

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

TEOREMAS DE PAPPUS: SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Maurício Rafael Oliveira Costa

MANAUS

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Maurício Rafael Oliveira da Costa

TEOREMAS DE PAPPUS: SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS
2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C837t Costa, Maurício Rafael Oliveira da
Teorema de Pappus : Superfícies e Sólidos de Revolução /
Maurício Rafael Oliveira da Costa. 2017
65 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Teoremas de Pappus. 2. Superfícies de revolução. 3. Sólidos
de revolução. 4. Geometria Espacial. I. Oliveira, Dr. Disney Douglas
de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

MAURICIO RAFAEL OLIVEIRA DA COSTA

TEOREMAS DE PAPPUS: SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28 de Setembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

Presidente



Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

Membro



Prof. Dr. Max Ferreira

Membro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, pela graça e oportunidades.

À minha família: minha mãe, pelo incentivo e meus irmão, pelo apoio.

Aos colegas de turma: Genilce, André, Audemir, Clicio, Felipe e Celiomar, pelo incentivo e companheirismo que se estendeu além da sala de aula e dos grupos de estudo.

Ao meu orientador, Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira, pela infinita paciência e pela orientação no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar que os teoremas de Pappus para centroides é muito eficiente e simples na resolução, de algumas questões, sobre superfícies e sólidos de revolução. Essa é uma das muitas contribuições à matemática feita por Pappus de Alexandria por intermédio de sua obra *A Coleção Matemática (Mathematicon Synagoga)*. Os teoremas de Pappus não são estudados no ensino médio e no nível superior poucas vezes. As superfícies e sólidos de revolução são estudados tanto no ensino médio quanto no nível superior, e estes, teoremas simplificam os cálculos das áreas e volumes dos sólidos de revolução. Aborda-se também, neste trabalho, o centro de gravidade de figuras planas, que é de grande importância para aplicação dos teoremas. Utilizou-se de teoremas e proposições, do cálculo, para a demonstração dos dois teoremas de Pappus.

Palavras-chave: Teoremas de Pappus, Superfícies de revolução, Sólidos de revolução.

ABSTRACT

This research intends to demonstrate how efficient and how easy the use of Pappus' centroid theorems can be at solving problems of surface areas and solids of revolution. The use of centroid theorems is one of the many contributions Pappus of Alexandria made to Mathematics through his work, *The Synagogue*. Currently, Pappus' theorems are not studied in Secondary Education and are not commonly studied in university; on the other hand, surface areas and solids of revolutions are studied both in Secondary Education and university level whilst Pappus' theorems can be used to simplify the calculations of surface areas and solids of revolution. The research also addresses the centre of gravity of simple plane figures, which is of extreme importance in the application of the theorems. Finally, theorems and propositions of Calculus were used for the demonstration of the two theorems of Pappus.

Keywords: Pappus' Theorems, Surface areas, Solids of revolution

LISTA DE SÍMBOLOS

$=$	Igual.
\cong	Aproximado.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
\geq	Maior e igual.
\leq	Menor e igual.
\in	Pertence.
\overline{AB}	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
\triangle	Triângulo.
\int	Integral.

Lista de Figuras

2.1	Superfície de revolução	7
2.2	superfície lateral de um cilindro	8
2.3	Linha de Comprimento L	8
2.4	Rotação da Poligonal	9
2.5	Sólido de revolução	10
2.6	Cone de revolução	10
2.7	Figura plana de área S	11
2.8	Retângulos justapostos	11
2.9	Rotação de P	12
3.1	Centro de Gravidade	13
3.2	Baricentro	14
3.3	Dois desenhos aparentemente iguais	14
3.4	Centro de Massa	15
3.5	Eixo de apoio	15
3.6	Eixo de apoio sobre o eixo x	16
3.7	Sistema de partículas	17
3.8	Centro de massa do gráfico de uma função	18
3.9	Centro de massa de uma região plana	19
3.10	Semicircunferência	19
3.11	Coordenada do Centro de gravidade da semicircunferência	20
3.12	Semicírculo	20
3.13	Centro de gravidade de um semicírculo	21
3.14	Semicírculo	21
3.15	Retângulo	23
3.16	Centro de gravidade de um retângulo	23
3.17	Triângulo retângulo	24
3.18	Centro de gravidade de um triângulo retângulo	24
3.19	baricentro de um triângulo	25
3.20	Análise da altura em relação a mediana	25
3.21	baricentro do triângulo isóscele e equilátero	26

3.22	baricentro do triângulo	26
3.23	Polígono dividido em triângulos	27
3.24	Trapézio	28
3.25	Centro de gravidade do trapézio	28
3.26	Coordenadas dos centros de massas	28
3.27	Centro de massa da figura	29
3.28	Figura plana	29
3.29	Coordenadas da figura plana	30
3.30	Parte de um quarto de círculo	30
3.31	Trapézio isóscele	31
3.32	Centro de gravidade do trapézio isóscele	31
4.1	Região entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$	32
4.2	Comprimento do gráfico da função $y = f(x)$	33
4.3	Casca cilíndrica	34
4.4	Casca cilíndrica obtida pela rotação da região R	34
4.5	Região limitada pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$	35
4.6	Retângulo que compõe a região R	36
4.7	Anel circular da rotação de um retângulo da região R	36
4.8	Superfície de revolução em torno do eixo x	37
4.9	Superfície de revolução em torno do eixo y	38
5.1	Trapézio	42
5.2	Trapézio isóscele	42
5.3	Sólido gerado pelo trapézio	43
5.4	Triângulo equilátero	44
5.5	Triângulo equilátero	44
5.6	Centro de gravidade do triângulo equilátero	45
5.7	Círculo de raio 1	45
5.8	Toro	46
5.9	Trapézio isóscele	47
5.10	Peça gerada pela rotação do trapézio	48
5.11	Um quarto de uma circunferência	48
5.12	Triângulo ABC de área S	49
5.13	Triângulo agudo	50
5.14	Sólido gerado pelo triângulo agudo	50
5.15	Quadrado de lado igual a 4	51
5.16	Superfície gerada pela rotação do quadrado	51
5.17	Região sombreada	52
5.18	Sólido gerado pela região sombreada	52

Sumário

Introdução	1
1 Pappus de Alexandria	3
1.1 Vida de Pappus	3
1.2 Obra de Pappus	4
2 Os Teoremas de Pappus para Superfícies e Sólidos de Revolução	7
2.1 Superfícies de revolução	7
2.2 Primeiro Teorema	8
2.3 Sólidos de revolução	10
2.4 Segundo Teorema	11
3 Centros de gravidade	13
3.1 Momentos e Centros de Massa	15
3.2 Centro de massa do gráfico de uma função	18
3.3 Centro de massa de uma região plana	18
3.4 Cálculo para determinar o centro de gravidade de uma semicircunferência	19
3.5 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um semicírculo	20
3.6 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um quarto do círculo	21
3.7 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um retângulo	22
3.8 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um triângulo retângulo	23
3.9 Centro de massa de triângulos	24
3.10 Centro de massa de figuras compostas	27
3.11 Localizando o centro de gravidade de figuras planas	28
4 Os Teoremas de Pappus utilizando as ferramentas do Cálculo	32
4.1 Área entre duas curvas	32
4.2 Comprimento do gráfico de uma função	33
4.3 Método das Cascas Cilíndricas	33
4.4 Método do Anel Circular	35
4.5 Área de Superfície de Revolução	37

4.6	O Primeiro Teorema de Pappus	38
4.7	O Segundo Teorema de Pappus	40
5	Aplicações dos Teoremas de Pappus	42
	Considerações Finais	53

Introdução

São denominados Teoremas de Pappus para centroides os dois teoremas citados pela primeira vez na obra *Coleção Matemática* do matemático da antiguidade Pappus de Alexandria. A obra era dividida em oito livros, e no livro VII entre tantos teoremas, aparece os dois que segundo Boyer [3], afirmavam: se uma curva fechada gira em torno de uma reta que não a corta, o volume do sólido gerado é obtido tomando o produto da área limitada pela distância percorrida durante revolução pelo centro de gravidade da área. Pappus justificadamente se orgulhava desse teorema muito geral, pois abordava um grande número de teoremas de todos os tipos, sobre curvas, superfícies e sólidos, todos provados simultaneamente com uma demonstração. É de fato o teorema mais geral envolvendo o cálculo que se encontra na antiguidade. Pappus também nos apresentou com um teorema análogo que diz que a área da superfície gerada pela rotação de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centroide da curva durante a revolução. Os dois teoremas nos permitem calcular a área de uma superfície de revolução e o volume de um sólido de revolução.

Para alunos do ensino superior, o cálculo de superfícies e volumes de sólidos é estudado no cálculo diferencial e integral, da maneira mais complexa, exigindo o conhecimento de várias proposições e teoremas do Cálculo.

No ensino médio, o cálculo das superfícies e sólidos de revolução é feito no estudo dos corpos redondos: cilindro, cone e esferas. Nesse estudo são apresentadas várias fórmulas aos alunos para determinar área e volume dos sólidos de revolução.

Sendo assim, o estudo dos teoremas de Pappus para centroides se mostra bastante importante para a resolução de problemas de maneira eficiente e simples, possibilitando a resolução de questões que parecem muito difíceis para alunos do ensino médio ou até mesmo do nível superior.

O primeiro capítulo desta pesquisa faz uma pequena abordagem histórica, do pouco que se sabe, sobre a vida de Pappus de Alexandria e da sua grandiosa obra, que fornece um valioso histórico de partes da matemática grega, denominada *A Coleção Matemática*.

No segundo capítulo definiremos superfícies e sólidos de revolução. Também definiremos uma abordagem dos dois teoremas de Pappus, porém as demonstrações gerais serão feitas no penúltimo capítulo deste trabalho.

O capítulo três trata dos centros de gravidade (ou centro de massa, também conhecido como baricentro), utilizando noções intuitivas da geometria e definições do cálculo. Todos esses

conceitos são de grande importância, já que o centro de gravidade é necessário para aplicação dos dois teoremas de Pappus.

Para uma demonstração geral dos dois teoremas de Pappus serão abordadas, no capítulo quatro, várias proposições do cálculo integral. E com essas ferramentas do cálculo poderemos concluir a demonstração dos dois teoremas de maneira satisfatória.

E por fim, o capítulo cinco trás inicialmente uma comparação entre resolução tradicional de superfícies e sólidos de revolução e a resolução utilizando os teoremas de Pappus. Essas comparações confirmam a eficiência e praticidade do uso dos teoremas.

Capítulo 1

Pappus de Alexandria

1.1 Vida de Pappus

Pappus de Alexandria foi um grande geômetra das Escolas helênicas. Um matemático como refere Boyer [3], "Mas durante o reino de Diocleciano ¹ viveu novamente em Alexandria um matemático que era movido pelo mesmo espírito que animara Euclides, Arquimedes e Apolônio."

Desconhece-se a data e o local exatos do nascimento de Pappus de Alexandria. Segundo Paul Ver Eecke [4], "podemos com alguma razoabilidade admitir que Pappus viveu entre o fim do século III e a primeira metade do século IV d.C.". Teria, portanto, vivido num mundo dominado politicamente por Roma, em particular durante o reinado do imperador Diocleciano. Também é desconhecido onde teria feito os seus estudos, bem como quem foram os seus mestres e discípulos. Proclo ² dizia que o geômetra teria ensinado em Alexandria, devendo ter publicado a *Coleção Matemática*. Nas obras de Pappus, conservadas até aos nossos dias, não há qualquer referência à sua personalidade ou ao seu modo de vida, a não ser que teve um filho chamado Hermódoro, a quem dedicou os prefácios dos Livros VII e VIII da *Coleção Matemática*. Também se sabe da sua amizade com Pandrósio e Megécio, dois geômetras vagamente mencionados na sua obra, mas que, no entanto, são desconhecidos.

Segundo Arton, Bivens e Davis [1], Pappus viveu no início da era cristã, quando a atividade matemática estava num período de declínio. Suas principais contribuições aparecem numa série de oito livros chamadas *A Coleção* (escrito de 340 d.C). Esse trabalho, que foi preservado apenas só parcialmente, continha alguns resultados originais, mas era mais dedicado a deduções, aperfeiçoamentos e demonstrações de resultados de matemáticos anteriores.

¹(284-305)

²Proclo de Lícia foi um filósofo neoplatônico grego do século V, que presidiu a Academia platônica de Atenas

1.2 Obra de Pappus

A *Coleção Matemática* de Pappus de Alexandria é uma obra dividida em oito livros. Como refere Boyer [3], esta obra "fornece um registo histórico muito valioso de partes da matemática grega que de outro modo não conheceríamos. Por exemplo, é pelo Livro V da *Coleção* que temos conhecimento da descoberta por Arquimedes dos treze poliedros semi-regulares ou "sólidos arquimedianos.

Encontramos em Boyer outra referência à obra:

"A Coleção de Pappus é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a geometria não teve sucesso. Obras matemáticas continuaram a ser escritas em grego por mais mil anos, continuando uma influência com início quase um milênio antes, mas os autores que vieram depois de Pappus nunca mais chegaram ao seu nível. Suas obras têm quase exclusivamente a forma de comentários sobre tratados anteriores. O próprio Pappus é em parte responsável pelos comentários que surgiram em seguida de todos os lados, pois ele escreveu comentários sobre *Os Elementos de Euclides* e o *Almagesto de Ptolomeu*, entre outros, dos quais só restam fragmentos."

Em 1588 surge a primeira edição latina impressa da *Coleção Matemática* de Pappus, por Federico Commandino (1509 - 1575), tradutor de diversos trabalhos matemáticos a partir do grego antigo. Este humanista e matemático italiano acrescenta, em notas de rodapé, comentários explicativos sobre os pensamentos de Pappus, usando uma linguagem algébrica e referências explícitas a Euclides. O trabalho de Commandino, que passou por várias reimpressões até 1660, facilitou aos matemáticos do século XVII o conhecimento do método analítico dos geômetras da antiguidade, e das questões metodológicas de Pappus, especialmente da parte do Livro IV que trata de *curvas superiores* e do Livro VII que trata do *Método da Análise e Síntese* dos antigos geômetras. A primeira edição crítica completa, traduzida para o latim, foi publicada por Friedrich Hultsch ³ entre 1875 e 1878.

O primeiro livro e parte do segundo encontram-se perdidos, mas, pelo conteúdo que resta do Livro II, conclui-se que esses livros se ocupariam muito provavelmente de questões de aritmética e de logística, nome por que era designada a arte do cálculo ([4], p. XIV). O fragmento que resta do Livro II começa com a proposição 14, que está incompleta, e é uma análise e um comentário a um tratado de Apolônio, atualmente perdido, relativo à multiplicação de grandes números. ([4], p. XIV- XV).

