



Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí

Unidade Acadêmica Especial de
Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Problemas de Variação Aplicados a Agropecuária

Carlos Melo Xavier

Jataí

2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:


Nome completo do autor: Carlos Melo Xavier

Título do trabalho: **Problemas de Variação Aplicados a Agropecuária**


3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 28 / 11 / 2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

Carlos Melo Xavier

Problemas de Variação Aplicados a Agropecuária

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto

Jataí

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Melo Xavier, Carlos
Problemas de Variação Aplicados a Agropecuária [manuscrito] /
Carlos Melo Xavier. - 2017.
81 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT -
Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional -
Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2017.
Bibliografia.

1. Otimização. 2. Máximo. 3. Mínimo. 4. Modelagem. 5. Aplicações. I.
Leandro Neto, Benedito, orient. II. Título.

CDU 51



Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 www.jatai.ufg.br/matematica



Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Carlos Melo Xavier – Aos trinta e um dias do mês de outubro do ano de dois mil e dezessete (31/10/2017), às 10:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Benedito Leandro Neto - Orientador, Profa. Dra. Adriana Luize Bocchi e Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **“Problemas de Variação Aplicados a Agropecuária”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr. Benedito Leandro Neto, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, Secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí - UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto – CPF 734.276.081-15
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente da Banca

Prof.ª. Dra. Adriana Luize Bocchi – CPF 260.837.318-60
Unidade Acadêmica Especial de Ciências Agrárias- Regional Jataí-UFG
Membro externo

Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira - CPF 991.219.991-04
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro interno

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Carlos Melo Xavier Graduado em Licenciatura Plena em Matemática - Universidade Estadual de Goiás - Unidade de Iporá; Mestrando Profissional em Matemática - Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí - Profmat, durante o programa foi bolsista da FAPEG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás.

Dedico este trabalho à toda minha família.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por sempre guiar meus passos, abençoando minhas escolhas. Aos meus pais Valdecir José Xavier e Divina Melo Xavier, por ter me proporcionado educação, no decorrer da minha vida, sempre demonstrando carinho e amor. A minha esposa Najla Kauara Alves do Vale que me apoiou em todos os momentos.

Agradeço o meu orientador Dr. Benedito Leandro Neto que me acolheu em um momento crítico do curso, me apoiando com seu conhecimento e técnica, também pela confiança em mim depositada, a dedicação e paciência que demonstrou aceitando o projeto proposto. Ao coordenador do curso na Regional de Jataí Dr. Gecirlei Francisco da Silva por seu empenho e dedicação na gestão do programa. A professora Dra. Luciana Aparecida Elias pelo tempo disponibilizado, desejo-lhe uma excelente recuperação. Aos demais professores do programa que com vossos conhecimentos, contribuíram para o sucesso da turma.

E ainda, agradeço os meus amigos, frutos do programa, pela confiança, solidariedade, companheirismo no processo até a conclusão do curso, pela nossa união, que poucas pessoas tem o privilégio de conhecer, desejo que nossas amizades se perpetuem. Em especial agradeço aos meus amigos Amarildo, Jânio, Lucas e Marco que compartilharam de cada momento desse processo, resultando em diversas experiências felizes vivenciadas em nossas viagens.

*“Ser feliz sem motivo é a mais autêntica
forma de felicidade.”*

Carlos Drummond de Andrade

Resumo

O setor do agronegócio contribui significativamente para o desenvolvimento da microrregião de Jataí-GO. As instituições de ensino como a Universidade Federal de Goiás - UFG possuem o papel de articular esse setor através dos cursos ofertados e das pesquisas voltadas às áreas de agrárias. Neste contexto o presente trabalho propôs uma metodologia com a finalidade de integrar os conhecimentos do Cálculo, com situações práticas vivenciadas pelos profissionais da área de agronomia, zootecnia e veterinária, em seus respectivos ambientes de trabalho. Ressaltamos a importância do conceito de modelagem e otimização, bem como o uso de algumas ferramentas do Cálculo, como Máximos e Mínimos, para aplicações no agronegócio. O estudo do Cálculo nos cursos direcionados às Ciências Agrárias é visto, por alguns discentes ingressantes, como um tema difícil de se aprender, devido às barreiras na percepção da aplicabilidade prática deste conteúdo. Mediante este entrave, o trabalho servirá como direcionador de estudos práticos aplicados na área.

Palavras-chave Otimização; Máximo; Mínimo; Modelagem; Aplicações.

Abstract

The agribusiness sector contributes significantly to the development of the microregion in Jataí-GO, and educational institutions, such as the Federal University of Goiás - UFG, have the role of articulating this sector through the research and courses offered for agrarian areas. In this context the present study proposed a methodology in order to integrate knowledge of calculus with practical situations experienced by agronomy professionals, zootechnics and veterinary, in their respective working environments. We emphasize the importance of the modeling and optimization concept, as well as the use of some Calculation tools, such as Maxima and Minima, for applications in the agribusiness environment. The calculation study in courses directed to Agricultural Science is seen by some as a freshman students knowledge difficult to learn due to barriers in the perception of the practical applicability of this content. Through this obstacle, the work will serve as the driver of practical studies applied in this area.

Keywords Optimization; Maximum; Minimum; Modeling; Applications.

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares	17
1.1 Derivadas	17
1.1.1 Derivada de uma Função	17
1.1.2 Derivadas de Ordem Superior	30
1.2 Máximos e Mínimos	33
1.2.1 Condições Necessárias Para Máximos e Mínimos Locais	37
1.2.2 Máximo e Mínimo de uma função Contínua em um Conjunto Fechado	45
1.3 Polinômio de Taylor de Ordem n	48
1.3.1 Polinômio de Taylor Aplicado a um Conjunto de Dados	49
2 Aplicações	51
2.1 Otimização Aplicada ao Agronegócio	51
2.1.1 Projeto de uma Cerca: Delimitando a Área Máxima para um Piquete.	53
2.1.2 Controle de Estoque: Minimizando o Custo.	59
2.1.3 Idade do Milho em que a Produção é Máxima.	65
3 Considerações Finais	77
Referências Bibliográficas	79

Introdução

Problemas de otimização são frequentemente percebidos na sociedade atual. O objetivo da otimização é a busca de um resultado que seja o mais eficiente possível, como por exemplo, atingir o nível de produção mais econômico de uma fábrica, a velocidade necessária para que um piloto de motocross consiga realizar um salto entre rampas, o empuxo mínimo necessário para manter uma aeronave no ar, entre outros. Na atualidade, a sociedade está focada cada vez mais na busca do melhor resultado possível para uma atividade qualquer desenvolvida.

Qualquer empresa, seja de pequeno ou grande porte, tem como meta alcançar a receita máxima, minimizando o custo de produção, diminuindo o desperdício e reduzindo os impactos ao meio ambiente exercendo sua responsabilidade social. Situações práticas deste tipo, formam problemas de máximos e mínimos com determinada complexidade, pois trata-se de situações que podem envolver diversas variáveis. Enfim, questões como as citadas acima servem para ilustrar que, frequentemente, o anseio da sociedade atual é sempre buscar um melhor resultado.

A modelagem consiste numa representação matemática de uma situação vivenciada.

É um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão [1].

Modelar uma situação pode ser entendida como uma representação matemática de um fenômeno a ser estudado, podendo ser representada através de equações, funções ou até mesmo geometricamente.

A modelagem no ensino da matemática beneficia os educandos preparando-os para suas futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento devido a interatividade de conteúdos com fenômenos que podem ser vivenciados [2]. Neste contexto, a

modelagem é uma ferramenta que contribui para transição de uma matemática considerada abstrata para uma concreta aplicada em situações que podem ser presenciadas no cotidiano do aluno. Assim, percebe-se a importância da prática dessa ferramenta durante os cursos de graduação, pois dará condições ao discente, no momento em que iniciar sua vida profissional, de representar matematicamente as situações encontradas no exercício de suas funções, para posteriormente processá-las e analisá-las.

Em um sentido mais genérico e informal, Otimização é o processo que procura determinar os valores extremos de uma função modelada, ou seja, o maior e menor valor que uma função pode assumir num conjunto determinado. Situações que envolvem problemas deste tipo abrange praticamente todas as áreas do conhecimento: física, química, biologia, engenharia, arquitetura, economia e administração. A otimização é um ramo da matemática aplicada que procura determinar as melhores soluções para problemas de tomada de decisões partindo-se de modelos matemáticos [3].

Problemas de otimização consistem na modelagem de um fenômeno em estudo, onde uma grandeza é dada por uma função contendo uma ou mais variáveis, cujo o intuito é determinar o valor máximo ou mínimo de tal função. Situações assim, exemplificam umas das aplicações do Cálculo Diferenciável.

Como o Cálculo é muito utilizado na resolução de problemas envolvendo máximos e mínimos, é importante conhecê-lo no contexto histórico. O cálculo da derivada, da forma que conhecemos, surgiu no século XVII na Europa, com a contribuição de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton desenvolveu métodos analíticos integrando-os com outros conhecimentos Matemáticos, tornando possível a resolução de diversos tipos de problemas, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas assim como máximos e mínimos de funções. Leibniz implementou o cálculo, desenvolvendo símbolos e fórmulas, e estabeleceu a notação dx, dy , para representar as derivadas em relação a x, y . Mais adiante estabeleceu relações como: $dx = 0$, se x é constante; $d(u + v) = du + dv$; $d(uv) = u dv + v du$. Leibniz publicou no ano 1684 o artigo: "*Nova methodus pro maximis et minimis, item-que tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*" (Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são impedidos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles), que impulsionou o Cálculo para o formato moderno [4].

Mesmo sendo publicado primeiro e com melhores notações por Leibniz, suspeitaram, na época, de que ele houvesse plagiado a idéia de Newton, pois o mesmo chegou a ela dez anos antes. Por conta disso, Leibniz teve final de vida obscuro, enquanto Newton,

um professor de matemática prestigiado, teve um sepultamento com honras. Porém, sabe-se hoje que os mesmos seguiram linhas diferentes na criação do Cálculo, e ambos contribuíram significativamente para o desenvolvimento da matemática. Vale ressaltar, que apesar da significância que Newton e Leibniz representam para o Cálculo, vários outros matemáticos, que antecederam a eles, contribuíram para a construção desse conhecimento, [5]. Dentre os matemáticos que colaboram com essa ideia podem ser citados: Euclides, Arquimedes, Heron, Fermat, Lagrange, Johann Bernoulli, e outros.

O objetivo geral deste trabalho é:

- Realizar um estudo sobre Máximos e Mínimos, ou seja, abordar conceitos, propriedades, teoremas e resolver alguns problemas de otimização com o intuito de compreender melhor esse tema e ainda colocar em evidência a aplicabilidade desse conteúdo em situações vivenciadas por profissionais como agrônomos, zootecnistas e veterinários.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Mostrar que o estudo da otimização pode ser um caminho para a interdisciplinaridade.
- Evidenciar que o cálculo dos extremantes de funções podem propiciar aos futuros profissionais as condições necessárias para que realizem análises de situações e tracem diretrizes que auxiliem nas tomadas de decisões.
- Mostrar aos graduandos dos cursos de agronomia, zootecnia e veterinária, que ingressam no estudo do Cálculo I, a aplicabilidade de definições e teoremas em situações práticas que podem ser experimentadas no dia-a-dia, não exigindo recursos computacionais.
- Descrever as condições necessárias e suficientes que um ótimo local deve satisfazer.

A utilização do processo de otimização é um objeto em estudo por pesquisadores da atualidade. O programa PROFMAT possui trabalhos diversos sobre o assunto, [6], [7], [8] e [9] são exemplos de pesquisas nesta área.

Para aplicar a técnica de otimização nas situações apresentadas neste trabalho, como já mencionado anteriormente, utilizamos a modelagem matemática como ferramenta. Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual somos convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade [10].

No trabalho, modelamos algumas situações voltadas para as Ciências Agrárias. Problemas que são considerados simples, mas que são abordados constantemente no cotidiano dos profissionais desta área.

Discorreremos no Capítulo 1, algumas definições, teoremas e aplicações envolvendo máximos e mínimos. Definimos a derivada utilizando limite e alguns teoremas que validam as fórmulas de derivação que serão usadas no trabalho; na sequência, apresentamos as definições de pontos de máximo e de mínimo, utilizamos gráficos de funções simples para ilustrar tais definições; abordamos as condições necessárias e suficientes para a existência de um ponto de máximo e de mínimo locais; em seguida discorreremos sobre processo de determinar máximos e mínimos em conjunto compacto, apoiando-se no teorema de Weierstrass; finalizamos o capítulo falando sobre o polinômio de Taylor e indicamos uma de suas diversas aplicações.

No Capítulo 2, apresentamos algumas aplicações que simulam situações vivenciadas no cotidiano de profissionais, como os citados acima, colocando em prática os conceitos aqui abordados.

