



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

FELIPE HENRIQUE SILVA

SIMETRIAS E GRAFOS: UMA ABORDAGEM INSPIRADA
NO STOMACHION DE ARQUIMEDES E NOS POLIOMINÓS

CAMPINAS

2017

FELIPE HENRIQUE SILVA

**SIMETRIAS E GRAFOS: UMA ABORDAGEM INSPIRADA
NO STOMACHION DE ARQUIMEDES E NOS POLIOMINÓS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Felipe Henrique Silva, e orientada pela profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa.

CAMPINAS

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38s Silva, Felipe Henrique, 1992-
Simetrias e grafos : uma abordagem inspirada no Stomachion de Arquimedes e nos poliomínos / Felipe Henrique Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Sueli Irene Rodrigues Costa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Poliomínos. 2. Teoria dos grafos. 3. Isometria (Matemática). 4. Geometria discreta. 5. Matemática - Estudo e ensino. 6. Pick, Teorema de. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues, 1949-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Symmetries and graphs : an approach inspired by the Arquimedes' Stomachion and in polyominoes

Palavras-chave em inglês:

Polyominoes

Graph theory

Isometrics (Mathematics)

Discrete geometry

Mathematics - Study and teaching

Pick's theorem

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Sueli Irene Rodrigues Costa [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Rogério Monteiro de Siqueira

Data de defesa: 28-09-2017

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado profissional defendida em 28 de setembro de 2017
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). ROGÉRIO MONTEIRO DE SIQUEIRA

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Dedico a todos os professores e professoras do ensino básico, que lutam diariamente em prol da melhora educacional deste país.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Sandra Ramos de Assis Silva e ao meu pai Valdir Aparecido da Silva, pelo apoio nos momentos alegres e difíceis. Por vezes, eles renunciaram desejos pessoais para que meu irmão, Leonardo Henrique Silva, e eu realizássemos sonhos e alcançássemos conquistas. Minha eterna gratidão e carinho por todo incentivo e ajuda.

À minha companheira Ana Clara Freire, pela parceria e paciência em meio as minhas múltiplas tarefas. Por vezes, ela abnegou de momentos de lazer para que eu pudesse concluir este trabalho. Além disso, fez contribuições fundamentais para que o texto desta dissertação ficasse o melhor possível. Agradeço àquela que sempre me incentivou desde a graduação e é responsável por me fazer sorrir e sonhar.

Aos amigos Douglas Daniel e Bruno Fortunato Lopes, pelas contribuições diretas na realização deste trabalho, sem as quais minhas tarefas se tornariam ainda mais difíceis.

Aos meus familiares e amigos(as) que, de alguma forma, contribuíram para minha formação pessoal, acadêmica e política.

Às minhas professoras e professores dos Ensinos Fundamental e Médio que dedicaram-se para meu crescimento pessoal, ainda que não tivessem as melhores condições estruturais e reconhecimento profissional.

Aos meus(minhas) alunos(as) e ex-alunos(as), por aceitarem meu convite diário a conhecerem os encantos e a beleza da Matemática.

À Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa, pela orientação e muitas sugestões para melhoria deste trabalho. Agradeço por nossas reuniões em que sempre fui instigado e desafiado a aprimorar minha pesquisa.

À Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues e ao Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira, por terem aceitado participar da banca examinadora e pelas importantes sugestões para melhora deste trabalho.

Aos professores e professoras do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) que trabalham pela continuidade e sucesso desse programa de Mestrado (PROFMAT).

Aos funcionários do IMECC que dedicam-se incansavelmente para o bom funcionamento desse instituto. Agradeço pela prontidão e contribuições, desde os tempos da graduação.

À Universidade Estadual de Campinas, com a CAPES, que me propiciaram condições estruturais e financeira para realização desta dissertação.

Resumo

Esta dissertação visa produzir um texto que sirva de motivação para o estudo de geometria discreta, tanto para professores do ensino médio quanto para estudantes de licenciatura em Matemática. A partir de um levantamento bibliográfico, foram selecionados alguns problemas que inspiraram o desenvolvimento dessa subárea da matemática. Em meio à narrativa de episódios históricos, a uma introdução ao estudo de transformações geométricas do plano e de grafos e à retomada de alguns legados de Arquimedes, são destacados problemas que parecem apenas um simples enigma ou um quebra-cabeça, mas podem suscitar resultados relevantes em aplicações para diversas áreas. Nesse sentido, os principais problemas abordados neste trabalho estão relacionados ao Stomachion de Arquimedes e aos poliomínos. São também sugeridas algumas atividades pedagógicas em geometria discreta que incluem o uso de recursos computacionais como ferramenta de apoio.

Palavras-chave: Grafos e isometrias do plano; Stomachion de Arquimedes; Teorema de Pick; Poliomínos; Ensino de Matemática.

Abstract

The aim of this dissertation is to produce a text that serves as a motivation for the study of discrete geometry for both high school teachers and undergraduate students (licentiate) in Mathematics. From a bibliographic survey, some problems that inspired the development of this subarea of mathematics were selected. In the midst of the narrative of historical episodes, an introduction to the study of geometric transformations of the plane and graphs and the resumption of some Archimedes' legacies, problems that seem only a simple riddle or a puzzle are highlighted. However, they can raise similar results whose applications are relevant to several areas. In this regard, the main issues of this dissertation are related to the Archimedes' Stomachion and to the polyominoes. Some pedagogical activities in discrete geometry are also suggested, which include the use of computational resources as a support tool.

Keywords: Graphs and isometries of the plane; Arquimedes' Stomachion; Pick's theorem; Polyominoes; Mathematics Teaching.

Sumário

Introdução.....	12
1 Simetrias e Grafos	14
1.1 – Breve histórico da teoria dos grafos.....	14
1.2 – Noções básicas	16
1.3 – Problema das Pontes de Königsberg	19
1.4 – Grafos Hamiltonianos	22
1.5 – Simetrias.....	24
1.6 – Transformações geométricas	26
1.6.1 – Simetrias do quadrado	32
1.6.2 – Simetrias do retângulo.....	33
2 Arquimedes e o Stomachion	34
2.1 – Um breve passeio pela história de Arquimedes.....	34
2.2 – Alguns legados arquimedianos	36
2.2.1 – Área do círculo	36
2.2.2 – O método.....	37
2.2.3 – Proporção entre o cilindro e a esfera.....	39
2.3 – O Stomachion	39
2.3.1 – O Códex C.....	40
2.3.2 – Juntando as peças.....	41
2.4 – Calculando áreas.....	46
2.4.1 – Cálculo de área por determinantes	47
2.4.2 – O Teorema de Pick.....	50
2.4.3 – Área das peças do Stomachion	51
3 Recursos didáticos.....	55
3.1 – Projeto Matemática Multimídia (Coleção M ³).....	55
3.1.1 – Vídeo: “Um caminho para combater a dengue”.....	56

3.1.2 – Experimento “Espelhos e simetrias”	57
3.2 – Poliomínos	59
3.2.1 – Explorando os poliomínos	61
3.3 – Ladrilhando retângulos com poliomínos	62
3.4 – Poliomínos associados à Geometria do Táxi	64
3.4.1 – A conjectura de Golomb-Welch	66
Considerações finais	69
Referências	71

Introdução

Ao longo da história, muitos ramos da Matemática foram motivados a partir de problemas fundamentais de cálculo, da observação da natureza ou, ainda, do estudo de estruturas abstratas. No entanto, outras áreas surgiram de forma despreziosa por meio de enigmas ou desafios projetados como passatempos. Apesar da aparente trivialidade desses quebra-cabeças, estes capturaram o interesse de matemáticos(as), o que gerou o desenvolvimento de uma infinidade de novos conhecimentos. Esta dissertação investiga alguns episódios históricos que ilustram essa situação.

No Capítulo 1, abordamos alguns conceitos preliminares aos capítulos posteriores. Inicialmente, exploramos algumas noções básicas sobre a teoria dos grafos e alguns problemas que motivaram seu desenvolvimento. Entre eles, destacamos as pontes localizadas na cidade de Königsberg, construídas para interligar as margens do rio Pregel com a ilha Kneiphof, e o curioso problema que despertou a atenção de Leonhard Euler, um dos mais importantes matemáticos de todos os tempos.

Adiante, apresentamos alguns resultados importantes no estudo das isometrias do plano, transformações geométricas que preservam distâncias. Também abordamos as simetrias do quadrado e do retângulo.

No Capítulo 2, resgatamos um breve histórico de Arquimedes e abordamos alguns dos seus mais importantes legados, entre eles *O método*. Depois, narramos o processo de restauração do *Códex Arquimedes*, tecnicamente conhecido como *Códex C*, obra arquimediana que ficou perdida durante séculos. Esta ressurgiu no século XX, desaparecendo novamente e reaparecendo num leilão realizado em Nova Iorque, em 1998, e contém valiosos tratados, que incluem o *Stomachion*, sendo este um quebra-cabeça que ganhou maior destaque após uma pergunta feita por Arquimedes: “De quantas maneiras pode-se formar um quadrado utilizando as catorze peças do Stomachion?”.

Essa questão despertou, no século XXI, a atenção de alguns pesquisadores, que acreditavam estar diante do primeiro problema de combinatória que se tem registro na história. A partir disso, apresentamos uma abordagem usando grafos feita para encontrar a solução da questão de Arquimedes. Como um problema interessante a ser proposto aos estudantes, exibimos o cálculo da área das peças do Stomachion de duas formas distintas: a primeira, utilizando o teorema de Pick e a segunda, os determinantes, métodos que não aparecem usualmente em livros didáticos.

No Capítulo 3, apresentamos algumas sugestões de atividades em geometria discreta que incluem o uso de recursos computacionais. Inicialmente, selecionamos dois objetos educacionais da *Coleção M³*, um projeto que produziu centenas de recursos em diversas mídias visando auxiliar no ensino da Matemática.

Na sequência, exploramos os *poliominós*, figuras planas formadas por quadrados iguais e justapostos. Estes foram “criados” por Solomon W. Golomb e amplamente divulgados por Martin Gardner, matemáticos notáveis por suas contribuições não-convencionais e proposição/divulgação de problemas. Por fim, exibimos alguns problemas em aberto associados aos poliominós, entre eles a famosa conjectura de Golomb-Welch, que se relaciona com a *geometria do táxi* e com a área de comunicações.

Como considerações finais, destacamos que temas, como os abordados neste trabalho, podem contribuir para uma nova experiência aos estudantes do ensino básico, colaborando tanto para o ensino-aprendizagem da Matemática quanto para a percepção de aspectos do desenvolvimento científico.

Capítulo 1

Simetrias e Grafos

“Portanto, em certo sentido, a matemática esteve mais avançada para aqueles que se distinguiram pela intuição do que por provas.”

Felix Klein

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos preliminares aos capítulos posteriores. Primeiramente, fazemos um breve histórico sobre a teoria dos grafos. Em seguida, exploramos algumas noções básicas e problemas que motivaram o desenvolvimento desta teoria, tais como as pontes de Königsberg e o problema do caixeiro viajante. Junto a isso, demonstramos alguns resultados que auxiliam na resolução desses problemas. Por fim, exibimos algumas definições e teoremas importantes sobre as simetrias. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [2], [3], [4], [5], [10], [12], [19], [24] e [25].

1.1 – Breve histórico da teoria dos grafos

A teoria dos grafos é uma área que começou a ser desenvolvida no século XVIII e, desde então, passou a ter extensa utilização na matemática aplicada, pois constitui uma ferramenta importante na modelagem de diversos problemas em diferentes ramos da ciência, tais como na Química, na Biologia e na Engenharia Elétrica.

O primeiro registro sobre os grafos aconteceu com o problema das Pontes de Königsberg, resolvido por Leonhard Euler, em 1736, cuja solução será apresentada na seção 1.3. Euler (1707 – 1783) foi um matemático suíço reconhecido por suas inúmeras contribuições em diferentes áreas da Matemática. Ao longo de sua vida científica, ele produziu mais de 900 tratados, livros e artigos sobre Álgebra,

Geometria, Teoria dos Números, Topologia, Cálculo, Equações Diferenciais, entre outros (ver seção 12.5, em [11]).



Figura 1.1 – Leonhard Euler (1707 – 1783): pintura de Jakob E. Handmann, em 1753

Outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento dos grafos foi o britânico Arthur Cayley (1821 – 1895). Ele também é conhecido pela quantidade de livros e artigos que produziu durante sua carreira acadêmica. Além disso, tinha uma formação heterogênea, tendo estudado direito e alimentado grande apreço por romances e pinturas.

