Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio: teoria e aplicações

Fábio Alves Barbosa

Brasília

2017

Fábio Alves Barbosa

Proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio: teoria e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Rispoli de Carvalho

Brasília

2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciêncis Exatas
Departamento de Matemática

Proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio: teoria e aplicações

por
Fábio Alves Barbosa

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 25 de agosto de 2017

Comissão Examinadora:

____

Prof. Dr. Vinícius Rispoli de Carvalho - MAT/UnB (Orientador)

____

Prof. Dra. Tatiane da Silva Evangelista - MAT/UnB (Membro)

____

Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim - FGA/UnB (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Fábio Alves Barbosa graduou-se em Matemática pela Universidade de Braília - UnB, no programa do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemtíca em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Durante a graduação foi bolsista pela CAPES.

Dedico este trabalho a Deus que me deu forças para não desistir em momentos tão difíceis por que passei ao longo do curso, à minha mãe Marlene e à minha noiva Cristina e afilhada Liz que estiveram comigo nos momentos finais e decisivos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, à minha mãe, aos colegas pelo companheirismo e apoio, ao coordenador do curso pelo empenho, dedicação e solicitude, aos professores competentes e amigos, e à CAPES pelo suporte financeiro durante o curso.

Resumo

Este trabalho visa apresentar o assunto Sequência de Fibonacci para uma abordagem no Ensino Médio, apresentando-a com rigor matemático, envolvendo histórico, conceitos, definições, propriedades e teoremas básicos. Foi feita uma breve análise do cenário do sistema educacional brasileiro, enfatizando o Ensino Médio, e a abordagem da importância de ensinar a Matemática nesta modalidade, apresentando aos alunos aplicações práticas da disciplina, seja no cotidiano, na Natureza, artes, ciências, bem como o fundamento para o desenvolvimento de algo relevante. Por fim, foram propostas atividades que trabalhem o assunto sequência de Fibonacci e razão áurea em uma turma de ensino médio, envolvendo história da Matemática, a abordagem algébrica e teórica e aplicações. O trabalho foi desenvolvido mediante pesquisa bibliográfica e experiências vivenciadas em sala de aula em turmas de Ensino Médio.

Palavras-chave

Fibonacci, razão áurea, educação brasileira, ensino médio, Matemática, teoria, aplicações.

Abstract

This theory presents Fibonacci sequence subject for an approach in high school, presenting it with mathematical rigor, involving history, concepts, definitions, properties and basic theorems. A brief analysis of the Brazilian educational system scenario was made, emphasizing the high school, and the approach of the importance of teaching mathematics in this teaching level, presenting students with practical applications of the subject, whether in daily life, in nature, arts, sciences and the foundation for development of something relevant. Finally, it was proposed activities that deal with Fibonacci Sequence and Golden Ratio in high school classes, involving the history of mathematics, algebra and theoretical approach and application. The study was conducted by bibliographic research and experiences in the classroom in high school classes.

Keywords

Fibonacci, golden ratio, brazilian education, high school, Mathematics, theory, applications.

Lista de Figuras

1 Segmentos de média e extrema razão 49
2 Construção do Segmento Áureo - passo 1 50
3 Construção do Segmento Áureo - passo 2 51
4 Construção do Segmento Áureo - passo 3 52
5 Construção do Segmento Áureo - passo 4 53
6 Construção do Segmento Áureo - passo 5 54
7 Construção do Retângulo Áureo 55
8 Demonstração do Teorema 10 55
9 Construção do decágono regular 57
10 Construção do Pentágono regular a partir do decágono inscrito 58
11 O Pentagrama 59
12 A razão áurea no Pentagrama 60
13 A Espiral de Fibonacci 61
14 Representação do esquema de SCHIPS 64
15 Uma flor de girassol e uma esquematização das espirais em seu disco . . 65
16 Esquema de reflexão da luz em lâminas paralelas 66
17 As Pirâmides de Gizé. 68
18 O Pathernon e os retângulos áureos inscritos em sua construção 68
19 A catedral de Notre Dame (França) e o TajMahal, na Índia, e a sede da ONU, nos EUA, mostrando os retângulos áureos em suas proporções . 69
20 O Homem Vitruviano, de Leonardo DaVinci 70
21 Obras clássicas mostrando as porporções áureas utilizadas 72
22 Gráfico de rendimento após avaliação 79

Lista de Tabelas

1 Modelo do crescimento populacional de casais dos coelhos de Fibonacci 37
2 Sequências de lançamentos excluindo *caras* consecutivas 67
3 Rendimento das turmas após avaliação do trabalho 79

Sumário

1 Introdução **13**

2 Contexto do Ensino da Matemática no Brasil **16**

2.1 Organização da Educação No Distrito Federal 18

2.2 A Matemática no Ensino Médio 19

2.3 Desafios no Ensino da Matemática no Ensino Médio 21

3 Definições e teoremas importantes **24**

3.1 Números Naturais e Recorrência 24

3.2 Números Inteiros e Divisibilidade 25

3.3 Sequências e Recorrência 30

4 A Sequência de Fibonacci **36**

4.1 Definição 36

4.2 Propriedades 39

4.3 A Razão Áurea 46

5 Aplicações da Razão Áurea **63**

5.1 A Disposição das Folhas de plantas 63

5.2 Os Girassois de Fibonacci 65

5.3 A Reflexão da Luz 65

5.4 Cálculo Combinatório 66

5.5 Arquitetura Antiga e Contemporânea 67

5.6 Corpo Humano 70

5.7 Outros Seres Vivos e Formações da Natureza 71

5.8 Música e Poesia 71

5.9 Artes Plásticas 72

6 Sugestões de Atividades para Ensino Médio **73**

7 Considerações finais **80**

1 Introdução

As dificuldades em se aprender Matemática na educação básica passam pela forma teórica e pura em que os assuntos são apresentados aos alunos. Isso invariavelmente exige destes um nível de raciocício lógico e abstrato, que nem sempre é convidativo para os adolescentes.

Por isso é interessante que o professor consiga buscar, sempre que possível, aplicações dos assuntos abordados em sala de aula. Isto significa articular conceitos matemáticos com a vida diária dos estudantes, pois a aprendizagem constitui um fenômeno interpretativo da realidade na construção, reconstrução e desconstrução de conceitos, priorizando autonomia e reflexão da e na sociedade. Assim, ensinar e aprender matemática consideram a criticidade, participação e solidariedade, visando a uma educação humanística e integral.

A grande dificuldade dos educadores das escolas públicas na atualidade é conseguir o interesse e consequentemente a atenção e o empenho nas aulas por parte dos alunos. É possível pensar, num tom bem humorado, que educação parece ser o único ramo de trabalho em que o trabalhador é atrapalhado pelo seu cliente ao tentar realizar seu serviço da forma como deve ser.

Além disso, ainda se observa uma elevada taxa de evasão escolar, especialmente no Ensino Médio. Segundo relatório Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento - Pnud, a taxa de abandono escolar no Brasil está em 24,3%. Isto é, um em cada quatro estudantes abandonam os estudos antes de concluir o Ensino Médio.

Como, então, contornar esta situação?

Um dos pontos chaves é tornar o ensino mais atrativo para a realidade dos alunos. quando se fala nisto, a primeira ideia que costuma vir à mente é a alteração no currículo. Mas isto apenas não basta.

É fato que as escolas mantêm a mesma estrutura de décadas atrás, e que a realidade do aluno está muito alterada. Mudanças de ordem familiar, política, econômica, e principalmente de interação social exigem que a escola também reveja sua forma de fazer a educação.

Não existe uma cartilha, uma fórmula pronta para resolver esta questão, até porque esta é a geração de professores que está vivendo essas transformações — e sendo agente destas. Esta é a geração que deve começar a descobrir o que fazer e como fazer, por meio da prática diária. Pode ser numa espécie de tentativa e erro, com base em alguns teóricos conhecidos e nas práticas já vividas. De qualquer forma, cabe aos educadores da atualidade, inventar, refazer a prática pedagógica coerente com a realidade social.

Obviamente toda essa conjectura jamais exime o aluno de se comportar bem nas aulas, de se esforçar nos estudos. É o mínimo que a criança e o adolescente devem fazer. Por mais que haja uma restruturação nas propostas curriculares, políticas públicas decentes de educação e esmero dos professores na prática pedagógica em sala de aula, o aluno sempre terá que fazer o que é de sua competência, pois o processo pedagógico envolve todos os seus atores, e o aluno é protagonista. Não se pode lançar a responsabilidade do fracasso escolar unicamente sobre os educadores, a escola ou sobre "o sistema". O aluno precisa sempre fazer a parte dele — uma decisiva parte. Até porque, por mais que o professor seja criativo, e consiga fazer aulas diferentes, interessantes, atraentes, fica bem difícil que todas sejam assim. A tendência ainda é que maior a parte das aulas seriam "normais", menos espetaculares.

Mas é necessário que o educador se disponha a essa mudança em sua prática pedagógica. Quando se fala nesse assunto, pensa-se logo em alterações no currículo ou na inserção de recursos tecnológicos — computadores, lousas digitais, tablets. Mas a dificuldade do aprendizado não está no currículo ou no conteúdo, bem como a atratividade não está nos recursos tecnológicos. A chave está na criatividade do educador dentro da sala de aula, e também no empenho da coordenação pedagógica e de todos os segmentos da comunidade escolar, inclusive — e especialmente — no acompanhamento ativo da família do aluno.

Dessa forma, a cada dia um desafio se estabelece pra cada professor quando entra em sala de aula, quando realiza seu planejamento, e esse desafio se estende a toda a comunidade escolar, bem como aos governantes que deveriam legislar com políticas públicas em educação mais condizentes com esta nova realidade.

Este trabalho aborda uma proposta de atividade para o Ensino Médio, a partir de uma situação de aprendizagem caracterizada pela compreensão e entendimento da razão áurea, de seu contexto matemático, a motivação deste conceito, bem como a percepção de suas inúmeras aplicações na natureza, nas artes, na arquitetura, na Filosofia quando se relaciona com o conceito de beleza, dentre outras. A proposta é buscar articulação entre teoria e prática, global e local, abstrato e real, proporcionando um ambiente investigativo e criativo. Neste é possível fazer conexões entre diversos conceitos matemáticos, suas diferentes formas de pensamento com outras áreas do saber e com as aplicações citadas aqui.

Uma iniciativa como esta ajuda a incentivar a leitura e a escrita matemática, além de proporcionar uma maior participação do aluno nas aulas da disciplina. Também incentiva o desenvolvimento do espírito crítico e inovador, melhorando a interação professor/aluno dentro de um ambiente de aprendizagem mútua.

2 Contexto do Ensino da Matemática no Brasil

Atualmente, a Educação Básica no Brasil possui uma organização padronizada em quatro modalidades: Educação Infantil, Ensino Fundamental Séries Iniciais, Ensino Fundamental Séries Finais e Ensino Médio. Mas dentro desta concepção existem particularidades regionais, pois cada estado ou município possui certa autonomia para estruturar a parte operacional, respeitando dessa organização padronizada prevista pela legislação nacional.

Mas de modo geral a Matemática precisa de cuidados para que o processo de ensino e aprendizagem tenha êxito, independente da modalidade de ensino ou o local onde a escola esteja. Aprender Matemática não deve se restringir a aprender pelo aprender. Além de ensinar os conceitos matemáticos e levar o aluno a desenvolver habilidades para lidar com os mecanismos do cálculo, é fundamental que lhe seja oferecidas as condições para saber mais tarde utilizar esses conhecimentos em situações da vida real.

Esta é uma das grandes dificuldades no ensino da Matemática. Uma das indagações mais frequentes dos alunos é "pra que aprender isso?", ou "onde vou usar isso?". E infelizmente na maioria das vezes nem mesmo o professor tem uma resposta satisfatória para essas perguntas. Este quadro é o primeiro passo para gerar um desestímulo no aluno em aprender Matemática. Boa parte da graça do aprendizado está no que se pode fazer com ele. Conhecimento por mero conhecimento normalmente não é tão atrativo.

Dessa forma, é importante que haja um equilíbrio no processo de aprendizagem, que desperte interesse nos alunos, além de lhes desenvolver a capacidade de empregar futuramente as técnicas aprendidas e, principalmente a clareza dos conceitos e ideias, a coerência no raciocínio lógico, a começar com o simples hábito de pensar e raciocinar.

Na vida deste raciocínio, o ensino da Matemática, segundo LIMA, deve abranger três componentes fundamentais: Conceituação, Manipulação e Aplicações (LIMA, 2007, p.154).

A **conceituação** se refere às definições matemáticas. Conceituar é assimilar a ideia e, a seguir, escrever de modo claro e objetivo as definições, as proposições e as conclusões cabíveis no contexto.

Conceituar é mais do que escrever a definição. É compreensão da ideia, do contexto. Exige um nível abstração mais ou menos avançado, dependendo do assunto que se deseja conceituar.

A **manipulação** está relacionada com a prática dos cálculos propriamente dita.

De modo geral, pode ser vista como a habilidade no manuseio de equações, fórmulas, construções geométricas, gráficos, tabelas.

Por fim, as **aplicações** são os resultados dos conceitos e manipulações empregados na prática, isto é, em situações onde possam ser úteis. Seja em sitauções simples do cotidiano, ou como suporte a experimentos científicos ou tecnológicos mais complexos, ou até mesmo em questões das ciências sociais.

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 2007, p. 155)

Ao ensinar Matemática na escola, caso não seja dado um enfoque adequado em sala de aula, os alunos tendem a subvalorizar a disciplina em termos de importância prática e superestimá-la no que diz respeito ao nível de dificuldade de aprendizado. E obviamente esta seria uma visão deturpada da realidade.

A Matemática é uma poderosíssima ferramenta que contribui inestimavelmente para o futuro da nação, bem como para mudar o mundo. É uma disciplina que possui várias nuances de como ela pode ser vista e tratada.

De início, é uma linguagem universal, que possui formalidade, precisão e generalidade. Com isso consegue-se o melhor da expressão científica com base na linguagem matemática.

A Matemática também é um eficaz instrumento na busca de resultados, na análise destes, em inferências, conclusões e projeções. Seja em situações simples do cotidiano, ou como suporte a experimentos científicos ou tecnológicos mais complexos, ou até mesmo em questões puramente sociais.

Além disso, pode ser vista ainda como uma arte. De fato, quem utiliza ou estuda com responsabilidade a Matemática em seu cotidiano, percebe que

> o enlace das proposições, as conexões entre suas diversas teorias, a elegância, a limpidez dos seus raciocínios, a singela eloquência dos seus enunciados e a surpresa de algumas de suas conclusões enlevam o espírito e comprazem nosso senso estético. (LIMA, 2007, p. 162)

Por fim, a Matemática pode ser vista, acima de tudo, como um grande desafio. Seja para entender os conceitos, para manipular suas equações e construções, seja para fazer a conexão rigorosa e limpa entre a realidade concreta, mas muitas vezes escondida e nada óbvia, e o modelo abstrato que a explica e a demonstra.

Dessa forma, é fundamental que o professor tenha a noção do que significa a Matemática, a disciplina que irá ensinar a seus alunos. Isso deve ser feito com consciência e entusiasmo.

2.1 Organização da Educação No Distrito Federal

Neste trabalho adota-se a referência da proposta curricular adotada nas escolas públicas do Distrito Federal, denominada *Currículo em Movimento da Educação Básica*, em vigor desde o ano de 2014.

A modalidade Ensino Fundamental Séries Iniciais tem duração de nove anos. Os três primeiros anos compõem um ciclo denominado *Bloco Inicial de Alfabetização* — o BIA. Nos dois primeiros anos não há retenção do aluno, podendo ocorrer apenas no terceiro e último ano do ciclo.

Os eixos de trabalho do BIA são alfabetização, letramento e ludicidade. Isso inclui a alfabetização e o letramento em Matemática, pois significa traduzir as ideias de quantidades, formas ou representações abstratas do cotidiano ou da sociedade.

No BIA a Matemática deve ser tratada como uma ferramenta que auxilie as crianças a resolverem situações do cotidiano a fim de compreender o mundo, dentro de sua realidade e maturidade cognitiva.

A ludicidade está na ideia de que se o ensino da Matemática se desenvolva valendo-se do espírito imaginativo das crianças, valorizando também o conhecimento prévio delas, mesmo com pouca idade, mas que não pode ser ignorado, pois existe e é o ponto de partida para que sejam instigadas à reflexão e também a querer se aprofundar mais na busca de informações e no conhecimento.

É crucial que neste período a criança no mínimo se familiarize com a escrita dos numerais, sua nomenclatura e operações fundamentais.

Nos outros oito anos do Ensino Fundamental, a proposta é que a Matemática seja tratada de forma instigante, investigativa, criativa. Para tanto, o professor deve sair da tradicional lista de exercícios mecanizados, que visam reproduzir os exemplos que foram dados na aula meramente teórica e técnica. Ao invés disso, deve favorecer a problematização, trazer situações que provoquem os estudantes, que os façam pensar, buscar soluções próprias e que estas sejam socializadas com todos.

Ao fim do Ensino Fundamental, espera-se que o aluno, além dos conceitos e competências das séries iniciais, seja capaz, essencialmente, de resolver equações de 1º e 2º graus; expressões numéricas envolvendo as operações fundamentais, potência, radiciação, frações, decimais; possa fazer leitura e interpretação de gráficos e tabelas, manipulação de polinômios, resolver sistemas de equações, compreenda os conceitos de geometria plana, cálculo de perímetro e áreas de figuras planas, bem como as relações no triângulo retângulo inclusive os conceitos de trigonometria (seno, cosseno, tangente).

O ciclo da Educação Básica se encerra com o Ensino Médio, concluído em três séries, tendo maior número de disciplinas em relação ao ensino fundamental. Por exemplo, a disciplina Ciências dá lugar a Física, Química e Biologia, além da inserção de Filosofia e Sociologia. O ensino da Matemática nessa modalidade será discutido mais especificamente no tópico a seguir.

2.2 A Matemática no Ensino Médio

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o Ensino Médio tem como meta formar cidadãos éticos e autônomos, capazes de compreender os processos produtivos. Desta forma, espera-se que o ensino de Matemática, mais especificamente, seja trabalhado de forma a levar o estudante à reflexão, desenvolvendo o pensamento crítico, auxiliando na resolução de problemas e no envolvimento em contextos sociais, culturais e econômicos. Conforme as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, ao final deste,

> [...] espera-se que os estudantes saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p.69).

Neta fase, a idade padrão dos alunos é entre 15 e 17 anos. Neste momento o aluno começa a perceber quais são de fato suas predileções no que diz respeito às áreas do conhecimento, e consequentemente passa a ter uma noção do que gostaria de estudar no futuro curso superior. Naturalmente existem diversos outros fatores que o influenciam nesta escolha, como, por exemplo, a situação financeira da família, sua ambição financeira ou de status profissional, ou ainda as informações a respeito de facilidade de colocação no mercado de trabalho e até mesmo a simples relação candidato/vaga que representa a concorrência no vestibular para a área pretendida.

Atualmente a proporção de alunos que concluem o Ensino Médio e chegam a um curso de nível superior ainda é relativamente baixa. Em termos de vida acadêmica, esta é praticamente a única opção, haja vista que mesmo existindo os cursos técnicos profissionalizantes, estes são bem escassos.

Até então o Ensino Médio possui um currículo padrão, engessado, sem modalidades diferenciadas. Uma estrutura monolítica, que oferece o mesmo ensino para os alunos que naturalmente possuem vocações, capacidades e objetivos distintos. Não é difícil inferir que desta forma o Ensino Médio não tem se mostrado adequado para a formação dos jovens no Brasil.

Tratando especificamente da Matemática, o Ensino Médio é um momento único do aluno ter um contato marcante com a disciplina. Isso porque nesta fase ele já está cognitivamente mais preparado para avançar na *conceituação*, na *manipulação* e na compreesão de algumas das *aplicações* dos temas trabalhados. Cabe ao professor não exagerar nem desprezar alguma dessas três frentes de trabalho no ensino da Matemática em sala de aula.

> A dosagem adequada dessas três componentes *(conceituação, manipulação e aplicações)* é o fator de equilíbrio do processo de aprendizagem. Elas contribuirão para despertar o interesse dos alunos em aumentar a capacidade que terão no futuro de empregar não apenas das técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo a capacidade de análise, o espírito crítico, agudo e bem fundamentado, a clareza das ideias, a disciplina mental que consistem em raciocinar e agir ordenadamente. É conveniente pensar nas três componentes como um tripé de sustentação: As três são suficientes para assegurar a harmonia do ensino e cada uma delas é necessária para seu bom êxito. (LIMA, 2007, p. 198)

2.3 Desafios no Ensino da Matemática no Ensino Médio

É fato que o conteúdo ministrado para os alunos de Ensino Médio nas diversas disciplinas é bem extenso, diversificado e com um grau de dificuldade bem variável.