Na primeira aplicação, tratamos do projeto de construção de uma cerca. Este é um exemplo de problema de variação simples aplicada a realidade dos agropecuaristas. É fato que ocorrem prejuízos quando o pecuarista depara com a necessidade de construir uma cerca em sua propriedade, como desperdícios de materiais e mão-de-obra. Profissionais como agrônomos, zootecnistas e veterinários, podem mitigar esses prejuízos, simplesmente, realizando processos de otimização que não exigem recursos computacionais avançados como softwares.

Outra aplicação que discutimos, envolve um problema de Controle de Estoque de uma empresa. Este é um problema que pertence a realidade de qualquer empresa, seja ela da linha de produção, de revenda ou prestação de serviços. O objetivo de realizar um controle de estoque numa empresa é, dentre outros, minimizar os custos envolvidos na armazenagem de seus produtos. A aplicação que apresentada, tratou-se de uma empresa na linha de produção que necessita saber a quantidade de itens a serem produzidos por lote de produção, de modo que minimize o custo de armazenagem.

Na última aplicação construímos, através da relação entre a idade de uma planta, de determinada espécie de milho, com sua produção em um ano, uma função que permitirá analisar qual a melhor idade da planta onde a produção é máxima. Na prática, essa informação sugere ao produtor o melhor momento de realizar a colheita da próxima safra, por exemplo.

O Capítulo 3, reservamos para a discussão final.

Capítulo 1

Preliminares

Este Capítulo tratamos de algumas definições, teoremas e exemplos que posteriormente serão utilizados no Capítulo 2. Para a construção dos conceitos e resultados das preliminares aqui apresentadas, usou-se como referências básicas as obras [11], [12] e [13].

1.1 Derivadas

No desenvolvimento deste trabalho, a derivada é um conceito fundamental, pois o conhecimento desta é a base necessária para, posteriormente, alcançarmos nosso objetivo. A seguir, revisaremos algumas propriedades das derivadas.

1.1.1 Derivada de uma Função

A derivada é utilizada em análise de casos que referem-se a taxa de variação de grandezas que são modeladas por uma função real. A seguir será apresentada a definição de derivada de uma função real utilizando limite.

Definição 1.1. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \in I$. Denomina-se derivada de f em x sendo:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

se este limite existir.

Uma função f é dita derivável se for derivável em todo ponto do seu domínio.

Vejamos um exemplo onde se calcula a derivada de uma conforme a Definição 1.1.

Exemplo 1.2. Seja a função $f(x) = x^2$, determine $f'(x)$ pela definição.

Verifiquemos, pela definição se o limite de f existe e é finito. Como,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

temos que,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Podemos ver,

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h, h \neq 0, \end{aligned}$$

logo,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h).$$

E finalmente,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Portanto, $f'(x) = 2x$ é, pela definição, a derivada de $f(x) = x^2$.

O teorema seguinte, apresentará algumas fórmulas de derivação, seguidas de suas demonstrações.

Teorema 1.3. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x \in I$, e $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$. São válidas as seguintes relações:*

a) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$,

b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-(n+1)}$, $x \neq 0$,

c) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, em que $x > 0$ se n for par, e $x \neq 0$ se n for ímpar, onde $n \geq 2$.

Demonstração. Vamos a seguir apresentar a demonstração das relações acima utilizando a definição de derivada.

a) Pela definição,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h},$$

fazendo $x+h=t$, temos que $t \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$, assim:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})}{t-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}). \end{aligned}$$

Aplicando o limite sobre t , obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n \text{ vezes}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

b) Observe que $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Assim, temos pela definição :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n x^n h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \cdot \frac{1}{(x+h)^n x^n}. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de limite, podemos reescrever da forma:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n}. \quad (1.1)$$

Pela alínea (a), sabe-se que a primeira parcela do produto de limites dada por (1.1) vale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}. \quad (1.2)$$

Aplicando o limite sobre h na segunda parcela do produto em (1.1), vem:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n} &= \frac{1}{x^n \cdot x^n} \\ &= \frac{1}{x^{2n}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Substituindo as expressões (1.2) e (1.3) em (1.1), segue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -nx^{n-1} \cdot \frac{1}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1} \cdot x^{-2n} \\ &= -nx^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

c) Veja que podemos reescrever f na seguinte:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Utilizando a definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}.$$

e fazendo $x+h = t$, temos que $t \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$. Portanto,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{t - x}.$$

tomando $u = \sqrt[n]{t}$ e $v = \sqrt[n]{x}$, logo se $t \rightarrow x$ então $u \rightarrow v$. O que resulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u \rightarrow v} \frac{u - v}{u^n - v^n} \\ &= \lim_{u \rightarrow v} \frac{1}{\frac{u^n - v^n}{u - v}}. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de limite, podemos reescrever da forma:

$$f'(x) = \frac{\lim_{u \rightarrow v} 1}{\lim_{u \rightarrow v} \frac{u^n - v^n}{u - v}}. \tag{1.4}$$

Pela alínea (a), temos que:

$$\lim_{u \rightarrow v} \frac{u^n - v^n}{u - v} = nv^{n-1}. \tag{1.5}$$

Como $\lim_{u \rightarrow v} 1 = 1$, e realizando a substituição de (1.5) em (1.4), obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{nv^{n-1}}.$$

Assim, colocando em termos de x , onde $x \neq 0$ e $x \in D_f$, vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

□

No exemplo a seguir, calculamos a derivada da função f utilizando as relações do Teorema 1.3.

Exemplo 1.4. Determine $f'(x)$ sendo:

a) $f(x) = x^4$.

b) $g(x) = \frac{1}{x^7}$.

c) $h(x) = \sqrt{x}$.

a) Podemos resolver utilizando o item (a) do Teorema 1.3, logo:

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^{4-1}.$$

Portanto,

$$f'(x) = 4x^3.$$

b) Pelo item (b) do Teorema 1.3, temos:

$$g(x) = \frac{1}{x^7} = x^{-7} \Rightarrow g'(x) = -7x^{-(7+1)}.$$

Desse modo,

$$g'(x) = -7x^{-8}, \text{ ou seja, } g'(x) = -\frac{7}{x^8}.$$

c) Através do Teorema 1.3 item (c),

$$h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.$$

Logo,

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \text{ ou seja, } h'(x) = \frac{1}{2x^{-\frac{1}{2}}}.$$

Como, $\frac{1}{2x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, temos portanto

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

O próximo teorema refere-se a fórmulas para obtenção direta da derivada das e^x e $\ln(x)$.

Teorema 1.5. *Seja $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in I$. São válidas as seguintes fórmulas de derivação:*

a) $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$.

b) $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$.

Demonstração. a) Aplicando a Definição 1.1 na função $g(x) = e^x$, resulta:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}. \quad (1.6)$$

Colocando em evidência e^x comum as duas parcelas da expressão (1.6), temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, tem-se que:

$$g'(x) = e^x.$$

b) Por definição, obtemos:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}. \quad (1.7)$$

Utilizando a propriedade de logaritmo onde $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, reescrevemos a expressão (1.7) como:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right). \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Utilizando a propriedade de logaritmo onde $n \cdot \ln(a) = \ln(a)^n$, reescrevemos a ex-

pressão (1.8) da seguinte maneira:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}},$$

fazendo $\left(u = \frac{h}{x} \right)$ com $x > 0$, logo se $h \rightarrow 0$ então $u \rightarrow 0$, o que resulta:

$$g'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1 + u)^{\frac{1}{xu}}.$$

Utilizando, novamente, a propriedade de logaritmo onde $n \cdot \ln(a) = \ln(a)^n$, vem:

$$g'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}$$

Lembrando que $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$, prosseguimos com,

$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(e).$$

Sendo $\ln(e) = 1$, concluimos que $g'(x) = \frac{1}{x}$, onde $x > 0$.

□

A seguir o Teorema 1.6 tratará das fórmulas de derivação para algumas funções trigonométricas. Embora as aplicações desse trabalho não envolvam diretamente funções deste tipo, é importante reconhecer ao menos a validade para as três relações básicas seguintes: $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$. Com caráter ilustrativo, será utilizada algumas das funções citada para exemplificar a seção subsequente, sem qualquer complexidade.

Teorema 1.6. a) $\sin'(x) = \cos(x)$;

b) $\cos'(x) = -\sin(x)$;

c) $\tan'(x) = \sec^2(x)$.

Demonstração. a) Temos que,

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}. \quad (1.9)$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$, a expressão (1.9) pode ser reescrita na forma,

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}. \quad (1.10)$$

Colocando em evidência $\sin(x)$ em (1.10), temos:

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos(h) - 1] + \cos(x)\sin(h)}{h}. \quad (1.11)$$

Reescrevendo a expressão (1.11) usando a propriedade de adição de limites,

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos(h) - 1]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h}. \quad (1.12)$$

Analisaremos cada parcela da expressão (1.12) isoladamente.

- Para o limite da primeira parcela, multiplicaremos pela fração $\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos(h) - 1]}{h} \cdot \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \quad (1.13)$$

Efetuada o produto na expressão (1.13), segue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos^2(h) - 1]}{h[\cos(h) + 1]} \quad (1.14)$$

Pela identidade trigonométrica $\sin^2(h) + \cos^2(h) = 1$, facilmente obtemos $\cos^2(h) - 1 = -\sin^2(h)$. Substituindo este resultado na expressão (1.14),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[- \sin^2(h)]}{h[\cos(h) + 1]} = \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{\sin(x) \sin(h) \sin(h)}{h[\cos(h) + 1]} \quad (1.15)$$

Aplicando o limite onde $h \rightarrow 0$ na expressão (1.15), e ainda, lembrando que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, pois é o limite fundamental trigonométrico, logo,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{\sin(x) \sin(h) \sin(h)}{h[\cos(h) + 1]} &= - \frac{\sin(x) \cdot 1 \cdot 0}{1 + 1} \\ &= - \frac{0}{2} = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

- Para o limite da segunda parcela,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h)}{h}.$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, concluímos que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h)}{h} = \cos(x) \cdot 1 = \cos(x). \quad (1.17)$$

Substituindo os resultados (1.16) e (1.17) na expressão (1.12),

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)[\cos(h) - 1]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h)}{h}. \\ &= 0 + \cos(x). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\sin'(x) = \cos(x)$.

b) Na função $f(x) = \cos(x)$, temos que:

$$\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}. \quad (1.18)$$

Através da relação trigonométrica $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$, a expressão (1.18) pode ser reescrita como:

$$\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}. \quad (1.19)$$

Colocando em evidência $\cos(x)$ em (1.19),

$$\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)[\cos(h) - 1] - \sin(x)\sin(h)}{h}.$$

Pela Demonstração da alínea (a), vemos que

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)[\cos(h) - 1]}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= -\sin(x). \end{aligned}$$

c) Agora, veremos o caso $f(x) = \tan(x)$, logo,

$$\tan'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h}. \quad (1.20)$$

Sabendo que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, reescrevemos a expressão (1.20), da seguinte maneira,

$$\tan'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{h}. \quad (1.21)$$

Utilizando as relações trigonométricas $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ e $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, a expressão (1.21) pode ser reescrita na forma,

$$\tan'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)}{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{h}. \quad (1.22)$$

Vamos analisar isoladamente a expressão dada por (1.22) e calcular seu Mínimo Múltiplo Comum.

$$\frac{\cos(x)[\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)] - \sin(x)[\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)]}{\cos(x)[\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)]}.$$

Desenvolvendo os produtos,

$$\frac{\cos(x)\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos^2(x) - \sin(x)\cos(x)\cos(h) + \sin^2(x)\sin(h)}{\cos^2(x)\cos(h) - \cos(x)\sin(x)\sin(h)}.$$

Associando os termos possíveis,

$$\frac{\sin(h)\cos^2(x) + \sin^2(x)\sin(h)}{\cos^2(x)\cos(h) - \cos(x)\sin(x)\sin(h)}. \quad (1.23)$$

Colocando em evidência $\sin(h)$, comum as duas parcelas da expressão (1.23),

$$\frac{\sin(h)[\cos^2(x) + \sin^2(x)]}{\cos^2(x)\cos(h) - \cos(x)\sin(x)\sin(h)}. \quad (1.24)$$

Pela identidade $\sin^2(h) + \cos^2(h) = 1$, faremos a substituição em (1.24), assim:

$$\frac{\sin(h) \cdot 1}{\cos^2(x) \cos(h) - \cos(x) \sin(x) \sin(h)}. \quad (1.25)$$

Substituindo a expressão (1.25) em (1.22),

$$\tan'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h[\cos^2(x) \cos(h) - \cos(x) \sin(x) \sin(h)]}.$$

Aplicando o limite e recordando que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, obtemos,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x) \cdot 1 - 0} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Sendo a relação trigonométrica $\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$, tem-se portanto que:

$$tg'(x) = \sec^2(x).$$

□

1.1.2 Derivadas de Ordem Superior

Neste trabalho, a função derivada de primeira e segunda ordem são fundamentais para, posteriormente, garantir as condições necessárias para existência de pontos de máximos e mínimos (veja Seção 1.2).

Definição 1.7. Vimos que f' é a derivada de primeira ordem de f . Já a derivada de f' , denomina-se derivada de segunda ordem de f e é indicada por f'' ou por $f^{(2)}$, ou seja, $f'' = (f')'$. Analogamente, define-se as derivadas de ordens superiores de f . Ou seja, $f^{(3)} = (f'')'$, $f^{(4)} = (f^{(3)})'$, e assim sucessivamente.

