UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

(Re)construção do Conjunto dos Números Racionais: Uma proposta Pedagógica sob a Luz da Aprendizagem Significativa

Genilce Ferreira Oliveira

MANAUS
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Genilce Ferreira Oliveira

(RE)CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA SOB A LUZ DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva

MANAUS
2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Genilce Ferreira
O48((Re)construção do Conjunto dos Números Racionais: Uma proposta Pedagógica sob a Luz da Aprendizagem Significativa / Genilce Ferreira Oliveira. 2017
79 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Roberto Cristóvão Mesquita Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Mapas Conceituais. 2. Aprendizagem Significativa. 3. Números Racionais. 4. Ensino de Matemática. I. Silva, Roberto Cristóvão Mesquita II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

GENILCE FERREIRA OLIVEIRA

(RE)CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA SOB A LUZ DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matematica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matematica.

Aprovado em 28 de setembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva
Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro

Prof. Dr. Max Ferreira
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

Como não poderia deixar de ser, meu primeiro e principal agradecimento é a Deus, por ter me dado resistência e serenidade para enfrentar mais esse desafio.

Agradeço ao meu marido e melhor amigo Disney Douglas, presente que a matemática me concedeu. Sem seu apoio incondicional esse sonho não seria possível. Ele que é meu grande incentivador. E nos momentos em que o desânimo chegava não me deixou desistir. Obrigada, Amor!

Ao meu grande amigo e irmão de coração Domingos Anselmo, pela grande contribuição ao longo de todo esse trabalho e por ter ajudado muito na escolha do tema. Desde 1991, Disney e Domingos são verdadeiras colunas em minha vida. Agradeço muito a Deus por tê-los ao meu lado.

Aos meus filhos André e Vilany e à minha neta Andressa que me inspiram a ser melhor a cada dia, por todo amor que me dedicam e por terem compreendido meus momentos de angústia e a minha ausência durante o curso.

Aos meus pais por sempre acreditarem em meu potencial.

Aos professores do Profmat pela confiança que depositaram na turma de 2014 e em especial, ao professor Alfredo Wagner que muito nos motiva a estudar e aprender mais e mais matemática.

Aos amigos de turma Maurício, Felipe, Audemir, André, Clício e Celiomar pelos momentos maravilhosos de estudo, de luta, de encorajamento. Foram dias de muito aprendizado, bom humor e companheirismo.

À CAPES por proporcionar a possibilidade de avançar nos estudos quando dispomos de pouco tempo disponível em função da necessidade de lutarmos pela nossa subsistência.

Quero também em memória homenagear o colega de turma Eraldo que nos deixou precocemente. Ele que tanto nos ajudou com o seu cafezinho para nos manter atentos aos estudos.

Ao meu orientador, Roberto Cristóvão Mesquita Silva, pelo incentivo, pelo apoio, por acreditar em minha capacidade, pela competência e por todo auxílio nesse trabalho.

RESUMO

O tema da dissertação é uma proposta metodológica para o ensino da construção dos números racionais, no que diz respeito às operações e suas principais propriedades, baseado na Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS) de David Ausubel, que muito contribuiu para o desenvolvimento deste modelo teórico. No Capítulo 1, abordaremos a teoria de David Ausubel, que servirá de âncora para a constituição dos números racionais visando uma melhor abordagem e, consequentemente, um melhor resultado no ensino/aprendizagem deste objeto matemático na escola básica. Para tanto, vamos abordar o conceito de TAS e em seguida as suas principais características, que servirão como suporte na implementação da (Re) construção dos números racionais. Nos Capítulos 2 e 3, apresentaremos os Conjuntos dos Números Inteiros e o dos Números Racionais com toda fundamentação matemática segundo à luz das estruturas algébricas. Esses capítulos nortearão os professores da educação básica e também os alunos de graduação, pois poderão perceber neste trabalho que nossa proposta não desconsidera o rigor matemático dos conjuntos. Enfim, no capítulo 4 teremos a construção dos números racionais bem como suas operações e propriedades aplicando a TAS e, dessa forma, simplificando o ensino deste objeto matemático, o que estamos denominando de (Re) construção dos números racionais.

Palavras-chave: Mapas Conceituais, Aprendizagem Significativa , Números Racionais, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The subject of the dissertation is a methodological proposal for the teaching of the construction of rational numbers, with respect to the operations and their main properties, based on David Ausubel's Theory of Significant Learning (TSL), which greatly contributed to the development of this theoretical model. In Chapter 1, we will approach the theory of David Ausubel, which will serve as an anchor for the constitution of rational numbers aiming at a better approach and, consequently, a better result in the teaching/learning of this mathematical object in basic school. In order to do so, we will approach the concept of TSL and then its main characteristics, which will serve as support in the implementation of (Re)construction of rational numbers. In Chapters 2 and 3, we will present the Sets of Whole Numbers and that of Rational Numbers with all mathematical reasoning according to the light of algebraic structures. These chapters will guide the teachers of basic education as well as the undergraduate students, as they may notice in this work that our proposal does not disregard the mathematical rigor of the sets. Finally, in Chapter 4, we will construct the rational numbers as well as their operations and properties by applying the TAL and thus simplifying the teaching of this mathematical object, what we are calling the (Re)construction of rational numbers.

Keywords: Conceptual Maps, Significant Learning, Rational Numbers, Math Instruction.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}^+_*$	Conjunto dos números inteiros não nulos e não negativos.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\cong$	Aproximado.
$\sim$	Semelhante.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\cap$	Interseção.
$\cup$	União.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.
$/$	Conjunto quociente.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Teoria da Aprendizagem Significativa - TAS

Neste capítulo, abordaremos sobre a teoria de David Ausubel, que posteriormente usaremos na constituição dos números racionais visando uma melhor abordagem no que diz respeito ao ensino aprendizagem deste objeto matemático na escola básica. Para tanto, vamos abordar o conceito de TAS em seguida suas principais características, que irÃ£o servir de suporte na implementação do ensino/aprendizagem dos números racionais. As principais referências desta seção são Moreira [5] e Pelizzari [6].

A concepção de ensino e aprendizagem de Ausubel segue na linha oposta à dos behavioristas. Para ele, aprender significativamente é ampliar e re-configurar ideias já existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar e acessar novos conteúdos. Para Moreira [5] a aprendizagem significativa é aquela em que novas ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe, isto é, os conhecimentos prévios.

Ausubel chamava esse conhecimento prévio de **subsunçor** ou **ideia âncora**, o qual não precisa necessariamente ser um conceito formalizado, muitas vezes é uma ideia, uma imagem, um símbolo, um contexto. Isto é, um subsunçor é todo e qualquer conhecimento relevante que permita ao aluno relacionar um novo conhecimento que lhe for apresentado independente da forma como isso ocorra, seja por descoberta ou por apresentação, dando maior estabilidade cognitiva para que a aprendizagem seja significativa, podendo ser utilizada posteriormente como um Subsunçor para um novo aprendizado.

Neste trabalho um dos subsunçores importantes, tanto para o aluno (do Fundamental II e Médio), quanto para os professores destes alunos é o conjunto dos números inteiros, que será tratado no Capítulo 2 em duas abordagens. A primeira abordagem será feita na forma usual, e deverá ser trabalhada pelos professores do ensino básico em sala de aula. Já a segunda abordagem será feita a luz da Estrutura Algébrica, e é destinada para os professores da escola básica, alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Pois acreditamos que o domínio deste Subsunçor é de fundamental importância para a construção dos números racionais, tanto matematicamente quando pedagogicamente.

De acordo com TAS, uma vez que o aluno ou o professor possua como subsunçor o objeto matemático denominado de números inteiros em toda a sua plenitude, isto é, sua definição, operações e propriedades, ele estará pronto para receber o novo conhecimento matemático que neste trabalho será os números racionais.

No que diz respeito a TAS, a estrutura cognitiva é um conjunto hierárquico de subsunçores inter-relacionados que podem ser caracterizados principalmente pela diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

Ao processo que agrega conhecimento sucessivas vezes em que ocorre essa construção de subsunçores, é dado o nome de diferenciação progressiva. O aluno descobre que existem os números fracionários modificando desta forma a estrutura cognitiva do mesmo, de modo que ele transforma o conhecimento da existência única dos números inteiros e passa a entender que existem também os números racionais.

Uma vez descoberto a existência dos números racionais é hora de realizar as reconciliações das diferenças dos conjuntos e de assimilar o que é comum aos dois, essa segunda parte do processo denomina-se reconciliação integradora. Reconciliação integradora é o processo onde o indivíduo que aprende reorganiza a estrutura de modo a eliminar as repetições, absorver novos significados e desfazer as inconsistências que ocorrem durante a aprendizagem.

Quando aprendemos de modo significativo é importante distinguir os novos significados adquiridos para reconhecer as diferenças, assim como também é importante identificar os conhecimentos prévios para que a estrutura compreenda o que foi acrescentado. Dessa forma é necessário que os processos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora sejam simultâneos, como são, mesmo possuindo aparentemente intensidade diferente.

Embora para Ausubel o conhecimento prévio seja algo indispensável, nem sempre quer dizer que esse subsunçor seja correto, por exemplo os alunos no ensino fundamental aprendem que não existem raízes quadradas de números negativos, e essa é uma meia verdade na qual sua veracidade depende do conjunto que est'a sendo trabalhado, e quando chegam no ensino médio aprendem que existe solução para as raízes quadradas dentro do conjunto dos números complexos.

Apesar da importância do subsunçor, ele sozinho não é suficiente para que haja um aprendizado significativo. É essencial que haja um material de aprendizagem potencialmente significativo, assim como a disposição para aprendizagem por parte do que aprende.

Para que um material seja potencialmente significativo é necessário que ele se relacione com um conhecimento que esteja presente na estrutura cognitiva do aluno, possibilitando ao novo conhecimento se ancorar na estrutura cognitiva existente e se torne uma aprendizagem significativa. Para que o material seja significativo é importante dar significado a ele, por isso dizemos que o material deve ser potencialmente significativo, e não significativo, mas pode tornar-se significativo através da interação, realizada pelo mediador, do material com o aprendizado.

A predisposição por parte do que aprende geralmente é mais difícil de ser alcançada que a primeira. O desejo de querer relacionar os novos conhecimentos à estrutura cognitiva deve independer de ter afinidade com a disciplina. Por algum motivo deve diferenciar e integrar os novos conhecimentos à estrutura, e dessa forma modificá-la, enriquecê-la, elaborá-la e dar significado a esses conhecimentos, mesmo que seja apenas para ter boas notas nas avaliações.

Existe também a situação em que o aluno possui um enorme desejo de aprender, mas não existe o conhecimento prévio necessário na sua estrutura cognitiva, o que nos remete novamente a necessidade de um material potencialmente significativo, deixando ainda mais claro, que tanto o material lógico que possibilite o novo conhecimento se relacionar com a estrutura cognitiva já existente quanto à disposição para aprender são condições imprescindíveis para o aprendizado.

Ao pensar em aprendizagem significativa como transformação de conhecimento, fica a pergunta de como surgem os primeiros subsunçores? Os primeiros subsunçores surgem ainda na infância, através de processos abstratos, de descobrimento, representação em diversos encontros do sujeito com objetos, eventos. Um exemplo é uma criança quando ganha uma bola, ela é ensinada que deve brincar com a bola chutando. Posteriormente ao encontrar com outro objeto redondo a criança tende a chutar esse outro objeto como se fosse uma bola. Ao aprender a falar ela relaciona as cosias redondas ao nome bola, e mesmo que olhe para um limão ou um ovo, pela característica arredondada irá chamar de bola, ao se desenvolver a criança modifica o subsunçor bola, e aprende que existem outras coisas redondas além da bola.

Na fase pré-escolar, a criança precisa inicialmente de um material concreto para formar os primeiros conhecimentos através da mediação de adultos. Gradativamente a função dos subsunçores construídos são assimilados e inicia uma mediação pessoal, iniciando-se uma concordância de significados, no contexto de um conhecimento delimitado.

No momento em que acontece a mediação pessoal, a assimilação ausubeliana é o processo em que o novo conhecimento interage de forma não arbitrária com algum conhecimento relevante, já mencionado como aprendizagem significativa. Quando acontece a interação, dizemos que ocorreu a assimilação do novo conhecimento.

Em alguns casos, talvez na maioria, o que aprende não dispõe de subsunçores que permitam a ancoragem de um novo conhecimento, nessa situação Ausubel propõe o uso do que chama de organizadores prévios. Organizadores prévios são recursos utilizados para que o aprendiz possa ancorar o novo conhecimento. Pode ser apresentado na forma de um filme, uma demonstração, uma aula que antecede um conjunto de outras aulas.

Recomenda-se o uso de material expositivo no caso da Matemática, uma situação problema, por exemplo, para que sirva de ancoradouro para o novo conhecimento se o aluno não estiver familiarizado com o material e o mesmo não deter subsunçores. Entretanto, se o material for familiar, recomenda-se uma comparação que colabore para que o aluno integre o novo conhecimento à sua estrutura, distinguindo dos conhecimentos já incorporados a estrutura cognitiva, os quais na sua essência são diferentes.

Os alunos tendem a não relacionar os novos conhecimentos com os subsunçores, daí a importância de sempre utilizar os organizadores prévios permitindo ao que aprende relacionar os conhecimentos, transformando a estrutura cognitiva e obtendo uma aprendizagem significativa. Como vimos anteriormente, se apresentarmos o conjunto dos números racionais, sem mencionarmos o conjunto dos números inteiros, os alunos não farão a ancoragem, e acreditarão que são duas coisas distintas, não permitindo que os conhecimentos interajam.

Nas escolas infelizmente, vimos outra aprendizagem praticamente memorística e sem significado, é a conhecida "decoreba", utilizada no momento da prova, sendo esquecida logo após. Essa aprendizagem é denominada aprendizagem mecânica.

Engana-se quem acredita que ao deter uma aprendizagem mecânica, possuirá uma aprendizagem significativa.

É importante salientar que a aprendizagem significativa é um processo contínuo, de interação e rupturas. Não é suficiente uma aula bem ministrada e um aluno aplicado para uma aprendizagem significativa. Para que haja significado é necessário domínio de situações-problema gradativamente difíceis que darão sentido aos conceitos.

A aprendizagem pode ocorrer por descoberta ou por recepção. Muitas pessoas relacionam aprendizagem por recepção com passividade. Muito pelo contrário, a aprendizagem por recepção, que pode ocorrer através de um livro, de um filme, de uma experiência em laboratório, uma aula, requer muito trabalho para interagir e relacionar os novos conceitos com os subsunçores, envolvendo os processos de diferenciação progressiva e reconciliação interativa.

A aprendizagem por descoberta, muitas vezes associada a aprendizagem significativa, implica que o indivíduo primeiro descubra o que irá aprender. Uma vez descoberto, exige as mesmas condições para aprender.

Na visão de Ausubel o conhecimento prévio é a variável mais importante para a aprendizagem significativa de novos conhecimentos. Desta forma, isolar uma única variável neste processo a que mais influencia nas novas aprendizagens, certamente seria o conhecimento prévio. Mas afinal de contas, como surgem os subsunçores?

Como já foi dito a aprendizagem significativa pressupõe a existência de subsunçores, conceitos prévios que o aprendiz possue em sua estrutura cognitiva e vão estabelecer uma relação com o conteúdo novo. Uma possibilidade para o surgimento dos subsunçores, pode se dar pela aprendizagem mecânica. Isto é, imaginem que uma pessoa não conhece nada do objeto matemática, " Função Quadrática " a ser estudado, não possui ponto de ancoragem. Neste caso ele terá que buscar informação deste objeto ou na proximidade dele, e para tanto terá de ler, ver vídeo aula, perguntar para outros, estudar os exercícios resolvidos de outros livros mesmo que fique com muitas dúvidas, memorizar pedaços deste conteúdo, entre outras coisas.

Desta forma, em algum momento este indivíduo vai observar que já existem indícios do conteúdo abordado ou a ser abordado. Assim o aprendiz observa que já possui uma estrutura mínima a qual Ausubel denota por Subsunçor.

Capítulo 2

Conjunto dos Números Inteiros

Neste capítulo, vamos apresentar o Conjunto dos Números Inteiros aqui representado pela letra $\mathbb{Z}$, em dois momentos. No primeiro momento se dará na seção 2.1 onde apresentaremos o conjunto $\mathbb{Z}$ na forma usual, isto é, da maneira que é apresentado na Educação Básica, para melhor familiarizar o leitor e ao mesmo tempo dar uma ideia do que iremos trabalhar na seção 2.2. Já na seção 2.2, faremos a construção formal do conjunto $\mathbb{Z}$ nas Estruturas Algébrica (para uso do Matemático/Professor de Matemática ou simpatizante da Matemática). E finalmente, na seção 2.3 faremos as conclusões e construções finais, nas quais vamos construir a relação de ordem dos números inteiros, apresentar algumas propriedades e definir o módulo de um número inteiro, e ainda na seção em questão vamos construir a imersão do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$.

Outro fato importante é que vamos admitir que o leitor já possua os conhecimentos prévios para construir os números inteiros. Estamos falando do conjunto dos números naturais, no que diz respeito à sua construção fazendo uso dos Axiomas de Peano e suas propriedades.

Nas três seções, as principais referências são Hefez [2] e Hygino [3].

2.1 A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS NA FORMA AXIOMÁTICA

Nesta seção vamos apresentar o conjunto dos números inteiros na forma axiomática, isto é, da forma como geralmente é apresentado na Escola Básica. Acreditamos na importância e na relevância desta forma de apresentação, para os alunos da escola básica, todavia o professor precisa dominar as entrelinhas desta construção, pois tal entendimento pode fornecer ideias pedagógicas para o Ensino/Aprendizado do Conjunto dos Números Inteiros e futuramente o conjunto dos números racionais. Segundo a TAS, esta apresentação dos números inteiros se caracteriza como subsunçor para o Professor de Matemática da Escola Básica no que se refere a construção formal que será feita na seção 2.2. Sem mais delongas, vamos à construção de modo axiomático do referido conjunto.

Definição 2.1. *O conjunto dos números inteiros, será denotado pelo símbolo* $\mathbb{Z}$ *e aqui definido por* $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Neste conjunto são definidas duas operações binárias, a saber, chamadas de adição e multiplicação, definidas respectivamente por:

$$\begin{array}{rl} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ & (x, y) \mapsto x + y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \cdot : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ & (x, y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$

O conjunto $\mathbb{Z}$, munido das operações de adição e multiplicação, gozam dos seguintes axiomas:

i) Associativa na adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tem-se:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

ii) Comutativa na adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tem-se:

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

iii) Existência dos neutros da adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo $x \in \mathbb{Z}$, existem $0 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x + 0 = x \quad \text{e} \quad x \cdot 1 = x$$

iv) Existência do inverso da adição, isto é, para cada $x \in \mathbb{Z}$, existe $-x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (-x) = 0$.

v) Distributividade do produto em relação à adição, isto é, para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

vi) $\mathbb{Z}$ não tem divisores de zero, isto é, se $x, y, z \in \mathbb{Z}$ com $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Desta forma, o conjunto $\mathbb{Z}$ munido da adição e multiplicação sendo um anel comutativo com identidade sem divisor de zero, dá a ele o direito de ser chamado de Domínio de Integridade.