E detendo-se especificamente na Matemática, é possível perceber uma acentuação ainda maior quanto à diversidade de assuntos, bem como seu grau de dificuldade. Significaria isto que Matemática é "mais difícil" do que as demais disciplinas?

Em termos, sim. Seria esperado numa resposta politicamente correta dizer que não, que todas as disciplinas possuem seu grau de dificuldade e não haveria uma ou outra considerada mais difícil. No entanto, fazendo uma análise fria e racional, percebe-se que a Matemática leva os alunos, sim, a ter maior esforço cognitivo e de raciocínio lógico para seu aprendizado.

Números, fórmulas, equações e situações problemas embaralham a cabeça dos alunos desde os primeiros anos de estudo. Para muitos, Matemática, acompanhado de ciências, são consideradas áreas mais complexas, confusas e detalhistas do que, por exemplo, História ou Língua Portuguesa. Um dos motivos é o fato de geralmente os alunos terem uma visão distorcida da Matemática e não conseguirem associar o ensino ao seu cotidiano. Ao invés disto, só conseguem ver um aglomerado de fórmulas e cálculos que não fazem sentido algum.

Pensar que a Matemática é uma disciplina difícil na verdade é secular. LIMA (2007, p.171) revela alguns fatos interessantes, e para alguns podem ser até curiosos concernentes a esta questão. Segundo ele, na Idade Média havia a expressão *pons asinorum* (algo como ponte dos burros), indicando que poucas pessoas seriam capazes de assimilar os tópicos de Geometria proposta séculos antes por Sócrates. Além disso, as Sete Artes Liberais se organizavam em duas classes: *trivium* (Gramática, retórica e Dialética) e *quadrivium* (Aritmética, Geometria, Astronomia e Música). De *trivium* origina o termo "trivial", para se referir a algo mais direto, óbvio, de fácil entendimento. Obviamente, então o grupo das *quadrivium* era considerado o que continha as disciplinas difíceis de se ensinar e aprender.

Ainda segundo LIMA (2007), desde a antiguidade, no pórtico da Academia de Platão (século 4 a.C.) estava escrito: "ninguém ignorante de Geometria entre aqui".

Até hoje existe este tabu, uma ideia já pré conceituada de que aprender Matemática — e disciplinas que exijam muitos cálculos, como a Física, por exemplo — é mais difícil do que outras disciplinas.

É inegável que aprender Matemática exige alto nível de concentração, raciocínio lógico e capacidade de abstração relativamente apurados, além de dedicação no aprendizado. Seria possível dizer, então, que aprender Matemática é mais difícil?

> “se o fato de exigir empenho, atenção e ordem significasse ser mais difícil, a resposta (relutante) seria sim. As ideias e regras matemáticas no nível que estamos considerando são, porém, todas extremamente simples e claras, bem mais simples e claras, por exemplo, do que as regras da crase ou mesmo da lei do impedimento do futebol. Por isso, continuo afirmando que toda pessoa de inteligência média, talentos ou pendores especiais, pode aprender toda a Matemática do ginásio [Ensino Médio], desde que esteja disposta a trabalhar e tenha uma orientação adequada. Aqui já vão dois dos motivos que você me pediu para o mau resultado no ensino da Matemática: pouca dedicação aos estudos por parte dos alunos e da sociedade que os cerca, a começar pela própria família e despreparo dos seus professores nas escolas que frequenta” (LIMA, 2007, p.3-4).

Postas essas questões, cabe ao professor contribuir para minimizar as dificuldades em se aprender Matemática.

Neste momento inciam-se as questões e dúvidas. A principal delas é como fazer isto?

A Matemática é tão fascinante e importante a ponto de ser indispensável porque é ferramenta de aplicações concretas, ou como resposta de questões que sem ela provavelmente continuariam sem resposta ou no máximo com o perfil de opiniões ou conjecturas.

Assim, em sala de aula, sem desprezar a natural importância das definições e manipulações, as aplicações são a parte mais atrativa das aulas para a maioria dos alunos. É o que os motiva a pensar, a procurar soluções, resolver problemas, refinar o raciocínio.

As aplicações são a conexão entre o abstrato e o concreto. Neste sentido, é interessante em sala de aula iniciar um assunto valendo-se de uma situação problema que para ser resolvido exija os conceitos que serão estudados naquela aula. Apenas apresentar aos alunos os conceitos, definições, teoremas e exemplos “solto” dificilmente despertarão o interesse da grande parte dos alunos, a não ser dos que naturalmente possuírem uma tendência em gostar de manipulações matemáticas. E mesmo para estes poderá tornar-se enfadonho a partir de algum momento.

O grande desafio está em competir com atividades consideradas mais atrativas para os adolescentes e jovens nos dias atuais. Por exemplo, a Internet com suas as redes sociais, os videogames e afins são popularmente os grandes concorrentes da atualidade, que os fazem gastar seu tempo, ao invés de se dedicar à concentração necessária para um estudo mais efetivo e eficaz.

Contudo é preciso ter o cuidado com os extremos. Se não é saudável tratar a Matemática em sala de aula de forma apenas teórica e com exemplos não contextualizados, por outro lado dedicar-se excessivamente na busca de situações que sejam ou pareçam ser aplicações dos conceitos a serem estudados pode se tranformar numa espécie de desatino, tornando-se algo forçado e confuso. A melhor ideia é o equilíbrio na abordagem e na execução das aulas.

No geral, a aceleração da tecnologia e a explosão da informação criam a necessidade urgente de repensar o sistema educacional tradicionalmente centrado no conteúdo. Começando com uma profunda explicação de como as necessidades da sociedade moderna e da força de trabalho estão mudando, existe um desafio aos educadores desta geração a dar um grande salto no currículo escolar, bem como no modo de "fazer aulas" a fim de refletir competências mais profundas, incluindo conhecimento moderno relevante, que possa abranger o tripé conceituação/manipulação/aplicação de forma oportuna e objetiva.

3 Definições e teoremas importantes

Antes de tratar dos números de Fibonacci e suas aplicações, é importante conhecer algumas definições e resultados que serão utilizados em sua abordagem.

3.1 Números Naturais e Recorrência

Os surgimento dos números na história da humanidade certamente está ligado à necessidade natural do ser humano se relacionar com as quantidades em seu cotidiano, inclusive para sua própria subsistência.

Além dos números, que dão a ideia de quantidade, a evolução da espécie humana trouxe a necessidade de registrar os números. É de se esperar que cada tribo ou civilização criasse sua forma própria de fazer esses registros, naturalmente em concomitância com a escrita da linguagem utilizada para a comunicação em geral, e isso incluiria os números como expressão das quantidades.

De fato, de acordo com ROQUE e CARVALHO (2012, p.2), os primeiros vestígios do que pode ser considerado escrita datam de cerca de 4 mil anos a.C. O surgimento da Matemática e da escrita nesta região estariam bem relacionados.

Os números naturais dão a ideia básica de contagem ou de ordenação. À representação dos números dá-se o nome de numeral. A arqueologia revela diferentes formas de escrita de números e de sistemas de numeração, como os babilônicos que desenvolveram um sistema de atribuição de valor baseado essencialmente nos numerais de 1 a 10. Os egípcios antigos possuíam um sistema de numerais com hieróglifos distintos para representar os núemros 1, 10, e todas as potências de 10 até um milhão. Os romanos utilizavam letras e a posição dos algarismos representavam somas ou subtrações que ajustavam o valor a ser representado.

O sistema utilizado na maior parte do mundo atualmente, o hindu-arábico é assim chamado por ter sido adotado por matemáticos persas e árabes na Índia e repassado para outros povos ao longo do tempo. Há alguma evidência de que os números na sua forma atual foram desenvolvidos a partir de letras árabes nas regiões ocidentais do mundo árabe.

Uma construção do conjunto dos números naturais foi desenvolvida no século 19 por Giuseppe Peano (1858-1932) e costuma ser chamada de *Axiomática de Peano*. Este propôs uma lista de axiomas, isto é, propriedades essenciais, que são premissas consideradas necessariamente triviais, evidentes e verdadeiras. Os Axiomas de Peano se baseiam na noção de sucessor de um número natural. Esta construção caracteriza o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ por meio de 4 axiomas:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

3. Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.

4. Seja X um conjunto de números naturais. Se 1 pertence a X e se o sucessor de cada elemento de X pertence a X, então X é o próprio conjunto dos números naturais

A noção de sucessor estabelece a ideia de adição, pois chega-se ao sucessor de um número somando a este uma unidade. Pode-se, assim, escrever os Axiomas de Peano na notação de adição, notando como $n + 1$ o sucessor no número natural n.

1. Todo número $n \in \mathbb{N}$ tem um único sucessor $n + 1 \in \mathbb{N}$.

2. Se $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.

3. Existe un único número $1 \in \mathbb{N}$, tal que $n + 1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in \mathbb{N}$ e se $n + 1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O axioma 4 é denominado *Axioma da Indução.* Este pode ser reescrito na forma a seguir e recebe o nome de
Princípio da Indução Finita: Seja $P(n)$ uma proposição relativa a $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $P(1)$ é válida e se para todo $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$. Então $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.(MORGADO e CARVALHO, 2015, p.3)

3.2 Números Inteiros e Divisibilidade

Nesta seção será feita uma breve abordagem de Teoria dos Números, focando em conceitos e teoremas básicos de divisibilidade dos números inteiros. Obviamente o que se aplica aos números inteiros vale para os números naturais, que é o que de fato interessa como suporte para se trabalhar com os números de Fibonacci, tema central deste trabalho.

Definição 1. *Dados dois números inteiros a e b, diz-se que* a divide b*, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c.a$. O número c é chamado de* quociente *entre a e b. Diz-se ainda neste caso que a é um* divisor *ou um* fator *de b, ou ainda que b é um* múltiplo *de a ou que b é* divisível *por a. A negação desta condição, isto é, se a não divide b é denotada por $a \nmid b$.*

Teorema 1. *Sejam a e b dois números inteiros, $b \neq 0$, tais que $a|b$, isto é, $b = a.c$. O quociente c é único.*

Demonstração do Teorema 1. Suponha que exista $c_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c_1 a$. Por definição, $c_1 = \dfrac{b}{a}$. Mas como c é quociente por hipótese, então $c = \dfrac{b}{a}$. Portanto, $c_1 = c$ e o quiciente é único.

Teorema 2. ***Divisão Euclidiana***. *Sejam a e b dois números inteiros, $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = b.q + r, \qquad 0 \leq r < |b|$$

Chama-se q de quociente da divisão euclidiana de a por b *e r é o* resto *desta divisão.*

Exemplo 1. Considerando os números $a = 32$ e $b = 6$, tem-se pelo Algoritmo de Euclides $q = 5$ e $r = 2$, pois pode-se escrever $32 = 6.5 + 2$. Neste caso, o quociente da divisão euclidiana de 32 por 6 é 5 e o resto da divisão é 2.

Demonstração do Teorema 2. Primeiramente, para provar a existência de q e r, seja $M = \{m \in \mathbb{Z} \; ; \; m = a - bt, \; t \in \mathbb{Z}\}$ e seja M_+ o subconjunto dos elementos não negativos de M, isto é, seja o conjunto $M_+ = \{m \in \mathbb{Z} \; ; \; m = a - bt, \; t \in \mathbb{Z} \; , t \leq a/b\}$. Como M_+ é limitado inferiormente (por 0), logo pelo Princípio da Boa Ordenação dos Inteiros existe um menor elemento de M_+, isto é, $r \leq x$ para todo $x \in M_+$. Como $r \in M_+ \subset M$, tem-se que $r = a - bq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$, e desta forma $a = bq + r$, com $r \geq 0$, pois $r \in M_+$. Isto prova a existência de q e r. Para concluir que $r < b$, basta observar, por absurdo, que que $r = (a - bq) \geq b$ isto acarretaria $a - (q+1)b \geq 0$, logo $a - (q+1)b \in M_+$. Mas como $q > 0$, então $q + 1 > q$ e assim $a - (q+1)b < a - qb = r$, o que contradiz a minimalidade de $r \in M_+$. Portanto, $0 \leq r < b$. Para verificar que q e r são únicos, suponha que $a = bq + r$ e que também $a = bq_1 + r_1$, com $q, r, q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$, e $0 \leq r, r_1 < q$. Sem perda de generalidade, suponha que $r \geq r_1$. Como $bq + r = bq_1 + r_1$, tem-se que $r - r_1 = b(q_1 - q)$. Assim, $0 \leq b(q_1 - q) < b$, e daí $q_1 - q = 0$. Consequentemente, $q = q_1$ e $r = r_1$. Portanto, q e r são únicos.

Definição 2. *Dados dois números inteiros a e b, um* divisor comum *d de a e b é tal que $d|a$ e $d|b$. Além disto, d será o* máximo divisor comum de a e b *se d for divisível por todo divisor comum de a e b e será denotado por $d = mdc(a, b)$ ou simplesmente $d = (a, b)$.*

Em outras palavras, o *mdc* de a e b é o *maior* dos divisores comuns de a e b.

Exemplo 2. O mdc de 12 e 18 é 6, pois $6|12$, $6|18$, e 6 é o maior dos divisores comuns de 12 e 18, a saber: $(1, 2, 3, 6)$. Isto é, 6 é divisível por todos os outros divisores comuns de 12 e 18.

Definição 3. *Dados dois números inteiros a e b, são ditos* primos entre si, *ou* coprimos, *ou ainda* relativamente primos, *se $(a, b) = 1$, isto é, se o único divisor comum positivo de a e b é 1.*

Exemplo 3. Os números 6 e 11 são coprimos pois o único inteiro positivo que divide ambos é 1. Assim, $(6, 11) = 1$.

Teorema 3. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então (a, b) existe, e tem-se que $(a, b) = (a, b - na)$.*

Demosntração do Teorema 3. Por hipótese, existe $(a, b - na)$. Assim, seja $d = (a, b - na)$. Sendo d um divisor comum de a e de $b - na$, então $d|a$ e $d|b - na$. Assim, $d|b - na + na = b$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Seja agora c um divisor comum de a e b. Logo, c é divisor comum de a e $b - na$, e assim $c|d$. Portanto, $d = (a, b)$ e assim $(a, b) = (a, b - na)$.

Teorema 4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*

- *Se $(a, c) = 1$, então $(a, bc) = (a, b)$*
- *Se $b|c$, então $(a + c, b) = (a, b)$.*

Demonstração do Teorema 4. O primeiro item é trivial, pelo fato de a e c serem coprimos. Para a segunda afirmação, seja $d = mdc(a, b)$. Então $d|a$ e $d|b$. Por hipótese $b|c$, Então por transitividade, $d|b$ e $b|c$ implica em $d|c$. Assim, $d|a$, $d|b$, $d|c$. Logo, $d|a + c$. Então d é divisor comum de $a + c$ e b. Seja agora t um divisor comum de a e b. Logo, t é divisor comum de $a + c$ e b, e assim $t|d$. Portanto, $d = (a + c, b) = (a, b)$.

Existe um algoritmo que permite descobrir o *mdc* entre dois números inteiros, além de servir como prova construtiva da existência do *mdc*. Foi dada por Euclides no livro VII de sua obra *Os Elementos* e por isto mesmo é denominado *Algoritmo de Euclides*.

O Algoritmo de Euclides. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, suponha $b \leq a$. É trivial que se $b = a$ então $(a, b) = (a, a) = a$, e caso $b = 1$, então $(a, b) = (a, 1) = 1$. Além disso, se $b|a$, então a é divisor comum de a e b e se c é um divisor comum de a e b, então $c|a$. Assim, por definição, tem-se que $(a, b) = a$. Considere, então que $1, b, a$ e que $b \nmid a$. Assim, pela divisão euclidiana pode-se escrever

$$a = bq_1 + r_1 \quad , \text{com } 0 < r_1 < b$$

Há duas possibilidades:

- $r_1|b$. Neste caso, $f_1 = (b, r_1)$ e pelo Teorema 3,

  $$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1 b) = (b, a) = (a, b)$$

  e o algoritmo termina, sendo $r_1 = (a, b)$

- $r_1 \nmid b$. Neste caso, efetua-se a divisão euclidiana de b por r_1, e assim

  $$a = r_1 q_2 + r_2 \quad , \text{com } 0 < r_2 < b$$

E novamente há duas possibilidades:

- $r_2|r_1$. Neste caso, $r_1 = (r_1, r_2)$ e pelo Teorema 3,

  $$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, b) = (a - q_1 b, b) = (a, b)$$

  e o algoritmo termina, sendo $r_2 = (a, b)$

- $r_2 \nmid b$. Neste caso, efetua-se a divisão euclidiana de b por r_2, e assim

  $$a = r_2 q_3 + r_3 \quad , \text{com } 0 < r_3 < b$$

Este procedimento continua até que $r_n|b$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Isto é certeza, pois como há um número finito de inteiros entre 0 e b, e a cada passo do algoritmo determina-se um r_i em que $0 \leq r_k \leq r_{k-1} \leq ... \leq r_1 \leq b$, pelo princípio da boa ordenação dos inteiros existe um primeiro inteiro n tal que $r_{n+1} = 0$ e, assim $r_n|b$ e $r_n = (a, b)$.

A seguir, uma forma de fazer estes cálculos na prática, por meio de um diagrama.

A primeira divisão euclidiana $a = bq_1 + r_1$ escreve-se da seguinte forma:

	q_1	
a	b	
r_1		

A seguir, efetuando-se a divisão $b = r_1 q_2 + r_2$, escreve-se:

	q_1	q_2
a	b	r_1
r_1	r_2	

Prosseguindo, tem-se o seguinte diagrama:

	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\dots$	r_n		

Exemplo 4. Calcular o *mdc* de 551 e 874.

	1	1	1	2	2	2
874	551	323	228	95	38	$\boxed{19}$
323	228	95	38	19	0	

Portanto, $(551, 874) = 19$.

Nota-se que o Algoritmo de Euclides fornece as seguintes divisões euclidianas:
$19 = 95 - 2 \cdot 38$
$38 = 228 - 2 \cdot 95$
$95 = 323 - 1 \cdot 228$

$228 = 551 - 1 \cdot 323$
$323 = 874 - 1 \cdot 551$

Assim, tem-se que:
$19 = 95 - 2 \cdot 38 = 95 - 2 \cdot (228 - 2 \cdot 95) = 5 \cdot 95 - 2 \cdot 228 = 5 \cdot (323 - 1 \cdot 228) - 2 \cdot 228 =$
$= 5 \cdot 323 - 7 \cdot 228 = 5.323 - 7 \cdot (551 - 1 \cdot 323) = 12 \cdot 323 - 7 \cdot 551 =$
$12 \cdot (874 - 1 \cdot 551) - 7 \cdot 551 = 12 \cdot 874 - 19 \cdot 551$

Isto é, $(874, 551) = 19 = 12 \cdot 874 - 19 \cdot 551$. Nota-se que o Algoritmo de Euclides, além de permitir o cálculo do *mdc* de dois números inteiros, ainda fornece uma forma de escrever o *mdc* como *combinação linear* dos números em questão. Em geral, $(a, b) = ma + nb$. Este algoritmo é denominado *Algoritmo de Euclides Estendido.*

Corolário 1. *Se $a = bq + r$, então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.*

Demosntração do Corolário 1. Segue imediatamente das divisões sucessivas do Algoritmo de Euclides.

3.3 Sequências e Recorrência

Como será visto adiante, os Números de Fibonacci são elementos de uma sequência de números naturais. Uma sequência numérica pode ser vista informalmente como uma sucessão de números que seguem um determinado critério para se obter o elemento seguinte. Ou seja, uma sequência numérica corresponde a uma função dentro de um agrupamento de números, de tal modo que os elementos agrupados seguem uma sucessão, ou seja, uma ordenação, ou obedecem uma lei de formação.

Definição 4. Sequência *é uma função cujo domínio é o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais. Os números na imagem de uma seqência são chamados de* elementos *ou* termos *da sequência.* (LEITHOLD, 1994, p.688)

Uma notação usual para uma sequência é $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$

Exemplo 1. A função $f(n) = \dfrac{1}{n}$ define a sequência $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...\right)$.

Definição 5. *Uma* Sequência (a_n) *é dita* limitada *quando existirem números reais a e b tais que $a \leq a_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto equivale a dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$.*

Muitas vezes é importante saber se os termos de uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se aproximam de um determinado valor $a \in \mathbb{R}$ à medida que n aumenta seu valor. Isto equivaleria a dizer que a diferença entre dois termos consecutivos vai ficando cada vez menor (ou seja, tende a zero) conforme se avança nos termos da sequência. Isto leva à seguinte definição:

Definição 6. *Diz-se que uma sequência (a_n) é* convergente *ou* converge *para um determinado valor $a \in \mathbb{R}$ se, fixado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. O valor a é chamado de* limite *da sequência. Se a sequência não converge, é dita* divergente.

