ k - k_2k_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} O = \frac{(1 - k_2)}{(1 - k_1k_2)} \cdot O_2 + \frac{k_2(1 - k_1)}{(1 - k_1k_2)} \cdot O_1 \\ k = k_2k_1 \end{cases}$$

A relação acima será possível ao construirmos a *combinação afim* dos pontos  $O_2, O_1$ .

Assim, utilizando estes valores como candidatas a centro e razão de  $H$ , obtemos que (\*\*) se verifica, para todo  $A$  no plano, ou seja,  $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OH(A)} = k \overrightarrow{OA}, \forall A \in \Pi$ , donde  $H = H_2 \circ H_1$  é a homotetia de centro  $O$  (o qual pertence a reta  $O_1O_2$ )<sup>2</sup> e razão  $k = k_1k_2$ .

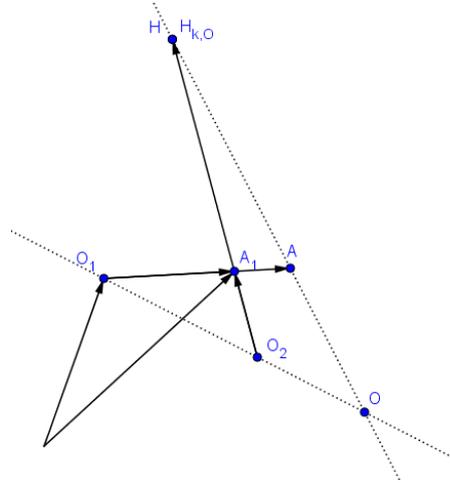
■

<sup>2</sup>Vejamos o que ocorre com a soma dos coeficientes dos pontos  $O_2$  e  $O_1$ ,

$$(1 - k_2) + k_2(1 - k_1) = 1 - k_2 + k_2 - k_1k_2 = 1 - k_1k_2.$$

Logo,  $O$  é uma média ponderada de  $O_1$  e  $O_2$ , o que nos diz que  $O$  pertence a reta  $O_2O_1$ .

**Figura 16 – Homotetia composta: colinearidade entre os centros.**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

**ESCÓLIO** Dados uma translação  $T_v$  e uma homotetia  $H_{O,k}$ , com  $k \neq 1$ , existe um único ponto  $O'$  tal que  $(H_{O,k})^{-1} \circ H_{O',k} = T_v$ .

**Prova.** Por (\*) na página 35, com as mesmas notações, consideremos  $O_2 = O, k_1 = k, k_2 = k^{-1}$  e  $O_1 = O'$ , de modo que  $O'$  é o único ponto do plano satisfazendo  $v = (1 - k^{-1})\overrightarrow{O'O}$ . Logo,

$$\overrightarrow{AH(A)} = (1 - k^{-1})\overrightarrow{O'O} = v.$$

■

Outro resultado importante que podemos obter é apresentado a seguir.

**COROLÁRIO 3.2.1** Considere  $n$  homotetias,  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , com  $H_i = H_{O_i, k_i}, 1 \leq i \leq n$ .

Então, se  $H = H_n \circ \dots \circ H_1$

i)  $k_1 \dots k_n = 1 \Leftrightarrow H$  for uma translação.

ii)  $k_1 \dots k_n \neq 1 \Rightarrow H$  é uma homotetia de razão  $k_1 \dots k_n$ .

**Prova.** Mostremos por indução em  $n \geq 2$ :

O caso  $n = 2$  é verificado pelo **TEOREMA 3.2.1**.

- Suponha, por hipótese de indução (H.I), o resultado válido para  $n \geq 2$  e considere  $n + 1$  homotetias  $H_1, H_2, \dots, H_n, H_{n+1}$ , segunda a notação do enunciado.
- Se  $k_1 \dots k_n k_{n+1} = 1$ , então teremos duas possibilidades:

Caso  $k_{n+1} \neq 1$ : daí segue que,  $k_1 \dots k_n \neq 1$ , implicando (por H.I.) que a composta  $H_n \circ \dots \circ H_1$  é uma homotetia de razão  $k_1 \dots k_n$ . Assim pela composição da

homotetia  $H_{n+1}$  com essa homotetia obtida, teremos pelo **TEOREMA 3.2.1** que,  $H = H_{n+1} \circ (H_n \circ \dots \circ H_1)$  é uma translação.

Caso  $k_{n+1} = 1$ : daí  $k_1 \dots k_n = 1$ , donde segue, por H.I, que a composta  $H_n \circ \dots \circ H_1$  é uma translação e daí

$$H = H_{n+1} \circ (H_n \circ \dots \circ H_1) = Id \circ (H_n \circ \dots \circ H_1) = H_n \circ \dots \circ H_1,$$

donde conclui-se que  $H$  é uma translação.

- Se  $k_1 \dots k_n k_{n+1} \neq 1$ , teremos então três casos:

(I)  $k_1 \dots k_n = 1$  e  $k_{n+1} \neq 1$ ;

(II)  $k_1 \dots k_n \neq 1$  e  $k_{n+1} = 1$ ;

(III)  $k_1 \dots k_n \neq 1$  e  $k_{n+1} \neq 1$ .

Iniciemos com o caso (I). Por H.I.,  $H_n \circ \dots \circ H_1 = T_v$ . Pelo **ESCÓLIO**, existe um único  $O' \in \Pi$ , tal que

$$(H_{O_{n+1}, k_{n+1}})^{-1} \circ H_{O', k_{n+1}} = T_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} H &= H_{n+1} \circ (H_n \circ \dots \circ H_1) = H_{n+1} \circ T_v = \\ &= H_{n+1} \circ \left( (H_{O_{n+1}, k_{n+1}})^{-1} \circ H_{O', k_{n+1}} \right) = \\ &= (H_{n+1} \circ H_{n+1}^{-1}) \circ H_{O', k_{n+1}} = \\ &= Id \circ H_{O', k_{n+1}} = H_{O', k_{n+1}} \\ &\therefore H = H_{O', k_{n+1}}. \end{aligned}$$

Assim temos que  $H$  é uma homotetia de razão  $k_{n+1} = k_1 \dots k_n k_{n+1}$ .

Para o caso (II), por H.I.,  $H_n \circ \dots \circ H_1$  é uma homotetia de razão  $k_1 \dots k_n$ , e sendo  $k_{n+1} = 1$ , a homotetia  $H_{n+1} = Id$ . Teremos então que,  $H = Id \circ (H_n \circ \dots \circ H_1) = H_n \circ \dots \circ H_1$  é uma homotetia de razão  $k = k_1 \dots k_n \cdot 1 = k_1 \dots k_n \cdot k_{n+1}$ .

Finalmente, para o caso (III), por H.I.,  $H_n \circ \dots \circ H_1 = H'$  é uma homotetia de razão  $k_1 \dots k_n$ . Logo teremos pelo **TEOREMA 3.2.1** que  $H_{n+1} \circ H' = H$  é uma homotetia de razão  $k = k' k_{n+1} = k_1 \dots k_n k_{n+1}$ .

■

O Corolário anterior nos diz que a composta de um número qualquer de homotetias ou é uma homotetia ou é uma translação. Em particular, se esta composta fixar um ponto  $O$ , deverá então ser uma homotetia de centro em  $O$ , cuja razão é igual ao produto entre as razões das homotetias que a compõem.

**LEMA 3.2.1** Se uma homotetia  $H_{O,k} = H$  leva uma reta  $r$  nela mesma, com  $O \notin r$ , então  $k = 1$ .

**Prova.** Essencialmente, o Lema é a contra-positiva da PROPRIEDADE 5 de homotetias. Suponha que  $H_{O,k} = H$  leva uma reta  $r$  nela mesma, com  $O \notin r$ . Seja  $A \in r$  de modo que  $H(A) = A'$ ; assim, por hipótese,  $A' \in r$ . Chamemos agora de  $s$  a reta que passa pelo centro  $O$  e pelo ponto  $A$ . Assim  $r \cap s = A$  e, como as retas  $r$  e  $s$  são invariantes por  $H$ , temos que  $r \cap s = A'$ , donde segue que  $H(A) = A' = A$ . Logo,  $H$  é a identidade e  $k = 1$ . ■

**LEMA 3.2.2** Sejam as homotetias  $H_{O_1,k_1}, H_{O_2,k_2}, \dots, H_{O_n,k_n}$  com  $O_1, O_2, \dots, O_n \in r$ . Então teremos  $H(r) = r$ , onde  $H(r) = H_{O_n,k_n} \circ \dots \circ H_{O_2,k_2} \circ H_{O_1,k_1}(r)$ .

**Prova .** Realizaremos a demonstração por indução em  $n$ .

(1) Para  $n = 1$ , teremos pela PROPRIEDADE 4 que  $H_{O_1,k_1}(r) = r$ .

(2) Suponha, por hipótese de indução, que a afirmação vale para uma composta de  $n$  homotetias com  $O_1, O_2, \dots, O_n \in r$ , ou seja,

$$H_{O_n,k_n} \circ \dots \circ H_{O_2,k_2} \circ H_{O_1,k_1}(r) = r.$$

(3) Vejamos o que ocorre com a imagem pela composta de  $n + 1$  homotetias. Teremos que:

$$H_{O_{n+1},k_{n+1}} \circ H_{O_n,k_n} \circ \dots \circ H_{O_2,k_2} \circ H_{O_1,k_1}(r) = H_{O_{n+1},k_{n+1}} \left( H_{O_n,k_n} \circ \dots \circ H_{O_2,k_2} \circ H_{O_1,k_1}(r) \right) = H_{O_{n+1},k_{n+1}}(r) = r,$$

em que na última igualdade usamos novamente a PROPRIEDADE 4. ■

### 3.3 O TEOREMA DE MENELAUS COMO APLICAÇÃO DE HOMOTETIAS

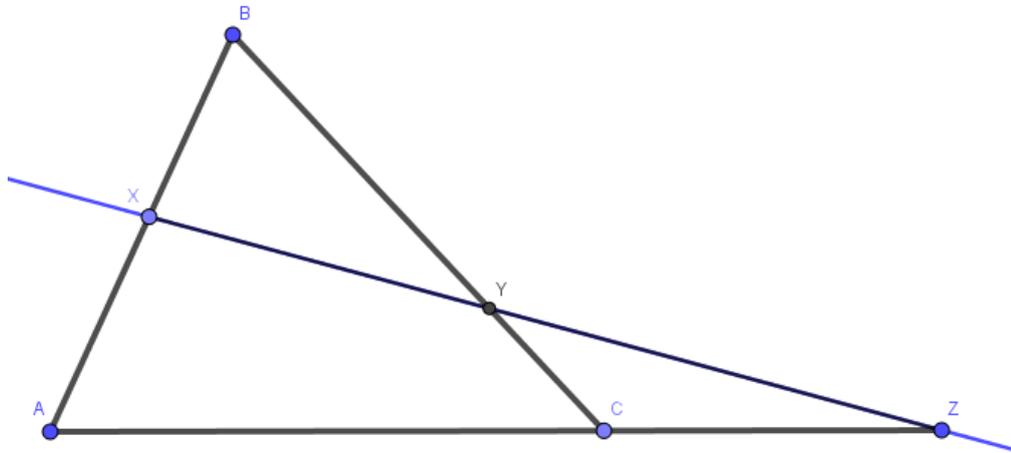
Nesta seção faremos uma demonstração do Teorema de Menelaus em sua forma completa, com o uso de homotetias. Retomando o enunciado do Teorema de Menelaus com uma apresentação mais exata e completa, temos:

**TEOREMA DE MENELAUS** Sejam  $ABC$  um triângulo e  $X, Y, Z$  pontos sobre as retas suportes dos lados  $AB, BC$  e  $CA$ , respectivamente, todos distintos dos vértices de  $ABC$ . Então

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1$$

se, e somente se, os pontos  $X, Y, Z$  são colineares.

**Figura 17 – Teorema de Menelaus**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

No enunciado acima estamos fazendo uso de segmentos orientados, e utilizaremos a notação de segmentos orientados, em vez de vetores, também nas homotetias visando promover nossa compreensão de seu uso na demonstração.

**Prova.** Consideremos as homotetias como definidas a seguir:

$H_X: \Pi \rightarrow \Pi$ , com centro em  $X$  e razão  $k_1 = \frac{XB}{XA}$ , ou seja,  $H_{X,k_1} = H_X$ . Daí, temos

que,

$$H_X(A) = B \quad (*)$$

$H_Y: \Pi \rightarrow \Pi$ , com centro em  $Y$  e razão  $k_2 = \frac{YC}{YB}$ , ou seja,  $H_{Y,k_2} = H_Y$ . Daí, temos

que,

$$H_Y(B) = C \quad (**)$$

$H_Z: \Pi \rightarrow \Pi$ , com centro em  $Z$  e razão  $k_3 = \frac{ZA}{ZC}$ , ou seja,  $H_{Z,k_3} = H_Z$ . Daí, temos

que,

$$H_Z(C) = A \quad (***)$$

Construindo a composta  $H_Z \circ H_Y \circ H_X = H$ , temos  $H(A) = A$ . Pela Observação logo após o **COROLÁRIO 3.2.1** essa composta é uma homotetia de centro em  $A$  cuja razão é dada por  $k = k_3 \cdot k_2 \cdot k_1$ .

Provemos, inicialmente, que se  $X, Y, Z$  são colineares, então

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

Agora, como os pontos  $X, Y, Z$ , são colineares, seja  $s$  a reta que os contém. Assim, fazendo uso do **LEMA 3.2.2**,  $H$  leva a reta  $s$  nela mesma. Pelo **LEMA 3.2.1** a razão de  $H$  é  $k = 1$ , ou seja,  $H$  é a identidade.

Assim, como  $k = k_3 \cdot k_2 \cdot k_1$  e  $k = 1$ , segue que

$$\frac{XB}{XA} \cdot \frac{YA}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZB} = 1.$$

Logo, sendo  $XA = -AX$ ,  $YB = -BY$  e  $ZC = -ZY$ , teremos

$$\frac{XB}{XA} \cdot \frac{YC}{YB} \cdot \frac{ZA}{ZC} = \frac{XB}{-AX} \cdot \frac{YC}{-BY} \cdot \frac{ZA}{-CZ}$$

donde,

$$\frac{XB}{-AX} \cdot \frac{YC}{-BY} \cdot \frac{ZA}{-CZ} = 1.$$

Conclui-se então que,

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

Para a recíproca, faremos uso da primeira parte do Teorema de Menelaus.

Provemos agora que, se

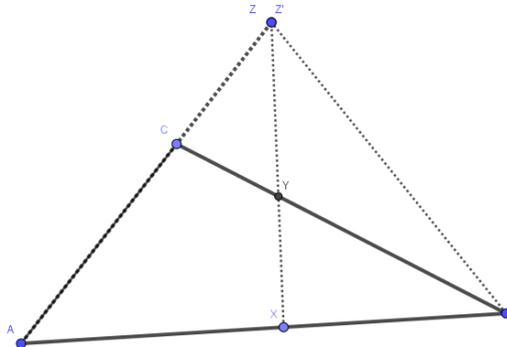
$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1,$$

então, os pontos  $X, Y, Z$ , segundo o enunciado do Teorema de Menelaus, são colineares.

Consideremos o ponto  $Z'$  como a interseção do lado estendido  $AC$  e a reta contendo os pontos  $X$  e  $Y$ , segundo a Figura 18. Logo, pela ida do Teorema de Menelaus, teremos que

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ'}{Z'A} = -1.$$

**Figura 18 – Recíproca do Teorema de Menelaus**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por Hipótese,

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

Daí, e pela igualdade anterior, segue que

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ'}{Z'A}$$

donde segue-se que

$$\frac{CZ}{ZA} = \frac{CZ'}{Z'A}.$$

Como os segmentos são orientados, a razão acima implica que  $Z = Z'$ . Logo os pontos  $X, Y$  e  $Z$  são colineares.

■

### 3.4 UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE MENELAUS PARA POLÍGONOS CONVEXOS

Apoiando-se nos resultados desenvolvidos relativos as homotetias, e considerando-se a prova realizada para o Teorema de Menelaus, nos colocamos a pensar sobre como ampliar o Teorema de Menelaus e suas possibilidades para outros polígonos convexos.

Para realizarmos tal generalização necessitamos de um procedimento construtivo que nos permita compreender o que vem a ser o Teorema de Menelaus para polígonos convexos<sup>3</sup>. Iniciemos então com a seguinte construção para um quadrilátero convexo:

1. Escolha quatro pontos não colineares três a três, indicando-os por  $V_1, V_2, V_3, V_4$ . Esses pontos serão os vértices do quadrilátero.
2. Construa uma reta  $r$  intersectando o polígono  $V_1V_2V_3V_4$ , de modo que  $V_i \notin r$  e  $V_iV_{i+1} \nparallel r$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  com  $V_5 = V_1$ .
3. Marque os pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  obtidos das interseções de  $r$  com as retas obtidas pelos segmentos  $V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, V_4V_1$ , de modo que  $A_i = V_iV_{i+1} \cap r$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  com  $V_5 = V_1$ .

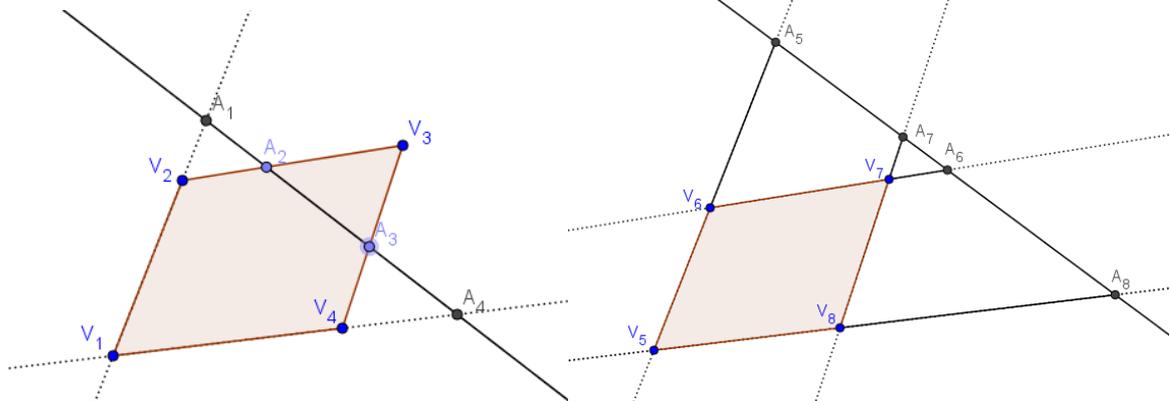
Assim, podemos formular o seguinte Teorema, o qual chamaremos de Teorema de Menelaus para quadriláteros convexos:

**TEOREMA 3.4.1** Sejam  $V_1V_2V_3V_4$  um quadrilátero e  $r$  uma reta secante a ele construídos segundo o procedimento acima, então ocorre que

$$\frac{V_1A_1}{A_1V_2} \cdot \frac{V_2A_2}{A_2V_3} \cdot \frac{V_3A_3}{A_3V_4} \cdot \frac{V_4A_4}{A_4V_1} = 1.$$

<sup>3</sup> Utilizaremos apenas a terminologia “polígono” para nos referirmos a polígonos convexos.

**Figura 19 – Teorema de Menelaus para um quadrilátero convexo**



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Prova.** Fazemos, inicialmente, a construção das homotetias  $H_{A_i, k_i}$ , onde

$$k_i = \frac{A_i V_{i+1}}{A_i V_i}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Seja a composta  $H = H_{A_4, k_4} \circ H_{A_3, k_3} \circ H_{A_2, k_2} \circ H_{A_1, k_1}$ : vejamos que  $V_1$  é ponto fixo de  $H$ :

$$H_{A_1, k_1}(V_1) = V_2,$$

$$H_{A_2, k_2}(V_2) = V_3,$$

$$H_{A_3, k_3}(V_3) = V_4,$$

$$H_{A_4, k_4}(V_4) = V_1,$$

logo,

$$H(V_1) = H_{A_4, k_4} \circ H_{A_3, k_3} \circ H_{A_2, k_2} \circ H_{A_1, k_1}(V_1) = V_1.$$

Portanto, novamente pela observação após o **COROLÁRIO 3.2.1**,  $H$  é uma homotetia de centro  $V_1$  e razão  $k = k_4 k_3 k_2 k_1$ .

Agora, fazendo uso do **LEMA 3.2.2**, como os centros das homotetias construídas são colineares, a composta  $H$  leva a reta  $r$  nela mesma. Ainda, pelo **LEMA 3.2.1**, como o centro  $V_1 \notin r$ , a homotetia  $H$  é a identidade, ou seja, a razão de  $H$  é 1.

Como  $k = k_4 k_3 k_2 k_1 = 1$  e  $k_i = \frac{A_i V_i}{A_i V_{i+1}}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , segue-se que

$$\frac{V_1 A_1}{A_1 V_2} \cdot \frac{V_2 A_2}{A_2 V_3} \cdot \frac{V_3 A_3}{A_3 V_4} \cdot \frac{V_4 A_4}{A_4 V_1} = 1 \quad (1)$$

Pela definição de segmentos orientados teremos que,  $A_1 V_1 = -V_1 A_1$ ,  $A_2 V_2 = -V_2 A_2$ ,  $A_3 V_3 = -V_3 A_3$  e  $A_4 V_4 = -V_4 A_4$ . Logo, em (1) teremos,

$$(-1)^4 \cdot \frac{V_1A_1}{A_1V_2} \cdot \frac{V_2A_2}{A_2V_3} \cdot \frac{V_3A_3}{A_3V_4} \cdot \frac{V_4A_4}{A_4V_1} = 1$$

$$\therefore \frac{V_1A_1}{A_1V_2} \cdot \frac{V_2A_2}{A_2V_3} \cdot \frac{V_3A_3}{A_3V_4} \cdot \frac{V_4A_4}{A_4V_1} = 1$$

■

Podemos agora elaborar uma generalização para o Teorema de Menelaus para polígonos convexos.

**TEOREMA 3.4.2** Sejam dados um polígono de  $n$  vértices  $V_1V_2 \dots V_n$  e uma reta  $r$  secante ao polígono de modo que  $V_i \notin r$  e  $V_iV_{i+1} \not\parallel r$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  com  $V_{n+1} = V_1$ . Sejam os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  obtidos das interseções de  $r$  com as retas obtidas pelos segmentos  $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_nV_{n+1}$ , de modo que  $A_i = V_iV_{i+1} \cap r$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Então,

$$\frac{V_1A_1}{A_1V_2} \cdot \frac{V_2A_2}{A_2V_3} \cdot \dots \cdot \frac{V_nA_n}{A_nV_1} = (-1)^n.$$

### 3.5 O TEOREMA DE DESARGUES NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

O Teorema de Desargues será apresentado neste momento com um olhar exclusivamente pela geometria euclidiana plana.