Um fato importante em $\mathbb{Z}$, é a relação de ordem. A qual trataremos a seguir:

Para começar, vamos observar que muitas propriedades em $\mathbb{Z}$ se originam do fato de as escrevermos na ordem usual ..., $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, ...

Tal ordenação pode ser expressa pela relação $x < y$, onde se lê : x é menor que y. De modo geral podemos pensar que tal relação, $x < y$ pode ser interpretada como sendo $0 < y - x$, o que nos leva a dizer que $y - x$ é um inteiro positivo.

Desta forma podemos definir um conjunto $P \subset \mathbb{Z}$, tal que $P = \{x \in \mathbb{Z};\ x > 0\}$. O que nos leva aos seguintes axiomas:

i) $\forall\, x, y \in P$ tem – se $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$ "Fechamento";

ii) $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ uma e somente uma das alternativas seria verdadeira: ou $x \in P$ ou $x = 0$ ou $-x \in P$ "Tricotomia".

Como consequência imediata deste último axioma, temos que $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$ apenas uma das afirmações seria verdadeira:

ou $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$

A seguir vamos enunciar outras três relações de ordem em $\mathbb{Z}$, as quais serão nomenclaturas dadas por $\leq$ "lê – se: menor ou igual" , $>$ "lê – se: maior" e $\geq$" lê – se: maior ou igual" . Respectivamente elas me dizem que $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$ teremos:

I) $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ ou $x = y$ "lê – se: x menor ou igual y";

II) $x > y \Leftrightarrow y < x$ "lê – se: x maior que y";

III) $x \geq y \Leftrightarrow x > y$ ou $x = y$ "lê – se: x maior ou igual y".

A ordenação em $\mathbb{Z}$ é de fundamental importância na ordenação de outros conjuntos, como por exemplo, o conjunto dos números racionais. Desta forma, iremos enunciar sem demonstração uma proposição, somente a título de informação, algumas propriedades que são utilizadas em resolução de exercícios e compreensão de outras proposições importantes do conjunto dos números inteiros.

Proposição 2.1. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tem-se:*

i) $x^2 \geq 0$ *e* $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$

iii) Se $x < y$, então $x + z < y + z$

iv) Se $x < y$, então $x \cdot z < y \cdot z$, $z > 0$

v) Se $x < y$, então $x \cdot z > y \cdot z$, $z < 0$

2.2 A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS SOB A LUZ DA ÁLGEBRA

.

Nesta seção iremos definir uma relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mostrar que tal relação, define uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, vamos construir o conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$ e apartir dele vamos definir o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Definiremos aqui duas operações em

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}$ e mostraremos que o mesmo possui uma cópia algébrica do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Para tanto, vamos dar início aos trabalhos com a definição da relação de equivalência em $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ = \{(x,y)\,;\ x,y\in\mathbb{N}\}$.

Proposição 2.2. *A relação $\sim$ em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida por $(a\,,\,b)\sim(c\,,\,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Para provar tal proposição , basta mostrar que a relação $\sim$ acima definida é reflexiva, simétrica e transitiva, como mostrado a seguir para todo $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

i) $(a\,,\,b)\sim(a\,,\,b)\Leftrightarrow a+b=b+a$. Onde se conclui que a relação $\sim$ é reflexiva.

ii) $(a\,,\,b)\sim(c\,,\,d)\Leftrightarrow a+d=b+c\Leftrightarrow b+c=a+d\Leftrightarrow c+b=d+a\Leftrightarrow(c,d)\sim(a,b)$, onde se conclui que a relação $\sim$ é simétrica.

iii) $(a\,,\,b)\sim(c\,,\,d)$ e $(c\,,\,d)\sim(e\,,\,f)\Leftrightarrow a+d=b+c$ e $c+f=d+e$.

Somando e em ambos os lados da equação, obtem-se $a+d+e=b+c+e$. Substituindo $c+f=d+e$, teremos $a+c+f=b+c+e \ \Leftrightarrow \ a+f+c=b+e+c \Leftrightarrow \ a+f=b+e \ \Rightarrow$ $(a\,,\,b)\sim(e\,,\,f)$. Onde se conclui que a relação $\sim$ é transitiva.

□

Reflexão 2.1. *Sabendo que $(a\,,\,b)\sim(a\,,\,b)\Leftrightarrow a+b=b+a$, podemos de forma intuitiva, considerar $a+d=b+c\Leftrightarrow a-b=c-d$. E desta forma, poderíamos pensar em redefinir intuitivamente a relação de equivalência $(a\,,\,b)\sim(c\,,\,d)\Leftrightarrow a-b=c-d$, isto é, dois pares ordenados são equivalentes se, e somente se, as diferenças das coordenadas dos pares na mesma ordem, coincidem.*

Definição 2.2. *Denotaremos por $\overline{(a\,,\,b)}$ a classe de equivalência do par ordenado $(a\,,\,b)$ em relação à $\sim$, como sendo*

$$\overline{(a\,,\,b)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ (x,y)\sim(a,b)\}$$

Definição 2.3. *A coleção de todas as classes de equivalências $\overline{(a\,,\,b)}$ define um conjunto, o qual chamaremos de conjunto quociente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}$, isto é, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}=\left\{\overline{(a\,,\,b)}\,;\ (a\,,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}$.*

Observação 2.1. *Vamos assumir que conjunto quociente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}$ aqui será identificado como sendo o conjunto dos números inteiros o qual representaremos por $\mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}=\left\{\overline{(a\,,\,b)}\,;\ (a\,,b)\in\times\right\}$.*

Observação 2.2. *Se $\overline{(a\,,\,b)}$, $\overline{(c\,,\,d)}\in\mathbb{Z}$, com $\overline{(a\,,\,b)}=\overline{(c\,,\,d)}\Leftrightarrow(a\,,\,b)\sim(c\,,\,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$, isto é, $\overline{(a\,,\,b)}=\overline{(c\,,\,d)}\ \Leftrightarrow\ a+d=b+c$.*

Reflexão 2.2. *Voltado à reflexão 2.1, podemos de modo ingênuo pensar que $\overline{(a\,,\,b)}$ pode ser representado em algum momento por $a-b$, e que $\overline{(c\,,\,d)}$ pode ser representado em algum momento por $c-d$. Desta forma, poderíamos pensar na seguinte conta $(a-b)+(c-d)$, a fim de estabelecer a seguinte identidade $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.*

Tal identidade nos leva a definir a definição de adição em $\mathbb{Z}$, como faremos a seguir:

Definição 2.4. *Para todo par* $\overline{(a\,,\,b)}\;,\;\overline{(c\,,\,d)} \in \mathbb{Z}$ *definimos a adição por* $\overline{(a\,,\,b)}\;+\;\overline{(c\,,\,d)}\;:=\overline{(a\,+c,\,b+d)}\,.$

A proposição a seguir vai nos garantir que a adição, não depende dos representantes das classes de equivalência.

Proposição 2.3. *Se* $\overline{(a\,,\,b)}\;,\;\overline{(c\,,\,d)}\,,\overline{(x\,,\,y)}\;,\;\overline{(z\,,\,w)}\;\in\mathbb{Z}$ *, com* $\overline{(a\,,\,b)}\;=\overline{(x\,,\,y)}$ *e* $\overline{(c\,,\,d)}\;=\overline{(z\,,\,w)}$*, então* $\overline{(a\,,\,b)}\;+\;\overline{(c\,,\,d)}=\;\overline{(x\,,\,y)}\;+\;\overline{(z\,,\,w)}\,.$

Demonstração. Por hipótese $\overline{(a,b)}=\overline{(x,y)}$ e $\overline{(c,d)}=\overline{(z,w)}$.
Sendo assim, teremos respectivamente que $a+y=b+x$ e $c+w=d+z$.
Somando $a+y=b+x$ e $c+w=d+z$, teremos:
$(a+y)\;+(c+w)\;=\;(b+x)+(d+z)\;\Rightarrow\;(a+c)\;+(y+w)\;=\;(b\;+\;d)+(x+z)\;\Rightarrow\;\overline{(a+c,b+d)}=\overline{(x+z,y+w)}\Rightarrow\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(x,y)}+\overline{(z,w)}\,.$

Desta forma, podemos concluir que a adição independe da escolha de classes, logo a adição está bem definida.

□

Dando continuidade a nossa construção, iremos definir a multiplicação no conjunto dos número inteiros a seguir.

Definição 2.5. *Para todo par* $\overline{(a\,,\,b)}\;,\;\overline{(c\,,\,d)}\;\;\in\mathbb{Z}$ *vamos definir a multiplicação em* $\mathbb{Z}$ *por* $\overline{(a\,,\,b)}\;\cdot\;\overline{(c,\,d)}\;:=\overline{(a\;\cdot c+b\cdot d\;,\;\;a\cdot d+b\cdot c)}.$

Reflexão 2.3. *A motivação para que fosse possível a multiplicação em* $\mathbb{Z}$*, se dá pelo fato que* $\overline{(a\,,\,b)}$ *pode ser representado em algum momento por* $a-b$*, e que* $\overline{(c\,,\,d)}$ *pode ser representado em algum momento por* $c-d$*. Desta forma, poderíamos pensar na seguinte conta* $(a-b)\cdot(c-d)$*, a fim de estabelecer a seguinte identidade*

$$(a-b)\cdot(c-d)=(a\;\cdot c+b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c)\,.$$

A proposição a seguir vai nos garantir que a multiplicação, não depende dos representantes das classes de equivalência.

Proposição 2.4. *Se* $\overline{(a\,,\,b)}\;,\;\overline{(c\,,\,d)}\,,\overline{(x\,,\,y)}\;,\;\overline{(z\,,\,w)}\;\in\mathbb{Z}$ *, com* $\overline{(a\,,\,b)}\;=\overline{(x\,,\,y)}$ *e* $\overline{(c\,,\,d)}\;=\overline{(z\,,\,w)}$*, então* $\overline{(a\,,\,b)}\;\cdot\;\overline{(c\,,\,d)}=\;\overline{(x\,,\,y)}\;\cdot\;\overline{(z\,,\,w)}\,.$

Demonstração. Por hipótese $\overline{(a\,,\,b)}\;=\;\overline{(x\,,\,y)}$, logo $a\;+\;y\;=\;b\;+\;x$. Multiplicando a identidade $a\;+\;y\;=\;b\;+\;x$ por c e d, teríamos respectivamente: $ca\;+\;cy\;=\;cb\;+\;cx$ e

$$da\;+\;dy\;=\;db\;+\;dx$$

Sendo assim, ao somar $(ca\ +\ cy) + (db\ +\ dx)$ vamos obter: $(ca\ +\ cy) + (db\ +\ dx) = (cb\ +\ cx){+}(da\ +\ dy) \Rightarrow (ac\ +\ bd)\,{+}(xd\ +\ yc) = (ad\ +\ bc){+}(xc\ +\ yd) \Rightarrow \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(xc+yd, xd+yc)} \Rightarrow \overline{(a,b)}\ \cdot\ \overline{(c,d)} = \overline{(x,y)}\ \cdot\ \overline{(c,d)}$

Ainda por hipótese temos que $\overline{(c\,,\,d)} = \overline{(z\,,\,w)}$, logo $c\ +\ w\ =\ d\ +\ z$.

Multiplicando a identidade $c\ +\ w\ =\ d\ +\ z$ por x e y, teríamos respectivamente:

$xc\ + x\,w\ =\ xd\ +\ xz$ e $yc\ +\ yw\ =\ yd\ +\ yz$

Sendo assim, ao somar $(xc\ + x\,w\,) + (yd\ + yz)$ vamos obter: $(xc + xw\,) + (yd + yz) = (xd + xz) + (yc + yw) \Rightarrow (xc + yd) + (xw + yz) = (xd + yc) + (xz + yw) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{(xc + yd, xd + yc)} = \overline{(xz + yw, xw, +yz)} \Rightarrow \overline{(x,y)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(z,w)}$

De $\overline{(a,b)}\ \cdot\ \overline{(c,d)} = \overline{(x,y)}\ \cdot\ \overline{(c,d)}$ e $\overline{(x,y)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(z,w)}$, temos que

$$\overline{(a,b)}\ \cdot\ \overline{(c,d)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(z,w)}.$$

Desta forma, podemos concluir que a multiplicação independe da escolha de classes, logo a multiplicação está bem definida.

□

Proposição 2.5. *O conjunto munido das operações de adição e multiplicação dadas nas definições 2.4 e 2.5 , satisfaz as seguintes propriedades:*

Com relação à adição:

A1. Associativa

A2. Comutativa

A3. Existência do Neutro

A4. Cancelamento

A5. Existência do Simétrico

Com relação à multiplicação:

M1. Associativa

M2. Comutativa

M3. Existência do Neutro

M4. Distributividade da multiplicação em relação à adição

M5. Cancelamento

Observação 2.3. *Em algum momento das demonstrações das propriedades, iremos utilizar propriedades dos números inteiros que não fazem parte deste texto, pois acreditamos que o leitor está familiarizado com a mesma. Todavia, vamos citar quando necessário a propriedade usada.*

Demonstração de A1. Se $x = \overline{(a\,,\,b)}\ ,\ y = \overline{(c\,,\,d)}\,, z = \ \overline{(e\ ,\ f)} \quad \in \mathbb{Z}$, então

$$(x\ +\ y)\ +\ z =\ x\ +\ (y\ +\ z)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(x\ +\ y)\ +\ z\ &=\ \left(\overline{(a\,,\,b)}\ +\ \overline{(c\,,\,d)}\right)\ +\ \overline{(e\,,\,f)}\\
&=\ \overline{(a+c\,,\,b+d)}\ +\ \overline{(e\,,\,f)}\\
&=\ \overline{((a+c)+e\,,\,(b+d)+f)}\\
&=\ \overline{(a+(c+e)\ ,\,b+(d+f))}\\
&=\ \overline{(a,b)}\ +\ \overline{(c+e,d+f)}\\
&=\ \overline{(a,b)}\ +\left(\overline{(c,d)}\ +\ \overline{(e,f)}\right)\\
&=\ x+(y+z)
\end{aligned}$$

□

Demosntarção de A2. Se $x = \overline{(a\,,\,b)}\ , y = \overline{(c\,,\,d)} \quad \in \mathbb{Z}$, então $x\ +\ y\ =\ \ y\ +\ x$

De fato,

$$\begin{aligned}
x+y\ &=\ \overline{(a\,,\,b)}\ +\ \overline{(c\,,\,d)}\\
&=\ \overline{(a+c\,,\,b+d)}\\
&=\ \overline{(c+a\,,\,d+b)}\\
&=\ \overline{(c\,,\,d)}\ +\ \overline{(a\,,\,b)}\\
&=\ y+x
\end{aligned}$$

□

Demonstração de A3. Para todo $x = \overline{(a\,,\,b)} \quad \in \mathbb{Z}$, existe $0 = \overline{(x\,,\,y)} \quad \in \mathbb{Z}$ tal que $x +\ 0\ =\ x$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
x+0=x \ &\Rightarrow\ \overline{(a\,,\,b)} + \overline{(x\,,\,y)} = \overline{(a\,,\,b)} \\
&\Rightarrow\ \overline{(a+x\,,\,b+y)} = \overline{(a\,,\,b)} \\
&\Rightarrow\ (a+x)+b=(b+y)+a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b+y)+a \ &\Rightarrow\ a+(x+b)=b+(y+a) \\
&\Rightarrow\ a+(b+x)=b+(a+y) \\
&\Rightarrow\ (a+b)+x=(b+a)+y \\
&\Rightarrow\ x=y \\
&\Leftrightarrow\ x+0=y+0 \\
&\Rightarrow\ \overline{(x,y)}=\overline{(0,0)}
\end{aligned}
$$

.

Pelo exposto, basta tomar $0=\overline{(0\,,\,0)}$.

□

Demonstração de A4. Se $x=\overline{(a\,,\,b)}, y=\overline{(c\,,\,d)}, z=\overline{(e\,,\,f)} \in \mathbb{Z}$, com $x+y=x+z$, então $y=z$.

De fato. Por hipótese $x + y = x + z$, sendo assim:

$$
\begin{aligned}
x+y=x+z \ &\Rightarrow\ \overline{(a\,,\,b)} + \overline{(c\,,\,d)} = \overline{(a\,,\,b)} + \overline{(e\,,\,f)} \\
&\Rightarrow\ \overline{(a+c\,,\,b+d)} = \overline{(a+e\,,\,b+f)} \\
&\Rightarrow\ (a+c)+(b+f)=(b+d)+(a+e) \\
&\Rightarrow\ (a+b)+(c+f)=(a+b)+(d+e) \\
&\Rightarrow\ c+f=d+e \\
&\Rightarrow\ \overline{(c\,,\,d)} = \overline{(e\,,\,f)} \\
&\Rightarrow\ y=z
\end{aligned}
$$

□

Nas demonstrações *A3* e *A4* usamos a lei de corte do conjunto dos números naturais.

Antes da demonstração da propriedade *A5*, faremos algumas considerações:

1. Para todo $\overline{(n\,,n)} \in \mathbb{Z}$, temos que $\overline{(n\,,n)} = \overline{(0\,,0)}$, pois
   $\overline{(n\,,n)} = \overline{(0\,,0)} \Leftrightarrow (n,n) \sim (0,0) \Leftrightarrow n+0 = n+0.$

2. A ideia de um simétrico de um elemento $x \in \mathbb{Z}$, é que exista $y \in \mathbb{Z}$ de modo que $x+y=0$. Acreditamos que outra forma de entender isso seria, se $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x+y=z$ e se fosse possível provar que $z=0$, então y seria um simétrico de x.

Após estas considerações, vamos à demonstração da propriedade *A5*.

Demonstração. Para cada $\overline{(a\,,\,b)} \in \mathbb{Z}$, existe $\overline{(x\,,\,y)} \in \mathbb{Z}$, tal que $\overline{(a\,,\,b)} + \overline{(x\,,\,y)} = \overline{(0\,,\,0)}$.
Vamos assumir neste primeiro momento que $\overline{(x\,,\,y)} = \overline{(b,a)}$, e que

$$\overline{(a\,,\,b)} + \overline{(x\,,\,y)} = \overline{(e\,,\,f)}.$$

Se for possível mostrar que $\overline{(e\,,\,f)} = \overline{(0,0)}$, então $\overline{(x\,,\,y)} = \overline{(b,a)}$ é um simétrico de $\overline{(a\,,\,b)} \in \mathbb{Z}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{(a\,,\,b)} + \overline{(x\,,\,y)} = \overline{(e\,,\,f)} &\Leftrightarrow \overline{(a\,,\,b)} + \overline{(b\,,\,a)} = \overline{(e\,,\,f)} \\
&\Leftrightarrow \overline{(a+b,\,b+a)} = \overline{(e\,,\,f)} \\
&\Leftrightarrow (a+b)+f = (b+a)+e \\
&\Leftrightarrow f = e \\
&\Leftrightarrow f+0 = e+0 \\
&\Leftrightarrow \overline{(f,e)} = \overline{(0,0)}.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora a unicidade do elemento simétrico.