No Livro III da *Coleção Matemática*, que começa por uma introdução endereçada ao geômetra Pandrócio, de quem nada mais se sabe, e depois de classificar, no capítulo VII, os problemas,

³Historiador da matemática e tradutor especialista em grego antigo

do ponto de vista das construções geométricas necessárias para a sua resolução, Pappus expõe quatro soluções, umas aproximadas outras exatas, para a determinação dos dois meios proporcionais. Como solução para o problema célebre da antiguidade - a duplicação do cubo, apresenta as soluções, de Eratóstenes, de Nicomedes, de Herão e dele próprio.

O livro IV não possui prefácio, onde provavelmente teria referências de Pappus sobre os autores das proposições que expõe neste Livro e que foram retiradas de obras que atualmente se encontram perdidas. Na primeira parte do quarto livro, encontra-se uma generalização do Teorema de Pitágoras, que permite determinar o lado de um paralelogramo que, construído sobre a base de um triângulo qualquer, é equivalente aos paralelogramos construídos sobre os outros dois lados do mesmo triângulo. ([4], p. XXVI). O Livro IV possui estudo de três tipos de curvas: Espiral, concoide e quadratriz. As proposições sobre a espiral constituem um pequeno comentário ao tratado Das Espirais de Arquimedes ([4], p. XXVIII). Também possui uma proposição que Pappus resolve o problema usando duas curvas: uma hipérbole e uma parábola (lugares geométricos construídos de acordo com as condições referidas em proposições anteriores).

No Livro V, cujo prefácio é dedicado ao geômetra Megécio, Pappus apresenta um tema de grande relevância para a História da Matemática - Os Problemas Isoperimétricos. Este livro é totalmente dedicado às propriedades comparativas de superfícies planas com o mesmo perímetro, isto é, de *figuras isoperimétricas*, e de sólidos com a mesma superfície. Em duas proposições, Pappus retoma o tema dos cinco poliedros regulares inscritos numa esfera, e em mais duas proposições, compara os volumes de poliedros regulares que tenham a mesma superfície. Demonstra também que estes são os únicos sólidos regulares que podem ser inscritos numa esfera.

O Livro VI contém comentários às obras As Esféricas e Os dias e as noites de Teodósio, A esfera móvel de Autólico, O Tratado das distâncias do Sol e da Lua de Aristarco, a Óptica e os Fenômenos de Euclides.

Segundo Ver Eecke [4], o Livro VII da *Collection* é muito precioso para a história da geometria grega, pois constitui a única fonte daquilo que conhecemos sobre trabalhos perdidos de geometria superior que os antigos geômetras chamavam de *o lugar fixo*, ou seja, a análise geométrica.

Neste Livro, dedicado ao seu filho Hermodoro, Pappus aborda o método de *análise e síntese* dos antigos geômetras, constituindo o *Tesouro da Análise*, que considera essencial para a resolução dos problemas de Geometria. Apresenta-nos as proposições de trinta e três obras, entre as quais se destacam: *os Dados, os Porismas e os Lugares de Superfície de Euclides, os Lugares Planos, as Cônicas, as Inclinações, as Tangências, a Secção de Razão, a Secção de*

Área e a Secção Determinada de Apolônio, os Lugares Geométricos de Aristeu e Sobre Médias de Eratóstenes. Encontra-se também no Livro VII da *Coleção Matemática* o princípio dos famosos teoremas dos centroides de Pappus e o problema de Pappus *lugar relativo de três ou quatro retas*. O Livro VIII, dedicado também a Hermodoro, refere-se à Mecânica. Depois de citar Arquimedes, Herão ⁴ e Carpo ⁵, Pappus transmite-nos o seguinte:

"Sendo a arte mecânica assim composta e repartida, julguei conveniente reunir as coisas que os antigos demonstraram geometricamente e expor, de modo melhor que o adotado pelos que têm escrito sobre este argumento, mais concisamente e mais brevemente, os teoremas que são julgados úteis."(Ver Eecke [4]).

Depois desta breve abordagem biográfica de Pappus e da sua obra iremos, destacar os teoremas dos centroides de Pappus, também conhecido pelo nome de teorema de Pappus-Guldin, onde temos a seguinte afirmação:

"Outro teorema no livro VII que aparece pela primeira vez é um em que em geral tem o nome de Paul Guldin ⁶, matemático do século dezessete: Se uma curva plana fechada gira em torno de uma reta que não a corta, o volume do sólido gerado é obtido tomando o produto da área limitada pela distância percorrida durante a revolução pelo centro de gravidade da área. Pappus justificadamente se orgulhava desse teorema muito geral, pois inclui um grande número de teoremas de todos os tipos sobre curvas, superfícies, e sólidos, todos provados simultaneamente com uma demonstração. É de fato o teorema mais geral envolvendo o cálculo que se encontra na antiguidade. Pappus deu também o teorema análogo que diz que a área da superfície gerada pela revolução de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centroide da curva durante a revolução."(Boyer [3])

⁴(10 d.C. - 70 d.C.)

⁵Carpo de Antióquia foi um antigo matemático grego. Não é certo quando viveu; pode ter vivido entre qualquer época entre o século II a.C. e o século II d.C.

⁶Foi um matemático suíço e astrônomo jesuíta que viveu entre 1577 a 1643.

Capítulo 2

Os Teoremas de Pappus para Superfícies e Sólidos de Revolução

Abordaremos uma definição de superfície de revolução de Dolce [6] e o Primeiro Teorema de Pappus que calcula a área da superfície de sólido de revolução encontrados em Lima [8].

2.1 Superfícies de revolução

Consideramos um semiplano α de origem e (eixo) e nele uma linha g (geratriz); girando esse semiplano em torno de e , a linha g gera uma superfície, que é chamada *superfície de revolução*, mostrado na figura 2.1.

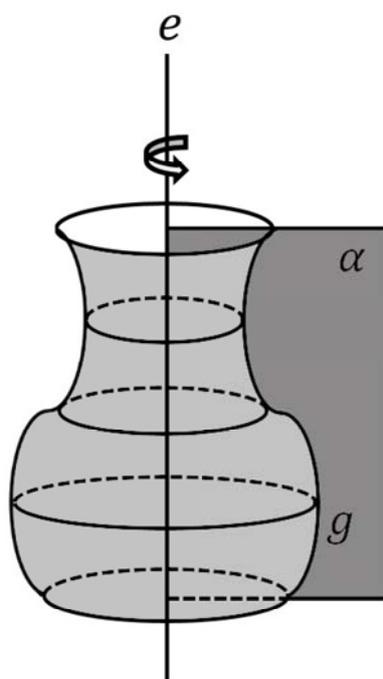


Figura 2.1: Superfície de revolução

Exemplo

O segmento \overline{AB} gera uma superfície lateral de um cilindro, mostrado na figura 2.2.

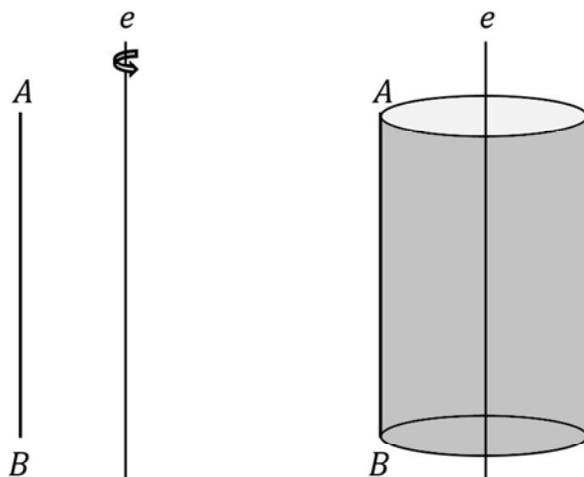


Figura 2.2: superfície lateral de um cilindro

2.2 Primeiro Teorema

Teorema 2.1 (1º Teorema de Pappus). *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro.*

Em outras palavras, se uma linha plana tem comprimento L e se x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E , conforme mostra a Figura 2.3, o 1º Teorema de Pappus afirma que a área da superfície de revolução que é gerada pela rotação da linha em torno de E vale $2\pi xL$. Ainda estamos usando aqui a palavra baricentro significando o centro de gravidade.

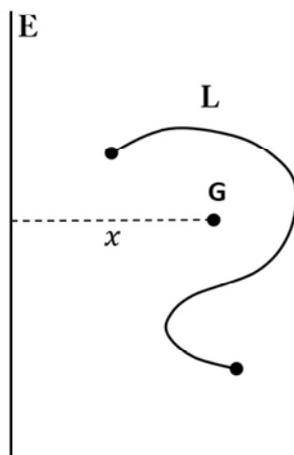


Figura 2.3: Linha de Comprimento L

Vamos fazer agora para uma linha poligonal.

Consideremos, então, como na Figura 2.4, uma poligonal plana cujos lados têm comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n e cujos pontos médios distam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de E , respectivamente. Seja, ainda, $L = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

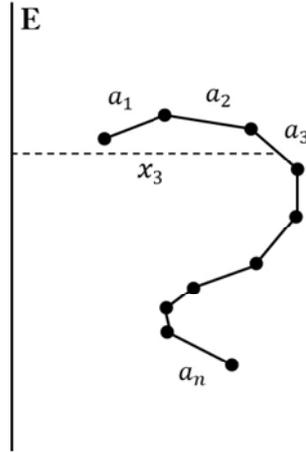


Figura 2.4: Rotação da Poligonal

A rotação de cada segmento em torno de E , gera a superfície lateral de um tronco de cone e, portanto, a área da superfície de revolução gerada pela diagonal é a soma das áreas de todos os troncos. Temos então, para a área da superfície gerada pela poligonal:

$$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + 2\pi x_3 a_3 + \dots + 2\pi x_n a_n$$

$$A = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da poligonal ao eixo E , então:

$$x = \frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

ou seja,

$$xL = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n,$$

Desse modo, a área da superfície de revolução gerada pela rotação da poligonal em torno do eixo é:

$$A = 2\pi xL$$

Veremos agora uma definição de sólidos de revolução de Dolce [6] e o Segundo Teorema de Pappus cujo objetivo é determinar o volume de um sólido de revolução encontrados em Lima [8].

2.3 Sólidos de revolução

Consideramos um semiplano de origem e (eixo) e nele uma superfície S ; girando o semiplano em torno de e , a superfície gera um sólido chamado *sólido de revolução*, como mostra a figura 2.5.

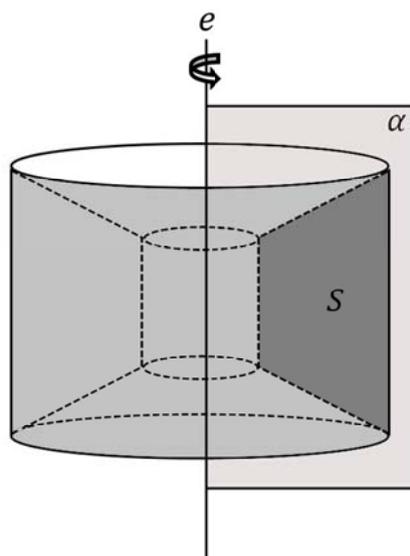


Figura 2.5: Sólido de revolução

Exemplo

O triângulo $\triangle ABC$ gerando um cone de revolução, como mostra a figura 2.6.

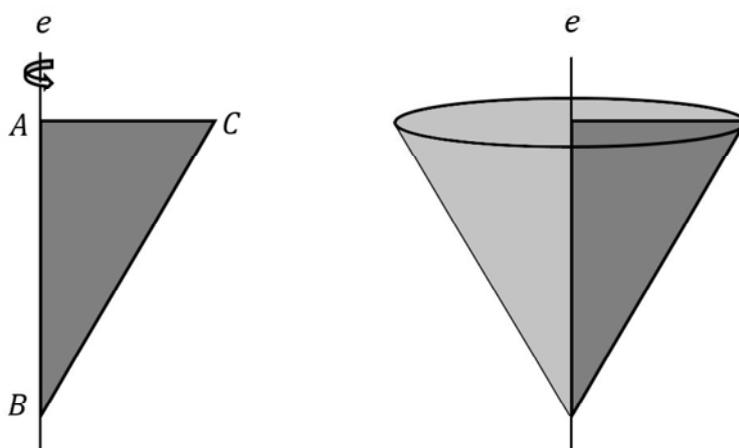


Figura 2.6: Cone de revolução

2.4 Segundo Teorema

Teorema 2.2 (2º Teorema de Pappus). *Seja uma figura plana que gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Em outras palavras, se uma figura plana tem área S e se x é a distância do baricentro dessa figura 2.7 a um eixo E , o 2º Teorema de Pappus afirma que o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa figura em torno de E vale $2\pi XS$.

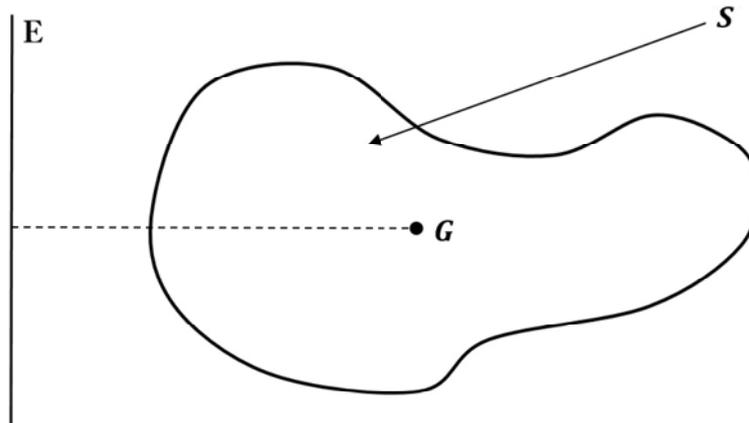


Figura 2.7: Figura plana de área S

Vejam os casos em que a figura é um polígono retangular, ou seja, um polígono que é a reunião de vários retângulos justapostos 2.8, e o eixo são paralelos a um lado desses retângulos.

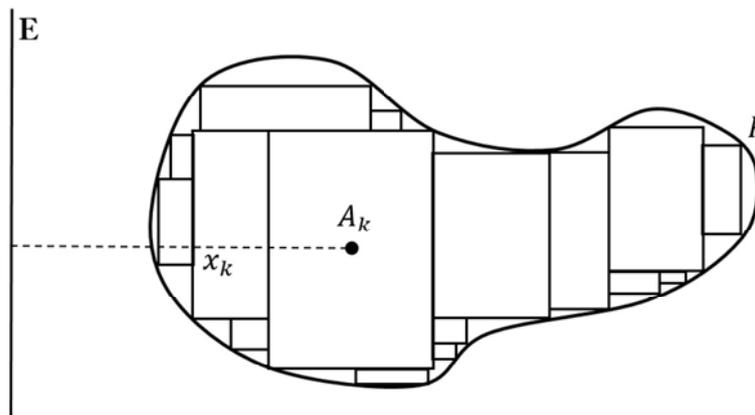


Figura 2.8: Retângulos justapostos

Consideremos, então, o polígono retangular P , dividido em retângulos $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$, de áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, respectivamente. Seja $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$ a área de P e seja x_k a distância do centro do retângulo R_k ao eixo E , que é paralelo a um lado desses retângulos e não atravessa nenhum deles.