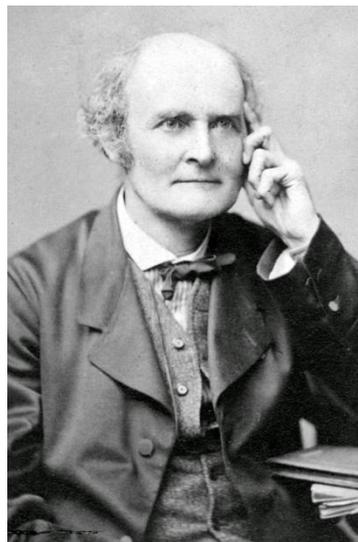


Figura 1.2 – Arthur Cayley (1821 – 1895)

Na teoria dos grafos, Cayley destacou-se por estudar uma classe particular dos grafos, as chamadas *árvores*. No artigo “*On the Analytical Forms Called Trees*”,

publicado em 1881, no periódico *American Journal of Mathematics* (vol.4, n.1, p.266–268), ele apresenta resultados sobre o número de árvores com N vértices. Isso teve diversas implicações na Química teórica, tais como no estudo de isômeros.

Diversos outros matemáticos também dedicaram-se ao estudo dos grafos. Entre eles, notamos: Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865), que desenvolveu um jogo utilizando os vértices e arestas de um dodecaedro, o qual será abordado na seção 1.4; o matemático húngaro Dénes König (1884 – 1944), que escreveu o primeiro livro texto sobre teoria dos grafos (ver [4]); Francis Guthrie (1831 – 1899) e August De Morgan (1806 – 1871), que investigaram o conhecido *Teorema das Quatro Cores*.

1.2 – Noções básicas

Um grafo $G (V, A)$ é um conjunto (finito e não-vazio) V de elementos chamados *vértices*, um conjunto A de elementos chamados *arestas*, e uma relação de *incidência*, que associa a cada aresta um ou dois vértices chamados de *extremidades*.

Consideramos neste trabalho grafos *planares* não-orientados, em que cada aresta é um par não-ordenado $\{i, j\}$, onde i e j são suas extremidades. Dizemos que um grafo é *planar* se pudermos desenhá-lo no plano de modo que suas arestas não se cruzem. Observamos, ainda, que i e j não são necessariamente distintos. Se $i = j$, dizemos que a aresta $\{i, i\}$ é um *laço*.

Caso nenhuma aresta incida em um determinado vértice, dizemos que este é *isolado*. Além disso, se mais de uma aresta possuir as mesmas extremidades, chamaremos o grafo de *multigrafo*. Um grafo é dito *conexo* se qualquer par de vértices estiver conectado por uma sequência de aresta.

Exemplo 1.1. Na figura abaixo, o grafo A possui quatro vértices e cinco arestas. O grafo B pode ser chamado de multigrafo, pois os vértices 1 e 3 possuem duas arestas que os unem. Estas duas arestas podem ser denotadas por $\{1,3\}$ ou, para diferenciá-las, nomeamos cada uma delas por uma letra minúscula. O grafo C tem três vértices e quatro arestas, sendo a aresta $\{1,1\}$ um laço.

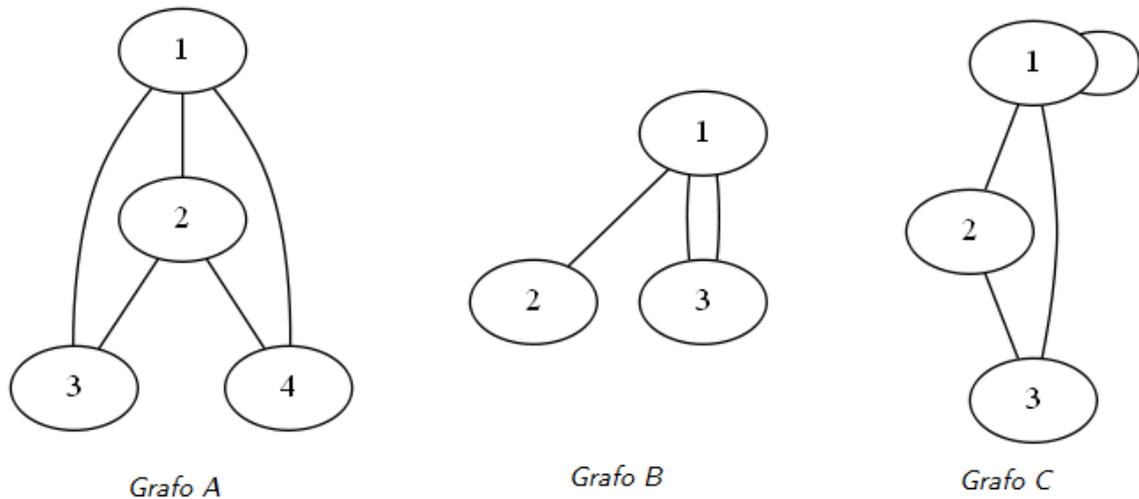


Figura 1.3 – Exemplos de grafos

A seguir introduzimos algumas definições e provas de resultados que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.2. O *grau de um vértice* é a quantidade de arestas incidentes no vértice, sendo que cada laço conta como duas arestas. Denotamos o menor e o maior grau presente em um grafo por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, respectivamente.

Exemplo 1.3. Na figura (1.3), o grau do vértice 1 do grafo A é igual a 3. No grafo B, temos que $\delta(G) = 1$, que é o grau do vértice 2, e $\Delta(G) = 3$, que é o grau do vértice 1. No grafo C, o grau do vértice 1 é igual a 4.

Teorema 1.4 A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas.

Demonstração: Provaremos o teorema por indução sobre o número de arestas do grafo. Seja G um grafo qualquer com n arestas. Se $n = 0$, então o grau de cada vértice será igual a zero e, conseqüentemente, a soma dos graus dos vértices também será igual a zero, ou seja, $2n = 2 \cdot 0 = 0$.

Hipótese de indução: Suponhamos que $n = k$ e a soma dos graus dos vértices de G é igual a $2k$. Adicionando mais uma aresta em G , obtemos um grafo G' com $k + 1$

arestas. Observamos que a inclusão desta aresta fará com que a soma dos graus dos vértices de G seja incrementada em 2, pois temos duas possibilidades:

- (i) A aresta adicionada ser um laço: Nesse caso, o grau de um dos vértices aumentará em 2 unidades, pois o laço conta como duas arestas;
- (ii) A aresta adicionada não ser um laço: Nesse caso, será incrementado 1 unidade no grau de cada vértice onde tal aresta incidir.

Como, pela hipótese de indução, a soma dos graus de G era igual $2k$ e o grafo G' terá duas unidades a mais que G , concluímos que a soma dos graus dos vértices de G' é da forma $2k + 2 = 2(k + 1)$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 1.5. O número de vértices de grau ímpar de um grafo é par.

Demonstração: Consideremos o grafo $G (V, A)$. Denotamos por d_i o grau do vértice i . Pelo Teorema (1.4), segue que:

$$2|A| = \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i = \sum_{i \in \mathbb{N} | d_i \text{ é par}} d_i + \sum_{i \in \mathbb{N} | d_i \text{ é ímpar}} d_i$$

Separamos o somatório em duas parcelas, a primeira contendo os graus pares e a segunda os ímpares. Então, a primeira parcela é par, mas a soma das duas parcelas também é par, pois o lado esquerdo da igualdade mostra o dobro da cardinalidade de A . Daí segue que a segunda parcela também é par.

Por fim, observamos que, para termos uma soma de parcelas ímpares resultando em número par, devemos ter uma quantidade par de parcelas, o que conclui a demonstração. ■

Definição 1.6. Um *passeio* entre os vértices v_0 e v_k de um grafo é uma sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k \rangle$, onde a_i é uma aresta tal que $a_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. O vértice v_0 é o início do passeio e o vértice v_k é o seu término.

Podemos observar que denotar o passeio pela sequência de vértices geraria uma imprecisão no caso de multigrafos.

Definição 1.7. Um *caminho* é um passeio sem arestas repetidas e um *ciclo* é um caminho fechado, isto é, um passeio em que apenas os vértices inicial e final coincidem ($v_0 = v_k$).

Exemplo 1.8. Na figura (1.3), entre os vértices 1 e 4 do grafo A temos o seguinte passeio: $\langle \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\} \rangle$. Entre esses mesmos vértices existem os caminhos $\langle \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \rangle$ e $\langle \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \rangle$. No grafo C, o caminho $\langle \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\} \rangle$ é um ciclo, pois o vértice 1 é o início e o fim do passeio.

1.3 – Problema das Pontes de Königsberg

A figura abaixo foi retirada do livro “*Topographia Prussiae et Pomerelliae*” escrito no século XVII (ver [4]). Ela apresenta o mapa da antiga cidade de Königsberg, território da Prússia até 1945, que é cortada pelo rio Pregel. Atualmente, esta cidade pertence à Rússia e é chamada de Kaliningrado, enquanto o rio foi renomeado para Prególia.



Figura 1.4 – Cidade de Königsberg, no século XVII (extraída de [4])

Como vemos na imagem, o rio Pregel rodeia uma ilha (chamada Kneiphof) e, na direita do mapa, ele separa-se em dois ramos. Para permitir que os moradores circulassem entre a ilha e as margens do rio, foram construídas sete pontes. A imagem abaixo destaca o caminho do rio e a localização dessas pontes.

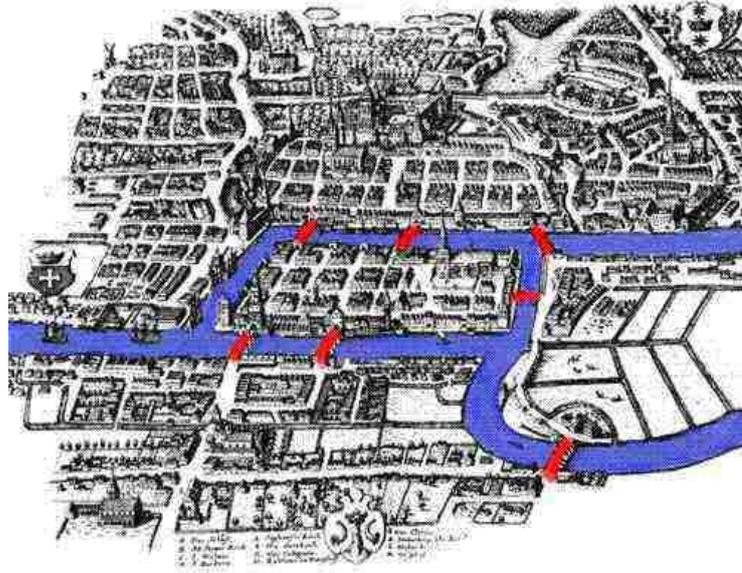


Figura 1.5 – Destaque: Rio Pregel, em Königsberg

A partir disso, as pessoas passaram a entreter-se buscando uma rota ao redor da cidade que cruzaria cada uma das sete pontes apenas uma vez. Diante de diversas tentativas frustradas, passou-se a acreditar que seria impossível existir um caminho que cumprisse tais condições. Entretanto, somente em 1736, o problema foi tratado matematicamente por Leonhard Euler e ficou comprovada a impossibilidade de encontrar tal rota.

Em artigo denominado “*Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*” [Solução de um problema relacionado à geometria da posição], Euler produziu aquele que ficou conhecido como o primeiro trabalho sobre teoria dos grafos (ver capítulo 1, em [4], e seção 12.8, em [11]). Ele propôs que as margens e a ilha seriam representadas por vértices e as pontes seriam as arestas. A solução consiste em, partindo de qualquer vértice, tentar atravessar todas as arestas uma única vez e retornar ao vértice de origem. Em termos de grafos, é preciso achar um caminho fechado entre os vértices.

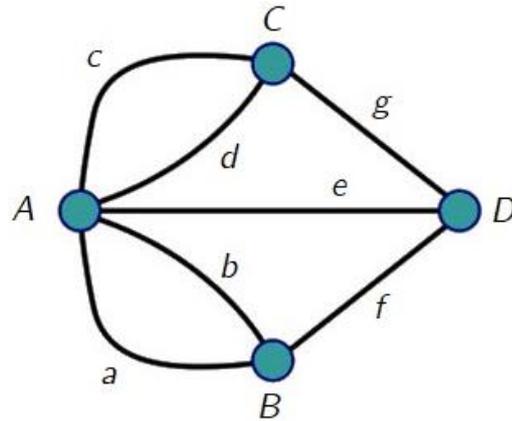


Figura 1.6 – Grafo proposto por Leonhard Euler, em 1736

Observando o grafo, podemos verificar que o conjunto de vértices é dado por $V = \{A, B, C, D\}$ e o conjunto de arestas por $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Daí notamos que este grafo é um multigrafo conexo e não-orientado. Euler, ao propor solução para este problema, preocupou-se também em descobrir condições para que grafos desse tipo admitam um caminho fechado que passe por todas suas arestas uma única vez. Todo grafo que possui tal caminho é dito *grafo euleriano*. O teorema a seguir, enunciado por Euler, define uma condição para que um grafo seja euleriano.