Para reforçar a ideia de derivadas de ordem superior, exemplificamos calculando as derivadas de até terceira ordem das funções seguintes.

Exemplo 1.8. Dadas as funções, determine as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem.

a) $f(x) = 4x^4 + 2x$;

b) $g(x) = \frac{1}{x}$;

c) $h(x) = \cos(x)$.

a) Seja $f(x) = 4x^4 + 2x$, pelo Teorema 1.3,
a primeira derivada de f é,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot 4x^{4-1} + 1 \cdot 2x^{1-1} \\ &= 16x^3 + 2 \end{aligned}$$

a derivada de segunda ordem é,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot 16x^{3-1} \\ &= 48x^2 \end{aligned}$$

E para a terceira derivada de f ,

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= 2 \cdot 48x^{2-1} \\ &= 96x. \end{aligned}$$

b) Seja $g(x) = \frac{1}{x}$, também pelo Teorema 1.3,
a primeira derivada de g é,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-1) \cdot x^{-1-1} \\ &= -x^{-2} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Sendo $g'(x) = -x^{-2}$, temos,

$$\begin{aligned}g''(x) &= (-2) \cdot (-1)x^{-2-1} \\ &= 2x^{-3} \\ &= \frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

E mais,

$$\begin{aligned}g^{(3)}(x) &= (-3) \cdot 2x^{-3-1} \\ &= -6x^{-4} \\ &= -\frac{6}{x^4}.\end{aligned}$$

c) Ainda pelo Teorema 1.6, $h'(x)$ é:

$$h'(x) = -\sin(x).$$

A segunda derivada h vale,

$$h''(x) = -\cos(x).$$

Concluindo, para $h^{(3)}(x)$ temos,

$$\begin{aligned}h^{(3)}(x) &= -(-\sin(x)) \\ &= \sin(x).\end{aligned}$$

Conceituamos ponto de inflexão através da Definição 1.11, e para isto, foram utilizadas as definições (1.9) e (1.10).

Definição 1.9. Seja f uma função derivável no intervalo aberto I . O gráfico da reta tangente a função f passando pelo ponto $(p, f(p))$, é dada pela função T :

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 1.10. Dizemos que f tem a concavidade para cima no intervalo aberto I , se

$$f(x) > T(x),$$

para todo x e p em I , com $x \neq p$.

Dizemos ainda, que f tem a concavidade para baixo no intervalo aberto I , se

$$f(x) < T(x),$$

para todo x e p em I , com $x \neq p$.

Definição 1.11. Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p . Dizemos que p é ponto de inflexão de f , se existirem a e $b \in \mathbb{R}$, com $p \in]a, b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades contrárias em $]a, p[$ e em $]p, b[$.

Neste trabalho, não é nossa intenção aprofundarmos sobre ponto de inflexão, apenas Revisamos seu conceito. Para maiores informações sobre o assunto consulte [11].

Para a Seção 1.2, necessitamos conhecer a definição de ponto crítico.

Definição 1.12. Denomina-se ponto crítico ou estacionário de f um ponto $p \in D_f$ em que $f'(p) = 0$.

1.2 Máximos e Mínimos

O Cálculo Diferencial admite uma grande aplicabilidade para resolver variadas formas de problemas em diversas áreas do conhecimento. Dentre tais aplicações, inclui-se os problemas de otimização, que é a vertente deste trabalho. A preliminar que será apresentada nesta seção é, com toda certeza, a mais importante para o desenvolvimento

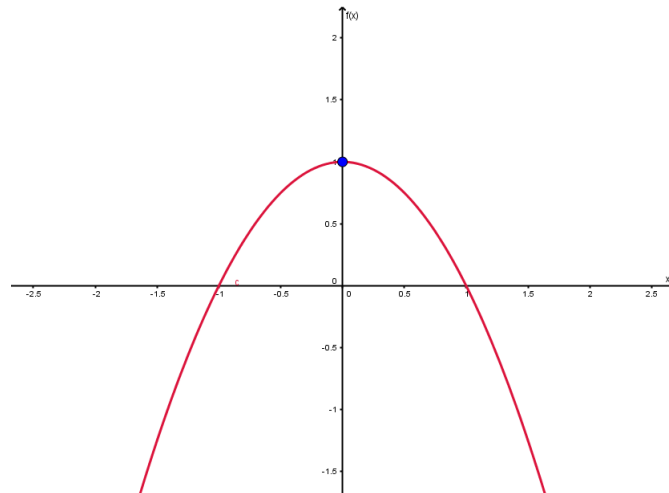
máximo que f assume em I .

Definição 1.14. Sejam f uma função e $p \in D_f$. Diz-se que $f(p)$ é o valor máximo global de f , ou ainda, que p é um ponto máximo global de f se, $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(p)$. Se, $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(p)$, diz-se que $f(p)$ é o valor mínimo global de f , ou ainda, que p é um ponto de mínimo global de f .

A seguir, alguns gráficos que ilustram as definições supracitadas:

Exemplo 1.15. Temos $x = 0$ como ponto de máximo da função $f(x) = -x^2 + 1$; o valor máximo de f é $f(0) = 1$.

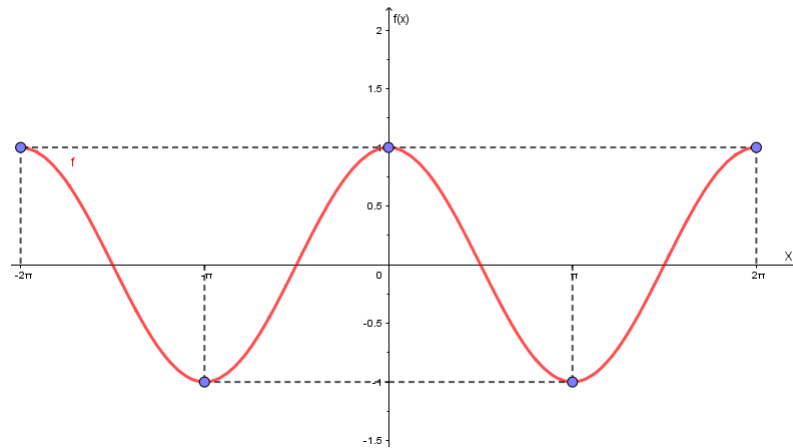
Figura 1.2: Máximo da função quadrática $f(x) = -x^2 + 1$.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Exemplo 1.16. Seja $f(x) = \cos x$, tome o intervalo $I = [-2\pi, 2\pi]$. Temos que $x_1 = -2\pi, x_3 = 0$ e $x_5 = 2\pi$ como pontos de máximos da função $f(x) = \cos x$; o valor máximo de f em I , é $f(-2\pi) = f(0) = f(2\pi) = 1$. Temos ainda, $x_2 = -\pi$ e $x_4 = \pi$ como pontos de mínimo da função f em I ; e o valor mínimo de f é $f(-\pi) = f(\pi) = -1$.

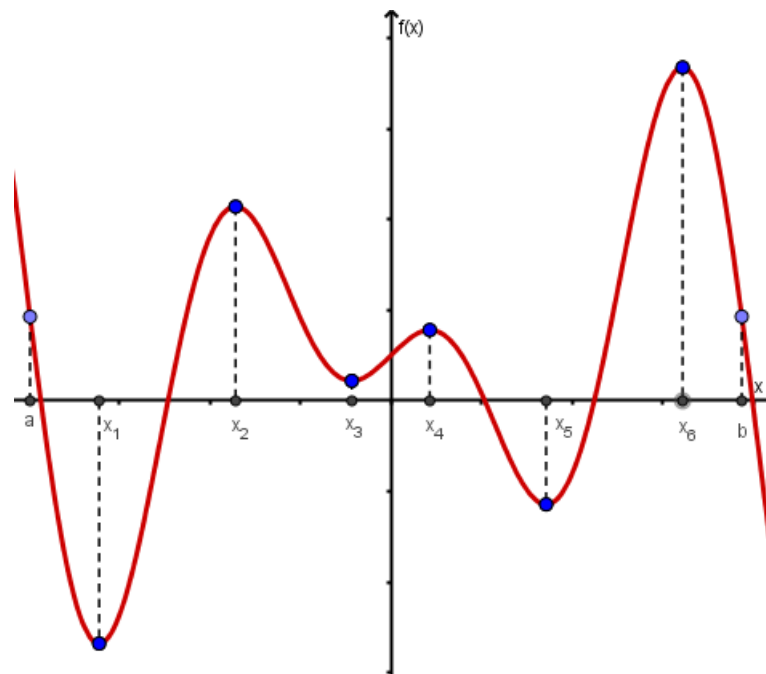
Figura 1.3: Máximo/Mínimo da função Trigonométrica $f(x) = \cos x$.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Exemplo 1.17. Tome $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, dada por Fig. 1.4, no intervalo $I = (a, b)$. Temos um conjunto de pontos críticos onde x_1 é mínimo em I e x_6 é máximo em I , x_2 e x_4 são máximos locais e x_3 e x_5 são mínimos locais.

Figura 1.4: Máximo/Mínimo de uma função qualquer.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

1.2.1 Condições Necessárias Para Máximos e Mínimos Locais

O Teorema 1.18, a seguir, estabelece uma condição necessária para a existência de extremantes locais.

Teorema 1.18. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em p , onde $p \in I$ e I aberto com $I \subset D_f$. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que*

$$f'(p) = 0.$$

Demonstração. Supondo que f tem um máximo local em p . Como a função f é derivável em p , os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ e } \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existem e equivalem a $f'(p)$, ou seja,

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Como $f(p)$ é máximo local, existe um intervalo aberto I tal que $p \in I$ e $I \subset D_f$ e $f(x) \leq f(p)$. Logo, $f(x) - f(p) \leq 0$, para todo $p \in I$. Separadamente, verifiquemos que:

- Para $x < p$, tem-se $x - p < 0$ e portanto $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$ para $x \in I$, logo,

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0, \tag{1.26}$$

- Para $x > p$, então $x - p > 0$ e portanto, $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$, para $x \in I$, logo,

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0. \tag{1.27}$$

Como (1.26) e (1.27) indicam o mesmo número $f'(p)$, temos por meio destas desigual-

dades que,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p) = 0.$$

Agora, supondo que f tem um mínimo local em p . Como a função f é derivável em p , os limites laterais, também existem e equivalem a $f'(p)$, ou seja,

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Como $f(p)$ é mínimo local, existe um intervalo aberto I tal que $p \in I$ e $I \subset D_f$ e $f(x) \geq f(p)$. Logo, $f(x) - f(p) \geq 0, \forall p \in I$. Verifiquemos que:

- Para $x < p$, tem-se $x - p < 0$ e portanto $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$ para $x \in I$, logo,

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0, \quad (1.28)$$

- Para $x > p$, então $x - p > 0$ e portanto, $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$, para $x \in I$, logo,

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0. \quad (1.29)$$

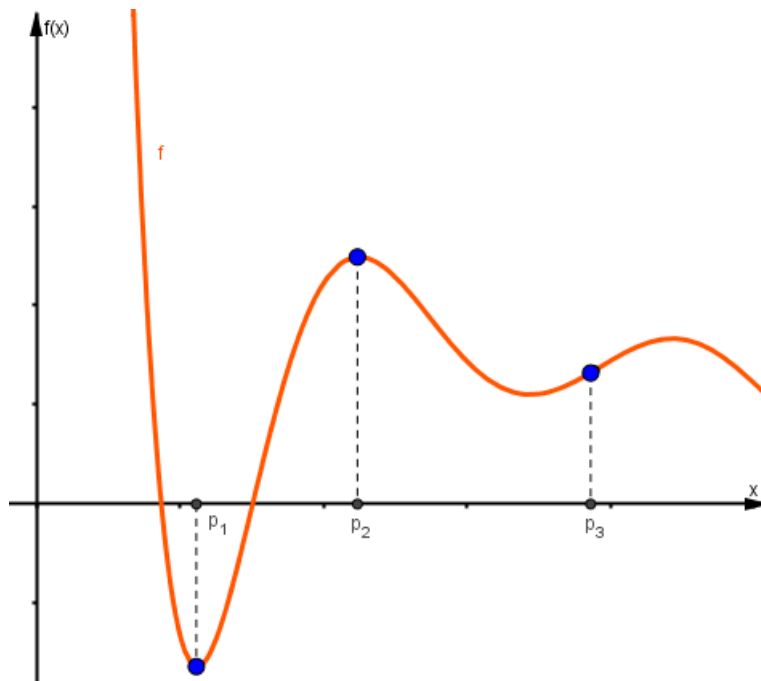
Como (1.28) e (1.29) representam o mesmo valor $f'(p)$, temos por estas desigualdades que,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p) = 0.$$

□

Vale ressaltar que todo extremante local é ponto crítico, porém a recíproca não é verdadeira.

Figura 1.5: Representação Geométrica da condição necessária para um ponto de Máximo ou de Mínimo.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Na Fig. 1.5, p_1 e p_2 são pontos críticos e p_3 é um ponto de inflexão.