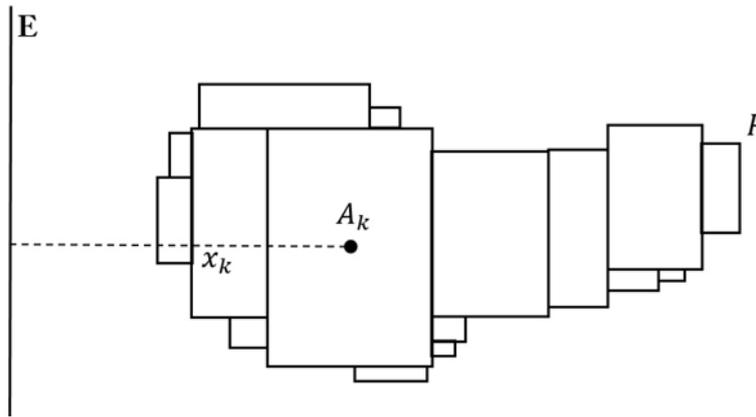


Figura 2.9: Rotação de P

O volume do sólido gerado pela rotação de P em torno de E é a soma dos volumes gerados pela rotação de cada um dos retângulos 2.9 . A partir do que concluímos no item anterior, teremos para esse volume a expressão:

$$V = 2\pi x_1 A_1 + 2\pi x_2 A_2 + 2\pi x_3 A_3 + \cdots + 2\pi x_n A_n$$

$$V = 2\pi(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \cdots + x_n A_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da superfície do polígono P ao eixo E então:

$$x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}$$

ou seja,

$$xS = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \cdots + A_n x_n.$$

Portanto, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do polígono retangular P em torno do eixo é:

$$V = 2\pi xS$$

A demonstração, do caso geral, dos dois teoremas de Pappus para a superfície e sólidos de revolução, envolvendo elementos do cálculo, será feita no capítulo 4 deste trabalho.

Capítulo 3

Centros de gravidade

Todos nós temos uma noção intuitiva do que seja o *centro de gravidade* (ou baricentro) de uma figura plana 3.1. Esse ponto é tal que se fixarmos nele um fio, a figura pendurada por ele ficará em equilíbrio indiferente. Em particular, se a figura estiver em um plano horizontal, depois de pendurada permanecerá horizontal.

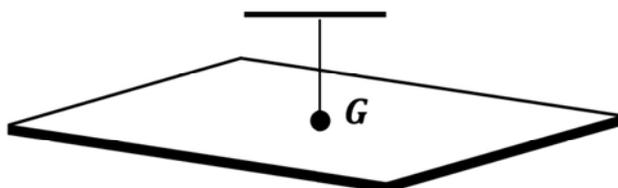


Figura 3.1: Centro de Gravidade

Assis [2] dizia que o centro de gravidade de qualquer corpo é um ponto - pertencente ao corpo ou no espaço vazio - tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva a sua posição original, sem se inclinar em nenhuma direção, qualquer que seja a sua orientação inicial em relação à Terra.

Podemos encontrar o baricentro de uma figura F 3.2 por um processo prático que é o seguinte:

1. Primeiro penduramos a figura por um ponto P_1 de seu bordo e traçamos sobre F a reta vertical que contém esse ponto, ou seja, a reta que contém o fio.
2. Depois, penduramos a figura por outro ponto P_2 de seu bordo e traçamos também sobre F a reta vertical que contém P_2 .

A interseção das duas retas é o baricentro de F .

Vamos, agora, observar que, quando desenhamos uma linha plana fechada simples (ou seja, sem auto interseções), o termo "figura" pode se referir, em geral, tanto ao conjunto de pontos dessa linha, quanto ao conjunto dos pontos interiores. A palavra triângulo, por exemplo, tanto

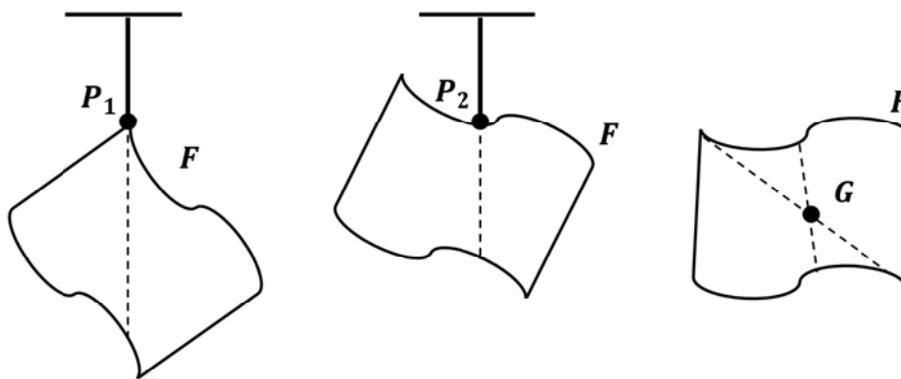


Figura 3.2: Baricentro

pode se referir à união dos três lados quanto à região interior. Naturalmente, para a determinação do centro de gravidade é preciso saber que conjunto estamos considerando. A ilustração mostramos dois desenhos aparentemente iguais 3.3 . Entretanto, no primeiro, a figura consiste no conjunto dos pontos interiores à linha desenhada, e no segundo, a figura consiste apenas nos pontos da própria linha. Para dar uma ideia mais concreta ao que dissemos, imagine que, no primeiro caso, a figura foi recortada de uma chapa de madeira e, no segundo caso, a figura foi feita apenas com arame. Os centros de gravidade dessas figuras são G_1 e G_2 .

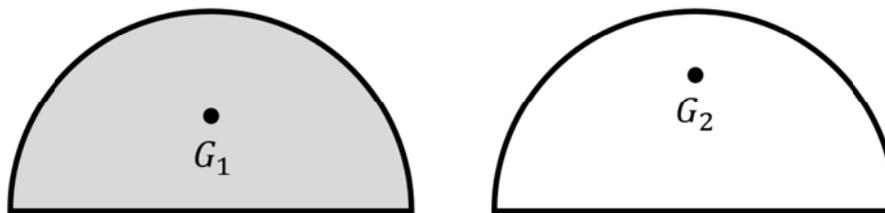


Figura 3.3: Dois desenhos aparentemente iguais

Vamos tratar, agora, de mostrar como se determina o centro de gravidades de figuras simples. Mas, para isso, devemos estabelecer como axiomas as proposições seguintes:

1. *O Centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio.*
2. *Se uma figura possui um eixo de simetria, então, o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.*

Como consequência, se uma figura possui um centro de *simetria* (interseção de dois eixos de simetria), então, esse ponto é o seu centro de gravidade.

3.1 Momentos e Centros de Massa

Na seção anterior vimos algumas noções intuitivas de geometria sobre centro de gravidade de figuras planas.

Agora vamos abordar *Momentos e Centro de Massa* usando definições do Cálculo. Os conceitos e ferramentas utilizados são baseados em Stewart [9].

O principal objetivo é encontrar o ponto P no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, como na figura 3.4 . Esse ponto é chamado *Centro de Massa* (ou centro de gravidade) da placa.

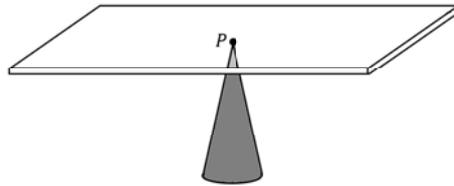


Figura 3.4: Centro de Massa

Vejam agora, uma situação mais simples mostrada na figura 3.5 , onde duas massas m_1 e m_2 são presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distância d_1 e d_2 do apoio. O eixo ficará em equilíbrio se $m_1d_1 = m_2d_2$.

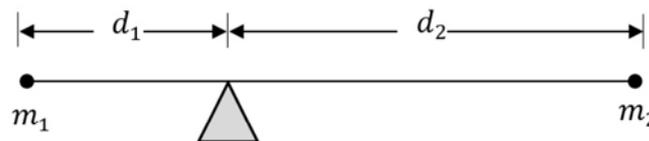


Figura 3.5: Eixo de apoio

Esse é um fato experimental descoberto por Arquimedes e chamado *Lei da Alavanca* (Pense em uma pessoa mais leve equilibrando outra pessoa mais pesada em uma gangorra sentando-se mais longe do centro).

Agora suponha que o eixo esteja sobre o eixo x com m_1 em x_1 e m_2 em x_2 e o centro de massa em \bar{x} . Se compararmos as figuras 3.5 e 3.6 veremos que $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = x_2 - \bar{x}$, então teremos a equação

$$\begin{aligned} m_1(\bar{x} - x_1) &= m_2(x_2 - \bar{x}) \\ m_1\bar{x} - m_1x_1 &= m_2(x_2 - m_2\bar{x}) \\ m_1\bar{x} + m_2\bar{x} &= m_1x_1 + m_2x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Os números m_1x_1 e m_2x_2 são chamados *momentos* das massas m_1 e m_2 (em relação a origem) e a equação diz que o centro de massa \bar{x} é obtido pela soma dos momentos das massas e dividido pela massa total $m = m_1 + m_2$.

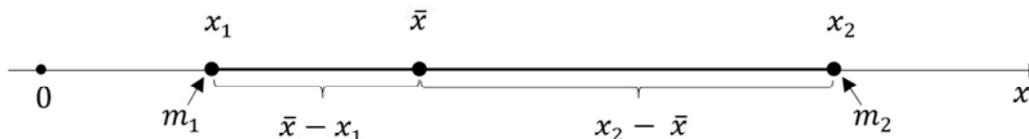


Figura 3.6: Eixo de apoio sobre o eixo x

Em geral temos um sistema de n partículas com massas m_1, m_2, \dots, m_n localizados nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n sobre o eixo x . Podemos mostrar de maneira igual que o centro de massa do sistema está localizado em

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad (3.1)$$

onde $m = \sum m_i$ é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais

$$M = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

é chamada *momento do sistema em relação à origem*. Então a equação 3.1 pode ser reescrita como $m\bar{x} = M$, que diz que se a massa total fosse considerada como concentrada no centro de massa \bar{x} , então seu comprimento deveria ser o mesmo que o momento do sistema.

Agora considere um sistema de n partículas com massas m_1, m_2, \dots, m_n nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ no plano xy como mostra a figura 3.7. De mesmo modo podemos definir o *momento do sistema com relação ao eixo y* como

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

e o *momento do sistema com relação ao eixo x* como

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

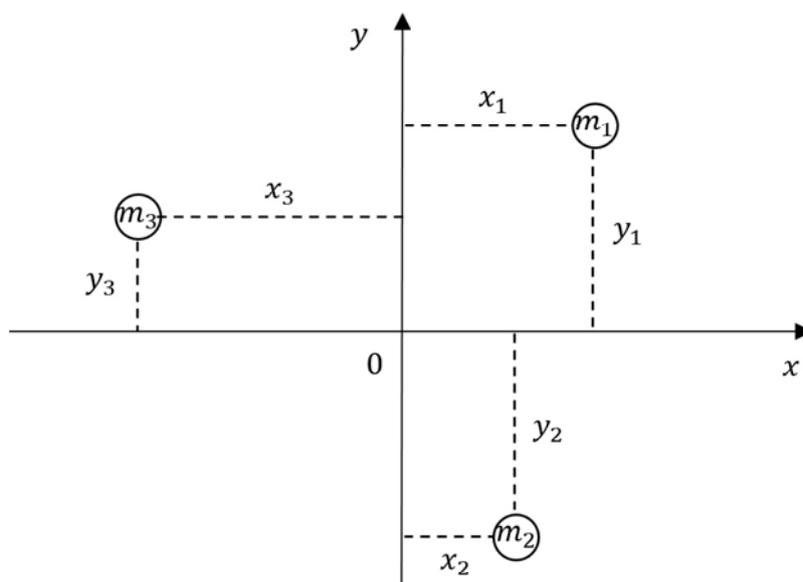


Figura 3.7: Sistema de partículas

Então M_y mede a tendência de o sistema girar ao redor do eixo y e M_x mede a tendência de ele girar ao redor do eixo x .

As coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

onde $m = \sum m_i$ é massa total. Como $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$, o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é o ponto onde uma partícula única de massa m teria os mesmos momentos do sistema.

Portanto temos a proposição:

Proposição 3.1 (Centro de massa). *Sejam as massas de n partículas quaisquer, localizadas nos pontos dados por $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ do plano cartesiano. Seja M_x o momento do sistema com relação ao eixo x , M_y o momento do sistema com relação ao eixo y e m a soma das massas de todas as n partículas. O centro de massas (\bar{x}, \bar{y}) dessas n partículas no plano é dado por*

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

3.2 Centro de massa do gráfico de uma função

De acordo com Guidorizzi [7] podemos encontrar as coordenadas do centro de massa, de uma parte, do gráfico de uma função de comprimento L^1 no plano cartesiano.

Considerando um fio fino e homogêneo, de densidade linear ρ , como um arco. Seja f uma função definida em $[a, b]$ e com derivada contínua nesse intervalo, como mostra a figura 3.8 .

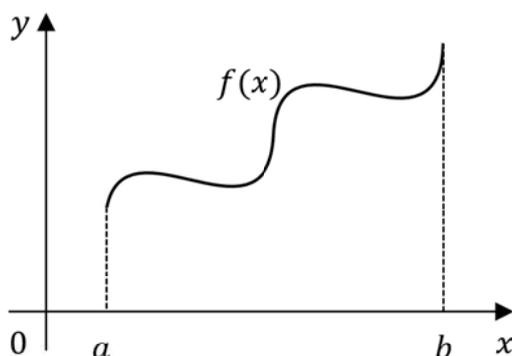


Figura 3.8: Centro de massa do gráfico de uma função

Utilizando as proposições 4.2 e 3.1 obtemos a proposição seguinte.

Proposição 3.2 (Centro de massa do gráfico de uma função). *Seja f uma função contínua, com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Seja L o comprimento do arco da função f , de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. O centro de massa, ou centroide (\bar{x}, \bar{y}) , desse arco é dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Observamos que o centro de massa pode não pertencer ao conjunto de pontos desse gráfico da função (ou arco da curva).

3.3 Centro de massa de uma região plana

Vejamos, agora, como determinar o centro de massa de uma região R de área A^2 do plano que será imaginada como uma lâmina lisa, homogênea, de modo que a densidade superficial ρ é constante. A região R é determinada por duas funções contínuas f e g , tais que $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$, como mostra a figura 3.9 .

Utilizando as proposições do cálculo 4.1 e 3.1 obtemos a seguinte proposição.