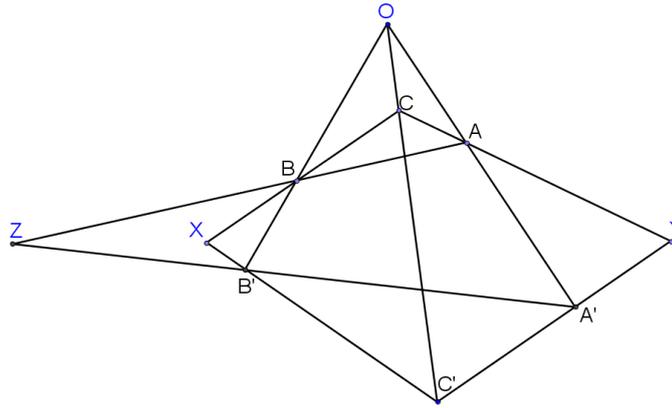
Em (CAMINHA, 2013), temos o seguinte enunciado para o Teorema de Desargues:

*Se  $ABC$  e  $A'B'C'$  são triângulos tais que  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$  e  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$  e  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$ , então  $X, Y$  e  $Z$  são colineares se, e só se,  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas.*

**Prova.** Suponha que  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes em  $O$  (Figura 20). Para mostrarmos que  $X, Y$  e  $Z$  são colineares basta verificarmos pelo Teorema de Menelaus que,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1 \quad (1)$$

**Figura 20 – Teorema de Desargues**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pela Figura 21(a), considerando o  $\Delta OBC$  e a transversal  $XB'C'$ , também por Menelaus

$$\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'O} = -1 \quad (i)$$

Pela Figura 21(b) no  $\Delta OAB$  e a transversal  $A'B'Z$ , pelo Teorema de Menelaus, temos

$$\frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} = -1 \quad (ii)$$

Por fim, agora pela Figura 21(c), considere o  $\Delta OCA$  e sua transversal  $YA'C'$ , que por Menelaus nos dá,

$$\frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AA'}{A'O} = -1 \quad (iii)$$

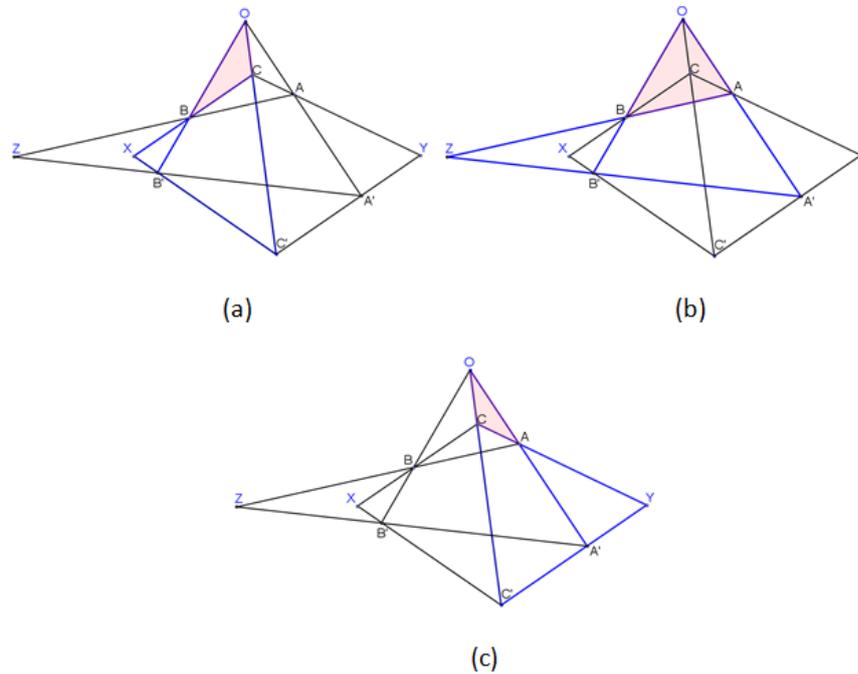
Daí, por (i), (ii) e (iii), teremos

$$\left( \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \right) \cdot \left( \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \right) \cdot \left( \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \right) = -1,$$

donde conclui-se que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$

**Figura 21 – Demonstração do Teorema de Desargues**



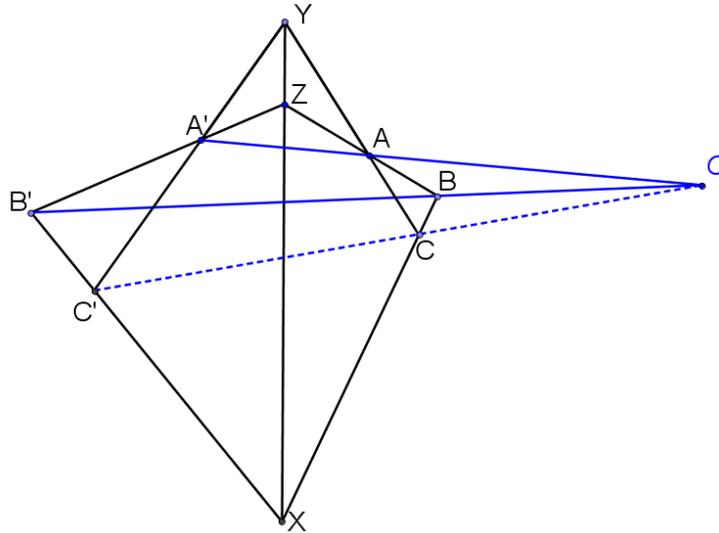
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para a recíproca do Teorema de Desargues, seguiremos a demonstração de (CAMINHA, 2013).

Suponhamos, agora, que  $X, Y$  e  $Z$  são colineares. Para demonstrarmos que as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas, é suficiente supor que  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$  são concorrentes no ponto  $O$ , mostrando, daí, que  $O \in \overleftrightarrow{CC'}$ , ou seja, que os pontos  $O, C$  e  $C'$  são colineares. Para mostrar tal colinearidade, novamente faremos uso do Teorema de Menelaus, agora aplicado ao triângulo  $AA'Y$  (ver Figura 20), donde queremos concluir que

$$\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY} = -1.$$

**Figura 22 – Recíproca do Teorema de Desargues**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Veamos que no  $\Delta ZAA'$ , com relação aos pontos colineares  $B', B$  e  $O$  (Figura 23(a)), teremos pelo Teorema de Menelaus que,

$$\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AB}{BZ} = -1. \quad (1)$$

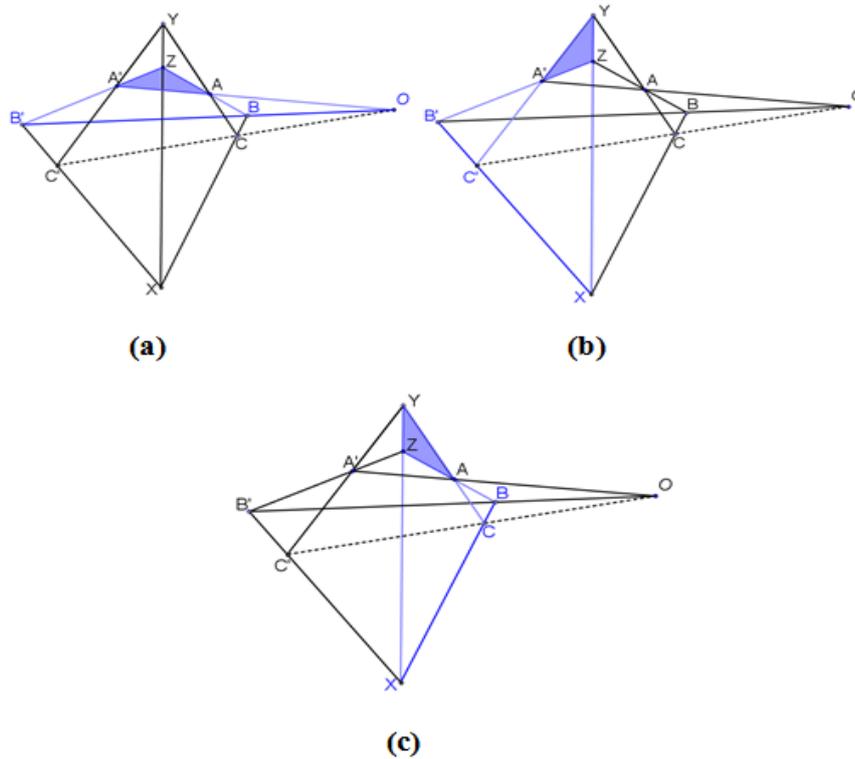
Observando agora o  $\Delta YZA'$ , com relação aos pontos colineares  $B', C'$  e  $X$  (Figura 23(b)), donde por Menelaus segue-se que

$$\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZX}{XY} = -1. \quad (2)$$

De modo análogo aos casos anteriores no  $\Delta YZA$ , em relação aos pontos  $B, C$  e  $X$  (Figura 23(c)), teremos por Menelaus o seguinte resultado

$$\frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AC}{CY} = -1. \quad (3)$$

**Figura 23 – Demonstração da Recíproca do Teorema de Desargues**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Logo, por (1), (2) e (3), teremos que

$$\left(\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AB}{BZ}\right) \left(\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZX}{XY}\right) \left(\frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AC}{CY}\right) = -1$$

ou seja,

$$\left(\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z}\right) \left(\frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZB}{BA}\right) \left(\frac{ZX}{XY} \cdot \frac{YX}{XZ}\right) \left(\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY}\right) = -1$$

donde conclui-se que

$$\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY} = -1.$$

Assim,  $O, C$  e  $C'$  são colineares pela recíproca do Teorema de Menelaus. ■

## 4 GEOMETRIA PROJETIVA: ELEMENTOS PRIMITIVOS E AXIOMAS INICIAIS

Apresentaremos neste capítulo as noções essenciais sobre a Geometria Projetiva, para compreensão de suas proposições e teoremas dentro de seus axiomas e fazendo uso de seus objetos geométricos. Procuramos dissertar as bases que fundamentarão parte importante deste trabalho, fazendo uso, principalmente, das noções apresentadas no livro *Projective Geometry* de Coxeter. Todos os termos utilizados, apesar da similaridade com a geometria euclidiana, referem-se a geometria projetiva, evitando assim, as repetições.

Antes de apresentarmos os axiomas da geometria projetiva, seguem alguns conceitos básicos e definições. Podemos afirmar que um ponto e uma reta, um ponto e um plano, ou uma reta e um plano são incidentes quando o primeiro pertence/ esta contido ao/no último. Ainda o primeiro “está” no último, ou o último “passa” através do primeiro.

Sejam os pontos representados por letras maiúsculas, as retas por letras minúsculas e os planos por letras gregas minúsculas. Podemos representar pontos, retas e planos, bem como suas relações, do seguinte modo:

$r = PQ$  , se  $r$  passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ , com  $P$  e  $Q$  distintos.

$\alpha = rP = Pr = rs = sr$ , se  $\alpha$  passa através de  $r$  e  $P$ , ou “junta” as retas  $r$  e  $s$ , onde  $P$  não incide em  $r$  ( $r \neq s$ ).

Dizemos que  $P$  é comum a  $r$  e  $s$  se está em ambas, assim  $P$  é a intersecção de  $r$  e  $s$ , representada por:

$$P = r \cdot s$$

De modo análogo, se dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  têm uma reta  $l$  em comum ou se um reta  $r$  e um plano  $\alpha$  possuem um ponto  $Q$  em comum, escreveremos  $l = \alpha \cdot \beta$  ou  $Q = r \cdot \alpha$ .

### 4.1 AXIOMAS

Os axiomas são a base primordial de toda teoria, são eles que alicerçam toda uma teoria. Esses devem ser concisos e não devem contradizer um ao outro. Seguem os axiomas apresentados segundo (COXETER 1974), com tradução própria.

**AXIOMA 1**                    Existe um ponto e uma reta que não são incidentes.

**AXIOMA 2**                    Toda reta é incidente com, pelo menos, três pontos distintos.

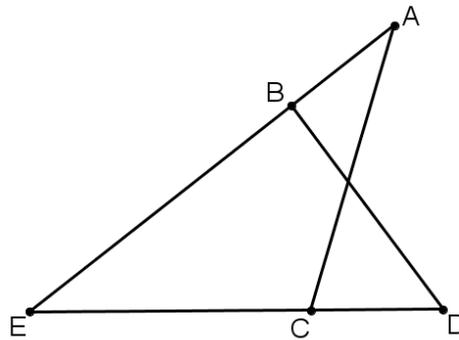
**AXIOMA 3**                    Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com apenas uma reta.

**AXIOMA 4**                    Se  $A, B, C, D$  são quatro pontos distintos tais que  $AB$  toca  $CD$ , então  $AC$  toca  $BD$  (Ver Figura 24).

**AXIOMA 5** Se  $ABC$  é um plano, existe ao menos um ponto que não está no plano  $ABC$ .

**AXIOMA 6** Quaisquer dois planos distintos tem, pelo menos, dois pontos em comum.

**Figura 24 – Axioma 4**



Fonte: Retirada de Coxeter, pag. 15.

Dados três pontos  $A, B$  e  $C$  não colineares, podemos então definir um plano  $\alpha$  como a união das retas  $CX$ , com  $X \in AB$ . Ou seja,

$$\alpha = (ABC) = \bigcup CX, \text{ tal que } X \in AB.$$

De forma análoga, podemos definir o plano gerado por uma reta  $l$  e um ponto  $P$  fora dela,

$$\alpha = lP = \bigcup PX, \text{ tal que } X \in l.$$

Para compreendermos a proximidade entre os axiomas da geometria euclidiana e da geometria projetiva, para (HEFEZ) o plano projetivo real pode ser imaginado como sendo o plano Euclidiano acrescido de uma reta que consiste dos chamados pontos ideais, ou pontos no infinito. Assim, um feixe de retas paralelas no plano Euclidiano determina um ponto no infinito do plano Projetivo de modo que cada reta desse feixe incide neste ponto. E o conjunto dos pontos no infinito constituem a reta no infinito.

Podemos ainda observar as consequências dessa “passagem” do plano Euclidiano para o Projetivo em seus Axiomas. Verifiquemos o que ocorre para o Axioma 3:

No Axioma 3, se os dois pontos forem ordinários (pontos do plano Euclidiano) então a reta será a reta ordinária  $AB$  do plano Euclidiano. Agora, caso o ponto  $A$  seja ordinário e  $B$  seja um ponto no infinito, basta consideramos a reta incidente no ponto  $A$  do

feixe de retas determinado por  $B$ . Ainda, caso os dois pontos estejam no infinito, basta tomarmos a reta no infinito. A unicidade é imediata.

## 4.2 PROPOSIÇÕES DIRETAS A PARTIR DOS AXIOMAS

Fazendo uso dos axiomas 1, 2, 3, 4, 5 e 6, é possível obter alguns resultados que são fáceis de ser verificados. Apresentaremos a prova para alguns desses resultados, já os demais são um bom exercício para fixar os axiomas citados. Seguem as proposições.

**PROPOSIÇÃO 4.2.1** Existem, pelo menos, quatro pontos distintos.

**Prova.**

Pelo Axioma 4.1.1 existem um ponto e uma reta que não são incidentes, mas pelo Axioma 4.1.2 toda reta é incidente com, pelo menos, três pontos. Logo esses três pontos na reta e o ponto que não é incidente na reta, nos mostra o que queríamos. ■

**PROPOSIÇÃO 4.2.2** Se  $l$  é uma reta, existe um ponto que não está em  $l$ .

**Prova.**

Suponha que todos os pontos estão em  $l$ , então  $l$  seria incidente a todos os pontos, mas isso contradiz o Axioma 1, pois há um ponto e uma reta não incidentes. Logo existe um ponto que não está em  $l$ . ■

**PROPOSIÇÃO 4.2.3** Se  $A$  é um ponto, existe uma reta que não passa através de  $A$ .

**Prova.**

Pelo Axioma 1, existem um ponto  $P$  e uma reta  $s$  que não passa por  $P$ . Caso  $A$  esteja fora da reta  $s$ , não há o que fazer. Agora, caso  $A$  pertença a reta  $s$ , pelo Axioma 2, podemos tomar  $B$  pertencente a  $s$  e distinto de  $A$ . Logo, pelo Axioma 3, a reta  $r = PB$  não passa por  $A$ . ■

Vejam os o que ocorre com o Axioma 2, ao trocarmos “reta” por “ponto” e “incide” por “está em”.

**PROPOSIÇÃO 4.2.4** Todo ponto está em, pelo menos, três retas distintas.

Mais algumas proposições, apresentadas segundo (COXETER) – tradução própria.

**PROPOSIÇÃO 4.2.5** Quaisquer duas retas distintas tem no máximo um ponto em comum.

**PROPOSIÇÃO 4.2.6** Quaisquer duas retas coplanares tem pelo menos um ponto em comum.

**PROPOSIÇÃO 4.2.7** Se duas retas tem um ponto em comum, elas são coplanares.

**PROPOSIÇÃO 4.2.8** Existem quatro pontos coplanares de modo que três quaisquer são não colineares.

**PROPOSIÇÃO 4.2.9** Existem quatro retas coplanares de modo que três quaisquer são não concorrentes.

### 4.3 TRIÂNGULOS E QUADRÂNGULOS

Para desenvolvermos teoremas mais complexos, e obtermos resultados mais contundentes, seguem as definições, elementos e propriedades dos entes essenciais para o desenvolvimento da geometria projetiva. São eles o triângulo, o quadrilátero e o quadrângulo.

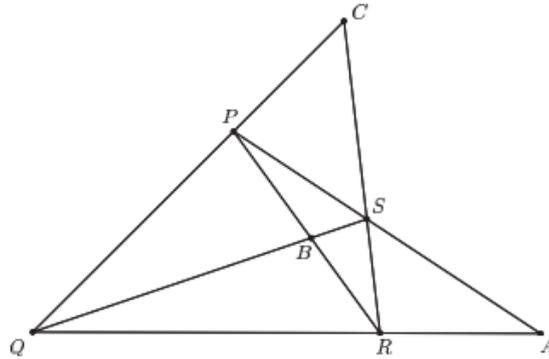
Um triângulo ABC consiste na figura formada por três pontos não colineares A, B, C, que são chamados de *vértices*, e três retas AB, BC, CA, chamados de lados. Então, se tivermos três pontos unidos por três retas, ou três retas que se intersectam em três pontos, teremos um triângulo.

#### Definição de triângulo e seu dual

Triângulo é a figura formada por três retas não concorrentes e suas intersecções, três pontos não colineares.

Triângulo é a figura formada por três pontos não colineares e seus segmentos, três retas não concorrentes.

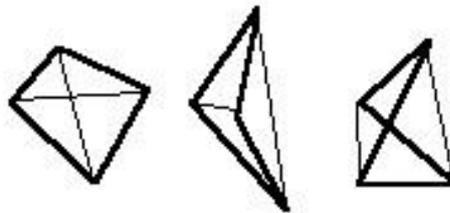
Um quadrângulo completo pode ser definido como a figura formada por quatro pontos coplanares, três a três não colineares, e seis retas que unem esses pontos (ver Figura 25).

**Figura 25 – Quadrângulo PQRS**

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Vejamos que um quadrângulo completo possui 4 *vértices*, 6 *lados* e 3 *pontos diagonais*<sup>4</sup>. Temos o axioma a seguir:

**AXIOMA 7** Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.

**Figura 26 – Quadrângulos**

### **Quadrângulos convexo, re-entrant e cruzado.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

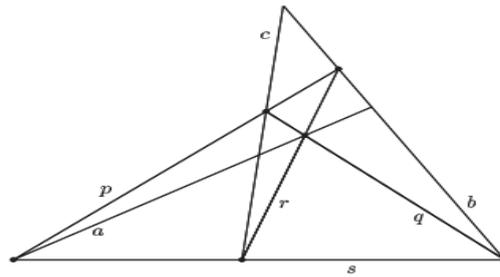
Fazendo uma troca de termos na definição de quadrângulo completo, teremos um novo ente, chamado de quadrilátero completo. Assim, um quadrilátero completo pode ser definido como a figura formada por quatro retas coplanares, três a três não concorrentes, e os seis pontos comuns a essas retas.

O quadrilátero completo possui 4 *lados*, 6 *vértices* e 3 *retas diagonais*<sup>5</sup> (ver Figura 27).

<sup>4</sup> Dois lados são ditos opostos se o ponto em comum a eles não é um vértice. Esse ponto é chamado **ponto diagonal**.

<sup>5</sup> Dois vértices são ditos opostos se a reta que os une não é um lado. Essa reta é chamada **reta diagonal**.

**Figura 27 – Quadrilátero pqrs**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora fica compreensível o que nos diz o **AXIOMA 7**, onde é afirmado que os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares. O triângulo formado pelos pontos diagonais do quadrângulo completo é dito *triângulo diagonal*. Uma consequência do axioma citado é a proposição a seguir:

**PROPOSIÇÃO 4.3.1** As três retas diagonais de um quadrilátero completo nunca são concorrentes.

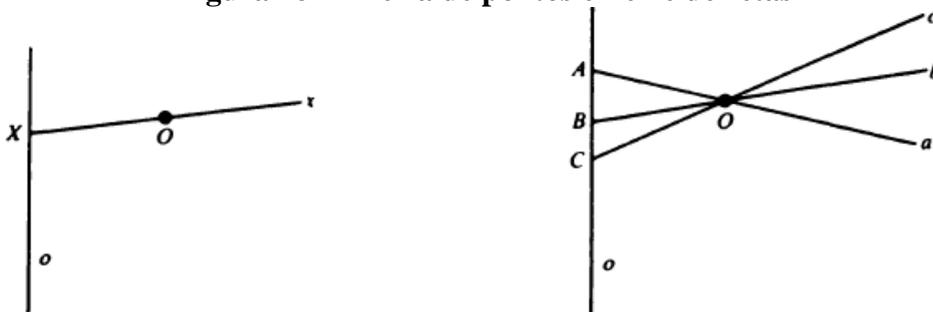
#### 4.4 PROJATIVIDADE E PERSPECTIVIDADE

Antes de definirmos os conceitos de projetividade e de perspectividade, é importante apresentar as definições de fileira de pontos (*range* segundo COXETER) e feixe de retas (*pencil* segundo COXETER). Definamos da seguinte maneira:

Fileira de pontos é o conjunto dos pontos que se encontra em uma reta.

Feixe de retas é o conjunto das retas coplanares que concorrem em um ponto.

**Figura 28 – Fileira de pontos e Feixe de retas**



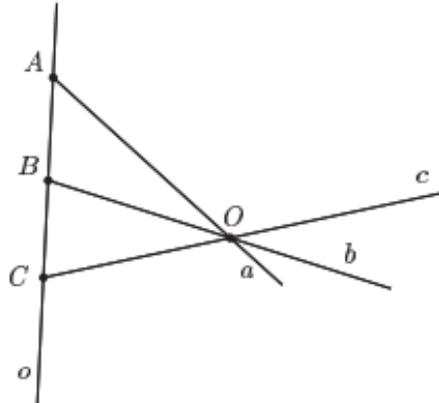
Fonte: Adaptado de Coxeter.

Um ponto pertencente a uma reta é dito incidente nesta, e a reta também é dita incidente no ponto. Relações entre *fileiras* e *feixes* ocorrem quando seus elementos correspondentes são incidentes.

#### 4.4.1 Projetividade

Uma correspondência elementar é definida como uma relação entre dois entes primitivos (a fileira de pontos e o feixe de retas), dois elementos duais na Geometria Projetiva.