Em linguagem matemática,

$$\lim_{x\to\infty}(a_n) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Neste caso, diz-se que $a_n \to a$, isto é, a_n converge para a.

Teorema 5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração do Teorema 6. Seja (a_n) uma sequência que converge para o limite $a \in \mathbb{R}$. Assim, por definição, e considerando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1$. Pela desigualdade triangular, segue que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$. Assim, se $M = max(1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|)$, então $|a_n| \leq M \Rightarrow -M \leq a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, por definição, (a_n) é limitada.

Definição 7. *Diz-se que uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denominada* Sequência de Cauchy *se dado um número real $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n_0$ e $n > n_0$ tem-se $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

Não é por acaso que a definição de Sequência de Cauchy é semelhante à definição de sequência convergente. Na realidade são duas condições que se equivalem. O Teorema a seguir mostra isto.

Teorema 6. *Uma sequência é convergente se, e somente se, é uma Sequência de Cauchy.*

Demonstração do Teorema 7. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para um limite $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, por definição existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim, para $m, n > n_0$, a desigualdade triangular garante que

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, por definição, a sequência (a_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Então, arbitrando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - a_n| < 1$ para todo $m, n > n_0$. Em particular, $|a_m - a_{n_0+1}| < 1$ para todo $m > n_0$. Então, a sequência tem todos os seus elementos pertencentes ao conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n_0-1}, a_{n_0+1}\}$. Assim, a sequência é limitada. Portanto, existe uma subsequência convergente. Seja (a_{n_k}) esta subsequência. Basta provar que $\lim\limits_{x\to\infty}(a_{n_k}) = a$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $k \to +\infty \Rightarrow a_{n_k} \to a$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mas como por hipótee a sequência é de Cauchy, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

assim, tomando $k > k_0$ de modo que $|n_k > n_0|$, pela desigualdade triangular tem-se que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_n n_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portnto, pode definição de limite, $a_n \to a$ quando $n \to +\infty$, e assim a sequência (a_n) de fato converge, o que conclui a demonstração.

Há sequências definidas recursivamente, ou por recorrência, ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s). (MORGADO e CARVALHO, 2015, p.68).

Definição 8. *Uma sequência (a_n) é recorrente (ou, recursiva), ou difinida por recorrência, se existe uma regra tal que qualquer termo de (a_n) pode ser calculado em função do(s) termo(s) imediatamente anterios(es), com exceção do(s) termo(s) incial(ais), com valor(es) fixado(s).*

Exemplo 2. A sequência (x_n) dos múmeros naturais ímpares $(x_n) = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$ pode ser definida por $f_n = \begin{cases} f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + 2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}, n > 1$

As recorrências podem ser classificadas pelo expoente dos termos envolvidos na lei que define seus termos. É dita linear se o expoente de todos os temos for 1. Por exemplo, $x_n = 2 \cdot x_{n-1}$ é linear. Já a recorrência $x_n = x_{n-1}^2 + 3$, por exemplo, não é linear devido ao grau 2 (diferente de 1) do termo x_{n-1}.

Uma recorrência é dita *homogênea* se não possuir termo independente além dos termos anteriores na lei que define seus elementos. Por exemplo, a recorrência $x_n = x_{n-1} + 3 \cdot x_{n-2}$ é homogênea pois os elementos anteriores que definem cada elemento possuem coeficientes constantes e não há termo independente na expressão. Por outro lado, a recorrência definida por $x_n = x_{n-1} + 4$, por exemplo, não é homogênea devido à presença do termo independente (+4).

Outra forma de classificar as recorrências é pela quantidade de termos anteriores necessários para se definir um elemento. Isto define a *ordem* da recorrência. Assim, se cada elemento da recorrência depende de apenas um elemento anterior, a recorrência é chamada *de primeira ordem*. Se o elemento é escrito em função de dois termos anteriores, a recorrência é dita *de segunda ordem*, e assim por diante.

Exemplo 3. Resolver uma recorrência linear homogênea de primeira ordem é relativamente simples. Por exemplo, para resolver a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, $x_1 = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando todas essas equações, obtém-se $x_n = (n-1)! \cdot x_1$. Como $x_1 = 1$, então tem-se que cada termo x_n da recorrência é dado por $x_n = (n-1)!$.

Para resolver uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, isto é, da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \ , \ q \neq 0$$

associa-se uma equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, que é denominada *equação característica*. Nota-se que como $q \neq 0$, então 0 não será raiz da equação característica.

A partir da equação característica de raízes r_1 e r_2 pode-se encontrar a solução da recorrência, por meio do teorema a seguir.

Teorema 7. *Uma recorrência linear homogênea de segunda ordem da forma* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, $q \neq 0$ *e que portanto possui equação característica* $r^2 + pr + q = 0$ *de raízes* r_1 *e* r_2*, tem como solução* $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$*, quaisquer que sejam os valores das constantes* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, cada elemento a_n da sequência definida pela recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, $q \neq 0$ é da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Demosntração do Teorema 8. Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtém-se

$$(C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}) + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = 0$$

Reorganizando e agrumando os termos, esta equação fica:

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1 \cdot 0 + C_2 r_2 \cdot 0 = 0$$

o que verifica que a_n de fato é solução da recorrência.

Porém, mais que a_n ser solução da recorrência, tem-se que *todas* as soluções da recorrência são da forma de a_n. Isto é, vale o teorema a seguir.

Teorema 8. *Se* r_1 *e* r_2 *são as raízes da equação característica* $r^2 + pr + q = 0$ *referente à recorência linear homogênea de segunda ordem* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, $q \neq 0$*, então* todas *as soluções da recorrência são da forma* $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$*, com* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *constantes.*

Demosntração do Teorema 9. Seja t_n uma solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. As constantes C_1 e C_2 que satisfazem o sistema $\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = t_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = t_2 \end{cases}$ são

$$C_1 = \frac{r_2^2 t_1 - r_2 t_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } C_1 = \frac{r_1 t_2 - r_1^2 t_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

o que está bem definido pois por hipótese $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ e $r_q \neq r_2$. Afirmação: $t_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que provará o teorema. Basta mostrar então que se $z_n = t_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$ tem-se $z_n = 0$. De fato,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} = qz_n = (t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^2 (r_2^2 + pr_2 + q)$$

Como t_n é solução de $t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n = 0$, então o primeiro parêntese é zero. Os dois outros parêntesis também são nulos pois r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Assim, $z_{n+2} + pz_{n+1} = 0$. Além disso, como $t_1 = C_1r_1 + C_2r_2$ e $t_2 = C_1r_1^2 + C_2r_2^2$ tem-se $z_1 = z_2 = 0$. Dessa forma, se $z_{n+2} + pz_{n+1} = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que conclui a demonstração.

Exemplo 4. Resolver a recorrência $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, com $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$. Primeiramente, encontrar a solução geral para a recorrência. A equação característica é $r^2 + 5r + 6 = 0$ e tem como raízes $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$. De acordo com o Teorema 7, as soluções são da forma $a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot (-3)^n$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrátrias. Porém lançando mão dos valores fornecidos para x_0 e x_1 é possível encontrar os valores específicos para C_1 e C_2. Assim, para $x_0 = 3 \Rightarrow n = 0$ tem-se $C_1 \cdot (-2)^0 + C_2 \cdot (-3)^0 = 3$ e para $x_1 = -6 \Rightarrow n = 1$ tem-se $C_1 \cdot (-2)^1 + C_2 \cdot (-3)^1 = -6$. Desta forma, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} C_1 \cdot (-2)^0 + C_2 \cdot (-3)^0 = 3 \\ C_1 \cdot (-2)^1 + C_2 \cdot (-3)^1 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 - 3C_2 = -6 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e somando com a segunda, obtém-se $-C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. Substituindo este valor na primeira equação, obtém-se $C_1 = 3$. Substituindo os valores de C_1 e C_2 na solução geral, tem-se $a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot (-3)^n \Rightarrow a_n = 3.(-2)^n + 0.(-3)^n$, e portanto, $a_n = 3.(-2)^n$ é a solução da recorrência. A interpretação deste exemplo é que, em outras palavras, cada elemento a_n da sequência definida pela recorrência $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, com $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$ é dado por $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

4 A Sequência de Fibonacci

O nome de Fibonacci está intimamente ligado ao desenvolvimento da Matemática moderna. Segundo FRAZÃO (2016), este era o nome pelo qual Leonardo de Pisa era conhecido, por ser filho de Bonaccio, um comerciante italiano do século 13. Devido à profissão do pai, Fibonacci viajou com o pai para o norte da África, onde teve contato com a Matemática dos Árabes. Estes haviam conseguido avanços na escrita matemática, e com isso o estudo da álgebra começava a se tornar mais palpável.

Segundo HEFEZ (2014, p.66) sua principal obra, o *Liber abaci* — literalmente Livro do Ábaco, ou Livro do Cálculo — teria influenciado no surgimento e difusão das *escolas do ábaco* na Itália a partir do século 13. Essas escolas ensinavam a jovens comerciantes a partir dos 11 anos de idade a álgebra utilizando os numerais indianos, os algarismos utilizados ao redor do mundo até hoje conhecidos como indo-arábicos (os algarismos 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0), o sistema posicional de numeração, bem como regras de três, juros simples e compostos, dentre outros assuntos.

4.1 Definição

Na obra *Liber abaci*, de Fibonacci, havia a proposição de problemas interessantes e curiosos. Um deles ficou conhecido como *o problema dos coelhos*:

"Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?"

Considerando que o casal se torna adulto no momento em que se torna fértil, isto é, ao fim do segundo mês após seu nascimento, pode-se organizar a seguinte tabela:

Ao analisar o modelo, percebe-se que:

- ao final de um mês, haverá dois casais de coelhos: o casal adulto introduzido no cercado, mais um jovem casal de coelhos recém-nascidos;
- ao final do segundo mês, isto é, dois meses após o início da experiência), haverá três casais de coelhos: dois adultos (o que já havia no mês anterior, mais o casal jovem do mês anterior que cresceu e se tornou adulto) e um casal jovem;
- ao final do terceiro mês, haverá cinco casais de coelhos: três casais adultos e

Tabela 1: Modelo do crescimento populacional de casais dos coelhos de Fibonacci

fim do mês número	casais adultos	casais jovens	total de casais
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

dois casais jovens (filhos dos casais do fim do primeiro mês, que se tornaram produtivos);

- ao final do quarto mês, haverá oito casais de coelhos: cinco casais adultos e três casais jovens;
- ao final do quito mês haverá 13 casais de coelhos, sendo oito adultos e cinco jovens;

Em geral, se ao final de um determinado mês houver m casais de coelhos adultos e n casais de coelhos jovens, totalizando $m+n$ coelhos, então ao final do mês seguinte haverá $m+n$ casais de coelhos adultos e m casais de coelhos jovens, totalizando $2m+n$ coelhos Ao final do próximo mês, haverá $2m+n$ casais adultos e $m+n$ casais jovens, somando $3m+2n$ casais de coelhos. Nota-se que $(3m+2n) = (2m+n)+(m+n)$, isto é, a quantidade de casais de coelhos ao fim do mês é a soma da quantidade de casais ao fim dos dois meses anteriores.

Este modelo de crescimento do número de casais de coelhos é utilizado para apresentar uma sequência numérica conhecida como *Sequência de Fibonacci.*

Denotando por f_n o número de casais de coelhos ao fim do n-éismo mês, tem-se que:

$f_1 = 1$

$f_2 = 1$

$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$

$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$

$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$

$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

$f_7 = f_6 + f_5 = 8 + 5 = 13$

E assim por diante. Isto é,

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...f_i = f_{i-1} + f_{i-2}, ...), i \in \mathbb{N}, i > 2$$

Para escrever formalmente a lei que gera esta sequência, será utilizada a definição a seguir.

Definição 9. *A* ***Sequência de Fibonacci*** (f_n) *é a sequência dada pela recorrência*

$$f_n = \begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}, \; n \in \mathbb{N}, n > 2$$

e cada elemento f_n *é um número de Fibonacci.*

Nota-se facilmente que, a partir desta definição e conforme o que foi tratado na subseção 3.3, a Sequência de Fibonacci pode ser vista como uma recorrência linear homogênea de segunda ordem. Reindexando, pode-se escrevê-la sua definição como

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ , com } f_1 = f_2 = 1$$

A equação característica desta recorrência é $r^2 = r + 1$, ou $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Assim, pelo Teorema 7, a solução geral da recorrência é

$$f_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{com} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para se determinar as constantes C_1 e C_2 pode-se usar o fato de $f_1 = f_2 = 1$. No entanto o sistema decorrente será de solução mais difícil. Pela construção da sequência de Fibonacci, faz sentido considerar $f_0 = 0$. Assim, considerando $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, isto é, fazendo $n = 0 \Rightarrow f_0 = 0$ e $n = 1 \Rightarrow f_1 = 1$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 0 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ 1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Substituindo esses valores na equação da solução geral da recorrência, tem-se

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ou ainda

$$f_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Portanto, cada n-ésimo Número de Fibonacci f_n pode ser calculado por meio desta expressão, conhecida como *Fórmula de Binet*.

4.2 Propriedades

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades e teoremas importantes a respeito da sequência de Fibonacci. Estas propriedades foram extraídas de CALDEIRA, 2015.

Propriedade 1. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $f_{n+2} - 1$.*

Exemplo 2. A soma dos dez primeiros números de Fibonacci é igual a $f_{12} - 1$, isto é, $\sum_{i=1}^{10} f_i = f_{12} - 1 \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_9 + f_{10} = f_{12} - 1$.
Assim, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 144 - 1 = 143$

Demonstração da Propriedade 1. Pela definição dos números de Fibonacci, temos:

$$f_1 = f_3 - f_2$$
$$f_2 = f_4 - f_3$$
$$f_3 = f_5 - f_4$$
$$\vdots$$
$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$$
$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$$

Somando as equações, temos $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - f_2$. Como $f_2 = 1$, então $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1$

Propriedade 2. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci, com índice ímpar, que será denotado por S_n^{IMP}, é igual a f_{2n}.*

Exemplo 3. Por esta propriedade, por exemplo, a soma dos seis primeiros números de Fibonacci com índice ímpar é igual a $f_{2.6} = f_{12}$, isto é, $f_1+f_3+f_5+f_7+f_9+f_{11} = f_{12}$.

Demonstração da Propriedade 2. Os números ímpares são da forma $n = 2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, pela definição dos números de Fibonacci, temos:

Para $k = 1$, $f_1 = 1$ (1º número com índice ímpar)
Para $k = 2$, $f_3 = f_4 - f_2$ (2º número com índice ímpar)
Para $k = 3$, $f_5 = f_5 - f_4$ (3º número com índice ímpar)
Para $k = 4$, $f_7 = f_8 - f_6$ (4º número com índice ímpar)
$\vdots$
Para $k = n - 1$, $f_{2n-3} = f_{2n-2} - f_{2n-4}$ ($(n-1)^o$ número com índice ímpar)
Para $k = n$, $f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$ (n^o número com índice ímpar)
Somando as equações, temos $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-3} + f_{2n-1} = f_{2n} + 1 - f_2$. Como $f_2 = 1$, então $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-3} + f_{2n-1} = f_{2n}$

Propriedade 3. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci, com índice par, que será denotado por S_n^{PAR}, é igual a $f_{2n+1} - 1$.*

Exemplo 4. Por esta propriedade, por exemplo, a soma dos cinco primeiros números de Fibonacci com índice par é igual a $f_{2.5+1} - 1 = f_{11} - 1$, isto é, tem-se que

$f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} = f_{11} - 1$. Assim, $1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1 = 88$

Demonstração da Propriedade 3. Os números pares são da forma $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, pela definição dos números de Fibonacci, tem-se que:

Para $k = 1$, $f_2 = 1$ (1^o número com índice par).
Para $k = 2$, $f_4 = f_5 - f_3$ (2^o número com índice par).
Para $k = 3$, $f_6 = f_7 - f_5$ (3^o número com índice par).
Para $k = 4$, $f_8 = f_9 - f_7$ (4^o número com índice par).
$\vdots$
Para $k = n - 1$, $f_{2n-2} = f_{2n-1} - f_{2n-3}$ ($(n-1)^o$ número com índice par).
Para $k = n$, $f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1}$ (n^o número com índice par).

Somando as equações, $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n-2} + f_{2n} = f_{2n+1} + 1 - f_3$. Como $f_3 = 2$, então $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n-2} + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$

Propriedade 4. *A soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci, é igual a $f_n.f_{n+1}$.*

Exemplo 5. A soma dos quadrados dos cinco primeiros de Fibonacci é $f_5.f_{5+1} = f_5.f_6$, isto é, $(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 + (f_4)^2 + (f_5)^2 = f_5.f_6$.
Assim, $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5.8 = 40$.

Demonstração da Propriedade 4. Como $f_k = f_{k+1} - f_{k-1}, k > 1$, então $f_k^2 = f_k.f_k = f_k(f_{k+1} - f_{k-1}) \Rightarrow f_k^2 = f_k.f_{k+1} - f_k.f_{k-1}$. E para o caso em que $k = 1$, $f_1^2 = 1$.
Destes resultados, tem-se que:
Para $k = 1$: $f_1^2 = 1$.
Para $k = 2$: $f_2^2 = f_2.f_3 - f_2.f_1$.
Para $k = 3$: $f_3^2 = f_3.f_4 - f_3.f_2$.
Para $k = 4$: $f_4^2 = f_4.f_5 - f_4.f_3$.
$\vdots$
Para $k = n - 1$: $f_{n-1}^2 = f_{n-1}.f_n - f_{n-1}.f_{n-2}$.
Para $k = n$: $f_n^2 = f_n.f_{n+1} - f_n.f_{n-1}$.

Somando as equações, temos $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_n.f_{n+1} - f_2.f_1 + 1$. Como $f_2.f_1 = 1$, então $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_n.f_{n+1}$.

Propriedade 5. *Para $m, n > 1$ tem-se que $f_{m+n} = f_{m-1}.f_n + f_m.f_{n+1}$.*

Demonstração da Propriedade 5. Será utilizado o princípio da indução finita aplicado a n. Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= f_{m-1} + f_m \text{ (por definição de número de Fibonacci)} \\ &= f_{m-1}.1 + f_m.1 \\ &= f_{m-1}.f_1 + f_m.f_2 \\ &= f_{m-1}.f_n + f_m.f_{n+1} \end{aligned}$$

o que verifica a propriedade para $n = 1$. Suponha, por hipótese de indução, que a propriedade seja verdadeira para todo $n < k$. Deseja-se, então, verificar que é verdadeira para $n = k$. Assim, supõe-se que a propriedade vale para $n = 2, 3, 4, ...k-1$, e já se sabe que vale para $k = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Para } n = k-1 : f_m + f_{k-1} &= f_{m-1}.f_{k-1} + f_m.f_{(k-1)+1} \\ &= f_{m-1}.f_{k-1} + f_m.f_k \\ \text{Para } n = k-2 : f_m + f_{k-2} &= f_{m-1}.f_{k-2} + f_m.f_{(k-2)+1} \\ &= f_{m-1}.f_{k-2} + f_m.f_{k-1} \end{aligned}$$

Somando os dois resultados, tem-se que:

$$\begin{aligned} f_m + f_{k-1} + f_m + f_{k-2} &= f_{m-1}.f_{k-1} + f_m.f_k + f_{m-1}.f_{k-2} + f_m.f_{k-1} \\ &= f_{m-1}.f_k + f_m.f_{k+1} \end{aligned}$$

que é exatamente o resultado da propriedade para $n = k$. Portanto, pelo princípio da indução finita, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6. $f_{7+8} = f_6.f_8 + f_7.f_9 = 8.21 + 13.34 = 610 = f_{15}$

Propriedade 6. *Para $n > 1$ tem-se que $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$.*

Exemplo 7. $f_{2.6} = f_7^2 - f_5^2 = 13^2 - 5_2 = 169 - 25 = 144 = f_{12}$

Demonstração da Propriedade 6. É imediata do resultado da propriedade 5.

$$\begin{aligned} f_{2n} &= f_{n+n} \\ &= f_{n-1}.f_n + f_n.f_{n+1} \\ &= f_n(f_{n-1} + f_{n+1}) \\ &= (f_{n+1} - f_{n-1}).(f_{n+1} + f_{n-1}) \\ &= f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Propriedade 7. *Para $n > 1$ tem-se que $f_n^2 = f_{n-1}.f_{n+1} + (-1)^{n-1}$.*

Exemplo 8. $f_5^2 = f_{5-1}.f_{5+1} + (-1)^{5-1} = f_4.f_6 + (-1)1^4 = 3.8 + 1 = 25 = 5^2$

Serão apresentadas a seguir propriedades referentes a divisibilidade entre números de Fibonacci.