O teorema 1.18 estabelece que se $p \in I$, onde $I \subset D_f$ e a função f seja derivável em p , então uma condição necessária para que p seja ponto de extremante local de f é que p seja ponto crítico de f , ou seja, $f'(p) = 0$. Porém a recíproca não é verdadeira.

Para algumas situações, é importante conhecermos quando uma função é localmente crescente ou decrescente (como veremos na Proposição 1.19), pois isso nos permite analisar a condição de um ponto crítico em relação a função, veja o Teorema 1.20.

Proposição 1.19. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$.

- i) Se $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então f será estritamente crescente em $[a, b]$.
- ii) Se $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então f será estritamente decrescente em $[a, b]$.

A demonstração da Proposição 1.19 pode ser encontrada em [11] e [12].

Teorema 1.20. (Teste da Derivada Primeira) *Seja uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em $]a, b[$ e $p \in]a, b[$ um ponto crítico de f .*

- i) Se f' passa de positiva para negativa na vizinhança de p , então f tem um máximo local em p .*
- ii) Se f' passa de negativa para positiva na vizinhança de p , então f tem um mínimo local em p .*

Demonstração. *i) Pela Proposição 1.19, podemos concluir que a função f é crescente no intervalo $[a, p]$ e decrescente em $[p, b]$. Logo $f(x) < f(p)$, $\forall x \neq p$ em $]a, b[$. Portanto p é um máximo local de f .*

ii) Pela Proposição 1.19, concluímos que a função f é decrescente no intervalo $[a, p]$ e crescente em $[p, b]$. Logo $f(x) > f(p)$, $\forall x \neq p$ em $]a, b[$. Portanto p é um mínimo local em f .

□

O Teorema 1.21 a seguir caracteriza os pontos críticos de uma função real. Este teorema será bastante utilizado em nossas aplicações e por isso, é muito importante compreendê-lo.

Teorema 1.21. *Seja f uma função que admite derivada de segunda ordem contínua no intervalo aberto I tal que $p \in I$:*

- i) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local.*
- ii) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local.*
- iii) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) = 0$, então p poderá ser um ponto de inflexão, havendo mudança de sinal da segunda derivada na vizinhança de p , ou caso contrário, será ponto de máximo ou mínimo local (veja [13]).*

Demonstração. *i)* Supondo que $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então

$$f''(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{x - p} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto $I =]a, b[$ contendo p tal que $\frac{f'(x)}{x - p} < 0, \forall x \in I$.

Logo,

- para $a < x < p \Rightarrow x - p < 0$ e $\frac{f'(x)}{x - p} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$,
- para $p < x < b \Rightarrow x - p > 0$ e $\frac{f'(x)}{x - p} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

Portanto, como f passa de crescente para decrescente na vizinhança de p , temos pelo Teorema 1.20 que p é ponto de máximo local da função f em I .

ii) De modo análogo, Supondo que $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então

$$f''(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{x - p} > 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto $I =]a, b[$ onde $p \in I$ tal que $\frac{f'(x)}{x - p} > 0 \forall x \in I$.

Logo,

- para $a < x < p \Rightarrow x - p < 0$ e $\frac{f'(x)}{x - p} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$,
- para $p < x < b \Rightarrow x - p > 0$ e $\frac{f'(x)}{x - p} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Como f passa de decrescente para crescente na vizinhança de p , temos pelo Teorema 1.20 que p é ponto de mínimo local de f em I .

□

Para fixarmos a ideia sobre o Teorema 1.21, resolveremos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.22. Determine os pontos de máximos e mínimos (caso existam) das funções dadas.

a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2$ em $] - 2, 3[$.

b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $] - 2, 2[$.

a) Primeiramente, vamos obter as derivadas de primeira e segunda ordem de f , ou seja, f' e f'' , assim:

- A primeira derivada de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \frac{x^3}{4} - 3x^2 - 2 \cdot 2x \\ &= x^3 - 3x^2 - 4x. \end{aligned} \tag{1.30}$$

- A segunda derivada de f :

$$f''(x) = 3x^2 - 6x - 4. \tag{1.31}$$

Para prosseguir, devemos verificar a condição necessária de existência para ponto de máximo ou de mínimo, ou seja, devemos obter pontos críticos de f , assumindo que a expressão (1.30) seja nula, ($f'(x) = 0$), assim:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0, \tag{1.32}$$

Colocando x no primeiro membro da igualdade (1.32) em evidência, segue:

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0.$$

Logo, uma das raízes de $f'(x)$ é $x_2 = 0$, para determinar as demais seguimos com:

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Seguimos com o cálculo utilizando a Fórmula de Bháskara,

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\&= \frac{3 \pm 5}{2},\end{aligned}$$

onde as raízes valem $x_1 = -1$ e $x_3 = 4$.

Descartamos $x_3 = 4$ por não pertencer ao domínio $] - 2, 3[$. Verificaremos se há condição suficiente para existência de ponto de máximo e de mínimo, substituindo $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$ na expressão dada por (1.31), assim;

- Para $x_1 = -1$, vem:

$$\begin{aligned}f''(-1) &= 3(-1)^2 - 6(-1) - 4 \\&= 5.\end{aligned}$$

Logo, $f''(-1) > 0$.

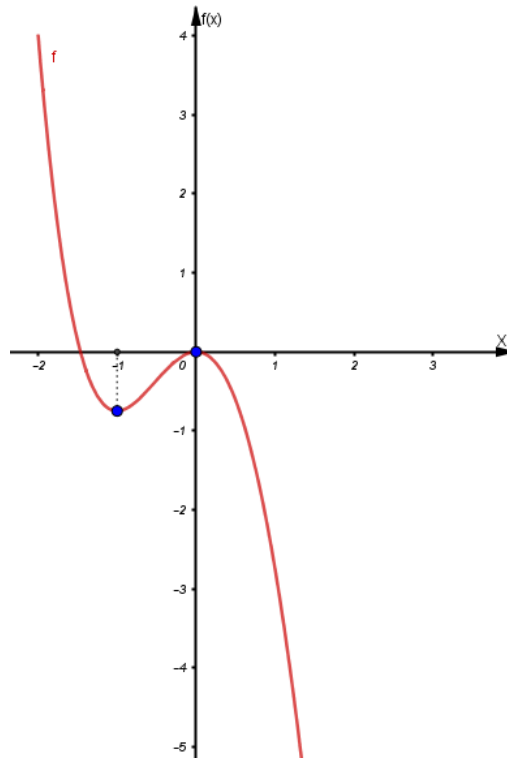
- Para $x_2 = 0$, vem:

$$\begin{aligned}f''(0) &= 3(0)^2 - 6(0) - 4 \\&= -4.\end{aligned}$$

Logo, $f''(0) < 0$.

Como $f'(-1) = 0$, $f''(-1) > 0$ e $-1 \in] - 2, 3[$, então $x_1 = -1$ é ponto de mínimo local. E ainda, como $f'(0) = 0$, $f''(0) < 0$ e $0 \in] - 2, 3[$, então $x_2 = 0$ é ponto de máximo local.

Figura 1.6: Extremantes locais da função $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2$ em $] - 2, 3[$.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

b) Obteremos separadamente g' e g'' .

- Para a primeira derivada de g :

$$\begin{aligned}g'(x) &= 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 3x + 3 \\ &= 3x^2 - 6x + 3.\end{aligned}$$

- Para a segunda derivada de g :

$$\begin{aligned}g''(x) &= 2 \cdot 3x - 6 \\ &= 6x - 6.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Pelo Teorema 1.21 temos que,

$$3x^2 - 6x + 3 = 0. \quad (1.34)$$

Obtendo as raízes de (1.34) pela Fórmula de Bháskara,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{0}}{6} \\ &= \frac{6 \pm 0}{6}, \end{aligned}$$

onde as raízes são $x_1 = x_2 = 1$.

Como $x = 1$ pertence ao domínio $] - 2, 2[$. Substituiremos $x = 1$ na expressão dada por (1.33) para verificarmos sua condição.

- Para $x = 1$, vem:

$$\begin{aligned} g''(1) &= 6 \cdot 1 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $g''(1) = 0$.

Como $g'(1) = 0$, $g''(1) = 0$, logo não apresenta condição suficiente para $x = 1$ seja um ponto de máximo ou de mínimo de g . E ainda, $x = 1$ é o ponto de inflexão da função g (veja Fig.1.7).

1.2.2 Máximo e Mínimo de uma função Contínua em um Conjunto Fechado

Em algumas situações, ao analisarmos uma função real f pelo Teorema 1.21, os

pontos críticos podem não apresentar as condições necessárias para classificá-los como máximo ou mínimo (como vimos no item (b) do Exemplo 1.22). No entanto, se f for uma função contínua no conjunto fechado, o Teorema de Weierstrass garante que f assume valor de máximo e de mínimo no conjunto fechado.

Teorema 1.23. (de Weierstrass). *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 que pertencem ao intervalo $[a, b]$, tais que, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Como a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, logo f será limitada em $[a, b]$, daí o conjunto $A = f(x) : x \in [a, b]$ admitirá supremo e ínfimo, ou seja,

$$\begin{aligned} M &= \sup f(x) : x \in [a, b] \\ m &= \inf f(x) : x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Assim, segue que para todo $x \in [a, b]$, tem-se que $m \leq f(x) \leq M$.

Será apresentada a prova de que $M = f(x_2)$ para algum x_2 pertencente ao intervalo $[a, b]$. Sendo M o supremo dos $f(x)$, por menor que seja $h > 0$, sempre existirá um x tal que $M - h < f(x) < M$, assim, tomando uma função,

$$p(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \tag{1.35}$$

tem-se que a diferença $M - f(x)$ poderá se tornar tão pequena quanto se queira e, assim, a função p , dada por 1.35, poderá se tornar tão grande o quanto se queira.

Assumindo por hipótese que $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$, a função p , dada por 1.35, seria contínua no intervalo $[a, b]$, mas porém seria não limitada pelo mesmo intervalo. O que gera uma contradição. Segue portanto, que $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$ não é possível ocorrer, logo, necessariamente, tem-se que $M = f(x_2)$ para algum $x_2 \in [a, b]$.

De modo análogo, é possível realizar a prova para $m = f(x_1)$ para algum $x_1 \in [a, b]$. □

Seja f uma função real com derivada de 2ª ordem contínua num intervalo fechado $I \subset D_f$. Pelo Teorema de Weierstrass, f admite máximo e mínimo em I . Agora, vamos encontrar estes valores de máximo e mínimo.

Primeiro, vamos usar o Teorema 1.21 no intervalo aberto I . Se existe o ponto $p \in I$ crítico que atendam as condições de tal teorema, precisaremos compará-lo com os valores que f assume nos extremos de I . O máximo será o maior e o mínimo o menor destes valores. Caso p seja um ponto de inflexão, os extremos de I serão os pontos de máximo e mínimo de f .

Exemplo 1.24. Consideremos a função g do item (b) do Exemplo 1.22, porém agora limitada pelo intervalo fechado $[-2, 2]$, daremos sequência em sua resolução.

Pelo Teorema 1.23 (de Weierstrass) a função g admite máximo e mínimo em $[-2, 2]$.

Vimos no Exemplo 1.22 que ao analisarmos g em $] - 2, 2[$ o ponto crítico $x = 1$ não possui as condições necessárias para classificá-lo como ponto de máximo ou mínimo conforme o Teorema 1.21. Basta então verificar os valores que g assume nos extremos do intervalo fechado $[-2, 2]$, pois pelo Teorema 1.23 estes serão pontos de máximo e mínimo de g .

Verifiquemos os valores assumidos por g quando:

- $x_1 = -2$

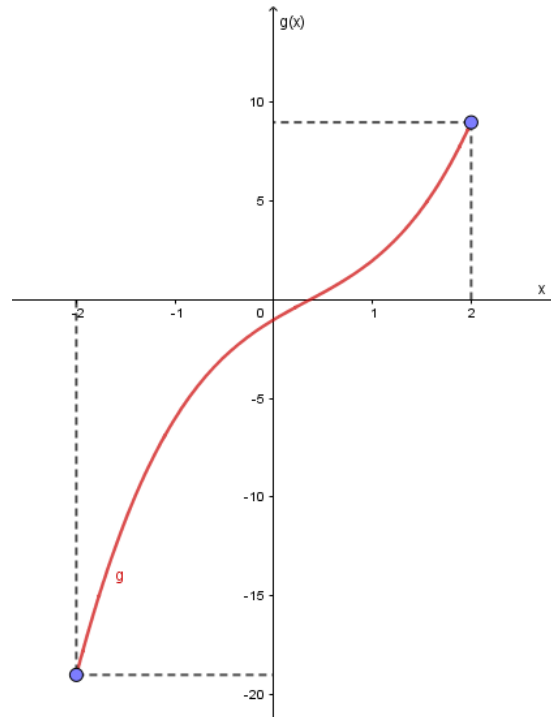
$$\begin{aligned}g(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1 \\ &= -8 - 4 - 6 - 1 \\ &= -19.\end{aligned}$$

- $x_2 = 2$

$$\begin{aligned}g(2) &= (2)^3 - (2)^2 + 3 \cdot (2) - 1 \\ &= 8 - 4 + 6 - 1 \\ &= 9.\end{aligned}$$

Portanto temos que, $x_1 = -2$ é ponto de mínimo e $x_2 = 2$ é ponto de máximo da função g em $[-2, 2]$.