¹Esse comprimento L pode ser calculado com a proposição 5.2 do capítulo 5

²Essa área A pode ser determinada na proposição 5.1 do capítulo 5

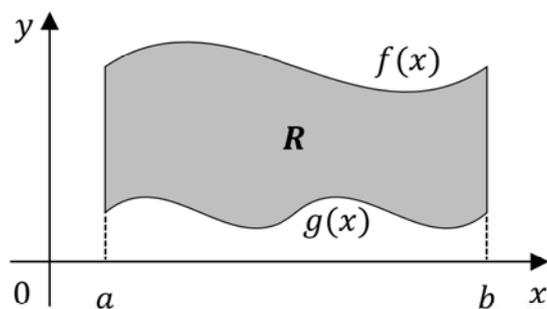


Figura 3.9: Centro de massa de uma região plana

Proposição 3.3 (Centro de massa de uma região plana). *Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ duas funções onde $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$ e também f e g são contínuas no intervalo $[a, b]$. Se A a área da região limitada pelas funções f e g no intervalo $[a, b]$. O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) dessa região, é dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

3.4 Cálculo para determinar o centro de gravidade de uma semicircunferência

Vamos imaginar a semicircunferência como um arame fino homogêneo de densidade linear constante. Seja a semicircunferência definida pela função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ definida e com derivada contínua no intervalo $[-r, +r]$. Como mostra a figura 3.10 .

Utilizando a proposição 3.2 , vamos determinar o centro de massa do gráfico da função $f(x)$. Sabendo que o comprimento L da semicircunferência é πr .

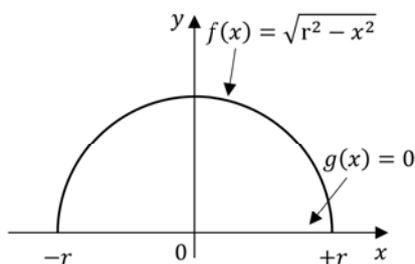


Figura 3.10: Semicircunferência

Solução: A circunferência possui um eixo de simetria, então, o seu centro de gravidade pertence ao eixo y . Portanto $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + [(\sqrt{r^2 - x^2})']^2} dx \\
&= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left[\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \right]^2} dx = \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\
&= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{\frac{(r^2 - x^2)r^2}{r^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r \sqrt{r^2} dx \\
&= \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^r r dx = \frac{1}{\pi r} [rx]_{-r}^r = \frac{2r}{\pi}
\end{aligned}$$

Então, o centro de massa da semicircunferência é o ponto $\left(0, \frac{2r}{\pi}\right)$.

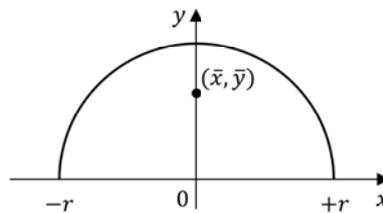


Figura 3.11: Coordenada do Centro de gravidade da semicircunferência

3.5 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um semicírculo

Vamos imaginar o semicírculo como uma chapa fina de metal homogêneo de densidade linear constante. Seja o semicírculo definido pela região entre as funções $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$ e contínuas no intervalo $[-r, +r]$. Como mostra a figura 3.12.

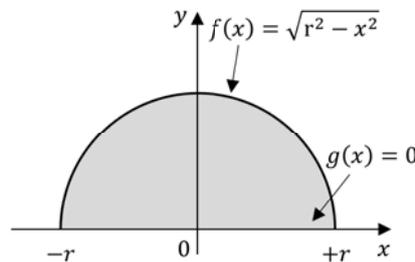


Figura 3.12: Semicírculo

Utilizando a proposição 3.3, vamos determinar o centro de massa da região limitada pelas funções $f(x)$ e $g(x)$. Sabendo que a área A da região do semicírculo é $\frac{\pi r^2}{2}$.

Solução: O semicírculo do mesmo modo que semicircunferência, também possui um eixo de simetria. E o seu centro de gravidade pertence ao eixo y . Portanto $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx = \frac{1}{\frac{\pi r^2}{2}} \int_{-r}^r \frac{1}{2} [(\sqrt{r^2 - x^2})^2 - 0^2] dx \\
&= \frac{1}{\frac{\pi r^2}{2}} \int_{-r}^r \frac{1}{2} [r^2 - x^2] dx = \frac{1}{\frac{\pi r^2}{2}} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r dx = \frac{4r}{3\pi}
\end{aligned}$$

Então, o centro de massa do semicírculo é o ponto $\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$.

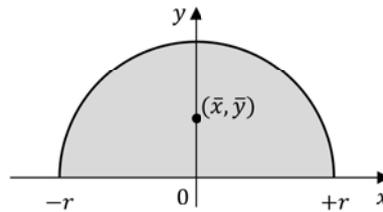


Figura 3.13: Centro de gravidade de um semicírculo

Agora que determinamos os centros de gravidades da semicircunferência e do semicírculo, podemos observar que são distintos. Na circunferência apenas consideramos os pontos da curva. Mas no semicírculo consideramos os pontos interiores a linha desenhada.

3.6 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um quarto do círculo

Agora vamos determinar o centro de gravidade de um quarto de um círculo. Seja o quarto de círculo definido pela região entre as funções $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$ e contínuas no intervalo $[0, +r]$. Como mostra a figura 3.14 .

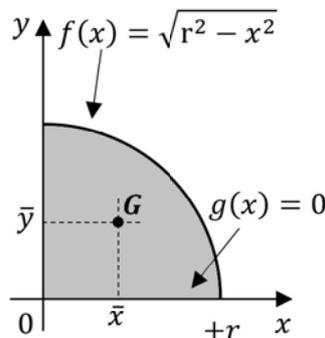


Figura 3.14: Semicírculo

Utilizando a proposição 3.3 , vamos determinar o centro de massa da região limitada pelas funções $f(x)$ e $g(x)$. Sabendo que a área A da região do quarto de círculo é $\frac{\pi r^2}{4}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx = \frac{1}{\frac{\pi r^2}{4}} \int_0^r x [\sqrt{r^2 - x^2} - 0] dx = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}(u) & ; dx = r \cos(u) du \\ x = 0 & ; u = 0 \\ x = r & ; u = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{4}{\pi r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \operatorname{sen}(u) \sqrt{r^2 - (r \operatorname{sen}(u))^2} r \cos(u) du = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^2(u) \operatorname{sen}(u) du \\ &= \frac{4r^3}{\pi r^2} \left[-\frac{\cos^3(u)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx = \frac{1}{\frac{\pi r^2}{4}} \int_0^r \frac{1}{2} [(\sqrt{r^2 - x^2})^2 - 0^2] dx \\ &= \frac{1}{\frac{\pi r^2}{4}} \int_0^r \frac{1}{2} [r^2 - x^2] dx = \frac{1}{\frac{\pi r^2}{4}} \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

Então, a posição do centro de gravidade G do quarto de círculo é o ponto $\left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi} \right)$.

3.7 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um retângulo

Vejamos a seguir como determinar o centro de massa de uma região limitada pelas retas $f(x) = H$ e $g(x) = 0$ no intervalo $[0, B]$, como mostra a figura 3.15 . Vamos determinar o centro de massa dessa região utilizando a proposição 3.3 . Observamos que a região é um retângulo de base B e altura H , então a área A é $B.H$.

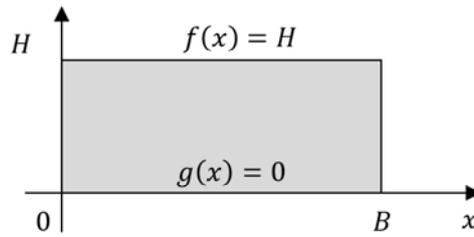


Figura 3.15: Retângulo

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx = \frac{1}{B \cdot H} \int_0^B x[H - 0] dx = \frac{1}{B \cdot H} \int_0^B xH dx \\ &= \frac{1}{B \cdot H} \left[\frac{x^2 H}{2} \right]_0^B = \frac{1}{B \cdot H} \left[\frac{B^2 \cdot H}{2} - \frac{0^2 \cdot H}{2} \right] = \frac{1}{B \cdot H} \left[\frac{B^2 \cdot H}{2} \right] = \frac{B^2 \cdot H}{2B \cdot H} = \frac{B}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx = \frac{1}{B \cdot H} \int_0^B \frac{1}{2} [H^2 - 0^2] dx = \frac{1}{B \cdot H} \frac{1}{2} \int_0^B H^2 dx \\ &= \frac{1}{2B \cdot H} [H^2 x]_0^B = \frac{1}{2B \cdot H} [H^2 \cdot B - H^2 \cdot 0] = \frac{1}{2B \cdot H} [H^2 \cdot B] = \frac{H^2 \cdot B}{2B \cdot H} = \frac{H}{2}\end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa do retângulo é o ponto $\left(\frac{B}{2}, \frac{H}{2}\right)$.

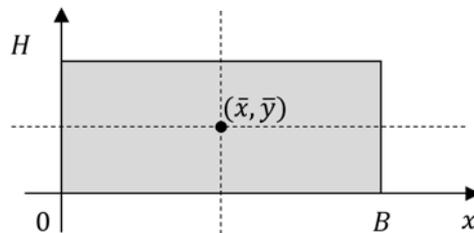


Figura 3.16: Centro de gravidade de um retângulo

3.8 Cálculo para determinar o centro de gravidade de um triângulo retângulo

Nessa seção vamos determinar o centro de massa de uma região limitada pelas retas $f(x) = -\frac{H}{B}x + H$ e $g(x) = 0$ no intervalo $[0, B]$, mostrado na figura. A região é um triângulo de base B e altura H , então a área A é $\frac{B \cdot H}{2}$. Pela proposição 3.3 vamos determinar o centro de massa dessa região.

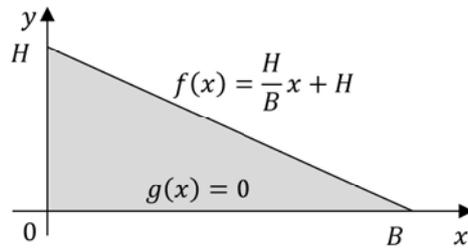


Figura 3.17: Triângulo retângulo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx = \frac{1}{\frac{B.H}{2}} \int_0^B x \left[\left(-\frac{H}{B}x + H \right) - 0 \right] dx \\ &= \frac{1}{\frac{B.H}{2}} \int_0^B x \left[-\frac{H}{B}x + H \right] dx = \frac{1}{\frac{B.H}{2}} \int_0^B \left[-\frac{H}{B}x^2 + Hx \right] dx \\ &= \frac{1}{\frac{B.H}{2}} \left[-\frac{H}{B} \frac{x^3}{3} + H \frac{x^2}{2} \right]_0^B = \frac{B}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\frac{B.H}{2}} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx = \frac{1}{\frac{B.H}{2}} \int_0^B \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{H}{B}x + H \right)^2 - 0^2 \right] dx \\ &= \frac{2}{B.H} \frac{1}{2} \int_0^B \left[\frac{H^2}{B^2}x^2 - \frac{2H^2x}{B} + H^2 \right] dx = \frac{1}{B.H} \left[\frac{H^2x^3}{3B^2} - \frac{H^2x^2}{B} + H^2x \right]_0^B = \frac{H}{3} \end{aligned}$$

O centro de gravidade do triângulo retângulo é o ponto $\left(\frac{B}{3}, \frac{H}{3} \right)$.

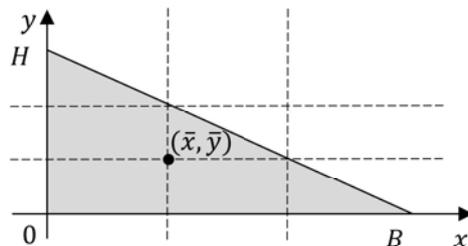


Figura 3.18: Centro de gravidade de um triângulo retângulo

3.9 Centro de massa de triângulos

Na seção anterior encontramos o centro de massa apenas de um triângulo retângulo, utilizando ferramentas do cálculo. Agora vamos abordar o centro de massa de outros tipos de triângulo.

Dulce [5] define que o ponto de interseção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo como o *baricentro* do triângulo. E em uma pequena nota afirma também que o *baricentro* de um triângulo é o centro de gravidade.

G é o *baricentro* do triângulo $\triangle ABC$. Como mostra a figura 3.19.

$$\overline{GM_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM_1}, \quad \overline{GM_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BM_2} \quad \text{e} \quad \overline{GM_3} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_1}, \quad \overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_2} \quad \text{e} \quad \overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

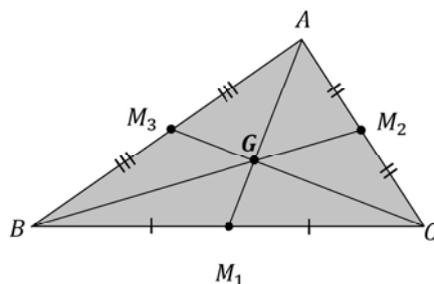


Figura 3.19: baricentro de um triângulo

Agora vamos fazer uma análise da altura e mediana do triângulo em relação ao lado \overline{BC} .

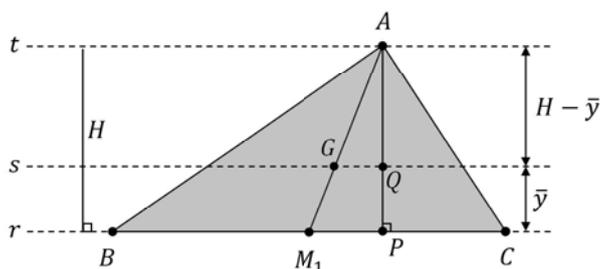


Figura 3.20: Análise da altura em relação a mediana

Seja r, s, t retas paralelas. Temos os pontos $M_1, P \in r, G, Q \in s$ e $A \in t$, de modo que A, G, M_1 e A, Q, P sejam dois ternos de pontos colineares, como mostra a figura 3.20.

Considerando as condições acima, podemos aplicar o Teorema de Tales³. Então temos

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{GM_1}}{\overline{QP}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \cdot \overline{AM_1}}{H - \bar{y}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \overline{AM_1}}{\bar{y}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{H}{3}$$

Podemos afirmar que a distância do baricentro ao lado \overline{BC} é um terço da altura relativa ao lado \overline{BC} . Do mesmo modo, podemos, determinar essa distância ao demais lados do triângulo.

³O Teorema foi estabelecido por Tales de Mileto, consiste em uma interseção entre duas retas paralelas e transversais que formam segmentos proporcionais.

Triângulo Isósceles e equilátero

Ao posicionar, o triângulo isóscele, no plano cartesiano, como mostra a figura 3.21, observamos que a mediana em relação a base também é a altura do triângulo. O eixo de simetria do triângulo isósceles coincide com o eixo y . Portanto $\bar{x} = 0$.