Lembrando que o *mínimo múltiplo comum* entre dois números inteiros m e n é representado por (m, n).

Propriedade 8. *Dois números consecutivos de Fibonacci são primos entre si (ou, coprimos). Isto é, $(f_n, f_{n+1}) = 1$.*

Exemplo 9. É fácil verificar esse resultado para os primeiros termos da sequência de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

$(1, 2) = 1;\ (2, 3) = 1\ (3, 5) = 1\ (5, 8) = 1;\ (8, 13) = 1;\ ...\ ;\ (55, 89) = 1;\ ...$

Demonstração da Propriedade 8. Será utilizado o Algoritmo de Euclides para a divisão entre dois números inteiros (Teorema 5). Considere dois números consecutivos de Fibonacci, f_n e f_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$. Pelo Algoritmo de Euclides, existem $r, q \in \mathbb{N}$ únicos tais que $f_{n+1} = q.f_n + r$, com $0 \leq r \leq f_n - 1$. Pela definição de número de Fibonacci, tem-se que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Assim, pela unicidade de q e r, pode-se afirmar que $q = 1$ e $r = f_{n-1}$ e, portanto, $f_{n+1} = 1.f_n + f_{n-1}$. Analogamente, tem-se:

Dividindo f_n por f_{n-1}: $f_n = 1.f_{n-1} + f_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
&\text{Dividindo } f_{n-1} \text{ por } f_{n-2}\text{: } f_{n-1} = 1.f_{n-2} + f_{n-3}\\
&\text{Dividindo } f_{n-2} \text{ por } f_{n-3}\text{: } f_{n-2} = 1.f_{n-3} + f_{n-4}\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\text{Dividindo } f_5 \text{ por } f_4\text{: } f_5 = 1.f_4 + f_3\\
&\text{Dividindo } f_4 \text{ por } f_3\text{: } f_4 = 1.f_3 + f_2\\
&\text{Dividindo } f_3 \text{ por } f_2\text{: } f_3 = 1.f_2 + 0
\end{aligned}
$$

O último resto não nulo é f_2. Portanto, pelo Algoritmo de Euclides (Teorema 4), o m.d.c. entre f_{n+1} e f_n é $f_2 = 1$. Isto é, $(f_{n+1}, f_n) = 1$, e por definição dois números consecutivos de Fibonacci são coprimos.

Propriedade 9. *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se $m|n$, então $f_m|f_n$.*

Exemplo 9. Como $4|8$, então deve-se te $f_4|f_8$. De fato, $f_4 = 3|21 = f_8$.

Demonstração da Propriedade 9. Como $m|n$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = mq$. Agora será feita indução sobre q. Se $q = 1$, tem-se $n = m$, e $f_n = f_m$ e obviamente $f_m|f_n$. Suponha, por hipótese de indução, que a propriedade seja válida para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Assim, supõe-se que $f_m|f_{mk}$ e deseja-se mostrar que $f_m|f_{m(k+1)}$, pois desta forma a propriedade vale para $q = 1$, para $q = k > 1$ e para $q = k + 1$, valendo, portanto, para todo $q \in \mathbb{N}$ pelo princípio da indução finita. De fato, pela propriedade 5, tem-se que

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1}.f_m + f_{mk}.f_{m+1}$$

Mas é fato que f_m divide ambas as parcelas do lado direito desta equação, pois f_m é um fator da primeira parcela, e f_{mk} é fator da segunda parcela e pela hipótese de indução $f_m|f_{mk}$, e assim f_m divide também a segunda parcela. Isto é, $f_m|(f_{mk-1}.f_m)$ e $f_m|(f_{mk}.f_{m+1})$. Portanto, $f_m|(f_{mk-1}.f_m + f_{mk}.f_{m+1}) = f_{m(k+1)}$. E isto conclui a demonstração.

Propriedade 10. *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $f_m|f_{mn}$.*

Exemplo 10. Como 12=4.3, ent ao $f_4|f_{4\cdot 3} = f_{12}$. De fato, $f_4 = 3|144 = f_{12}$.

Demonstração da Propriedade 10. Segue imediatamente da propriedade 9.

Propriedade 11. *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se $m = nq + r$, então $mdc(m, n) = mdc(n, r)$.*

Exemplo 11. Como $15 = 10 \cdot 1 + 5$, ent ao $mdc(f_{15}, f_{10}) = mdc(f_{10}, f_5)$. Isto é $mdc(f_{15}, f_{10}) = mdc(55, 610) = 5 = mdc(55, 5) = mdc(f_{10}, f_5)$.

Demonstração da Propriedade 11. Pela Propriedade 5, tem-se

$$f_{nq+r} = f_{nq-1} \cdot f_r + f_n q \cdot f_{r+1}$$

Assim, $mdc(f_m, f_n) = (f_{nq+r}, f_n) = mdc(f_{nq-1} \cdot f_r + f_n q \cdot f_{r+1}, f_n)$. Como pela Propriedade 10 tem-se que $f_n | f_{nq}$, segue que $f_n | f_{nq} \cdot f_{r+1}$ e assim:

$$(f_m, f_n) = (f_{nq-1} . f_r, f_n)$$

O passo agora é mostrar que $d = (f_{nq-1}, f_n) = 1$. De fato, $d | f_n$ e $f_n | f_{nq}$. Assim, por transitividade, $d | f_n q$ e $d | f_{nq-1}$, mas f_{nq} e f_{nq-1} são números de Fibonacci consecutivos, logo, coprimos pela Propriedade 8. Assim, d divide $(f_{nq}, f_{nq-1}) = 1$. Portanto, a única possibilidade é $d = 1$. Agora, pelo Teorema 4, $(f_{nq-1}, f_n) = 1$ implica em $(f_m, f_n) = (f_{nq-1} \cdot f_r, f_n)$. E assim, $(f_m, f_n) = (f_{nq-1} \cdot f_r, f_n) = (f_r, f_n) = (f_n, f_r)$, o que conclui a demosntração.

Propriedade 12. *O mdc entre dois números de Fibonacci também é um número de Fibonacci. Além disso,* $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}$.

Exemplo 12. Como $4 = (12, 16)$, então $(144, 987) = (f_{12}, f_{16}) = f_{(12,16)} = f_4 = 3$.

Demonstração da Propriedade 12. Se $n | m$, então $(m, n) = n$ e pela Propriedade 9 $f_n | f_m$. Assim, $(f_m, f_n) = f_n = f_{(m,n)}$.
Se $n \nmid m$, então sem perda de generalidade seja $m > n$. Assim, existem $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$, $0 < r_1 < n$, tais que $m = nq_1 + r_1$. Aplicando o algoritmo de Euclides, fazendo as divisões sucessivas, tem-se:

$$\begin{aligned}
&m = nq_1 + r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < n \\
&n = r_1 q_2 + r_2 \quad , \quad 0 < r_2 < r_1 < n \\
&r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad , \quad 0 < r_3 < r_2 < r_1 < n \\
&\quad \vdots \\
&r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k \quad , \quad 0 < r_k < r_{k-1} < ... < r_3 < r_2 < r_1 < n \\
&r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1} \quad , \quad 0 < r_{k+1} < r_k < r_{k-1} < ... < r_3 < r_2 < r_1 < n
\end{aligned}$$

Aplicando sucessivamente a Propriedade 11, vem
$(f_m, f_n) = (f_n, f r_1) = (f_{r_1}, f_{r_2}) = (f_{r_2}, f_{r_3}) = ... = (f_{r_{k-1}}, f_{r_k})$

Como $r_k | r_{k-1}$, então pela Propriedade 9, $f_k | f_{k-1}$ e assim $(f_{r_{k-1}}, f_{r_k}) = f_{r_k}$. Sendo r_k o último resto não nulo obtido nas divisões sucessivas do Algoritmo de Euclides aplicado a m e n, sabe-se que $r_k = (m,n)$. $(f_m, f_n) = (f_{r_{k-1}}, f_{r_k}) = f_{r_k} = f_{(m,n)}$.

4.3 A Razão Áurea

Uma propriedade a respeito da sequência de Fibonacci é extremamente interessante pois esta pode ver verificada em inúmeras aplicações da Arquitetura, Artes, Filosofia (no conceito de estética e beleza), em inúmeras formações da Natureza, inclusive em proporções em seres vivos, na natureza do crescimento, na música, dentre outras.

Considere a razão entre os elementos consecutivos da sequência de Fibonacci, isto é, $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$:

$\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\dfrac{f_3}{f_2} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\dfrac{f_3}{f_2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

$\dfrac{f_4}{f_3} = \dfrac{5}{3} = 1,666...$

$\dfrac{f_5}{f_4} = \dfrac{8}{5} = 1,6$

$\dfrac{f_6}{f_5} = \dfrac{13}{8} = 1,625$

$\dfrac{f_7}{f_6} = \dfrac{21}{13} = 1,615846154$

$\dfrac{f_8}{f_7} = \dfrac{34}{21} = 1,619047619$

$\dfrac{f_9}{f_8} = \dfrac{55}{34} = 1,6176470588$

$\dfrac{f_{10}}{f_9} = \dfrac{89}{55} = 1,618181...$

$\dfrac{f_{11}}{f_{10}} = \dfrac{144}{89} = 1,6179775281$

$$\frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{233}{144} = 1,6180555...$$

$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{377}{233} = 1,61780257511$$

$$\frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{610}{377} = 1,6180371353$$

$$\frac{f_{15}}{f_{14}} = \frac{987}{610} = 1,6180327869$$

$$\frac{f_{16}}{f_{15}} = \frac{1597}{987} = 1,6180344478$$

$$\frac{f_{17}}{f_{16}} = \frac{2584}{1597} = 1,6180338134$$

$$\frac{f_{18}}{f_{17}} = \frac{4181}{2584} = 1,6180340557$$

$$\frac{f_{19}}{f_{18}} = \frac{6765}{4181} = 1,6180339632$$

$$\frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{10946}{6765} = 1,6180339985$$

$$\vdots$$

Nota-se que a razão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ aparentemente tende a um valor em torno de 1,61803.

Suponha que de fato isto aconteça, ou seja, a partir de um índice n_0, a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos tenda ao mesmo valor. Isto é, para $n > n_0$, $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$, ou ainda $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, pois $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Ao valor desta razão será dado o nome de ϕ. Assim,

$$\phi = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$$

Da primeira igualdade, tem-se $f_{n+1} = f_n \cdot \phi$ Substituindo na segunda igualdade, fica

$$\frac{f_n \cdot \phi}{f_n} = \frac{f_n\phi + f_n}{f_n \cdot \phi} \Rightarrow \phi = \frac{\phi + 1}{\phi}$$

E daí resulta a equação do segundo grau $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, cujas raízes são $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como os números de Fibonacci são naturais, isto é, estritamente positivos, então tem-se

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Nota-se que este valor é aproximadamente $\phi \approx 1,6180339888$, coerente com as aproximações encontradas nas razões calculadas acima.

No entanto, para que esta conclusão para o valor de ϕ seja verdadeira, é necessário certificar-se que de fato para $n > n_0$, $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$. Dizer isto equivale a dizer que a sequência definida por $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ converge, isto é, que $\lim_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ existe. Para tal, basta mostrar que $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ é uma sequência de Cauchy, e assim pelo Teorema 7, conclui-se que a_n converge. Assim, dado $\varepsilon > 0$, deve-se mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Assim, se $m, n > n_0$, tem-se que

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{m+1}}{f_m}\right| = \left|\frac{f_{n+1}\cdot f_m - f_n\cdot f_{m+1}}{f_n\cdot f_m}\right|$$

Sem perda de generalidade, seja $n > m$. Pela definição de Número de Fibonacci, tem-se genericamente que $f_{j+1} = f_j + f_{j-1}$, para todo $j \in \mathbb{N},\ j > 1$. Substituindo na igualdade acima, e aplicando indutivamente, e lembrando que $f_0 = f_1 = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left|\frac{f_{n+1}\cdot f_m - f_n\cdot f_{m+1}}{f_n\cdot f_m}\right| = \left|\frac{f_m(f_n + f_{n-1}) - f_n(f_m + f_{m-1})}{f_n f_m}\right| \\
&= \left|\frac{f_m f_n + f_m f_{n-1} - f_n f_m - f_n f_{m-1}}{f_n f_m}\right| = \left|\frac{f_m f_{n-1} - f_n f_{m-1}}{f_n f_m}\right| \\
&= \left|\frac{(f_{m-1} + f_{m-2}) f_{n-1} - (f_{n-1} + f_{n-2}) f_{m-1}}{f_n f_m}\right| = \left|\frac{f_{m-2} f_{n-1} - f_{n-2} f_{m-1}}{f_n f_m}\right| \\
&= (...) \\
&= \left|\frac{f_o f_{(n+1)-m} - f_1 f_{n-m}}{f_n f_m}\right| = \left|\frac{f_{(n+1)-m} - f_{n-m}}{f_n f_m}\right| = \left|\frac{f_{(n+1)-m}}{f_n f_m} - \frac{f_{n-m}}{f_n f_m}\right|
\end{aligned}$$

Como a Sequência de Fibonacci (f_n) é estritamente crescente, isto é, $f_{n+1} > f_n$ para todo $n > 1$, então $\frac{f_i}{f_j} < 1$ para todo $i < j$. Além disso, por este fato é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\varepsilon} < f_{n_0}$ e assim $\frac{2}{f_{n_0}} < \varepsilon$. Usando esses resultados e aplicando a desigualdade triangular na última expressão acima, tem-se:

$$\frac{f_{(n+1)-m}}{f_n f_m} - \frac{f_{n-m}}{f_n f_m} < \frac{1}{f_m} + \frac{1}{f_m} = \frac{2}{f_m} < \frac{2}{f_{n_0}} < \varepsilon$$

Isto prova que a sequência $(a_n) = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ é de Cauchy. Portanto, (a_n) de fato possui um limite $L = \lim_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Para concluir que de fato $L = \phi$, observa-se que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_{n-1} + f_{n-2}} = \frac{f_n}{f_{n-1} + f_{n-2}} + \frac{f_{n-1}}{f_{n-1} + f_{n-2}} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_n}{f_{n-1}}}$$

Assim, segue que $L = \lim_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_n}{f_{n-1}}}\right) = 1 + \frac{1}{L}$. Portanto,

$$L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 = L + 1 \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$$

que é a mesma equação do segundo grau vista anteriormente, que traz como raízes $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mas como os números de Fibonacci são estritamente positivos, então $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que é o número ϕ.

Este número $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$ é conhecido como **razão áurea**, ou **número de ouro**.

Esta razão também aparece em uma construção geométrica simples. Euclides de Alexandria (c.300 a.C.), considerado o pai da Geometria, em sua obra *Os Elementos* traz a seguinte definição: *um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo.* (EUCLIDES, 1944, p. 99). Esta situação está ilustrada a seguir.

Figura 1: Segmentos de média e extrema razão

Dado o segmento $\overline{AB}$, o ponto $E \in \overline{AB}$ é definido como de modo que $\frac{EB}{AE} = \frac{AE}{AB}$.

É possível mostrar que o valor da razão desta definição de média e extrema razão coincide com o valor de $\frac{1}{\phi}$. Isto é, na figura anterior tem-se $\frac{EB}{AE} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{\phi}$. Obviamente pode-se pensar nesta razão ao inverso, ou seja, na razão do maior para o menor. E desta forma, tem-se que

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} = \phi$$

De fato, basta perceber que $AB = AE + EB$, e desta forma a relação $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AE}{EB}$ pode ser escrita como $\dfrac{AE + EB}{AE} = \dfrac{AE}{EB}$. Chamando $AE = a$ e $EB = b$, segue que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Longrightarrow a^2 = ab + b^2 \overset{\div b^2}{\Longrightarrow} \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} + 1$$

Chamando $m = \dfrac{a}{b}$, fica $m^2 = m + 1 \Rightarrow m^2 - m - 1 = 0$, cujas raízes são $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Descartando a raiz negativa, pois trata-se de medidas de segmentos, segue que

$$m = \frac{a}{b} = \frac{AE}{EB} = \frac{AB}{AE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Portanto, o valor da média e extrema razão definida por Euclides coincide com a razão áurea ϕ encontrada por meio da sequência de Fibonacci. Por esta razão, este segmento também é conhecido como **segmento áureo**.

É possível construir um segmento áureo utilizando régua e compasso.

- Determine M o ponto de médio de $\overline{AB}$: com a ponta seca do compasso em A e depois em B, com uma mesma abertura aleatória (maior do que a metade de AB), traçar duas circunferências que se intersectam nos pontos P e Q. A interseção de $\overline{PQ}$ com $\overline{AB}$ é ponto médio M de $\overline{AB}$, conforme a figura 2.

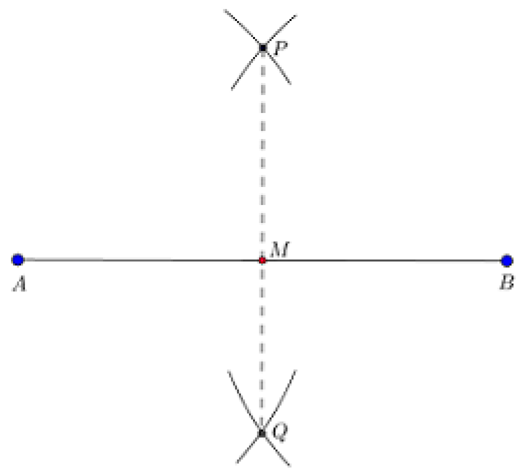


Figura 2: Construção do Segmento Áureo - passo 1

- Levante por B uma perpendicular $\overline{BC}$, sendo $BC = BM$;
- Com centro em C trace uma circunferência de raio CB. A interseção entre a circunferência e a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ determina os pontos D e D' ;

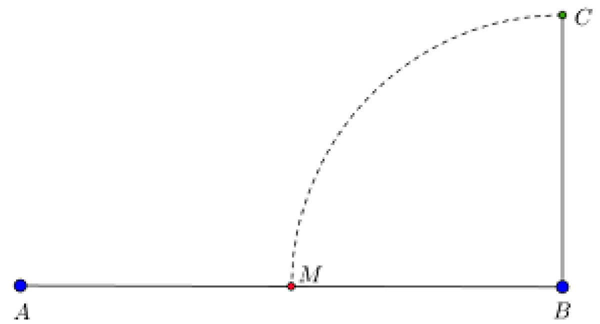


Figura 3: Construção do Segmento Áureo - passo 2

- Com centro do compasso em A e abertura AD, trace um arco que intersecta o semento $\overline{AB}$ no ponto E.

Segue que $\overline{AE}$ é o segmento áureo de $\overline{AB}$, isto é, $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AE}{EB} = \phi$.

De fato, tomando como referência esta última figura, por construção tem-se que o triângulo ABC é retângulo em B. Além disso, $AB = 2BC$ e $BC = CD$ (raio da cirfunferência). Assim, chamando $AE = x$e $BC = m$, tem-se a seguinte situação:

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se que

$$(x+m)^2 = m^2 + (2m)^2 \Rightarrow x^2 + 2mx + m^2 = m^2 + 4m^2 \Rightarrow x^2 + 2mx - 4m^2 = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau em x, segue que

$$x = \frac{-2m \pm \sqrt{(2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4m^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2m \pm \sqrt{20m^2}}{2} = \frac{-2m \pm 2\sqrt{5}m}{2} = \frac{2m(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Descartando-se a raiz negativa, pois trata-se de tamanhos de segmentos, segue que, $x = m(-1+\sqrt{5})$. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{AE} &= \frac{2m}{x} = \frac{2m}{m(-1+\sqrt{5})} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} \\
&= \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-(-1-\sqrt{5})}{2} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi
\end{aligned}$$

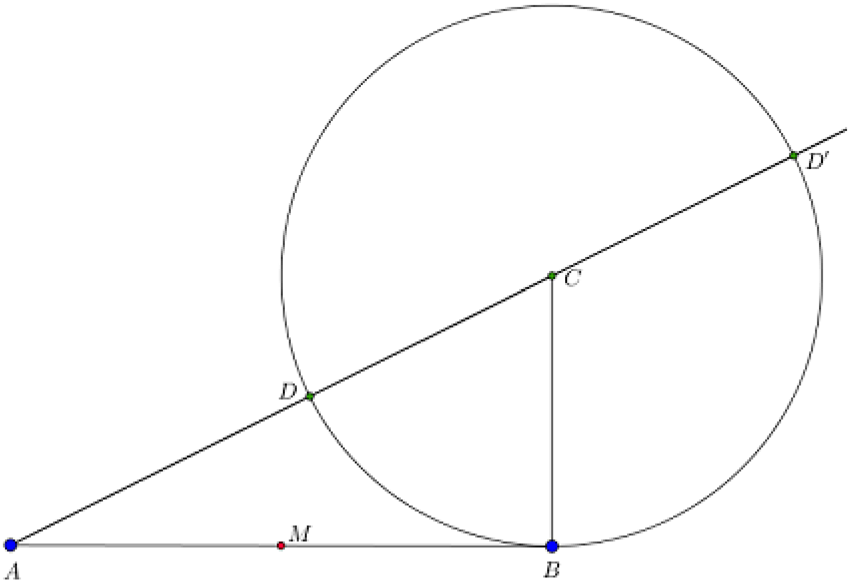


Figura 4: Construção do Segmento Áureo - passo 3

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{EB} &= \frac{x}{2m-x} = \frac{m(-1+\sqrt{5})}{2m-m(-1+\sqrt{5})} = \frac{m(-1+\sqrt{5})}{m[2-(-1+\sqrt{5})]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{3^2-\sqrt{5}^5} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi
\end{aligned}$$

Isso conclui que esta construção com régua e compasso de fato define o segmento áureo.