**Figura 29 – Correspondência Elementar**



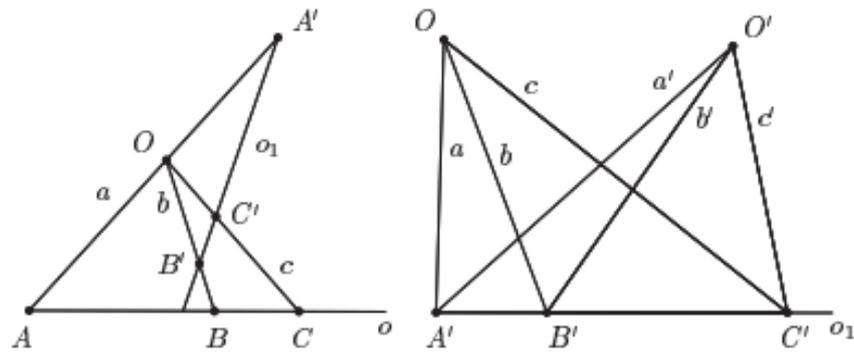
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Chamamos de projetividade uma composição de um número finito de correspondências elementares entre *ranges* e *pencils*, segundo COXETER. Uma reta  $x$  de um feixe de retas  $O$  é incidente na fileira  $o$ , quando esta intersecta  $o$  num ponto  $X$ .

#### 4.4.2 Perspectividade

A composta de duas correspondências elementares é chamada de perspectividade e é indicada pelo símbolo  $\bar{\Lambda}$ . Portanto, uma perspectividade relaciona duas fileiras de pontos ou dois feixes de retas. Assim teremos na Figura abaixo duas perspectividades: a esquerda uma *perspectividade de centro*  $O$  relacionando duas fileiras de pontos. Por exemplo, a imagem de  $A$ ,  $A'$ , pela perspectividade, é obtida como a interseção  $OA \cdot o_1$ . A direita, uma *perspectividade de eixo*  $o$  relacionando dois feixes de retas. Por exemplo, a imagem de  $a$ ,  $a'$ , pela perspectividade, é obtida como a reta  $(a \cdot o_1)O'$ .

**Figura 30 – Perspectividades**

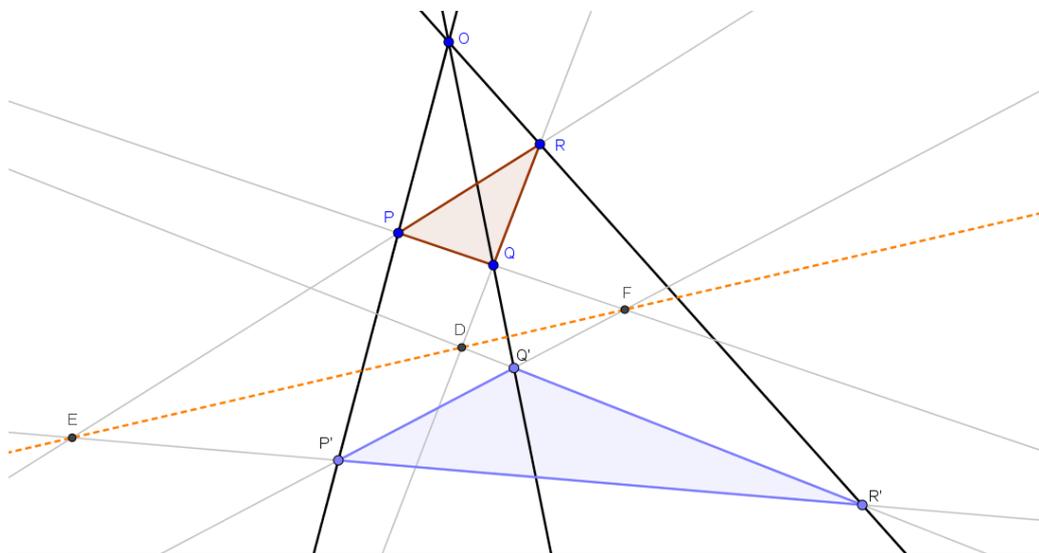


Fonte: Adaptado de COXETER.

#### 4.5 PERSPECTIVAS E OS TRIÂNGULOS

Se dois feixes de retas ou duas fileiras de pontos estão relacionados por uma perspectividade dizemos que estão em perspectiva. Generalizando tal ideia podemos dizer que duas figuras estão em perspectiva quando uma é a imagem da outra por uma perspectividade. Vejamos a figura abaixo que nos mostra dois triângulos em perspectiva.

**Figura 31 – Triângulos em Perspectiva**



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura é possível observar a perspectiva pelo ponto  $O$ , uma vez que os vértices dos triângulos são unidos pelas retas concorrentes  $PP'$ ,  $QQ'$  e  $RR'$  em  $O$ ; ou ainda, a perspectiva pela reta  $DE$ , pois os lados se tocam em três pontos colineares, a saber  $D = QR \cdot Q'R'$ ,  $E = RP \cdot R'P'$ ,  $F = PQ \cdot P'Q'$ .

Para ampliarmos o conceito de figuras em perspectiva devemos observar, inicialmente, o que ocorre com os triângulos para, a partir daí, generalizar a ideia à figuras mais complexas. Nesse sentido, Desargues foi um precursor, pois apresentou um teorema simples no qual nos explica o que ocorre com dois triângulos em perspectiva.

## 5 TEOREMA DE DESARGUES NA GEOMETRIA PROJETIVA

Girard Desargues estudou em Lyon, cidade na qual foi arquiteto. Em Paris esteve em contato com os principais matemáticos de sua época. Foi um precursor no ensino da técnica da perspectiva linear com a utilização do ponto de fuga, tendo ele mesmo conceituado.

**Figura 32 – Girard Desargues**

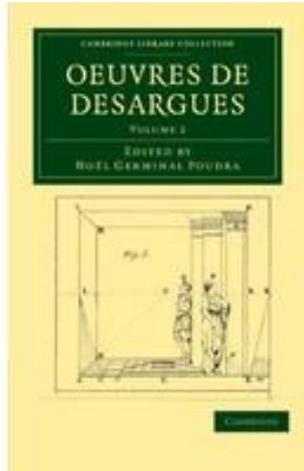


Fonte: <[https://en.internetinterpedia.org/wiki/Girard\\_Desargues](https://en.internetinterpedia.org/wiki/Girard_Desargues)>.

Na época em que realizou seus tratados não obteve o reconhecimento merecido como matemático, pois os matemáticos de sua época estavam preocupados com realizações na Geometria Analítica. Sua principal obra, "Brouillon projet d'une atteinteaux événements des rencontres d'un cone avec un plan" (1639), tratava sobre as propriedades imutáveis dos círculos.

Apesar de suas obras não terem tido o devido reconhecimento em sua época, o matemático Jean-Victor Poncelet (1788-1867) retomou seus conceitos, estabelecendo a geometria projetiva.

**Figura 33 – Livro de Girard Desargues**



Fonte: <<https://www.traca.com.br/livro/107359>>.

Começemos pela recíproca do Teorema de Desargues, seguindo as ideias em COXETER:

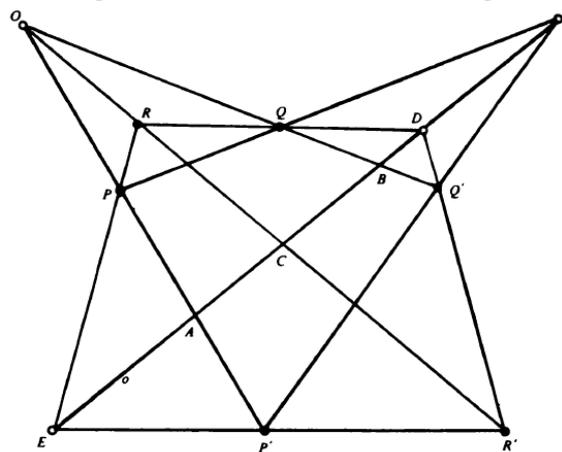
**TEOREMA 5.1** Se dois triângulos estão em perspectiva por uma reta então eles estão em perspectiva por um ponto.

Segue a demonstração apresentada em (COXETER,1974), dissertada seguindo tradução nossa.

**Prova.**

Sejam dois triângulos,  $PQR$  e  $P'Q'R'$ , estes em perspectiva por uma reta  $o$ . Em outras palavras, seja  $o$  contendo os pontos  $D, E, F$ , tal que  $D$  pertence a ambas as retas  $QR$  e  $Q'R'$ ,  $E$  pertence a ambas as retas  $RP$  e  $R'P'$ ,  $F$  pertence a ambas as retas  $PQ$  e  $P'Q'$ . Sendo assim queremos provar que as três retas  $PP', QQ', RR'$  passam todas por um ponto  $O$ , como na Figura 34.

**Figura 34 – Teorema de Desargues**



Fonte: Livro (COXETER, 1974)

De modo geral, no espaço projetivo, podemos observar que há dois casos possíveis para os triângulos, e como até agora trabalhamos os conceitos da geometria projetiva sem restrições ao plano, os resultados podem ser concluídos no espaço. Assim, seguem os casos:

CASO 01: os triângulos estão em planos distintos.

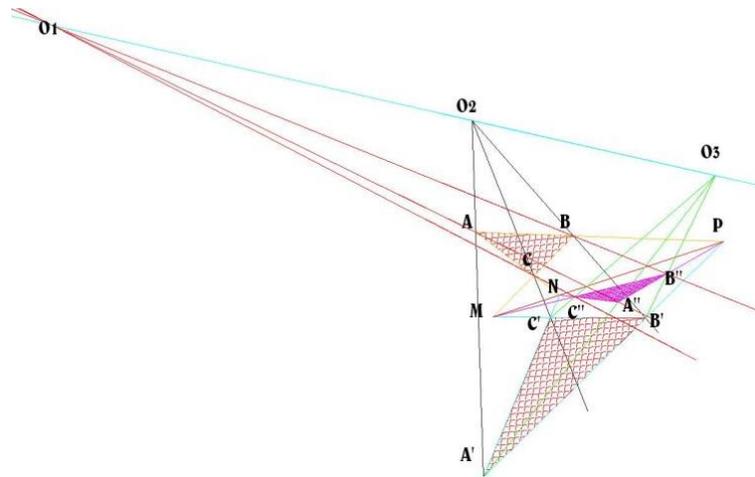
CASO 02: os triângulos estão ambos no mesmo plano.

Para mostrar o CASO 01, retomemos o que diz o AXIOMA 4.1.4: Se  $A, B, C, D$  são quatro pontos distintos tais que  $AB$  toca  $CD$ , então  $AC$  toca  $BD$ .

Assim, vejamos que como  $QR$  toca  $Q'R'$ ,  $QQ'$  toca  $RR'$ . Analogamente  $RR'$  toca  $PP'$ , donde  $PP'$  toca  $QQ'$ . Logo as três retas  $PP', QQ', RR'$  tocam todas uma na outra. Se os planos gerados por  $PQR$  e  $P'Q'R'$  são distintos, as três retas têm que ser concorrentes; caso contrário elas formariam um triângulo, e esse triângulo estaria em ambos os planos, o que é impossível.

Vejamos agora o que ocorre quando  $PQR$  e  $P'Q'R'$  estão ambos no mesmo plano. Para tal caso tomemos, em outro plano passando por  $o$ , três retas não concorrentes, passando por  $D, E, F$ . Daí, formaremos os triângulos  $P''Q''R''$ , com  $Q''R''$  passando por  $D$ ,  $R''P''$  atravessando  $E$ , e  $P''Q''$  atravessando  $F$ . Este triângulo está em perspectiva com ambos os triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$ . Pelo resultado obtido no CASO 01, as três retas  $PP'', QQ'', RR''$  passam todas através do ponto  $S$  e as três retas  $P'P'', Q'Q'', R'R''$  todas passam pelo ponto  $S'$ . Ora, os pontos  $S$  e  $S'$  são distintos; caso contrário  $P''$  pertenceria a  $PP'$ , estando no plano original, o que é um absurdo, pois  $P''$  está fora do plano original.

**Figura 35 – Triângulos em perspectiva quanto a três pontos**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo  $P''$  pertencente a ambas as retas  $PS$  e  $P'S'$ , pelo AXIOMA 4 temos que  $SS'$  toca  $PP'$ . Analogamente  $SS'$  toca ambos  $QQ'$  e  $RR'$ . Temos finalmente que as três retas  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$  passam através do ponto  $O = (PQR) \cdot SS'$ .

A recíproca do teorema anterior é o nosso desejado Teorema de Desargues, o qual expressaremos abaixo.

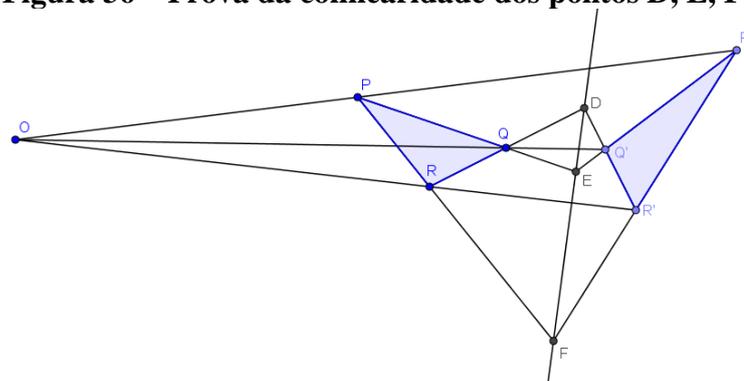
**TEOREMA DE DESARGUES:** Se dois triângulos estão em perspectiva por um ponto eles estão em perspectiva por uma reta.

Visando uma melhor compreensão da demonstração que se segue, realizamos a construção de figuras, desenvolvendo seus passos.

PROVA. Sejam dois triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$  em perspectiva por um ponto  $O$ . Podemos ver, pelo AXIOMA 4.1.4, que seus três pares de lados concorrem, digamos nos pontos  $D, E, F$ . Vale a pena provarmos que estes três pontos são colineares, vejamos a

Figura 36.

**Figura 36 – Prova da colinearidade dos pontos D, E, F.**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vejamos tal fato: considere os dois triângulos  $PP'E$  e  $QQ'D$ . Seus pares de lados correspondentes se intersectam nos três pontos colineares  $R', R, O$ , assim estes triângulos estão em perspectiva por uma reta  $e$ , conseqüentemente pelo teorema anterior, em perspectiva por um ponto. Tal ponto é definido por  $PQ \cdot P'Q' = E$ . Ou seja, os três pontos  $D, E, F$  são colineares.

O **TEOREMA 5.1**, que é a recíproca do Teorema de Desargues, pode ser provado *ab initio* pelo próprio Teorema de Desargues. Se, em vez de tê-lo provado nós tivéssemos provado o Teorema de Desargues primeiro, poderíamos deduzir a recíproca aplicando-o aos triângulos  $PP'E$  e  $QQ'D$  na

Figura 36. Podemos ainda observar que tal apresentação do teorema de Desargues é mais geral que o apresentado na seção 3.5, pois na geometria projetiva as retas paralelas são concorrentes em um ponto no infinito. Isso nos mostra um dos potenciais da Geometria Projetiva.

A prova apresentada se deu de modo puramente sintético, fazendo uso dos axiomas, proposições, lemas e teoremas propostos no capítulo. Portanto, apesar de sua compreensão exigir do leitor uma experiência com as noções espaciais e planas de uma figura, bem como uma reflexão ativa na construção das figuras que ilustram tais problemas, ela se mostra simples, dependendo apenas do que foi apresentado neste texto. O desenho geométrico é então parte fundamental das demonstrações, embora esse fato não esteja explícito.

Para uma compreensão adequada e completa da prova, torna-se essencial uma familiaridade com o desenho de figuras em perspectiva a partir de um ponto. Propondo desenvolver tais habilidades no aluno, é indicada uma metodologia no capítulo 6 que visa significar as demonstrações sintéticas e estimular o aluno no desenvolvimento das ideias na Geometria Projetiva.

No que tange a aplicações mais teóricas e o uso da Geometria Projetiva na resolução de exercícios em nível olímpico, o capítulo 7 se apresenta com o intuito de auxiliar a interpretação e desenvolvimento de técnicas na solução de problemas.

## 6 UMA METODOLOGIA PARA AULAS NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Apresentamos neste capítulo uma possibilidade metodológica de como inserir a Geometria Projetiva no Ensino Médio, especificamente para alunos da 2ª Série do Ensino Médio, uma vez que o conteúdo de Geometria faz parte da base curricular da Série mencionada. Além de discorrer sobre uma metodologia didática, optamos por dissertar esse capítulo visando auxiliar o professor em suas aulas introdutórias, de acordo com a sua necessidade e intenção na apresentação da Geometria Projetiva.

Ao tratarmos de conteúdos diferentes do que está no currículo atual, os quais o aluno não está familiarizado, é conveniente propor algo estimulante. Na matemática, a história é uma motivadora interessante principalmente quando associada a arte, podendo aumentar a atenção e o interesse do aluno.

A metodologia proposta inicia com a história da Geometria Projetiva, fazendo um paralelo entre a arte Renascentista e obras de grandes pintores como Leonardo da Vinci.

Em seguida, mostramos uma possibilidade de significar os conceitos da Geometria Projetiva por meio do desenho, com as noções de profundidade e perspectiva, exibindo as ideias de ponto de fuga e linha do horizonte.

### 6.1 A HISTORIA DA GEOMETRIA PROJETIVA E A ARTE

Para realizar a tarefa de projetar espaços realísticos e desenhá-los com clareza os gregos antigos contavam com a ajuda de geômetras. Mesmo em períodos por volta do século V a.C. os geômetras já sabiam que projeções de figuras e superfícies do espaço tridimensional no plano não são coisas simples de se realizar e necessitam de técnicas bem específicas para obter efeitos apreciáveis.

A propagação da luz em linha reta era um dos fenômenos utilizados pelos antigos gregos na construção das figuras tridimensionais. Demócrito (460-370 a.C.) e Anaxágoras (500-428 a.C.) chegaram a publicar uma teoria da perspectiva baseados no estudo desse fenômeno natural. Essa percepção da luminosidade e seus efeitos sobre a construção de figuras tridimensionais foi admitida até mesmo por Euclides em seus trabalhos.

Relações não-métricas, que são parte da Geometria Projetiva, foram descobertas e estudadas por Pappus (290-350 a. C.) tendo como resultado o Teorema de Pappus que foi reescrito e reinterpretado com o desenvolvimento da Geometria Projetiva que ocorreu apenas

durante o Renascimento. O período Renascentista foi um marco na história da arte e das ciências, ele proporcionou grande desenvolvimento nas mais diversas áreas do conhecimento. Nesse período, no que diz respeito às pinturas, os artistas estavam dedicados em realizar obras que representassem a realidade, desenvolvendo técnicas que levassem o observador a perceber os objetos como eles são vistos.

Apesar de hoje estarmos muito adaptados com essa visão das obras de arte e pinturas, na Idade Média, essa prática do desenho não era um lugar comum. As pinturas eram bem mais simples e não proporcionavam a noção de profundidade, tendo como foco principal a arte sacra e concentrando-se em temas e símbolos religiosos.

**Figura 37 – A última ceia na Arte Medieval: uma das 13 cenas da Taula de Sant Miquel.**



Fonte: < <https://www.historiadasartes.com/nomundo/arte-renascentista/renascimento/>>.

Na Figura 39, a Santa Ceia é retratada seguindo as técnicas de desenho do período Medieval. Observe que todos estão unidos pelos pés, que estão suspensos no ar e são apresentados sem a noção de profundidade, sem grandes detalhes e de forma plana.

No início do século XIV surgem pintores influentes na criação de noções de perspectiva que queriam representar em suas obras objetos que aparentassem o mais próximo à realidade, dentre eles podemos citar Duccio di Buoninsegna (1255-1319) e Giotto di Bondone (1266-1337).

**Figura 38 – Desenho de Duccio di Buoninsegna.**



Fonte: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Duccio\\_di\\_Buoninsegna\\_017.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Duccio_di_Buoninsegna_017.jpg)>.

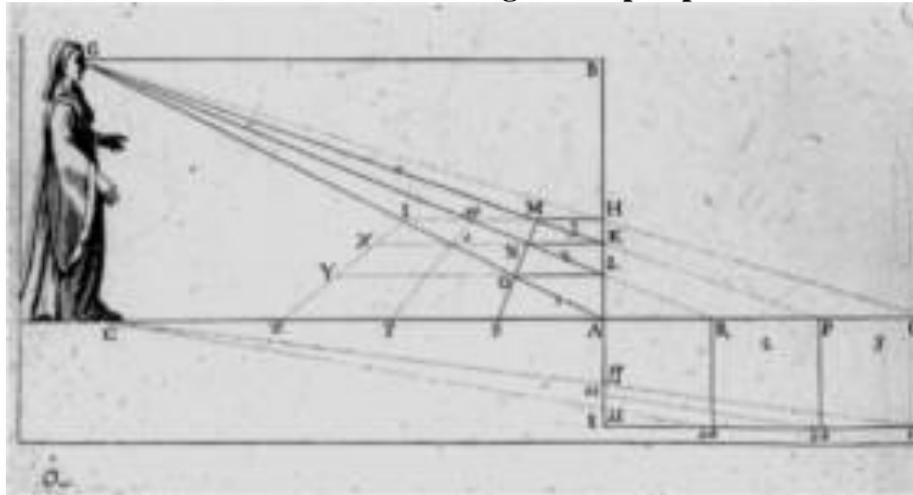
**Figura 39 – The Entombment of Mary: Giotto di Bondone**



Fonte: <<https://www.historiadasartes.com/nomundo/arte-renascentista/renascimento/>>..

Outro importante divulgador das técnicas de perspectiva e que ensinou a outros pintores foi Filippo Brunelleschi (1377-1446) nascido em Florença, era arquiteto e escultor. Chamado para projetar novas igrejas e edifícios, ele resolveu abandonar o estilo tradicional e adotou um projeto para aqueles que ansiavam e viviam um renascimento da grandeza romana.

**Figura 40 – Perspectiva de Filippo Brunelleschi: ilustração de manual do século XVI sobre como colocar uma figura em perspectiva.**



Fonte: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0104-59702006000500010](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-59702006000500010)>.

O arquiteto Leon Battista Alberti (1404-1472) também foi um influente das técnicas de perspectiva, tendo publicado, em 1435, o livro com o título *Della Pictura*, onde também abordava as propriedades preservadas entre dois desenhos perspectivados diferentes. Mais tarde o seu contemporâneo Piero Della Francesca (1415- 1492) aprimorou suas ideias e realizou a obra *A perspectiva para pintura*, onde elaborou de forma mais rigorosa a perspectiva.

No auge do Renascimento e do desenvolvimento das técnicas de perspectiva surgiram grandes pintores que conseguiram apresentar em suas obras a noção de realidade, dentre eles o famoso Leonardo da Vinci (1452-1519). Leonardo da Vinci apresentava uma forte relação entre a Matemática e a Arte, valorizando a importância da primeira naquela outra.