Teorema 1.9. Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, os graus de todos os vértices são pares.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos, inicialmente, que o grafo G seja euleriano. Então, existe um caminho fechado para tal grafo, isto é, partindo de qualquer vértice, podemos cruzar todas as arestas uma única vez e retornar ao vértice de origem. Ao passarmos por cada vértice, utilizamos duas arestas, uma para chegar outra para sair, e deste modo o grau do vértice é par.

(\Leftarrow) Suponhamos que todos os vértices de G tenham grau par. Tomemos um vértice qualquer de G , digamos o vértice i , e vamos percorrer o grafo a partir dele, sem repetir arestas, até alcançarmos um vértice tal que todas as arestas incidentes nele já tenham sido percorridas. Como todos os vértices tem grau par, este vértice tem que ser o vértice i . Logo, temos duas opções:

(i) Se o caminho \mathcal{C} assim construído contiver todas as arestas do grafo, a demonstração está concluída.

(ii) Senão, o grafo possui alguma aresta, digamos a aresta e , que não pertence ao caminho. Como G é conexo, existe um caminho \mathcal{C}' entre algum dos vértices do caminho \mathcal{C} , digamos o vértice j , e alguma das extremidade da aresta e , digamos o vértice k . Sem perda de generalidades, este novo caminho não contém arestas de \mathcal{C} . Sendo assim, vamos percorrer o grafo a partir de j utilizando o caminho \mathcal{C}' até k , em seguida passamos pela aresta e , e depois continuamos livremente sem, no entanto, repetir arestas já percorridas ou pertencentes a \mathcal{C} . Como \mathcal{C} é um caminho fechado, mesmo “retirando” as arestas de \mathcal{C} , os vértices de G continuam tendo grau par. Portanto, esse novo caminho \mathcal{C}'' só poderá terminar no vértice j . Por fim, observamos que podemos combinar esses dois caminhos \mathcal{C} e \mathcal{C}'' a fim de obtermos um caminho único que contenha todas as arestas de G . Para tanto, basta percorrermos o caminho \mathcal{C} começando de j e, quando retornarmos em j , fazemos o caminho \mathcal{C}'' , o que conclui a demonstração. ■

Esta última etapa da demonstração não apenas prova o teorema (1.9), como nos fornece um procedimento para encontrar um caminho euleriano. Além disso, podemos concluir que o grafo das pontes de Königsberg (mostrado na figura 1.6) não é euleriano, pois todos os seus vértices possuem grau ímpar.

1.4 – Grafos Hamiltonianos

Um grafo G é dito ser *hamiltoniano* se existe um ciclo em G (isto é, um passeio em que apenas os vértices inicial e final coincidam) que contenha todos os seus vértices. Este ciclo é chamado de *ciclo hamiltoniano*. Dessa forma, um grafo é hamiltoniano se ele contiver um ciclo hamiltoniano.

O problema que motivou essa definição é conhecido como o “Caixeiro viajante” e teve origem no quebra-cabeça “The Icosian Game” criado por William Rowan Hamilton, em 1857 (ver exercício 13.24, em [11]). Sir Hamilton nasceu na

cidade de Dublin, na Irlanda, e teve uma carreira brilhante como cientista, tendo produzido importantes legados tanto para Matemática quanto para a Física.

O quebra-cabeça é baseado num dodecaedro regular, onde cada um dos seus vinte vértices representa uma cidade e as arestas são estradas que unem tais cidades. O objetivo do jogo é fazer com que o caixeiro consiga viajar entre todas as cidades passando uma única vez por cada vértice, com a restrição de que só é possível viajar de uma cidade a outra se existir uma aresta entre os vértices correspondentes. Em termos de grafos, é preciso achar um ciclo hamiltoniano entre os vértices desse dodecaedro.

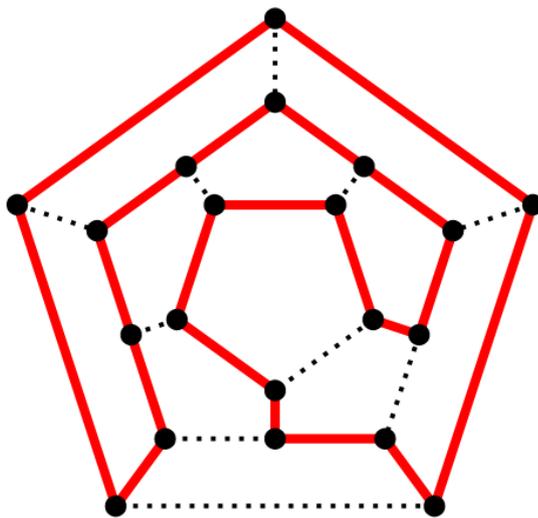


Figura 1.7 – Problema do caixeiro viajante: uma possível solução

Apesar deste problema ser semelhante aos grafos eulerianos, encontrar um ciclo hamiltoniano é uma tarefa muito mais complexa, pois não existem condições necessárias ou um método consistente para determinar se um grafo é hamiltoniano. Existem teoremas e resultados específicos que definem condições suficientes, mas o problema mais geral ainda está em aberto. Alguns exemplos de teoremas que apresentam condições suficientes para determinar um ciclo hamiltoniano são: Ore, Dirac, Chvátal & Erdős e Tutte (ver [4]).

Exemplo 1.10. Na figura abaixo, o grafo (I) é hamiltoniano, mas não é euleriano, pois possui vértices com grau ímpar. O grafo (II) é euleriano, mas não é hamiltoniano, enquanto o grafo (III) é euleriano e hamiltoniano. Estas figuras podem ser exploradas em exercícios para a distinção entre os conceitos de euleriano e hamiltoniano.

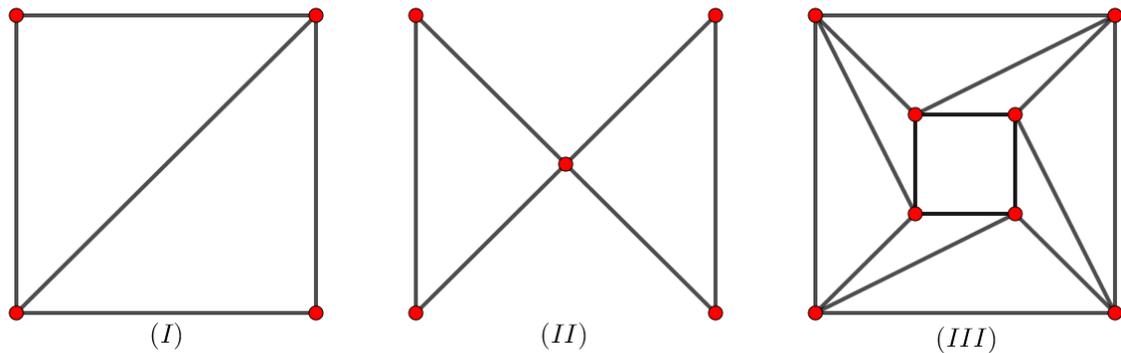


Figura 1.8 – Exemplo 1.10

1.5 – Simetrias

As simetrias são transformações geométricas e possuem uma presença marcante na natureza. A humanidade desenvolveu diversos padrões estéticos em que elas foram utilizadas como um elemento referencial capaz de ajudar na busca de uma ordem para as diferentes formas. Podemos verificar isso desde as pinturas rupestres do sítio de El Buey, na Bolívia. Ou ainda, em cerâmicas chinesas do período Neolítico, produzidas cerca de 3000 a.C.

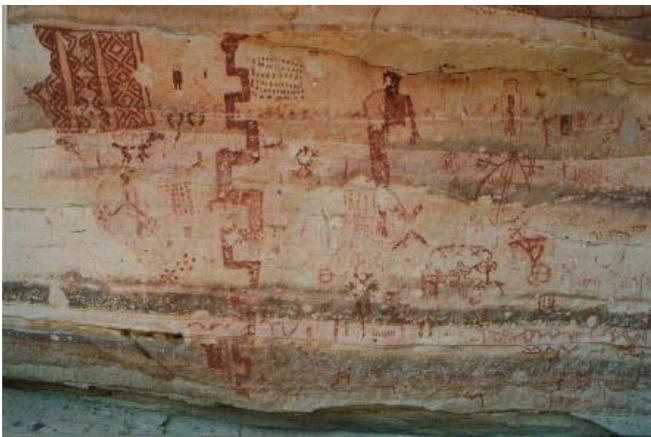


Figura 1.9 – Pinturas rupestre, na Bolívia (à esquerda), e cerâmica chinesa (à direita)

A arquitetura grega, como o templo *Parthenon*; a cerâmica marajoara, feita por indígenas da Ilha de Marajó; as pinturas de Leonardo da Vinci, tais como *O homem vitruviano*; e as obras de Maurits Cornelis Escher, famosas por seus belíssimos padrões geométricos, são outros exemplos de construções humanas que utilizaram simetrias como ferramenta estética.

A origem do estudo das simetrias está intimamente ligada a estética e filosofia grega, onde a palavra simetria pode significar proporção, harmonia, equilíbrio e perfeição. Entretanto, a formalização matemática para tais transformações geométricas ocorreu apenas no século XIX, com o matemático alemão Felix Christian Klein (1849 – 1925). Ele tornou-se professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlanger com apenas vinte e três anos e rapidamente demonstrou seu talento e a relevância de sua pesquisa (ver seção 14.8, em [11]).



Figura 1.10 – Felix Klein (1849 – 1925)

Nessa época, havia um costume de novos membros da universidade realizarem uma palestra de apresentação mostrando para a comunidade acadêmica seus interesses de pesquisa. Klein surpreendeu seus novos colegas e expressou sua visão pedagógica ideal para uma educação completa. Além disso, ele expôs um trabalho onde fez uma notável abordagem de *geometria* que serviu para classificar todas as geometrias existentes à época. Este trabalho ficou conhecido como *Programa*

Erlanger e a parte matemática foi escrita utilizando pesquisas sobre teoria dos grupos, realizadas em parceria com Sophus Lie (1842 – 1899).

1.6 – Transformações geométricas

Uma transformação geométrica no plano é uma função bijetora que estabelece uma relação entre pontos de um mesmo plano, ou planos distintos. De outra maneira, numa transformação T , para todo ponto P , existe um único ponto P' tal que $T(P) = P'$ e para cada ponto P' existe um único ponto P tal que $T(P) = P'$.

Exemplo 1.11. A identidade do plano no plano, definida por $I(P) = P$ para cada ponto P no plano, é uma transformação geométrica, pois é uma correspondência biunívoca. A função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$, é também uma transformação geométrica que leva cada vetor v num vetor de mesma direção e sentido, mas com módulo diferente.

A seguir, apresentamos algumas definições e resultados sobre as *isometrias*, transformações do plano no plano que preservam distância. A menos de menção em contrário, a noção de distância no plano que utilizaremos neste trabalho para apresentar isometrias é a distância euclidiana usual do plano (\mathbb{R}^2), isto é, para $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, temos que $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Definição 1.12. Seja T uma função tal que $T: \Pi \rightarrow \Pi'$. Dizemos que T é uma *isometria* se dados dois pontos P e Q pertencentes ao plano, tal que $T(P) = P'$ e $T(Q) = Q'$, então $d(P, Q) = d(P', Q')$, sendo $d(P, Q)$ a distância entre os pontos P e Q .

Proposição 1.13. Uma isometria é uma transformação geométrica.

Demonstração. Seja $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ uma isometria. Basta verificarmos que T é uma bijeção:

(i) T é injetiva: sejam P e Q pontos distintos do plano Π tais que $T(P) = P'$ e $T(Q) = Q'$. Sabemos que $d(P, Q) \neq 0$, pois $P \neq Q$. Como T é isometria, temos que $d(P, Q) = d(P', Q') \neq 0$. Daí segue que $P' \neq Q'$, o que implica em T ser injetiva.

(ii) T é sobrejetiva: para mostramos esta parte, assumiremos dois resultados cujas demonstrações são simples e estão feitas em [2] e [19]. São eles: toda isometria transforma retas em retas e uma isometria transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares. Com isso, tomamos um ponto arbitrário $P' \in \Pi'$ e vamos procurar um ponto $P \in \Pi$ tal que $T(P) = P'$.

Para isso, tomemos uma reta r pertencente ao plano Π . A imagem de r por T é uma reta $r' \in \Pi'$ do plano. Se $P' \in r'$, então existe um único ponto $P \in r$ tal que $T(P) = P'$, por definição de imagem. Caso contrário, traçamos uma reta s' por P' perpendicular a reta r' e seja Q' um ponto tal que $Q' = r' \cap s'$. Como $Q' \in r'$, existe $Q \in r$ tal que $T(Q) = Q'$. Seja s a reta perpendicular a r passando por Q . A imagem de s pela isometria T é perpendicular a r' e contém Q' . Logo, $T(s) = s'$. Como $P' \in s'$, existe $P \in s$ tal que $T(P) = P'$. ■

Observação 1.14. A inversa T^{-1} de uma isometria é também uma isometria. Além disso, se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são isometrias, então $T \circ S$ é isometria (ver [19]).