É possível construir um retângulo cujos lados estejam em proporção áurea, isto é, a razão entre o comprimento e a largura do retângulo é o número áureo ϕ.

Para tal, considere a seguinte construção, representada na figura a seguir:

- Seja um quadrado $ABEF$ de lado a;
- Marque M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$;
- Trace o arco de circunferência com centro em M e raio MC, até interceptar a reta suporte de $\overline{AB}$ no ponto E;

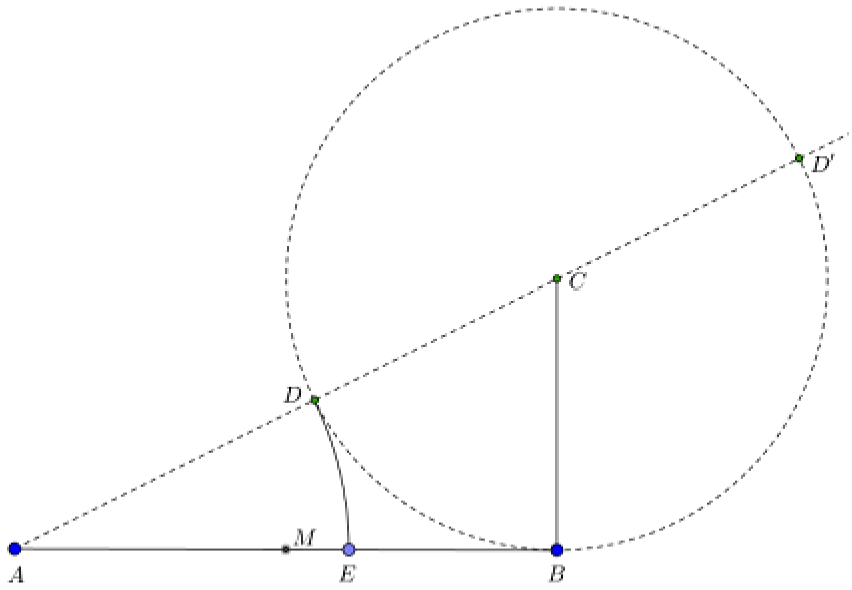


Figura 5: Construção do Segmento Áureo - passo 4

- Trace o segmento $\overline{CF}$ paralelo e congruente a $\overline{BE}$, de modo que, desta forma, $\overline{EF}$ é congruente e paralelo a $\overline{BC}$;
- Assim, obtém-se o retângulo $AEFD$

O retângulo $AEFD$ assim construído é um retângulo áureo. De fato, chamando $AB = CD = a$ e $BE = CF = b$, como M é ponto médio de $\overline{AB}$, então $MB = \frac{a}{2}$. Além disso, pela construção do arco AB, tem-se que $MC = ME = \frac{a}{2} + b$. Assim, tomando o triângulo MBC retângulo em B, pelo Teorema de Pitágoras tem-se que

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b + b^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau na incógnita b, segue que (desprezando eventual raiz negativa, por tratar-se de segmentos de reta):

$$\begin{aligned} b &= \frac{-a \pm \sqrt{(a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2} \\ &= \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2} = \frac{a(-1 + \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

Substituindo este valor na razão $\frac{a+b}{a}$, que corresponde à razão entre o lado maior

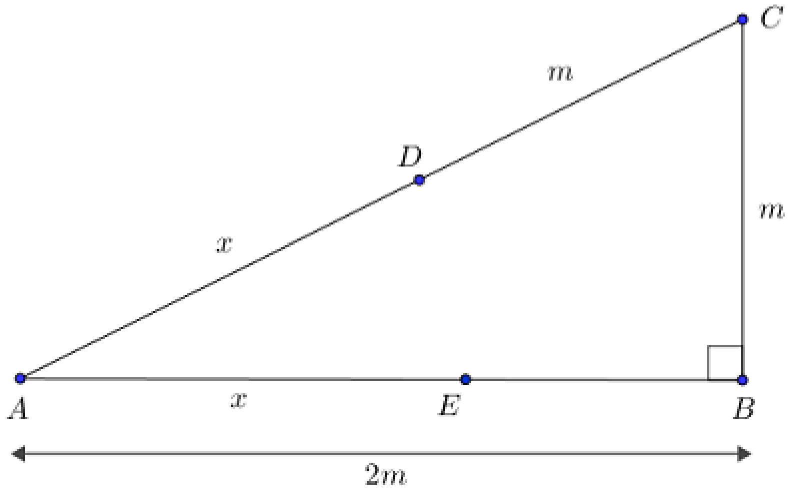


Figura 6: Construção do Segmento Áureo - passo 5

e o lado menor do retângulo, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{DF}{FE} &= \frac{a+b}{a} = \frac{a + \dfrac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{a\left(1 + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a} \\
&= 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi
\end{aligned}
$$

O que comprova que $AEFD$ é um retânguo áureo, pois a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo é o número áureo ϕ.

É possível construir segmentos áureos em triângulos. Por exemplo, no caso específico dos triângulos isósceles. Antes, vale lembrar duas definições básicas:

Definição 10. *Um triângulo é denominado* isósceles *se tiver dois dos seus lados congruentes. Consequentemente, dois de seus ângulos internos são congruentes.*

Definição 11. *A* bissetriz *de um ângulo interno de un triângulo é uma semirreta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes e intersecta o lado oposto a este ângulo.*

Considerando especificamente o triângulo isósceles cujos ângulos internos medem respectivamente 72°, 72° e 36°, observa-se um resultado notável, a saber:

Teorema 9. *Num triânglo isósceles cujos ângulos internos medem respectivamente* 72°, 72° *e* 36°, *a bissetriz de cada um dos ângulos de* 72° *divide o lado oposto ao ângulo em média e extrema razão, isto é, em um segmento áureo.*

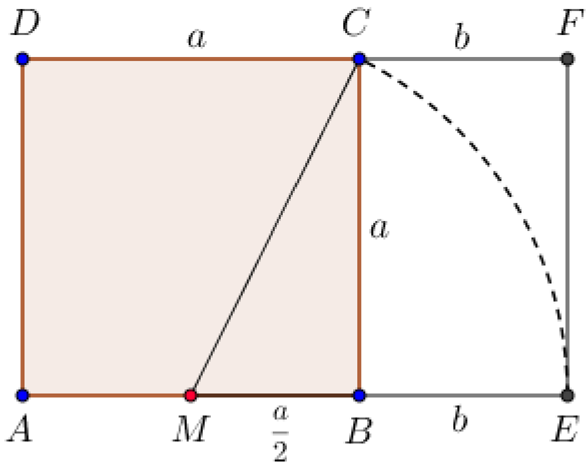


Figura 7: Construção do Retângulo Áureo

Demosntração do Teorema 10. Seja o triângulo isósceles ABC de modo que $\widehat{A} = 36°$ e $\widehat{B} = \widehat{C} = 72°$. Será feito o raciocínio para a bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{B}$. Para o ângulo $\widehat{C}$ o raciocínio é análogo. Assim, considere a semi-reta $\overrightarrow{BD}$ bissetriz do ângulo $\widehat{B}$, de modo que $D \in \overline{AC}$, conforme a figura 8.

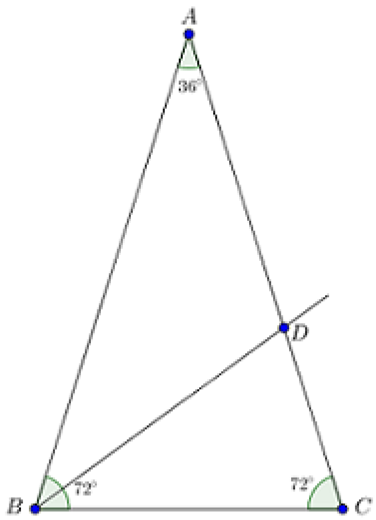


Figura 8: Demonstração do Teorema 10

Nota-se que o triângulo ABC é isósceles, e como $\widehat{B} = \widehat{C}$ segue que $AB = AC$. Faça $AB = AC = A$ e $BC = b$. Alem disso, se $\overrightarrow{BD}$ bissetriz do ângulo $\widehat{B}$, então obtém-se $A\widehat{B}D = D\widehat{B}C = \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{72°}{2} = 36°$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, então $D\widehat{B}C = 180° - 72° - 36° = 72°$. E assim, o triângulo BCD é isósceles de modo que

$$BC = BD = b$$

Além disso, $A\widehat{B}D = \widehat{B} = 36°$ e $B\widehat{D}A = 180° - 36° - 36° = 108°$. E assim, o triângulo ABD é isósceles de modo que

$$AD = BD = b$$

Como $D \in \overline{AC}$, então $AC = AD + DC$, e fazendo as substituições, segue que $AC = AD + DC \Rightarrow a = b + DC$ e daí segue que

$$DC = a - b$$

Nota-se que os triângulos ABC e BDC são semelhantes por ambos terem os ângulos internos respectivamente com as mesmas medidas ($72°$, $72°$ e $36°$). Da semelhança dos triângulos segue que

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow b^2 = a^2 - ab \Rightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \overset{\div a^2}{\Longrightarrow} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 = 0$$

Fazendo $m = \dfrac{b}{a}$ a última equação fica $m^2 + m - 1 = 0$. Resolvendo, tem-se

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Descartanto a raiz negativa pois $m = \dfrac{a}{b}$ com a, b estritamente positivos por se tratarem de medidas de segmentos, segue que

$$m = \frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mas o que se deseja é calcular a razão $\dfrac{AC}{AD}$. Fazendo as substituições, segue que

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AD} &= \frac{a}{b} = \frac{1}{m} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} \\ &= = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{(-1)^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi\end{aligned}$$

Portanto a bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{B}$ de 72° define o segmento áureo no lado oposto $\overline{AC}$

Esta relação também se observa entre o lado menor do triângulo ABC e a parte menor do segmento áureo. De fato, foi visto acima que pela semelhança dos triângulos, $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{b}{a-b} = \dfrac{a}{b} = \phi$.

A partir deste resultado é possível construir outras figuras geométricas com propriedades interessantes. Por exemplo, o **decágono regular** pode ser construído a partir deste triângulo isósceles ABC, traçando a circunferência de centro em A e raio AB. Assim, sendo o ângulo central de 36°, o decágono será formado por dez desses triângulos justapostos, totalizando 360°, marcando assim marca-se os demais vértices do decágono ao longo da circunferência.

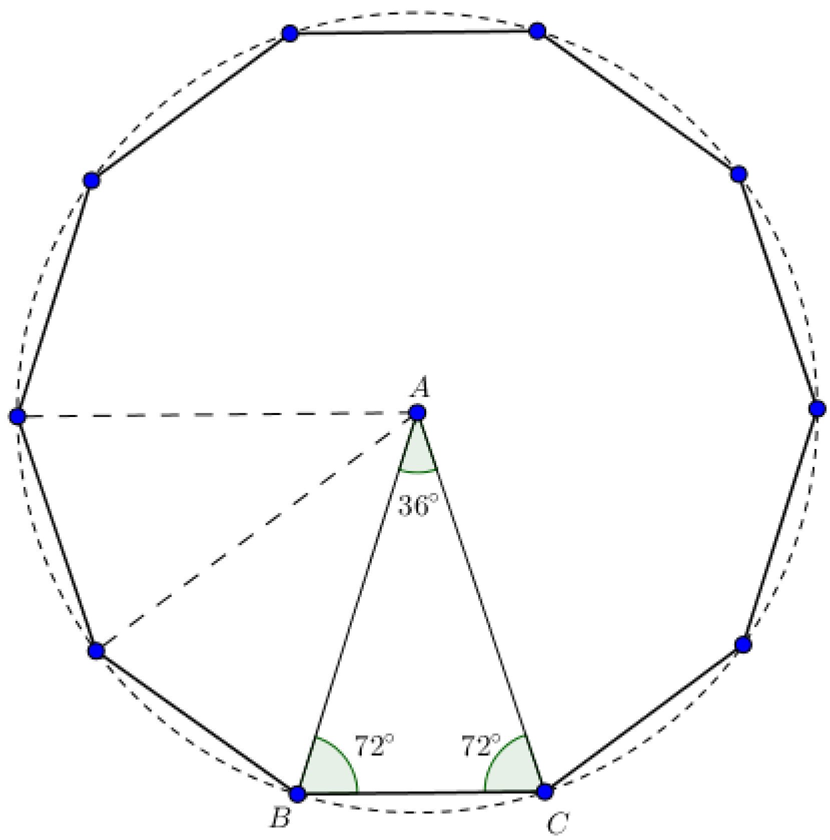


Figura 9: Construção do decágono regular

Outra figura peculiar, a partir da qual verificam-se inúmeras aplicações relacionadas, é o pentágono regular. Pode ser facilmente obtida a partir do decágono anterior, bastando a partir do ponto B, por exemplo, traçar as arestas alternando os vértices do pentágono, conforme ilustrado a seguir.

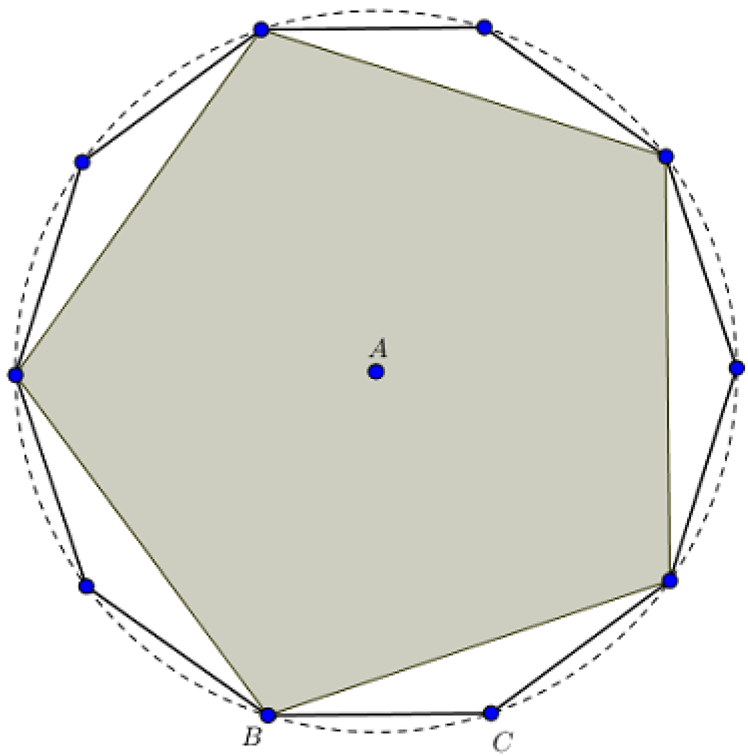


Figura 10: Construção do Pentágono regular a partir do decágono inscrito

Inserido no pentágono existe uma figura conhecida como *Pentagrama de Pitágoras*, representado na figura 11. Esta figura contém a razão áurea de forma surpreendente, conforme será visto mais adiante.

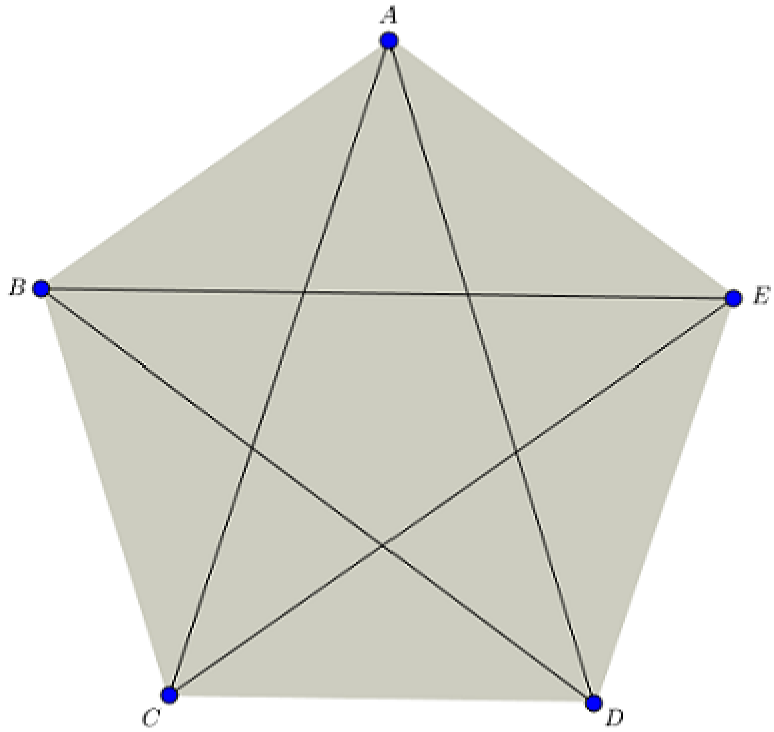


Figura 11: O Pentagrama

Segundo ROQUE e CARVALHO (2012, p.63-69), Pitágoras de Samos (570 e 500 a.C) e sua Escola Pitagórica exerceu imensa influência para o desenvolvimento da Matemática e da Filosofia na Grécia Antiga. Os conceitos da Escola Pitagórica iam além do aprendizado da Matemática para aplicação dentro do palpável, mas defendiam sua relação com forças cósmicas e misticismo. Por exemplo, para eles, os números pares e ímpares eram opostos. Como a sua soma forma novos números (ímpares), representaria assim a perfeita conciliação dos opostos. A realidade segundo eles funcionaria da mesma forma. As coisas seriam criadas por ideias opostas e desta oposição surgiria o equilíbrio e a harmonia do universo. Este seria um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que *tudo é número*, isto é, que a natureza segue padrões matemáticos, bem como a música, a astrologia, as artes e o universo como um todo.

Dentro de alguns de seus conceitos utilizava a razão áurea para explicar a harmonia entre a alma e o cosmo. Quando ele descobriu que as proporções do pentagrama eram iguais às da proporção áurea, tornou esse símbolo como a representação da Irmandade Pitagórica, uma espécie de reunião social, quase uma seita, na qual acreditava-se que as relações entre os números revelariam segredos do universo e colocariam o homem próximo dos deuses. A admiração pelas propriedades matemáticas do Pentagrama era tamanha que esta figura foi adotada como o símblo da irmandade pitagórica, até mesmo como uma espécie de senha secreta entre eles.

O pentagrama é formado por segmentos de quatro comprimentos diferentes. Tomando por base a figura a seguir, os segmentos do pentagrama são congruentes a PQ, BP, QD e DA, em ordem crescente de tamanho, que serão chamados aqui, respectivamente, de 1º, 2º, 3º e 4º segmentos, conforme ilustrado na figura a seguir.