Suponha que para cada $\overline{(a\,,\,b)} \in \mathbb{Z}$, o simétrico não fosse único. Logo teríamos outro simétrico de $\overline{(a\,,\,b)}$, digamos $\overline{(\alpha\,,\,\beta)} \in$, com $\overline{(\alpha\,,\,\beta)} \neq \overline{(x,y)}$ tal que $\overline{(a\,,\,b)} + \overline{(\alpha\,,\,\beta)} = \overline{(0\,,\,0)}$.

Logo,

$$\overline{(a\,,\,b)} + \overline{(x\,,\,y)} = \overline{(0\,,\,0)} \Leftrightarrow a+x = b+y$$

e

$$\overline{(a\,,\,b)} + \overline{(\alpha\,,\,\beta)} = \overline{(0\,,\,0)} \Leftrightarrow, a+\alpha = b+\beta$$

Desta forma, teríamos:

$(a+x)+(b+\beta)=(b+y)+(a+\alpha) \Rightarrow x+\beta=\alpha+y \Leftrightarrow \overline{(x,y)}=\overline{(\alpha,\beta)}$, o que seria um absurdo pois $\overline{(\alpha\,,\,\beta)} \neq \overline{(x,y)}$.

Portanto concluímos que o elemento simétrico é único, desta forma vamos dar a seguinte definição.

□

Definição 2.6. *Para cada $x=\overline{(a\,,\,b)} \in \mathbb{Z}$, existe um único simétrico denotado por*

$$-x=\overline{(b\,,\,a)},$$

tal que $x+(-x)=0$.

Demonstração de M1. Se $x=\overline{(a\,,\,b)}\,, y=\overline{(c\,,\,d)}\,, z=\overline{(e\,,\,f)} \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned}
(x\cdot y)\cdot z &= x\cdot(y\cdot z)\,(x\;\cdot\;y)\cdot z\\
&= \left(\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c\,,d\,)}\right)\cdot\overline{(e,f)}\\
&= \overline{(ac+bd\,,\,ad+bc)}\cdot\overline{(e\,,\,f)}\\
&= \overline{((ac+bd)\,e\;+\;(ad+bc)\,f\,,(ac+bd)\,f+(ad+bc)\,e\,)}\\
&= \overline{(ace+bde+\;adf+bcf\,,acf+bdf+ade+bce\,)}\\
&= \overline{(ace+adf+\;bcf+bde\,,acf+ade+bce+bdf\,)}\\
&= \overline{(a\,(ce+df)+\;b\,(cf+de)\;,a\,(cf+de)+b\,(ce+df)\,)}\\
&= \overline{(a,b)}\cdot\overline{(ce+df\,,cf+de\,)}\\
&= \overline{(a,b)}\cdot\left(\overline{(c\,,d\,)}\cdot\overline{(e,f)}\right)\\
&= x\cdot(y\,\cdot\,z)
\end{aligned}$$

□

Demonstração de M2. Se $x=\overline{(a\,,\,b)},\ y=\overline{(c\,,\,d)} \in \mathbb{Z}$, então $x\cdot y=y\cdot x$.

$$\begin{aligned}
x\cdot y &= \overline{(a\,,\,b)}\;\cdot\;\overline{(c\,,\,d)}\\
&= \overline{(ac+\;bd,ad+bc)}\\
&= \overline{(ca+\;db,cb+da)}\\
&= \overline{(c\,,\,d)}\;\cdot\;\overline{(a\,,\,b)}=\\
&= y\cdot x
\end{aligned}$$

□

Demonstração de M3. Para todo $x = \overline{(a\,,\,b)} \in \mathbb{Z}$, temos que $\overline{(a+(a+b)\,,b+(a+b))} = \overline{(a,b)}$ pois $(a+(a+b)\,,b+(a+b)) \sim (a,b)$. Portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
\overline{(a+(a+b)\,,b+(a+b))} = \overline{(a,b)} &\Leftrightarrow \overline{((a+a)+b,a+(b+b))} = \overline{(a,b)} \\
&\Leftrightarrow \overline{(2a+b,a+2b)} = \overline{(a,b)} \\
&\Leftrightarrow \overline{(a\cdot 2+b\cdot 1,a\cdot 1+b\cdot 2)} = \overline{(a,b)} \\
&\Leftrightarrow \overline{(a,b)}\cdot\overline{(2,1)} = \overline{(a,b)}
\end{aligned}$$

Sendo assim para $x = \overline{(a\,,\,b)} \in \mathbb{Z}$, basta tomar o neutro multiplicativo $\overline{(2\,,\,1)} \in \mathbb{Z}$. $\square$

Observação 2.4. *Temos que* $\overline{(2\,,\,1)} = \overline{(1,0)}$ *pois* $(2,1) \sim (1,0)$. *Assim, tomando o neutro multiplicativo como sendo* $1 = \overline{(1,0)}$, *sendo assim, para todo* $x \in \mathbb{Z}, \exists\, 1 \in \mathbb{Z}; x\cdot 1 = x$.

Demonstração de M4. Se $x = \overline{(a\,,\,b)}\,,\ y = \overline{(c\,,\,d)}\,,\ z = \overline{(e\,,\,f)} \in \mathbb{Z}$, então

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

.

De fato,

$$\begin{aligned}
x\cdot(y+z) &= \overline{(a\,,\,b)}\cdot\Big(\overline{(c\,,\,d)} + \overline{(e\,,\,f)}\Big) = \overline{(a\,,\,b)}\cdot\overline{(c+e\,,\,d+f)} \\
&= \overline{(a\,(c+e)\;+b\,(d+f)\,,\,a\,(d+f)+b\,(c+e))} \\
&= \overline{(ac+ae\;+bd+bf,\,ad+af+bc+be)} \\
&= \overline{(ac+bd,\,ad+bc)} + \overline{(ae\;+bf,\,af+be)} \\
&= \overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)} \\
&= x\cdot y + x\cdot z
\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração de M5. Se $x = \overline{(a\,,\,b)}y = \overline{(c\,,\,d)}\,,\ z = \overline{(e\,,\,f)} \in \mathbb{Z}$, com $x\cdot z = y\cdot z$ e $z \neq 0$, então $x = y$.

De fato, sendo $x\cdot z = y\cdot z$, temos:

$$\begin{aligned}
x\cdot z = y\cdot z &\Rightarrow \overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)} = \overline{(c,d)}\cdot\overline{(e,f)} \\
&\Rightarrow \overline{(ae+bf,af+be)} = \overline{(ce+df,cf+de)} \\
&\Rightarrow ae+bf+cf+de = af+be+ce+df \\
&\Rightarrow e\,(a+d)+f\,(b+c) = e\,(b+c)+f\,(a+d) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Sendo $z \neq 0$, temos que $\overline{(e\,,\,f)} \neq \overline{(0,0)}$, isto é, $e + 0 \neq f + 0$, o que implicaria em $e \neq f$. Fazendo uso da ordenação do conjunto dos números naturais teremos $e > f$ ou $f > e$.

Sem perda de generalidade supondo $e > f$, existe um $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $e = f + p$. Substituindo $e = f + p$ na Equação 2.1temos:

$$\begin{aligned}
(f+p)(a+d) + f(b+c) &= (f+p)(b+c) + f(a+d) \\
&= fa + fd + pa + pd + fb + fc \\
&= fb + fc + pb + pc + fa + fd
\end{aligned}$$

Fazendo uso da lei do corte dos naturais, temos:

$$\begin{aligned}
pa + pd = pb + pc &\Rightarrow p(a+d) = p(b+c) \\
&\Rightarrow a + d = b + c \\
&\Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

□

Desta forma concluímos que o conjunto ,munido das operações as quais denominamos de adição e multiplicação satisfaz as dez propriedades enunciada, terminando assim a demonstração da Proposição 2.5.

A Definição 2.6, sugere que no conjunto é possível definir uma terceira operação, a qual denominaremos de subtração.

Definição 2.7. *A subtração em $\mathbb{Z}$, denotada por "$-$", é a operação definida da seguinte forma: se $x, y \in \mathbb{Z}$, então $x - y := x + (-y)$, isto é, se $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$, então*

$$\begin{aligned}
x - y &:= x + (-y) \\
&= \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} \\
&= \overline{(a+d, b+c)}
\end{aligned}$$

As duas proposições a seguir além da relevância acadêmica, é de fundamental importância no entendimento operacional dos números inteiros na escola básica.

Proposição 2.6. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tem-se:*

i. $-(-x) = x$

ii. $-x+y=y-x$

iii. $x-(-y)=x+y$

iv. $-x-y=-(x+y)$

v. $x-(y+z)=x-y-z$

Demonstração de i. Para todo $x=\overline{(a,b)}\in\mathbb{Z}$, teremos $-x=\overline{(b,a)}$.
Portanto,

$$-(-x)=-\overline{(b,a)}=\overline{(a,b)}=x$$

□

Demonstração de ii. .
Para todo $x=\overline{(a,b)}, y=\overline{(c,d)}\in\mathbb{Z}$, claramente teremos que $-x=\overline{(b,a)}$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}-x+y &= \overline{(b,a)}+\overline{(c,d)}\\ &= \overline{(b+c,a+d)}\\ &= \overline{(c+b,d+a)}\\ &= \overline{(c,d)}+\overline{(b,a)}\\ &= y-x\end{aligned}$$

□

Demonstração de iii. Sendo $x=\overline{(a,b)}, y=\overline{(c,d)}\in\mathbb{Z}$, teremos:

$$\begin{aligned}x-(-y): &= x+[-(-y)]\\ &= x+y\end{aligned}$$

sendo a última igualdade decorrente da parte (*i*) da Proposição 2.6. □

Demonstração de iv. Para todo $x=\overline{(a,b)}, y=\overline{(c,d)}\in\mathbb{Z}$, claramente temos que $-x=\overline{(b,a)}$ e $-y=\overline{(d,c)}$. Sendo $x+y=\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}$, temos que

$$\begin{aligned}-(x+y) &= \overline{(b+d,a+c)}\\ &= \overline{(b,a)}+\overline{(d,c)}\\ &= -x-y\end{aligned}$$

□

Demonstração de v. Para todo $x=\overline{(a,b)}, y=\overline{(c,d)}, z=\overline{(e,f)}\in\mathbb{Z}$, teremos $-y=\overline{(d,c)}$ e $-z=\overline{(f,e)}$.

$$\begin{aligned}
x-(y+z) &= \overline{(a,b)} - \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) \\
&= \overline{(a,b)} - \overline{(c+e,d+f)} \\
&= \overline{(a,b)} + \overline{(d+f,c+e)} \\
&= \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} + \overline{(f,e)} \\
&= x-y-z
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.7. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tem-se:*

i. $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$

ii. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

iii. $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$

Demonstração de i. Para todo $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z}$, temos $-x = \overline{(b, a)}$ e $-y = \overline{(d, c)}$. Sendo assim, teremos:

$$(-x) \cdot y = \overline{(b, a)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(bc + ad, bd + ac)}$$

Por outro lado, sendo $x \cdot y = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$, teremos que $-(x \cdot y) = \overline{(ad + bc, ac + bd)}$. Temos também que:

$$x \cdot (-y) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, c)} = \overline{(ad + bc, ac + bd)}.$$

Donde concluímos que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

□

Demonstração de ii. Para todo $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z}$, temos $-x = \overline{(b, a)}$ e $-y = \overline{(d, c)}$. Desta forma, teremos:

$x \cdot y = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$ e $(-x) \cdot (-y) = \overline{(b, a)} \cdot \overline{(d, c)} = \overline{(bd + ac, bc + ad)}$.

Sendo $\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(bd + ac, bc + ad)}$, temos que $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

□

Demonstração de iii. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} x \cdot (y - z) &= x \cdot (y + (-z)) \\ &= x \cdot y + x \cdot (-z) \\ &= x \cdot y + (-(x \cdot z)) \\ &= x \cdot y - x \cdot z \end{aligned}$$

□

2.3 Conclusões e Construções Finais

Vamos construir formalmente a ordenação em $\mathbb{Z}$, e apresentar algumas proposições importantes. Em seguida vamos construir a imersão do conjunto dos números Naturais $\mathbb{N}$ no conjunto $\mathbb{Z}$. E para finalizar a seção faremos a transposição didática da álgebra formal dos inteiros para a álgebra escolar do mesmo.

Começaremos com a seguinte definição:

Definição 2.8. *Sejam $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ elementos do conjunto $\mathbb{Z}$. Diremos que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ se e somente se, $a+d \leq b+c$.*

Proposição 2.8. *A relação de ordem da Definição 2.8 está bem definida, isto é, se $\overline{(a,b)} = \overline{(x,y)}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(z,t)}$ com $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ então $\overline{(x,y)} \leq \overline{(z,t)}$.*

Demonstração. De fato, sendo $\overline{(a,b)} = \overline{(x,y)}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(z,t)}$, logo teremos $a+y=b+x$ e $c+t=d+z$.

Por definição, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ se e somente se, $a+d \leq b+c$. Sendo assim teremos:

$$\begin{array}{rcl} a+d \leq b+c & \Rightarrow & (a+d)+(y+t) \leq (b+c)+(y+t) \\ & \Rightarrow & a+(d+(y+t)) \leq b+(c+(y+t)) \\ & \Rightarrow & a+((d+y)+t) \leq b+((c+y)+t) \\ & \Rightarrow ... \Rightarrow & (a+y)+(d+t) \leq (b+y)+(c+t) \\ & \Rightarrow & (b+x)+(d+t) \leq (b+y)+(d+z) \\ & \Rightarrow ... \Rightarrow & (b+d)+(x+t) \leq (b+d)+(y+z) \\ & \Rightarrow & x+t \leq y+z \Leftrightarrow \overline{(x,y)} \leq \overline{(z,t)} \end{array}$$

Desta forma, entendemos que a relação da Definição 2.8 está bem definida. □

Proposição 2.9. *A relação da Definição 2.8 é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$, isto é, é reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Demonstração.

i) Reflexiva.
Para todo $\overline{(a,b)} \in$, tem-se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)}$ pois $a+b \leq b+a$.

ii) Antissimétrica.
Para todo $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in$, se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$, então $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.
De fato, de $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ temos $a+d \leq b+c$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$ teremos $c+b \leq d+a$.
Do fato de $a+d \leq b+c$ e $c+b \leq d+a$, teremos $a+d=b+c$, isto é, $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

iii) Transitiva.
Para todo $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)} \in$, se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(e,f)}$, então $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$.

De $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(e,f)}$ teremos respectivamente

$$a + d \leq b + c$$
$$e$$
$$c + f \leq d + e$$

Somando as desigualdades as desigualdades membro a membro, teremos:

$$\begin{aligned}
&(a+d) + (c+f) \leq (b+c) + (d+e) \\
&\Rightarrow (d+c) + (a+f) \leq (d+c) + (b+e) \\
&\Rightarrow a + f \leq b + e\overline{(e,f)}
\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos a demonstração da proposição.

$\square$

Proposição 2.10. *Se* $\leq$ *é a relação de ordem em* $\mathbb{Z}$*, então:*

i. $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x + z \leq y + z$

ii. $x \leq y$ *e* $z \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

iii. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ *, apenas uma das afirmações é verdadeira* $x = \overline{(0\,,\,0)}$ *ou* $x > \overline{(0\,,\,0)}$ *ou* $x < \overline{(0\,,\,0)}$

Demonstração de i. Vamos mostrar primeiramente que $x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z$, para isso vamos fazer $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$.

De fato

$$\begin{aligned}
x \leq y \quad &\Rightarrow \quad \overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \\
&\Rightarrow \quad a + d \;\leq\; b + c \\
&\Rightarrow \quad a + d \;+ e \,+\, f \leq\; b + c + e \,+\, f \\
&\Rightarrow \quad a + e \;+ d \,+\, f \leq\; b + f + c \,+\, e \\
&\Rightarrow \quad \overline{(a+e,\, b+f)} \;\leq\; \overline{(c+e,\, d+f)} \\
&\Rightarrow \quad \overline{(a,\, b)} \;+\; \overline{(e,\, f)} \;\leq\; \overline{(c,\, d)} \;+\; \overline{(e,\, f)} \\
&\Rightarrow \quad x \,+\, z \;\leq\; y \,+\, z
\end{aligned}$$

Deixaremos a implicação $x + z \leq y + z \;\Rightarrow\; x \leq y$ como atividade. $\square$

Demonstração de ii. Façamos $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$.
Por hipótese $x \leq y$, logo $a + d \;\leq\; b + c$, e sendo $z = \overline{(e,f)}$, suponha sem perda de generalidade que $e \geq f$ pois $e, f \in \mathbb{N}$. Desta forma existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $b + c = a + d + p$ e $e = f + q$.

Construindo:

$$b+c=a+d+p \overset{\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} (b+c)\,e=(a+d\,+p)\,e \Leftrightarrow \underbrace{be+ce=ae+de\,+pe}_{(I)}$$

$$b+c=a+d+p \overset{\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} (b+c)\;f=(a+d\,+p)\,f \Leftrightarrow \underbrace{bf+cf=af+df+pf}_{(II)}$$

$$e=f+q \overset{\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} pe=p\,(f+q) \Leftrightarrow \underbrace{pe=pf+pq}_{(III)}$$

Somando (I) e (II) obtemos:

$$ae+de+pe+bf+cf=be+ce+af+df+pf \qquad (IV)$$

Substituindo com vamos obter:

$$\begin{aligned} ae+de\,+pf+pq+bf+cf &= be+ce+af+df+pf \;\Rightarrow \\ ae+de\,+pq+bf+cf &= be+ce+af+df \;\Rightarrow \\ ae+de\,+bf+cf &\le be+ce+af+df \;\Rightarrow \\ (ae+bf)+(cf+de) &\le (af+be)+(ce++df) \;\Rightarrow \\ \overline{(ae+bf,af+be\,)} &\le \overline{(ce++df,cf+de)} \;\Rightarrow \\ \overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)} &\le \overline{(c,d)}\cdot\overline{(e,f)} \;\Rightarrow x\cdot z \le y\cdot z \end{aligned}$$

$x\le y$ e $z\ge\overline{(0,0)}\Rightarrow x\cdot z\le y\cdot z$ □

Demonstração de iii. Se $x=\overline{(a,b)}>\overline{(0,0)}$ e $x=\overline{(a,b)}<\overline{(0,0)}$ simultaneamente, logo teríamos $a>b$ e $b>a$, o que seria um absurdo pela tricotomia dos números naturais. Suponha agora que $x=\overline{(a,b)}=\overline{(0,0)}$ e $x=\overline{(a,b)}<\overline{(0,0)}$ simultaneamente, logo teríamos $a=b$ e $a<b$, o que seria um absurdo pela tricotomia dos números naturais. Suponha agora que $x=\overline{(a,b)}=\overline{(0,0)}$ e $x=\overline{(a,b)}>\overline{(0,0)}$ simultaneamente, logo teríamos $a=b$ e $a>b$, o que seria um absurdo pela tricotomia dos números naturais. Finalizando assim a demonstração da proposição. □

Vamos enunciar sem demonstração as três proposições a seguir:

Proposição 2.11. *Para todo par $x, y \in \mathbb{Z}$ apenas uma das seguintes situações acontece: $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.*

Esta proposição nos diz que o conjunto $\mathbb{Z}$ além de ordenado, é totalmente ordenado, isto é, a relação $\leq$ é de ordem total em $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.12. *Se $\leq$ é a relação de ordem em $\mathbb{Z}$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ apenas uma das seguintes situações acontece: $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.*

Proposição 2.13. *Para $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \leq y$ e $z < \overline{(0,0)}$, temos $xz \geq yz$*

Para finalizar esta seção e este capítulo, vamos construir uma imersão do conjunto dos números naturais no conjunto dos números inteiros . Finalmente, vamos apresentar o conjunto dos números inteiros , na forma usual que geralmente é definido, isto é,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Definição 2.9. *Dados $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, dizemos que:*
i) $\overline{(a,b)}$ é positivo quando $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$;
ii) $\overline{(a,b)}$ é não negativo quando $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$;
iii) $\overline{(a,b)}$ é negativo quando $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$;
iv) $\overline{(a,b)}$ é não positivo quando $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)}$;

Observação: Para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ com $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$, tem-se que $a > b$, e assim, existe $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $a = b + m$, implicando que $a + 0 = b + m \Leftrightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$. Desta forma temos que para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ com $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$ temos que $\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$. De modo análogo, se $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$ então $\overline{(a,b)} = \overline{(0,m)}$.