Quando dizemos que uma figura plana é *simétrica*, estamos considerando que existem isometrias do plano, além da identidade, que deixam essa figura inalterada enquanto permutam suas partes. As translações, as rotações ao redor da origem, as reflexões através de uma reta passando pela origem e as composições destas são exemplos de isometrias do plano.

Exemplo 1.15. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x + a, y + b)$. A transformação T é uma *translação* segundo o vetor (a, b) , como $a, b \neq 0$. Na forma matricial, tomando o vetor $\vec{v} = (x, y)$ na forma coluna, podemos escrevê-la como: $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Observamos de forma direta que a translação T é uma isometria. De fato: dados dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, temos que $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Como $T(P) = (x_1 + a, y_1 + b)$ e $T(Q) = (x_2 + a, y_2 + b)$, temos:

$$\begin{aligned} d(T(P), T(Q)) &= \sqrt{[(x_2 + a) - (x_1 + a)]^2 + [(y_2 + b) - (y_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P, Q) \end{aligned}$$

Exemplo 1.16. Seja $R_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $R_x(x, y) = (x, -y)$. A transformação R_x é uma *reflexão em torno do eixo X*. Esta transformação também é uma isometria e, na forma matricial, podemos escrevê-la como: $R_x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

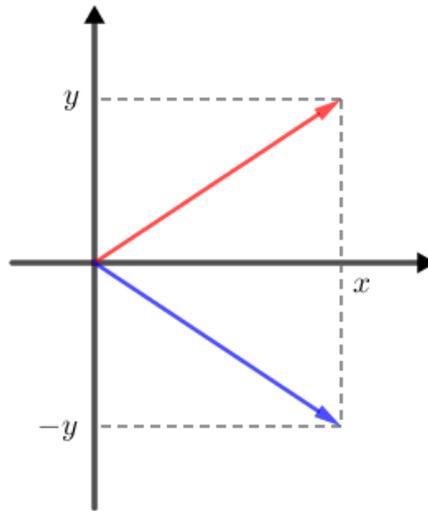


Figura 1.11 – Reflexão em torno do eixo X

Exemplo 1.17. Seja $R_o: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $R_o(x, y) = (-x, -y)$. A transformação R_o é uma reflexão na origem, que equivale a uma rotação de 180° . Na forma matricial, podemos escrevê-la como: $R_o \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

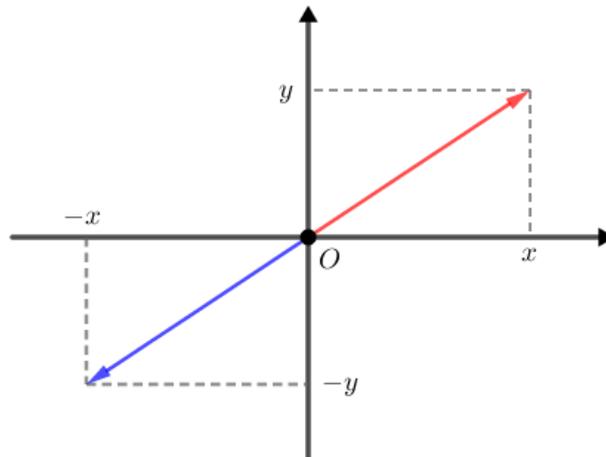


Figura 1.12 – Reflexão na origem O

Um resultado clássico da geometria euclidiana é que uma isometria do plano que deixa um ponto fixo ou é uma rotação ou uma reflexão por uma reta passando por este ponto. A seguir, apresentamos algumas definições e resultados que nos ajudam a caracterizar tais isometrias.

Definição 1.18. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* é uma função $T: V \rightarrow W$ que satisfaz as seguintes condições:

- (i) Dados $u, v \in V$, temos que $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
- (ii) Dados $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, temos que $T(kv) = kT(v)$.

Observação 1.19. Decorre dessa definição que uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W . Logo, se $T(0) \neq 0 \in W$, então T não é linear. Portanto, a translação, mostrada no exemplo (1.15), não é linear. Considerando vetores \vec{v} do plano na forma coluna e A uma matriz quadrada 2×2 , a transformação que leva \vec{v} em $A\vec{v}$ é linear e, como é conhecido, toda transformação linear pode ser escrita desta forma.

Seja Y uma isometria tal que $Y(0,0) = (a,b)$, com $a, b \neq 0$. Podemos compô-la com $T(x,y) = (x-a, y-b)$ e teremos que $\Psi = T \circ Y(0,0) = (0,0)$. Logo, a transformação Ψ fixa a origem. Portanto, Ψ é uma rotação ao redor da origem (denotada por $R_{O,\theta}$) ou uma reflexão pela origem por meio de uma reta r que passa pela origem e forma um ângulo α com o eixo X (denotada por R_r). As isometrias $R_{O,\theta}$ e R_r são transformações lineares e, a seguir, mostramos como descrevê-las matricialmente, considerando o vetor $\vec{v} = (x,y)$ na forma coluna. Vejamos:

- (i) A transformação $R_{O,\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma rotação de um ângulo θ ao redor da origem e pode ser descrita por: $R_{O,\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. De fato: dado um vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, podemos escrevê-lo assim: $\vec{v} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix}$, sendo $r = \|(x,y)\|$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{O,\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \text{sen } \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \cos \theta - r \text{sen } \alpha \text{sen } \theta \\ r \text{sen } \theta \cos \alpha + r \text{sen } \alpha \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \text{sen}(\alpha + \theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

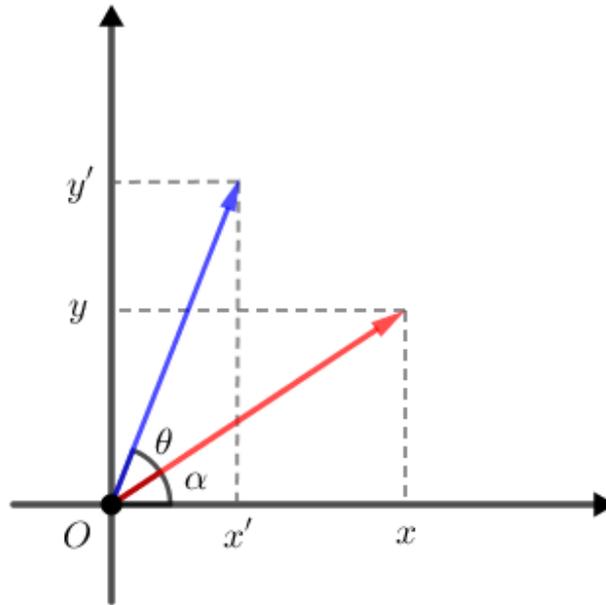


Figura 1.13 – Rotação de um ângulo θ , no sentido anti-horário

(ii) A transformação $R_{r,\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reflexão por meio de uma reta r que passa pela origem e forma um ângulo α com o eixo X e pode ser descrita por: $R_{r,\alpha} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em que $\theta = 2\alpha$. De fato, podemos descrever $R_{r,\alpha}$ como uma composta de três isometrias. Dado um vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, primeiramente rotacionamos \vec{v} e r um ângulo $-\alpha$ ao redor da origem ($R_{O,-\alpha}$), depois refletimos \vec{v} em relação ao eixo X (R_x) e, em seguida, rotacionamos novamente, com um ângulo α , ao redor da origem ($R_{O,\alpha}$). Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{O,\alpha} \cdot R_x \cdot R_{O,-\alpha} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

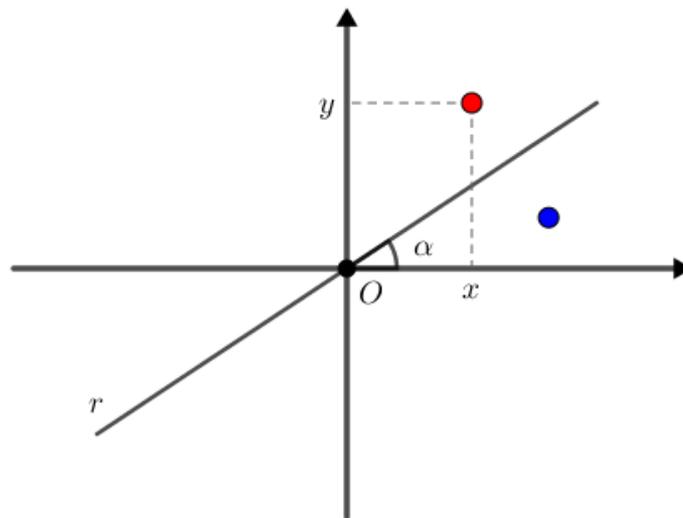


Figura 1.14 – Reflexão por uma reta r que passa pela origem

Com isso, caracterizamos as transformações geométricas do plano que preservam distância, pois observamos que qualquer isometria pode ser dada por uma composição das formas apresentadas acima com uma translação, apresentada no exemplo (1.15).

Exemplo 1.20. Vamos rotacionar o vetor $\vec{v} = (4,3)$, no sentido anti-horário, por um ângulo de 90° ao redor da origem.

$$\Rightarrow R_{O,90^\circ} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

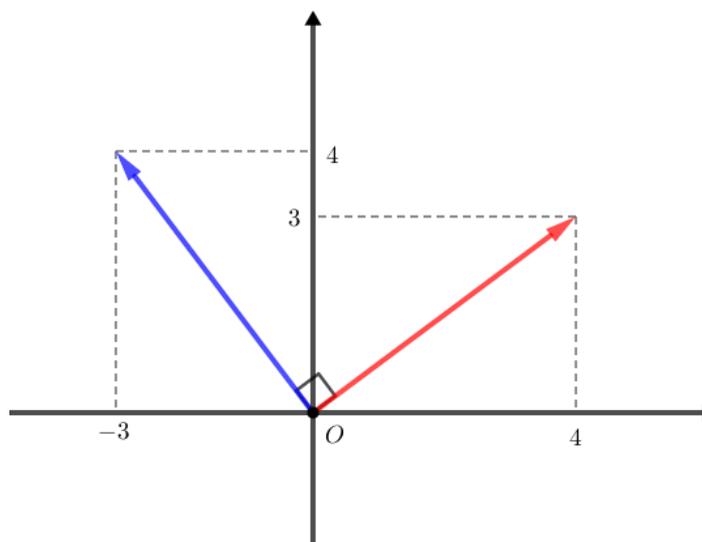


Figura 1.15 – Rotação, no sentido anti-horário, do vetor \vec{v} ao redor da origem

Exemplo 1.21. Vamos refletir um vetor $\vec{v} = (x, y)$ pela reta $r: y = 2x$ que passa pela origem. Primeiramente, sendo α o ângulo da reta de reflexão, vemos que $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Como $\theta = 2\alpha$, segue que: $\sin \theta = \sin 2\alpha = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$ e $\cos \theta = \cos 2\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{-3}{5}$. Logo, temos que:

$$\Rightarrow R_r \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} \\ \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} \end{bmatrix}$$

Em particular, para $\vec{v} = (1, 4)$, temos:

$$\Rightarrow R_r \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3 \cdot 1}{5} + \frac{4 \cdot 4}{5} \\ \frac{4 \cdot 1}{5} + \frac{3 \cdot 4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

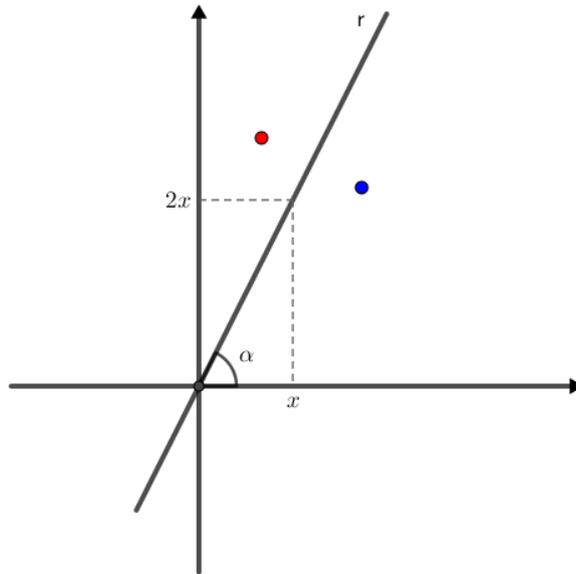


Figura 1.16 – Reflexão pela uma reta $r: y = 2x$

1.6.1 – Simetrias do quadrado

O quadrado possui oito operações de simetria, sendo quatro reflexões (em relação a retas distintas) e quatro rotações (em relação ao ponto central O). As rotações são realizadas no sentido horário com ângulos de 90° , 180° , 270° e 360° , enquanto as reflexões são realizadas em relação aos eixos \overline{AC} e \overline{BD} e as diagonais $\overline{13}$ e

$\overline{24}$. Ressaltamos que nestas transformações geométricas toda a região quadrada é levada nela mesma. Essas oito simetrias do quadrado formam um grupo denominado *grupo diedral* D_4 .