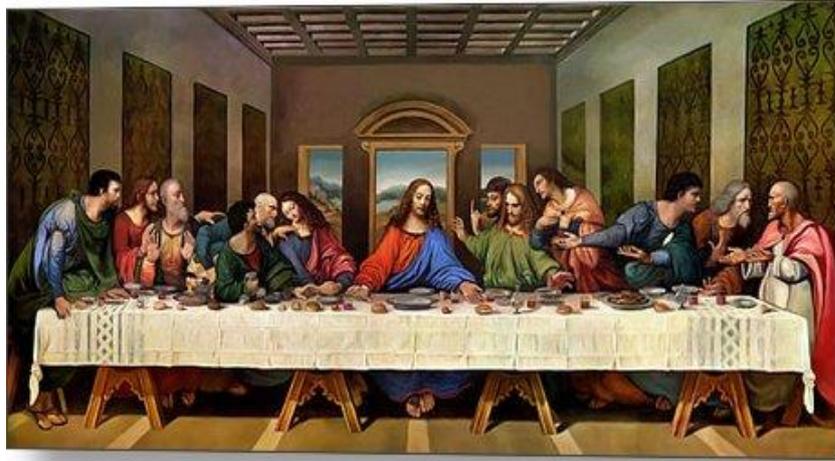
Uma das obras primas de Leonardo nos mostra um paralelo entre a sua obra e aquela apresentada anteriormente que representou o Período Medieval. *A Última Ceia*, apresentada sob a ótica de um artista Renascentista, nos mostra noções de profundidade, perspectiva e riqueza de detalhes quanto às expressões e tentativa de apreensão da realidade.

Séculos mais tarde os conceitos utilizados no desenho de perspectivas foram formalizados. Um precursor da Geometria Projetiva foi o arquiteto francês Girard Desargues (1591 – 1661). Desargues publicou tratados matemáticos sobre as seções cônicas, mas não teve a atenção dos matemáticos contemporâneos, estes preocupados com os problemas relativos a Geometria Analítica.

Apesar de Desargues não ter sido aceito pelos matemáticos de sua época, seus trabalhos deixaram resultados importantes que foram abordados mais formalmente por

matemáticos como Blaise Pascal (1623 – 1662) e De La Hire (1640 – 1718). Pascal obteve resultados sobre as cônicas que acarretaram numa série de teoremas da Geometria Projetiva, já De La Hire fez publicações abordando alguns objetos geométricos sob a ótica das projeções.

**Figura 41 – A Última Ceia de Leonardo da Vinci.**



Fonte: < <https://www.historiadasartes.com/nomundo/arte-renascentista/renascimento/>>.

Apesar de suas aplicações e de sua influência na arquitetura e em resultados sobre as cônicas, a Geometria Projetiva não foi apresentada de forma axiomática e exibindo as propriedades projetivas dos objetos geométricos até o início do século XIX, quando o matemático francês Jean Victor Poncelet (1788 – 1867), considerado o pai da Geometria Projetiva, publicou um tratado sobre o tema.

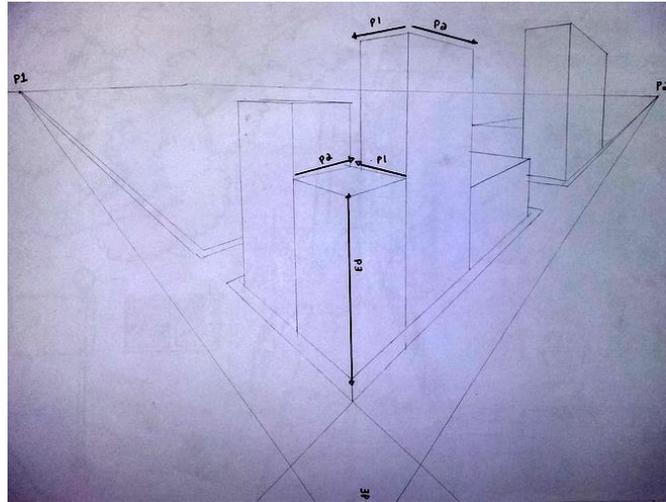
Abordada a história da Geometria Projetiva, torna-se necessário significá-la através do desenho, visando uma posterior análise e discussão dos teoremas apresentados nesse trabalho, com uma abordagem matemática e com técnicas importantes para o estudo da Geometria Projetiva.

## 6.2 O DESENHO DA PERSPECTIVA E A GEOMETRIA PROJETIVA

Uma prática a ser utilizada em sala de aula que nos proporcione a possibilidade de desenhos significativos é a Perspectiva, fazendo uso de pontos de fuga. Os pontos de fuga podem ser comparados aos feixes de retas, de onde fazemos uso de todas as retas necessárias para a construção do desenho.

Segue na Figura 42 um exemplo de construção com três pontos de fuga, em que destacam-se algumas retas utilizadas a partir deles, mostrando uma possibilidade para uso em sala de aula que pode acarretar em outros resultados.

**Figura 42 – Desenho com três pontos de Fuga**



Fonte: elaborado pelo autor

A metodologia sugerida tem como finalidade estimular os alunos do ensino médio a estudarem Geometria Projetiva, fazendo uso de técnicas de desenho para melhor compreender os sólidos geométricos e suas possibilidades de percepção por meio das perspectivas das figuras estudadas.

Propõe-se que sejam apresentadas as noções básicas do desenho em perspectiva, conceituando as definições de *ponto de fuga*<sup>6</sup> e *linha do horizonte*<sup>7</sup>, e indicar através destes a construção de figuras fazendo uso exclusivo de régua, com o auxílio do ponto de fuga.

Nos tópicos seguintes serão mostrados uma sequência didática que visa apresentar o passo a passo para a realização e uso das técnicas de desenho, aplicando os conceitos de ponto de fuga e de linha do horizonte, além de ferramentas essenciais no desenho em perspectiva. Há então, uma posterior exposição de como utilizar-se dessas técnicas para uma explanação da Geometria Projetiva, seus entes e seus axiomas.

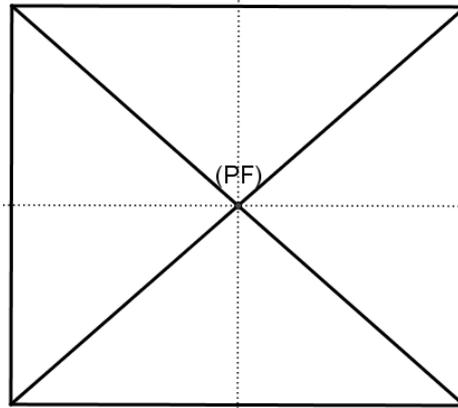
<sup>6</sup>É o ponto localizado na linha do horizonte, para onde todas as linhas “paralelas” convergem, quando vistas em perspectiva, costuma ser representado por (PF). Alguns tipos de perspectiva necessitam de dois ou mais pontos de fuga.

<sup>7</sup>Em perspectiva, é a linha imaginária que determina a altura dos olhos de um observador em relação à linha terra, também conhecida como reta de fuga. Representada por (LH).

### 6.2.1 Ponto de Fuga e o Feixe de Retas

A intenção de trabalhar com apenas um ponto de fuga é capacitar o aluno de noções relacionadas a profundidade. Esta percepção espacial já deveria estar fixada no aluno do Ensino Médio, uma vez que é parte do currículo da Educação Básica o aprendizado da leitura e interpretação dos sólidos geométricos. Entretanto, muitos estudantes chegam ao Ensino Médio sem essas habilidades de observação e compreensão de sólido geométrico.

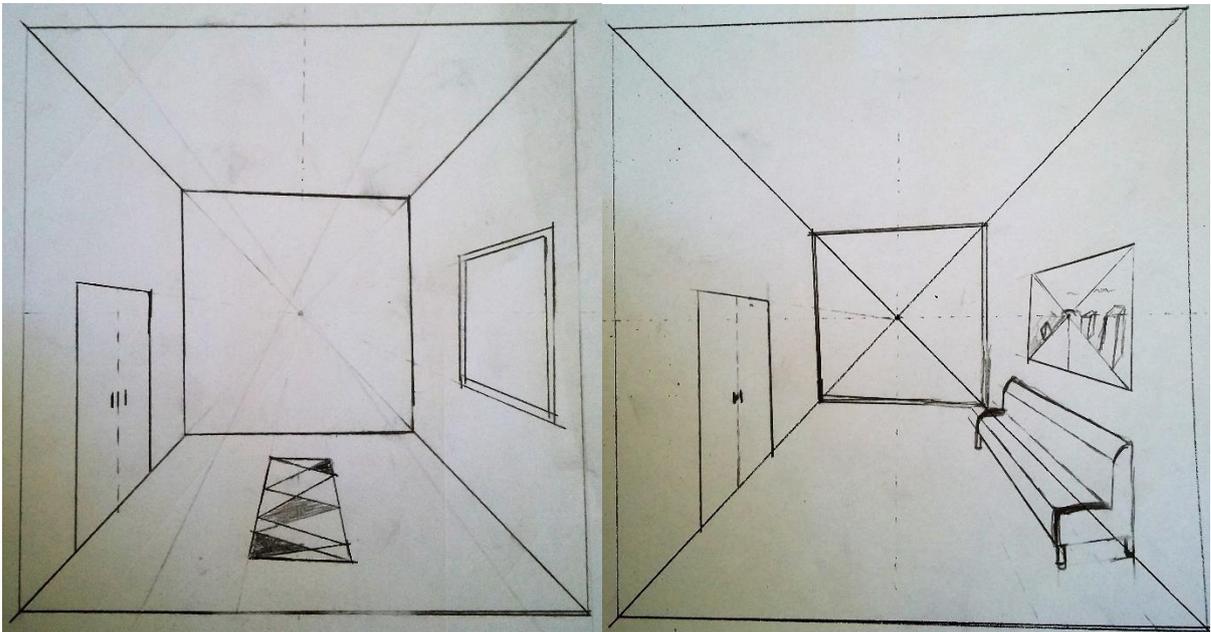
**Figura 43 – Estrutura básica para construções: um ponto de fuga centralizado em relação ao observador.**



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Inicialmente, construiremos a Figura 45 seguindo os passos indicados, podendo o aluno vir a desenvolver figuras mais complexas, tais como as apresentadas na Figura 44.

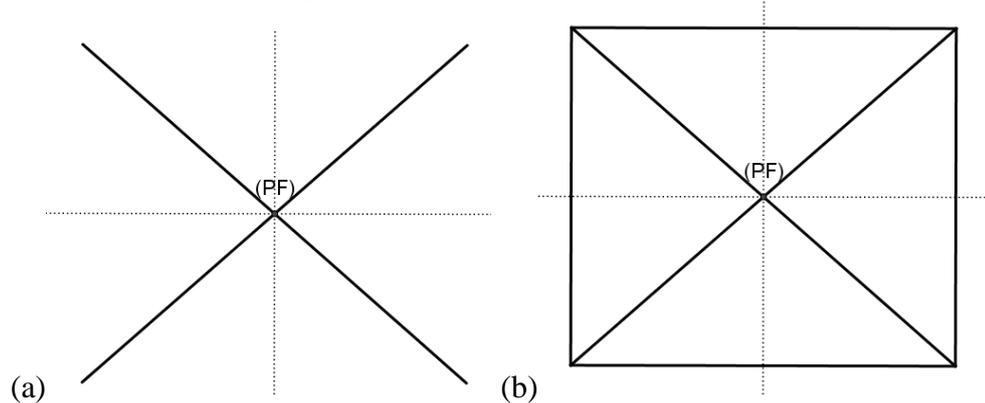
**Figura 44 – Desenhos possíveis com a estrutura básica com um ponto de fuga**  
(Realizados em sala de aula).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O desenho, acima proposto, intenciona prover o aluno com as ferramentas básicas para a realização de desenhos em perspectiva e profundidade, frisando o fato de os realizarmos apenas com régua e ponto de fuga.

**Figura 45 – Construção da estrutura básica com um ponto de fuga (1)**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para realizar construções como as acima, propomos o seguinte procedimento:

- Construa um ponto de fuga e por ele trace duas retas, como indicado na Figura 45;

Observamos que quanto maior o ângulo entre as retas, mais próximo de uma perspectiva cúbica o desenho irá parecer, por outro lado, quanto menor mais parecido com um paralelepípedo alto, esta perspectiva irá se apresentar.

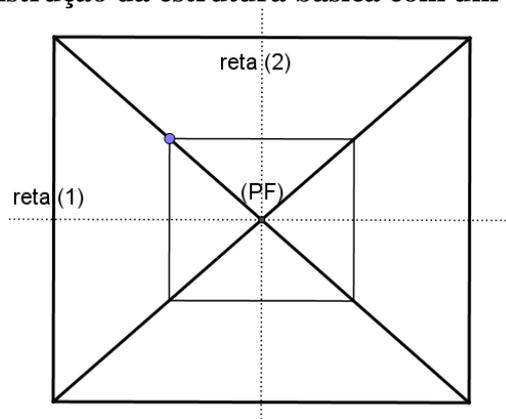
- Construa duas retas tracejadas, de modo que as retas formem um ângulo aproximadamente reto;

Vejam os que estas retas nos darão a posição desejada para as paredes da Figura 46.

- Trace, paralelamente a reta 1 na Figura 46, duas retas opostas com a mesma distância do ponto de fuga. Faça o mesmo em relação a reta 2, mas agora usando os pontos de interseção entre as retas construídas;

Obtemos até agora o esquema básico para a construção de desenhos em perspectiva com um ponto de fuga, onde o observador se encontra a frente do ponto de fuga, ou seja, no centro da observação da cena a ser construído. Nesse momento é comum que o agente realizador do desenho não consiga compreender o que se passa, isso se não tiver sido apresentado previamente à Figura 44, porém é parte da fixação da noção de perspectiva e profundidade que este momento da figura seja analisado. Na metodologia proposta, esse ponto é informativo para o professor, uma vez que o permite verificar de forma indireta, aqueles alunos que já compreendem a profundidade da Figura 46 e aqueles que ainda a veem de forma plana, exclusivamente, percebendo apenas um retângulo e suas diagonais.

**Figura 46 – Construção da estrutura básica com um ponto de fuga (2)**

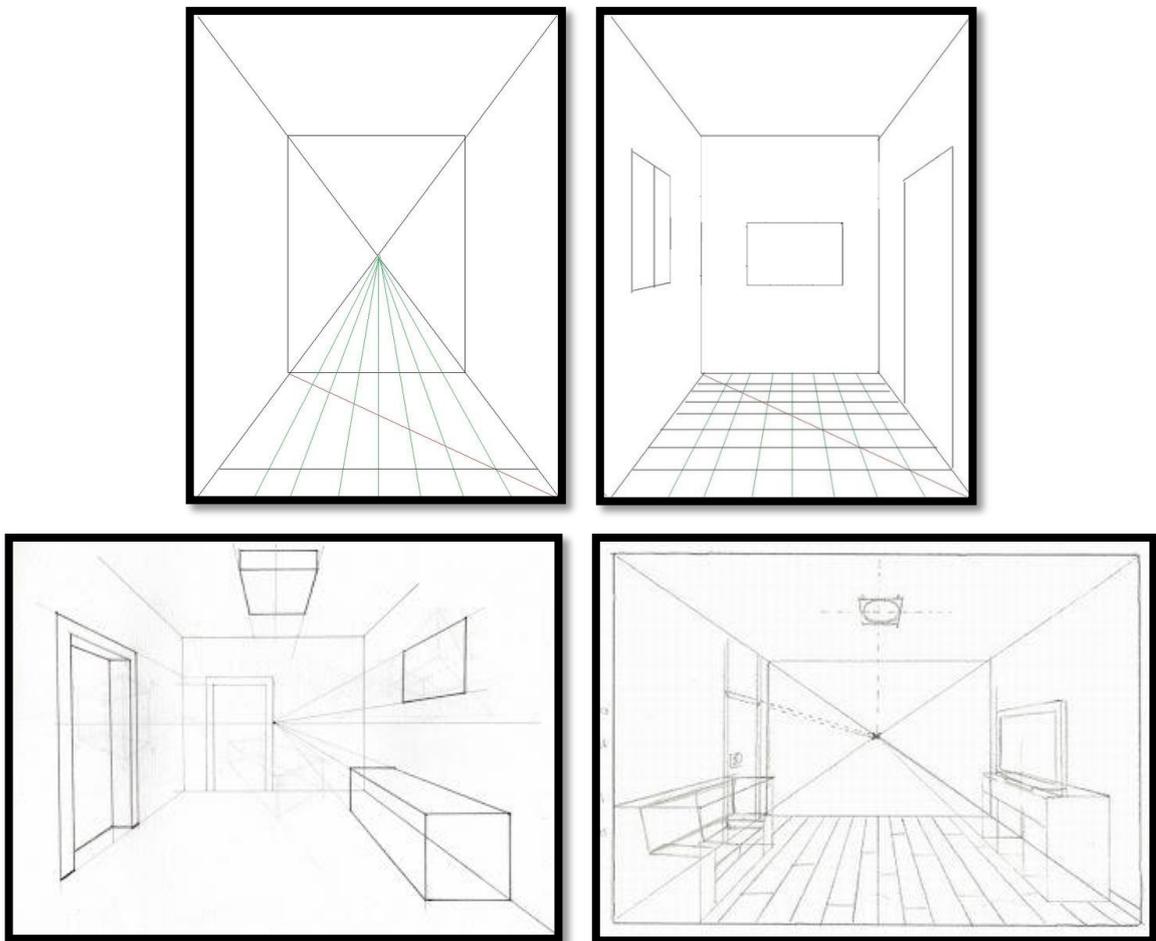


Fonte: Elaborada pelo Autor.

Com a estrutura construída anteriormente, e agora fazendo uso do ponto de fuga e das retas externas, construindo retas e traços, podemos alcançar resultados como os apresentados abaixo na Figura 47.

É importante significarmos a Geometria Projetiva na figura construída, definir o ponto de fuga como um feixe de retas e perceber que também fizemos uso de retas e que estas retas são chamadas, na Geometria Projetiva, de fileira de pontos. Cabe neste momento, uma abordagem das definições de perspectividade e projetividade, já que estas ocorrem na construção dos desenhos com o uso da estrutura básica (Figura 47), que se utiliza do feixe de retas (ora chamado de ponto de fuga), e das fileiras de pontos (ora chamados, simplesmente, de segmentos).

**Figura 47 – Algumas possibilidades com a estrutura de um ponto de fuga central em relação ao observador.**



Fonte: <<http://www.instructables.com/id/How-To-Draw-A-Room-Using-One-Point-Perspective/>>.

Configura-se ainda que o ponto de fuga é aquele que nos dá as retas com as quais constroem-se todas as perspectivas desejadas. Estas retas que incidem no ponto de fuga são infinitas, nos dando assim uma infinidade de possibilidades de desenho. Ora, na Geometria Projetiva o feixe de retas é exatamente um ponto pelo qual incidem infinitas retas. A partir de agora o professor poderá fazer uso do termo *feixe de retas* e, assim, enriquecer o vocabulário

matemático dos alunos, podendo fazer posterior uso desse conceito em demonstrações e exercícios.

### **6.2.2 Dois Pontos de Fuga e a Linha do Horizonte**

Passemos agora a desenhos mais complexos e com mais detalhes os quais irão auxiliar no desenvolvimento da percepção do aluno e na construção dos conceitos e teoremas na Geometria Projetiva. Apresentaremos a Linha do Horizonte (LH) e suas possibilidades no desenho.

É importante observarmos que a linha do horizonte é, no desenho, a correspondente à uma fileira de pontos na Geometria Projetiva. Acrescentamos então, mais um importante ente da Geometria Projetiva para o desenvolvimento de seus teoremas.

O desenho se desenvolverá fazendo uso apenas da régua e dos entes primitivos: feixe de retas (ponto de fuga) e fileira de pontos (linha do horizonte). Será agora possível a realização de desenhos como os apresentados na Figura 48, que são alguns dos resultados obtidos com alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Salientamos o fato de que a maioria dos alunos que participaram da metodologia não tinham contato prévio algum com o desenho, o que nos mostra ser possível desenvolver belos desenhos em perspectiva sem necessidade de pré-requisitos de desenho.

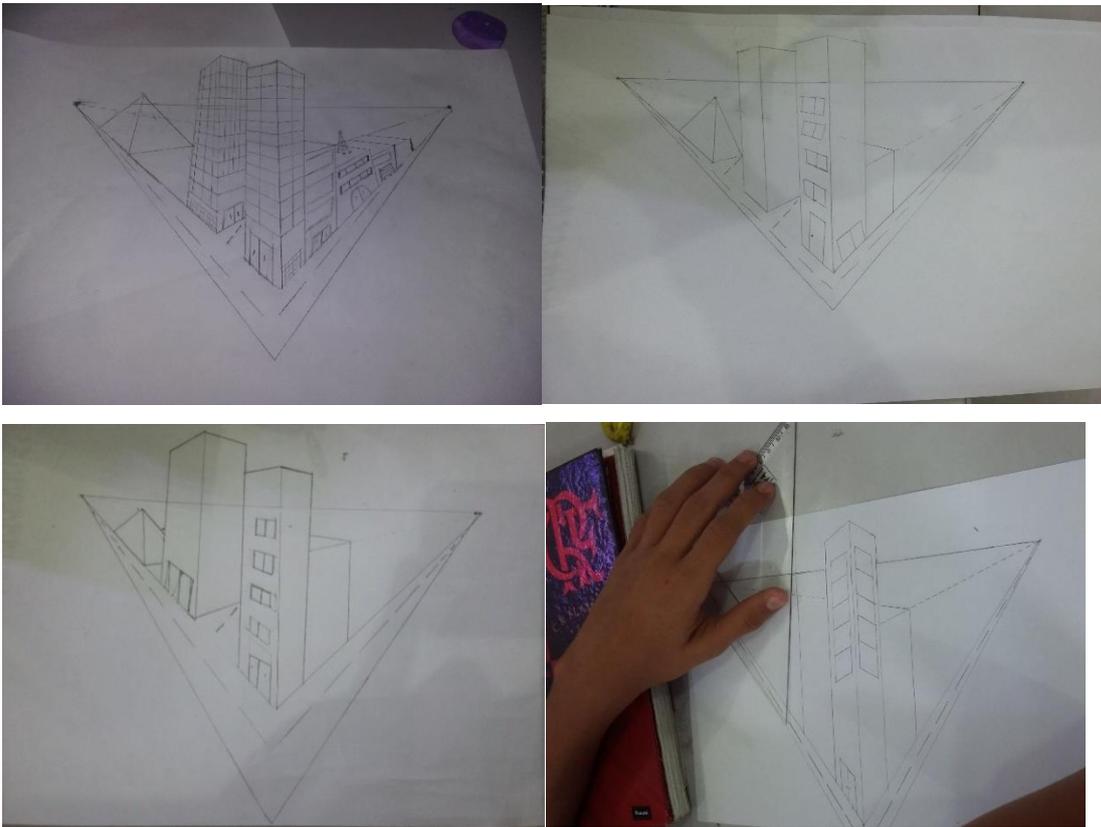
Seguem agora os passos propostos para obtenção de resultados como os acima mostrados.

- Construa uma linha do horizonte e nela marque dois pontos de fuga;

A distância entre esses dois feixes de reta é importante na construção do desenho final, e deve ser esclarecida para o aluno o que poderá ocorrer se os pontos estiverem muito próximos ou muito distantes (Ver Figura 49).