Figura 1.7: Máximo e Mínimo da função $g(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 2]$.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

1.3 Polinômio de Taylor de Ordem n

Uma Ferramenta muito importante para a matemática é o polinômio de Taylor, pois ele permite aproximar uma função qualquer por um polinômio de grau n . A seguir definiremos o polinômio de Taylor, e na sequência apresentaremos o Teorema 1.27, que usaremos futuramente para modelarmos uma função (veja Subseção 2.1.3).

Definição 1.25. Seja f uma função derivável até a ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

é denominado de polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta de x_0 .

Definição 1.26. O polinômio de Taylor, de ordem n , de f em torno de p é o único

polinômio de grau $\leq n$ que aproxima localmente de f em volta de p , tal que,

$$f(x) = P(x) + E(x),$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{(x-p)^n} = 0$.

Formalmente, expressamos a aproximação de f através do polinômio de Taylor pelo seguinte teorema.

Teorema 1.27. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange). *Seja f derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e seja $x, p \in I$. Temos que,*

$$f(x) = P_n(x) + E(x),$$

com,

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x-p)^{n+1},$$

onde \bar{x} está no intervalo aberto de extremos x e p .

A demonstração do Teorema 1.27 pode ser encontrada em [13], p. 285.

1.3.1 Polinômio de Taylor Aplicado a um Conjunto de Dados

Seja f uma função dada como no Teorema 1.27, tal que $y = f(x)$ seja o gráfico de um conjunto de dados dentro de um intervalo fechado I . Se a função f não é conhecida, as derivadas de ordem n podem ser aproximadas, usando-se diferenças finitas Δy e Δx num conjunto de dados em um intervalo fechado I [14].

Deste modo, aplicando-se o Teorema 1.27 temos,

$$f(x) = f(p) + \frac{\Delta y}{\Delta x} (x-p) + \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2!} (x-p)^2 + \frac{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}}{3!} (x-p)^3 + \cdots + \frac{\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n}}{n!} (x-p)^n + E(x),$$

tal que $p \in I$.

Agora, se a diferença finita de ordem n for constante, os dados do conjunto podem ser descritos precisamente por um polinômio de grau n , da forma,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n.$$

ou seja,

$$f(x) = f(p) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - p) + \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2!}(x - p)^2 + \frac{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}}{3!}(x - p)^3 + \cdots + \frac{\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n}}{n!}(x - p)^n + \bar{E}(x).$$

Neste Caso, temos $\bar{E}(x)$, é um erro de aproximação numérica que foi desprezado nas aplicações deste trabalho.

Capítulo 2

Aplicações

Apresentamos nesta Seção a relevância do agronegócio para o desenvolvimento da microrregião de Jataí e como podemos utilizar o conhecimento de extremantes em situações voltadas as atividades de profissionais desta área.

2.1 Otimização Aplicada ao Agronegócio

O agronegócio é compreendido pela união de quatro segmentos: Insumos para a agropecuária; produção agropecuária básica, ou primária; agroindústria (processamento); e agrosserviços. A análise destes conjuntos de segmentos é feito para o ramo agrícola (vegetal) e pecuário (animal) de acordo com Relatório PIBAgro-Brasil [15]. No ano de 2016, o agronegócio representou o valor de R\$ 1.280.827.000.000,00 do produto interno bruto (PIB) brasileiro, destacando a importância de sua participação no desempenho econômico do país. Apenas o setor agrícola representa um PIB de R\$ 871.779.000.000,00 [15]. Os produtos provenientes da agricultura e das indústrias agroalimentares são responsáveis por 36% do total das exportações, o que atribui ao Brasil uma significativa participação nos mercados internacionais e destaque entre os maiores produtores e exportadores das commodities açúcar, café, suco de laranja, carne bovina e de aves e soja [16]. No município de Jataí, segundo [17], a agricultura moderna foi inserida na década de 1970, e desde então, apresentou um grande desenvolvimento com as monoculturas (soja, milho, sorgo e a cana-de-açúcar) [Fig. 2.1]. No período anterior à 1970, a atividade desenvolvida era quase exclusivamente a pecuária.

Figura 2.1: Principais segmentos desenvolvidos na microrregião de Jataí: produção de cana-de-açúcar, soja, milho e pecuária.



Fonte: <<http://www.orc.com.br>> <<http://www.olhardireto.com.br>>
<<https://i.ytimg.com>>.

De acordo com a Food and Agriculture Organization [18], o Brasil possui perspectivas para o aumento da produtividade de grãos, principalmente da soja, devido ao quantitativo de terras agricultáveis do País. Esta disponibilidade de terras, aliada ao desenvolvimento tecnológico, a pesquisas na área de climatologia e um bom planejamento do setor agrícola, permite o acréscimo da sua produção. A cadeia produtiva da soja gerou uma receita com valor superior a 26 bilhões de dólares, colocando o país na segunda posição, entre os maiores na produção mundial de soja, com 81,4 milhões de toneladas. Os 27 milhões de hectares da soja cultivados no Brasil abrangem terras de 16 estados, incluindo o Distrito Federal. A produção no estado do Mato Grosso corresponde a 28,9% do total do País e, na sequência, estão os estados do Paraná, Rio Grande do Sul, Goiás e Mato Grosso do Sul [19]. Na região Centro-Oeste, o progresso da produção de grãos esteve ligado diretamente ao desenvolvimento industrial do país [20].

No ano de 2016, a região sudoeste foi considerada a maior microrregião produtora de soja do estado, com os municípios de Montividiu, Chapadão do Céu, Jataí e Rio Verde, que é o maior produtor do Estado. A única exceção é o município de Cristalina, localizado na região leste do estado. Na região Nordeste de Goiás, a base agrária ainda não sofreu grandes influências de fatores como o incentivo de capital, técnica e insumos agrícolas modernos, apresentando uma menor evolução da agricultura nessa região [21].

O sudoeste de Goiás tem sido um referencial da produção de soja no estado de Goiás e a sua produção se sustenta pelo uso intensivo de tecnologia de ponta pelos produtores. Associa-se a este fato a facilidade do escoamento da produção para os grandes centros comerciais em razão do sistema rodoviário, de infraestrutura mais adequada, com estradas e meios de transporte, estruturas de armazenagem, crédito agrícola subsidiado e organização política e econômica do produtor rural [22].

É evidente que a microrregião de Jataí tem o agronegócio como responsável por seu desenvolvimento econômico. O anseio por um resultado cada vez melhor que o anterior é um sentimento constante, e é nesse aspecto que a otimização pode ser utilizada como ferramenta para atingir tal objetivo. Profissionais com habilidade de otimizar situações que englobam os segmentos de produção são capazes, por exemplo, de aumentar a produção, reduzir os custos, construir estruturas mais eficientes, otimizar a capacidade de armazenagem, reduzir os ciclos de produção, mitigação dos impactos ambientais, dentre outras diversas possibilidades. É neste sentido, que ressaltamos a importância de manter o contato de alunos da graduação, desde o seu ingresso na Instituição de Ensino, com problemas de otimização simples que experimentam a realidade de suas futuras áreas de atuação profissional. Vejamos algumas situações a seguir.

2.1.1 Projeto de uma Cerca: Delimitando a Área Máxima para um Piquete.

Conforme discutido anteriormente, a pecuária é outra atividade econômica que predomina a região sudoeste do Estado de Goiás. Segundo [17], no município de Jataí 47% de sua área total é ocupado por pastagens, enquanto a agricultura ocupa 31%, um indicativo de que a pecuária representa uma parcela significativa da base econômica do município. Neste contexto, mais uma vez a Universidade Federal de Goiás - Regional de Jataí consolida sua importante contribuição para o desenvolvimento da microrregião de Jataí, oferecendo quatro cursos na área de Ciências Agrárias. Este curso disponibi-

liza, para a região, profissionais com conhecimento técnico especializado que prestam um serviço de consultoria com qualidade aos produtores pecuaristas que objetivam melhorar a eficiência de sua produção.

É importante que os profissionais, como médicos veterinários, zootecnistas agrônomos e engenheiros florestais, ainda em formação, mantenham constantemente, um contato com situações/problemas que abordam modelos do cotidiano pecuarista ou similares que possam ser otimizados. A próxima aplicação, simulará uma situação que objetiva cercar a maior área de terra possível, chamada de piquete, utilizando uma determinada quantidade de arame. Os pecuaristas, naturalmente, se deparam com problemas que semelham a este, pois a divisão de pastagens é uma prática importante que, segundo [23], propicia condições para um manejo adequado dos animais mantendo equilíbrio entre a taxa de lotação e massa da planta forrageira, e esse é um fato que contribui para o aumento da produção, ou seja, o ganho de peso do animal. Porém, na situação em que necessita cercar uma área máxima utilizando determinada quantidade de arame acarreta, em diversas vezes, prejuízos ao produtor pecuarista, como desperdícios materiais e mão de obra, devido ao fato de desconhecerem um processo para obter um resultado ótimo do problema, ou seja, um modo de determinar as dimensões da cerca, de modo que a área delimitada seja máxima, antes de iniciar sua construção.

Figura 2.2: Piquetes construídos com cerca convencional.



Fonte: <<http://www.jlcsp.com.br>>

O profissional de ciências agrárias manipulam situações de otimização, semelhantes à citada acima, durante sua formação, poderia contribuir, através de consultorias,

com os cálculos necessários que possibilite o dimensionamento do piquete de modo a minimizar os possíveis prejuízos envolvidos.

Embora a aplicação subsequente possa ser considerada de fácil solução, a apresentação desta, no trabalho, tem o objetivo de ilustrar situações simples e rotineiras à um pecuarista, que pode ser resolvida sem auxílio de softwares. Porém, este é considerado um problema complexo por vários profissionais que prestam consultorias aos produtores e muitas vezes desconhecem seu processo de solução.

Um pecuarista recebeu a orientação, através de um médico veterinário, que para aumentar a produção do seu rebanho, ou seja, o ganho de peso em cada animal, seria necessário dividir sua área de pastagem em mais um piquete, pois assim, ofereceria as condições de tempo suficiente para a recuperação das forrageiras de um piquete durante o período em que os animais ocupassem outros. O modelo de cerca escolhido para a construção do piquete foi a cerca eletrificada de apenas 1 (um) fio de arame que, segundo [24], é considerada como uma barreira psicológica de baixo custo, onde o animal fica condicionado a uma sensação dolorosa ao tocar o fio da cerca e, em consequência, passa a evitá-la, como pode ser observado na Fig. 2.3. O pecuarista já dispõe de 500 metros de arame em sua propriedade e o projeto de construção do piquete consta que terá uma forma retangular e será aproveitado, em um de seus lados, uma cerca já existente que confronta com outro piquete. Quanto deverá medir as dimensões do piquete para que a área cercada seja máxima?

Figura 2.3: Bovinos isolados em piquete com cerca elétrica.

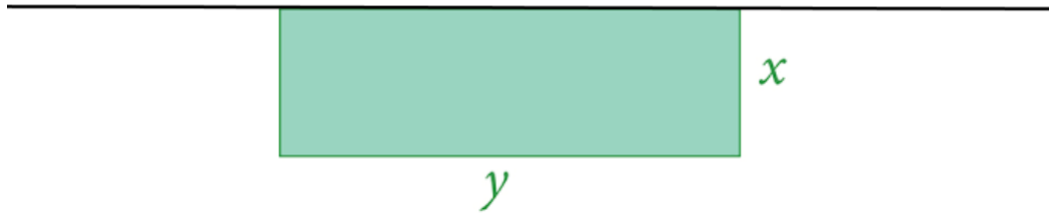


Fonte: <<https://www.comprerural.com>>

Tem-se a disposição 500 m de arame e o projeto de construção do piquete é uma forma retangular onde um de seus lados já existe. Observe que podem ser construídos

várias formas retangulares em que a soma de três dos seus lados equivale a 500, mas que as áreas assumem valores diferentes. O objetivo dessa aplicação é obter as medidas das dimensões x e y , veja a Fig. 2.4, de modo que a área da região seja a maior possível.