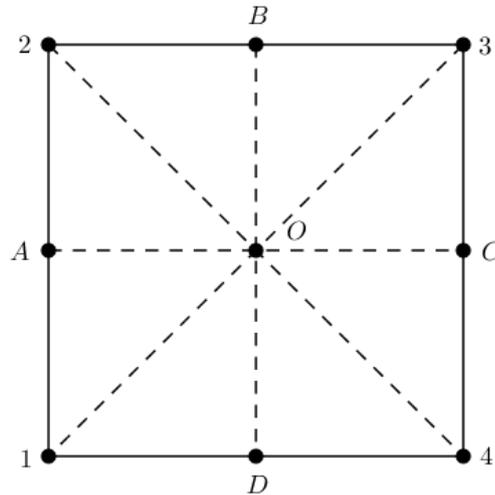


Figura 1.17 – Simetrias do quadrado

1.6.2 – Simetrias do retângulo

O retângulo possui quatro operações de simetria, sendo duas reflexões (em relação a retas distintas) e duas rotações (em relação ao ponto central O). As rotações são realizadas no sentido horário com ângulos de 180° e 360° , enquanto as reflexões são realizadas em relação aos eixos \overline{AC} e \overline{BD} . Assim como no quadrado, essas transformações geométricas levam toda a região retangular nela mesma. Essas quatro simetrias do retângulo formam um grupo denominado *grupo diedral* D_2 ou grupo V_4 , conhecido como *Klein's Vierergruppe*.

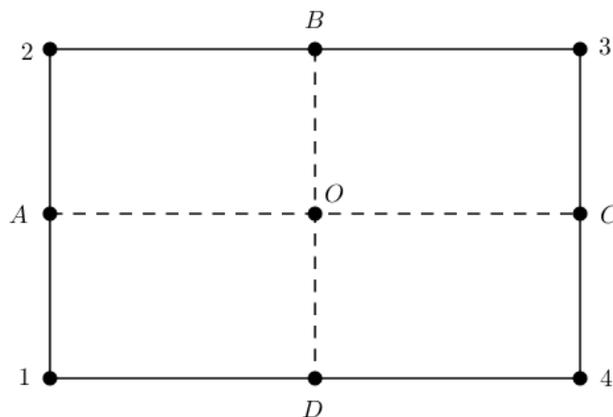


Figura 1.18 – Simetrias do retângulo

Capítulo 2

Arquimedes e o *Stomachion*

“... o que parece ser o primeiro registro de resultados em combinatória na
Antiguidade.”

Reviel Netz

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, um breve histórico da vida e obra de Arquimedes, destacando algumas de suas contribuições para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Adiante, incluímos uma breve narração sobre a restauração do Códex C, obra arquimediana que contém diversos textos relevantes e curiosos, entre eles o *Stomachion*. Este quebra-cabeça, composto por catorze peças, movimentou a comunidade matemática, no século XXI, em busca de uma solução. Por fim, apresentamos o cálculo da área das peças do *Stomachion*, utilizando o teorema de Pick e os determinantes. Esses resultados simples e interessantes não aparecem usualmente nos textos de ensino em geral. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [8], [9], [11], [13], [17], [18] e [23].

2.1 – Um breve passeio pela história de Arquimedes

Examinando as obras dos mais notáveis matemáticos da história, frequentemente nos deparamos com algum legado arquimediano. Galileu, por exemplo, produziu suas obras baseando-se diretamente nos conhecimentos de Arquimedes. Podemos ver isso em suas obras sobre os centros de gravidade, lei do equilíbrio ou, ainda, na aproximação de curvas. Também notamos as influências arquimedianas analisando o desenvolvimento do cálculo feito por Newton, os princípios de Bonaventura Cavalieri, os trabalhos de física elaborados por Kepler, entre outros.



Figura 2.1 – Ilustração de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.)

Arquimedes, natural da cidade grega de Siracusa, teria nascido por volta de 287 a.C. Ele era filho de um astrônomo chamado Fídias e neto de um artesão, o que talvez explique o motivo pelo qual em seus trabalhos arte, ciência, beleza e ordem, todas aparecem juntas em perfeita harmonia. Ele estudou em Alexandria, onde aprendeu a Matemática da época e fez alguns amigos, com os quais se correspondia, após voltar para Siracusa para servir ao rei Hierão. Entre eles, estava Eratóstenes.

Existem muitas histórias pitorescas que possivelmente envolveram Arquimedes, tais como: a criação de engenhos magníficos para proteger Siracusa, como catapultas e guindastes; a invenção de espelhos usados para queimar navios adversários; os famosos gritos de “Eureka, eureka” ao descobrir a solução do problema que envolvia uma suspeita sobre o ourives que confeccionou uma coroa para o rei Hierão. Não conseguimos ter certeza sobre a veracidade desses episódios, mas é fato que os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática que demonstram suas habilidades e originalidade.

Segundo o historiador Plutarco (46 d.C. – 120 d.C.), durante a Segunda Guerra Púnica (218 – 202 a.C.), a cidade de Siracusa resistiu por muito tempo aos ataques romanos devido às estratégias de defesa desenvolvidas por Arquimedes, que acabou morto por um soldado após uma batalha em 212 a.C. (ver [9]).

2.2 – Alguns legados arquimedianos

2.2.1 – Área do círculo

A primeira expressão, como conhecemos hoje, para determinar a área de um círculo foi feita por Arquimedes. Ele deu esse passo fundamental que influenciou no desenvolvimento de muitos conhecimentos ao longo da história (ver seção 4.8, em [11]). Em um pequeno tratado chamado *A medida de um círculo*, ele introduz uma ideia para mostrar que área de um círculo é igual a área de um triângulo cuja base é o comprimento da circunferência e cuja altura é o raio do círculo (ver [13]).

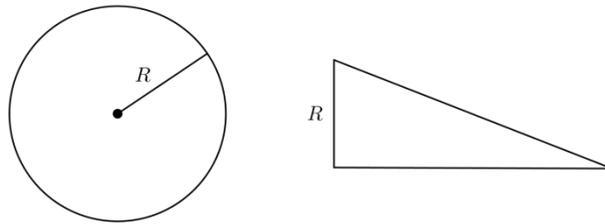


Figura 2.2 – Igualdade de áreas demonstrada por Arquimedes

Para isso, ele aplicou uma técnica de demonstração conhecida como *dupla redução ao absurdo*. Primeiramente, tomemos um polígono regular de n lados, cada um deles medindo um certo valor L_n . Ligando-se o centro do círculo com seus vértices, obtemos uma decomposição com n triângulos isósceles, iguais entre si, de base L_n e altura A (o apótema do polígono). Logo, a área S_n do polígono é da por:

$$S_n = n \left(\frac{AL_n}{2} \right) = \left(\frac{A}{2} \right) (nL_n) = \frac{AP}{2}$$

onde $P = nL_n$ é o perímetro do polígono.

Adiante, chamemos de A_C e A_T , respectivamente, as áreas do círculo e do triângulo da figura (2.2). Suponhamos, inicialmente, que $A_C > A_T$ e tomemos $\varepsilon = A_C - A_T$. Logo, existe um polígono regular inscrito no círculo tal que a diferença entre a área do círculo e a sua área (A_P) é menor do que ε , ou seja:

$$A_C - A_P < A_C - A_T \quad \Rightarrow \quad A_P > A_T$$

Mas isto é um absurdo, porque, sendo o comprimento da circunferência maior do que o perímetro do polígono e o raio do círculo maior que o apótema, a área do triângulo não pode ser menor do que a área do polígono. Portanto, A_C não pode

ser maior do que A_T . Analogamente, concluímos que $A_C < A_T$ é também um absurdo. Dessa forma, chegamos que $A_C = A_T$.

A partir dessa proposição, Arquimedes pode intuir que, se o comprimento da circunferência é dado por $2kR$, então a área do círculo é dada kR^2 (ambas escritas na notação utilizada atualmente). De outra maneira, havia um número a ser encontrado que possibilitaria calcular o perímetro e a área do círculo. A partir disto, podemos definir uma fórmula de recorrência (ver [13]) e encontrar uma excelente aproximação para o valor de $k = \pi$: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

2.2.2 – O método

Em um tratado denominado *O método*, Arquimedes apresentou uma ideia fundamental que ajudaria, futuramente, no desenvolvimento do Cálculo (ver [13]). Neste trabalho, Arquimedes descreve a Eratóstenes um método de descoberta para alguns resultados, algo que ele considera não menos importante do que as provas em si. Para determinar o volume de uma esfera, ele realizou a atomização da esfera, do cilindro e do cone, gerando fatias que serão vistas como cilindros achatados. Em seguida, pendurou esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio entre as figuras. Vejamos com maiores detalhes uma versão, adaptada a linguagem atual, do processo realizado por Arquimedes.

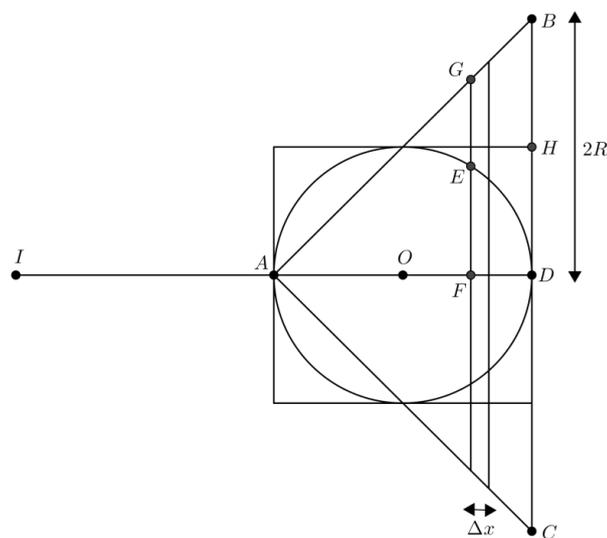


Figura 2.3 – Método para descobrir o volume da esfera

Seja uma esfera de raio R e com o diâmetro polar sobre o eixo x , sendo o ponto A a origem. Construimos um cilindro a ela circunscrito e um cone obtido pela rotação do triângulo ABD em torno do segmento \overline{AD} . A figura acima apresenta um corte do conjunto por um plano passando no centro da esfera e contendo o segmento \overline{AD} . Sabendo que $\overline{AF} = x$, tomemos nos três sólidos as fatias verticais delimitadas pelas seções de abscissas x e $x + \Delta x$. Os volumes dessas fatias são, aproximadamente,

$$\text{Esfera:} \quad \pi(\overline{EF})^2 \Delta x = \pi x(2R - x) \Delta x$$

$$\text{Cone:} \quad \pi(\overline{FG})^2 \Delta x = \pi x^2 \Delta x$$

$$\text{Cilindro:} \quad \pi(\overline{DH})^2 \Delta x = \pi R^2 \Delta x$$

Observe que o triângulo ADE é retângulo. Segue que: $(\overline{EF})^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FD} = x(2R - x)$. Suponhamos, agora, que as fatias do cone e da esfera sejam penduradas no ponto I , enquanto as do cilindro permaneçam onde estão, isto é, a uma distância x do ponto A . O momento do volume¹, em relação ao ponto A , será dado por:

$$\text{Esfera e Cone:} \quad [\pi x(2R - x) \Delta x + \pi x^2 \Delta x] 2R = 4\pi R^2 x \Delta x \quad (2.1)$$

$$\text{Cilindro:} \quad \pi R^2 \Delta x \cdot x = \pi R^2 x \Delta x \quad (2.2)$$

O momento do volume (2.1) é igual ao quádruplo do momento (2.2). Dessa forma, repetindo esse procedimento com um número grande de fatias, resulta que:

$$2R \left[V_{\text{esfera}} + \frac{8\pi R^3}{3} \right] = 8\pi R^4 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Essa prova adaptada apresenta o método utilizado por Arquimedes para descobrir o volume da esfera. Sua imensa criatividade e consciência matemática possibilitaram a concepção desse método da descoberta, a partir do qual diversos outros cientistas puderam avançar na elaboração do Cálculo.

¹ O momento de um volume em relação a um ponto é o produto do volume pela distância do ponto ao centroide do volume.