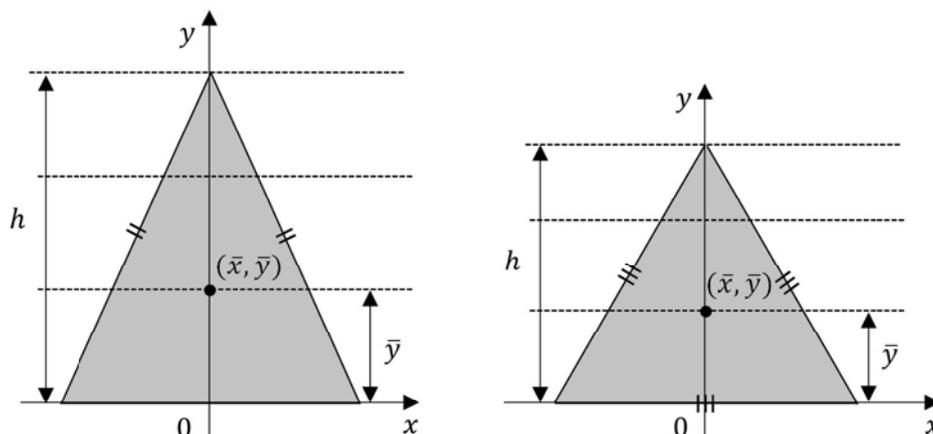


Figura 3.21: baricentro do triângulo isóscele e equilátero

Pelas mesmas observações do triângulo isósceles, podemos determinar o centro de gravidade do triângulos equilátero do mesmo modo. Então definimos o baricentro de ambos os triângulos como $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = \frac{h}{3}$.

Triângulo e suas coordenadas

Podemos determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo, relacionando as três coordenadas do ponto do triângulo.

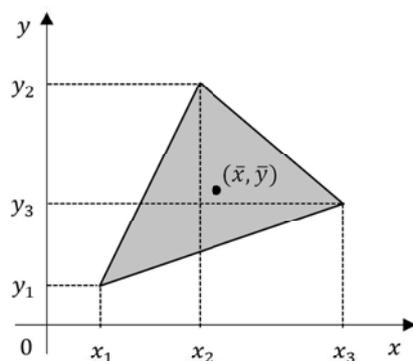


Figura 3.22: baricentro do triângulo

Essa relação é determinada da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad e \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

O estudo dos triângulos são de grande importância para determinar o baricentro de figuras compostas. Por exemplo, um polígono pode ser decomposto em vários outros triângulos com áreas e baricentros já conhecidos, com isso podemos determinar o baricentro do polígono de maneira mais simples. Na próxima seção abordaremos esse método.

3.10 Centro de massa de figuras compostas

Para determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um polígono, vamos imagina-lo, por exemplo, dividido em triângulos $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, com áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, respectivamente, mostrado na figura 3.23 .

Consideramos um sistema de coordenadas no plano do polígono e seja (x_k, y_k) o baricentro do triângulo T_k . Utilizando o raciocínio físico de considerar a figura recortada em uma chapa uniforme de espessura constante, temos que a massa de cada triângulo é proporcional à sua área. Podemos, então, imaginar o polígono transformado em um conjunto de partículas, cada um deles no baricentro de um triângulo e com massa proporcional à sua área. Em outras palavras, estamos imaginando que toda a massa de um triângulo esteja concentrada no seu baricentro.

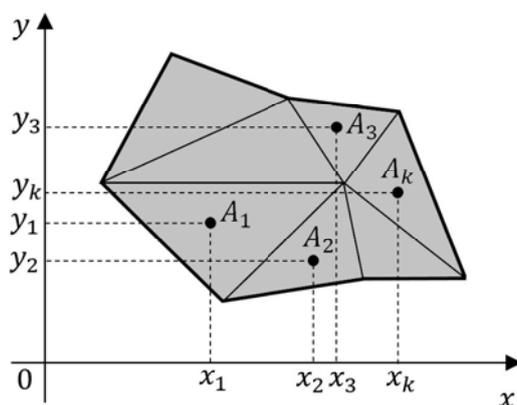


Figura 3.23: Polígono dividido em triângulos

Agora, com essas considerações , vamos a definição seguinte.

Definição 3.1 (Centro de gravidade de um polígono). *Se um polígono P está dividido em figuras $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, de áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o baricentro da figura T_k , o centro de gravidade da superfície de P é o ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$, tal que:*

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \dots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n} \quad e \quad \bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + \dots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

Agora vamos, nos exemplos a seguir, determinar o centro de gravidade da superfície de algumas figuras planas.

3.11 Localizando o centro de gravidade de figuras planas

Exemplo 01. Determine a posição do centro de gravidade da superfície do trapézio $ABCD$ onde $A = D = 90^\circ$, $AB = 7$, $CD = 4$ e $AD = 3$.

Solução: Considere o trapézio em um sistema de coordenadas, $A = (0,0)$, $B = (7,0)$, $C = (4,3)$ e $D = (0,3)$, como mostra a figura 3.24 .

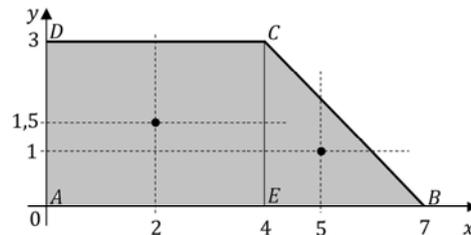


Figura 3.24: Trapézio

Dividimos o trapézio em duas figuras com os baricentros conhecidos e estudados neste capítulo: um retângulo $ADCE$ e um triângulo retângulo CEB . As áreas dessas figuras são 12 e 4,5, respectivamente. O baricentro do retângulo é o ponto $(2, 1,5)$ e do triângulo é ponto $(5, 1)$. Se $G = (\bar{x}, \bar{y})$ é centro de gravidade da superfície de $ABCD$, temos:

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 2 + 4,5 \cdot 5}{12 + 4,5} = \frac{31}{11} \cong 2,81 \quad e \quad \bar{y} = \frac{12 \cdot 1,5 + 4,5 \cdot 1}{12 + 4,5} = \frac{15}{11} \cong 1,36$$

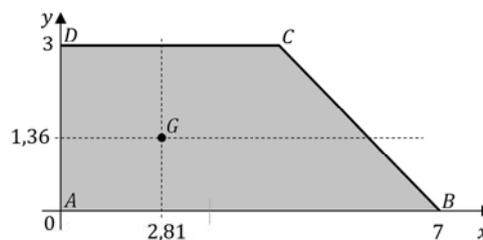


Figura 3.25: Centro de gravidade do trapézio

Exemplo 02. Determine a posição do centro de massa da figura 3.26 .

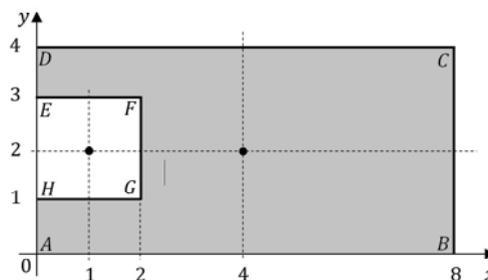


Figura 3.26: Coordenadas dos centros de massas

Solução: Dividimos a figura em um retângulo $ABCD$ e um quadrado $EFGH$. Observamos que o quadrado está contido no retângulo, mas o quadrado não possui área. Então a melhor maneira seria considerar a área do quadrado negativa. Com essa condição, temos, as áreas do retângulo 32 e do quadrado -4. O baricentro do retângulo é o ponto $(4, 2)$ e do quadrado o ponto $(1, 2)$. Se utilizarmos a definição 3.1, temos:

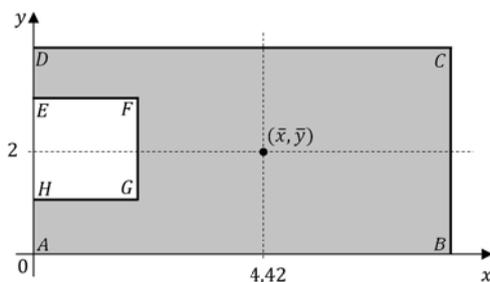


Figura 3.27: Centro de massa da figura

$$\bar{x} = \frac{32 \cdot 4 + (-4) \cdot 1}{32 + (-4)} = \frac{31}{7} \cong 4,42 \quad e \quad \bar{y} = \frac{32 \cdot 2 + (-4) \cdot 2}{32 + (-4)} = \frac{56}{28} = 2$$

Exemplo 03. Encontre a posição do centro de gravidade da figura 3.28.

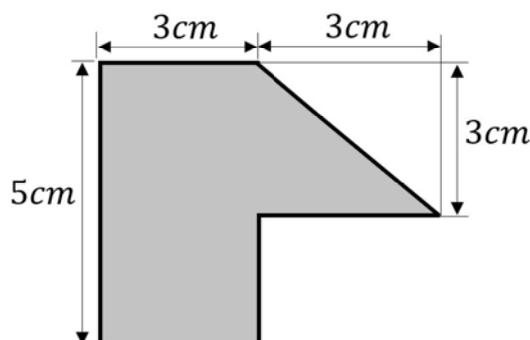


Figura 3.28: Figura plana

Solução: Dividimos a figura em um retângulo $ABFE$ e um triângulo BCD , conforme mostra a figura 3.29. A área do retângulo é 15 cm^2 e do triângulo $\frac{9}{2} \text{ cm}^2$. O baricentro do retângulo é o ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e do triângulo é o ponto $(4, 3)$. Se utilizarmos a definição 3.1, temos:

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cdot 4}{15 + \frac{9}{2}} = \frac{27}{13} \cong 2,08 \quad e \quad \bar{y} = \frac{15 \cdot \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot 3}{15 + \frac{9}{2}} = \frac{34}{13} \cong 2,62$$

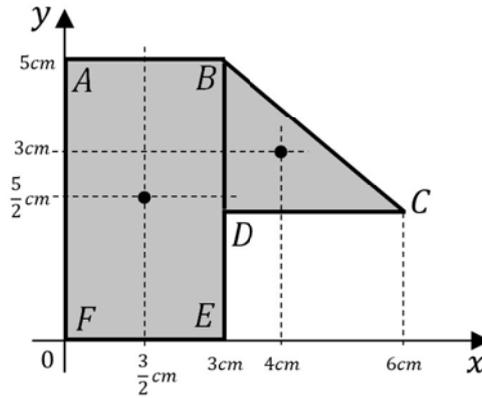


Figura 3.29: Coordenadas da figura plana

Exemplo 04. Encontre o ponto que determina o baricentro da figura 3.30 . Sabendo que o raio é $5mm$ e a área de um quarto do círculo é $\frac{25\pi}{4}$.

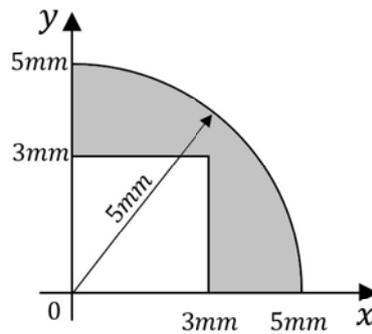


Figura 3.30: Parte de um quarto de círculo

Solução: Observamos que a figura é formada por uma região de um quarto de círculo menos um quadrado de lado igual a $3mm$. O quadrado possui área negativa, portando, a área do quadrado é $-9mm^2$. O ponto que determina o baricentro do quadrado é $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e o de um quarto do círculo, que está definido neste capítulo, é o ponto $\left(\frac{20}{3\pi}, \frac{20}{3\pi}\right)$. Com essas informações e a definição 3.23, temos:

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{25\pi}{4} \cdot \frac{20}{3\pi} + (-9) \cdot \frac{3}{2}}{\frac{25\pi}{4} + (-9)} = \frac{\frac{125}{3} - \frac{27}{2}}{\frac{25\pi}{4} - 9} = \frac{196}{3(25\pi - 36)} \cong 1,53$$

Uma observação importante sobre esta figura, é que o seu centro de gravidade não pertence a região da figura.

Exemplo 05. Determine o centro de gravidade de um trapézio $CDEF$ isóscele de altura h , base maior B e base menor b .

Solução: A figura possui um eixo de simetria paralelo ao eixo y , então, o seu centro de gravidade pertence a esse eixo, portanto $\bar{x} = \frac{B}{2}$. Agora vamos dividir o trapézio $CDEF$ em dois triângulos DCF e DFE , como mostra a figura 3.31, para determinarmos o centro de gravidade do trapézio.

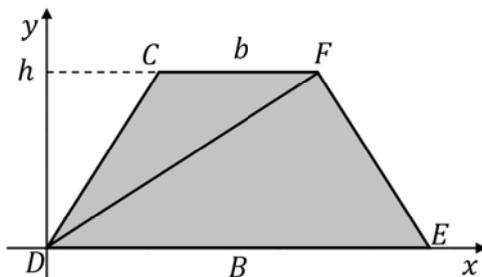


Figura 3.31: Trapézio isóscele

O centro de gravidade do triângulo DFE é $\frac{1}{3}h$ e do triângulo DCF é $\frac{2}{3}h$ em relação a base maior do trapézio. Sabendo que as áreas dos triângulos DCF e DFE são, respectivamente, $\frac{b \cdot h}{2}$ e $\frac{B \cdot h}{2}$. Utilizando a definição 3.23, temos:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{3}h \cdot \frac{b \cdot h}{2} + \frac{2}{3}h \cdot \frac{B \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2} + \frac{B \cdot h}{2}} = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{2B + b}{B + b} \right)$$

Portanto, o centro de gravidade do trapézio isóscele é o ponto $\left(\frac{B}{2}, \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{2B + b}{B + b} \right) \right)$, que é a distância do centro de gravidade a base Maior. Agora a distância entre o centro de gravidade e a base menor, é

$$\bar{y}_1 = h - \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{2B + b}{B + b} \right) = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{B + 2b}{B + b} \right)$$

Como mostra a figura 3.32

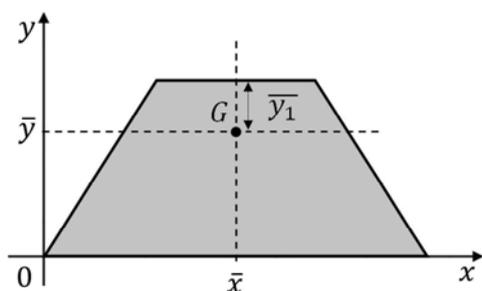


Figura 3.32: Centro de gravidade do trapézio isóscele

Capítulo 4

Os Teoremas de Pappus utilizando as ferramentas do Cálculo

Neste capítulo abordaremos proposições sobre áreas entre duas curvas, comprimento de um arco, também áreas de superfícies de revolução e volume de sólidos de revolução. As fórmulas utilizadas podem ser encontradas em Guidorizzi [7] e Stewart [9]. Todos esses conteúdos terão como intuito a demonstração dos Teoremas de Pappus usando conceitos de Cálculo.

4.1 Área entre duas curvas

Considere uma região A entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, como mostra a figura 4.1.