Sendo assim, vamos escrever o conjunto , por uma união disjunta dada por

$$\mathbb{Z} = \left\{\overline{(m,0)}, m \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \cup \{(0,0)\} \cup \left\{\overline{(0,m)}, m \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}.$$

Além disso, vamos denotar por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_+^* &= \left\{\overline{(m,0)}, m \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, \\ \mathbb{Z}_-^* &= \left\{\overline{(0,m)}, m \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, \\ \mathbb{Z}_+ &= \left\{\overline{(m,0)}, m \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \cup \{(0,0)\} \text{ e} \\ \mathbb{Z}_- &= \left\{\overline{(0,m)}, m \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \cup \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Vamos estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Z}_+$, provando desta forma que existe uma copia algébrica do conjunto $\mathbb{N}$ no conjunto $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.14. *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ uma função definida por $f(m) = \overline{(m,0)}$. Então:*
i) f é injetora, isto é, se $f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$;

ii) $f(m+n) = f(m) + f(n)$*;*
iii) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$*;*
iv) Se $m \leq n$*, então* $f(m) \leq f(n)$.

Demonstração de i. De fato, sendo $f(m) = f(n)$, temos que $\overline{(m,0)} = \overline{(n,0)}$, logo

$$m + 0 = 0 + n \Rightarrow m = n$$

. $\square$

Demonstração de ii. Antes de demonstrar esta propriedade, vamos reescrever a definição de adição, para que o leitor possa entender mais rapidamente as minúcias da demonstração.

"Sendo $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, temos $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(a+c, b+d)}$".

Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se que $m + n \in \mathbb{N}$, logo $f(m+n) = \overline{(m+n,0)}$, desta forma teremos

$$f(m+n) = \overline{(m+n,0)} = \overline{(m,0)} + \overline{(n,0)} = f(m) + f(n)$$

$\square$

Demonstração de iii. Analogamente podemos reescrever a definição de multiplicação, para que o leitor possa entender mais rapidamente as minúcias da demonstração.

"Sendo $\overline{(a\,,\,b)}\,,\,\overline{(c\,,\,d)} \in \mathbb{Z}$, temos $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$".

Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se que $m \cdot n \in \mathbb{N}$, logo $f(m \cdot n) = \overline{(m \cdot n, 0)}$, desta forma teremos

$$f(m \cdot n) = \overline{(m \cdot n,0)} = \overline{(m,0)} \cdot \overline{(n,0)} = f(m) \cdot f(n)$$

$\square$

Demonstração de iv. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$, logo:

$$m \leq n \;\Rightarrow\; m + 0 \;\leq\; n \;+\; 0 \;\;\Rightarrow\;\; \overline{(m,0)} \;\leq\; \overline{(n,0)} \;\;\Rightarrow\;\; f(m) \;\leq\; f(n)$$

$\square$

O teorema que acabamos de demonstrar é denominado um homomorfismo injetor, logo teremos que $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}_+$ possui a mesma estrutura algébrica de $\mathbb{N}$. Assim dizemos que do ponto de vista algébrico podemos escrever $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Observe que pelo fato da aplicação ser injetiva podemos concluir que $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}_+$ é infinito, e consequentemente $\mathbb{Z}$ é infinito.

Notemos que, se $m \in \mathbb{N}$, o simétrico de $\overline{(m,0)}$ é $\overline{(0,m)}$. Se identificarmos $\overline{(m,0)}$ com m através de f, isto é, $m = \overline{(m,0)}$ e desta forma teremos o simétrico de $\overline{(m,0)}$ por
$-m = -\overline{(m,0)} = \overline{(0,m)}$. Podemos identificar o conjunto $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}_+$ via aplicação f, e redefinir o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ como

$$\mathbb{Z} = \{-m\;; m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \{m\,;\, m \in \mathbb{N}^*\} = \{\ldots, -m, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$$

A proposição a seguir trata da famosa regra de sinais para a multiplicação no conjunto dos números inteiros.

Proposição 2.15. *Sendo $m, n \in \mathbb{Z}$, temos:*

a) Se $m > 0$ e $n > 0$, então $m \cdot n > 0$; (Lê-se : um número positivo multiplicado por outro número positivo tem como resultado um número positivo)

b) Se $m < 0$ e $n < 0$, então $m \cdot n > 0$; (Lê-se : um número negativo multiplicado por outro número negativo tem como resultado um número positivo)

c) Se $m < 0$ e $n > 0$, então $m \cdot n < 0$; (Lê-se : um número negativo multiplicado por outro número positivo tem como resultado um número negativo)

Demonstração.

(a) Sendo $m = \overline{(m, 0)}$ e $n = \overline{(n, 0)}$, teremos:

$$m \cdot n = \overline{(m, 0)} \cdot \overline{(n, 0)} = \overline{(m \cdot n, 0)}$$

Sabemos que $\overline{(m \cdot n, 0)} > \overline{(0, 0)}$ e, portanto $m \cdot n > 0$.

(b) Se $m < 0$ e $n < 0$, temos que $-m > 0$ e $-n > 0$, logo $-m = \overline{(-m, 0)}$ e $-n = \overline{(-n, 0)}$.

$$-m = \overline{(-m, 0)} \Rightarrow m = -\overline{(-m, 0)} = \overline{(0, -m)}$$

e

$$-n = \overline{(-n, 0)} \Rightarrow n = -\overline{(-n, 0)} = \overline{(0, -n)}$$

$$m \cdot n = \overline{(0, -m)} \cdot \overline{(0, -n)} = \overline{((-m) \cdot (-n), 0)} > \overline{(0, 0)}$$

Portanto $m \cdot n > 0$.

(c) Se $m < 0$, então $-m > 0$. $-m = \overline{(-m, 0)}$, teremos $m = \overline{(0, -m)}$
$m \cdot n = \overline{(0, -m)} \cdot \overline{(n, 0)} = \overline{(0, (-m) \cdot n)} < \overline{(0, 0)}$ e portanto $m \cdot n < 0$. □

Definição 2.10. *Para todo $m \in \mathbb{Z}$, vamos definir o módulo ou valor absoluto, o qual será representado por $|m|$, como sendo:*

$$|m| = \begin{cases} m, \; se \; m \geq 0 \\ -m, \; se \; m < 0 \end{cases}, \; \forall \, m \in \mathbb{Z}.$$

A seguir faremos a interpretação geométrica do módulo de um número inteiro m , na reta, como sendo a distância entre o ponto de abscissa onde se encontra o m, e o ponto da origem onde se encontra o zero, isto é:

Se $m \in \mathbb{Z}$ for positivo, isto é, $m > 0$ teremos

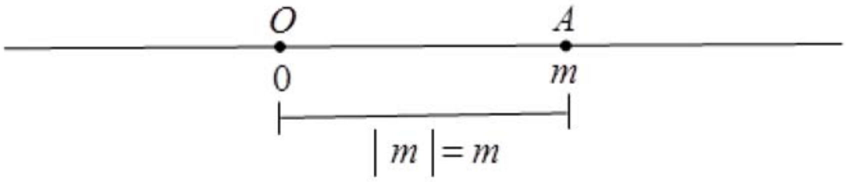


Figura 2.1: Representação geométrica do módulo de um número inteiro positivo

Se $m \in \mathbb{Z}$ for negativo, isto é, $m < 0$ teremos

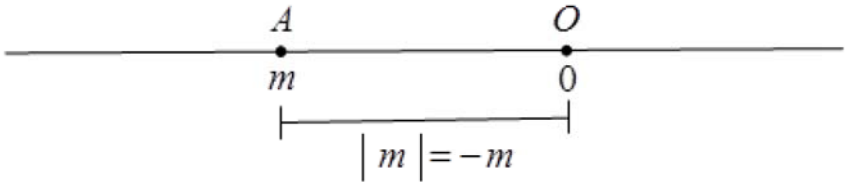


Figura 2.2: Representação geométrica do módulo de um número inteiro negativo

Capítulo 3

A Construção dos Números Racionais

Neste capítulo, abordaremos formalmente a construção do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ sob a luz da estrutura algébrica. Na seção 3.1 vamos definir as operações de adição e multiplicação, e em seguida apresentar o conjunto $\mathbb{Q}$ como um corpo ordenado como é feito nas escolas básicas de forma axiomática. Já na seção 3.2 vamos construir o conjunto dos números racionais sob a luz da estruturas algébrica, pois acreditamos que tal construção é de fundamental importância para o docente que trabalha com este objeto matemático. As principais referências são Jacobson [4] e Gonçalves [1].

3.1 Conjunto dos Números Racionais de Forma Axiomática

3.1.1 Notação para o Conjunto dos Números Racionais

Usualmente o conjunto dos números racionais, é representado pela letra é definido $\mathbb{Q}$ como sendo o conjunto de todas as razões do tipo $\dfrac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros com $b \neq 0$.

A notação utilizada para apresentar tal conjunto na maioria dos livros ditos didáticos é dada por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

3.1.2 Adição e Multiplicação no Conjunto dos Números Racionais

Nesta seção, vamos munir o conjunto dos números racionais de duas operações, as quais chamaremos de adição "$+$" e multiplicação "$\cdot$" . Por fim iremos apresentar que tal conjunto munido dessas operações é um corpo ordenado.

Definição 3.1. *Definiremos a adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ respectivamente por*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cdot \ : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} &\to \mathbb{Q}\\
\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}
\end{aligned}
$$

Iremos enunciar a proposição a seguir sem demonstração. O entendimento das propriedades que trata a proposição é importante, pois entendemos que a fundamentação matemática um corpo numérico é fundamental para resoluções de determinados problemas envolvendo equações e inequações entre outros objetos matemáticos. Neste caso, chamamos a atenção que tal corpo é denominado de corpo frações do anel de integridade . E tal estrutura é uma poderosa ferramenta subsunçora para o desenvolvimento pedagógico do professor na sua prática docente do dia a dia.

3.1.3 O conjunto dos números racionais como Corpo Ordenado

Proposição 3.1. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ *é um corpo, isto é, o conjunto dos números racionais munidos da adição e multiplicação é um corpo.*

Como já foi dito anteriormente, não apresentaremos a demonstração formal da proposição, todavia podemos concluir $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ goza das seguintes propriedades:

i) Associativa na adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ tem-se

$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ e $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

ii) Comutativa na adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ tem-se

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b} \ \text{ e } \ \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\cdot\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

iii) Existência dos elementos neutros da adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo

$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, existem $0=\frac{0}{1}\in\mathbb{Q}$ e $1=\frac{1}{1}\in\mathbb{Q}$ tais que

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b} \ \text{ e } \ \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\cdot 1=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

iv) Existência dos inversos da adição e multiplicação respectivamente, isto é, para todo $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, existe $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$, e para todo $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}-\{0\}$, existe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$.

v) Distributividade do produto em relação a adição, isto é, para todo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tem-se

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

Observação 3.1. *Para dar prosseguimento ao entendimento do corpo ordenado, vamos precisar definir um conjunto $P \subset \mathbb{Q}$ tal que $P = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ ab \underset{\mathbb{Z}}{>} 0\right\}$, onde $\underset{\mathbb{Z}}{>}$ é a relação de ordem definida no conjunto dos números inteiros do Capítulo 2.*

Sendo assim, podemos enunciar a proposição a seguir:

Proposição 3.2. $\left(\mathbb{Q}, +, \cdot, \underset{\mathbb{Z}}{>}\right)$ *é um corpo ordenado.*

Demonstração. O fato de ser corpo já esta garantido na Proposição 3.2. Falta mostrar que é ordenado. Para tal , basta mostrar que para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, tem – se $\frac{a}{b} \in P$ ou $\frac{a}{b} = 0$ ou $-\frac{a}{b} \in P$, sendo $P = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ ab \underset{\mathbb{Z}}{>} 0\right\}$.

Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in P$ então $ab \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$ e $cd \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$. Desta forma podemos concluir que a adição e multiplicação é fechada em P. De fato,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in P \Leftrightarrow (ad + bc)\, bd = abdd + cdbb \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$$

e

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in P \Leftrightarrow acbd \underset{\mathbb{Z}}{>} 0.$$

Se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ então $ab \in \mathbb{Z}$, segue da tricotomia em que ou $ab \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$ ou $ab = 0$ ou $-ab \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$.

Donde conclui-se que ou $\frac{a}{b} \in P$ ou $\frac{a}{b} = 0$ ou $-\frac{a}{b} \in P$. Deste modo, temos que $\mathbb{Q}$ é ordenado. $\square$

3.2 O conjunto dos Números Racionais sob a ótica da Estrutura Algébrica:

3.2.1 Classe de Equivalência e conjunto quociente

Fazendo uso do domínio de integridade dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, vamos construir o conjunto números racionais. Para tal, vamos considerar o conjunto

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b)\,;\, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}\ .$$

Proposição 3.3. *A relação $\sim$ em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ definida por $(a\,,\,b) \sim (c\,,\,d) \Leftrightarrow ad = bc$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Mostraremos que a relação $\sim$ acima definida é (i) reflexiva, (ii) simétrica e (iii) transitiva.

i) Para todo $(a\,,\,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $(a\,,\,b) \sim (a\,,\,b) \Leftrightarrow ab = ba$,

ii) Para todo $(a\,,\,b)\,,(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $(a\,,\,b) \sim (c\,,\,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow$

$$(c\,,\,d) \sim (a\,,\,b)\,;$$

iii) Para todo $(a\,,\,b)\,,(c, d)\,,(e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $(a\,,\,b) \sim (c\,,\,d)$ e $(c\,,\,d) \sim (e\,,\,f) \Leftrightarrow$ $ad = bc$ e $cf = de$.

Sendo $ad = bc$ e $f \neq 0$, temos $(ad)\,f = (bc)\,f \Rightarrow a\,(df) = (bc)\,f \Rightarrow a\,(fd) = b\,(cf) \Rightarrow$ $(af)\,d = b\,(cf) \Rightarrow (af)\,d = b\,(de) \Rightarrow (af)\,d = b\,(ed) \Rightarrow$

$$(af)\,d = (be)\,d \Rightarrow af = de \Rightarrow (a\,,\,b\,) \sim (e\,,\,f)\,.$$

De modo natural a relação de equivalência $\sim$ induz uma partição em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, e desta forma podemos definir o conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim}$ definido por

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim} = \left\{\overline{(a\,,\,b)},\ (a,b) \in \times^*\right\},$$

onde cada

$$\overline{(a\,,\,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (a, b) \sim (x, y)\}$$

□

3.2.2 Operações em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_\sim$

Vamos munir o grupo quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_\sim$ com duas operações, as quais chamaremos de adição e multiplicação.

Definição 3.2. *Para todo par* $\overline{(a\,,\,b)}\,,\ \overline{(c\,,\,d)}\ \in\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_\sim$ *vamos definir a adição por*

$$\overline{(a\,,\,b)}\ +\ \overline{(c\,,\,d)}\ := \overline{(a\,d + bc,\, bd)}$$

e a multiplicação por

$$\overline{(a\,,\,b)}\ \cdot\ \overline{(c\,,\,d)}\ := \overline{(a\,c,\, bd)}.$$

A proposição a seguir vai nos garantir que a adição e a multiplicação, não dependem dos representantes das classes de equivalência.

Proposição 3.4. *A adição e a multiplicação no grupo quociente* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_\sim$ *estão bem definidas.*

Demonstração. Sejam $\overline{(a\,,\,b)}\,, \overline{(x\,,\,y)}, \overline{(c\,,\,d)}\,,\ \overline{(t\,,\,z)}\ \in\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_\sim$ tais que

$$\overline{(a\,,\,b)}\ =\ \overline{(x\,,\,y)}\ \mathrm{e}\overline{(\mathrm{c}\,,\,\mathrm{d})}\ =\ \overline{(\mathrm{t}\,,\,\mathrm{z})}\ .$$

Mostraremos que

$$\overline{(a\,,\,b)}\ + \overline{(c\,,\,d)}\ =\ \overline{(x\,,\,y)}\ +\ \overline{(t\,,\,z)}$$

e que

$$\overline{(a\,,\,b)}\ \cdot \overline{(c\,,\,d)}\ =\ \overline{(x\,,\,y)}\ \cdot\ \overline{(t\,,\,z)},$$

isto é, independe da escolha de classe.

De fato, se $\overline{(a\,,\,b)}\ \sim \overline{(x\,,\,y)}$ e $\overline{(c\,,\,d)}\ \sim \overline{(t\,,\,z)}$ teremos que respectivamente que

$$ay = bx \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{cz} = \mathrm{dt}. \tag{3.1}$$

Multiplicando as igualdades em (3.1) por dz e by, teremos

$$(ay)\,(dz) = (bx)\,(dz)\,\mathrm{e}\ (\mathrm{cz})\,(\mathrm{by}) = (\mathrm{dt})\,(\mathrm{by}) \tag{3.2}$$

Trabalhando em (3.2) teremos:

$$\begin{aligned}(ad + bc)\,(yz) &= (ad)\,(yz) + (bc)\,(yz)\\ &= (ay)\,(dz) + (cz)\,(by)\\ &= (bx)\,(dz) + (dt)\,(by)\\ &= (bd)\,(xz + yt)\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que

$$(ad + bc)\,(yz) = (bd)\,(xz + yt)\,,$$

logo
$$(ad+bc,bd)\sim(xz+yt,yz)\,.$$
Donde se conclui que
$$\overline{(ad+bc,bd)}=\overline{(xz+yt,yz)}\,,$$
isto é ,
$$\overline{(a\,,\,b)}+\overline{(c\,,\,d)}\ =\ \overline{(x\,,\,y)}\ +\ \overline{(t\,,\,z)}\,.$$
Mostraremos agora que
$$\overline{(a\,,\,b)}\cdot\overline{(c\,,\,d)}\ =\ \overline{(x\,,\,y)}\ \cdot\ \overline{(t\,,\,z)}$$
.