2.2.3 – Proporção entre o cilindro e a esfera

Em outro tratado chamado *Sobre a esfera e o cilindro*, Arquimedes fez uma elegante síntese de seus estudos sobre estes sólidos. Ele considerava esta a sua mais bela descoberta, tanto que solicitou que, quando morresse, fosse gravado em sua lápide um cilindro com uma esfera nele inscrita, acompanhados da relação $\frac{3}{2}$ que os une.

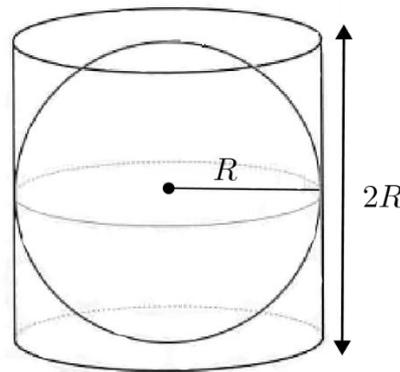


Figura 2.4 – Comparando área e volume da esfera e do cilindro

$$A_{cilindro} = (2\pi R)(2R) + 2(\pi R^2) = \frac{3}{2}(4\pi R^2) = \frac{3}{2}A_{esfera}$$

$$V_{cilindro} = 2\pi R^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{3}{2}V_{esfera}$$

2.3 – O Stomachion

Arquimedes era conhecido também por seu interesse em enigmas e pela utilização de artimanhas. Segundo relatos, ele era capaz de concentrar-se intensamente na resolução de algum problema. Isso resultou numa personalidade científica muito peculiar em sua obra. Sendo assim, um quebra-cabeça tão curioso como o *Stomachion* não poderia passar despercebido por suas mãos.

O *Stomachion*, ou Dor de Estômago (pela dificuldade de resolução), é uma espécie de quebra-cabeça composto por 14 peças de formatos diversos. Não se sabe exatamente quem o inventou, mas existem diversos textos, anteriores e posteriores a Arquimedes, com referências sobre ele. O maior interesse sobre esse quebra-cabeça ocorreu a partir da citação numa das obras de Arquimedes, o chamado Códex C.

2.3.1 – O Códex C

No início do século XIII, Constantinopla sofreu um grande saque, realizado por soldados cristãos em missão para libertar Jerusalém. Nesse período, a cidade guardava um verdadeiro tesouro literário do mundo antigo. Entre eles, havia tratados de Arquimedes. Apesar de diversos livros destruídos, o saque não atingiu três contendo textos dele.

Dentre eles, o primeiro a desaparecer foi o Códex B. A última notícia que se teve dele foi no começo do século XIV, em Roma, na biblioteca do papa. O próximo a desaparecer foi o Códex A. O último relato de seu paradeiro foi feito na biblioteca de um humanista italiano, por volta de 1560. Este livro tinha cópias através das quais outros matemáticos, como Leonardo da Vinci e Galileu, puderam conhecer as obras de Arquimedes.

O terceiro livro, o Códex Arquimedes, tecnicamente conhecido como Códex C, reapareceu oitocentos anos após o saque realizado em Constantinopla. Ele foi copiado em pele de animal, como boa parte dos manuscritos medievais. Entretanto, durante o período em que ficou desaparecido, tornou-se um palimpsesto (ver [23]).

O palimpsesto é uma espécie de pergaminho cujo texto original foi raspado para dar lugar a outro. No caso do Códex C, os textos de Arquimedes foram sobrescritos por orações, o que dificultou muito no processo de restauração.

Em 1907, o jornal *The New York Times* noticiou que o professor Johan Ludwing Heiberg, de Copenhague, havia descoberto manuscritos de Arquimedes no Metochion, um arquivo localizado na cidade de Constantinopla. Após investigar os textos, ele concluiu que se tratava do reaparecimento do Códex C.

Entre 1910 e 1915, Heiberg transcreveu um trabalho, conhecido como “O método”, contendo cartas de Arquimedes a Erastótenes em que descreve ideias de como concebeu certos resultados, tais como os apresentados na subseção (2.2.2). Contudo, logo o professor teve seu acesso limitado aos manuscritos, o que impossibilitou a continuidade das pesquisas.

Em meio a Primeira Guerra Mundial, devido aos grandes conflitos militares e pressões políticas, grande parte dos livros do Metochion foi levada para Atenas, na Grécia. Essa transferência foi realizada de forma secreta visando à segurança do valioso acervo, porém o Palimpsesto de Arquimedes foi um dos manuscritos que nunca chegaram à cidade grega.

Somente em 1998, a preciosa obra arquimediana reapareceu num leilão realizado em Nova Iorque, nos EUA. Um milionário, que teve sua identidade preservada, arrematou o livro por cerca de dois milhões de dólares. Depois, a obra foi confiada ao Museu de Arte Walters para ser restaurada. O curador do museu, William Noel, liderou uma equipe que auxiliou no processo de recuperação. Entre os membros, estava Reviel Netz, professor da Universidade de Stanford e um grande especialista quando o assunto é Arquimedes.

Os principais trabalhos contidos no Códex C são *O Método*, apresentado na seção 2.2.2, e *Stomachion*, que será descrito na seção a seguir.

2.3.2 – Juntando as peças

Quando Heiberg estudou os manuscritos de Arquimedes, no início do século XX, ele chegou a traduzir um parágrafo onde havia uma menção ao *Stomachion*, porém nada que agregasse alguma descoberta ou problema matemático relevante.

Após um século, no processo de restauração, Netz voltou a se deparar com este texto. Entretanto, essa parte estava muito deteriorada e poucas novidades se pôde extrair.

Somente em 2003, após mais avanços na recuperação do Palimpsesto, surgiu um fragmento que apresentou um problema que intrigou a comunidade acadêmica. Arquimedes, na verdade, havia se perguntado em seu tratado: “De quantas maneiras pode-se formar um quadrado utilizando as catorze peças do *Stomachion*?”.

A partir desse trecho, os pesquisadores perceberam que estavam diante de um problema de combinatória e, mais do que isso, poderia ser o primeiro trabalho registrado na Antiguidade sobre essa área da Matemática. Em seguida, diversos estudiosos dedicaram-se mais intensamente sobre o problema, entre eles Fábio Acerbi, Persi Diaconis, Susan Holmes, Nigel Wilson, Bill Cutler, Ron Graham e Fan Chung (ver [23]).

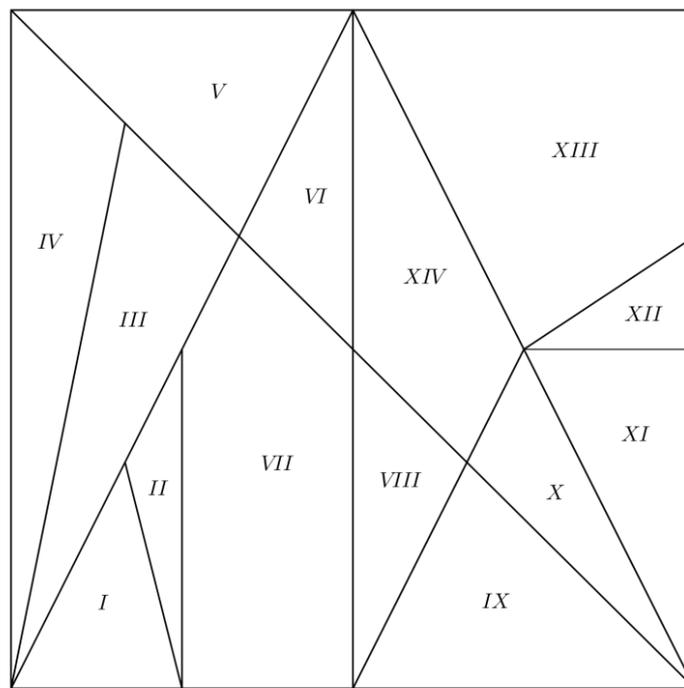


Figura 2.5 – Stomachion: arranjo original encontrado no Códex C

Aos poucos foram surgindo diversos quadrados com combinações diferentes para as catorze peças, o que gerou a necessidade de descobrir-se uma estratégia para determinar o número de soluções.

Uma das primeiras observações que ajudaram na solução foi realizada empiricamente por Bill Cutler. Ele observou que o *Stomachion* poderia ser visto como um quadrado com lado medindo 12 unidades e, além disso, os vértices das peças têm sempre coordenadas inteiras.

A partir disso, Chung e Graham perceberam que há uma partição única das peças que formam quatro triângulos chamados de básicos. Esses triângulos são

retângulos e tem lados medindo 6 e 12 unidades. A figura abaixo apresenta os triângulos básicos que chamaremos de 1, 2, 3 e 4.

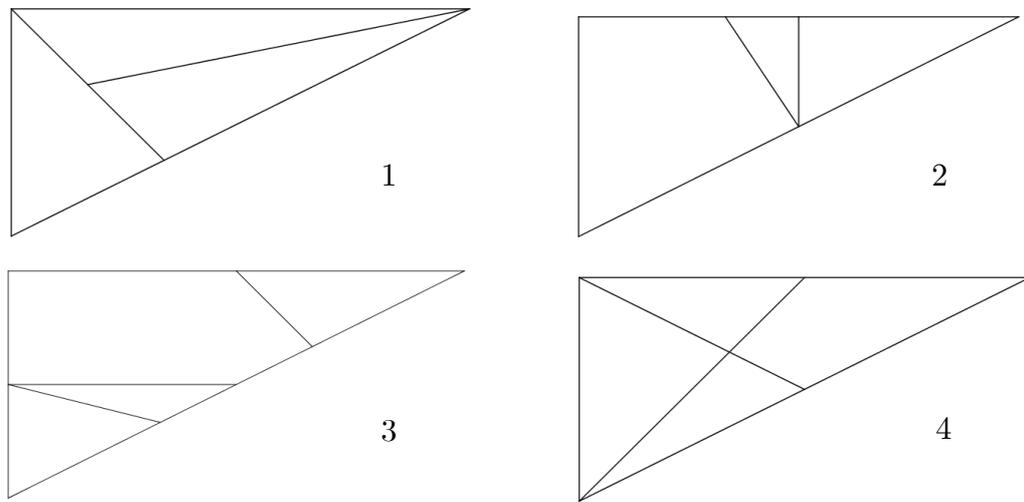


Figura 2.6 – Triângulos básicos na montagem do *Stomachion*

A seguir, o passo fundamental foi observar que, nesses triângulos básicos, as peças I e II, III e IV e XII e XIII, seguindo a numeração apresentada na figura 2.5, devem ficar juntas, duas a duas, independente da combinação. Isso reduziu o problema de catorze para onze peças. A configuração com onze peças é conhecida como *Stomach*. O criador e designer de jogos George Miller produziu uma versão física do *Stomach* para auxiliar na busca de soluções.

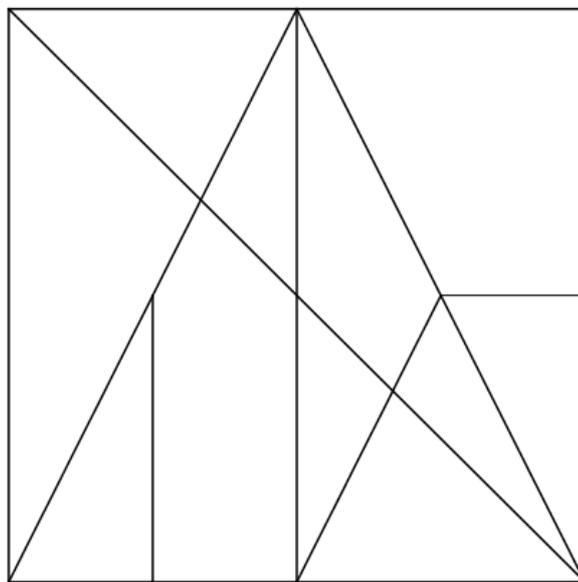


Figura 2.7 – *Stomach*: versão composta por 11 peças

Com isso, foi possível definir 24 quadrados fundamentais que constituem o núcleo da contagem. Na figura a seguir, os rótulos são definidos pela ordem em que os triângulos básicos aparecem de cima para baixo e x' indica que o triângulo x passou por alguma operação simétrica (ver subseções 1.6.1 e 1.6.2) em relação ao quadrado inicial, denominado 1234. Por exemplo: o quadrado 123'4' foi obtido a partir de uma reflexão dos triângulos 3 e 4 em relação a um eixo vertical que passa pelo centro do quadrado.