Figura 2.4: Piquete com forma retangular.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Considerando que o piquete tenha o formato da Fig. 2.4 é fácil perceber que o cálculo de sua área (A) é dada por:

$$A = x \cdot y. \quad (2.1)$$

O perímetro (p) que precisará ser cercado será expresso por:

$$p = 2x + y, \quad (2.2)$$

nesse caso, como dispõe de 500 metros de arame, a equação (2.2) pode ser reescrita como,

$$2x + y = 500, \quad (2.3)$$

somando ambos membros da igualdade (2.3) por $(-2x)$, temos:

$$y = 500 - 2x. \quad (2.4)$$

Para obter uma expressão para a área (2.1) do piquete em função de uma única

variável x , substituímos o valor de y , dado por (2.4), na expressão (2.1), assim:

$$A = x \cdot (500 - 2x), \quad (2.5)$$

utilizando a propriedade distributiva em (2.5),

$$A = -2x^2 + 500x. \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) define a função área $A(x)$ de uma única variável x , cujo o domínio é $]0, 250[$, e é dada por:

$$A(x) = -2x^2 + 500x. \quad (2.7)$$

Considerando a função (2.7) contínua no intervalo aberto $]0, 250[$, analisaremos as condições dos pontos críticos, caso existam, da função 2.7 em $]0, 250[$ utilizando o Teorema 1.21. Logo temos que:

- A primeira derivada de $A(x)$:

$$A'(x) = -4x + 500; \quad (2.8)$$

- A Segunda derivada de $A(x)$:

$$A''(x) = -4. \quad (2.9)$$

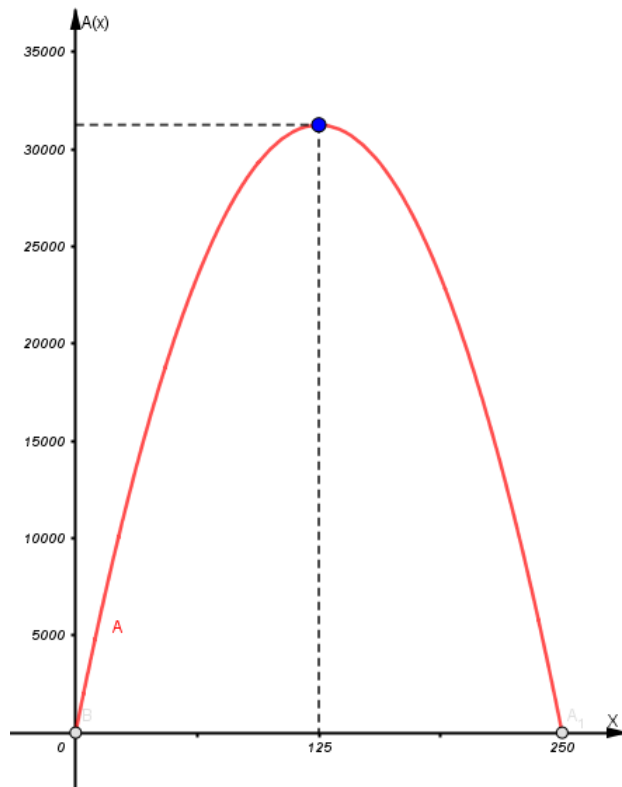
Para verificarmos os possíveis pontos críticos, seguimos igualando a zero a expressão (2.8),

$$\begin{aligned} -4x + 500 &= 0 \\ 4x &= 500 \\ x &= 125. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sendo $x = 125$ pertencente ao intervalo aberto $]0, 250[$, e observando que a segunda

derivada de $A(x)$, dada por (2.9) assume valor negativo, concluí-se que $x = 125$ é o único candidato a ponto de máximo da função (2.7) em $]0, 250[$. Sendo $x = 125$ o único extremo em $]0, 250[$, e por se tratar de uma função quadrática, faz portanto, com que seja um valor máximo absoluto. A Fig. 2.5 representa graficamente a posição do valor máximo absoluto $x = 125$ na função Área dada por (2.7).

Figura 2.5: Representação gráfica do valor máximo da função (2.7).



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Conhecendo a dimensão x que determina a área máxima do piquete é fácil verificar o valor de y substituindo a expressão (2.10) em (2.4), logo,

$$\begin{aligned} y &= 500 - 2x \\ &= 500 - 2 \cdot 125 \\ &= 250. \end{aligned}$$

E ainda, substituindo a expressão (2.10) em (2.7), obtém-se o valor da área máxima

$A(x)$ do piquete,

$$\begin{aligned} A(125) &= -2x^2 + 500x \\ &= -2 \cdot 125^2 + 500 \cdot 125 \\ &= 31250. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Concluimos assim que, dispondo de 500 metros de arame para construir um piquete retangular utilizando o modelo de cerca eletrificada de apenas 1 (um) fio de arame e aproveitando uma cerca já existente de modo que a área cercada seja máxima, o projeto de construção deverá prever dois lados do piquete retangular medindo 125 m e o terceiro lado medindo 250 m . A área máxima delimitada pelo piquete corresponde a 31250 m^2 ou 31 ha (veja (2.11)).

2.1.2 Controle de Estoque: Minimizando o Custo.

A aplicação seguinte expressa um problema de Controle de Estoque, uma situação presente na rotina de empresas que envolve alguns conceitos de economia, que aliados com o estudo de otimização oferece condições para que gestor da empresa baseie suas decisões. Este é um tipo de problema que incomoda diversos empresários, pois produz um impacto significativo na receita da empresa, podendo até, em alguns casos, gerar grandes prejuízos. Um dos objetivos de praticar o controle de estoque de uma empresa é, dentre outros, financeiro, pois é bastante caro a manutenção de um estoque e um gerenciamento adequado deste deve permitir que o valor investido seja minimizado [25]. A pergunta que norteia os profissionais que trabalham nesse setor é a seguinte: *Qual quantidade deve ser produzida mensalmente para que a empresa otimize seu custo com armazenagem?* Isto significa que, para aumentar sua receita, uma empresa na linha de produção deve conhecer a quantidade necessária de produtos a serem fabricados mensalmente para que ela consiga minimizar, ao máximo, os custos envolvidos quando os produtos, já fabricados, são estocados na empresa. Assim, constatamos que realizar um controle do estoque adequado contribui para o sucesso da empresa.

Figura 2.6: Controle de Estoque.



Fonte: <<https://www.checklistfacil.com>>

Os profissionais das Ciências Agrárias possuem diversas possibilidades de atuação, isto inclui empresas especializadas em produtos do agronegócio. Acontece que diversos profissionais que atuam nesse setor não conhecem um procedimento para resolver problemas como o mencionado anteriormente, ou imaginam que compreende num processo complexo que pode ser resolvido apenas computacionalmente. A seguir será apresentada uma aplicação que envolverá um problema de controle de estoque que objetiva minimizar os custos de manutenção do estoque de uma empresa. Este tipo de situação pode ser vivenciado por uma empresa qualquer, e aqui verificaremos que é possível resolver um problema com este perfil sem utilização de um software, e sem maiores complexidades.

Para a aplicação seguinte, necessitaremos conhecer o conceito de custos de armazenagem, referente a área da Administração. Os custos de armazenagem são os custos inerentes ao espaço físico, às potenciais perdas, furtos, roubos, avarias e obsolescência dos itens armazenados. Estes custos são calculados em função do estoque médio, que é a média do estoque mantido em determinado período [26].

Uma empresa, especializada na produção de insumos agrícolas possui uma demanda uniforme, mensal, de 12800 frascos de um determinado defensivo agrícola. Em cada lote de produção são fabricados x frascos deste insumo, que são armazenados até o momento de sua entrega. O custo para obter cada lote de produção (custo necessário para produzir x frascos) é de R\$ 50,00, e o custo de armazenamento mensal para

cada frasco é de R\$ 0,50. Considerando que a produção seja instantânea e que a escassez de frascos no estoque da empresa não ocorra (ou seja, o número de frascos armazenados reduzirá até o momento de saída do último, onde dará início a um novo lote de produção), de modo que o estoque nunca seja nulo, quantos frascos de defensivo x devem ser produzidos por lote para minimizar o custo total mensal $C(x)$? E qual o valor deste custo?

Figura 2.7: Produção de insumos agrícolas.



Fonte: <<http://www.integrada.coop.br>>

Observe que a quantidade x de frascos do defensivo agrícola por lote de produção estará no intervalo $1 \leq x \leq 12800$.

O custo total mensal $C(x)$ é a soma do custo de obtenção de cada lote $C_O(x)$ com o custo de armazenamento dos frascos $C_A(x)$, ou seja:

$$C(x) = C_O(x) + C_A(x). \quad (2.12)$$

Analisaremos separadamente os custos $C_O(x)$ e $C_A(x)$.

- Custo de Obtenção de cada lote $C_O(x)$: Se a quantidade de frascos do defensivo demandada mensalmente é 12800, e em cada lote de produção são fabricados x de frascos, então o número n de lotes por mês será $\left(n = \frac{12800}{x}\right)$. Como o custo para obter cada lote é, de acordo com o enunciado, R\$ 50,00, logo teremos:

$$C_O(x) = 50 \cdot \frac{12800}{x} = \frac{640000}{x}. \quad (2.13)$$

- Custo de Armazenamento dos frascos $C_A(x)$: Sendo a demanda uniforme e a produção de cada lote instantânea, ocorrendo o primeiro lote de produção (n_1) do mês, logo, constarão x frascos no estoque inicial (E_i) da empresa. A quantidade de itens estocados deverá reduzir-se até saída do último frasco, pois neste momento inicia o próximo lote de produção (n_2), onde serão produzidos e armazenados outros x frascos, e assim sucessivamente, até que os itens armazenados do último lote de produção do mês, tenham se reduzido a zero, fazendo com que o estoque final (E_f) da empresa seja nulo ao término do mês. Para determinar o valor do estoque médio (E_m) mensal basta encontrar a média entre os estoques inicial e final, ou seja,

$$E_m = \frac{E_i + E_f}{2} = \frac{x + 0}{2} = \frac{x}{2}.$$

Portanto, o número médio de frascos estocados no mês será $\frac{x}{2}$. Sendo o custo de armazenagem de cada frasco R\$ 0,50, temos que o custo mensal de armazenagem dos frascos (C_A) é dado por:

$$C_A(x) = 0,50 \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4}. \quad (2.14)$$

Substituindo as expressões (2.13) e (2.14) na equação dada por (2.12), obtém-se a função de custo total mensal,

$$C(x) = \frac{640000}{x} + \frac{x}{4}, \quad (2.15)$$

onde consideramos como domínio o intervalo $I = [1, 12800]$.

Sendo a função (2.15) contínua no intervalo fechado I , o Teorema 1.23 (*de Weierstrass*) nos garante a existência de valor máximo e mínimo de (2.15). Para isto, comparamos os valores assumidos pelos pontos críticos no interior de I , com os valores assumidos em seus extremos.

O Teorema 1.21, nos permite verificar se os pontos críticos da função (2.15), caso existam, são candidatos a pontos de máximo ou mínimo. Para tal, realizaremos uma análise sobre as derivadas de primeira e segunda ordem da função (2.15) considerando

o intervalo aberto $I_1 = (1, 12800)$. Portanto, temos que:

- A primeira derivada de $C(x)$:

$$C'(x) = \frac{-640000}{x^2} + \frac{1}{4}.$$

- A segunda derivada de $C(x)$:

$$C''(x) = \frac{1280000}{x^3}.$$

Ainda a partir do Teorema 1.21, obtemos os possíveis pontos críticos da função (2.15), fazendo $C'(x) = 0$, logo:

$$0 = \frac{-640000}{x^2} + \frac{1}{4}, \quad (2.16)$$

somando ambos membros da igualdade (2.16) por $-\frac{1}{4}$,

$$-\frac{1}{4} = \frac{-640000}{x^2}, \quad (2.17)$$

multiplicando ambos membros da igualdade (2.17) por $(-4x^2)$,

$$x^2 = 2560000. \quad (2.18)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos membros da igualdade (2.18), obtém-se:

$$x = \pm 1600.$$

Descartamos $x = -1600$ por não pertencer ao intervalo fechado I . Agora, substi-

tuindo $x = 1600$ em (2.15), obtemos o valor que $C(x)$ assume neste ponto crítico,

$$\begin{aligned} C(1600) &= \frac{640000}{1600} + \frac{1600}{4} \\ &= 400 + 400 \\ &= 800. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Perceba ainda que, a segunda derivada em $x = 1600$, ($C''(1600)$), é positiva.

$$C''(1600) = \frac{1280000}{1600^3} \simeq 0,0003 > 0$$

Temos pelo Teorema 1.21, que $x = 1600$ é candidato à ponto de mínimo da função (2.15). Portanto, devemos agora compará-lo com os valores que $C(x)$ assume nos extremos do intervalo fechado $I = [1, 12800]$, temos então que,

- para $x = 1$:

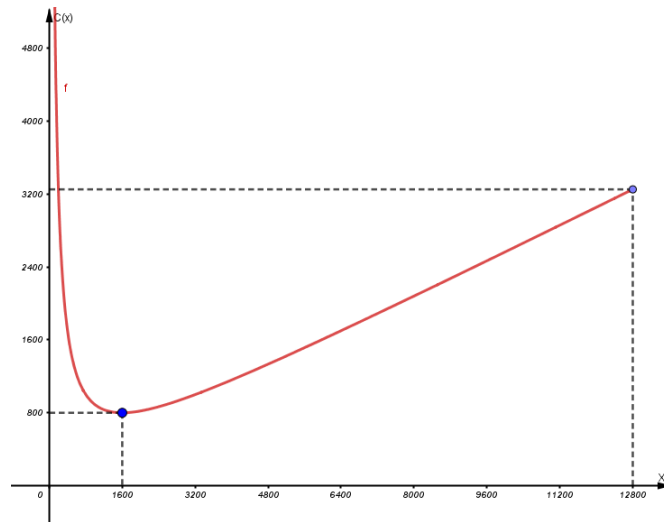
$$\begin{aligned} C(1) &= \frac{640000}{1} + \frac{1}{4} \\ &= 640000 + 0,25 \\ &= 640000,25, \end{aligned} \tag{2.20}$$

- para $x = 12800$:

$$\begin{aligned} C(12800) &= \frac{640000}{12800} + \frac{12800}{4} \\ &= 50 + 3200 \\ &= 3250. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Comparando os valores de (2.19), (2.20) e (2.21), verificamos que a função (2.15) possui o menor valor, no ponto crítico $x = 1600$. Portanto, $x = 1600$ é o ponto de mínimo da função $C(x)$, dada por (2.15), em $I = [1, 12800]$, cujo o valor mínimo global é $C(1600) = 800$. A Fig. 2.8 representa graficamente a posição do ponto de mínimo $x = 1600$ na função custo dada por (2.15) em I .