- Trace uma reta entre os dois pontos de fuga, tocando a linha do horizonte, em uma posição que proporcione a visão desejada em relação ao observador;

**Figura 48 – Resultados obtidos com alunos do 2º ano do ensino Médio fazendo uso da linha do horizonte e de dois pontos de fuga.**

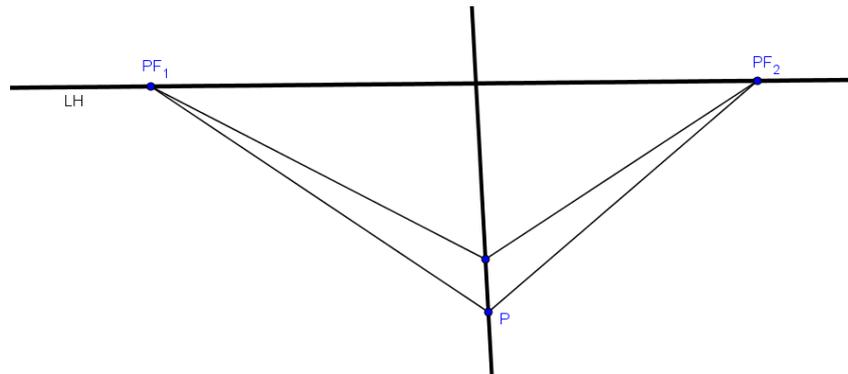


Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante observar que para o aluno iniciante, a posição mais prática para realizar o desenho é com o observador posicionado, aproximadamente, no centro da visão entre os dois feixes de retas.

- Trace um segmento de reta saindo de (PF1) para a reta traçada no passo anterior, marque o ponto de interseção P. Em seguida, saindo de (PF2), trace um segmento para o ponto de interseção P (Figura 49);

**Figura 49 – Construção com dois pontos de fuga e reta auxiliar**



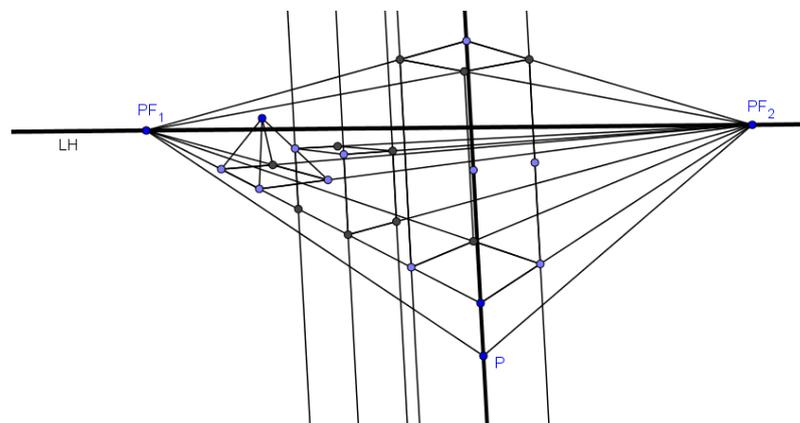
Fonte: Elaborada pelo Autor.

- Realize o passo anterior, modificando os ângulos, de acordo com o que se deseja apresentar na perspectiva. Indicamos a construção de ruas e posteriormente de prédios, com alturas distintas.

Passemos agora à construção dos detalhes do desenho em perspectiva. Desejamos realizar a construção de ruas e prédios, visando a obtenção de resultados como os da Figura 48, para tanto devemos nos atentar aos ângulos nos segmentos construídos, uma vez que estes serão os indicadores finais da perspectiva desejada.

Quanto maior os ângulos entre as retas construídas a partir do ponto de fuga, maior a percepção de proximidade. Não costuma ser fácil observar e compreender as diferenças que podem ocorrer na figura com essas variações sutis nos ângulos, mas após os desenhos realizados pelos alunos, estes podem apresentar a seus colegas os diferentes desenhos obtidos e perceber que as variações são consequências das escolhas dos ângulos e, por consequência, da perspectiva adotada.

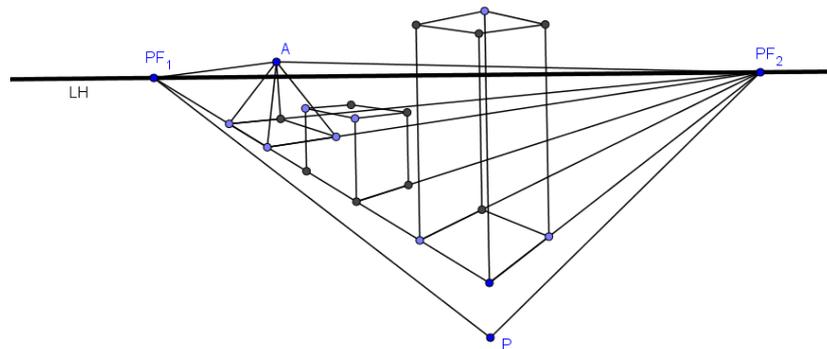
**Figura 50 – Construção de prédios e pirâmide em perspectiva parte 01**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Propomos o uso do software *Geogebra* como ferramenta auxiliar para apresentação das variações possíveis que modificam a figura e a perspectiva apenas com o reposicionamento de alguns fatores na figura 52.

**Figura 51 – Construção de prédios e pirâmide em perspectiva parte 02**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Vejamos que, seguindo os mesmos passos do procedimento de desenho com a régua e lápis, utilizando a fileira de pontos e dois feixes de retas, construímos desenhos em várias perspectivas e que podem se mostrar mais complexos. Há uma enorme vantagem no uso do software: o fato deste ser “dinâmico” nos permite realizar mudanças de perspectiva fazendo uso da mesma figura inicialmente construída, realizando variações em alguns de seus pontos e movimentando a (LH) e a reta de visão do observador (VO).

Tais resultados nos permitem mostrar aos alunos do ensino médio os sólidos por eles estudados, mas agora em mais de uma perspectiva. A construção do sólido com uso do software nos permite uma observação em vários ângulos e perspectivas, potencializando o desenvolvimento da noção espacial no aluno, bem como permitindo-lhe assimilar ideias relacionadas a interpretação de problemas.

### **6.2.3 Algumas considerações sobre a metodologia do desenho em perspectiva**

Após a realização dos desenhos, os alunos participantes do momento demonstraram bastante interesse em saber mais sobre o fato de haver uma geometria, que não a Euclidiana, a qual trata dos assuntos relativos àqueles desenhos, proporcionando uma

apresentação da Geometria Projetiva e seus objetos iniciais, tais como triângulos e quadrângulos, bem como uma melhor compreensão de *feixe de retas* e *fileira de pontos*.

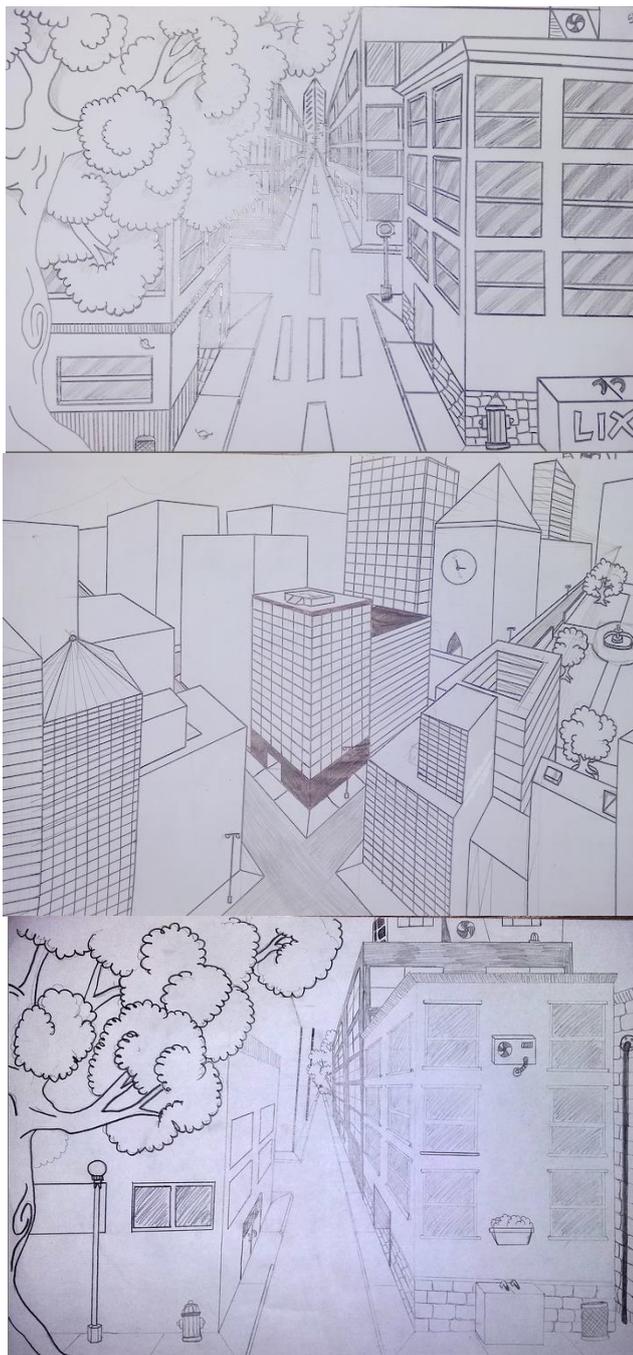
O desenho com o uso dos pontos de fuga e da perspectiva leva o aluno a perceber os resultados em seu desenho e estimula desenvolver novas obras e aprender sobre a Geometria Projetiva.

Fica perceptivo pelos resultados obtidos com os desenhos, que os pontos de fuga são essenciais para uma apresentação da Geometria Projetiva no Ensino Médio, pois estes apresentam, informalmente, as noções básicas de perspectividade e pontos no infinito, que acabam oportunizando bases para também compreender a projetividade, operações elementares nas construções e resultados da Geometria Projetiva.

Apresentar e desenvolver aulas que estimulem o uso de desenhos com pontos de fuga e com linhas do horizonte tornam o ensino da Geometria Projetiva mais significativo. Portanto, é importante que haja uma progressiva exposição das técnicas de desenho por meio de um ponto de fuga, linha do horizonte e dois pontos de fuga. Após esse momento, com a intenção de desenvolver mais habilidades e resultados da Geometria Projetiva, o estudante deverá ser apresentado aos axiomas e teoremas iniciais da Geometria Projetiva que podem ser grandes auxiliares em um estudo mais avançado do tema.

Por fim, cabe ao professor identificar as ferramentas mais apreciáveis à sua realidade e aos objetivos que ele quer obter com a apresentação da Geometria Projetiva na sala de aula.

**Figura 52 – Imagens Elaboradas por Alunas com uso de Perspectivas e Pontos de Fuga**



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 7 APLICAÇÕES E RESOLUÇÕES DE ALGUNS PROBLEMAS

No estudo de problemas na Matemática, por vezes nos confrontamos com enunciados e teoremas que, pela sua simplicidade no enunciado, nos dão uma vontade de abordá-los de forma direta, pensando ser esse o melhor caminho para resolvê-los. Porém, em sua grande maioria, tais enunciados nos enganam, como é o caso do Teorema de Desargues, um teorema que pode ser enunciado de forma simples como: *Se dois triângulos estão em perspectiva por um ponto, então estarão em perspectiva por uma reta.* No entanto vimos que sua demonstração permeia várias noções matemáticas e depende de outros teoremas de enunciado não tão simples.

Reflitamos um pouco sobre o que ocorre com o caso inverso, ou seja, com um enunciado nada trivial e que nos leva a pensar que sua demonstração seja bastante complexa. Vejamos o que diz o Teorema de Carnot:

As tangentes construídas nos vértices de um triângulo não-isósceles, com relação a circunferência circunscrita a este triângulo, intersectam os lados opostos aos vértices em três pontos colineares.

Propomos ao leitor que tente realizar a demonstração desse teorema. Pretendemos tornar a demonstração do Teorema de Carnot mais significativa e simples, porém necessitaremos de outros conceitos e teoremas para tal. Parte dos nossos problemas visam trabalhar com técnicas e ampliar resultados que nos proporcionem um melhor entendimento de sua demonstração.

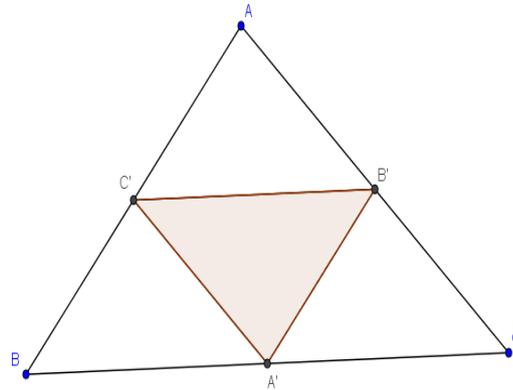
Desenvolveremos ainda algumas aplicações das homotetias e de tópicos da Geometria Projetiva, na perspectiva de resolver algumas questões de Olimpíadas de Matemática.

Abordaremos os problemas com uso dos teoremas e definições apresentados nesse texto, tais como as homotetias, o teorema de Menelaus e outros teoremas e definições que se façam necessárias.

### 7.1 O TRIÂNGULO MEDIAL E A RETA DE EULER

O triângulo formado pelos pontos médios de um triângulo dado será chamado de triângulo medial. Sejam os pontos  $A, B, C, A', B', C'$ , segundo a Figura 53, onde o triângulo  $A'B'C'$  é o triângulo medial do triângulo  $ABC$ .

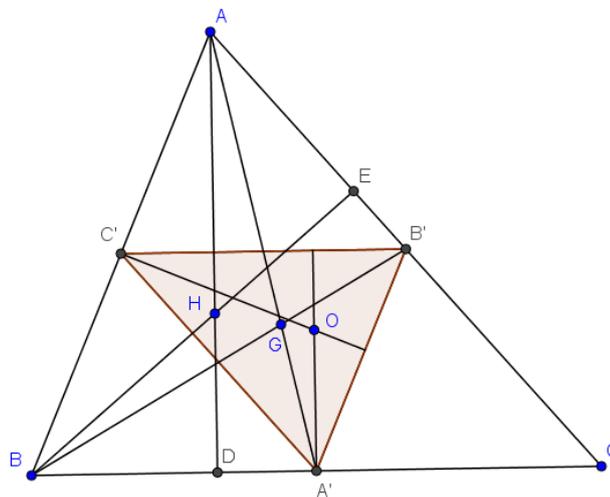
**Figura 53 – Triângulo Medial**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vejamos alguns resultados em relação aos pontos notáveis nos triângulos, vistos sob uma óptica da geometria clássica. Marquemos agora algumas retas e pontos notáveis nesses triângulos. Inserindo duas medianas  $AA'$  e  $BB'$  tocando-se em  $G$ , duas alturas do  $\Delta ABC$  (correspondentes aos vértices  $A$  e  $B$ ) tocando-se em  $H$ , e duas mediatrizes do  $\Delta ABC$  tocando-se em  $O$ .

**Figura 54 – Triângulo Medial com baricentro  $G$ , ortocentro  $H$  e circuncentro  $O$ .**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Façamos algumas observações quanto a Figura 54. Para tal, utilizaremos a proposição abaixo que, assim como a proposição da Seção 3.5, é uma consequência da versão geral do Teorema de Desargues (mais precisamente, de sua recíproca) enunciada no Capítulo 5.

**PROPOSIÇÃO 7.1.1** (Veja Lema 3.10 em [3])      Sejam  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  triângulos não-congruentes com lados correspondentes paralelos. Então, as retas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem num ponto  $O$  que é o centro de uma homotetia aplicando  $\Delta ABC$  em  $\Delta A'B'C'$ . (Em palavras: *triângulos desiguais em perspectiva pela reta no infinito são homotéticos.*)

**Prova.**      Vamos encarar o problema no contexto da geometria projetiva: dizer que os lados correspondentes são paralelos significa que tais lados cruzam-se em pontos da reta no infinito, ou seja, estão em perspectiva por uma reta, donde também estão em perspectiva por um ponto  $O$ , pela recíproca do Teorema de Desargues. Tal ponto não pode ser um ponto no infinito, caso contrário os triângulos seriam congruentes (e.g.,  $AA' \parallel BB'$  implica que  $ABYX$  é um paralelogramo, donde  $AB = XY$ ). Considerando a homotetia  $h$  de centro em  $O$  que leva  $A$  em  $A'$ , é fácil ver que  $h(B) = B'$  e  $h(C) = C'$ . Por exemplo, se  $h(B) = Y$ , então  $AB \parallel A'Y$  e  $Y$  pertence à reta  $OB$ , ou seja,  $Y$  é ponto de interseção da paralela a  $AB$  por  $A'$  com a reta  $OB$ ; mas  $B'$  é este ponto, ou seja,  $h(B) = Y = B'$ . Analogamente,  $h(C) = C'$ . ■

Veja que a homotetia de centro em  $A$  e razão  $\frac{1}{2}$  aplica  $\Delta ABC$  em  $\Delta A'C'B'$ , donde concluímos da Propriedade 5 que

(Teorema da Base Média)  $B'C' \parallel BC$  e  $B'C' = \frac{1}{2}BC$ .

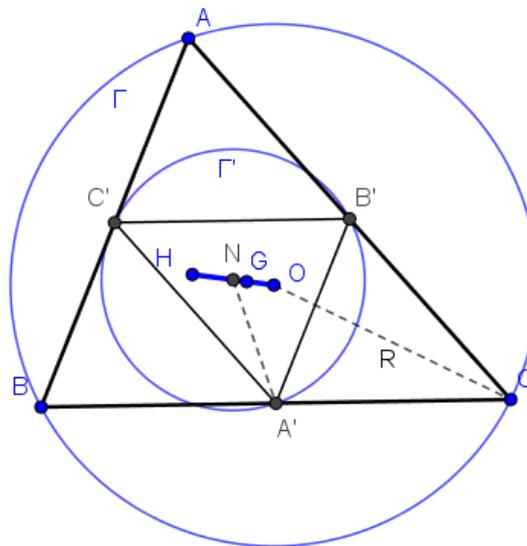
Como  $\Delta A'B'C'$  tem os lados correspondentes paralelos aos lados de  $\Delta ABC$ , a proposição anterior nos diz que existe uma homotetia  $h$  de centro em  $G$  (o ponto de encontro das medianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$ ) que transforma  $\Delta ABC$  em  $\Delta A'B'C'$ . Se  $k$  é a razão de  $h$ , então  $k$  deve ser negativa (pois, por exemplo,  $G$  está entre  $A$  e  $A' = h(A)$ ) e  $|k| = B'C'/BC = \frac{1}{2}$ , ou seja,  $k = -\frac{1}{2}$ . (contido neste argumento está uma prova do fato de que as medianas de um triângulo concorrem num ponto – o baricentro – que as divide na razão  $2 : 1$ , do vértice ao ponto médio do lado oposto.) Como homotetias preservam os pontos notáveis de um triângulo (e com uma notação óbvia) temos:

- 1)  $G' = h(G) = G$ , ou seja, um triângulo e o seu medial tem o mesmo baricentro.
- 2)  $H' = h(H) = O$ , isto é, o circuncentro de um triângulo é o ortocentro do seu medial. (para ver que  $H' = O$ , observe que as mediatrizes de  $\Delta ABC$  são as alturas de  $\Delta A'B'C'$ .)

Assim,  $H, G$  e  $O = h(H)$  são colineares com  $G$  entre  $H$  e  $O$  e  $HG = 2GO$ . A reta que contém os pontos  $H, G$  e  $O$  chama-se *reta de Euler*. Também se costuma dizer que  $HO$  é o segmento de Euler.

Agora escrevamos  $H$  como combinação afim de  $G$  e  $O$ :  $H = 3G - 2O$ . Considerando o cálculo na página 36, concluímos que  $h_{H,1/2} = h_{G,-1/2} \circ h_{O,-1}$ . Logo, se  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  denotam os circuncírculos de  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$ , respectivamente,  $h_{H,1/2}$  aplica  $\Gamma$  em  $\Gamma'$ . Com efeito, uma vez que  $\Gamma$  fica invariante por  $h_{O,-1}$  (que nada mais é do que uma simetria em torno do ponto  $O$ ), a afirmação segue de  $h_{G,-1/2}(\Gamma) = \Gamma'$ , uma vez que  $h_{G,-1/2}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$  e homotetias preservam circunferências. Portanto, o centro  $N$  de  $\Gamma'$  é a imagem de  $O$  (centro de  $\Gamma$ ) por  $h_{H,1/2}$ , donde  $N$  é o ponto médio de  $HO$ . Também, se  $R$  denota o raio de  $\Gamma$ , vê-se que  $\frac{R}{2}$  é raio de  $\Gamma'$  (estas conclusões a respeito do centro e do raio de  $\Gamma'$  poderiam ter sido obtidas utilizando-se a homotetia  $h_{G,-1/2}$ ).

**Figura 55 – O Ponto Médio do Segmento HO na Reta de Euler**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

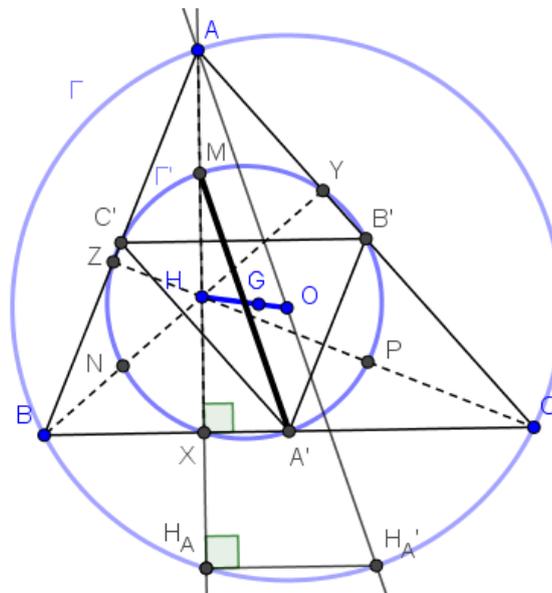
## 7.2 O CÍRCULO DE NOVE PONTOS

Se  $M, N$  e  $P$  denotam os pontos médios de  $AH, BH$  e  $CH$ , respectivamente, então  $M, N$  e  $P$  pertencem a  $\Gamma'$  (pois,  $M = h_{H,1/2}(A)$ , com  $A$  em  $\Gamma$ , etc). Agora sejam  $H_A$  e  $H_{A'}$  os pontos de interseção (distintos de  $A$ ) das semirretas  $AH$  e  $AO$  com  $\Gamma$ , respectivamente. Note que  $h_{H,1/2}(H_{A'}) = h_{G,-1/2}(h_{O,-1}(H_{A'})) = h_{G,-1/2}(A) = A'$ . Se  $X = h_{H,1/2}(H_A)$ , um ponto de  $\Gamma'$ ,

então  $A'X$  é paralela a  $H_A H_A'$  e, como  $AH_A'$  é um diâmetro de  $\Gamma$ ,  $H_A H_A'$  é perpendicular a  $H_A A$ . Portanto  $\overrightarrow{A'X}$  também é perpendicular a  $\overrightarrow{H_A A}$ , donde  $\overrightarrow{A'X} = \overrightarrow{BC}$ , por serem ambas perpendiculares a  $\overrightarrow{AH_A} = \overrightarrow{AH}$  por  $A'$ . Assim,  $X$  é o pé da altura do  $\Delta ABC$  baixada de  $A$ . Se  $Y$  e  $Z$  denotam os pés das alturas baixadas de  $B$  e  $C$ , respectivamente, ficou provado que  $X, Y$  e  $Z$  pertencem a  $\Gamma'$ . Antes de enunciar o Teorema do círculo dos nove pontos (que acabamos de provar!), registremos duas consequências importantes da nossa análise acima:

- 1) O reflexo do ortocentro de um triângulo com relação a um dos lados pertence ao circuncírculo deste triângulo (em nossa Figura 56,  $H_A$  é o reflexo de  $H$  com respeito a  $BC$ ).
- 2) O simétrico do ortocentro de um triângulo com relação ao ponto médio de um dos lados pertence ao circuncírculo deste triângulo (em nossa Figura 56,  $H_{A'}$  é o simétrico de  $H$  com respeito a  $A'$ ).