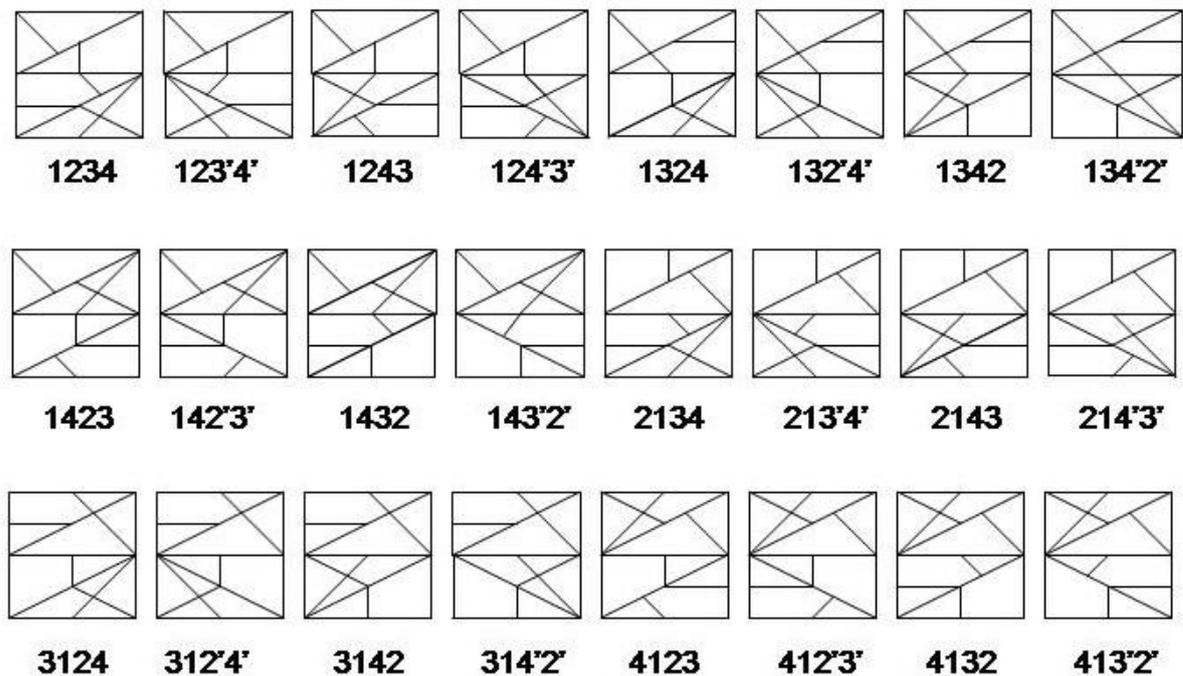


Figura 2.8 – Vinte e quatro quadrados fundamentais para a contagem (extraída de [17])

A partir de cada um desses quadrados pode-se, através de movimentos locais (isto é, modificando apenas a posição de peças adjacentes), obter outras configurações distintas. Essas novas possibilidades geradas constituem um mini-grafo², em que a distância entre elas representa a quantidade de operações aplicadas sobre o quadrado fundamental.

A imagem abaixo mostra o mini-grafo associado ao quadrado 1234. Nela verificamos que este é representado pelo vértice azul-escuro e gera seis novas

² Essas informações foram extraídas de [17] e não há nesse trabalho referências que detalhem a utilização dos grafos na obtenção da solução. No entanto, é possível inferir que os grafos permitiram organizar as diferentes combinações do Stomach.

composições e o mini-grafo possui sete vértices. O vértice verde, por exemplo, representa o quadrado em destaque e foi obtido por meio de três movimentos locais aplicados no quadrado fundamental.

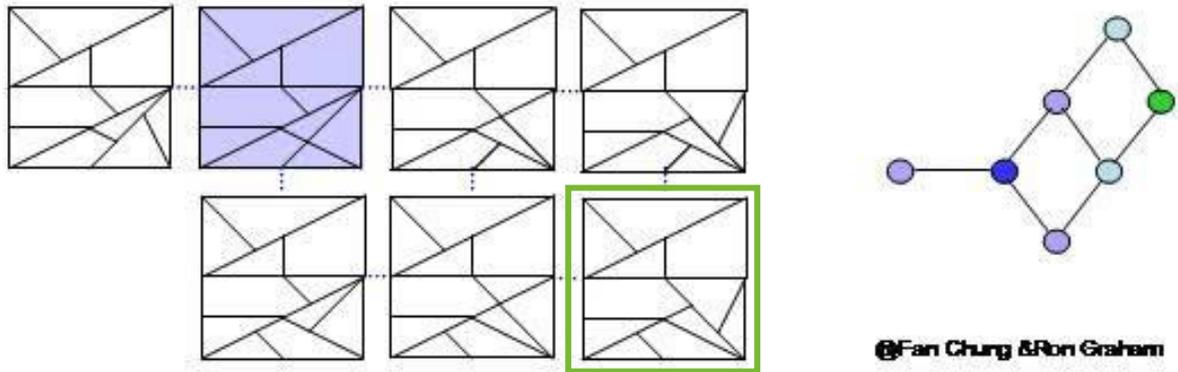


Figura 2.9 – Mini-grafo associado ao quadrado fundamental 1234 (extraído de [17])

Os quadrados do núcleo de contagem geram quantidades diferentes de novas possibilidades. Com efeito, é possível verificar que: os quadrados 1234, 1243, 124'3', 123'4', 213'4', 214'3', 2143 e 2134 geram 6 novas configurações cada; os quadrados 1324, 132'4', 312'4', 314'2', 3142 e 3124 geram 9 possibilidades cada; os quadrados 1423, 142'3', 143'2', 413'2', 4132, 4123 e 412'3' geram 13 novas configurações cada; os quadrados 134'2' e 1432 geram 17 possibilidades cada; e o quadrado 1342 gera 15 novas configurações. Dessa forma, são totalizadas 268 maneiras distintas para formar-se um quadrado *Stomach*, desconsiderando suas simetrias.

Todas essas configurações foram colocadas num grafo maior (ver figura 2.10), em que cada mini-grafo representa um vértice e possuem cores diferentes, de acordo com a quantidade de configurações geradas. Pode ser observado que esse grafo possui 936 arestas e permite a formação de um ciclo hamiltoniano.

Finalmente, o resultado é obtido ao considerar as simetrias em cada um dos 268 quadrados para obtermos o total de combinações. Primeiramente, observa-se que as peças V e IX e VI e VIII são congruentes (ver figura 2.5). Portanto, é possível fazer quatro modificações entre elas. A seguir, é notado que as peças I e II juntas formam um triângulo congruente a peça XI. Com isso, obtem-se mais duas combinações diferentes.

Adiante, conforme visto na subseção 1.6.1, o quadrado possui oito simetrias, sendo quatro rotações e quatro reflexões. Daí segue que o número total de combinações será igual a $4 \times 2 \times 8 \times 268 = 17.152$.

Essa solução foi encontrada, primeiramente, por Bill Cutler. Como cientista computacional, ele definiu um algoritmo que descrevia como criar um quadrado *Stomachion*. Com o número de soluções, Fan Chung e Ron Graham puderam ter certeza que tinham chegado à resolução correta do problema.

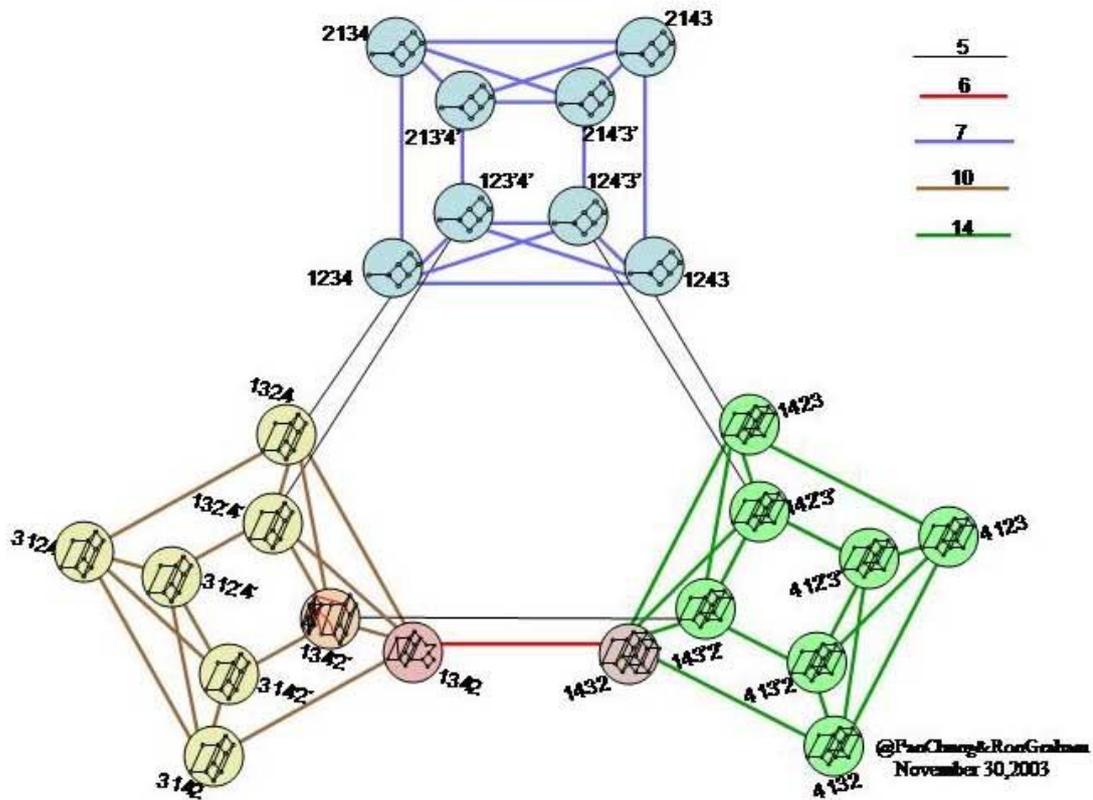


Figura 2.10 – Grafo elaborado por Chung e Graham (extraído de [17])

2.4 – Calculando áreas

Como visto na seção 2.3, o *Stomachion* é formado por catorze peças sendo 11 triângulos, 2 quadriláteros e 1 pentágono. Nesta seção, apresentaremos duas maneiras distintas para calcular a área de cada peça do *Stomachion*. A primeira é feita através de determinantes, enquanto a segunda é feita utilizando o teorema de Pick. Elas podem ser exploradas por estudantes do Ensino Médio ao estudarem áreas.

2.4.1 – Cálculo de área por determinantes

Primeiramente, vamos enunciar uma proposição que será utilizada a seguir na demonstração de um resultado mais geral.

Proposição 2.1. A área de um triângulo no plano cartesiano de vértices $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dados no sentido anti-horário é expressa pela seguinte soma de determinantes:

$$A(P_0P_1P_2) = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right).$$

Demonstração: Seja $P_0P_1P_2$ um triângulo situado no plano cartesiano conforme mostrado na figura abaixo.

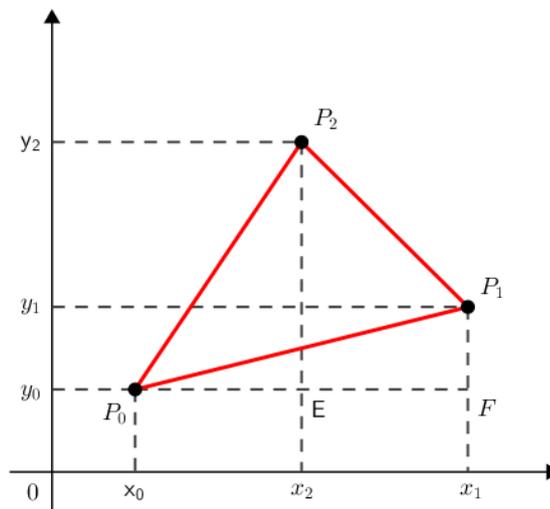


Figura 2.11 – Proposição (2.1)

Para determinar sua área podemos somar a área do triângulo P_0EP_2 com a área do trapézio EFP_1P_2 e subtrair a área do triângulo P_0FP_1 , ou seja:

$$A(P_0P_1P_2) = A(P_0EP_2) + A(EFP_1P_2) - A(P_0FP_1)$$

Substituindo as coordenadas destes pontos, temos:

$$A(P_0P_1P_2) = \frac{(y_2 - y_0)(x_2 - x_0)}{2} + \frac{[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0)](x_1 - x_2)}{2} - \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - x_0)}{2}$$

Manipulando algebricamente essa expressão, podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$A(P_0P_1P_2) = \frac{1}{2}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2)]$$

Portanto, podemos expressar a área do triângulo com vértices no sentido anti-horário através do cálculo dos determinantes formados pelas coordenadas do triângulo:

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right),$$

como queríamos mostrar. ■

A partir da proposição (2.1) encontraremos uma fórmula mais geral para determinar a área de um polígono convexo, com $n+1$ lados ([8]).