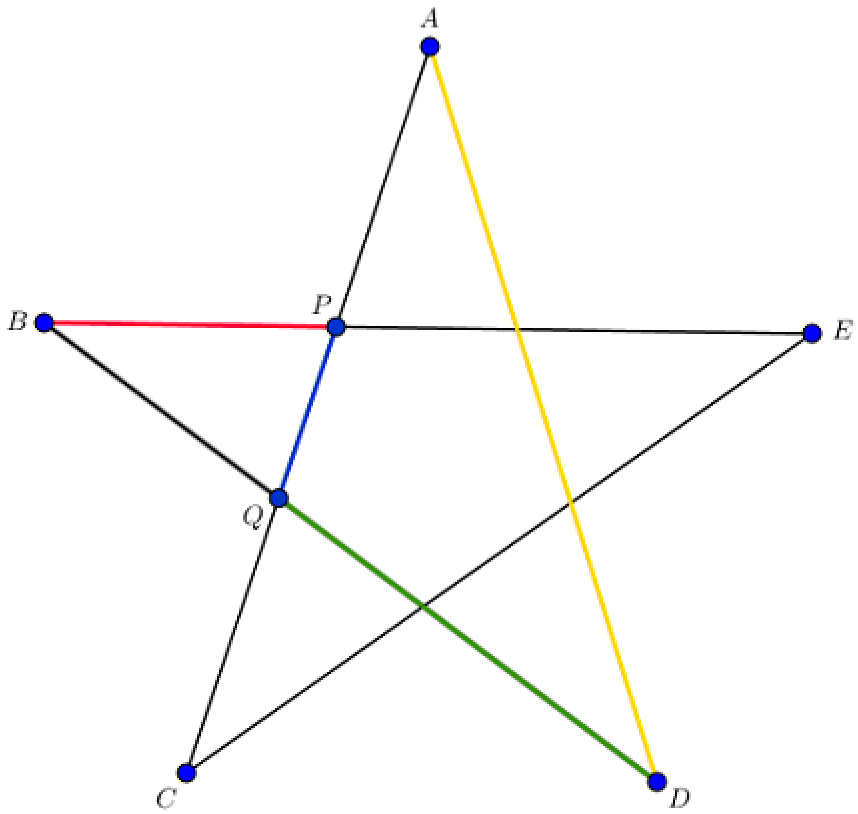


Figura 12: A razão áurea no Pentagrama

Pitágoras (ou algum de seus discípulos) o tamanho do terceiro segmento era igual à soma dos tamanhos entre o 1º e o 2º segmentos. Da mesma forma, o 4º é a soma do 2º com o 3º. Isto é,

$$|\overline{QD}| = |\overline{PQ}| + |\overline{BP}| \ \text{ e } \ |\overline{DA}| = |\overline{BP}| + |\overline{QD}|$$

Percebe-se que esta regra equivale à recorrrência que define a Sequência de Fibonacci.

Além disso, a razão entre um segmento e outro de tamanho imediatamente inferior é o número áureo ϕ. Isto é,

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{DQ}{BP} = \frac{AD}{DQ} = \phi$$

Um resultado muito curioso e surpreendente, mas de fácil comprovação, partindo do fato que o pentagrama está inscrito no pentágono regular, e que o triângulo ABC é isósceles, com ângulos de $\widehat{A} = 36°$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 72°$. Portanto, pelo Teorema 10, segue esta relação entre os segmentos do pentagrama.

Assim, é imediato o fato que esses segmentos aão lados de retângulos áureos. Por exemplo o retângulo de lados $\overline{BP}$ e $\overline{PQ}$ é áureo, bem como o retângulo que lados $\overline{DQ}$ e $\overline{BP}$ ou ainda $\overline{AD}$ e $\overline{DQ}$.

Outra construção interessante, e que aparece na Natureza na estrutura de diversos seres vivos, bem como na formação de galáxias, por exemplo, é a *Espiral Áurea*, também conhecida como *Espiral de Fibonacci*. Sua construção parte de sucessivos retâgulos áureos em sequência, conforme esquema a seguir.

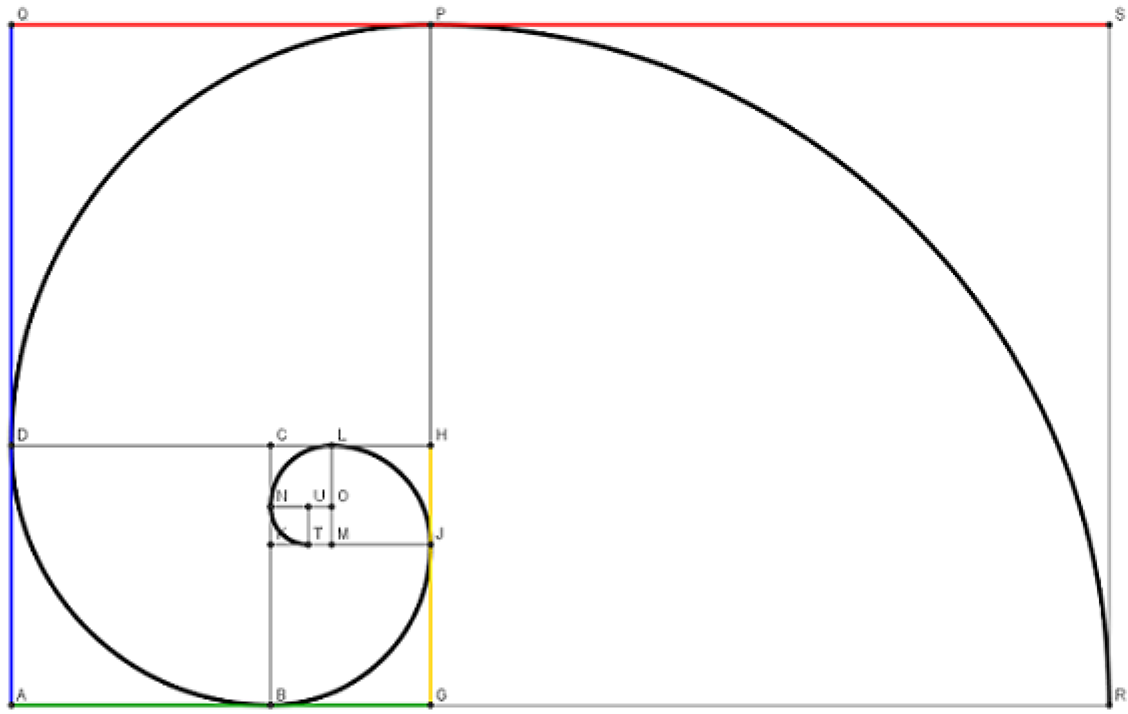


Figura 13: A Espiral de Fibonacci

Neste esquema, os segmentos $\overline{GH}$, $\overline{AG}$, $\overline{AQ}$ e $\overline{QS}$ seguem, respectivamente, as proporções dos segmentos do pentagrama de Euclides. Isto é,

$$\frac{QS}{AQ} = \frac{AQ}{AG} = \frac{AG}{GH} = \phi$$

Por este motivo são áureos os retângulos $ARSQ$, $AGPQ$, $AGHD$, $BGHC$, $KJHC$, e assim sucessivamente.

O quadrilátero $GRSP$ é um quadrado, e inscreve-se neste um arco de cirunferência de tamanho $\frac{\pi}{2}rad$, com centro em G e raio GR. De forma análoga inscreve-se um arco no quadrado $DHPQ$, outro no quadrado $ABCD$ e assim sucessivamente. A figura que surge como sequência desses arcos é a Espiral de Fibonacci.

5 Aplicações da Razão Áurea

Uma das mais abrangestes aplicações da Sequência de Fibonacci está no conceito de beleza. Desde a antiguidade tenta-se definir ou explicar o belo, o agradável aos olhos. Mesmo que filosoficamente, apesar de haver diversas teses, não exista um conceito absoluto para a beleza, é intuitivo que ela existe, atrai, agrada, motiva e encanta.

Independente da explicação e dos motivos que tornam algo belo à vista, os Pitagóricos (cerca de 600 a.C.) perceberam que para todas as coisas há uma relação matemática, e, portanto, numérica. Nem mesmo usavam o termo "beleza", mas "harmonia", que estava ligado ao número, à medida e à proporção. Essa ideia influenciou desde então a arte grega na arquitetura, escultura, pintura e a música. Nessa concepção a razão entre o todo e a parte maior seria igual à razão entre a parte maior e a menor, coincidindo com o número de Fibonacci ϕ.

5.1 A Disposição das Folhas de plantas

De um modo geral, a Botânica é uma das ciências naturais em que os números de Fibonacci revelam fortemente a sua presença. Pode dizer-se que Fibonacci refletia bem o seu interesse por este maravilhoso e misterioso mundo vegetal, tendo inclusive deixado um livro intitulado *Flos* — que se encontra igualmente exposto na página dedicada à História da Matemática — que significa flor ou flor de fruto, onde se refere a aplicação das suas ideias à flora.

É sabido que cada espécie de planta tem o seu próprio modelo de desenvolvimento, não obstante estar sujeita a uma variedade ocasional dentro da espécie. Os números de Fibonacci são encontrados quando procede-se a um estudo do arranjo das folhas ?– a que se dá o nome de *phyllotaxis* (filotaxia) –? de algumas plantas.

Considera-se como primeiro exemplo, o Salgueiro, em relação ao qual as folhas em torno do caule seguem um modelo helicoidal. Procedendo de forma ascendente marca-se consecutivamente as folhas por $L_1, L_2, ..., L_i$. A folha L_2 encontra-se disposta segundo um certo ângulo a partir de L_1 à volta do caule e a certa distância ao longo do mesmo. Este modelo é bem observado para todas as folhas ao longo do caule.

Nota-se uma periodicidade, com um período que consiste nas duas voltas e nas cinco folhas que estão contidas nessas voltas.

De um modo geral, tem-se m como o número de voltas completas num período e n o número de folhas num período. Os números m e n podem igualmente ser definidos para conjuntos de folhas. Na figura 14, a seguir, constata-se que $m = 2$ e $n = 5$. Atuais estudos com várias plantas demonstraram que, tanto m como n, tomam valores que pertencem à sequência de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... .

Figura 14: Representação do esquema de SCHIPS

De acordo com SCHIPS (1922) foram encontrados os seguintes casos:

- $m = 1$, $n = 2$ nas duas fileiras de folhas de várias plantas bulbosas e o mesmo encontrando-se nos pequenos ramos horizontais do ulmeiro;
- $m = 1$, $n = 3$ em plantas ciperáceas, no abieiro e no vidoeiro;
- $m = 2$, $n = 5$ muito frequente nos salgueiros, rosas e em árvores de fruto cujos mesmos possuem caroço;
- $m = 3$, $n = 8$ presente nas couves, nos ásteres (plantas vivazes, da família das aceráceas, muito cultivadas em jardins), e na leituga, olho-de-mocho;
- $m = 8$, $n = 21$ em certos tipos de abetos e em pinhas;
- $m = 13$, $n = 34$ em certos tipos de pinhas de *Pinus laricio*.

Percebe-se que m e n pertencem à Sequência de Fibonacci, sendo n dois o segundo termo subsequente de m. Isto é, se $m = F_i$, então $n = F_{i+2}$

5.2 Os Girassois de Fibonacci

Talvez o caso mais notável do aparecimento dos números de Fibonacci nas plantas esteja relacionado com a família Compositae e em particular no girassol.

Ao serem analisadas as variedades mais comuns, observa-se que nos discos das flores encontram-se sementes que formam dois conjuntos de espirais logarítmicas. Um dos conjuntos está disposto no sentido dos ponteiros do relógio (sentido negativo) e o outro, no sentido positivo. O número de espirais logarítmicas de cada conjunto é diferente, sendo, na verdade, dois números consecutivos de Fibonacci.

Usualmente, nos girassois mais comuns observa-se 34 e 55 espirais. Contudo, nos gigantes, esses números elevam-se a 89 e 144. Nas cartas do departamento de *The Scientific Monthly*, o geólogo Daniel T. O'Connell relatou ter encontrado na sua fazenda, em Vermont (EUA), um gigantesco girassol com 144 e 233 espirais.

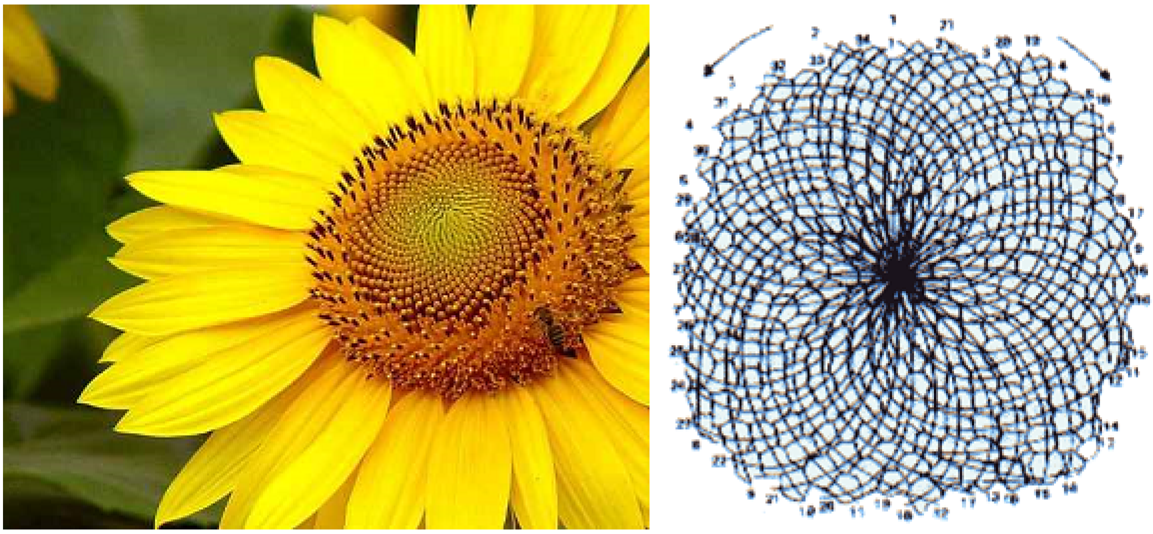


Figura 15: Uma flor de girassol e uma esquematização das espirais em seu disco

5.3 A Reflexão da Luz

Outro fenômeno em que pode-se observar a presença da Sequência de Fibonacci é aquele que se aplica ao estudo das reflexões de raios luminosos oblíquos em relação a duas lâminas de vidro dispostas face-a-face.

Um raio refletido atravessa as duas lâminas de vidro em um e um só caminho possível. Se um raio é refletido uma só vez, então existem dois trajetos possíveis para tal fato. Observando-se um par de reflexões, então teremos três caminhos. Com três reflexões de um raio inicial, constata-se que o número de caminhos em que ele pode percorrer é cinco.

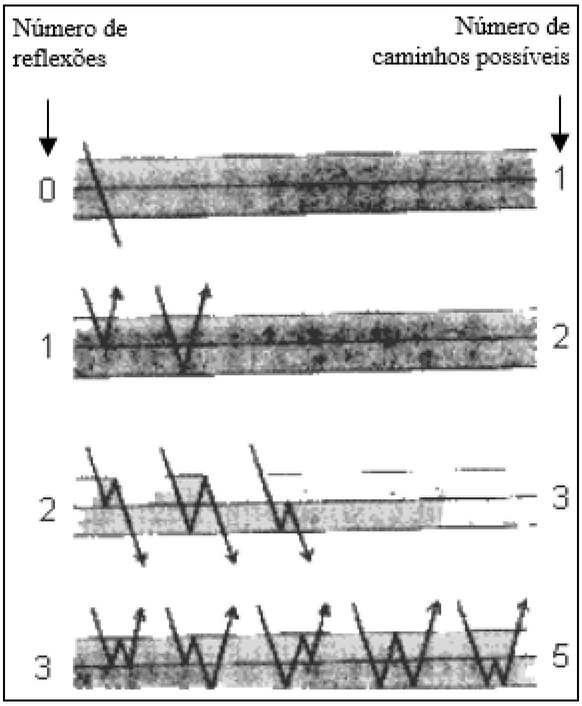


Figura 16: Esquema de reflexão da luz em lâminas paralelas

5.4 Cálculo Combinatório

Outro problema relacionado com a Sequência de Fibonacci é o cálculo combinatório, mais precisamente o caso do lançamento de uma moeda ao ar, em que se calcula o número de sequências em que não dêem duas ou mais *caras* consecutivas como resultado do lançamento.

A tabela ao seguir lista todas as possíveis sequências para cada número de lançamentos consecutivos da moeda.

Tabela 2: Sequências de lançamentos excluindo *caras* consecutivas

Nº de lançamentos	Sequências sem *caras* consecutivas(C: cara; K: coroa)	Total
1	(C),(K)	2
2	(CK), (KC), (KK)	3
3	(CKK), (KCK), (KKC), (CKC), (KKK)	5
4	(CKKK), (KCKK), (KKCK), (KKKC), (CKCK), (CKKC), (KCKC), (KKKK)	8
5	(CKKKK), (KCKKK), (KKCKK), (KKKCK), (KKKC), (CKCKK), (CKKCK), (CKKKC), (KCKCK), (KCKKC), (KKCKC), (CKCKC), (KKKKK)	13
...	...	...

Os números de Fibonacci aparecem como o número total de sequências de *cara* e *coroa* para cada um dos consecutivos números de lançamentos efetuados indicados na primeira coluna da tabela.

5.5 Arquitetura Antiga e Contemporânea

Desde a antiguidade a razão áurea aparece nas proporções de inúmeras construções.

No Egito antigo, por exemplo, as pirâmides encontradas na necrópole de Gizé, as mais famosas do mundo, foram construídas tendo em conta a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da pirâmide é igual a ϕ.

A construção da maior delas, a pirâmide de Quéops, faraó da quarta dinastia cujo reinado se estendeu de 2551 a.C. a 2528 a.C. e tem a maior das três pirâmides de Gizé. Trabalharam para sua construção 100 mil homens durante 20 anos. Esta pirâmide tem base de 230 metros, altura original: 142,6 metros aproximadamente. A razão entre a aresta da base e a altura é muito próximo de ϕ. Além disso, incrivelmente em cada par de fileiras de blocos consecutivas, o bloco de baixo, era ϕ vezes maior que o bloco de cima.

Figura 17: As Pirâmides de Gizé.

O Pathernon foi um templo dedicado à deusa grega Atena, construído no século V a.C. na Acrópole de Atenas, na Grécia Antiga. É o mais conhecido dos edifícios remanescentes da Grécia Antiga e foi ornado com o melhor da arquitetura grega. Suas esculturas decorativas são consideradas um dos pontos altos da arte grega. O Partenon é um símbolo duradouro da Grécia e da democracia, e é visto como um dos maiores monumentos culturais da história da humanidade.

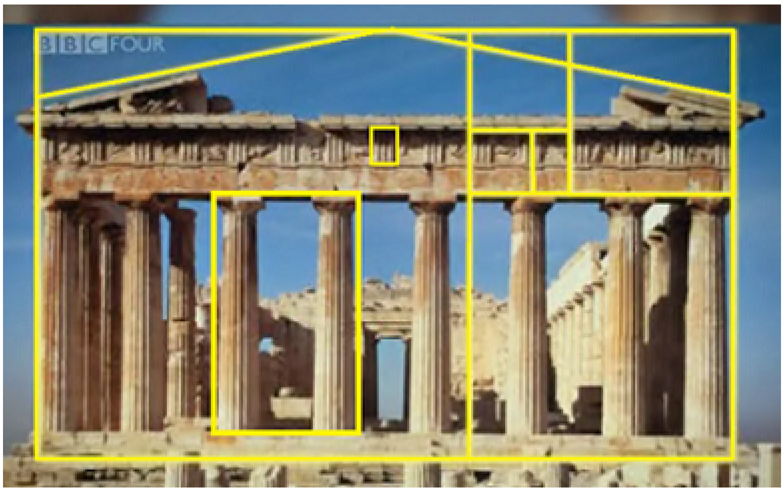


Figura 18: O Pathernon e os retângulos áureos inscritos em sua construção

Os gregos conheciam o segredo da proporção áurea, e o retângulo áureo é encontrado inúmeras vezes em sua construção, como ilustram as linhas amarelas na figura 18.

Em construções da Idade Média, como a Catedral de Notre Dame, na França, construída entre os séculos 12 e 13, o palácio de Taj Mahal, na Índia, erguido no século 17, ou no prédio da sede da ONU – organização das Nações Unidas, nos Estados Unidos, inaugurado em 1952, observa-se a preocupação com a proporção áurea, conforme as figuras 19 e 20 a seguir.