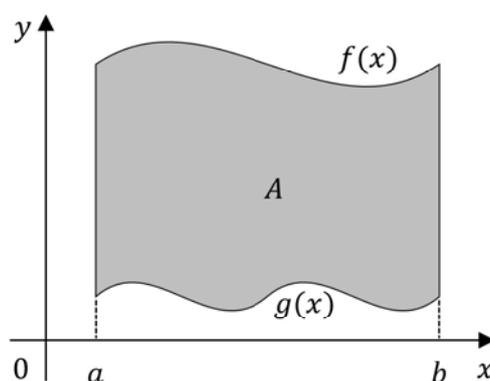


Figura 4.1: Região entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$

Proposição 4.1 (Região entre duas curvas). *Seja A a área da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, com f e g funções contínuas e $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$. Então*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

4.2 Comprimento do gráfico de uma função

Trataremos do comprimento do trecho do gráfico de uma função f contínua nas extremidades $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Esta proposição nos permite calcular o comprimento, do ponto A ao ponto B, da porção de uma curva obtida por uma função f . Considere o gráfico da função $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, mostrado na figura 4.2.

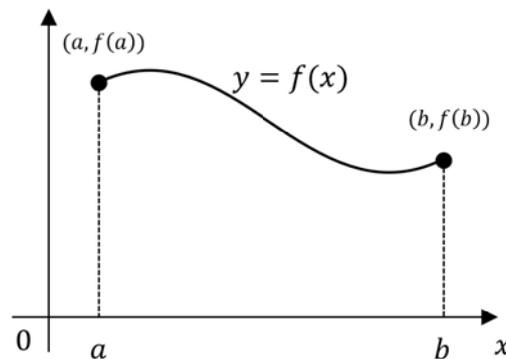


Figura 4.2: Comprimento do gráfico da função $y = f(x)$

Proposição 4.2 (Comprimento do gráfico de uma função). *Seja uma função f e sua derivada f' são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento L do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é dado por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Afirmavam Arton, Bivens e Davis [1] que, intuitivamente, podemos pensar no comprimento de arco de uma curva como o número obtido alinhando um pedaço de barbante com a curva e então medindo o comprimento do barbante depois de espichado.

4.3 Método das Cascas Cilíndricas

Nessa seção trataremos sobre o método das cascas cilíndricas, também chamado de método do invólucro cilíndrico, que pode determinar o volume obtido pela rotação, de uma região, em torno do eixo y .

Vejamos um exemplo: Se um retângulo que é paralelo ao eixo de rotação, for rotacionado em torno desse eixo, obteremos uma casca cilíndrica 4.3 .

Se a casca cilíndrica possui raio interno r_1 , raio externo r_2 e altura h . O volume V é calculado pela subtração do volume V_1 cilindro interno pelo volume V_2 do cilindro externo, então, temos

$$V = V_2 - V_1 \Rightarrow V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

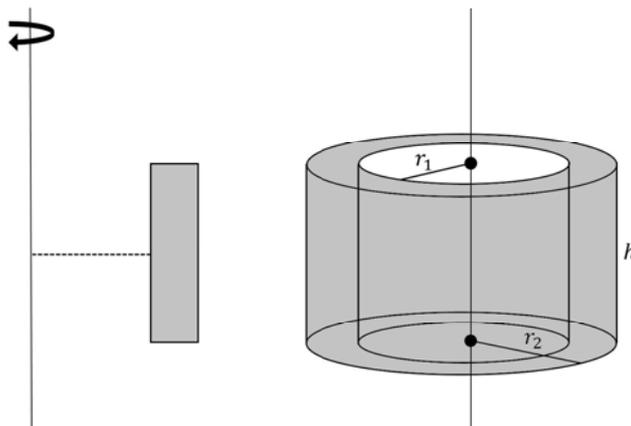


Figura 4.3: Casca cilíndrica

Agora vamos obter uma expressão que determina o volume de um sólido gerado pela rotação de uma região R , em torno de um eixo de rotação.

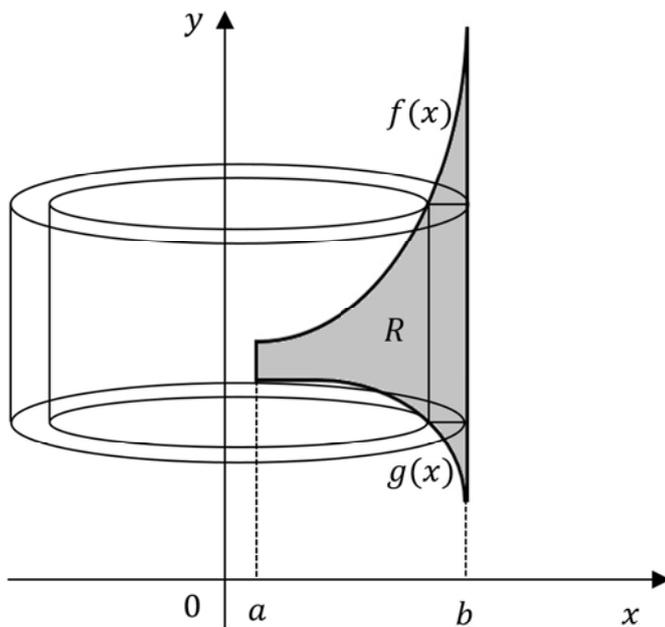


Figura 4.4: Casca cilíndrica obtida pela rotação da região R

Seja f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja ainda S o sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo y . Então S é uma casca cilíndrica como mostra em parte na figura 4.4.

Proposição 4.3 (Casca cilíndrica). *Seja f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, com $a \geq 0$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se R for a região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo y , e se V representa o volume de S , então*

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

Quando a região de área A é rotacionada em torno de uma reta paralela ao eixo y o resultado é semelhante do mesmo modo.

4.4 Método do Anel Circular

Na seção anterior o sólido era gerado pela rotação de uma região em torno do eixo y , mas agora trataremos do volume de um sólido obtido pela rotação de uma região limitada por duas funções contínuas em torno do eixo x . Seja f e g duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja A a área da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, como mostra a figura 4.5. Seja S o sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x . Precisamos agora encontrar o volume desse sólido.

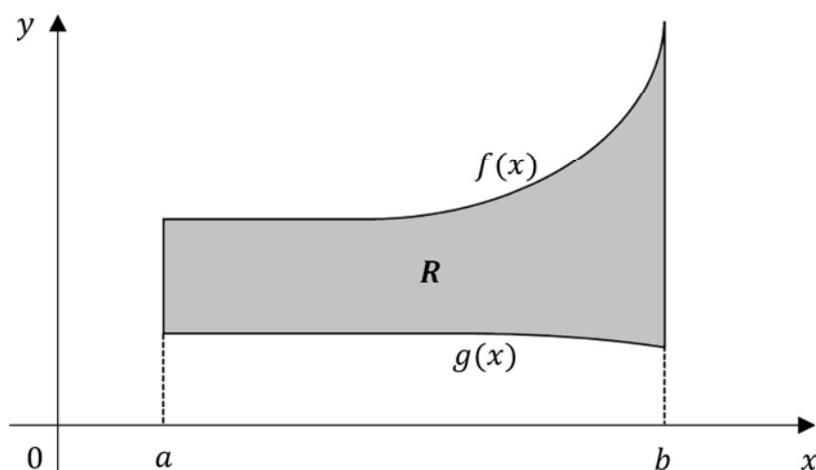


Figura 4.5: Região limitada pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$

Agora vamos considerar um pequeno retângulo que compõe a região R , mostrado na figura 4.6.

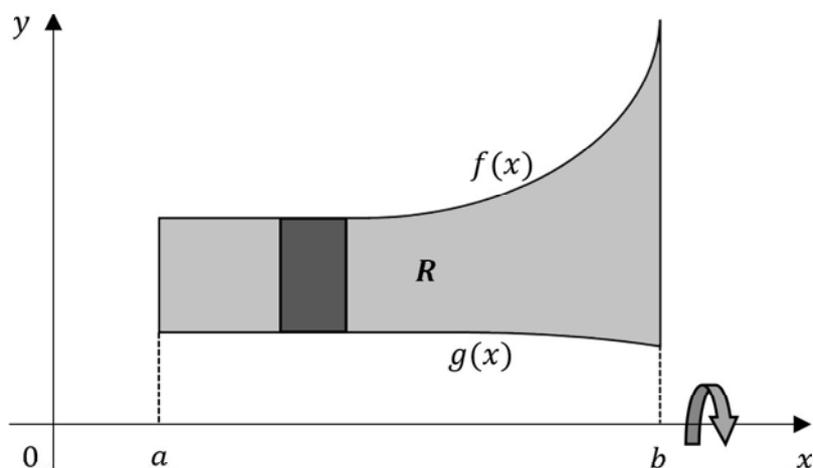


Figura 4.6: Retângulo que compõe a região R

Quando giramos a região R em torno do eixo x obtemos um anel circular. Então temos a figura 4.7 que mostra parte do sólido de revolução que é obtido quando é rotacionado um pequeno retângulo que compõe a região R .

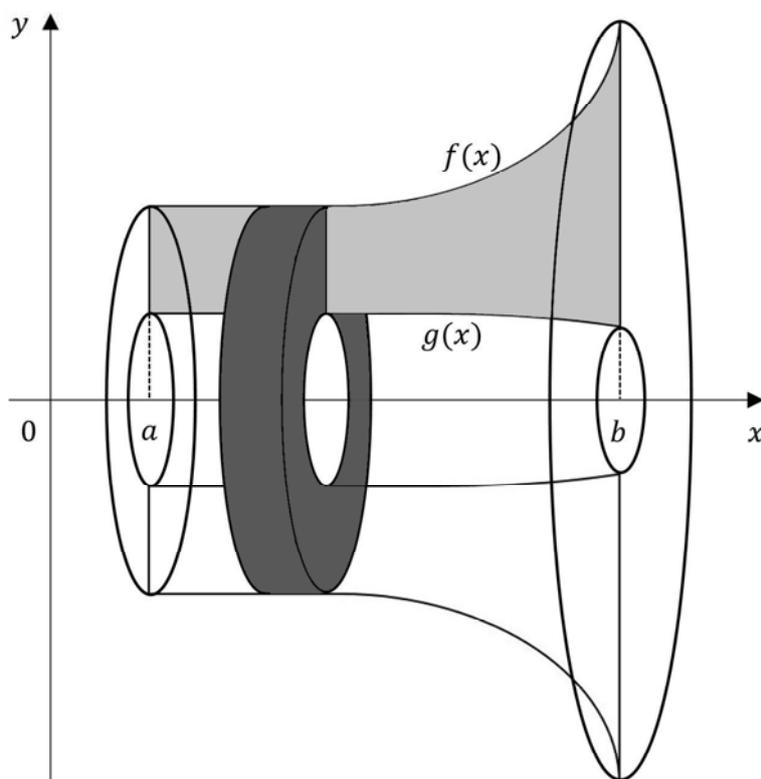


Figura 4.7: Anel circular da rotação de um retângulo da região R

Então, temos a proposição 4.4 para calcular a medida do volume do anel circular obtida pela rotação da região R em torno do eixo x .

Proposição 4.4 (Vomule do Anel Circular). *Seja f e g duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja A a área da região R , limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja V o sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x . Então*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

Quando a região de área é rotacionada em torno de uma reta paralela ao eixo x o resultado é semelhante do mesmo modo.

4.5 Área de Superfície de Revolução

Uma superfície de revolução é obtida quando rotacionamos uma curva em torno de um eixo de rotação. Essa superfície é a fronteira lateral do sólido gerado pela rotação. Vamos verificar como calcular a área dessa superfície.

Considere uma curva $y = f(x)$ com $x \in [a, b]$, onde $f(x) \geq 0$ e $f'(x)$ é contínua para todo $x \in [a, b]$. Quando rotacionamos o arco de curva, de extremidades $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, em torno do eixo x geramos uma superfície, mostrada na figura 4.9.

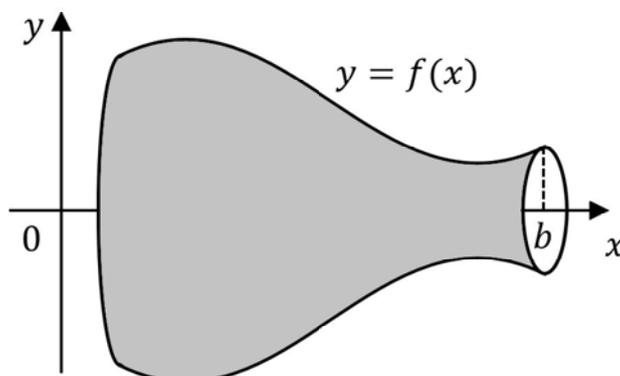


Figura 4.8: Superfície de revolução em torno do eixo x

Aplicando ferramentas de Cálculo é possível encontrar a área da superfície de revolução. Vamos mostrar as fórmulas nas proposições:

Definimos a área da superfície de revolução obtida pela rotação de f em torno do eixo x :

Proposição 4.5 (Área de superfície de revolução em torno do eixo x). *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ e f' são contínuas nesse intervalo, então a área A da superfície obtida pela rotação de $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo x é dada por*

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

De mesma forma, a área da superfície obtida pela rotação, em torno do eixo y :

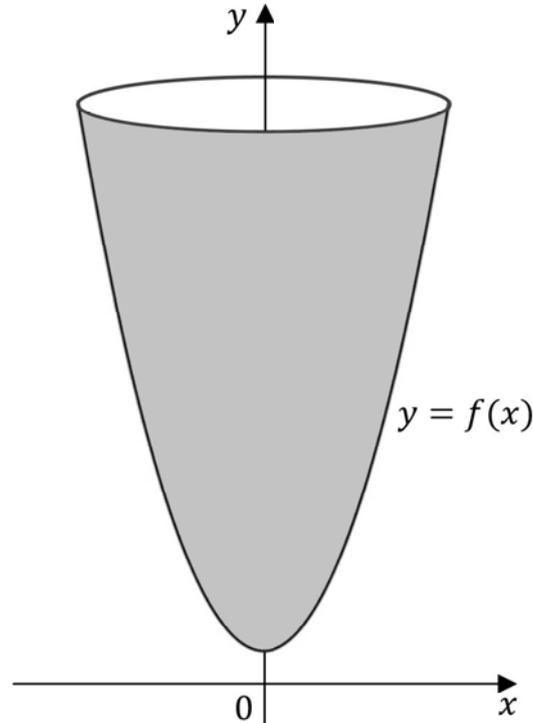


Figura 4.9: Superfície de revolução em torno do eixo y

Proposição 4.6 (Área de superfície de revolução em torno do eixo y). *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ e f' são contínuas nesse intervalo, então a área A da superfície obtida pela rotação de $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo y é dada por*

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

4.6 O Primeiro Teorema de Pappus

Após a abordagem das várias proposições do Cálculo, onde determinamos a área entre duas curvas, centro de massa de uma região plana, comprimento e centro de massa do gráfico de uma função, método das cascas cilíndricas, método do anel circular, área de uma superfície de revolução, podemos demonstrar os teoremas de Pappus.