**Figura 56 – Círculo de Nove Pontos – Demonstração por Homotetias**

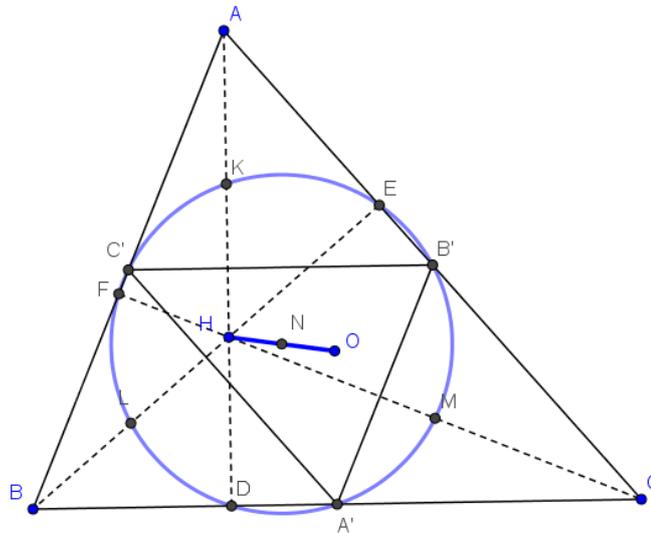


Fonte: Elaborada Pelo Autor.

#### TEOREMA (CÍRCULO DOS NOVE PONTOS)

Os pés das três alturas de um triângulo, os pontos médios dos seus três lados, e os pontos médios dos segmentos formados pelos três vértices e o ortocentro, todos pertencem a mesma circunferência, cujo centro é o ponto médio do segmento de Euler e o raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

**Figura 57 – Circulo de Nove Pontos**



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 7.3 ALGUNS PROBLEMAS COM O USO DE HOMOTETIAS

Seguem alguns problemas cujas soluções permeiam o uso de homotetias.

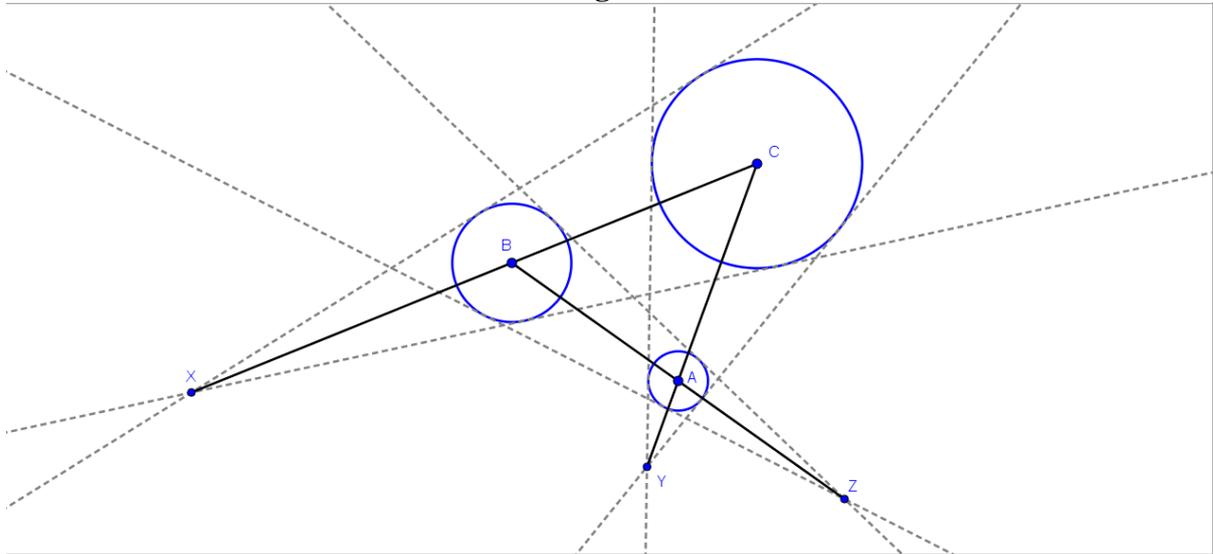
Iniciaremos com um problema conhecido como o Teorema de Monge.

**PROBLEMA 01** Considere três circunferências duas a duas disjuntas exteriormente  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  no plano. Para cada par de circunferências construa a interseção das suas tangentes comuns. Prove que essas três interseções são colineares.

#### SOLUÇÃO 01

Sejam designados os centros das circunferências por  $A, B, C$ . Sejam as tangentes das circunferências de centro  $B$  e  $C$  intersectando-se no ponto  $X$ . Sejam as tangentes das circunferências  $A$  e  $C$ , e também as de  $B$  e  $A$  intersectando-se em  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. É fácil verificar que  $X$  pertence a reta  $BC$ ,  $Y$  pertence a reta  $AC$  e  $Z$  pertence a reta  $BA$ .

**Figura 58 – Teorema de Monge: Circunferências e as intersecções de suas retas tangentes**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Vamos construir as três homotetias abaixo,

$$H_{X, \frac{XB}{XC}} = H_X$$

$$H_{Y, \frac{YC}{YA}} = H_Y$$

$$H_{Z, \frac{ZA}{ZB}} = H_Z$$

Sendo  $H$  a composta dada por  $H = H_Y \circ H_Z \circ H_X$ , é fácil verificar que  $H(C) = C$ . Logo  $H$  é uma homotetia de centro em  $C$  e razão positiva (o produto das razões positivas das homotetias que a compõem). Vejamos agora que  $H$  é a identidade, verificando que  $H(\omega_C) = \omega_C$ . De fato,

$$H(\omega_C) = H_Y \circ H_Z \circ H_X(\omega_C).$$

Como as retas tangentes a  $\omega_B$ , digamos  $r$  e  $s$ , passam por  $X$ , tais retas ficam invariantes por  $H_X$ . Logo, como homotetias preservam tangências, circunferências e  $H_X(C) = B$ ,  $H_X(\omega_C)$  deve ser uma circunferência de centro em  $B$  tangente as retas  $r$  e  $s$ , ou seja,  $H_X(\omega_C) = \omega_B$ . Analogamente, teremos  $H_Z(\omega_B) = \omega_A$  e  $H_Y(\omega_A) = \omega_C$ , donde  $H(\omega_C) = \omega_C$ .

Podemos concluir daí que  $H$  é a identidade. Pelo COROLÁRIO 3.2.1,

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Daí,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

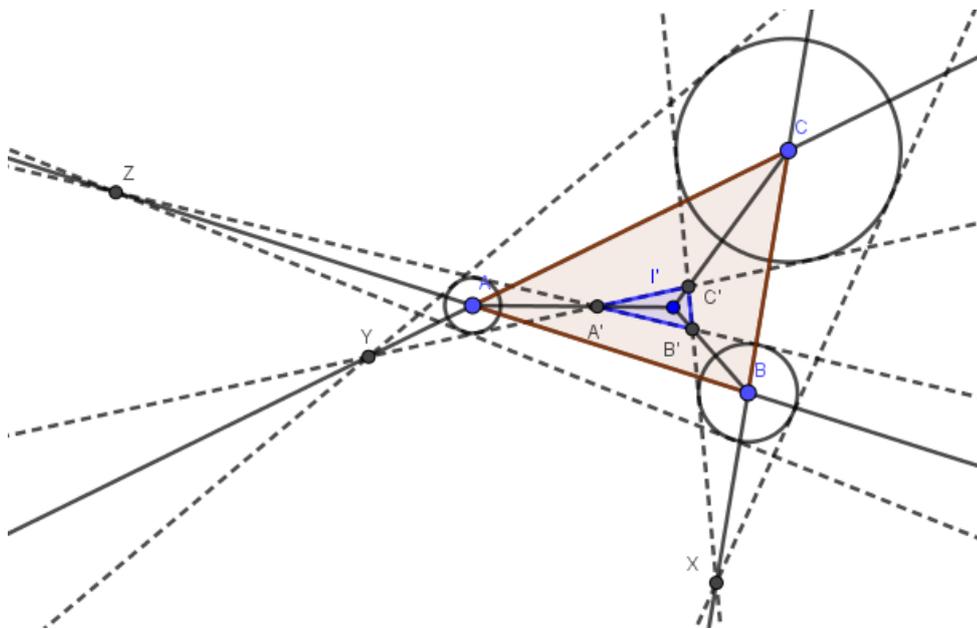
Assim, pelo Teorema de Menelaus  $X, Y, Z$  são colineares.

**SOLUÇÃO 02** (Fazendo uso do Teorema de Desargues)

Outra solução bem direta pode ser feita com o uso do Teorema de Desargues. Para tal faremos uso da figura abaixo.

Seja o triângulo  $A'B'C'$  definido pelos pontos de intersecção das retas tangentes as circunferências  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , internos ao triângulo  $ABC$ , como escrito na figura abaixo. Mostraremos que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  estão em perspectiva por um ponto. Seja  $I'$  o incentro do triângulo  $A'B'C'$ . Ora, sabemos da geometria plana que as retas  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$  e  $\overrightarrow{CC'}$  bissectam os ângulos internos do triângulo  $A'B'C'$ . Logo essas retas irão se intersectar em  $I'$ , o que nos mostra que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  estão em perspectiva em relação ao ponto  $I'$ .

**Figura 59 – Teorema de Monge Fazendo Uso de Triângulos em Perspectiva**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

Como  $\{X\} = \overrightarrow{BC} \cap B'C'$ ,  $\{Y\} = AC \cap A'C'$  e  $\{Z\} = AB \cap A'B'$  e o Teorema de Desargues nos garante que  $ABC$  e  $A'B'C'$  estão em perspectiva por uma reta, podemos concluir que  $X, Y, Z$  são colineares.

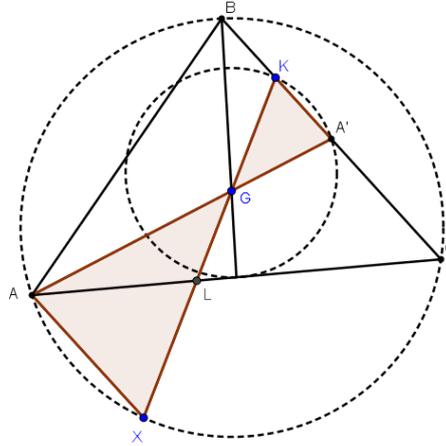
**PROBLEMA 02** Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo e suponha que  $X$  é um ponto no circuncírculo de  $ABC$ , com  $\overrightarrow{AX} \parallel \overrightarrow{BC}$  e  $X \neq A$ . Denote por  $G$  o baricentro do triângulo  $ABC$ , e por  $K$  o pé da altura do vértice  $A$  para  $\overrightarrow{BC}$ . Prove que  $K, G, X$  são colineares.

## SOLUÇÃO

Sabemos que  $\Gamma'$ , o círculo dos nove pontos, é a imagem de  $\Gamma$  (o circuncírculo de  $ABC$ ) por  $h = h_{G, -\frac{1}{2}}$ . Como  $K$  pertence a  $\Gamma'$ , existe  $X'$  em  $\Gamma$  com  $h(X') = K$ . Obviamente,  $K, G$  e  $X'$  são colineares (com  $X'G = 2GK$ ). Como  $h(A'X') = A'K = BC$ , vem (Propriedade 5)  $AX' \parallel BC$ , donde  $X' = X$  (ambos são a interseção da paralela a  $BC$  por  $A$  com  $\Gamma$ ) e daí  $K, G$  e  $X$  são colineares.

■

**Figura 60 – Construção para solução do PROBLEMA 02**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

## 7.4 PROBLEMAS ENVOLVENDO A GEOMETRIA PROJETIVA

Para desenvolvermos alguns problemas a nível de olimpíadas, necessitamos apresentar mais alguns conceitos da Geometria Projetiva, assim como teoremas a partir de definições mais práticas para a solução de problemas.

Definamos então a razão cruzada, um importante invariante dessa Geometria, a qual podemos dizer ser a equivalente aos comprimentos na Geometria Euclidiana.

**DEFINIÇÃO 7.4.1** Dados quatro pontos  $A, B, X, Y$  na mesma reta, nós definimos a razão cruzada como

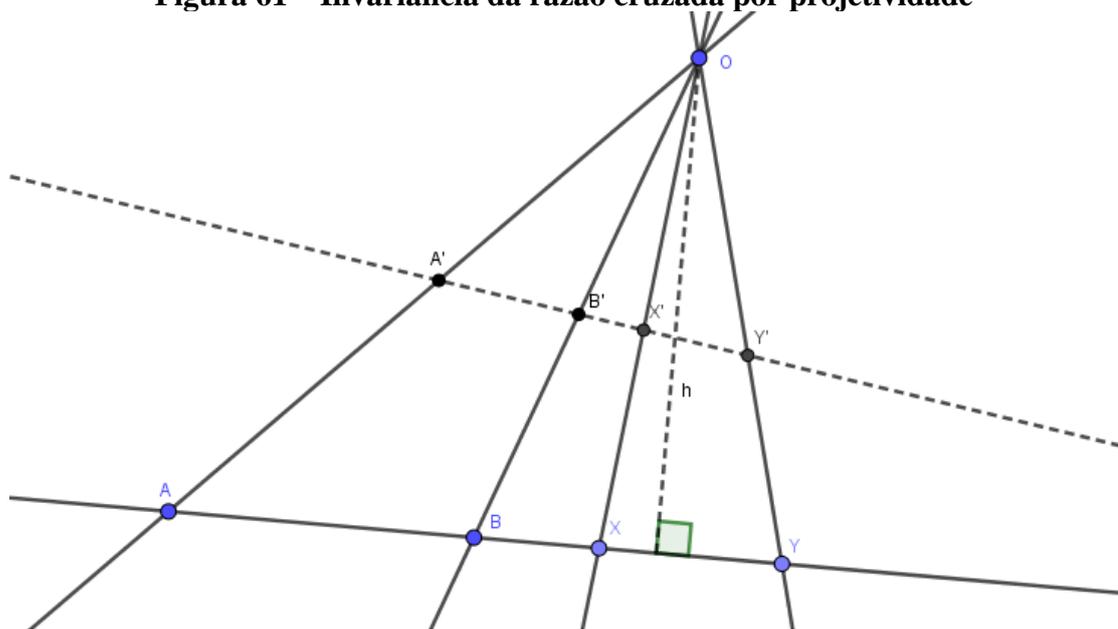
$$(A, B; X, Y) = \frac{XA}{XB} \div \frac{YA}{YB}.$$

Tais razões são direcionadas, ou seja,  $XA = -AX$ . Assim, em particular, a razão cruzada pode ser negativa.

Outro fato interessante, que pode ser verificado pelo leitor, é que  $(A, B; X, Y) > 0$  precisamente quando os segmentos  $AB$  e  $XY$  são disjuntos, ou um está contido no outro. Podemos resolver nosso primeiro problema na Geometria Projetiva, o qual resolveremos fazendo uso da Geometria Euclidiana<sup>8</sup>.

**PROBLEMA 03** Mostre que a razão cruzada é invariante por projetividade.

**Figura 61 – Invariância da razão cruzada por projetividade**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

## SOLUÇÃO

Faremos uma prova fazendo uso do cálculo de áreas em triângulos, utilizaremos a lei que nos diz que a área de um triângulo é igual a metade do produto das medidas de dois lados multiplicados pelo seno do ângulo formado entre estes lados. Assim, segundo a Figura 73, teremos que

$$(OXA) = \frac{1}{2} h(XA) = \frac{1}{2} (OA)(OX) \operatorname{sen}(\widehat{XOA}) \rightarrow (XA) = \frac{(OA)(OX) \operatorname{sen}(\widehat{XOA})}{h}$$

$$(OXB) = \frac{1}{2} h(XB) = \frac{1}{2} (OB)(OX) \operatorname{sen}(\widehat{XOB}) \rightarrow (XB) = \frac{(OB)(OX) \operatorname{sen}(\widehat{XOB})}{h}$$

$$(OYA) = \frac{1}{2} h(YA) = \frac{1}{2} (OA)(OY) \operatorname{sen}(\widehat{YOA}) \rightarrow (YA) = \frac{(OA)(OY) \operatorname{sen}(\widehat{YOA})}{h}$$

<sup>8</sup> Esse fato vem ocorrendo em vários teoremas da Geometria Projetiva. Fizemos o inverso na PROPOSIÇÃO 7.1.1.

$$(OYB) = \frac{1}{2}h(YB) = \frac{1}{2}(OB)(OY)\text{sen}(\widehat{YOB}) \rightarrow (YB) = \frac{(OB)(OY)\text{sen}(\widehat{YOB})}{h}$$

Donde resulta que,

$$\frac{XA}{XB} = \frac{\frac{(OA)(OX)\text{sen}(\widehat{XOA})}{h}}{\frac{(OB)(OX)\text{sen}(\widehat{XOB})}{h}} \rightarrow \frac{XA}{XB} = \frac{(OA)\text{sen}(\widehat{XOA})}{(OB)\text{sen}(\widehat{XOB})}$$

e ainda,

$$\frac{YA}{YB} = \frac{\frac{(OA)(OY)\text{sen}(\widehat{YOA})}{h}}{\frac{(OB)(OY)\text{sen}(\widehat{YOB})}{h}} \rightarrow \frac{YA}{YB} = \frac{(OA)\text{sen}(\widehat{YOA})}{(OB)\text{sen}(\widehat{YOB})}$$

Ora, podemos concluir então que a razão cruzada  $(A, B; X, Y)$  será dada por

$$(A, B; X, Y) = \frac{XA}{XB} \div \frac{YA}{YB} = \frac{\text{sen}(\widehat{XOA})\text{sen}(\widehat{YOB})}{\text{sen}(\widehat{XOB})\text{sen}(\widehat{YOA})}$$

Do resultado acima, obtemos que a razão cruzada de  $A, B, X, Y$  é dependente apenas dos ângulos obtidos pela projetividade por  $O$ . Desse modo, tal razão será a mesma para quaisquer pontos colineares  $A', B', X', Y'$ , de modo que  $A' \in \overrightarrow{OA}, B' \in \overrightarrow{OB}, X' \in \overrightarrow{OX}, Y' \in \overrightarrow{OY}$ .

Assim a razão cruzada é invariante por projetividade. ■

**PROBLEMA 04** Chamemos de  $\lambda$  a razão cruzada  $(A, B; X, Y)$ . Dados os pontos  $A, B, X$  e a razão cruzada  $\lambda$ , determine a posição do ponto  $Y$ .

### SOLUÇÃO

Resolveremos esse problema analiticamente, posicionando os pontos  $A, B, X, Y$  sobre um eixo coordenado. Desse modo, os pontos  $A, B, X, Y$ , terão coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , respectivamente. Dai, teremos que

$$\lambda = (A, B; X, Y) = \frac{XA}{XB} \div \frac{YA}{YB} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \div \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

Donde segue-se que,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_2)} \cdot \frac{(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)} \rightarrow \lambda = \frac{x_3x_4 - x_3x_2 - x_1x_4 + x_1x_2}{x_3x_4 - x_3x_1 - x_2x_4 + x_1x_2} \rightarrow \\ &\rightarrow x_3x_4(\lambda - 1) - \lambda x_4(x_2 + x_1) = \lambda x_1(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3)x_2 \rightarrow \\ &\rightarrow x_4[x_3(\lambda - 1) - \lambda(x_2 + x_1)] = \lambda x_1(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3)x_2 \rightarrow \\ &\therefore x_4 = \frac{\lambda x_1(x_3 - x_2) + x_2(x_1 - x_3)}{\lambda(x_3 - x_2 - x_1) - x_3}. \end{aligned}$$



Dadas quatro retas  $a, b, x$  e  $y$  concorrentes num ponto  $P$ , podemos definir a razão cruzada  $(a, b; x, y)$  como  $(a, b; x, y) = (A, B; X, Y)$ , em que  $A, B, X$  e  $Y$  são as interseções das retas dadas com uma outra reta (que não passe por  $P$ ). O Problema 3 garante que esta definição é consistente, isto é, não depende da quádrupla colinear  $(A, B, X, Y)$ , uma vez que quaisquer duas destas quádruplas estão sempre em perspectiva a partir do ponto  $P$ .

Introduziremos uma notação útil para estender a definição de razão cruzada para pontos co-circulares<sup>9</sup>: dados cinco pontos quaisquer  $A, B, X, Y$  e  $P$  definimos  $P(A, B; X, Y)$  como sendo  $(a, b; x, y)$ , para  $a = AP, b = BP, x = XP$  e  $y = YP$ . Se agora  $A, B, X$  e  $Y$  são quatro pontos co-circulares, podemos definir a sua razão cruzada  $(A, B; X, Y)$  da seguinte forma:  $(A, B; X, Y) := P(A, B; X, Y)$ , em que  $P$  é um ponto qualquer na circunferência que contém os pontos dados. O próximo teorema garantirá a consistência desta definição.

**TEOREMA 7.4.2** Sejam  $A, B, X$  e  $Y$  pontos co-circulares. Se  $P$  é um ponto na circunferência que os contém, então  $P(A, B; X, Y)$  não depende de  $P$ . Além disso,

$$P(A, B; X, Y) = \mp \frac{XA}{XB} \div \frac{YA}{YB}$$

onde o sinal é positivo se  $AB$  e  $XY$  não se intersectam, e negativo caso contrário.

**Prova.**

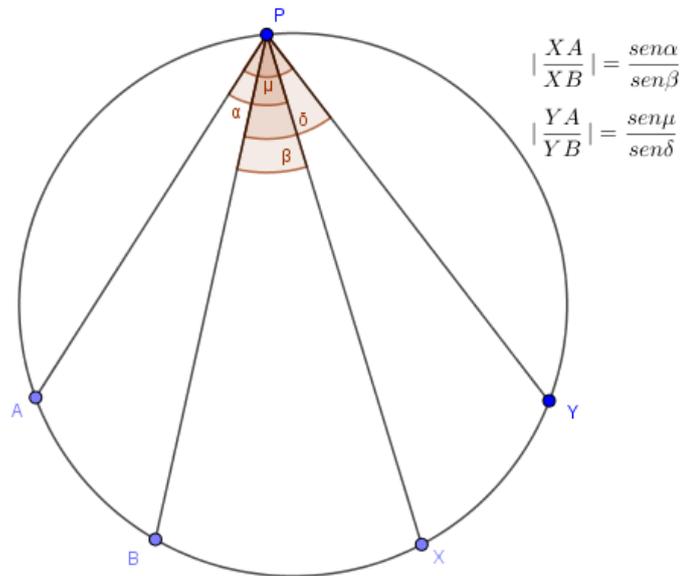
Antes de apresentarmos uma prova para o Teorema acima, façamos um estudo de seu sinal por meio das figuras abaixo, onde seguem-se o caso em que  $AB$  e  $XY$  não se intersectam, e o caso em que  $AB$  e  $XY$  se intersectam.

Pela demonstração realizada para razão cruzada para a quatro pontos colineares, podemos repetir os mesmos argumentos na circunferência, realizando uma projeção Estereográfica em relação ao ponto  $P$ , poderemos então realizar o estudo do sinal da razão cruzada.

---

<sup>9</sup> Chamaremos de pontos co-circulares a um conjunto de pontos que pertencem a uma mesma circunferência.