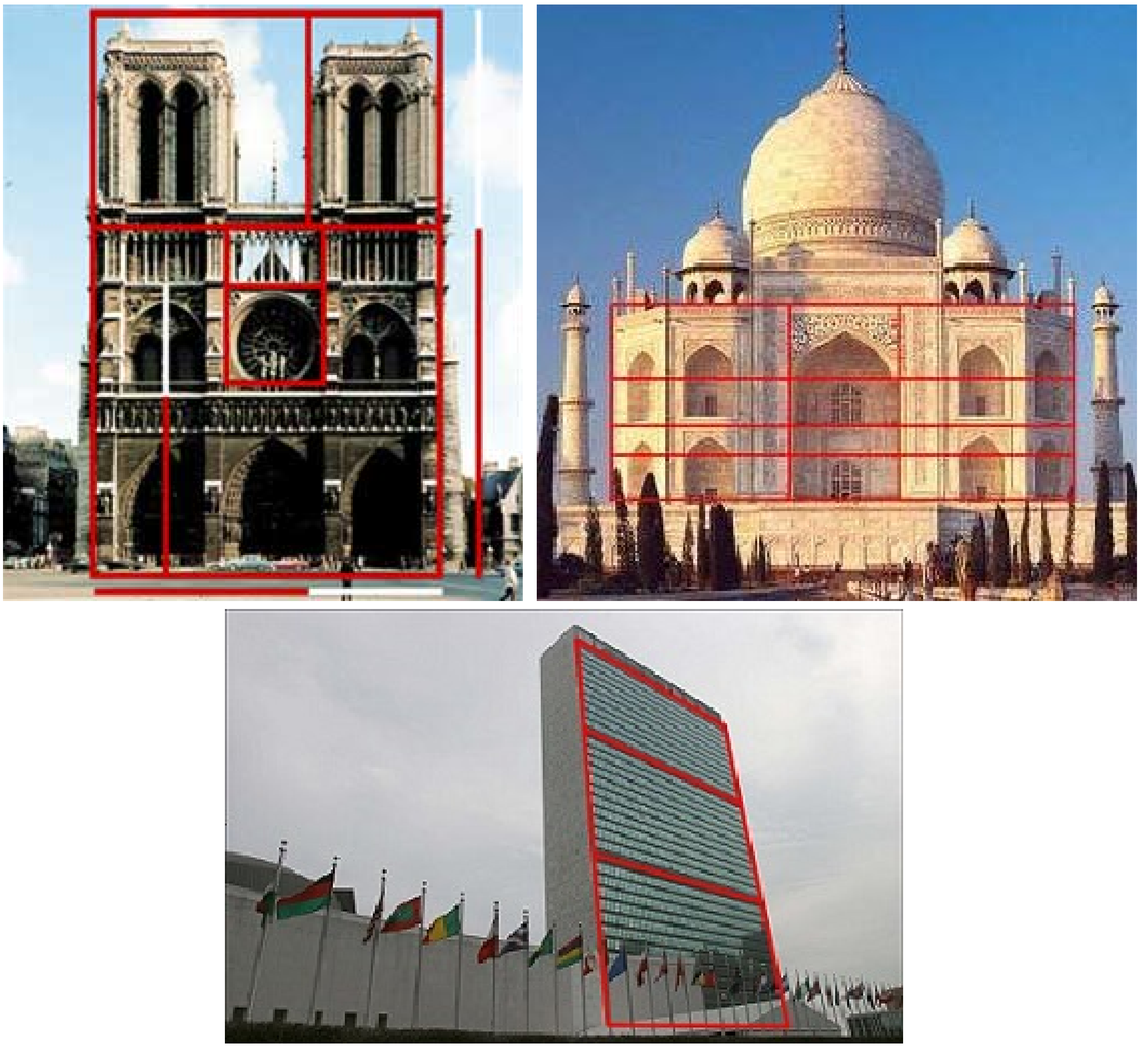


Figura 19: A catedral de Notre Dame (França) e o TajMahal, na Índia, e a sede da ONU, nos EUA, mostrando os retângulos áureos em suas proporções

5.6 Corpo Humano

Uma das imagens mais conhecidas na história é o Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci. Foi feito por volta do ano 1490 num dos seus diários. Descreve uma figura masculina nua, simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos numa circunferência e num quadrado. A altura da cabeça é calculada como sendo um oitavo da altura total. O desenho e o texto já foram chamados de Cânone das Proporções.

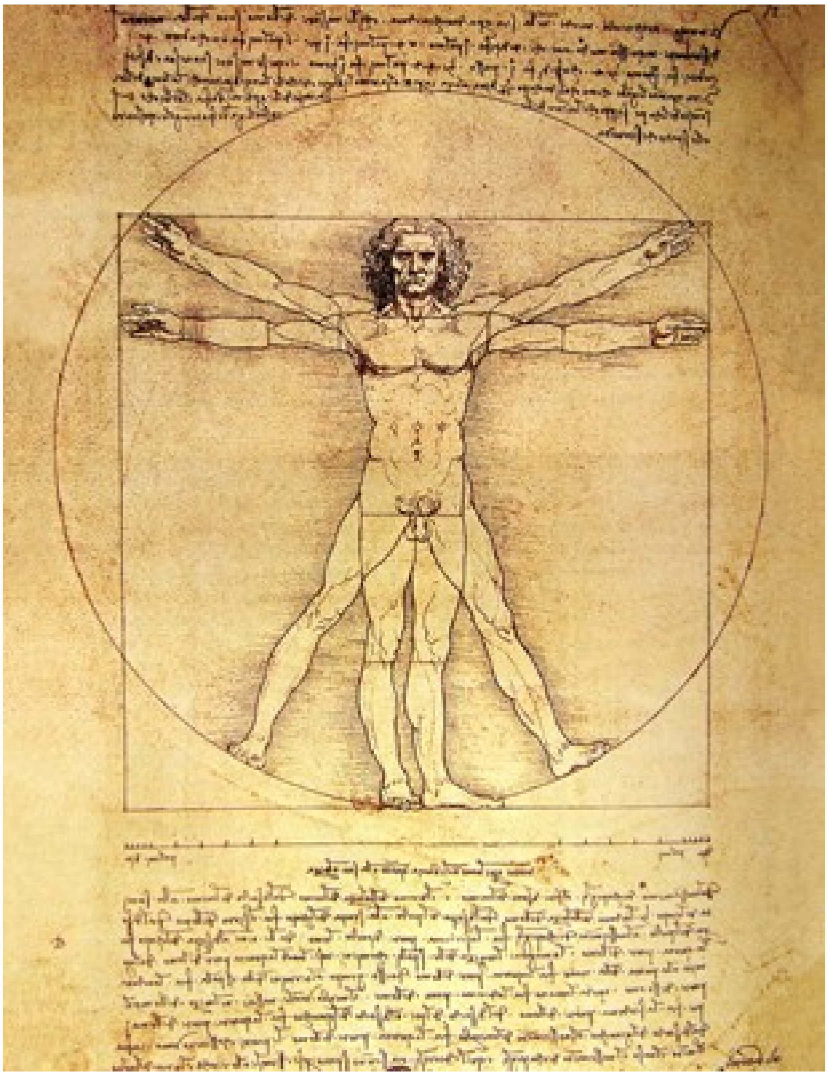


Figura 20: O Homem Vitruviano, de Leonardo DaVinci

Nesta figura é possível perceber o número áureo (ou algum valor bem próximo) em diversas razões, por exemplo:

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão;
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça.
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax.
- A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo.
- O tamanho dos dedos é a medida da dobra central até a ponta.
- A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta.

5.7 Outros Seres Vivos e Formações da Natureza

É possível listar diversos casos em que se observa a proporção áurea ou o modelo da Espiral de Fibonacci em seres vivos.

Um exemplo aparece no núcleo da flor do girassol. Neste há duas séries de curvas de sementes. Cada série vai para uma direção e o número de curvas não é o mesmo nas duas séries. Se a flor tem 21 curvas para a esquerda, terá 34 para a direita. Se tem 34 para um lado, terá 55 para o outro. Se 55 curvas apontam para uma direção, então 89 apontarão para a outra. Esse padrão remete à Sequência de Fibonacci.

Exemplos do modelo da espiral aparecem na concha *Natilus*, na babosa *Aloe polyphila*, na causa do camaleão, em folhas de samambaia, nas conchas dos caracois, nos cones de pinheiro, na flor do copo-de-leite, em conchas de crustáceos, na flor da planta conhecida como confrei. Além disso, essa forma pode ser observada, por exemplo, nas ondas do mar, no padrão de furacões e redemoinhos, bem como em alguns modelos de galáxias.

5.8 Música e Poesia

A música também traz a proporção áurea. Há 13 notas em cada oitava no escala cromática (usada desde a época de Pitágoras) e existem artigos que relacionam composições de Mozart, Schubert, Beethoven (sinfonias Quinta e Nona) à razão áurea. O clímax de músicas também é frequentemente encontrado aproximadamente no que pode ser chamado de "ponto ϕ"(61,8%) da canção.

O poema épico grego Ilíada, de Homero, que fala sobre a Guerra de Troia, a proporção entre as estrofes maiores e as menores é bem próximo ao valor de ϕ.

5.9 Artes Plásticas

É comum, especialmente nas pinturas renascentistas, e em algumas de pintores modernos identificar a proporção áurea sendo base das suas dimensões, bem como nas esculturas da Gécia Clássica, seguindo basicamente as proporções encontradas no Homem Vetruviano, abordado anteriormente.

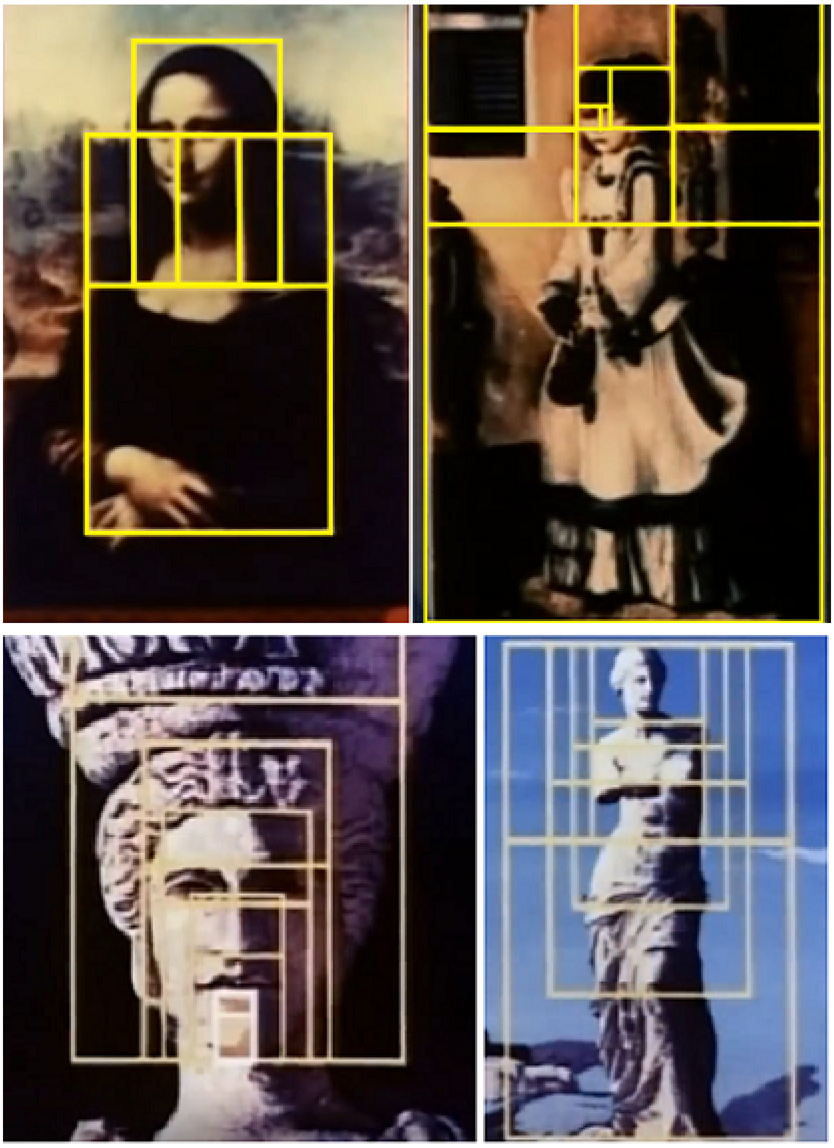


Figura 21: Obras clássicas mostrando as porporções áureas utilizadas

6 Sugestões de Atividades para Ensino Médio

No primeiro semestre deste ano de 2017 desenvolvi uma sequência didática a respeito de Sequência de Fibonacci e razão úrea (regra de ouro, número ϕ) para turmas de segundo ano do ensino médio, ensino regular e da modalidade Educação de Jovens e Adultos – EJA, com base no que foi tratado neste trabalho.

A ideia foi justamente que os próprios alunos fossem descobrindo as informações e obtendo a noção dos conceitos envolvidos, para que posteriormente eu desse uma explicação mais formal a respeito do assunto.

O trabalho foi desenvolvido em três turmas, duas de ensino médio regular turno diurno, que serão aqui chamadas de EM1 e EM2, e em uma turma na modalidade de educação de jovens e adultos – EJA noturno. As turmas EM1 e EM2 tinham 36 e 35 alunos, respectivamente, enquanto que a turma de EJA era formada por 22 alunos.

O assunto *Sequência de Fibonacci e Razão Áurea* foi desenvolvido de modo diferenciado nas turmas EM1 e EM2, da mesma escola e turno. Estas foram escolhidas pelo fato de terem quantidade equivalente de alunos e por terem aspecto semelhante de rendimento na disciplina Matemática ao longo do ano letivo. Assim, seria mais pausível que as possíveis divergências de resultados observados nas duas turmas ao fim do trabalho fossem atribuídas à diferença de metodologia, e não à diversidade das turmas.

Na turma EM2 o assunto foi apresentado mediante uma aula expositiva, que trouxe a definição da sequência de Fibonacci, a apresentação do problema dos coelhos, a definição da Razão Áurea e a apresentação de algumas propriedades. A seguir foi aplicado exercícios propostos que exigiam manipulação de resultados de exemplos referentes às propriedades apresentadas. Essa aula pode ser considerada expositiva tradicional, usando quadro de pincel.

Nas turmas EM1 e EJA foi aplicada a sequência didática que consistiu em apresentar inicialmente a animação em vídeo *Donald no País da Matemágica*. Dentre outros assuntos interessantes referentes à Matemática no cotidiano, apresenta aplicações da razão áurea, ou como é chamada no filme, regra de ouro. A seguir, foi aplicado um estudo dirigido escrito, que poderia ser feito em grupos, com as questões a seguir.

Governo Federal - Ministério da Educação *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Goiás* *Campus Valparaíso de Goiás* ***CETEP – Técnico Inegrado em Eletrotênica - Proeja***	
Aluno(a):	Prof. Fábio Alves

4º Semestre	Noturno	Data: *08/06/2017*	**Estudo Dirigido de Matemática**

A Sequência e o Número de Fibonacci: a Razão Áurea

Referência: filme *Donald no País da Matemágica*

Leonardo de Pisa
Leonardo Fibonacci
1170-1250 em Pisa (Itália)

O objetivo deste trabalho é mostrar algumas das aplicações da Sequência de Fibonacci, em especial do Núemro de Fibonacci, ou Razão Áurea ϕ. É surpreendente como números permitem conectar áreas do conhecimento que *a priori* seria inimaginável.

A sequência de Fibonacci tem sido ao longo de séculos, objeto de muito estudo e dedicação devido ao interesse que tem suscitado na comunidade científica por diferentes motivos.

1. A "proporção divina"

Por volta 1500 com a vinda do Renascentismo à cultura clássica voltou à moda. Michelangelo e principalmente Leonardo da Vinci, grandes amantes da cultura pagã, colocaram esta proporção natural em suas obras. Mas da Vinci foi ainda mais longe; ele como cientista, pegava cadáveres para medir a proporção do seu corpo e percebeu que obedece à essa proporção que ele chamou de DIVINA PROPORÇÃO. Ele e outros estudiosos perceberam que coelhos, abelhas, caramujos, constelações, girassóis, arvores, artes, o homem, seres, objetos e situações tão distintas e de dimensões tão distantes, estavam todas ligadas numa proporção em comum: o número ϕ (fi).

Atividade 01
- Meça sua altura e depois divida pela altura do seu umbigo até o chão;
- Em um de seus braços, meça a distância entre o ombro e a ponta do dedo médio, e divida pela distância entre o cotovelo e a ponta do mesmo dedo.
- Meça sua perna inteira e divida pelo tamanho do seu joelho até o chão;
- A altura do seu crânio dividida pelo tamanho da sua mandíbula até o alto da cabeça;
- Da sua cintura até a cabeça e depois só o tórax.

Em cada uma dessas operações, o resultado foi algo próximo de 1,618? Claro que os resultados provavelmente não serão exatos. Deve-se considerar erros de medida da régua ou fita métrica que não são objetos tão acurados de medição, e naturalmente as particularidades antropométricas de cada indivíduo.

Este número 1,618 é denominado **proporção áurea** (proporção de ouro), representado pela letra grega ϕ (fi), em homenagem ao nome de Fibonacci (que começa com a letra F ou ϕ). Na realidade o número ϕ é irracional (possui infinitas casas decimais não periódicas). Mas, para facilitar nossos cálculos, considere $\phi = 1,618$.

Este número aparece em inúmeras situações nas artes, na música, na arquitetura, nos seres vivos como vimos no filme *Donlad no País da Matemágica*.

2. Como Surgiu o Número de Fibonacci: "O problema dos coelhos"

De regresso à Itália depois das várias viagens que fez pelo mundo europeu e pelo médio oriente, Leonardo de Pisa, escreveu livros de Aritmética e Álgebra, destacando-se entre eles um clássico histórico: o *Liber abaci*. Nesta sua obra ele debruça-se sobre um problema por ele formulado que veio dar origem a uma sucessão a que posteriormente se associou o seu nome, Fibonacci, ficando assim conhecida na história como a Sucessão de Fibonacci. Esta sucessão veio na sequência do seguinte problema: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?" Todo este problema considera que os coelhos estão permanentemente fechados num certo local e que não ocorrem mortes.

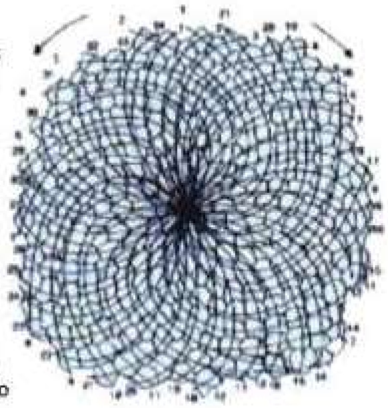
"Para tal, um indivíduo coloca um par de coelhos jovens num certo local rodeado por todos os lados por uma parede. Queremos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados, durante um ano, por esse par, assumindo que pela sua natureza, em cada mês dão origem a outro par de coelhos, e no segundo mês após o nascimento, cada novo par pode também gerar".

A reprodução dos coelhos na colônia			
Fim do mês nº	Casais adultos	Casais jovens	Total de casais
1	1	0	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55
11	34	55	89
12	55	89	**144**

Leonardo prosseguiu para os cálculos: no primeiro mês, teremos um par de coelhos que se manterá no segundo mês, tendo em consideração que se trata de um casal de coelhos jovens; no terceiro mês de vida darão origem a um novo par, e assim teremos dois pares de coelhos; para o quarto mês só temos um par a reproduzir, o que fará com que obtenhamos no final deste mês, três pares. Em relação ao quinto mês serão dois, os pares de coelhos a reproduzir, o que permite obter cinco pares destes animais no final deste mês. Continuando desta forma, ele mostra que haverá 144 pares de coelhos ao fim de um ano de vida do par de coelhos inicial (ver tabela). Listando a sucessão 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... na margem dos seus apontamentos, ele observou que cada um dos números (a partir do terceiro) é obtido pela soma dos dois números antecessores. Isto induz ao que é conhecida como ***Sequência de Fibonacci***.

<u>**Atividade 02**</u>: A partir do que foi descrito, determine a fórmula que define a sequência de Fibonacci.

3. Os girassóis de Fibonacci

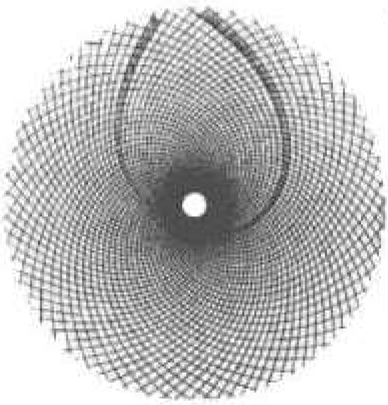


Talvez o caso mais notável do aparecimento dos números de Fibonacci nas plantas esteja relacionado com a família *Compositae* e em particular no girassol.

Ao analisarmos as variedades mais comuns, observamos que nos discos das flores encontram-se sementes que formam dois conjuntos de espirais logarítmicas. Um dos conjuntos está disposto no sentido dos ponteiros do relógio (sentido negativo) e o outro, no sentido positivo. O número de espirais logarítmicas de cada conjunto é diferente, mas são dois números consecutivos de Fibonacci.

Usualmente, nos girassóis mais comuns têm-se 34 e 55 espirais. Contudo, nos gigantes, esses números elevam-se a 89 e 144. Nas cartas do departamento de *The Scientific Monthly* (Novembro 1951), Daniel T. O'Connell, um geólogo, e sua mulher relataram ter encontrado na sua fazenda, em Vermont (EUA), um gigantesco girassol com 144 e 233 espirais.

Para os amantes da Literatura, um poema de Alberto Caeiro.



O meu olhar é nítido como um girassol.
Tenho o costume de andar pelas estradas
Olhando para a direita e para a esquerda,
E de vez em quando olhando para trás...