Figura 2.8: Representação gráfica do valor mínimo da função (2.15) em $[1, 12800]$.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Concluimos assim, que devem ser produzidos 1600 frascos do defensivo agrícola por lote, para minimizar o custo total, de produção e armazenamento dos frascos, por mês, resultando o valor deste custo em R\$ 800,00. Podemos ainda dizer, que deve ocorrer 8 lotes de produção por mês $\left(n = \frac{12800}{1600} = 8\right)$.

2.1.3 Idade do Milho em que a Produção é Máxima.

A Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí oferece, dentre diversos cursos de graduação, o curso de Agronomia. A criação destes cursos foi muito importante para o desenvolvimento da microrregião sudoeste do Estado de Goiás, pois tem proporcionado a oferta de profissionais qualificados que contribuem com conhecimento técnico especializado nas atividades agrárias desenvolvidas na região.

O estudo da otimização durante os cursos da área de Ciências Agrárias, como agronomia e zootecnia, merece um foco especial que evidencie suas aplicações e possibilidades. Para que alcance o objetivo esperado, é necessário que o estudo da otimização ultrapasse aquela metodologia mecanizada em que aborda questões com funções pré definidas e adote a prática de apresentar situações/problemas, que representem, e simulam fenômenos vivenciados no cotidiano de profissionais da área. Isto permitirá que o graduado verifique as diversas aplicabilidades da otimização e sua importância, sendo capaz de modelar situações reais e entender os processos envolvidos. Enfim, resultará

num profissional qualificado que contribuirá para uma constante busca de melhores resultados na sua atuação enquanto profissional.

A seguir será abordado uma aplicação que simula uma situação em que os profissionais agrônomos poderiam deparar-se no exercício de suas funções.

O produtor X arrendou uma propriedade com a finalidade de plantar milho. No ano de 2016 foi iniciado o plantio com a variedade α de milho almejando obter uma produtividade máxima. Nesse contexto, para obter um melhor acompanhamento da produção e garantir um bom rendimento é necessário avaliar a produção em função da idade da planta (as fases de desenvolvimento do milho estão ilustradas pela Fig. 2.10) visto que no período reprodutivo diversos fatores como clima, solo, tecnologias e fotoperíodo, podem inferir na produção. Para isto, foi coletado os dados da produção f da variedade α de milho em função da idade t da planta (os dados apresentados são fictícios), podendo ser verificado pela Tabela 2.1.

Figura 2.9: Produção de uma lavoura de milho.



Fonte: <<https://i2.wp.com>>.

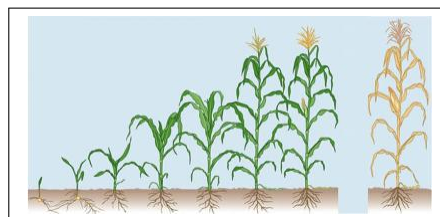
Tabela 2.1: Produção de milho em função da idade da planta.

t	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y	58	3358	8058	13558	19258	24558	28858	31558	32058	29758	24058

t : Idade da planta em dias; y : Dados da produção de milho por hectare (kg/ha).

Portanto, qual a idade da planta t , em que $20 \leq t \leq 120$ dias, deverá ser realizada a colheita para que a produção seja máxima e qual o valor dessa produção?

Figura 2.10: Fases de desenvolvimento do milho.



Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content>>

Primeiramente analisaremos os dados apresentados na Tabela 2.2 e suas variações com o objetivo de identificar regularidade. A Tabela 2.2 indica esta análise contendo a primeira, segunda e terceira variação dos dados (conhecidas como diferenças finitas de ordem 3), logo em seguida apresentaremos os cálculos usados para sua construção. A primeira coluna n , apenas indica a ordem dos dados.

Tabela 2.2: Análise das variações da produção de milho em relação a sua idade.

n	t	y	$\frac{\Delta y}{\Delta t}$	$\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$	$\frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3}$
1	20	58	330		
2	30	3358	470	14	
3	40	8058	550	8	-0,6
4	50	13558	570	2	-0,6
5	60	19258	530	-4	-0,6
6	70	24558	430	-10	-0,6
7	80	28858	270	-16	-0,6
8	90	31558	50	-22	-0,6
9	100	32058	-230	-28	-0,6
10	110	29758	-570	-34	-0,6
11	120	24058			

n : Indicação de ordem dos dados; t : Idade da planta em dias; y : produção de milho por hectare; $\frac{\Delta y}{\Delta t}$: Variação de primeira ordem dos dados; $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$: Variação de segunda ordem dos dados; $\frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3}$: Variação de terceira ordem dos dados.

Observe que Δt , a variação de t , será, neste caso, uma constante, ou seja:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_{11} - t_{10} = 10.$$

Considerando $\Delta_i y = y_{i+1} - y_i$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, 10$, efetuaremos os cálculos da

quarta coluna da Tabela 2.2, ou seja, a primeira variação $\frac{\Delta_i y}{\Delta t}$ para os casos em que:

i) $i = 1$:

$$\frac{\Delta_1 y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta t} = \frac{3358 - 58}{10} = 330,$$

ii) $i = 2$:

$$\frac{\Delta_2 y}{\Delta t} = \frac{y_3 - y_2}{\Delta t} = \frac{8058 - 3358}{10} = 470,$$

iii) $i = 3$:

$$\frac{\Delta_3 y}{\Delta t} = \frac{y_4 - y_3}{\Delta t} = \frac{13558 - 8058}{10} = 550,$$

iv) $i = 4$:

$$\frac{\Delta_4 y}{\Delta t} = \frac{y_5 - y_4}{\Delta t} = \frac{19258 - 13558}{10} = 570,$$

v) $i = 5$:

$$\frac{\Delta_5 y}{\Delta t} = \frac{y_6 - y_5}{\Delta t} = \frac{24558 - 19258}{10} = 530,$$

vi) $i = 6$:

$$\frac{\Delta_6 y}{\Delta t} = \frac{y_7 - y_6}{\Delta t} = \frac{28858 - 24558}{10} = 430,$$

vii) $i = 7$:

$$\frac{\Delta_7 y}{\Delta t} = \frac{y_8 - y_7}{\Delta t} = \frac{31558 - 28858}{10} = 270,$$

viii) $i = 8$:

$$\frac{\Delta_8 y}{\Delta t} = \frac{y_9 - y_8}{\Delta t} = \frac{32058 - 31558}{10} = 50,$$

ix) $i = 9$:

$$\frac{\Delta_9 y}{\Delta t} = \frac{y_{10} - y_9}{\Delta t} = \frac{29758 - 32058}{10} = -230,$$

x) $i = 10$:

$$\frac{\Delta_{10} y}{\Delta t} = \frac{y_{11} - y_{10}}{\Delta t} = \frac{24058 - 29758}{10} = -570.$$

Efetuada os cálculos da quarta coluna da Tabela 2.2, ou seja, a segunda variação $\frac{\Delta_i^2 y}{\Delta t^2}$ para os casos em que:

i) $i = 1$:

$$\frac{\Delta_1^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_2}{\Delta t} - \frac{\Delta y_1}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{470 - 330}{10} = 14,$$

ii) $i = 2$:

$$\frac{\Delta_2^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_3}{\Delta t} - \frac{\Delta y_2}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{550 - 470}{10} = 8,$$

iii) $i = 3$:

$$\frac{\Delta_3^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_4}{\Delta t} - \frac{\Delta y_3}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{570 - 550}{10} = 2,$$

iv) $i = 4$:

$$\frac{\Delta_4^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_5}{\Delta t} - \frac{\Delta y_4}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{530 - 570}{10} = -4,$$

v) $i = 5$:

$$\frac{\Delta_5^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_6}{\Delta t} - \frac{\Delta y_5}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{430 - 530}{10} = -10,$$

vi) $i = 6$:

$$\frac{\Delta_6^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_7}{\Delta t} - \frac{\Delta y_6}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{270 - 430}{10} = -16,$$

vii) $i = 7$:

$$\frac{\Delta_7^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_8}{\Delta t} - \frac{\Delta y_7}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{50 - 270}{10} = -22,$$

viii) $i = 8$:

$$\frac{\Delta_8^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_9}{\Delta t} - \frac{\Delta y_8}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{-230 - 50}{10} = -28,$$

ix) $i = 9$:

$$\frac{\Delta_9^2 y}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\Delta y_{10}}{\Delta t} - \frac{\Delta y_9}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{-570 - (-230)}{10} = -34.$$

A quinta coluna da Tabela 2.2 é dada a terceira variação, ou seja, a variação de $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$,

que aqui será denotado por

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3}$$

Efetutando os cálculos de $\frac{\Delta_i^3 y}{\Delta t^3}$ para os casos onde:

i) $i = 1$:

$$\frac{\Delta_1^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_2}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{8 - 14}{10} = -0,6,$$

ii) $i = 2$:

$$\frac{\Delta_2^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_3}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_2}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{2 - 8}{10} = -0,6,$$

iii) $i = 3$:

$$\frac{\Delta_3^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_4}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_3}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{-4 - 2}{10} = -0,6,$$

iv) $i = 4$:

$$\frac{\Delta_4^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_5}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_4}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{-10 - (-4)}{10} = -0,6,$$

v) $i = 5$:

$$\frac{\Delta_5^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_6}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_5}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{-16 - (-10)}{10} = -0,6,$$

vi) $i = 6$:

$$\frac{\Delta_6^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_7}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_6}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{-22 - (-16)}{10} = -0,6,$$

vii) $i = 7$:

$$\frac{\Delta_7^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_8}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_7}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{-28 - (-22)}{10} = -0,6,$$

viii) $i = 8$:

$$\frac{\Delta_8^3 y}{\Delta t^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_9}{\Delta t^2} - \frac{\Delta^2 y_8}{\Delta t^2}}{\Delta t} = \frac{-34 - (-28)}{10} = -0,6.$$

Mostraremos a seguir, uma forma de se obter a função desejada utilizando o polinômio de Taylor, cujo o processo é direto.

Observe que a terceira variação, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3}$, é uma constante não-nula. Vimos na Subseção 1.3.1, que quando ocorre este caso, a função é dada pelo próprio polinômio de Taylor de grau 3. Desta forma, a função que modela produção desta determinada espécie de milho e relação da idade da planta, pode ser representada por uma função cúbica, cuja a equação geral é dada por:

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

onde a , b , c e d são constantes, com $a \neq 0$. E a função $f(t)$ será dada pelo polinômio de Taylor de ordem 3, onde aplicando o Teorema 1.27 temos,

$$f(t) = y + \frac{\Delta y}{\Delta t}(t - p) + \frac{\Delta^2 y}{2!}(t - p)^2 + \frac{\Delta^3 y}{3!}(t - p)^3.$$

Para as substituições das variações da Tabela 2.2 na expressão acima, podemos tomar qualquer linha da tabela que possui todas as variações possíveis (neste caso

poderia ser as linhas de posições $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 10 da Tabela 2.2). Assim, tomando as diferenças finitas da linha $n = 4$ da Tabela 2.2 temos que, $p = t_4 = 50$, $y = 13558$, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 570$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} = 2$ e $\frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3} = -0,6$. Logo,

$$f(t) = y + \frac{\Delta y}{\Delta t}(t - t_4) + \frac{\Delta^2 y}{2!}(t - t_4)^2 + \frac{\Delta^3 y}{3!}(t - t_4)^3.$$

Fazendo as substituições,

$$\begin{aligned} f(t) &= 13558 + 570(t - 50) + \frac{2}{2!}(t - 50)^2 + \frac{(-0,6)}{3!}(t - 50)^3 \\ &= 13558 + 570(t - 50) + \frac{2}{2}(t - 50)^2 - \frac{0,6}{6}(t - 50)^3 \\ &= 13558 + 570(t - 50) + 1(t - 50)^2 - 0,1(t - 50)^3. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como $(t - 50)^2 = t^2 - 100t + 2500$ e ainda $(t - 50)^3 = t^3 - 150t^2 + 7500t - 125000$, substituiremos na expressão (2.22):

$$f(t) = 13558 + 570(t - 50) + t^2 - 100t + 2500 - 0,1(t^3 - 150t^2 + 7500t - 125000),$$

aplicando a propriedade distributiva,

$$f(t) = 13558 + 570t - 28500 + t^2 - 100t + 2500 - 0,1t^3 + 15t^2 - 750t + 12500,$$

agrupando os termos semelhantes, concluímos que,

$$f(t) = -0,1t^3 + 16t^2 - 280t + 58. \quad (2.23)$$

Pelo enunciado, o objetivo desta aplicação é obter o valor máximo da função modelada (2.23) contínua em $[20, 120]$. Conforme vimos anteriormente, o Teorema 1.23 (de Weiestrass) nos garante a existência de um valor máximo para f em $[20, 120]$. Para isto devemos verificar pelo Teorema 1.21 as condições assumidas pelos pontos críticos, caso existam, no intervalo aberto $]20, 120[$ e compará-los aos valores assumidos por f

pelos extremos do intervalo fechado $[20, 120]$.