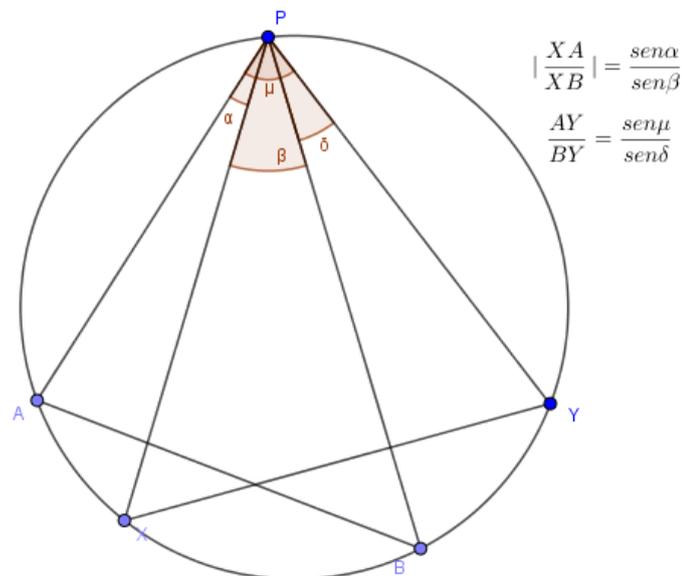
**Figura 62 – Razão Cruzada de Pontos Co-circulares: caso positivo.**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

Os resultados relativos ao uso da lei dos senos e do estudo dos sinais, sendo os segmentos orientados, nos dão os casos em que o sinal da razão cruzada será positivo (Figura 62) ou negativo (Figura 63).

**Figura 63 – Razão Cruzada de Pontos Co-circulares: caso negativo.**



Fonte: Elaborada Pelo Autor.

Para nossa prova da invariância da razão cruzada por projeção estereográfica iremos denotar por  $A', B', X', Y'$ , as projeções estereográficas de  $A, B, X, Y$ , com respeito ao ponto  $P$ , respectivamente. Observemos agora que, pela lei dos senos, seguirá que

$$XA = \text{sen } \alpha \cdot 2r$$

$$XB = \operatorname{sen} \beta \cdot 2r$$

$$YA = \operatorname{sen} \mu \cdot 2r$$

$$YB = \operatorname{sen} \delta \cdot 2r$$

Sendo  $r$  o raio do círculo contendo os pontos  $P, A, B, X$  e  $Y$ . Daí segue que,

$$\left| \frac{XA}{XB} \right| = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$$

e

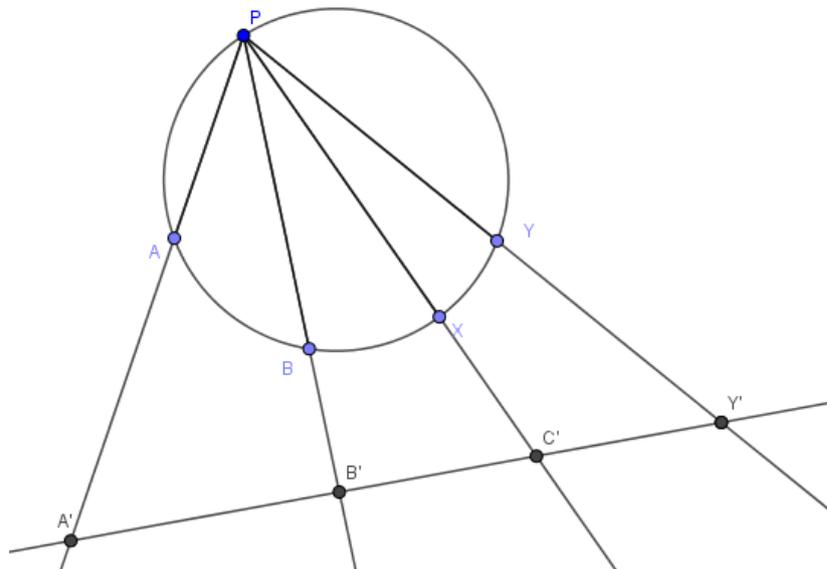
$$\left| \frac{YA}{YB} \right| = \frac{\operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} \delta}.$$

Daí, teremos que

$$P(A, B; X, Y) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \div \frac{\operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} \delta}.$$

Pelos resultados obtidos no PROBLEMA 04, segue que para a razão cruzada  $P(A', B'; X', Y')$  obteremos,  $P(A', B'; X', Y') = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \div \frac{\operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} \delta}$ , não dependendo de  $P$ . Quanto ao sinal, este dependerá dos casos já citados anteriormente.

**Figura 64 – Invariância da Razão Cruzada por Projeção Estereográfica (01)**

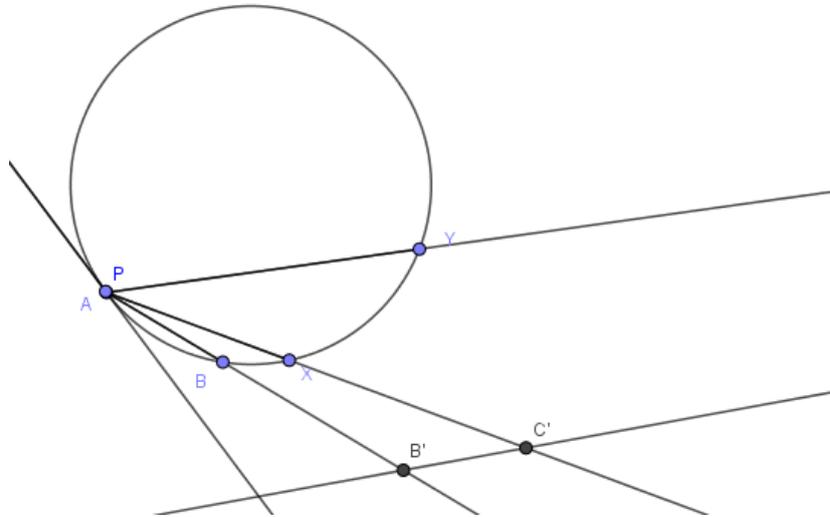


Fonte: Elaborado Pelo Autor.

Agora, pela projeção estereográfica acima, se por exemplo  $P \rightarrow A$ , então  $(A, B; X, Y) = (A', B'; X', Y')$ , com  $AA'$  tangente a circunferência (dos pontos  $A, B, X$  e  $Y$ ) em  $A$  (Figura 65).

■

**Figura 65 – Invariância da Razão Cruzada por Projeção Estereográfica (02)**



Fonte: Elaborado Pelo Autor.

#### 7.4.1 Conjuntos Harmônicos e Alguns Problemas Com Uso da Razão Cruzada

A mais importante razão cruzada para o desenvolvimento dos problemas que iremos propor é a razão cruzada de valor igual a  $-1$ .

**DEFINIÇÃO** Quando  $(A, B; X, Y) = -1$ , diz-se que  $(A, B, X, Y)$  é um conjunto harmônico<sup>10</sup>. Isso é dito pelo fato de  $\frac{XA}{XB} = -\frac{YA}{YB}$ , o que nos diz que  $AB$  é dividido interna e externamente na mesma razão, ou seja,  $AB$  é dividido harmonicamente. Dizemos ainda que  $X$  e  $Y$  são conjugados harmônicos com respeito a  $AB$ . De modo análogo, definimos uma quádrupla de retas harmônicas.

Outras razões cruzadas que nos interessam são aquelas envolvendo pontos no infinito. Denotemos pelo símbolo  $P_\infty$  um ponto no infinito. Se  $A, B, C$  são três pontos quaisquer numa reta  $l$  incidente em  $P_\infty$ , então é possível atribuir um valor para o símbolo  $(A, B; X, P_\infty)$ . Vejamos: se  $P$  é um ponto sobre a reta  $l$ , então  $(A, B; X, P_\infty)$  será o limite de  $(A, B; X, P)$  quando  $P$  tende para o infinito sobre a reta  $l$ . Mas,

$$(A, B; X, P) = \frac{XA}{XB} \div \frac{PA}{PB}$$

e como  $P$  tende para o infinito, então  $\frac{PA}{PB}$  tende para 1. Podemos então definir,

$$(A, B; X, P_\infty) = \frac{XA}{XB}.$$

<sup>10</sup> Utilizaremos simplesmente harmônico para nos referir ao agrupamento harmônico.

Definida a razão cruzada para um ponto no infinito, teremos o seguinte resultado em particular: Se  $(A, B; X, P_\infty) = -1$ , então  $X$  é o ponto médio do segmento  $AB$ . Podemos enunciar a recíproca:

**PROPOSIÇÃO 7.4.1.1** Dados os pontos  $A$  e  $B$ , seja  $M$  o ponto médio do segmento  $AB$ , e  $P_\infty$  um ponto no infinito sobre a reta definida pelo segmento  $AB$ . Então  $(A, B; M, P_\infty)$  é um conjunto harmônico.

A introdução de elementos no infinito nos permite tratar teoremas de modo mais geral, não sendo necessário se preocupar com casos particulares em que as retas são paralelas. Quanto a essas retas, basta observarmos que todas aquelas retas projetivas que incidem sobre um ponto no infinito são retas Euclidianas paralelas, e reciprocamente. Esse é um resultado bastante explorado na resolução de problemas com o uso da geometria projetiva. Também utilizamo-nos dele para reescrever teoremas da Geometria Projetiva na Geometria Euclidiana<sup>11</sup>. Assim, tanto a apresentação quanto a prova de teoremas da Geometria Euclidiana ficam mais simples com o uso de elementos no infinito.

Passemos agora a apresentação e resolução de alguns problemas na Geometria Projetiva.

**PROBLEMA 05** Seja  $\omega$  uma circunferência e seja  $P$  um ponto fora dela. Sejam  $PX$  e  $PY$  segmentos de reta tangentes a  $\omega$ . Tome uma reta através de  $P$  intersectando  $\omega$  nos pontos  $A$  e  $B$ .

- (a) Prove que  $AXBY$  é um quadrilátero harmônico.  
 (b) Verifique que, se  $Q = AB \cap XY$ , então  $(A, B; P, Q)$  é um conjunto harmônico.

## SOLUÇÃO

a) Fazendo referência à figura abaixo (Figura 66), temos  $PAX \sim PXB$ , donde  $\frac{PA}{PX} = \frac{XA}{XB}$ . Analogamente  $(PAY \sim PYB) \frac{PA}{PY} = \frac{YA}{YB}$ . Como  $PX = PY$ , vem  $\frac{XA}{XB} = \frac{YA}{YB}$ , donde  $(A, B; X, Y) = -\frac{XA}{XB} \div \frac{YA}{YB} = -1$  (o sinal negativo ocorre porque  $AB$  e  $XY$  se cruzam), ou seja,  $AXBY$  é um quadrilátero harmônico.

b) Como  $(A, B, X, Y)$  projeta-se a partir de  $X$  em  $(A, B, P, Q)$ , segue-se da invariância da razão cruzada por projeções que  $(A, B, P, Q) = -1$ , ou seja,  $(A, B, P, Q)$  é um conjunto harmônico.

<sup>11</sup> Um exemplo disso são as apresentação do Teorema de Desargues nas duas geometrias, vistas nos capítulos 3 e 5.

■

Para o próximo problema utilizaremos o Teorema de Ceva, cujo enunciado e demonstração encontra-se na seção 7.5.

**PROBLEMA 06** Seja  $ABC$  um triângulo com cevianas concorrentes  $AD, BE, CF$ . A reta  $EF$  intersecta  $BC$  no ponto  $X$  (possivelmente um ponto no infinito). Mostre que  $(X, D; B, C)$  é um conjunto harmônico.

### SOLUÇÃO

Pelo Teorema de Ceva, teremos que

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad (1)$$

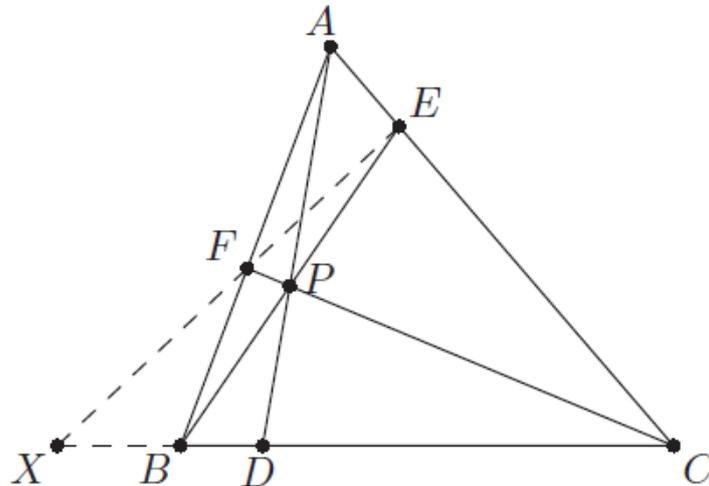
Agora, pelo Teorema de Menelaus, teremos

$$\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = -1$$

Donde segue-se que,

$$\therefore \frac{BX}{CX} \cdot \frac{FA}{BF} \cdot \frac{EC}{AE} = 1 \quad (2)$$

**Figura 66 – Cevianas Induzem Conjuntos Harmônicos, produzindo  $(X, D; B, C) = -1$**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Assim, por (1) e (2)

$$\begin{aligned} \frac{BX}{CX} \cdot \frac{FA}{BF} \cdot \frac{EC}{AE} &= \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{BX}{CX} = -\frac{DB}{DC} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{XB}{XC} = -\frac{DB}{DC}$$

Concluimos então que  $(X, D; B, C) = -1$ .

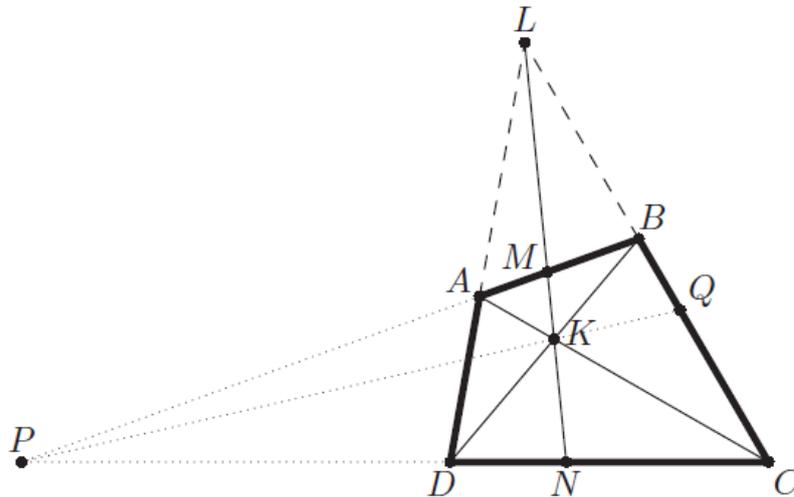
■

**PROBLEMA 07** Seja  $ABCD$  um quadrilátero cujas diagonais concorrem em  $K$ . Ainda, as retas  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  intersectam-se em  $L$ , e a reta  $\overleftrightarrow{KL}$  intersecta  $CD$  e  $AB$  nos pontos  $N$  e  $M$ , respectivamente. Prove que  $(K, L; M, N) = -1$ , ou seja,  $(K, L, M, N)$  é um conjunto harmônico.

### SOLUÇÃO

Por construção, temos um quadrilátero completo.

**Figura 67 – Quadrilátero completo para obter o conjunto harmônico  $(K, L, M, N)$ .**



Fonte: Retirado de CHEN, EVAN pág. 175.

Na Figura acima, seja  $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ , e seja  $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{PK}$ . Pelo PROBLEMA 06, podemos concluir que  $(Q, L; B, C) = -1$ . Veja que podemos obter  $(K, L, M, N)$ , a partir de  $(Q, L, B, C)$  por uma perspectividade de centro em  $P$ , donde teremos que

$$-1 = (Q, L; B, C) = (K, L; M, N).$$

■

**PROBLEMA 08**(USA TST 2011/1) Num triângulo acutângulo escaleno  $ABC$ ,  $DEF$  é o triângulo órtico<sup>12</sup>. As alturas  $AD, BE, CF$  tocam-se no ortocentro  $H$ . Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem ao segmento  $EF$  de modo que  $AP \perp EF$  e  $HQ \perp EF$ . As retas  $\overleftrightarrow{DP}$  e  $\overleftrightarrow{QH}$  intersectam-se no ponto  $R$ . Calcule  $HQ/HR$ .

### SOLUÇÃO

A solução desse problema pode ser um tanto quanto difícil fora do nosso contexto, porém iremos usar alguns dos resultados obtidos nos problemas anteriores. Vejamos que, pelo PROBLEMA 7,

$$(A, H; AD \cap EF, D) = -1$$

(com relação a  $BCEF$ ).

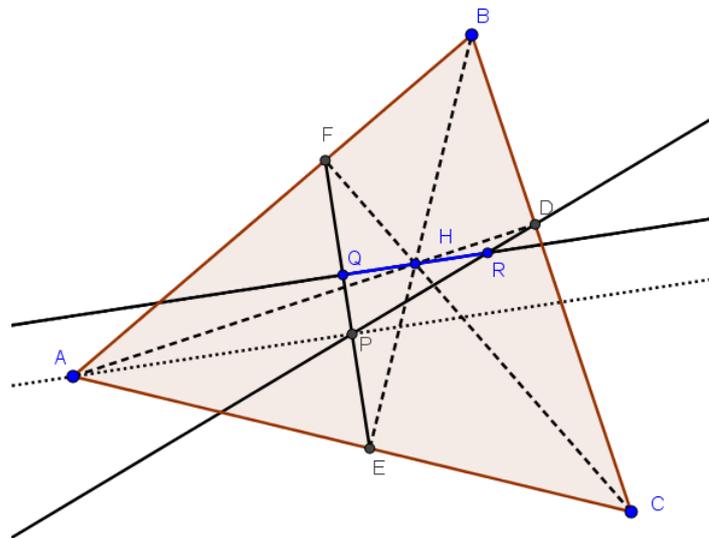
Seja  $P_\infty$  o ponto no infinito nas retas paralelas  $\overleftrightarrow{AP}$  e  $\overleftrightarrow{QR}$ . Como  $(P_\infty, H, Q, R)$  e  $(A, H, AD \cap EF, D)$  estão em perspectiva pelo ponto  $P$ , concluímos que

$$(P_\infty, H; Q, R) = -1.$$

Então,  $\frac{HQ}{HR} = -1$ , ou seja,  $H$  é o ponto médio de  $QR$ .

■

**Figura 68 – Construção do PROBLEMA 08**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

<sup>12</sup> Triângulo órtico é o triângulo formado pelos pés das alturas.

### 7.4.2 Construções Geométricas com o uso apenas de Régua

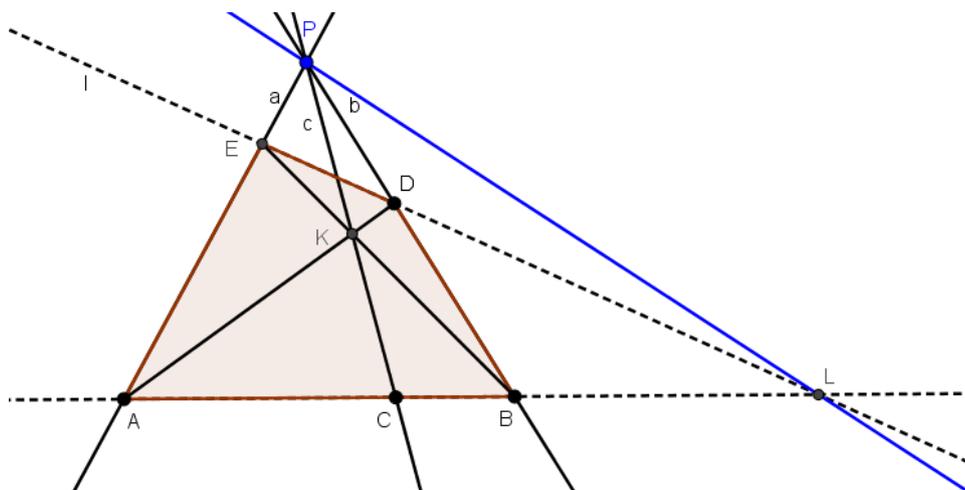
Resolveremos aqui alguns problemas com o uso de construções geométricas, nos quais nos utilizaremos de ideias relativas a Geometria Projetiva. Tais problemas visam apresentar algumas das possibilidades de uso nas construções, as quais poderão ser realizadas apenas com uso da régua. Vejamos o nosso primeiro problema de construção.

**PROBLEMA 09** Construa a quarta reta harmônica para três retas dadas concorrentes num ponto, utilizando apenas a régua.

#### SOLUÇÃO

A Figura a seguir representa o resultado final após o procedimento de construção descrito abaixo.

**Figura 69 – Construção da Quarta Reta Harmônica Apenas Com Uso de Régua**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

1. Dadas três retas  $a, b, c$  concorrentes no ponto  $P$ , construa uma reta  $r$ , que não passa por  $P$ , intersectando as retas  $a, b, c$ , nos pontos  $A, B, C$ , respectivamente.
2. Trace uma reta passando por  $A$ , intersectando as retas  $c, b$  nos pontos  $K, D$  respectivamente, ambos distintos de  $C$  e  $B$ .
3. Trace a semireta  $\overrightarrow{BK}$  que intersecta a reta  $a$  no ponto  $E$ .
4. Trace a reta  $\overleftrightarrow{ED}$  intersectando  $r$  no ponto  $L$ .

Obs: Caso a reta  $c$  seja bissetora de  $a$  e  $b$ , teremos que  $C$  será o ponto médio de  $AB$ , donde teremos  $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{ED}$ , com isso  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{ED} = L_\infty$ . Donde continuarão válidos os argumentos da justificativa.

5. Basta então construirmos a reta  $PL = l$ . Esta reta será a quarta reta harmônica as três retas dadas.

JUSTIFICATIVA: Construimos acima o quadrilátero completo  $ABDE$ . Pelo **PROBLEMA 7**, tal quadrilátero induz conjuntos harmônicos. Sabendo-se que

$$(c, l; b, a) = (C, L; B, A),$$

e que  $(C, L; B, A) = -1$ , concluímos que  $(c, l, b, a)$  é uma quadrupla de retas harmônicas.

**PROBLEMA 10** Construa o quarto ponto harmônico para três pontos dados numa reta.

### SOLUÇÃO

Como ilustração da construção que iremos realizar indicamos o uso da Figura 67.

1. Sejam dados os três pontos  $C, Q, B$ , sobre a reta  $r$ .
2. Marque um ponto  $P$ , de modo que  $P$  não pertence a reta  $r$ .
3. Construa as retas  $PB, PQ, PC$ .
4. Trace uma reta por  $B$  que intersecta  $PQ$  em  $K$  e  $PC$  em  $D$ .
5. Trace a reta  $CK$  que intersecta  $PB$  em  $A$ .
6. Trace a reta  $AD$  intersectando  $BC$  no ponto  $L$ .

O ponto  $L$  será o quarto ponto harmônico desejado.

JUSTIFICATIVA: O quadrilátero  $ABCD$  é um quadrilátero completo, por construção. Daí temos, pelo **PROBLEMA 7**, que  $(Q, L; B, C) = -1$ , donde concluímos que  $L$  é o nosso ponto desejado.