Para uma superfície de revolução, o teorema 2.1 afirma:

Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro.

Demonstração: Se uma linha plana de comprimento L é rotacionada em torno do eixo y , utilizando as proposições 4.2 e 3.2, para determinarmos a área A da superfície gerada do mesmo modo que a proposição 4.6, temos que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi L \cdot \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi L \bar{x} \\ &= 2\pi \bar{x} L \end{aligned}$$

Então temos $A = 2\pi \bar{x} L$, onde L é o perímetro da linha plana rotacionada e $2\pi \bar{x}$ é o comprimento de uma circunferência cujo raio \bar{x} é a distância entre o centro de gravidade (baricentro) da linha plana e o eixo y .

Agora vamos obter a área da superfície de revolução para uma linha plana rotacionada em torno do eixo x , do mesmo modo que a proposição 4.5, novamente utilizando as proposições 4.2 e 3.2, temos que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi L \cdot \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi L \bar{y} \\ &= 2\pi \bar{y} L \end{aligned}$$

Portando $A = 2\pi \bar{y} L$, onde L representa o perímetro da linha plana rotacionada e $2\pi \bar{y}$ é o comprimento da circunferência cujo raio \bar{y} é a distância entre o centro de gravidade da linha plana e o eixo x .

Para o caso de uma linha plana (curva) rotacionando em torno de uma reta paralela a um dos eixos é obtido do mesmo modo.

4.7 O Segundo Teorema de Pappus

Para um sólido de revolução, o teorema 2.2 afirma:

Seja uma figura plana que gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.

Demonstração: Se uma figura plana de região A é rotacionada em torno do eixo y . Pelo método das cascas cilíndricas abordado na proposição 4.3 e utilizando a proposição 3.3, temos que

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \\ &= 2\pi A \cdot \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \\ &= 2\pi A\bar{x} \\ &= 2\pi\bar{x}A \end{aligned}$$

Então temos $V = 2\pi\bar{x}A$, onde $2\pi\bar{x}$ é o perímetro da circunferência cujo raio \bar{x} é a distância do eixo de rotação y ao centro de gravidade (baricentro) da região, de área A , que foi rotacionada.

Agora vamos obter o volume do sólido de revolução da região plana rotacionada em torno do eixo x . Pelo método do anel circular abordado na proposição 4.4 e utilizando a proposição 3.3, temos que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx \\ &= 2\pi A \cdot \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [(f(x))^2 - g(x)^2] dx \\ &= 2\pi A\bar{y} \\ &= 2\pi\bar{y}A \end{aligned}$$

Portanto $V = 2\pi\bar{y}A$, onde $2\pi\bar{y}$ é o perímetro da circunferência cujo raio \bar{y} é a distância do centro de gravidade da região de área A ao eixo de rotação x .

Para o caso de uma região plana é rotacionada em torno de uma reta paralela a um dos eixos é obtida do mesmo modo.

Afirmava Stewart [9] que, esses teoremas fazem uma surpreendente conexão entre centroides de linhas e regiões planas e sólidos de revolução.

Capítulo 5

Aplicações dos Teoremas de Pappus

Neste capítulo abordaremos algumas questões relacionadas aos teoremas de Pappus. O propósito é mostrar, que algumas questões, sobre superfícies e sólidos de revolução, são solucionadas de maneira mais simples, utilizando o teorema de Pappus.

Questão 1. (PROFMAT MA13 2013)

O trapézio $ABCD$ de bases AB e CD , representado na figura abaixo, gira em torno do eixo e que passa por A e é perpendicular a AB gerando o sólido de revolução R . Dados $AB = 4$, $CD = 2$ e $BC = AD = 3$.

- Calcule o volume de R .
- Calcule a área total de R .

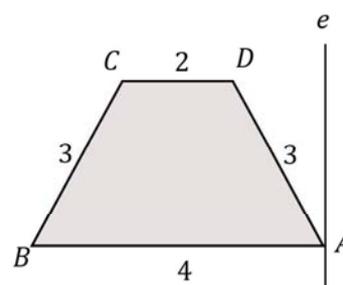


Figura 5.1: Trapézio

Uma solução proposta pelo PROFMAT:

Seja E a interseção da reta CD com o eixo e . Como o trapézio é isósceles, a distância de D ao eixo é $DE = 1$. No triângulo retângulo AED , $AE = h = 2\sqrt{2}$.

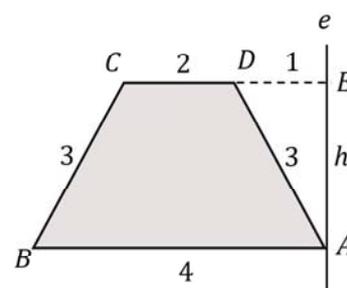


Figura 5.2: Trapézio isósceles

O sólido de revolução R é um tronco de cone de altura h com bases de raios AB e EC , subtraído de um cone de altura h e base de raio ED .

- O volume do sólido R é:

$$V = \frac{\pi 2\sqrt{2}}{3} \cdot (4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3) - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2} = 24\pi\sqrt{2}$$

b) Calcularemos a área gerada por cada segmento. Área gerada por AB (círculo).

$$S_1 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

Área gerada por CD (coroa circular).

$$S_2 = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = 8\pi$$

Área gerada por AD (superfície lateral de um cone).

$$S_3 = \pi \cdot 1 \cdot 3 = 3\pi$$

Área gerada por BC (superfície lateral de um tronco de cone).

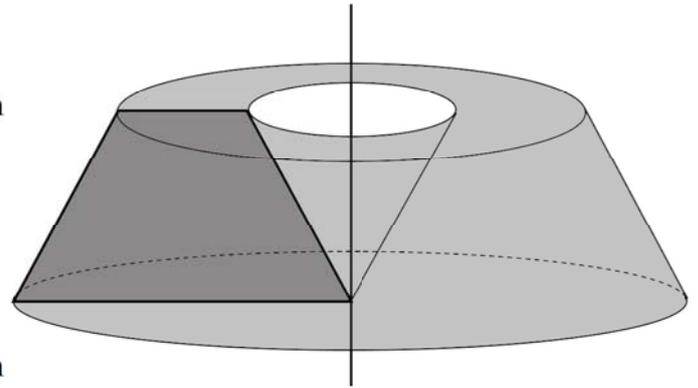


Figura 5.3: Sólido gerado pelo trapézio

$$S_4 = \pi \cdot (4 + 3) \cdot 3 = 21\pi$$

A área total de R é a soma das áreas geradas pelos lados do trapézio $ABCD$. Assim,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (16 + 8 + 3 + 21)\pi = 48\pi$$

Solução utilizando os teoremas de Pappus

O trapézio $ABCD$ possui um eixo de simetria, então, o seu centro de gravidade pertence a esse eixo, portanto, a distância do eixo de simetria ao eixo de rotação é igual a 2. Sabendo que a área do trapézio é $6\sqrt{2}$, temos que o volume do sólido gerado é

$$V = 2\pi \bar{x}A = 2\pi \cdot 2 \cdot 6\sqrt{2} = 24\pi\sqrt{2}$$

Sabendo que o perímetro do trapézio $ABCD$ é 12, temos que a área da superfície é

$$A = 2\pi \bar{x}L = 2\pi \cdot 2 \cdot 12 = 48\pi$$

Questão 2. (Dolce [6])

Calcule a área e o volume gerado pela rotação da figura dada em torno do eixo indicado XY .

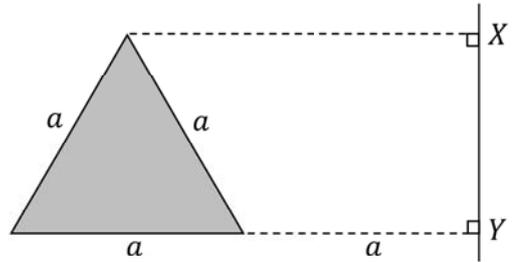


Figura 5.4: Triângulo equilátero

Uma solução:

a) Área

Área gerada por $ABC \rightarrow S_{ABC}$

Área lateral do cone $\rightarrow S_{AB}$

Área lateral do tronco $\rightarrow S_{AC}$

Área da coroa $\rightarrow S_{BC}$

$$S_{ABC} = S_{AB} + S_{AC} + S_{BC}$$

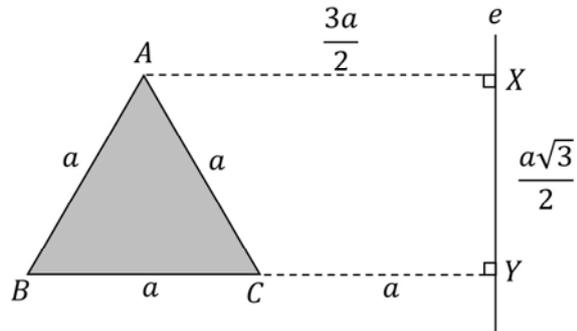


Figura 5.5: Triângulo equilátero

Fórmulas:

Tronco de cone: $A_l = \pi(R + r)g$

Coroa circular: $A = \pi(R^2 + r^2)g$

$$S_{ABC} = \pi \left(2a + \frac{3a}{2} \right) a + \pi \left(\frac{3a}{2} + a \right) a + \pi[(2a)^2 - a^2] = \frac{7}{2}\pi a^2 + \frac{5}{2}\pi a^2 + 3\pi a^2 = 9\pi a^2$$

b) Volume

Volume gerado por $ABC \rightarrow V_{ABC}$

Volume do tronco de cone $\rightarrow V_{XABY}$

Volume do tronco de cone $\rightarrow V_{XACY}$

Fórmula:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

$$\begin{aligned} V_{ABC} &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[(2a)^2 + (2a) \cdot \left(\frac{3a}{2} \right) + \left(\frac{3a}{2} \right)^2 \right] - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{3a}{2} \right)^2 + \left(\frac{3a}{2} \right) \cdot a + a^2 \right] \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[4a^2 + 3a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} - a^2 \right] = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \end{aligned}$$

Solução utilizando os teoremas de pappus

O triângulo equilátero ABC possui um eixo de simetria paralelo ao eixo de rotação XY , então, a distância entre o centro de gravidade e o eixo de rotação é $\bar{x} = \frac{3a}{2}$.

a) Área

Sabendo que o perímetro do triângulo ABC é $3a$, temos

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\bar{x}L \\ &= 2\pi\frac{3a}{2} \cdot 3a \\ &= 9\pi a^2 \end{aligned}$$

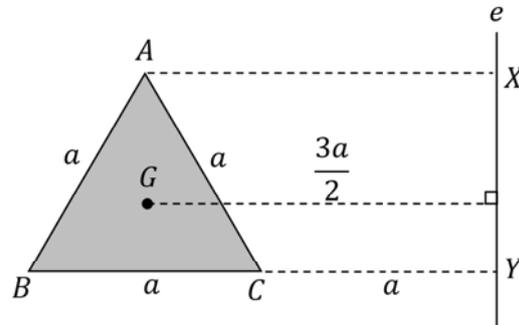


Figura 5.6: Centro de gravidade do triângulo equilátero

b) Volume

Sabendo que a área do triângulo equilátero é $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\bar{x}A \\ &= 2\pi\frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \end{aligned}$$

Questão 3.

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo OY , do círculo de raio 1 e centro $(4, 0)$.

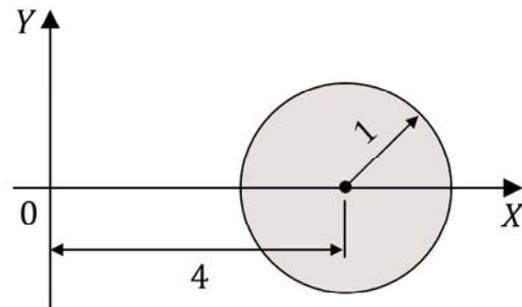


Figura 5.7: Círculo de raio 1

Uma solução utilizando cálculo:

Tomemos as equações paramétricas do círculo:

$$\begin{cases} x = 4 + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Sejam $x_1 = x_1(y)$ e $x_2 = x_2(y)$, funções cujos gráficos são, respectivamente, obtidos para $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ e para $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$. Para cada $y \in [-1, 1]$ a seção transversal ao eixo OY é um anel circular de raios externo e interno, respectivamente, iguais a $x_1(y)$ e $x_2(y)$. Logo, a seção transversal tem a área $A = \pi \cdot x_1^2 - \pi \cdot x_2^2$ e o volume do sólido é igual a

$$V = \pi \int_{-1}^1 (x_1)^2 dy - \pi \int_{-1}^1 (x_2)^2 dy$$

ou usando simetria

$$V = 2\pi \int_0^1 (x_1)^2 dy - 2\pi \int_0^1 (x_2)^2 dy$$

Substituindo por t temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + 4)^2 \cdot \cos(t) dt - 2\pi \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + 4)^2 \cdot \cos(t) dt \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3(t) + 8 \cos^2(t) + 16 \cos(t)) dt - 2\pi \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3(t) + 8 \cos^2(t) + 16 \cos(t)) dt \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen}^2(t)) dt + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) dt + [\text{sen}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) - \\ & 2\pi \left(\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen}^2(t)) dt + 4 \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) dt + [\text{sen}(t)]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 8\pi^2 \end{aligned}$$

Este sólido chama-se Toro. Veja sua representação gráfica na figura 5.8.

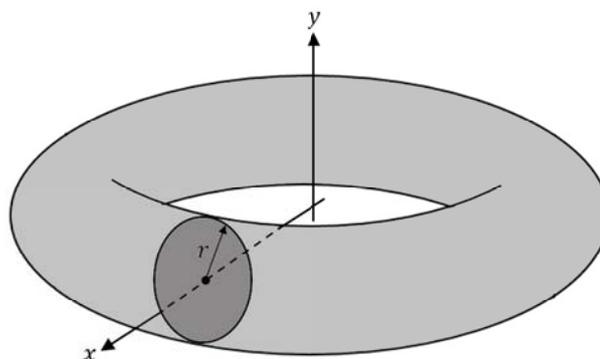


Figura 5.8: Toro

Solução usando o teorema de Pappus para sólidos de revolução

Sabendo a área do círculo é $A = \pi$ e que a distância entre o centro de gravidade do círculo e o eixo de rotação é igual a $\bar{x} = 4$, temos

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\bar{x}A \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot \pi \\ &= 8\pi^2\end{aligned}$$

Também podemos calcular a área da superfície, utilizando o teorema de Pappus para superfícies de revolução. Considerando uma circunferência de raio 1, temos que o comprimento é igual a 2π e a distância entre o centro de gravidade e o eixo de rotação é $\bar{x} = 4$, temos

$$\begin{aligned}A &= 2\pi\bar{x}L \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot 2\pi \\ &= 16\pi^2\end{aligned}$$

A superfície do Toro tem o formato de uma câmara de ar de um pneu de automóvel, conforme indicado na figura 5.8.