Sabemos de (3.1) que
$$ay=bx\mathrm{e}\,\mathrm{cz}=\mathrm{dt}.$$
Logo
$$(ay)\ (cz)=(bx)\,(dt)$$
Por hipótese
$$\overline{(a\,,\,b)}\ =\ \overline{(x\,,\,y)}\ \mathrm{e}\overline{(\mathrm{c}\,,\,\mathrm{d})}\ =\ \overline{(\mathrm{t}\,,\,\mathrm{z})}\ ,$$
logo,
$$\begin{aligned}\overline{(a\,,\,b)}\cdot\overline{(c\,,\,d)}=\overline{(x\,,\,y)}\ \cdot\overline{(t\,,\,z)}\ &\Leftrightarrow\ \overline{(ac\,,\,bd)}=\overline{(xt\,,\,yz)}\\ &\Leftrightarrow\ (ac,bd)\sim(xt,yz)\\ &\Leftrightarrow\ (ac)\cdot(yz)=(bd)\cdot(xt)\\ &\Leftrightarrow\ (ay)\ (cz)=(bx)\,(dt)\end{aligned}$$

Onde concluídos a demonstração. □

3.2.3 O conjunto dos números racionais

Definição 3.3. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, pode ser definido como*
$$\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_{\sim},$$
onde a adição e a multiplicação são definidas por:
$$\overline{(a\,,\,b)}\ +\ \overline{(c\,,\,d)}\ :=\overline{(a\,d+bc,\,bd)}$$

e

$$\overline{(a\,,\,b)}\ \cdot\ \overline{(c\,,\,d)}\ := \overline{(a\,c,\,bd)}$$

Proposição 3.5. *O conjunto* $\mathbb{Q} = {}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}/_{\sim}$ *munido das operações de adição e multiplicação dadas na Definição 3.3 , satisfaz as seguintes propriedades:*

<u>*Com relação a adição:*</u>

1. *Associativa*
2. *Comutativa*
3. *Existência do Neutro*
4. *Existência do Simétrico*

<u>*Com relação a multiplicação:*</u>

1. *Associativa*
2. *Comutativa*
3. *Existência do Neutro*
4. *Existência do inverso*
5. *Distributividade da multiplicação em relação a adição*

Demonstração. Demonstração:

1. Basta mostrar que para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

   Sendo $x = \overline{(a, b)}$, $y = \overline{(c, d)}$ e $z = \overline{(e, f)}$ temos:

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= \left[\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\right] + \overline{(e,f)} \\
&= \overline{(ad+bc, bd)} + \overline{(e,f)} \\
&= \overline{((ad+bc)\,f + (bd)\,e, (bd)\,f)} \\
&= \overline{(adf + bcf + bde, bdf)} \\
&= \overline{(a\,(df) + b\,(cf+de)\,, b\,(df))} \\
&= \overline{(a,b)} + \overline{(cf+de, df)} \\
&= x + (y+z)
\end{aligned}$$

2. Para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, com $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$ temos:

$$\begin{aligned} x + y &= \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} \\ &= \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(c+a, d+b)} \\ &= \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \\ &= y + x \end{aligned}$$

3. Existe $0 = \overline{(0,1)}$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} x + 0 &= \overline{(a,b)} + \overline{(0\,,\,1)} \\ &= \overline{(a \cdot 1 + b \cdot 0, 1 \cdot b)} \\ &= \overline{(a,b)} \\ &= x \end{aligned}$$

4. Para cada $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$, tomamos $-x = \overline{(-a,b)} \in \mathbb{Q}$ tal que $x + (-x) = 0$.

   Vamos admitir que $0 = \overline{(0,b)}$ para $b \in \mathbb{Z}^*$. Sendo assim, teremos que:

$$\begin{aligned} x + (-x) &= \overline{(a\,,\,b)} + \overline{(-a,b)} \\ &= \overline{(ab + b\,(-a)\;,\;bb)} \\ &= \overline{(0\,,\,bb)} = 0 \end{aligned}$$

5. Basta mostrar que para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

   Sendo $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$ temos:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= \left[\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}\right] \cdot \overline{(e,f)} \\ &= \overline{(ac, bd)} \cdot \overline{(e,f)} \\ &= \overline{((ac)\,e, (bd)\,f)} \\ &= \overline{(a\,(ce)\,, b\,(df))} \\ &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(ce, df)} \\ &= \overline{(a,b)} \cdot \left[\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)}\right] \\ &= x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

6. Basta mostrar que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.

Sendo $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$ temos:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x \\ &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} \\ &= \overline{(ac,bd)} \\ &= \overline{(ca,db)} \\ &= \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} \\ &= y \cdot x \end{aligned}$$

7. Existe um elemento $1 \in \mathbb{Q}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{Q}$ tem-se $x \cdot 1 = x$.

   De fato, fazendo $1 \in \mathbb{Q}$ igual a $1 = \overline{(1,\ 1)}$ e $x = \overline{(a,b)}$ teremos:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(1,\ 1)} \\ &= \overline{(a \cdot 1, b \cdot 1)} \\ &= \overline{(a,b)} \\ &= x \end{aligned}$$

8. Para cada $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$, existe $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

   Sendo $x = \overline{(a,b)}$, basta fazer $x^{-1} = \overline{(b,a)}$ logo teremos:

$$\begin{aligned} x \cdot x^{-1} &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(b,a)} \\ &= \overline{(ab,ba)} = \overline{(ab,ab)} \\ &= \overline{(1,1)} = 1 \end{aligned}$$

Observação 3.2. *Temos que a classe $(n,n) \sim (1,1)$, sendo $n \neq 0$.*

9. Basta mostrar que para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

   Sendo $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$ temos:

$$\begin{aligned}
x \cdot (y+z) &= \overline{(a,b)} \cdot \left[\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right] \\
&= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(cf+de, df)} \\
&= \overline{(a\,(cf+de)\,, adf)} \\
&= \overline{(acf+ade, adf)} \\
&= \overline{(acfb+adeb, adfb)}
\end{aligned}$$

Por outro lado teremos:

$$\begin{aligned}
x \cdot y + x \cdot z &= \overline{(a\,,\,b)} \cdot \overline{(c\,,\,d)} + \overline{(a\,,\,b)}\, \cdot \overline{(e\,,\,f)} \\
&= \overline{(ac\,,\,bd)} + \overline{(ae\,,\,bf)} \\
&= \overline{(acbf+bdae\,,\,bdbf)}
\end{aligned}$$

Sendo assim, concluímos que $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

$\square$

Teorema 3.1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *é um corpo ordenado.*

A prova que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo já foi mostrado pela Proposição 2.5. Usaremos o lema a seguir para provar que ele é ordenado.

Lema 3.1. $\mathbb{Q}$ *é ordenado.*

Demonstração. Seja $P \subset \mathbb{Q}$ tal que $P = \left\{\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q};\ a \cdot b \underset{\mathbb{Z}}{>} 0\right\}$. Mostraremos que o conjunto P faz de ordenado.

Temos que P é fechado com relação a adição e a multiplicação de , isto é, para do $x, y \in P$ tem-se $x+y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

De fato, sendo teremos $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$ com $a \cdot b \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$ e $c \cdot d \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$.

$$x + y = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)} \in P \Leftrightarrow (ad+bc)\,bd = abd^2 + cdb^2 \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$$

$$x \cdot y = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} \in P \Leftrightarrow (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$$

Desta forma concluímos que P é fechado com relação a adição e a multiplicação de $\mathbb{Q}$.

Vamos mostrar a tricotomia para concluir que $\mathbb{Q}$ é ordenado.

Para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$, sabemos que $a, b \in \mathbb{Z}$. Logo pela tricotomia de $\mathbb{Z}$ temos que:

$$a \cdot b \underset{\mathbb{Z}}{>} 0 \text{ ou } a \cdot b = 0 \text{ ou } -a \cdot b \underset{\mathbb{Z}}{>} 0$$

Onde conclui-se que :

$$\overline{(a,b)} \in P \text{ou} \overline{(a,b)} = \overline{(0\,,\,b)} \;=\; 0 \text{ou} \overline{(-a,b)} \in P$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é ordenado. □

Definição 3.4. *Se x e y são elementos de , com x menor que y, então a diferença de y menos x pertence ao conjunto P, isto é, se $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x < y$, então $y - x \in P$.*

Vamos assumir que, no corpo ordenado , as seguintes propriedades são verdadeiras.
i) $x < y$ " lê –se: x menor que y" $\Leftrightarrow$ $y > x$ "lê –se: y maior que x"
ii) $x \leq y$ " lê –se: x menor ou igual que y " $\Leftrightarrow x < y$ ou $x = y$
iii) $x \geq y$ " lê –se: x maior ou igual que y " $\Leftrightarrow x > y$ ou $x = y$
A proposição a seguir será enunciada sem demonstração, somente a titulo de informação. Todavia, caso o leitor queira demonstrar fique a vontade.

Proposição 3.6. *Sendo $\left(\mathbb{Q}\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,\underset{\mathbb{Z}}{>}\right)$ um corpo ordenado, as seguintes propriedades são verdadeiras:*
i) Para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$ com $x < y$ e $y < z$ tem-se $x < z$ (transitiva)
ii) Se $x, y \in \mathbb{Q}$, então apenas uma das alternativas pode ocorrer:
ou $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$ (tricotomia)
iii) Se $x, y \in \mathbb{Q}$, com $x < y$ então $x + z < y + z$ $\forall z \in \mathbb{Q}$ (monotonicidade da adição)
iv) Se $x, y \in \mathbb{Q}$, com $x < y$ então

$$a)\;\; x \cdot z < y \cdot z, \forall z \in \mathbb{Q} e \quad z > 0 \quad b) x \cdot z > y \cdot z, \forall z \in \mathbb{Q} \text{ e } z < 0$$
(monotonicidade da multiplicação)

3.2.4 Subtração e Divisão em $\mathbb{Q}$

A subtração e divisão no conjunto $\mathbb{Q}$ serão definidas em função da adição e multiplicação da Definição 2.2.

Definição 3.5. *Sejam $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$ elementos de $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim}$. A operação subtração, aqui denotada por " $-$ ", será definida por $x - y = x + (-y)$, onde $-y$ é o simétrico aditivo de y.*

Desta forma teremos: $x - y = \overline{(a\,,\,b)} + \overline{(-c,d)} = \overline{(ad - bc\,,\,bd)}$

Definição 3.6. *Sejam $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)} \neq 0$ elementos de $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim}$. A operação divisão, aqui denotada por " $\div$", será definida por $x \div y = x \cdot y^{-1}$, onde y^{-1} é o inverso multiplicativo de y.*

Portanto, $x \div y = \overline{(a\ ,\ b)} \cdot \overline{(d, c)} = \overline{(ad, bc)}$.

Desta forma podemos dizer que o conjunto $= \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim}$ possui de fato quatro operações por nos estudadas até agora.

Observação 3.3. *Vamos redefinir a classe de equivalência* $\overline{(a\ ,\ b)}$ *definida por* $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (a, b) \sim (x, y)\}$*, pondo* $\dfrac{a}{b} = \overline{(a\ ,\ b)}$*, desta forma tudo que foi apresentado na seção 3.2 pode ser interpretado na linguagem usual da matemática escolar, e desta forma também acabamos provando a Proposição 2.1.*

Capítulo 4

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO QUE DIZ RESPEITO ÀS OPERAÇÕES E SUAS PRINCIPAIS PROPRIEDADES

Neste capítulo, vamos propor uma construção do conjunto dos números racionais representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$, juntamente com suas operações e suas principais propriedades. Para tanto, vamos construir este capitulo em 4 Seções. Na Seção 4.1, vamos apresentar uma construção geométrica para conjunto dos números racionais no se diz respeito à parte positiva e construiremos também a adição e multiplicação. Na Seção 4.2 veremos a operação de subtração entre números racionais positivos. Na Seção 4.3 trataremos a divisão entre dois racionais quaisquer e na Seção 4.4 veremos como pode ser feita a comparação entre dois números racionais.

4.1 Construção dos números racionais

Nesta seção, faremos uso do recurso geométrico para construir de modo pictórico os números racionais positivos. Esta proposta de trabalho para a sala de aula simplifica o ensino dos números racionais na parte positiva, sem banalizar o ensino usual deste objeto matemático. Por exemplo, vamos construir geometricamente os algoritmos da adição e multiplicação de números racionais, da pela Definição 3.1 do Capítulo 3. Todavia, cabe ao professor, após a construção, estender a ideia para todo o conjunto dos números racionais matematicamente falando. Logo em seguida, vamos definir o conjunto dos números racionais em toda a sua plenitude.

4.1.1 Construindo o conjunto dos números racionais positivos

Em primeiro lugar, vamos fixar a figura geométrica com a qual vamos desenvolver todas as nossas construções. A figura que iremos utilizar será o quadrado, que aqui será identificado pela unidade 1. Fazendo uso da TAS, acreditamos que tal objeto matemático é potencialmente significativo, cabe ao aluno torná-lo de fato significativo.

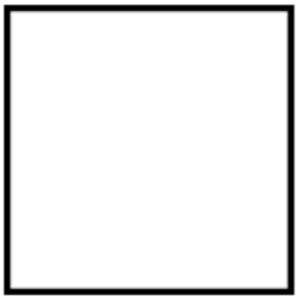


Figura 4.1: Quadrado: representação da unidade

Para melhor compreensão do desenvolvimento da construção dos números racionais positivos metodologicamente falando, vamos sem perda de generalidade apresentá-los através de exemplos.

Vamos começar dividindo o quadrado em sete partes iguais, desta forma estaremos também dividindo a unidade 1 também em sete partes iguais:

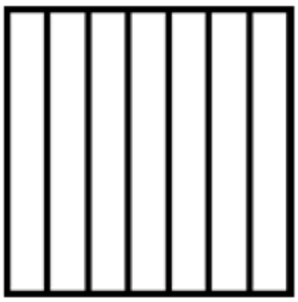


Figura 4.2: Quadrado dividido em sete partes iguais

Desta forma, o símbolo que representará qualquer uma das sete partes será indicado por $\frac{1}{7}$. O número da parte inferior, indicado pelo inteiro 7 nos diz em quantas partes o inteiro foi partido, e a mesma receberá o nome de denominador, pois é ela que denomina ou designa a quantidade de partições iguais que o inteiro vai ser submetido. Já o número da parte superior do número $\frac{1}{7}$, indicado pelo inteiro 1 nos informa que estamos trabalhando com uma das sete partes, e receberá o nome de numerador, pois é o que numera.

Na figura a seguir, o número que representa a parte hachurada é $\frac{4}{7}$, logo o numerador é 4, e o denominador é 7.

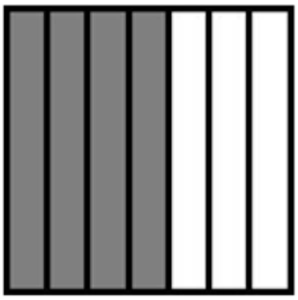
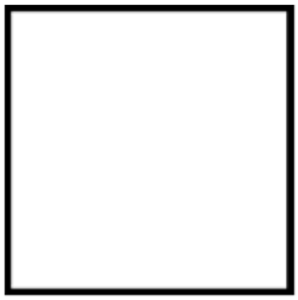


Figura 4.3: Representação geométrica de $\frac{4}{7}$

Acreditamos que essas "idas e vindas"é de fundamental importância na aprendizagem significativa dos racionais positivos. Estamos querendo dizer por "idas e vindas"atividades do tipo:

Atividade (ida): No quadrado a seguir, represente geometricamente $\frac{6}{7}$:



Como solução da atividade, o aluno deve possuir subsunçores do tipo: quadrado, retângulo, congruência de figuras planas, coordenação motora, contagem básica.

Finalmente, após desenhar o quadrado, fazer a partição do mesmo em 7 retângulos congruentes. Ele terá que pintar 6 retângulos dos 7. Teríamos, a seguinte representação geométrica.

$\frac{6}{7}$

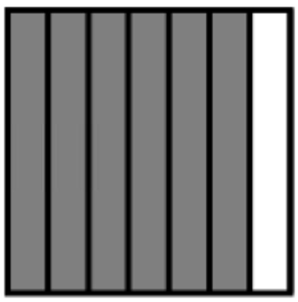


Figura 4.4: Representação geométrica de $\frac{6}{7}$

Observação: Desta forma estaremos, associando o símbolo $\frac{6}{7}$ a uma imagem, a qual reforça o entendimento do número $\frac{6}{7}$.

Atividade (vinda): Represente numericamente o número racional dado geometricamente a seguir:

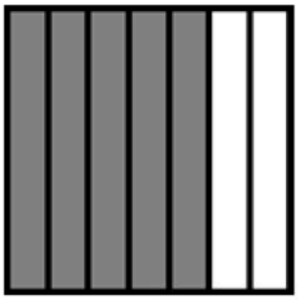


Figura 4.5: Representação geométrica de $\frac{5}{7}$

A solução desta atividade nos diz que o aluno já compreende bem o que é o numerador e denominador de um número racional, desta forma ele deve apresentar o número $\frac{5}{7}$.

Atividades dessa natureza vão de fato tornar a construção do conjunto dos números reais mais acessíveis.