E o que vejo a cada momento
É aquilo que nunca antes eu tinha visto,
E eu sei dar por isso muito bem...

Sei ter o pasmo essencial
Que tem uma criança se, ao nascer,
Reparasse que nascera deveras...

Sinto-me nascido a cada momento
Para a eterna novidade do Mundo...

Creio no mundo como um malmequer,
Porque o vejo. Mas não penso nele
Porque pensar é não compreender...

O Mundo não se fez para pensarmos nele
(Pensar é estar doente dos olhos)
Mas para olharmos para ele e
estarmos de acordo...

Eu não tenho filosofia: tenho sentidos...
Se falo na Natureza não é porque saiba
o que ela é,

Mas porque a amo, e amo-a por isso,
Porque quem ama nunca sabe o que ama
Nem sabe por que ama,
nem sabe o que é amar...

Amar é a eterna inocência,
E a única inocência é não pensar...

(*in* Fibonacci e a Natureza - Educação e Matemática, 14).

5. A Sequência de Fibonacci e as Abelhas

Alguns fatos sobre as abelhas:

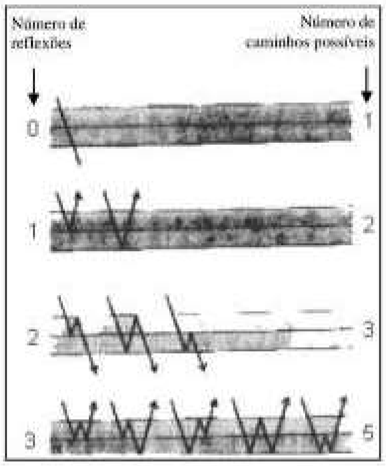
- Na colônia das abelhas existe uma especial: a rainha.
- Há muitas abelhas trabalhadoras que embora sejam fêmeas não põem ovos.
- Os zangões são machos. Alguns deles não trabalham. Os machos são produzidos pelos ovos infertilizados da rainha. Assim, só têm uma mãe e não têm pai.
- Todas as fêmeas são produzidas quando a rainha acasalou com um macho e assim têm pai e mãe. As fêmeas geralmente acabam como trabalhadoras, mas algumas são alimentadas com uma substância especial, chamada joia real, que faz com que elas se tornem rainhas. Elas estão prontas para irem embora e formar a sua colônia, assim que as abelhas construírem um enxame e deixarem a sua casa (colmeia) à procura de um novo lugar para construírem o seu ninho.
- Concluímos assim, que as fêmeas têm dois pais e os machos uma mãe.

Atividade 06: Com base nessas informações, complete a tabela a seguir, com o número de avós, bisavós, trisavós, tetravós e pentavós de uma abelha macho e uma abelha fêmea.

	Número de					
	Pais	Avós	Bisavós	Trisavós	Tataravós	Pentavós
Macho	1					
Fêmea	2					

Observação: Avós envolvem avôs (machos) e avós (fêmeas), tanto da parte do pai quanto da parte da mãe.

6. Fibonacci e a Física da Reflexão Luminosa



Outro fenômeno em que podemos observar a presença da sucessão de Fibonacci é aquele que se relaciona com o estudo das reflexões de raios luminosos oblíquos em relação a duas lâminas de vidro dispostas face-a-face, efetuado por Leo Moser.

Um raio refletido atravessa as duas lâminas de vidro em um e um só caminho possível. Se um raio é refletido uma só vez, então existem dois trajetos possíveis para tal fato. Observando-se um par de reflexões, então teremos três caminhos. Com três reflexões do raio inicial, constata-se que o número de caminhos que ele pode percorrer é cinco.

Questão 07: Tendo em consideração que, dado o número de reflexões, teremos um número de caminhos possíveis que o raio se pode deslocar, quantos serão se o raio for refletido *n* vezes?

7. Fibonacci e na Probabilidade

Outro problema relacionado com o cálculo combinatório envolvendo os números de Fibonacci é o caso da situação do lançamento de uma moeda ao ar em que se calcula o número de sequências em que não estejam patentes duas ou mais "caras" consecutivas como resultado do lançamento.

A tabela ao lado lista todas as possíveis sequências para cada número de lançamentos consecutivos da moeda. Os números de Fibonacci podem ser vistos como o número total de sequências de "cara" e "coroa" para cada um dos consecutivos números de lançamentos efetuados indicados na primeira coluna da tabela.

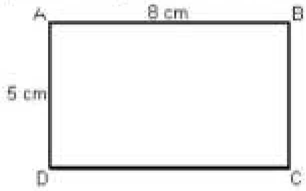
Número de lançamentos	Sequências sem "caras" consecutivas (C: cara; K: coroa)	Total
1	(C), (K)	2
2	(CK), (KC), (KK)	3
3	(CKK), (KCK), (KKC), (CKC), (KKK)	5
4	(CKKK), (KCKK), (KKCK), (KKKC), (CKCK), (CKKC), (KCKC), (KKKK)	8
5	(CKKKK), (KCKKK), (KKCKK), (KKKCK), (KKKC), (CKCKK), (CKKCK), (CKKKC), (KCKCK), (KCKKC), (KKCKC), (CKCKC), (KKKKK)	13
...	...	...

Questão 08: Se uma moeda é lançada *n* vezes e o resultado obtido é registrado pela ordem em que a moeda é lançada, quantas sequências únicas de "cara" e "coroa" são possíveis se excluirmos os casos em que se obtém "cara" duas ou mais vezes na sequência?

Atividade 03: Se, com o auxílio de um microscópio, forem observadas 233 espirais no sentido positivo de um girassol gigante, quantas espirais deve haver no sentido negativo dessa mesma flor?

4. O retângulo de Ouro

Um retângulo de ouro é um retângulo que verifica a razão áurea, isto é, os seus lados são tais que o menor deles está para o maior, assim como o maior está para a soma dos dois. Vejamos um exemplo:



No diagrama, ABCD representa um retângulo áureo.

Tem-se que AB = 8 cm, AD = 5 cm e AB/AD = 8/5 =1,6.

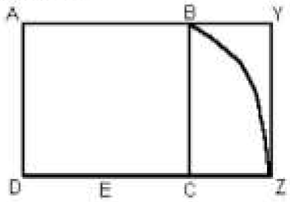
A razão de AB para AD é 1,6 : 1.

Tendo em consideração a definição de retângulo áureo, acima apresentada, verifica-se para este caso particular que os seus lados são tais que o mais pequeno, AD, está para o maior, AB, assim como o maior, AB, está para a soma de AB com AD.

Matematicamente, é o mesmo que escrever $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AB+AD}$. Sendo AB+AD = 13 cm, observa-se que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AB+AD} = \frac{13}{8} \cong$ 1,62, bem próximo do valor de ϕ.

Como construir um retângulo áureo?

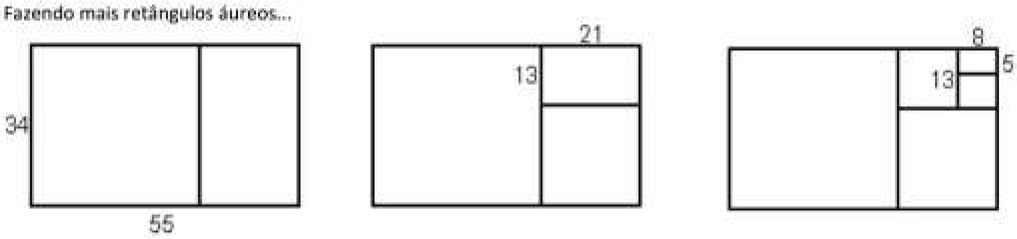
Os Gregos tinham um processo simples de construir um retângulo áureo. Vejamos os passos necessários para tal processo:



1. Desenhe um quadrado ABCD;
2. Do ponto médio E do segmento DC trace um arco de B a Z.
3. Complete o retângulo áureo AYZD.
4. O retângulo ADZY é um retângulo áureo.

Atividade 04: Meça AY, AB e BY. O que se pode concluir entre as razões $\frac{AY}{AB}$, $\frac{AB}{BY}$ e o número ϕ?

Fazendo mais retângulos áureos...



Um retângulo de ouro pode tornar-se num quadrado e noutro retângulo áureo. Deste modo, no diagrama anterior, o retângulo BYZC é igualmente áureo. Este processo pode ser continuado repetidamente. Quando um quadrado é traçado no interior de um retângulo d'ouro obtemos contiguamente um retângulo d'ouro, e neste último podemos traçar um quadrado e o que resta será uma vez mais um retângulo áureo, e assim sucessivamente como podemos constatar na figura abaixo.

No diagrama os retângulos são de 55 por 34; 34 por 21; 21 por 13; 13 por 8; 8 por 5; ...

Atividade 05: Divida o lado maior pelo lado menor de cada retângulo obtido nas figuras acima. Esses resultados tendem a se aproximar de algum número fixo? Em caso afirmativo, que número seria este? Além disso, qual a relação entre os valores informados (5, 8, 13, 21, 34, 55) com o assunto tratado neste trabalho? (veja o item 2 deste estudo).

8. Um Problema Enig(matemático) Envolvendo Fibonacci

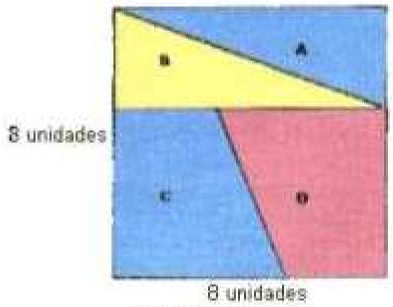
Aqui um desafio que procura de desvendar o segredo que faz da prova que se segue uma prova enganadora. Tal "prova" segue uma estratégia visual que vai culminar na apresentação de um resultado que é um absurdo, uma vez que leva à conclusão de que 64 = 65.

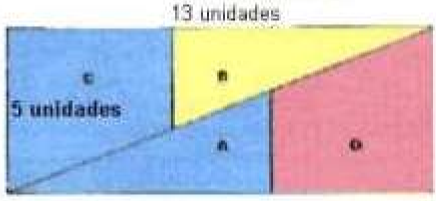
Começamos por considerar um quadrado de lado de medida 8 e dividido em quatro partes, como se observa na primeira figura.

Seguidamente separamos estas partes e fixamo-las, de novo, todas juntas, de modo a formar um retângulo com lados de medidas 13 e 5 (como a figura de baixo apresenta).

Com o que foi dito acima, temos um quadrado de área igual a 64 = 8.8 que se transforma num retângulo de área 65 = 13.5. Isso é um absurdo, pois equivale a dizer que 64 = 65. É preciso desvendar o mistério que permite chegar a tão contraditória conclusão.

Esta plausível, mas falsa "prova" de uma deliberada falsa declaração (tais "provas" são chamadas de *sofismas*) pode ser tornada mais "convincente" se tomarmos, em vez de um quadrado de lado de medida 8, um quadrado cuja medida do seus lados seja um número de Fibonacci com um indice suficiente grande f_n, onde é sabido que $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, que é a sucessão dos números de Fibonacci.





Textos e ilustrações baseados e adaptados de <http://www.ptmat.lmc.fc.ul.pt/~marcial>

Questão 09 (desafio): Procure desvendar o enigma acima, com base na sugestão apresentada.

A diferença na demostração de interesse das turmas foi nítida. Nas turmas EM1 e EJA onde foram aplicadas as atividades aqui sugeridas os alunos tiveram uma participação muito maior e demonstraram muito mais interesse no assunto. Além disso, no fim do trabalho o rendimento na prova escrita aplicada foi bem melhor nessas turmas do que na turma EM2, conforme tabela e gráficos a seguir.

Tabela 3: Rendimento das turmas após avaliação do trabalho

Turma	**Total de alunos**	**Rendimento r (número de alunos)**			
		$r \leq 5,0$	$5,0 \leq r < 7,0$	$7,0 \leq r < 9,0$	$r \geq 9,0$
EM1	36	0	4	21	11
EM2	35	5	15	13	2
EJA	22	0	0	5	17

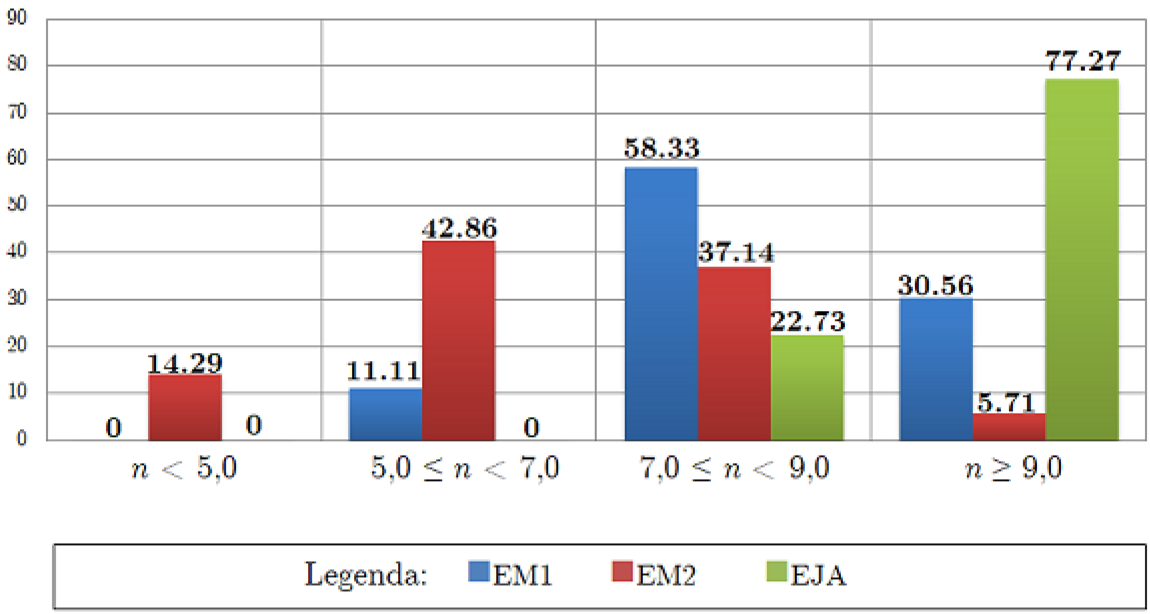


Figura 22: Gráfico de rendimento após avaliação

7 Considerações finais

O aprendizado da Matemática deve ter como principal objetivo contribuir na formação da cidadania. A sua evolução está associada à inserção do indivíduo no mundo do trabalho, cultura, relações sociais e na formação de sua essência como ser.

O mercado de trabalho, por exemplo, exige profissionais atentos, criativos, polivalentes. Dessa forma, a Matemática promove situações em que o aluno precisa exercitar importantes valores como criatividade, responsabilidade, dedicação, persistência e compromisso. A Matemática em sala de aula contribui para que os alunos adquiram habilidades interessantes para a formação do ser social, como criatividade, iniciativa pessoal, capacidade de trabalhar em grupos, além de técnicas para abordar e trabalhar problemas.

Para que o aluno seja inserido no mundo da relação social, a Matemática contribui na compreensão das informações, pois a sua aprendizagem vai além de contar, calcular. Permite analisar, medir e ampliar dados e cálculos, compreender conceitos, abstrair para propor hipóteses e conjecturar sobre estas. Todas essas habilidades representam relações importantes para o cotidiano e contribuições com outras áreas do conhecimento.

Mas todo esse aprendizado vai além do enunciado de definições e manipulação de fórmulas, números e operações. O *modus vivendi* sofreu muitas mudanças nas últimas décadas, e a educação naturalmente precisa se adequar, passando especialmente pela prática pedagógica em sala de aula. Assim, sem desmerecer as aulas expositivas e as que envolvem manipulação de fórmulas, equações, números e letras, o ensino da Matemática deve ceder cada vez mais espaço para o contexto histórico e as aplicações práticas do conceito a ser estudado. Dar mais ênfase ao desenvolvimento de habilidades ao invés do simples trabalho de cumprir conteúdos.

Na proposta deste trabalho ficou claro que essa ideia tende a se verificar na prática pedagógica em sala de aula.

É claro que não se deve ir a nenhum dos extremos. Nem se limitar ao conteúdo, defninições e manipulações de exemplos e exercícios, e nem ficar buscando aplicações práticas do cotidiano a tudo custo, até mesmo correndo riscos de ensinar equívocos.

O ideal é que haja um equilíbrio entre os componentes da prática pedagógica no ensino da Matemática. Isso engloba mostrar a origem das palavras, a criação e o desenvolvimento da Matemática, bem como os homens e mulheres que estão por trás dela, a apresentação de conceitos e definições (e isso envolve demonstrações), as manipulações matemáticas de fórmulas, equções, números e resultados, além das aplicações, sejam em práticas cotidianas, ou em auxílio à tecnologia ou outros campos do conhecimento.

Vale ressaltar que quanto às demonstrações, no Ensino Médio elas servem para justificar algumas fórmulas e resultados, com o fim de convencer os alunos na base da razão e não da mera autoridade de professor. Assim, não se deve demonstrar o que é aceito sem hesitação pelos alunos.

É válido ainda o uso de materiais concretos ou de TICs – Tecnologias de Informação e Comunicação quando houver espaço para tal.

Não existe uma cartilha pronta para se obter êxito no ensino da Matemática em sala de aula, até porque como a sociedade vem mudando de forma acelerada atualmente, a geração atual é a responsável por encontrar a melhor forma de ensinar. O que se descobre hoje poderá não ser bem aplicável para a próxima geração, assim como da geração anterior para esta muita coisa deve ser revista e recriada. O que vale sempre é manter o bom senso e o equilíbrio entre os componentes fundamentais do ensino da Matemática.

Referências

[1] AQUINO, Júlio Groppa. *Erro e fracasso na escola: Alternativas teóricas e práticas*. São Paulo: Summus, 1997.

[2] ANTUNES, Celso; ALVES, Rubem. *O aluno, o professor, a escola: Uma conversa sobre educação*. Campinas: Papirus 7 Mares, 2011.

[3] ARROYO, Miguel G. *Currículo, território em disputa*. Petrópolis: Vozes, 2011.

[4] ARROYO, Miguel G. *Imagens quebradas: trajetórias e tempos de alunos e mestres*. 6ed. Petrópolis: Vozes, 2011.

[5] BRASIL. *Constituição Federal do Brasil*. Brasília, 1988.

[6] BRASIL. *Lei de diretrizes e bases da educação brasileira*. Lei 9394/96, Brasília, 1996

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientaões Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educaão Básica, 2006.

[8] CALDEIRA, Jhone. *A aritmética da Sequência de Fibonacci*. In: Anais do IV Workshop de Álgebra da UFG. Catalão: UFG-CAC, 2015. Disponível em: <https://ssa_mat.catalao.ufg.br>, acesso em: 29 jun 2016.

[9] COMMANDINO, Pedro. *Aprender bem/mal*. Campinas: Autores Associados, 2008.

[10] DEMO, Pedro. *Aprender bem/mal*. Campinas: Autores Associados, 2008.

[11] DEMO, Pedro. *Metodologia para quem quer aprender*. São Paulo: Atlas, 2008.

[12] Filme *DONALD no país da Matemágica*. Direção: Hamilton Luske, Joshua Meador, Les Clark, Wolfgang Reitherman. Roteiro: Bill Berg, Heinz Haber. EUA, Walt Disney: 1959. Disponível em acesso em: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>. Acesso em 10 jun 2016.

[13] EUCLIDES. *Os Elementos: Versão Latina de Frederico Commandino; dos seis primeiros livros*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1855.

[14] FRAZÃO, Dilva. *Leonardo Fibonacci.* In: eBiografia. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/>, acesso em: 07 set 2016.

[15] FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

[16] GDF, Governo do Distrito Federal. *Manual da Secretaria Escolar.* Brasília, 2010.

[17] HEFEZ, Abramo. *Aritmética.* Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[18] LA TAYLLE, Yves de; DEMO, Pedro; HOFFMANN, Jussara. *Grandes pensadores em educação: O desafio da aprendizagem, da formação moral e da avaliação.* Porto Alegre: Meditação, 2010.

[19] LA TAYLLE, Yves de; OLIVEIRA, Marta Kohl de; DANTAS, Heloysa. *Piaget, Vyotsky, Wallon: Teorias psicogenéticas em discussão.* São Paulo: Summus, 1992.

[20] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica.* Vol. 2. São Paulo: Harbra, 1994.

[21] LIMA, Elon Lages de. *Matemática e ensino.* Rio de janeiro: SBM, 2007.

[22] MEDINA, Sônia Garcia Pucci. *Incongruências: uma nova forma de ensinar no século XXI.* Vinhedo: Horizonte, 2007.

[23] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta.* Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[24] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Tópicos de História da Matemática.* Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2012.