Questão 4.

(Uemg 2014) Uma empresa deseja fabricar uma peça maciça cujo formato é um sólido de revolução obtido pela rotação de um trapézio isóscele em torno da base menor, como mostra a figura 5.9. As dimensões do trapézio são: base maior igual a 15 cm, base menor igual a 7 cm e altura igual a 3 cm. Determine o volume da peça.

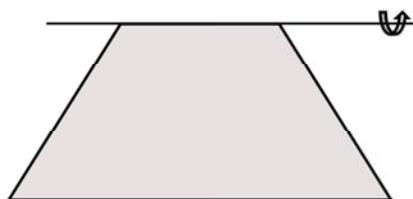


Figura 5.9: Trapézio isóscele

Conforme o exemplo 3.11 podemos determinar a distância \bar{y}_1 entre o centro de gravidade e a base menor do trapézio isóscele

$$\bar{y}_1 = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{B + 2b}{B + b} \right) = \frac{3}{3} \cdot \left(\frac{15 + 2 \cdot 7}{15 + 7} \right) = \frac{29}{22}$$

Agora, vamos determinar o volume da peça, sabendo que a área do trapézio é igual a 33 cm^2 , então temos

$$V = 2\pi\bar{y}_1 A = 2\pi \cdot \frac{29}{22} \cdot 33 = 87\pi$$

Portando o volume da peça 5.10 é igual a $87\pi \text{ cm}^2$.

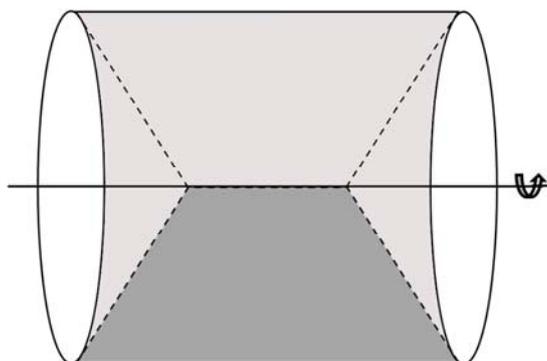


Figura 5.10: Peça gerada pela rotação do trapézio

Veremos na próxima questão, uma outra forma de utilizar o teorema de Pappus para superfícies de revolução.

Questão 5.

Encontre o centro de gravidade da curva, mostrada na figura 5.11, que é um quarto de uma circunferência de raio r .

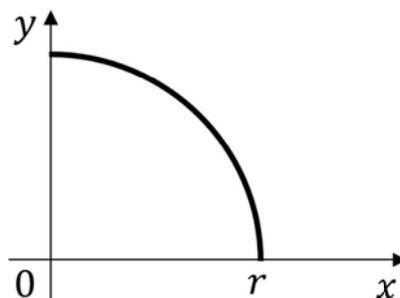


Figura 5.11: Um quarto de uma circunferência

Se utilizarmos a proposição 3.2, que é uma ferramenta do cálculo para determina o centro de gravidade de curvas, e sabendo que o comprimento da curva é igual a $L = \frac{\pi r}{2}$ e a função que determina essa curva é $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ teríamos

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{1}{\frac{\pi r}{2}} \int_0^r x \sqrt{1 + [(\sqrt{r^2 - x^2})']^2} dx \quad e$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{1}{\frac{\pi r}{2}} \int_0^r (r^2 - x^2) \sqrt{1 + [(\sqrt{r^2 - x^2})']^2} dx$$

Porém, se utilizarmos o teorema de Pappus para superfícies de revolução, sabendo que essa

curva for rotacionada em torno do eixo y gera uma semicircunferência, de área A igual a $2\pi r^2$, então temos

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\bar{x}L \\ 2\pi r^2 &= 2\pi \cdot \bar{x} \cdot \frac{\pi r}{2} \\ \bar{x} &= \frac{2 \cdot 2\pi r^2}{2\pi \cdot \pi r} \\ \bar{x} &= \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

Se a curva for rotacionada em torno do eixo x , do mesmo modo, encontrar o mesmo valor. Portanto o centro de gravidade de um quarto de uma circunferência é o ponto $\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)$.

Utilizando o cálculo integral certamente encontraríamos o centro de gravidade da curva, mas com o teorema de Pappus, determinamos da maneira mais simples.

Questão 6. (Insper 2011)

Considere o sólido gerado pela rotação completa do triângulo ABC , de área S , em torno de um eixo que passa pelo lado BC , que tem comprimento a . Qual o volume desse sólido?

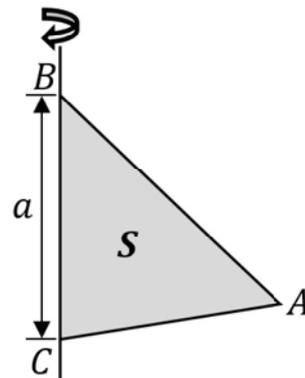


Figura 5.12: Triângulo ABC de área S

Solução:

Nesse problema temos a área S do triângulo ABC que gira em torno de um eixo que passa pelo lado $BC = a$. Sabendo que a área S do triângulo é igual a metade do produto da base pela altura, podemos determinar a altura H como

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot H}{2} \Rightarrow S = \frac{a \cdot H}{2} \Rightarrow H = \frac{2S}{a}$$

A distância entre o centro de gravidade (ou baricentro) do triângulo e o eixo de rotação é igual a um terço da altura em relação ao lado BC , conforme seção 3.9. Temos então

$$\bar{x} = \frac{H}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2S}{3a}$$

Agora podemos determinar o volume utilizando o teorema de Pappus para sólidos de revolução:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\bar{x}A \\ &= 2\pi \cdot \frac{2S}{3a} \cdot S \\ &= \frac{4\pi S^2}{3a} \end{aligned}$$

Questão 7.

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de 360° do triângulo em torno do eixo y , conforme mostra a figura 5.13.

Solução:

Podemos determinar a distância entre o baricentro do triângulo e o eixo de rotação y , conforme 3.9, utilizando a média das coordenadas do triângulo.

$$\bar{x} = \frac{0 + 2 + 4}{3} = 2 \quad e \quad \bar{y} = \frac{0 + 8 + 8}{3} = \frac{16}{3}$$

Porém vamos utilizar apenas \bar{x} , pois o triângulo será rotacionado em torno do eixo y .

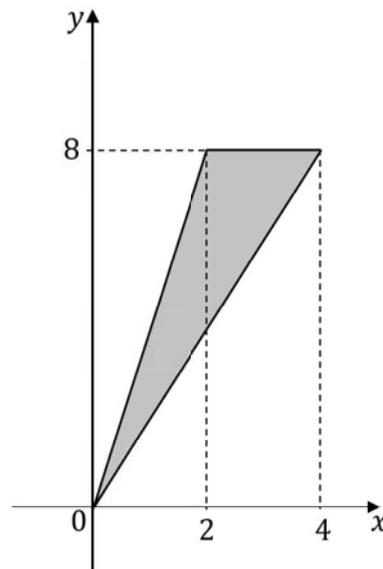


Figura 5.13: Triângulo agudo

Sabendo que a área A do triângulo é 8, temos que o volume do sólido gerado pela rotação de 360° é

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\bar{x}A \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot 8 \\ &= 32\pi \end{aligned}$$

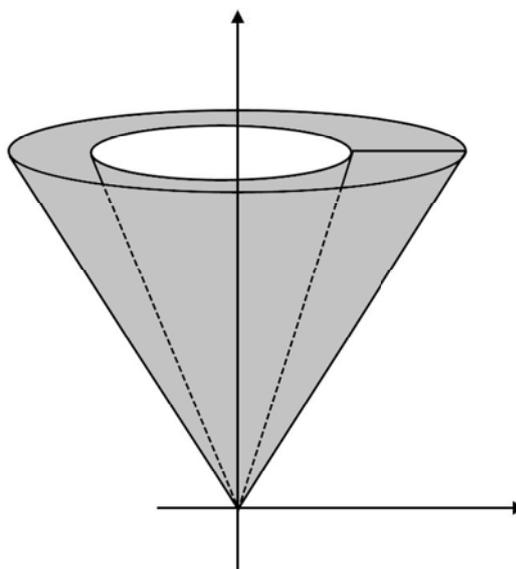


Figura 5.14: Sólido gerado pelo triângulo agudo

Questão 8.

Calcule a área da superfície gerado pela rotação de 360° do quadrado de lado igual a 4 em torno do eixo e , conforme mostra a figura 5.15.

Solução:

Podemos determinar a distância entre o centro de gravidade do quadrado e o eixo de rotação e , conforme 3.7. Porém vamos utilizar apenas \bar{y} , pois o triângulo será rotacionado em torno do eixo e que é paralelo ao eixo x .

Portanto $\bar{y} = 2$. Sabendo que o perímetro do quadrado é $L = 16$, temos que a área da superfície gerada pela rotação do quadrado em torno do eixo e é

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\bar{y}L \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot 16 \\ &= 64\pi \end{aligned}$$

Conforme mostra a figura 5.16.

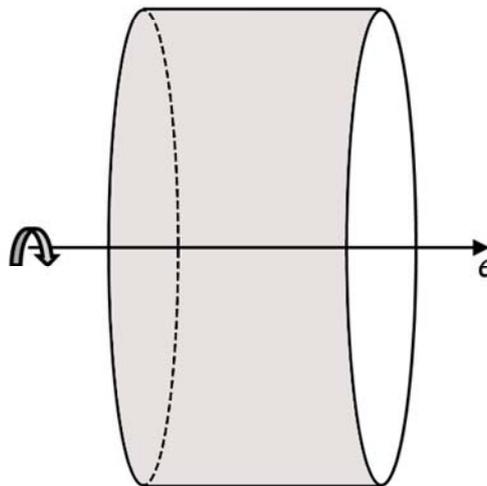


Figura 5.16: Superfície gerada pela rotação do quadrado

Questão 9

Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região sombreada ao ser rotacionada em torno do eixo y .

Solução:

Agora utilizando a definição 3.1, vamos determinar a distância \bar{x} entre o centro de gravidade da região sombreada e o eixo de rotação y .

Observamos que a figura é formada por um quadrado de lado igual a 3 menos um quarto de um círculo de raio 3. O quadrado possui área 9 e a área de um quarto de círculo é $\frac{9\pi}{4}$. A distância do centro de gravidade ao eixo de rotação do quadrado é $\frac{3}{2}$ e de um quarto de círculo é $\frac{4}{\pi}$, conforme seção 3.6, então temos

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot \frac{3}{2} + \left(-\frac{9\pi}{4}\right) \cdot \frac{4}{\pi}}{9 - \frac{9\pi}{4}} = \frac{2}{4 - \pi}$$

Sabendo que a área sombreada é igual a

$$A = 9 - \frac{9\pi}{4} = \frac{9(4 - \pi)}{4}$$

Agora podemos determinar o volume do sólido

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\bar{x}A \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{4 - \pi} \cdot \frac{9(4 - \pi)}{4} \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

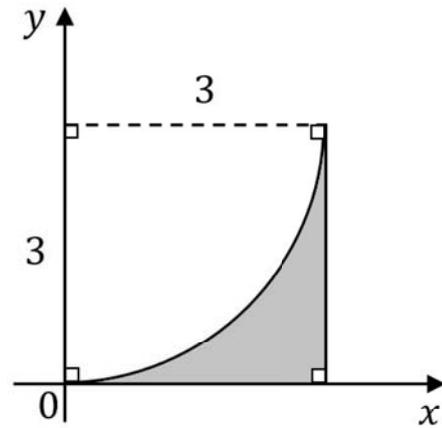


Figura 5.17: Região sombreada

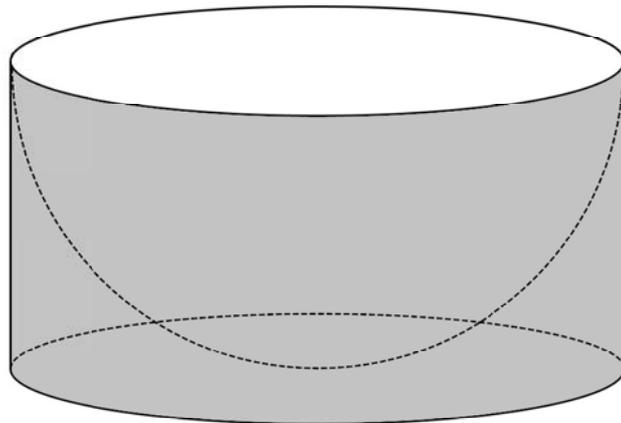


Figura 5.18: Sólido gerado pela região sombreada

Considerações Finais

Ao logo desta pesquisa sobre os dois teoremas de Pappus relativos as superfícies e sólidos de revolução foram vistos conceitos do Cálculo integral para uma demonstração formal. As ferramentas do Cálculo, como por exemplo as proposições sobre superfícies e sólidos de revolução, tornam a demonstração dos dois teoremas mais simples e acessível para todos que tenham interesse em comprovar a veracidade dos teoremas.

Outra abordagem significativa neste trabalho foi o estudo dos conceitos geométricos e do cálculo sobre centros de gravidade, que são utilizados na aplicação das fórmulas dos teoremas de Pappus para superfícies e sólidos de revolução.

Após a abordagem dos conceitos que verificam a credibilidade dos teoremas, iniciamos as aplicações. Tais aplicações confirmam a praticidade e eficiência dos dois teoremas, algo que pode ser igualmente proveitoso para alunos de ensino médio e de nível superior.

Referências Bibliográficas

- [1] Howard Anton, Irl Bivens, and Stephen Davis. *Cálculo-Volume I-10*. Bookman Editora, 2014.
- [2] André Koch Torres Assis. *Arquimedes, o centro de gravidade ea lei da alavanca*. Apeiron Montreal, 2008.
- [3] Carl Benjamin BOYER. *História da Matemática. 2º Edição–Tradução Elza Gomide*. 1996.
- [4] Pappus d’Alexandrie and Paul Ver Eecke. *La collection mathématique*. Desclée de Brouwer, 1933.
- [5] O Dolce and JN Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana–vol. 9, 7ª edição*. 1998.
- [6] Osvaldo Dolce and José Nicolau Pompeo. *Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica*. Atual, 2013.
- [7] Hamilton Luiz GUIDORIZZI and Um Curso de Cálculo. *volume 1. 5ª edição*. 2001.
- [8] ELON LAGES Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, and Augusto Cesar Morgado. *A Matemática do Ensino Médio-Volume 2, Coleção do Professor de Matemática*, volume 6. 2006.
- [9] James Stewart. *Cálculo, vol. 1, 5ª edição*. 2006.