O passo seguinte seria a construção de toda a parte positiva da seguinte forma:

Passo 01: Criar o ambiente significativo

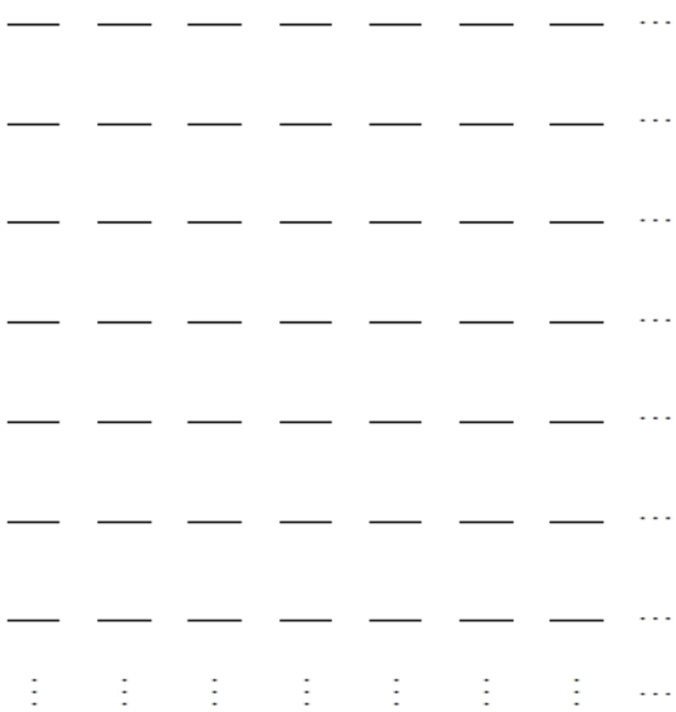


Figura 4.6: Ambiente significativo para representação dos racionais

Passo 02: Construir os numeradores em sequência

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{} & \frac{1}{} & \frac{1}{} & \frac{1}{} & \frac{1}{} & \frac{1}{} & \frac{1}{} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{} & \frac{3}{} & \frac{3}{} & \frac{3}{} & \frac{3}{} & \frac{3}{} & \frac{3}{} & \cdots \\[2ex]
\frac{4}{} & \frac{4}{} & \frac{4}{} & \frac{4}{} & \frac{4}{} & \frac{4}{} & \frac{4}{} & \cdots \\[2ex]
\frac{5}{} & \frac{5}{} & \frac{5}{} & \frac{5}{} & \frac{5}{} & \frac{5}{} & \frac{5}{} & \cdots \\[2ex]
\frac{6}{} & \frac{6}{} & \frac{6}{} & \frac{6}{} & \frac{6}{} & \frac{6}{} & \frac{6}{} & \cdots \\[2ex]
\frac{7}{} & \frac{7}{} & \frac{7}{} & \frac{7}{} & \frac{7}{} & \frac{7}{} & \frac{7}{} & \cdots \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

Figura 4.7: Construção dos numeradores

Passo 03: Construir os denominadores em sequência

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \frac{2}{7} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \frac{4}{7} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \frac{5}{7} & \cdots \\
\frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} & \frac{6}{4} & \frac{6}{5} & \frac{6}{6} & \frac{6}{7} & \cdots \\
\frac{7}{1} & \frac{7}{2} & \frac{7}{3} & \frac{7}{4} & \frac{7}{5} & \frac{7}{6} & \frac{7}{7} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

Figura 4.8: Construção dos denominadores

A partir de tal construção, acreditamos que o aluno já se sente confortável para a definição formal dos racionais positivos.

Definição 4.1. *O conjunto dos racionais positivos, representado pelo símbolo* $\mathbb{Q}+^*$ *é dado pelo conjunto* $\left\{\frac{n}{d};\ n\,,\ d\ \in \mathbb{Z}+^*\right\}$. *Desta forma temos*

$$\mathbb{Q}+^* \ = \ \left\{\frac{n}{d};\ n,\ d\ \in \mathbb{Z}+^*\right\}.$$

Após algumas atividades pedagógicas sobre tal construção, estaremos aptos a definir o conjunto dos números reais na sua totalidade.

4.1.2 O conjunto dos números racionais em toda sua plenitude

Geralmente o professor de matemática faz o seguinte:

Definição: O conjunto dos racionais, representado pelo símbolo é dado pelo conjunto $\left\{\frac{n}{d};\ n\,,d\ \in \mathbb{Z}\ ,\ d \neq 0\ \right\}$. Desta forma temos

$$\mathbb{Q}\ =\ \left\{\frac{n}{d};\ n\,,d\ \in\ ,\ d \neq 0\ \right\}.$$

Gostaria de propor atividades potencialmente significativas – APS, para de fato termos aprendizado significativo.

APS 01: Deixar bem claro que a divisão de um número inteiro não pode ser feita pelo zero. O professor deverá usar sua criatividade.

APS 02: Uma imitação da representação cartesiana, a qual pode ser feita no papel milimetrado (caso não tenha o aluno deverá construir no caderno).

Feita a construção do pseudo plano cartesiano pelo professor e pelos alunos as discussões podem girar durante ou após a construção. Em ambos os casos, pensamos que essa APS, possibilitará melhor compreensão da construção dos números racionais.

Pois como em uma batalha naval o estudante vai localizar um ponto qualquer da malha indicando um numerador e um denominador. Desta forma, qualquer ponto da malha no primeiro momento será indicado por $(n\ ,\ d)$, após algumas discussões poderemos representá-lo por $\frac{n}{d}$, onde o denominador jamais poderá ser zero.

Desta forma poderemos definir após alguns exercícios fazendo uso da tabela o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \ \left\{\frac{n}{d};\ n\,,d\ \in \mathbb{Z}\ ,\ d \neq 0\ \right\}$.

APS 03: Nesta APS, vamos imitar a construção feita na parte positiva acima.

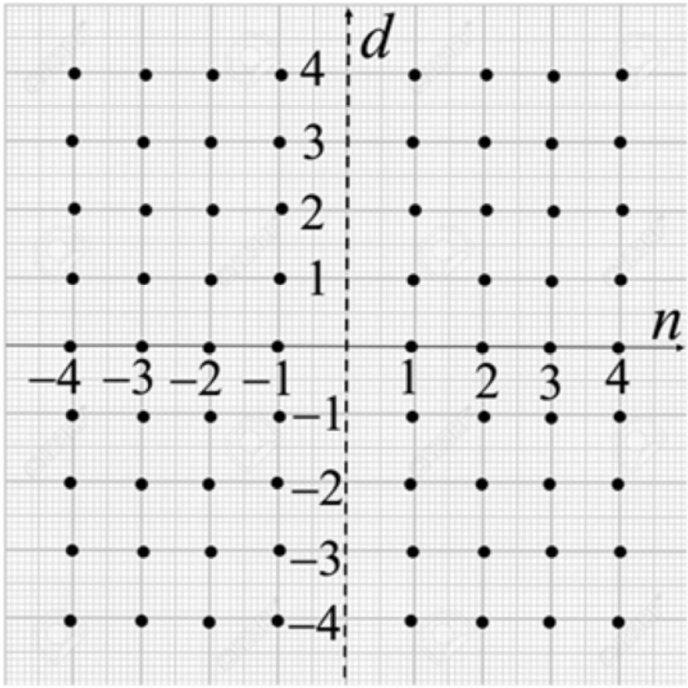


Figura 4.9: Pseudo Plano Cartesiano

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{0}{\pm 1} & \frac{0}{\pm 2} & \frac{0}{\pm 3} & \frac{0}{\pm 4} & \frac{0}{\pm 5} & \frac{0}{\pm 6} & \frac{0}{\pm 7} & \cdots \\
\frac{1}{\pm 1} & \frac{1}{\pm 2} & \frac{1}{\pm 3} & \frac{1}{\pm 4} & \frac{1}{\pm 5} & \frac{1}{\pm 6} & \frac{1}{\pm 7} & \\
\frac{2}{\pm 1} & \frac{2}{\pm 2} & \frac{2}{\pm 3} & \frac{2}{\pm 4} & \frac{2}{\pm 5} & \frac{2}{\pm 6} & \frac{2}{\pm 7} & \cdots \\
\frac{3}{\pm 1} & \frac{3}{\pm 2} & \frac{3}{\pm 3} & \frac{3}{\pm 4} & \frac{3}{\pm 5} & \frac{3}{\pm 6} & \frac{3}{\pm 7} & \cdots \\
\frac{4}{\pm 1} & \frac{4}{\pm 2} & \frac{4}{\pm 3} & \frac{4}{\pm 4} & \frac{4}{\pm 5} & \frac{4}{\pm 6} & \frac{4}{\pm 7} & \cdots \\
\frac{5}{\pm 1} & \frac{5}{\pm 2} & \frac{5}{\pm 3} & \frac{5}{\pm 4} & \frac{5}{\pm 5} & \frac{5}{\pm 6} & \frac{5}{\pm 7} & \cdots \\
\frac{6}{\pm 1} & \frac{6}{\pm 2} & \frac{6}{\pm 3} & \frac{6}{\pm 4} & \frac{6}{\pm 5} & \frac{6}{\pm 6} & \frac{6}{\pm 7} & \cdots \\
\frac{7}{\pm 1} & \frac{7}{\pm 2} & \frac{7}{\pm 3} & \frac{7}{\pm 4} & \frac{7}{\pm 5} & \frac{7}{\pm 6} & \frac{7}{\pm 7} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

Figura 4.10: Construção das frações positivas e negativas

Desta forma,com essa atividade o aluno estará preparado de fato para entender o conceito de números racionais.

4.1.3 Adição e Multiplicação de números racionais positivos.

Nesta seção, vamos construir a adição e multiplicação dos números racionais positivos, fazendo uso de material potencialmente significativo. Em seguida vamos generalizar o conceito e apresentar um algoritmo tanto para a adição quanto para a multiplicação.

Vamos qui propor atividades potencialmente significativas, para de fato atingir nossos objetivos.

Adição de números racionais positivos com denominadores iguais.

Sabemos que no conjunto dos números naturais, todo natural n é escrito da forma $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1$, com exatamente n parcelas.

Um fato, curioso está neste elemento chamado unidade, que aqui representamos por 1. Se essa ideia fosse feita pictoricamente poderíamos fazer a seguinte conjectura. Só é possível somar geometricamente pedaços congruentes. Por exemplo:

Figura 4.11: Unidade representada geometricamente

Se fosse perguntado a qualquer pessoa de escolaridade mínima quantos pedaços iguais temos aqui, certamente ela nos responderia 6 pedaços. É exatamente nesta linha de construção que iremos construir a adição de números racionais positivos. O que nos levará a um algoritmo geral.

APS 01: Nos dois quadrados a seguir represente as frações de mesmo denominador $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{7}$.

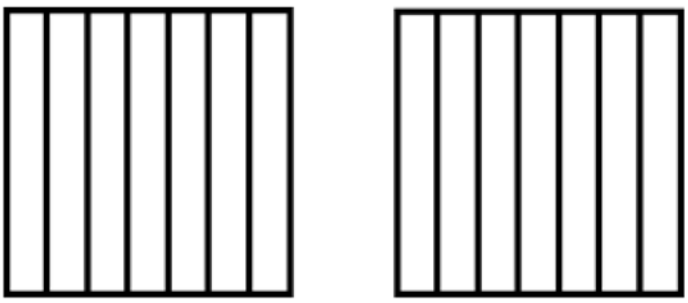


Figura 4.12: Quadrados divididos em 7 partes conguentes

Uma pergunta deve ser feita logo após o termino da atividade. Os retângulos dentro do quadrado possuem o mesmo tamanho? Sendo a resposta sim, em seguida proponha a próxima APS.

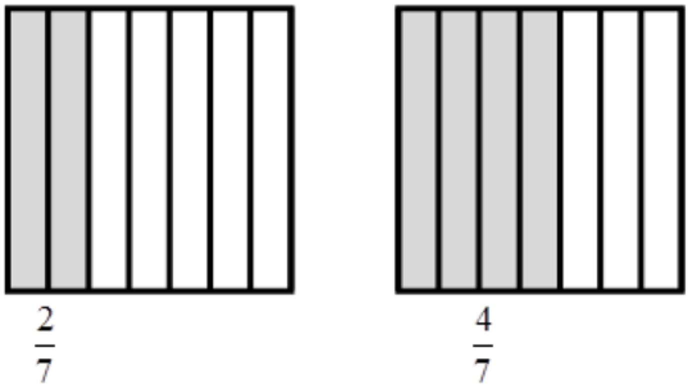


Figura 4.13: Solução das respresentações de $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{7}$

APS 02: No quadrado a seguir represente as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{7}$ uma do lado da outra.

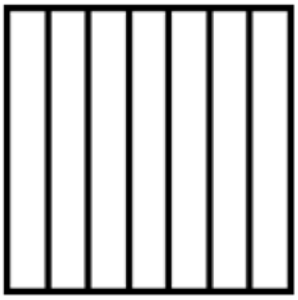


Figura 4.14: Quadrado dividido em 7 partes congruentes

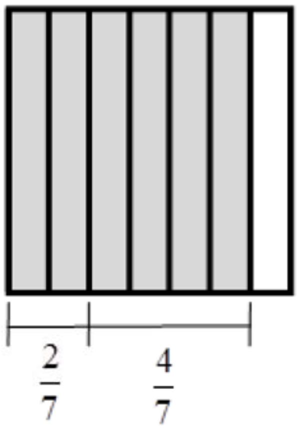


Figura 4.15: Representação $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{7}$ uma ao lado da outra

APS 03: (Nesta atividade, você faria o seguinte pedido) Represente numericamente a fração representada na figura abaixo:

APS 04: (Nesta atividade, você faria o seguinte pedido) Analise a figura e tire suas conclusões pensando na adição de pedaços iguais.

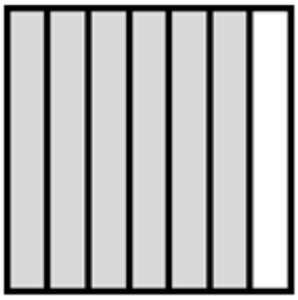


Figura 4.16: Representação geométrica da fração a ser representada numericamente

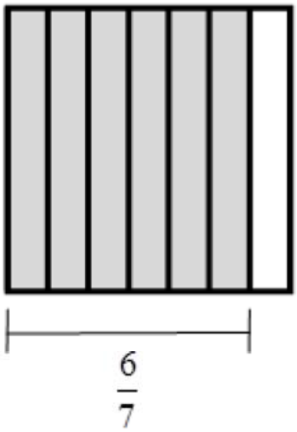


Figura 4.17: Representação geométrica de $\frac{6}{7}$

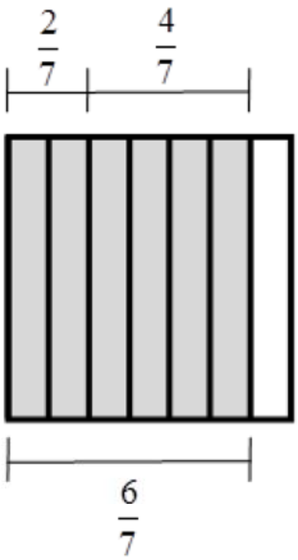


Figura 4.18: APS 04

Ao final da análise da atividade, a conclusão final esperada seria: Ao somar duas frações com mesmo denominador, basta repetir o denominador e somar os numeradores, isto é,

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}.$$

Desta forma, depois de diversas APS's, poderemos sem nenhum problema chegar a seguinte regra para somar duas frações com mesmos denominadores:

Definição 4.2 (da Soma de Frações de denominadores Iguais).
No conjunto $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{n}{d} \;;\; n \in \mathbb{N} \text{ e } d \in \mathbb{N}^*\right\}$ *dos números racionais positivos. A adição para todo par de frações* $\frac{n}{d}$ *e* $\frac{m}{d}$ *em* $\mathbb{Q}^+$ *é dada por* $\frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d}$*, isto é, para todo par de frações* $\frac{n}{d}$ *e* $\frac{m}{d}$ *em* $\mathbb{Q}^+$*com o mesmo denominador basta repetir o denominador e somar todos os numeradores "*$\frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d}$*".*

Extensão da Definição

Se $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, ..., \frac{a_n}{d}$ são números racionais, então

$$\frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d} + \ldots + \frac{a_n}{d} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{d}.$$

Frações Equivalentes

No Capitulo 3, construímos o conjunto dos números racionais sob a luz da Estrutura Algébrica e um dos fatos lá mencionados é exatamente a construção do grupo quociente dito a seguir.

De modo natural a relação de equivalência "$\sim$"induz uma partição em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, e desta forma podemos definir o conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim}$ definido por

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim} = \left\{\overline{(a\,,\,b)},\, (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\},$$

onde cada $\overline{(a\,,\,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\, (a,b) \sim (x,y)\}$, classes de equivalências , onde tal relação de equivalência já foi literalmente discutida no Capítulo 3. A título de releitura dizemos que $(a,b) \;;\; (c.d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ estão relacionados $(a,b) \sim (c.d) \Leftrightarrow ad = bc.$

Tal construção algébrica serve de subsunçor para uma construção pedagógica. Pois, a compreensão deste conceito nos auxilia na construção de um algoritmo geral para a soma de duas ou mais frações com denominadores quaisquer.

Vamos recorrer a geometria juntamente com a álgebra para (re)construir o conceito de classes de equivalências, aqui denotado por $\overline{(a\,,\,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\, (a,b) \sim (x,y)\}$.

Vamos à construção: Dado o inteiro 1, aqui representado por este retângulo temos:

Podemos observar que geometricamente $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \cdots$ possuem o mesmo espaço geométrico, o que nos leva à conjectura que são frações equivalentes. Tal afirmação pode ser confirmada pela relação $(a,b) \sim (c.d) \Leftrightarrow ad = bc.$

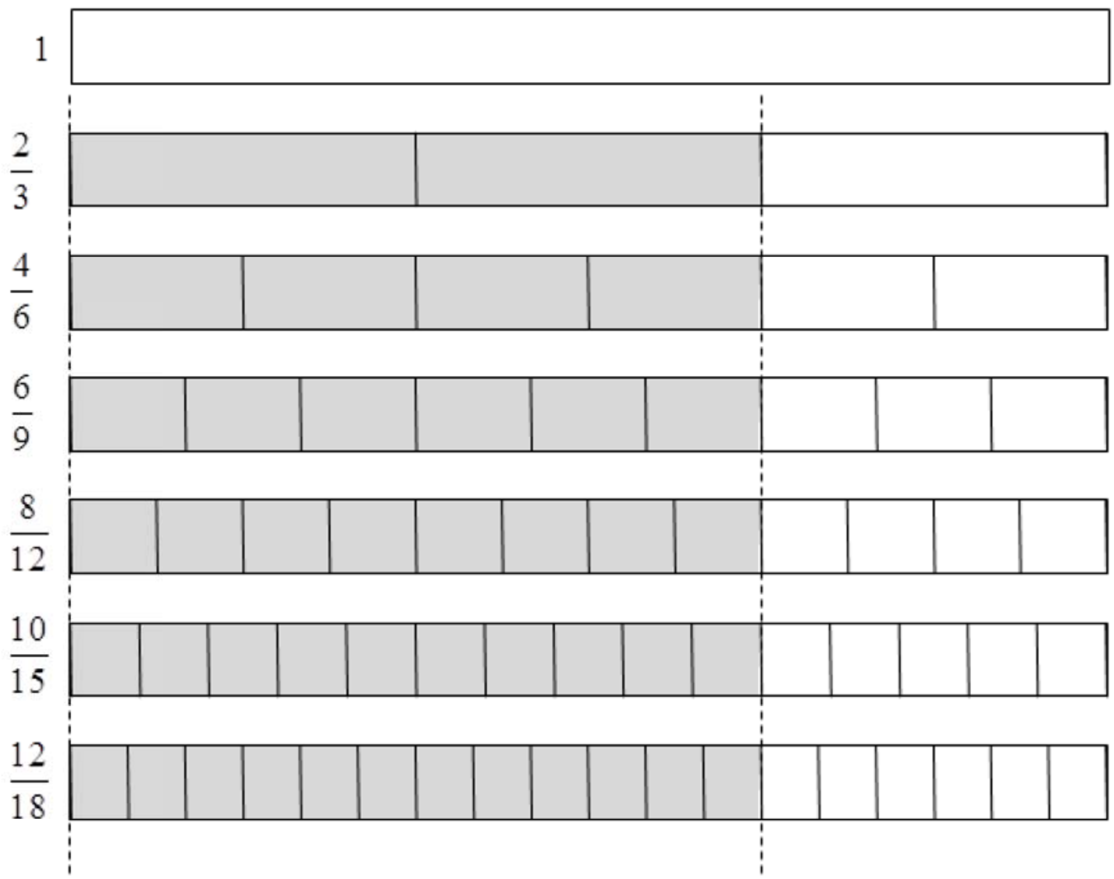


Figura 4.19: Representação geométrica de frações equivalentes a $\dfrac{2}{3}$

Desta forma a classe $\overline{(2\,,\,3)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (2, 3) \sim (x, y)\}$ pode ser vista como sendo $\left[\dfrac{2}{3}\right] = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{6}{9}, \dfrac{8}{12}, \dfrac{10}{15}, \dfrac{12}{18}, \cdots\right\}$. Acreditamos que em sala de aula o professor deva fazer mais construções equivalentes a que aqui foi feita.