Analisando a função (2.23) pelo Teorema 1.21 em $]20, 120[$:

- A primeira derivada da função (2.23):

$$f'(t) = -0,3t^2 + 32t - 280. \quad (2.24)$$

- A segunda derivada da função (2.23):

$$f''(t) = -0,6t + 32. \quad (2.25)$$

Para obter os possíveis pontos críticos devemos considerar primeira derivada (2.24) sendo nula, ou seja, $f'(t) = 0$,

$$-0,3t^2 + 32t - 280 = 0.$$

Utilizando a Fórmula Bháskara para determinar o valor de t , temos que:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4 \cdot (-0,3) \cdot (-280)}}{2 \cdot (-0,3)} \\ &= \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 336}}{-0,6} \\ &= \frac{-32 \pm \sqrt{688}}{-0,6} \\ &= \frac{-32 \pm 26,2}{-0,6} \end{aligned}$$

onde as raízes são $t_1 = 9,62$ e $t_2 = 97$.

Observe que $t = 9,62$ não pertence ao intervalo aberto $]20, 120[$, portanto poderá ser descartado. Por outro lado, observe que substituindo $t = 97$ na equação (2.25), tem-se que $f''(t)$ é negativo.

$$\begin{aligned}
f''(97) &= -0,6 \cdot (97) + 32 \\
&= -58,2 + 32 \\
&= -26,2.
\end{aligned}$$

Com isso verificamos que a função $f(t)$, dada por (2.23), possui um valor máximo local $t = 97$ em $]20, 120[$. E ainda, substituindo $t = 97$ na função (2.23) permite obter o extremante de f em $]20, 120[$:

$$\begin{aligned}
f(97) &= -0,1(97)^3 + 16(97)^2 - 280(97) + 58 \\
&= -91267,3 + 150544 - 27160 + 58 \\
&= 32175.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Sendo $t = 97$ um candidato a ponto de máximo da função (2.23) em $[20, 120]$, vamos compará-lo com os valores que f assume nos extremos do intervalo fechado $[20, 120]$, ou seja, os valores de $f(20)$ e $f(120)$.

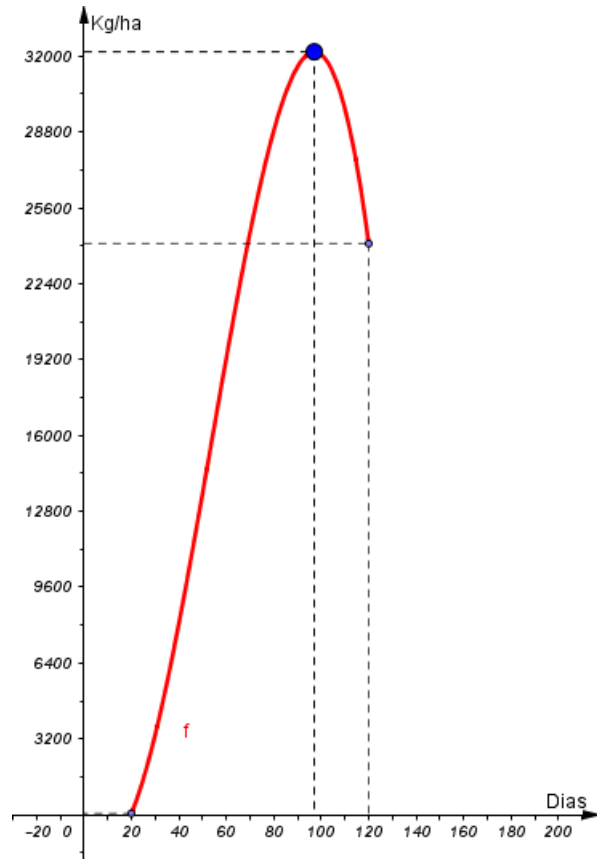
$$\begin{aligned}
f(20) &= -0,1(20)^3 + 16(20)^2 - 280(20) + 58 \\
&= -800 + 6400 - 5600 + 58 \\
&= 58.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
f(120) &= -0,1(120)^3 + 16(120)^2 - 280(120) + 58 \\
&= -172800 + 230400 - 33600 + 58 \\
&= 24058.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Comparando os valores de f em (2.26), (2.27) e (2.28), observamos que o maior valor que f assume é dado por $f(97) = 32175$. Assim, pelo Teorema 1.23, concluímos que a produção, em (kg/ha) , desta determinada espécie de milho é máxima quando a planta possui idade de 97 dias. E ainda que esta produção máxima é de 32175 kg/ha

(pode ser verificado graficamente através da Fig. 2.11).

Figura 2.11: Representação gráfica do valor máximo da função (2.23).



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Na Fig. 2.11 percebemos que o gráfico da função (2.23) no intervalo fechado $[20, 120]$, possui ponto de máximo em $t = 97$ dias e o valor máximo neste ponto é $f(97) = 32175 \text{ Kg/ha}$.

Capítulo 3

Considerações Finais

Através deste trabalho, mostramos que o estudo da otimização associada as áreas de atuação no agronegócio, propicia aos profissionais da área de Ciências Agrárias mecanismos de se obter o melhor resultado de uma situação estudada (como as condições para a produtividade máxima de uma lavoura; as ações necessárias para mitigar os custos no processo de produção de uma empresa; e o aperfeiçoamento de projetos de construções rurais minimizando os prejuízos envolvidos). Os profissionais que dominam as técnicas de otimização, utilizando-as em seu meio de atuação, com certeza se destacarão quanto a sua eficiência como profissional.

A intenção desta obra, foi motivar os alunos de graduação, ingressantes nos cursos nas áreas de Ciências Agrárias a estudar e identificar as aplicações dos conhecimentos do Cálculo em situações que podem ser experimentadas na sua prática profissional. Para isto, simulamos algumas situações que refletem parte da realidade que estes profissionais confrontarão.

A primeira situação, trata-se do projeto de construção de um piquete retangular, cujo o objetivo deste problema foi construir uma cerca eletrificada, utilizando materiais já existentes, de modo que a área cercada seja a maior possível. Para tal, o conhecimento sobre pontos de máximos, aplicados ao modelo matemático foi útil para determinar as dimensões do piquete em que a área deste é máxima. Este tipo de problema está presente na realidade dos agropecuaristas e pode ocasionar prejuízos a estes, quando decidem por executar o projeto sem uma análise prévia.

Na segunda aplicação, discutimos o problema de uma empresa quanto ao Controle do Estoque em sua linha de produção, identificamos a quantidade de itens que devem

ser fabricados por lote de produção, de modo a minimizar os custos envolvidos na fabricação e armazenagem dos itens.

Na última aplicação, modelamos uma função utilizando o polinômio de Taylor e aplicamos o Teorema de Weierstrass com a finalidade de demonstrar a melhor idade do milho em que a colheita atinge uma produção máxima. O uso deste processo permite que o agrônomo conheça o pico de produção da lavoura, dirimindo as incertezas relacionadas à colheita do milho e alavancando sua produtividade.

No contexto deste trabalho, mostramos que a prática da otimização pode ser um convite para a interdisciplinaridade. As técnicas do Cálculo integradas com os conhecimentos das Ciências Agrárias proporciona um ambiente interativo que promove uma construção do conhecimento dos discentes, preparando-os para o mercado de trabalho. Nesta perspectiva, este estudo pode servir como guia para a aplicação de outros problemas práticos inseridos nas disciplinas relacionadas ao setor agropecuário da Universidade Federal de Goiás - UFG.

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R. C.: *Modelling as a teaching-learning strategy*. FLM Publishing Association, 1994.
- [2] GAZZETTA, M. : *A modelagem como estratégia de aprendizagem da matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores*. Dissertação (Mestrado em Educação). UNESP, 1989.
- [3] BENNATON, J. F.: *Fermat o Início da História dos Problemas de Otimização*. Disponível em <http://www.lps.usp.br/neo/jocelyn/historia-jocelyn.htm>. Acesso em: 10 agosto 2017, última atualização em 2001.
- [4] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J.: *Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral*. v.8, Editora Atual, 2013.
- [5] CAJORI, F.: *Uma história da matemática*. Editora Ciência Moderna, 2007.
- [6] MORAES, H. L.: *Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT, 2013.
- [7] COSTA, M. A.: *Máximos e Mínimos: Uma abordagem para o ensino médio*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT, 2013.
- [8] ROCHA, A. M.: *Problemas de Otimização envolvendo a matemática do ensino médio*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT, 2013.
- [9] NUNES, E. B.: *Otimização Matemática: Cálculo dos Extremos de uma Função*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT, 2014.
- [10] SCHEFFER, N. F.: *Modelagem matemática: uma abordagem para o ensino-aprendizagem da matemática*. Revista da SBEM-RS, p. 11-15, 1999.
- [11] GUIDORIZZI, H. L.: *Um curso de cálculo*. vol. 1, 5 edição, Editora Grupo Gen-LTC, 2012.

- [12] LEITHOLD, L.: *Matemática aplicada à economia e administração*. Editora Harbra, 2001.
- [13] LIMA, E. L.: *Um Curso de Análise*. v.1, Projeto Euclides - IMPA. 2008.
- [14] FERREIRA, R. S.: *Matemática aplicada às ciências agrárias: análise de dados e modelos*. Editora UFV, 2014.
- [15] CEPEA - CENTRO DE ESTUDOS AVANÇADOS EM ECONOMIA APLICADA: . *PIB do agronegócio brasileiro. Comentários de setembro de 2016*. Disponível em: <http://www.cepea.esalq.usp.br/br/pib-do-agronegocio-brasileiro.aspx>. Acesso em: 18 agosto 2017.
- [16] CONAB - COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO: *Acompanhamento da safra brasileira de grãos*. v. 2 - Safra 2014/15, n. 5, Quinto Levantamento. Brasília: CONAB, 2015.
- [17] DA SILVA, F. B.; CHAVEIRO, E. F.: *Seguindo o Boi e Descobrendo o Território - Reflexão socioterritorial da pecuária bovina no município de Jataí-Go*. In: VII Congresso Brasileiros de Geógrafos, 2014, Espírito Santo. Anais do VII CBG. Associação dos Geógrafos Brasileiros. 2014.
- [18] FAO - FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATIONS OF THE UNITED NATIONS: *Perspectivas agrícolas 2015-2024*. Disponível em: <http://www.agri-outlook.org/>. Acesso em: 19 agosto 2017.
- [19] BEZERRA, A. R. G. ET AL: *Importância econômica*. In: *SEDIYAMA, T.; SILVA, F.; BORÉM, A. (Org.). Soja: do plantio à colheita*. Viçosa: Editora UFV, 2015.
- [20] BEZERRA, L. M. C.; CLEPS JR., J.: *O desenvolvimento agrícola da região Centro-Oeste e as transformações no espaço agrário do estado de Goiás*. Revista Caminhos de Geografia, v. 2, n. 12, p. 29-49, 2004.
- [21] DA SILVA, F. C. A.: *O agronegócio e a produção territorial recente em Goiás*. Periódico - Sociedade e Território, V. 27, n° 3, p. 145-163, 2015.
- [22] VALE, N. K. A.: *Trajatória da produtividade da soja em função da variabilidade das chuvas no estado de Goiás*. Dissertação (Mestrado em Agronegócio) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.
- [23] PORTELA, J. N.; PEDREIRA, C. G. S.; BRAGA, G. J.: *Demografia e densidade de perfilhos de capim-braquiária sob pastejo em lotação intermitente*. Revista Pesquisa Agropecuária Brasileira, v.46, n° 3, p.315-322, 2011.

- [24] DO ESPÍRITO, A. C. S.; CARDOSO, L. C. S.; GRISE, M. M.: *Custos de implantação de cerca convencional e elétrica na Amazônia*. Embrapa Amazônia Oriental, 2015.
- [25] DANDARO, F.; MARTELLO, L.L.: *Planejamento e controle de estoque nas organizações*. Revista Gestão Industrial, v.11, nº 2, 2015.
- [26] FENILI, R. R.; FERNANDES, C. C. C.: *Gestão de Materiais*. ENAP Didáticos, 2015.