■

Os problemas de construção se mostram como uma interessante possibilidade no processo de ensino aprendizagem, pois ajudam na fixação e aplicação dos teoremas, lemas e problemas resolvidos por meio do cálculo. Usarmos apenas a régua torna as construções mais elegantes, e sua apresentação pode ser feita sem maiores dificuldades.

## 7.5 O TEOREMA DE CARNOT

Para tornarmos o Teorema de Carnot um problema mais conciso e em concordância com a geometria discorrida, vejamos os seguintes teoremas.

**TEOREMA DE CEVA**                      Seja  $ABC$  um triângulo, e sejam  $A', B', C'$  pontos nos lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Os segmentos  $AA', BB', CC'$  são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = 1. \quad (1)$$

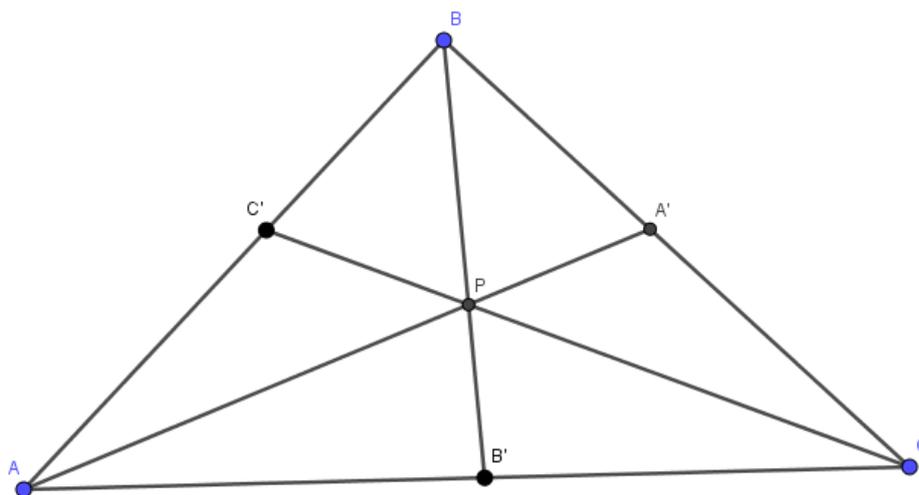
### Prova

Defina  $(ABC)$  como a área do triângulo  $ABC$ .

Para a primeira parte do teorema, suponha que  $AA', BB', CC'$  intersectam-se no ponto  $P$ . Vejamos que os triângulos  $AA'C, ABA'$ , possuem a mesma altura, donde temos que

$$\frac{(ABA')}{(AA'C)} = \frac{BA'}{A'C} \quad (2)$$

**Figura 70 – Teorema de Ceva**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O mesmo ocorre para os triângulos  $PA'C, PBA'$ , donde

$$\frac{(PBA')}{(PA'C)} = \frac{BA'}{A'C} \quad (3)$$

Por (2) e (3), teremos que

$$\frac{(ABA')}{(AA'C)} = \frac{(PBA')}{(PA'C)} = \frac{(ABA') - (PBA')}{(AA'C) - (PA'C)} = \frac{(ABP)}{(APC)}$$

$$\therefore \frac{(ABP)}{(APC)} = \frac{BA'}{A'C}$$

Analogamente, podemos obter

$$\frac{(BCP)}{(BPA)} = \frac{CB'}{B'A}$$

e

$$\frac{(CAP)}{(CPB)} = \frac{AC'}{C'B}$$

Assim,

$$\frac{BA' CB' AC'}{A'C B'A C'B} = \frac{(ABP)}{(A'PC)} \frac{(BCP)}{(BPA)} \frac{(CAP)}{(CPB)}$$

$$\therefore \frac{BA' CB' AC'}{A'C B'A C'B} = 1.$$

Suponha agora que  $A', B', C'$ , são tais que vale a igualdade (1). Suponha ainda que  $AA', BB'$ , intersectam-se em  $P$  e que a reta  $CP$  toca o lado  $AB$  no ponto  $C''$ . Por construção, os pontos  $A', B', C'$ , satisfazem a primeira parte do teorema de Ceva, mas  $A'', B'', C''$ , também satisfazem. Daí,

$$\frac{BA' CB' AC'}{A'C B'A C'B} = \frac{BA' CB' AC''}{A'C B'A C''B}$$

$$\therefore \frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{C''B}.$$

Como os pontos  $C'$  e  $C''$  são internos a  $AB$ , segue-se que  $C' = C''$ .

Conclui-se então que  $CC'$  concorre com  $AA'$  e  $BB'$  em  $P$ .

■

**DEFINIÇÃO** Sejam  $ABC$  um triângulo e  $AA'$  uma ceviana. A ceviana isogonal de  $AA', AA''$ , é o reflexo de  $AA'$  com respeito a bissetriz de  $ABC$  por  $A$ . Também dizemos que  $AA'$  e  $AA''$  são cevianas isogonais.

**DEFINIÇÃO** A ceviana isogonal de uma mediana chama-se simediana.

O teorema a seguir mostra um importante resultado no que se refere as cevianas. A relação resultante é chamada de *relação de Steiner*. Vejamos,

**TEOREMA 7.5.2 (Relação de Steiner)**No triângulo  $ABC$ , se as Cevianas $AA'$  e  $AA''$  são isogonais, então

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{BA''}{CA''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

**Prova**

Façamos uma prova por áreas. Tal qual o argumento na prova do Teorema de Ceva, é fácil ver que

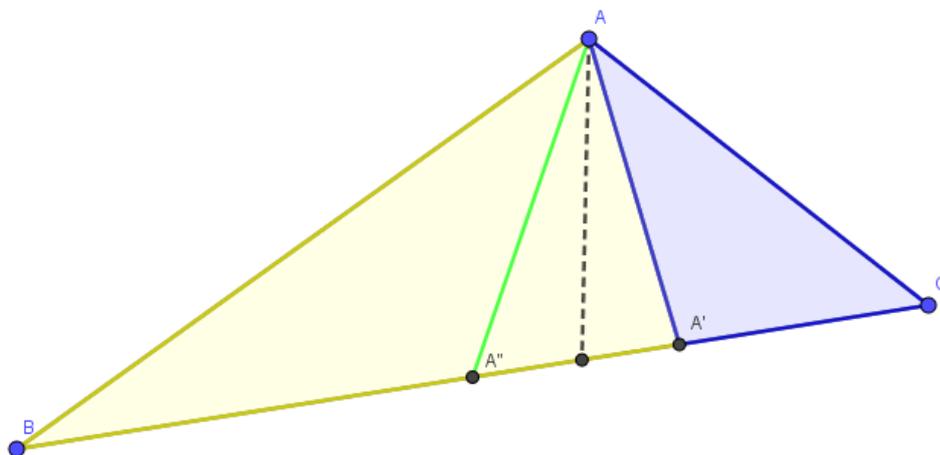
$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{(BAA')}{(CAA')}.$$

Por outro lado,

$$(BAA') = \frac{1}{2} AB \cdot AA' \cdot \text{sen}(\widehat{BAA'})$$

e

$$(CAA') = \frac{1}{2} AC \cdot AA' \cdot \text{sen}(\widehat{CAA'})$$

**Figura 71 – Prova da Relação de Steiner**

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Donde segue que,

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\widehat{BAA'})}{AC \cdot \text{sen}(\widehat{CAA'})}.$$

Similarmente, teremos para os triângulos  $BAA''$ ,  $CAA''$ , o seguinte resultado

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{(BAA'')}{(CAA'')} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\widehat{BAA''})}{AC \cdot \text{sen}(\widehat{CAA''})}.$$

Agora, sendo

$$\widehat{BAA'} \equiv \widehat{CAA''}$$

e

$$\widehat{CAA'} \equiv \widehat{BAA''}.$$

Daí, teremos por consequência a relação de Steiner, ou seja,

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{BA''}{CA''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

■

Em particular, podemos citar o seguinte corolário

**COROLÁRIO 7.5.1** (Relação de Steiner para o caso da mediana) Se  $AA''$  é simediana no triângulo  $ABC$ , então

$$\frac{BA''}{CA''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (*)$$

Reciprocamente, se  $A'' \in BC$  e vale a relação (\*), então  $AA''$  é simediana.

**TEOREMA 7.5.3 (Ponto de Lemoine)**

As três simedianas de um triângulo

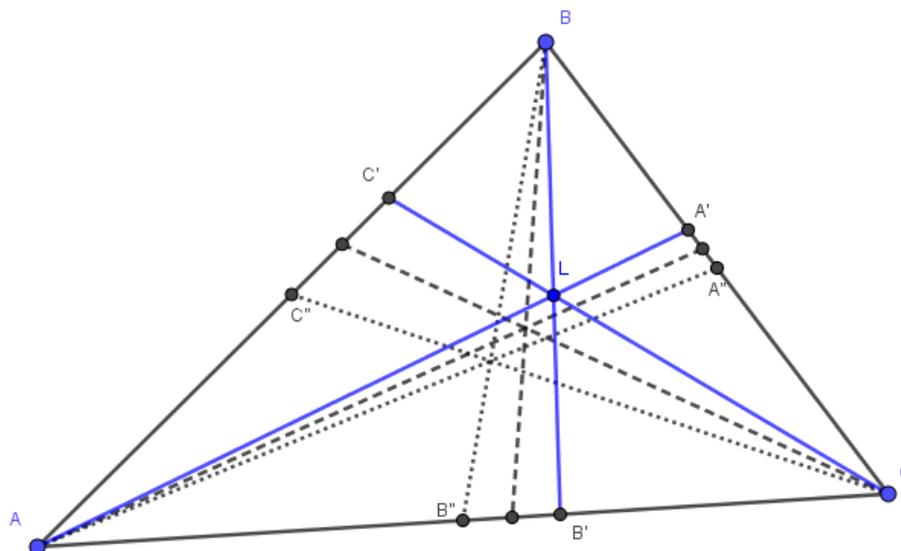
concorrem num ponto  $L$ . Tal ponto é chamado de ponto de Lemoine.

**Prova**

Sejam  $A'', B'', C''$  os pés das simedianas do triângulo  $ABC$ . Pelo Corolário anterior,  $\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{BA''} \cdot \frac{AC''}{CB''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{BA}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1$ . Daí a conclusão é uma consequência do Teorema de Ceva.

■

**Figura 72 – Ponto de Lemoine**

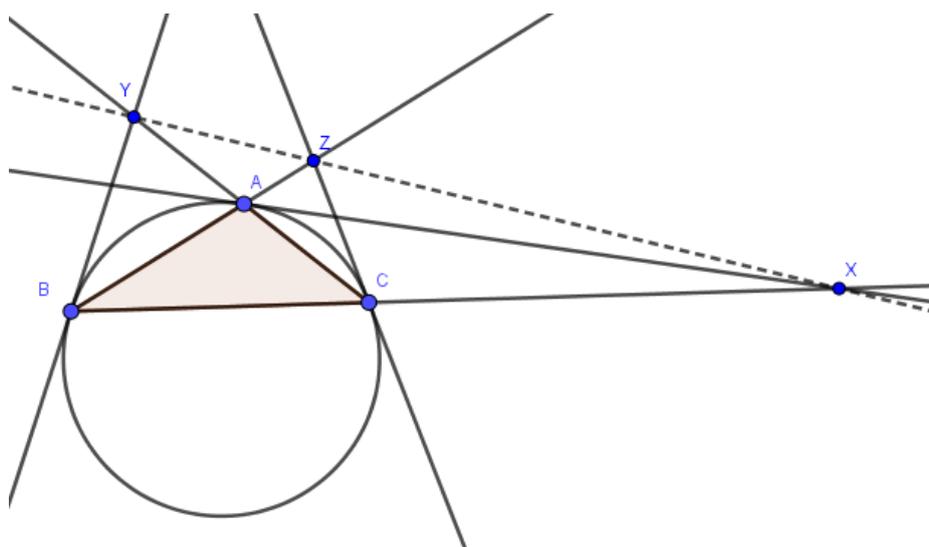


Fonte: Elaborada pelo Autor.

Retomemos o teorema proposto no início deste capítulo.

**TEOREMA DE CARNOT** As tangentes ao circuncírculo de um triângulo  $ABC$  por seus vértices encontram os lados opostos em três pontos colineares. Mais ainda, tais pontos são os conjugados harmônicos dos simedians dos lados do triângulo.

**Figura 73 – Teorema de Carnot**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

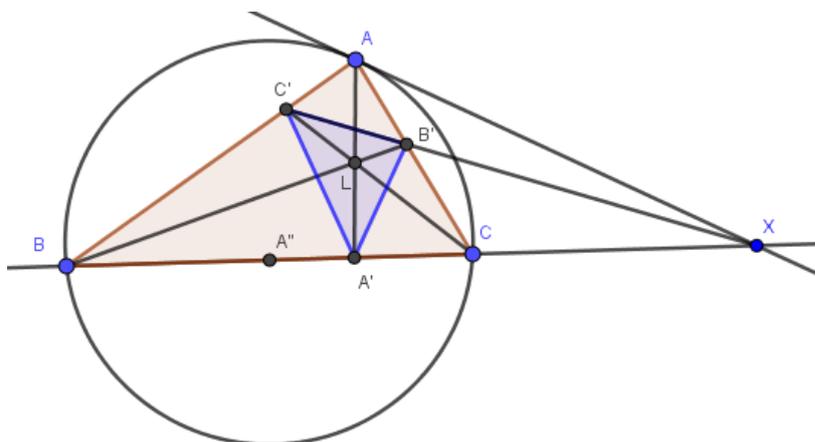
### Demonstração

Considere o triângulo  $ABC$ , e sejam  $A'', B'', C''$ , os pés das simedianas correspondentes aos lados  $BC, AC, AB$ , respectivamente. Seja  $L$  o ponto de Lemoine, e seja  $X$  o ponto de intersecção da reta  $CB$  com a tangente a  $\Gamma$  por  $A$ , sendo  $\Gamma$  o circuncírculo do triângulo  $ABC$ .

Vemos que ocorre a semelhança  $\Delta ABX \sim \Delta CAX$ , uma vez que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{CAX}$  são congruentes, e os triângulos têm o ângulo  $X$  em comum. Daí, valem as seguintes igualdades

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{CX} = \frac{BX}{AX}$$

**Figura 74 – Prova do Teorema de Carnot**



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Donde segue que,

$$\frac{BX}{CX} = \left( AX \cdot \frac{AB}{AC} \right) \left( \frac{1}{AX} \cdot \frac{AB}{AC} \right) = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Por outro lado, pela relação de Steiner para o caso da simediana, teremos

$$\frac{BA''}{A''C} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Assim,

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{BX}{CX}.$$

Ora, como  $A''$  é interno a  $BC$  e  $X$  é externo, a igualdade acima nos diz que  $X$  e  $A''$  são conjugados harmônicos com relação à  $BC$  (diz-se que  $AX$  é uma simediana externa do triângulo  $ABC$ ).

Analogamente, teremos que  $Y$  e  $B''$  são conjugados harmônicos com relação à  $AC$  e que  $Z$  e  $C''$  são conjugados harmônicos com relação à  $BC$ . Mas pelo PROBLEMA 07,  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B''C''} = \{X\}$ ,  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A''C''} = \{Y\}$  e  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A''B''} = \{Z\}$ .

Para concluirmos a demonstração do Teorema de Carnot, basta lembrarmos do enunciado do TEOREMA 7.5.3 que nos diz que as simedianas de um triângulo concorrem no ponto  $L$ . Ora, isso nos diz que os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  estão em perspectiva pelo ponto de Lemoine. Daí, pelo Teorema de Desargues, tais triângulos estarão em perspectiva por uma reta, ou seja, os pontos  $X, Y$  e  $Z$  são colineares. ■

Subjacente às últimas linhas do argumento acima está o resultado:

**TEOREMA 7.5.4** Suponha que as cevianas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  sejam concorrentes. Então os pontos  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$ ,  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$  e  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$  são os conjugados harmônicos de  $A', B', C'$  com respeito a  $AB, BC$  e  $AC$ , respectivamente. Além disso,  $X, Y$  e  $Z$  são colineares.

(Em palavras: *os conjugados harmônicos dos pés de cevianas concorrentes são colineares.*)

**Prova**

Basta fazer uma releitura da construção do conjugado harmônico realizada nos PROBLEMAS 06 e 07 e utilizar o Teorema de Desargues para concluir a colinearidade dos pontos  $X, Y$  e  $Z$ . ■

## 8 CONCLUSÃO

No decorrer desse trabalho foram encontrados vários desafios, dentre eles, destaco a identificação de ideias importantes a serem propostas para a apresentação da Geometria Projetiva, tendo sempre em foco a Geometria Euclidiana Plana e o uso de homotetias como fontes bibliográficas, as quais proporcionem uma apresentação completa para atingir os objetivos; um modelo didático viável no que tange a clareza e o entendimento do professor e aluno; técnicas de resolução de problemas e dos teoremas, a fim de tornar significativo o estudo realizado e, referências na nossa literatura, as quais influenciem e proponham ideias sobre a possibilidade de estudar as homotetias e as construções projetivas ainda na educação básica.

O ensino da Geometria Euclidiana é visto com grande dificuldade pelos professores e alunos do Ensino Médio, uma vez que as falhas no processo de aprendizagem no Ensino Fundamental não conseguem ser supridas pelo excesso de fórmulas ou falta de apresentação adequada dos conteúdos, de modo a tornarem-se mais significativos para os estudantes. Assim, propor ideias e teoremas na Geometria Euclidiana com a finalidade de expandir habilidades por meio de uma Geometria não-Euclidiana é uma tarefa que requer bastante empenho do professor.

Desse modo, apresentamos alguns dos axiomas fundamentais para o uso em sala de aula de forma concisa e compreensível. Entretanto, não foram inseridos na Geometria Projetiva cálculos longos ou difíceis de serem entendidos pelo leitor, nos atemos a exibir a matemática por meio do cálculo de teoremas apenas na Geometria Euclidiana.

As ideias de autores como COXETER, mostram ser possível uma Geometria Projetiva apresentada de forma axiomática, dedutiva e sintética, não sendo necessários muitos cálculos, mas sim uma compreensão dos objetos geométricos e das projetividades e perspectivas.

O motivador principal para uma didática mais adequada às dificuldades encontradas pelos alunos se deu a partir da contextualização da história de cada Geometria apresentada e do seu desenvolvimento por meio da arte e da arquitetura. Estimular o aluno a realizar suas próprias construções geométricas, mostrando suas habilidades artísticas e possibilidades com o desenho e fazendo uso da perspectiva e dos pontos de fuga é também essencial para uma memorização e crescimento do mesmo.

A escrita e desenvolvimento de problemas olímpicos é uma fonte de conhecimento que promove o real aprendizado das homotetias e das construções projetivas,

mostrando-se como uma ferramenta desenvolvedora de raciocínios e estimuladora de construções no estudo da geometria.

Difundir o estudo de geometrias não-Euclidianas, em particular a Geometria Projetiva e de conhecimentos na Geometria Euclidiana não trabalhados no currículo escolar é uma tarefa primordial para adequar o ensino ao processo de globalização e evolução das ciências. A Matemática não é estática, ela está em construção e expansão constantes, cabendo ao professor desempenhar um papel de divulgador do que ocorre e das possibilidades que esses avanços contribuíram e proporcionam à sociedade moderna.

O reforço da Geometria Euclidiana aliada a apresentação das homotetias e de teoremas que costumam ser deixados de lado pela sua dificuldade é algo que pode vir a colaborar na formação docente. As conclusões e consequências desses teoremas por meio das transformações como as homotetias são necessárias para uma compreensão do progresso da Matemática.

Por outro lado, dentro do currículo da educação básica ou paralelamente a ele, o ensino da Geometria Projetiva é possível através do desenho, da história da arte e da apresentação das ideias formais nessa geometria. Essas ideias permitem desenvolver no aluno a noção espacial requerida pelo ensino da geometria, sendo algo tangível no estudo da Geometria Projetiva.

Nesse sentido, o referido estudo se propôs a apresentar pesquisas, ideias, demonstrações e conclusões, com o intuito de divulgar e estimular o ensino da Geometria Projetiva na Educação Básica correlacionando com a Geometria Euclidiana Plana por meio das homotetias.

## REFERÊNCIAS

- BEZERRA, Y. S. **Geometria projetiva: algumas aplicações básicas para alunos do ensino médio.** 2014. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.
- CASTRO, L. G. M. Introdução à Geometria Projetiva. **Revista Eureka**, [S.l.], n.8, p.16, 2000.
- CHEN, EVAN. **Euclidian Geometry in Mathematical Olympiads.** USA: MAA Problem Books, 2016.
- CLEMENTE, João Carlos, BEDIM, Acácia Aparecida Pinto; RODRIGUES, Adriele Cristine Domingos; FERREIRA, Hugo Lagrimante. **Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em educação matemática.** 2010. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/ENSINO-E-APRENDIZAGEM-DA-GEOMETRIA-UM-ESTUDO-A-PARTIR-DOS-PERI%C3%93DICOS-EM-EDUCA%C3%87%C3%83O-MATEM%C3%81TICA.pdf>>. Acesso em: 9 dez. 2016.
- COURANT, Richard.; ROBBINS, Herbert. **What is Mathematics?** New York: Oxford University Press, 1996.
- COXETER, H. S. M. **Projective Geometry.** Toronto: Springer-Verlag, 1974.
- COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. Geometry Revisited. **The Mathematical Association of America**, [S.l.], v. 5, n. 2, 1967.
- EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.
- FIELD, J. V. **Girard Desargues.** [S.l.:s.n.],1995. Disponível em: <<http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/history/Printonly/Desargues.html>>. Acesso em: 22 jan. 2017.
- GONÇALVES, T. S. **Uma introdução à geometria projetiva para o ensino fundamental.** 2013. 149 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.
- HEFEZ, A. Uma introdução a história da Geometria Projetiva. **Matemática Universitária**, [S.l.], v. 5, n. 3, p. 35 - 50, 1986.
- JANOS, M. **Matemática para pais (e) interessados: Geometrias.** São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- LEITE, D. G. **Girard Desargues e o desenvolvimento da geometria projetiva.** [S.l.:s.n.], 2016. Disponível em: <[http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd5\\_douglas\\_leite.pdf](http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd5_douglas_leite.pdf)>. Acesso em: 25 jan. 2017.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P. **Coordenadas no Plano**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. **BOLEMA**, [S.l.], v. 29, n. 51, p. 369-388, abr. 2015.

MALTEZ, L. S. C. **Geometria projetiva: matemática e arte**. 2015. 56 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, [S.l.], v. 1, p. 7-17, 1993.

SCHMIDT, E. **O ensino de geometria projetiva na educação básica: uma proposta para apreensão do conhecimento do mundo tridimensional**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SEIDENBERG, A. **Lectures in Projective Geometry**. Toronto; London; New York: D. Van Nostrand Company, 1965.

SOUZA, E. E. Arquitetura e geometria. **Revista eletrônica arq.urb.**, [S.l.], v. 5, p. 105 - 118. jan./abr. 2017. Disponível em:  
<[http://www.usjt.br/arq.urb/numero\\_01/artigo\\_06\\_180908.pdf](http://www.usjt.br/arq.urb/numero_01/artigo_06_180908.pdf)>. Acesso em: 10 maio 2017.

VEBLEN, O.; YOUNG, J. W. **Projective Geometry**. United States Of America: Ginn and Company, 1938.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.