Outra forma de construir tal classe, nasce como observação da construção acima, a qual seria dada por $\left[\dfrac{2}{3}\right] = \left\{\dfrac{2 \times n}{3 \times n}, n \in \mathbb{Z}^*_+\right\}$.

Feito tal construção, estamos preparado para construir a adição de duas frações quaisquer.

Soma de duas ou mais frações quaisquer em $\mathbb{Z}^*_+$.

Para esta seção, já foram construídos todos os subsunçores necessários para efetuar a soma de duas ou mais frações. Para tanto, vamos fazer tal construção fazendo uso de uma Atividade Potencialmente Significativa para no final da mesma culminar o resultado com a definição 11 de adição feita no Capitulo 3.

APS 05: Determine a soma entre as frações $\dfrac{2}{7}$ e $\dfrac{3}{5}$.

A solução da atividade a primeira vista está comprometida, pois só sabemos somar duas ou mais frações com denominadores iguais.

Desta forma vamos fazer uso da classe de equivalência das frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$.

$$\left[\frac{2}{7}\right] = \left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{8}{28}, \frac{10}{35}, \frac{12}{42}, \frac{14}{49}, \frac{16}{56}, \frac{18}{63}, \dots\right\}$$

e

$$\left[\frac{3}{5}\right] = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{18}{30}, \frac{21}{35}, \frac{24}{40}, \frac{27}{45}, \dots\right\}$$

Temos que qualquer uma das frações que compõe as classes $\left[\frac{2}{7}\right]$ e $\left[\frac{3}{5}\right]$ podem representar $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$. Vamos buscar nas duas classes de equivalências as frações que possuem os mesmos denominadores, obtendo respectivamente $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$. Desta forma teremos:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{10+21}{35} = \frac{31}{35}$$

Da igualdade $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{10+21}{35}$ podemos conjecturar o seguinte algoritmo

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 + 7 \times 3}{7 \times 5}.$$

Chegaremos ao mesmo algoritmo, fazendo uso apenas do recurso geométrico.

Vamos à construção:

Passo 01: Vamos construir dois quadrados congruentes Q_1 e Q_2.

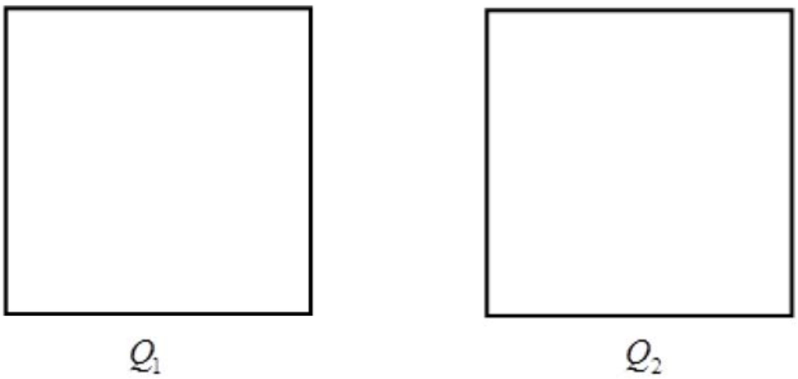


Figura 4.20: Passo 01 - Quadrados congruentes

Passo 02: Em seguida vamos particionar na vertical os dois quadrados do passo 01 da seguinte forma:

i) O quadrado Q_1 em 7(sete) partes todas iguais, pois o denominador da fração $\frac{2}{7}$ é 7.

ii) O quadrado Q_2 em 5 (oito) partes todas iguais, pois o denominador da fração $\frac{3}{5}$ é 5.

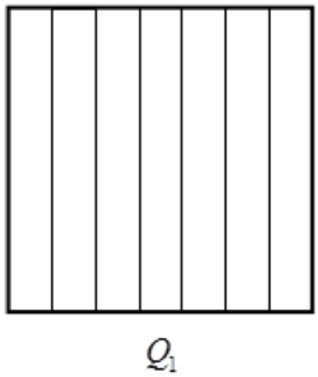


Figura 4.21: Passo 2 i) - Divisão de Q_1 em 7 partes congruentes

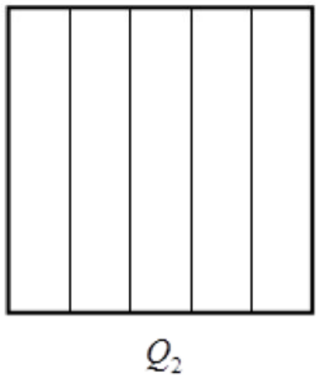


Figura 4.22: Passo 2 ii) - Divisão de Q_2 em 5 partes congruentes

Passo 03: Em seguida vamos representar nos quadrados Q_1 e Q_2 do passo 02 a fração $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ respectivamente. Para isso vamos pintar duas partes de Q_1 e três partes de Q_2.

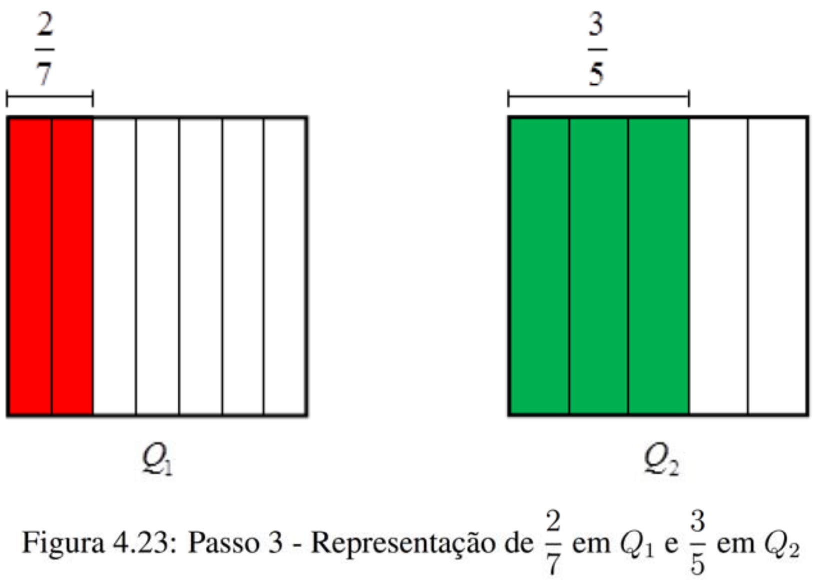


Figura 4.23: Passo 3 - Representação de $\frac{2}{7}$ em Q_1 e $\frac{3}{5}$ em Q_2

Passo 04: Temos que cada um os retângulos nas divisões de Q_1 e Q_2 que equivalem respectivamente a $\frac{1}{7}$ de Q_1 e $\frac{1}{5}$ de Q_2 no passo 03 são diferentes.

Tal afirmação pode ser comprovada simplesmente sobrepondo dois dos retângulos mencionados.

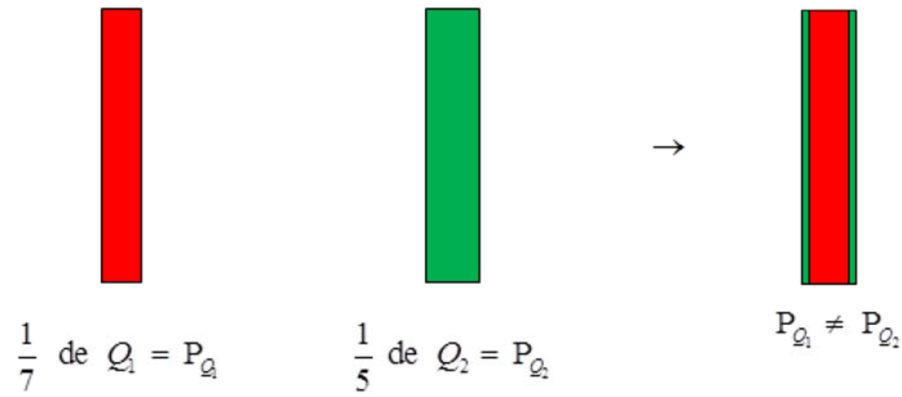


Figura 4.24: Passo 4 - Sobreposição das unidades de Q_1 e Q_2

Por este motivo não podemos simplesmente juntar as partes que representam as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$.

Passo 05: Sendo assim vamos fazer uma nova partição nos quadrados Q_1 e Q_2 no passo 03, a fim de obtermos subdivisões iguais em ambos os quadrados. Para isto, proceder da seguinte forma:

Como os quadrados Q_1 e Q_2 foram particionados em 7 e 5 pedaços respectivamente no passo 2, vamos novamente particionar "só que na horizontal " os quadrados Q_1 e Q_2 em 5 e 7 pedaços respectivamente, obtendo uma nova partição representada nos quadrados q_1 e q_2.

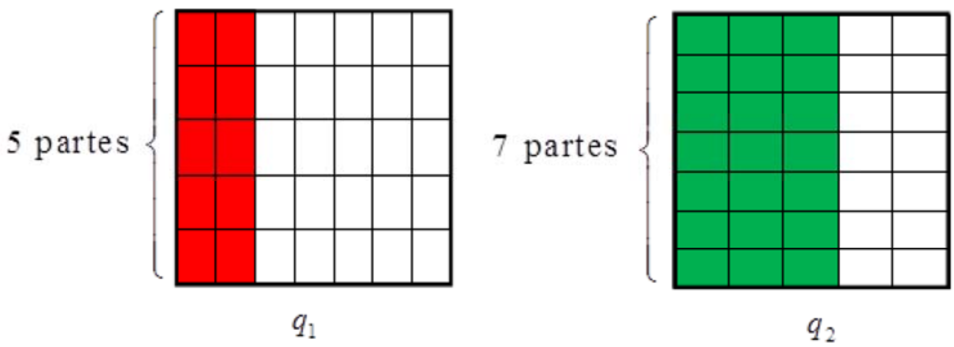


Figura 4.25: Passo 5 - Nova representação nos quadrados q_1 e q_2 na horizontal.

Passo 06: Observe que as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ representadas nos quadrados Q_1 e Q_2 respectivamente no passo 3, podem ser representadas pelas frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$ nos quadrados q_1 e q_2 respectivamente.

Neste caso dizemos que as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ são respectivamente equivalentes as frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$.

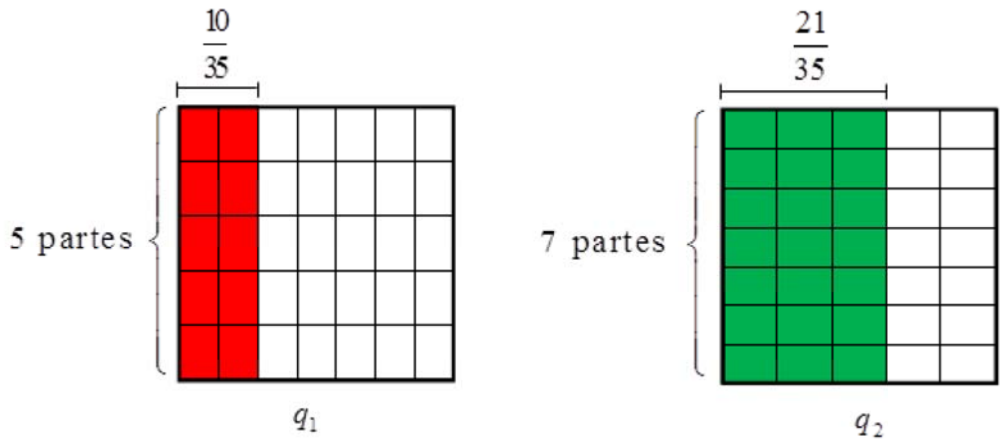


Figura 4.26: Passo 5 - Nova partição na horizontal: quadrados q_1 e q_2

Passo 07: Desta forma podemos dizer que somar as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ equivale a somar as frações equivalentes $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$, isto é , $\frac{3}{5}$ é equivalente $\frac{21}{35}$ se, e somente se $\frac{2}{7} = \frac{10}{35}$ e $\frac{3}{5}$ é equivalente $\frac{21}{35}$ se, e somente se $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$.

Passo 08: Neste passo vamos somar as frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$, fazendo uso da adição de frações com o mesmo denominador conforme o capítulo 3. Sendo assim temos:

$$\frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{10 + 21}{35} = \frac{31}{35}$$

Passo 09: Desta forma, a soma das frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ é dada por:

$$\underbrace{\frac{2}{7} + \frac{3}{5}}_{\text{CASO1}} = \underbrace{\frac{10}{35} + \frac{21}{35}}_{\text{CASO2}} = \frac{31}{35}$$

$$\underbrace{\frac{2}{7} + \frac{3}{5}}_{\text{CASO1}} = \underbrace{\frac{10}{35} + \frac{21}{35}}_{\text{CASO2}} = \frac{31}{35}$$

Podemos observar também que $\begin{cases} 10 = 2 \cdot 5 \\ 21 = 7 \cdot 3 \\ 31 = 10 + 21 \\ 35 = 7 \cdot 5 \end{cases}$, sendo assim, temos que

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 7 \cdot 3}{7 \cdot 5}.$$

Após a realização de outras APS desta natureza, o aluno estará apto a compreender a definição a seguir:

Definição 4.3 (Definição Algébrica: Adição de duas frações com denominadores quaisquer)**.**

Se $\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \dfrac{x}{y},\ x, y \in \mathbb{Z}_+^* \right\}$ *é o conjunto dos números racionais positivos, então* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ *para todo* $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+^*$.

Após a realização de atividades para fixação do algoritmo de adição em $^*_+$, tanto o professor quanto o aluno estão prontos para estender o conceito de adição para todo os números racionais, como foi escrito na Definição 3.1 do Capítulo 3, a qual vamos reescrever a seguir só para melhor compreensão da construção pedagógica da adição em $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} + : \times \to \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \end{aligned} \quad \text{para todo par } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Um fato importante é que tanto na construção axiomática quanto na construção algébrica, não fica muito claro de onde surge a definição da adição de números racionais. Já na construção pedagógica o algoritmo pode ser justificado geometricamente em detalhes, desta forma acreditamos que tal algoritmo se justifica como um objeto matemático fortalecendo a aprendizagem significativa.

Um fato que não podemos deixar passar sem ser notado, é que o aprendizado da soma de duas ou mais frações não depende do conhecimento prévio do Cálculo de MMC dos denominadores pelo aluno. É claro que o professor irá gradualmente introduzir tal conceito para operacionalizar muitas somas de frações, e certamente teremos uma aprendizagem significativa, pois segundo David Ausubel já foram construídos todos os subsunçores necessários para tal construção.

Na construção deste trabalho, ao discutir esta proposta com alguns colegas professores, me indagaram sobre a soma de três ou mais frações. A resposta a seguinte:

A ideia em Matemática é a valorização do pensamento e não do decorar. É claro que em alguns momentos decorar é importante, todavia nem tudo em Matemática é decorar. Desta forma, a solução para a pergunta possui como resposta o uso de propriedades, que neste caso é a associativa. Vejamos um exemplo:

Determine a soma $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7}$.

Solução:

A solução se da naturalmente da seguinte forma:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) + \frac{4}{7} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 3}{3 \times 5} + \frac{4}{7} = \frac{19}{15} + \frac{4}{7} = \frac{17 \times 9 + 15 \times 5}{15 \times 7} = \frac{193}{105}$$

Multiplicação entre dois ou mais números racionais positivos.

Para essa construção, vamos iniciar fazendo uso de um pequeno exercício assim enunciado. Pedro vendeu $\dfrac{3}{7}$ de seus 28 patos que criava. Quantos patos ele vendeu?

A solução poderia ser feita da seguinte maneira: Poderia representar geometricamente $\frac{3}{7}$ pela Figura 4.27.

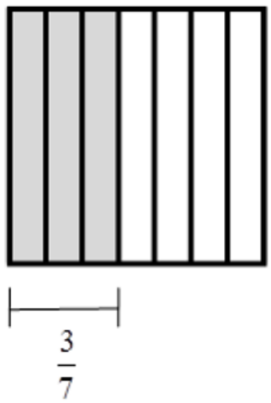


Figura 4.27: Representação geométrica de $\frac{3}{7}$

Em seguida vamos fazer a uma representação dos 28 patos por "pontos pretos" e fazer a distribuição na Figura 4.27:

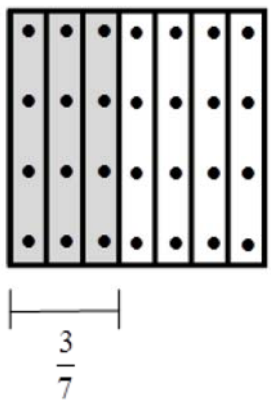


Figura 4.28: Representação geométrica da distribuição dos patos

A conclusão seria: $\frac{3}{7}$ de 28 é 12. Tal citação será identificada por $\frac{3}{7} \times 28 = 12$, nos dando uma pista sobre a multiplicação de uma fração por um inteiro.

Tal dica nos diz o seguinte: $\frac{3}{7} \times 28 = \frac{3 \times 28}{7} = 12$.

Pensando desta forma, vamos apresentar APS's para construir a ideia do algoritmo produto entre dois números racionais positivos.

APS 05: Determine $\frac{4}{5}$ de 1 inteiro.

Para determinar $\frac{4}{5}$ de 1, vamos recorrer a geometria a seguir, particionando o inteiros representado pelo quadrado em quintos:

Dos quais a parte hachurada representa $\frac{4}{5}$ de 1.

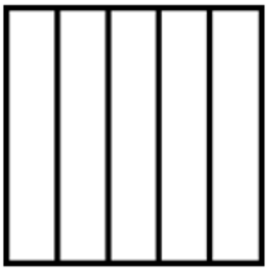


Figura 4.29: Partição do inteiro em quintos

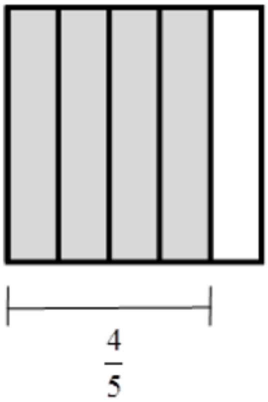


Figura 4.30: Representação geométrica de $\frac{4}{5}$

Uma forma de escrever $\frac{4}{5}$ de 1 inteiro, será $\frac{4}{5} \times 1 = \frac{4}{5}$.

APS 06: Determine $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de 1 inteiro.

Fazendo uso da APS 05, temos que $\frac{4}{5}$ de 1 inteiro geometricamente, vamos partir o mesmo em terços.

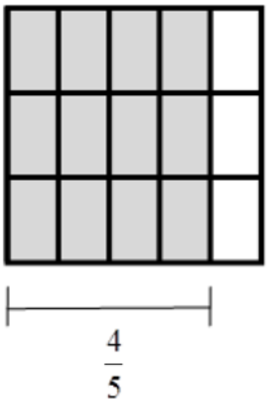


Figura 4.31: Partição do quadrado da APS 05 em terços de

Hachurando $\frac{2}{3}$ da Figura 4.31 teremos:

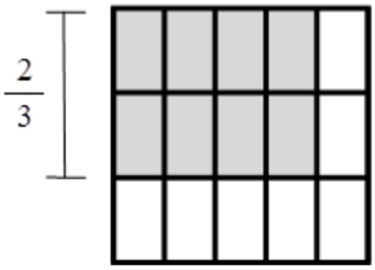


Figura 4.32: Representação de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

Desta forma podemos observar que a fração que indica a parte hachurada da Figura 4.33 é $\frac{8}{15}$.

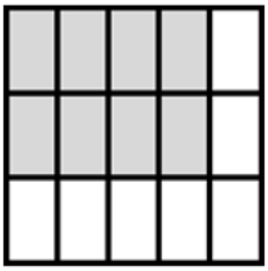


Figura 4.33: Representação de $\frac{8}{15}$

Observação 4.1. *Temos que* 8 *é* 2×4*, que corresponde na Figura 4.34 o seguinte:*

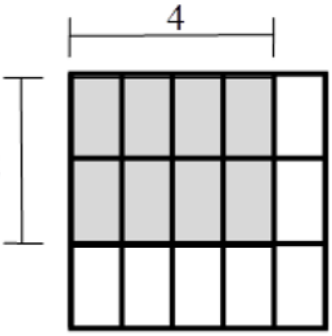


Figura 4.34: Representação da Observação 4.1

Observação 4.2. *Temos que* 15 *é* 3×5*, que corresponde na Figura 4.27 a partição feita no quadrado:*

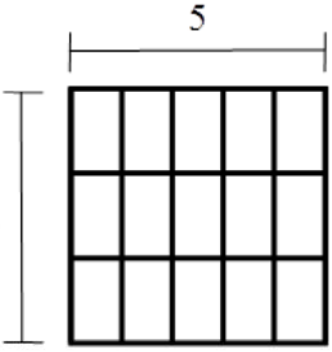


Figura 4.35: Representação da Observação 4.2

Juntando as duas observações teremos:

A fração que representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de 1 inteiro é $\frac{8}{15}$. O qual vamos representada por

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Após a realização de outras APS desta natureza, o aluno está apto a receber a definição a seguir:

Definição (da Multiplicação de Frações Positivas) : No conjunto $\mathbb{Q}^{+} = \left\{ \frac{n}{d}; n \in \mathbb{N} \text{ e } d \in \mathbb{N}^{*} \right\}$ dos números racionais positivos. A multiplicação para todo par de frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ em $^{+}$ é dada por $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, isto é, para todo par de frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ em $\mathbb{Q}^{+}$, basta multiplicar os numeradores e os denominadores.

Extensão da Definição acima: Se $\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_2}, ..., \frac{a_n}{d_n}$ são números racionais positivos, então

$$\frac{a_1}{d_1} \times \frac{a_2}{d_2} \times \ldots \times \frac{a_n}{d_n} = \frac{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n}{d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n}.$$

De modo muito natural a definição do produto de dois números racionais pode ser estendida para todo o conjunto dos números racionais . Desta forma teremos:

Definição (da Multiplicação de Frações) : No conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{d}; n, d \in \mathbb{Z} \text{ e } d \neq 0\right\}$ dos números racionais. A multiplicação para todo par de frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ em $\mathbb{Q}$ é dada por $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, isto é, para todo par de frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ em $\mathbb{Q}$, basta multiplicar os numeradores e os denominadores.

Após a construção metodologicamente da adição e multiplicação entre duas frações quaisquer podemos sem nenhum problema apresentar o conjuntos dos números racionais como sendo o primeiro corpo, matematicamente falando a ser trabalhado no ensino básico. Desta forma, poderemos apresentar passo a passo a Proposição 3.1 do Capítulo 3 em sala de aula, acompanhada de exemplos.

Desta forma, podemos naturalmente pensar o quem vem a ser a subtração entre dois números racionais?

4.2 Subtração entre números racionais positivos.

Sabemos que para todo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, tem-se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Como todo elemento de possui um simétrico, logo o simétrico de $\frac{c}{d}$ será $-\frac{c}{d}$, o qual pode ser escrito como $\frac{-c}{d}$, desta forma teremos quer:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad + b\,(-c)}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Sendo assim, somos levados a pensar na seguinte definição para a subtração:

Definição 4.4. *Definiremos a subtração em respectivamente por*

$$\begin{aligned} - : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \end{aligned}$$

Exemplo: Determine $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$.

Solução:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7 \times 4 - 8 \times 3}{8 \times 4} = \frac{28 - 24}{32} = \frac{4}{32}.$$

4.3 A construção do Algoritmo da divisão entre dois números reacionais.

Vamos dar continuidade a este capítulo, construindo a divisão entre dois números racionas (sob certas condições dadas).

Já que estamos falando de Matemática, vamos aqui apresentar uma proposta algébrica para a divisão entre dois racionais.

Construção do Algoritmo da Divisão entre dois Números Racionais sob a Luz da álgebra.

Vamos começar fazendo uso de duas afirmações, as quais já foram trabalhadas nos capítulos anteriores.

Afirmação 01: Sabemos que para todo par de números racionais

$$\left(\frac{a}{b}\ ,\ \frac{c}{d}\right)\ \mapsto\ \frac{a}{b}\ \cdot\ \frac{c}{d}\ :=\ \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

ainda será um número racional.

Esta afirmação foi construída de forma metodológica ou foi dada pela Definição 3.1 do Capítulo 3.

Afirmação 02: Sabemos que para todo par de números inteiros $(x\ ,\ x)\ \mapsto\ x\ \cdot\ y$ ainda será um número inteiro.

Esta afirmação dada pela Definição 2.1 do capítulo 2. Sendo $x \cdot y \in \mathbb{Z}$, podemos pensar que existe $z \in \mathbb{Z}$, tal que $x \cdot y = z \Leftrightarrow z \div = x$ ou $x \cdot y = z \Leftrightarrow z \div x = y$.

Exemplo: Temos que $4 \times 12 = 48 \Leftrightarrow 48 \div 12 = 4ou48 \div 4 = 12$.

Agora estamos prontos para construir algebricamente o que vem a ser $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ para todo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ com $\frac{c}{d} \neq 0$.

Construção Algébrica

Está construção é especialmente para o professor ou equivalente. Já a apresentação para o aluno, será feita na primeira solução de um exemplo que iremos apresentar logo após a construção do algoritmo.

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ com $\frac{c}{d} \neq 0$. Admitindo que existe $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{a}{b}\ \div\ \frac{c}{d}\ =\ \frac{x}{y}\ .$$

Fazendo uso do Subsunçor da afirmação 2, teremos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d}$$

Fazendo uso do Subsunçor da afirmação 1, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x \cdot c}{y \cdot d}$$

A Proposição 3.3 do Capítulo 3, nos diz que $(a\ ,\ b)\ ,\ (c\ ,\ d) \in \mathbb{Q}$, tem-se que $(a\ ,\ b) \sim (c\ ,\ d) \ \Leftrightarrow\ a \cdot d = b \cdot c$, equivalentemente temos ,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Voltando a $\frac{a}{b} = \frac{x \cdot c}{y \cdot d}$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c \cdot x}{d \cdot y} &\Leftrightarrow a \cdot (d \cdot y) = b \cdot (c \cdot x) \\ &\Leftrightarrow (a \cdot d) \cdot y = (b \cdot c) \cdot x \\ &\Leftrightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{x}{y} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Sendo $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$ e $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, podemos concluir que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Vamos a um exemplo: Determine $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$.

Acreditamos que esta primeira solução deve ser feita e refeita, até que o aluno entenda o algoritmo. Em seguida, ele deverá refazer as atividades feitas e outras naturalmente, somente fazendo uso do algoritmo.

Primeira Solução: Faça $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$ igual a $\frac{x}{y}$, isto é, $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{x}{y}$, logo

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{x}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{x}{y} \cdot \frac{5}{7} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot x}{7 \cdot y} \\
&\Leftrightarrow \quad 3 \cdot (7 \cdot y) = 4 \cdot (5 \cdot x) \\
&\Leftrightarrow \quad (3 \cdot 7) \cdot y = (4 \cdot 5) \cdot x \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{x}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}
\end{aligned}
$$

Sendo $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{x}{y}$ e $\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}$, logo teremos que

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}.$$

Observação: Após ter feito várias atividades como esta, podemos definir o **Algoritmo da Divisão entre dois Números Racionais**, a saber:

Se $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ com $\frac{c}{d} \neq 0$, temos que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Após isso, as atividades poderão ser refeitas fazendo uso do Algoritmo da Divisão entre dois Números Racionais.

Segunda Solução: Temos que $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

4.4 Comparação entre dois Números Racionais

O Lema 3.1 e a Proposição 3.6 do Capítulo 3 nos diz respectivamente que o conjunto é ordenado e satisfaz certas propriedades envolvendo desigualdades.

Nesta seção, vamos apresentar um exercício para motivar a verificação da ordem entre duas frações.

Exercício: Pedro possuía R\$35.000,00 e deu a João e a José dois sétimos e três quintos da quantia total, respectivamente. Quem recebeu mais dinheiro, João ou José? Justifique sua resposta.

Solução 1:

Calculando o que foi dado a João: Vamos calcular $\frac{2}{7}$ de R\$35.000,00. Após algumas contas teremos como resposta R\$10.000,00.

Calculando o que foi dado a José: Vamos calcular $\frac{3}{5}$ de R$35.000,00. Após algumas contas teremos como resposta R$21.000,00.

Em seguida, podemos concluir que José recebeu mais dinheiro que João.

Solução 2: Podemos simplesmente avaliar qual das frações é a maior. Com base nesta informação, podemos a resposta correta.

Vamos trabalhar para construir uma técnica na qual seja possível comparar por meio de construção geométrica duas frações.

R$35.000,00 será representado pelo inteiro 1, o qual será representado geometricamente pelos quadrados congruentes como mostra a Figura 4.36, nos quais indicaremos as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$.

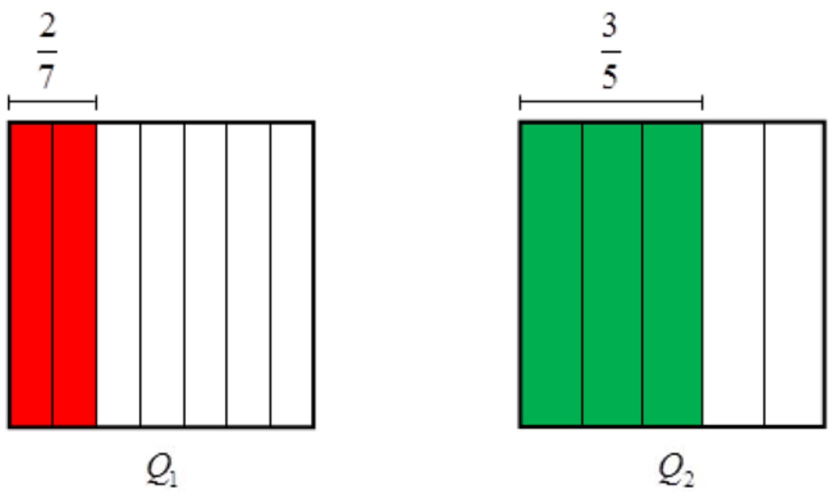


Figura 4.36: Representação geométrica de $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$

De modo natural, podemos observar geometricamente que $\frac{2}{7}$ é menor que $\frac{3}{5}$, isto é José recebeu mais dinheiro que João.

Para isso, vamos fazer uma nova partição dos quadrados Q_1 e Q_2 na horizontal em 5 e 7 partes respectivamente como mostra a Figura 4.37.

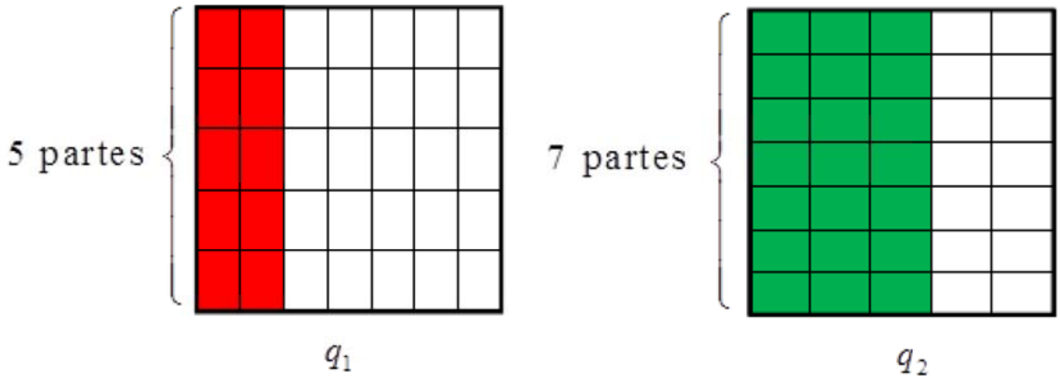


Figura 4.37: Partição horizontal em 5 e 7 partes

Observe que as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ representadas nos quadrados Q_1 e Q_2 respectivamente, serão representadas pelas frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$ nos quadrados q_1 e q_2 respectivamente como mostrado na Figura 4.38.

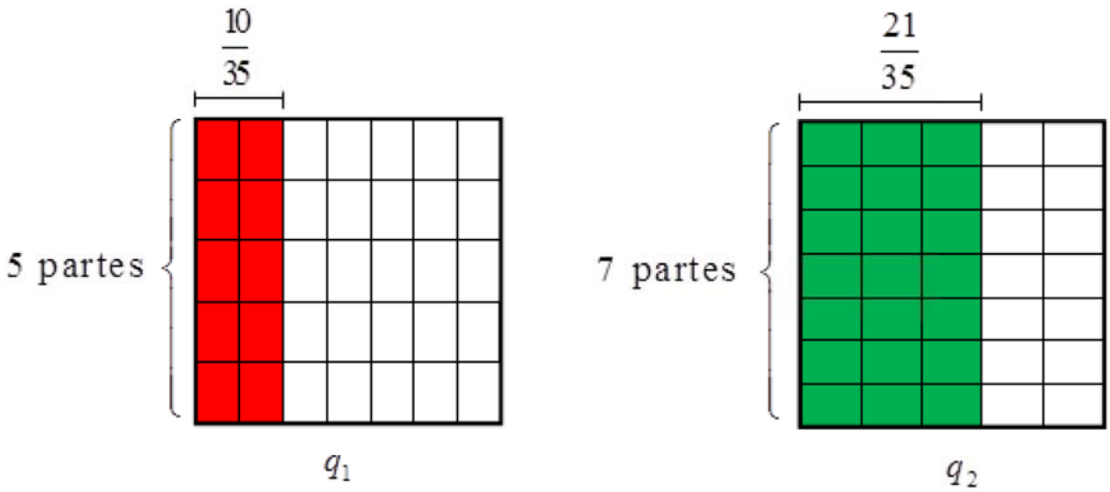


Figura 4.38: Representação geométrica de $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$

Neste caso dizemos que as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ são respectivamente equivalentes as frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$.

Como as frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$ possuem o mesmo denominador, basta comparar os numeradores. Desta forma, concluímos que $\frac{10}{35}$ é menor que $\frac{21}{35}$. Como as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$ são respectivamente equivalentes as frações $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$, podemos concluir que $\frac{2}{7}$ é menor que $\frac{3}{5}$.

Desta forma teremos que:

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{10}{35} < \frac{21}{35} \Leftrightarrow 10 < 21 \Leftrightarrow 2 \times 5 < 7 \times 3$$

Logo podemos concluir que:

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2 \times 5 < 7 \times 3.$$

Voltando a solução do exercício, podemos afirmar que José recebeu mais dinheiro que João, pois,

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2 \times 5 < 7 \times 3.$$

e modo geral podemos concluir que para todo par $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ temos que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc.$$

Outras desigualdade podem ser propostas. Para todo par $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

ou

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \geq bc$$

ou

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc.$$

Considerações Finais

O presente trabalho visou demonstrar um exemplo de utilização de TAS no processo de ensino/aprendizagem das operações e propriedades do conjunto dos números racionais. Foi possível apresentar a proposta de David Ausubel que nos orienta enquanto educadores e estudantes considerar os conhecimentos prévios dos indivíduos que aqui foi chamado de subsunçor. A utilização da TAS não impede, de forma alguma, que sejam vistos os conceitos, proposições e teoremas que embasam a matemática em sua totalidade. A intenção do trabalho foi disponibilizar uma forma de construção de um objeto matemático de maneira simples sem banalizar a teoria matemática e principalmente agregar informações/conteúdos ao conhecimento já adquirido pelos alunos.

A metodologia utilizada neste trabalho pode ser aplicada no estudo de outros assuntos dentro da matemática e também de outras disciplinas. O papel inicial do professor nesse processo é primeiramente investigar quais subsunçores o aluno possui e se não possui, permitir que ele tenha condições de o tê-lo para que esse subsunçor sirva de âncora para os novos conhecimentos. Uma vez acontecendo a aprendizagem de forma lúdica, de forma significativa o professor poderá enfatizar a fundamentação matemática que rege o conteúdo explicado.

Devemos ponderar que não tratamos aqui de uma proposta fechada e acabada, alterações e acréscimos que possam contribuir para o desenvolvimento da TAS no ensino da matemática serão sempre bem recebidas e fazem parte da evolução da prática docente.

Referências Bibliográficas

[1] Adilson Gonçalves. Álgebra i. *Rio de Janeiro: IMPA*, 2003.

[2] Abramo Hefez. *Elementos de aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] H D Hygino and I Gelson. Álgebra moderna. *São Paulo: editora atual*, 2003.

[4] Nathan Jacobson. *Basic algebra I*. Courier Corporation, 2012.

[5] Marco A Moreira and Elcie FS Masini. Aprendizagem significativa: A teoria de david ausubel,(1982).

[6] Adriana Pelizzari, M de L Kriegl, Márcia Pirih Baron, Nelcy Teresinha Lubi Finck, and Solange Inês Dorocinski. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. *revista PEC*, 2(1):37–42, 2002.