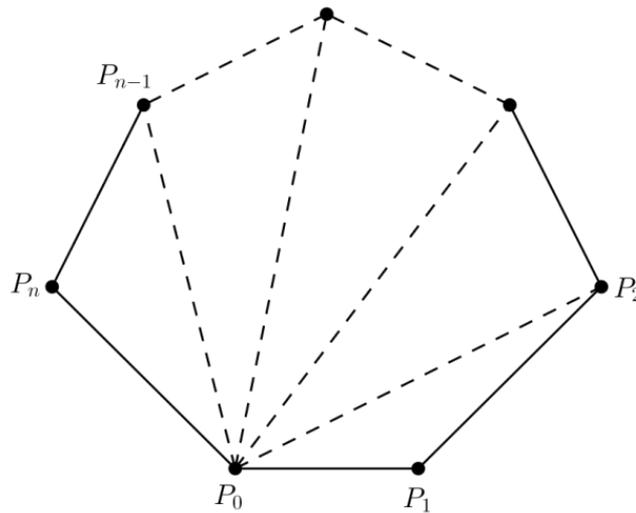


Figura 2.12 – Polígono convexo com $n+1$ vértices

Proposição 2.2. A área da região delimitada por um polígono convexo de vértices $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$, percorridos no sentido anti-horário é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right).$$

Demonstração: Fixando o vértice P_0 , dividimos o polígono nos seguintes triângulos adjacentes, $P_0P_1P_2, P_0P_2P_3, \dots, P_0P_{n-1}P_n$. Desta forma, podemos calcular a área do polígono somando-se a área de cada triângulo, isto é,

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_{n-1}$$

onde cada A_i corresponde a área do i -ésimo triângulo.

Escrevendo-se a área do polígono como soma das áreas dos triângulos, usando a proposição (2.1), temos:

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) + \dots \\ + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right)$$

Analisando essa expressão, nota-se que o último determinante de A_i se anula com o primeiro determinante de A_{i+1} , pois trocando-se as posições das linhas de uma matriz obtêm-se o determinante com sinal trocado. Logo, a equação (2.5) pode ser expressa por:

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right),$$

que podemos reescrever como,

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

onde $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_0, y_0)$. ■

Exemplo 2.3. Vamos determinar a área do polígono ABCD utilizando a proposição (2.2):

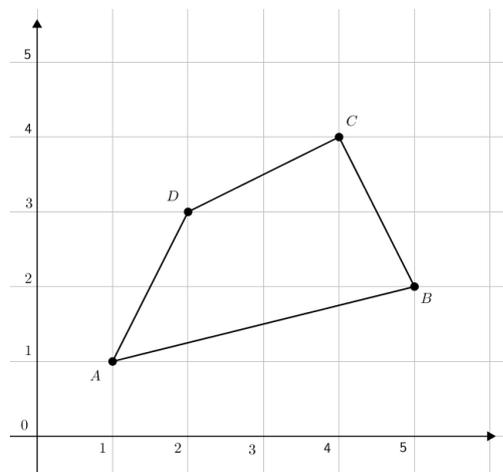


Figura 2.13 – Exemplo: cálculo de área por determinantes

$$\begin{aligned}
A_{ABCD} &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_D & y_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_D & y_D \\ x_A & y_A \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} ((-3) + (12) + (4) + (-1)) = 6
\end{aligned}$$

Portanto, a área do polígono ABCD é igual 6.

É importante observar que a proposição 2.2 pode ser estendida para o cálculo de áreas de polígonos não convexos. Esse resultado pode ser encontrado com maiores detalhes na referência [8]. Observamos também que essa expressão é válida para polígonos no plano em que os vértices com coordenadas não-inteiras.

2.4.2 – O Teorema de Pick

Georg Alexander Pick (1859 – 1942) nasceu em Viena, na Áustria. Filho de uma família judia destacou-se logo na juventude quando publicou seu primeiro artigo aos dezessete anos de idade. Durante sua carreira, trabalhou na Universidade de Viena e publicou cerca de setenta artigos onde abordou muitos tópicos, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo de Integrais e Geometria.

No entanto, seu trabalho mais conhecido foi o artigo *Geometrisches zur Zahlenlehre* publicado em 1899, na cidade de Praga. Nele foi apresentado um teorema que ficou conhecido como teorema de Pick. Esse resultado ganhou mais notoriedade na segunda metade do século XX, sobretudo, por sua simplicidade e elegância. Para enunciarmos o teorema de Pick precisamos de duas definições:

Definição 2.4. Uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos regularmente distribuídos ao longo de retas perpendiculares, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1 unidade.

Definição 2.5. Um polígono é dito simples quando sua fronteira é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice.

Teorema 2.6. (*Teorema de Pick*) A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede é dada por:

$$A = \frac{f}{2} + I - 1,$$

em que f é a quantidade de pontos da rede situados sobre a fronteira do polígono e I é o número de pontos da rede situados no interior do polígono.

Demonstração: Ver [18].

Exemplo 2.7. Vamos determinar a área do polígono ABCD, mostrado na figura 2.13, utilizando o teorema 2.6. Podemos observar que os pontos na fronteira desse polígono são A, B, C e D e que os pontos interiores são (2, 2), (3, 2), (4, 2), (3, 3) e (4, 3). Então, $f = 4$ e $I = 5$. Segue que:

$$A = \frac{4}{2} + 5 - 1 = 6$$

Como calculado no exemplo 2.3, a área do polígono ABCD é igual 6.

É importante observar que o teorema de Pick pode ser aplicado em polígonos não convexos. Além disso, se a unidade for diferente de 1, a área será dada por u^2A , onde u^2 é igual a área de cada quadrado da rede. Notamos, ainda, que a área do polígono sempre será um múltiplo de 0,5, pois f é natural.

2.4.3 – Área das peças do Stomachion

Conforme apresentado na seção 2.3.2, o *Stomachion* forma um quadrado com lado medindo 12 unidades e, além disso, todas as coordenadas dos vértices são

inteiras. Aplicaremos a proposição 2.2 e o teorema de Pick a fim de determinarmos a área de cada uma das peças. É importante observarmos que as peças V e IX e VI e VIII têm mesma área, pois são congruentes.

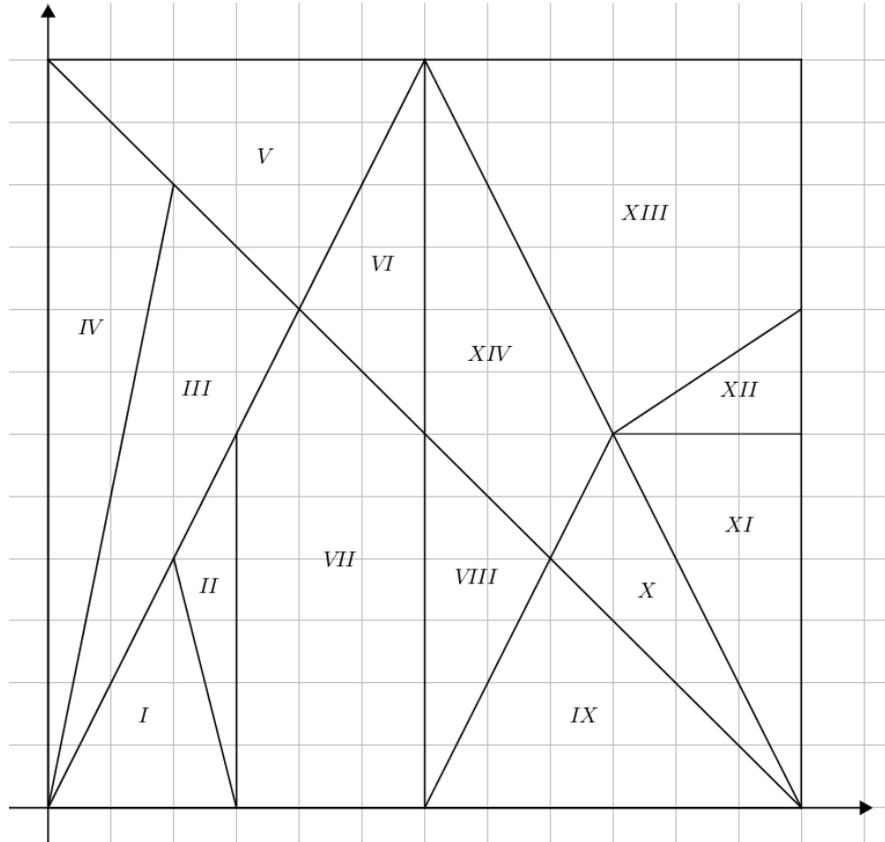


Figura 2.13 – Stomachion no plano cartesiano

Primeiramente, vamos utilizar a proposição 2.2:

$$A_I = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{0 + 12 + 0}{2} = 6$$

$$A_{II} = A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) = \frac{-12 + 18 + 0}{2} = 3$$

$$A_{III} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{0 + 24 + 0}{2} = 12$$

$$A_{IV} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{0 + 24 + 0}{2} = 12$$

$$A_V = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} \right) = \frac{-48 + 0 + 72}{2} = 12$$

$$A_{VI} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \right) = \frac{-24 + 36 + 0}{2} = 6$$

$$A_{VII} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right) = \frac{-18 + 0 + 36 + 24 + 0}{2} = 21$$

$$A_{VIII} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{24 + 24 - 36}{2} = 6$$

$$A_{IX} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{0 + 48 - 24}{2} = 12$$

$$A_X = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \right) = \frac{-48 + 72 - 12}{2} = 6$$

$$A_{XI} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \right) = \frac{-72 + 72 + 18}{2} = 9$$

$$A_{XII} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \right) = \frac{-18 + 24 + 0}{2} = 3$$

$$A_{XIII} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \right) = \frac{0 + 48 + 72 - 72}{2} = 24$$

$$A_{XIV} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \right) = \frac{72 - 36 - 30 + 18}{2} = 12$$

Agora, usaremos o teorema de Pick (2.6) para determinar a área dessas peças:

$$A_I = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 6$$

$$A_{II} = 0 + \frac{8}{2} - 1 = 3$$

$$A_{III} = 9 + \frac{8}{2} - 1 = 12$$

$$A_{IV} = 5 + \frac{16}{2} - 1 = 12$$

$$A_V = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12$$

$$A_{VI} = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$$

$$A_{VII} = 13 + \frac{18}{2} - 1 = 21$$

$$A_{VIII} = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$$

$$A_{IX} = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12$$

$$A_X = 3 + \frac{8}{2} - 1 = 6$$

$$A_{XI} = 4 + \frac{12}{2} - 1 = 9$$

$$A_{XII} = 1 + \frac{6}{2} - 1 = 3$$

$$A_{XIII} = 18 + \frac{14}{2} - 1 = 24$$

$$A_{XIV} = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12$$

Os dois resultados permitem calcular a área das peças do *Stomachion* com eficiência. Podemos ainda observar que:

$$\sum_{n=I}^{XIV} A_n = A_I + A_{II} + \dots + A_{XIII} + A_{XIV} = 6 + 3 + \dots + 24 + 12 = 144 = 12^2 = A_{\text{quadrado}}$$

Capítulo 3

Recursos didáticos

“A ciência moderna realmente deve estimular em todos nós uma humildade perante a imensidão do inexplorado e a tolerância por hipóteses malucas.”

Martin Gardner

Neste capítulo sugerimos algumas atividades pedagógicas em geometria discreta que incluem, entre outras coisas, o uso de recursos computacionais como ferramenta de apoio. Primeiramente, apresentamos alguns recursos educacionais da coleção M^3 . Em seguida, exploramos os poliomínós, criados por Solomon W. Golomb, e o ladrilhamento de retângulos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [1], [6], [7], [15], [16], [19], [20], [21] e [22].

3.1 – Projeto Matemática Multimídia (Coleção M^3)

O projeto *Matemática multimídia*, conhecido como *Coleção M^3* , foi criado a partir de um edital do Ministério da Educação (MEC) e Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), publicado em 2007, que visava o desenvolvimento e a produção de recursos educacionais em mídias digitais para o Ensino Médio de Matemática no Brasil. Todos recursos foram desenvolvidos por uma equipe de profissionais de diversas áreas, na sua maioria vinculados a Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), sob coordenação do Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira. A execução aconteceu durante quatro anos, aproximadamente, e produziu cerca de 350 recursos educacionais no formato de vídeos, áudios, softwares e experimentos, que estão disponíveis no portal do projeto (ver [21]) e licenciados sob uma licença Creative Commons. A seguir, apresentamos alguns recursos que se relacionam com os temas abordados nesta dissertação.

3.1.1 – Vídeo: “Um caminho para combater a dengue”

O objetivo desse material é introduzir o conceito de grafos aos estudantes por meio de uma situação cotidiana. O vídeo utiliza o exemplo de uma agente de endemias que dedica-se no combate à dengue, inspecionando residências e orientando os moradores sobre possíveis focos da doença. Como faz todo seu trajeto a pé, ela resolve buscar uma forma de otimizar o seu caminho. Para isso, pede ajuda para uma amiga que trabalha com engenharia de tráfego.

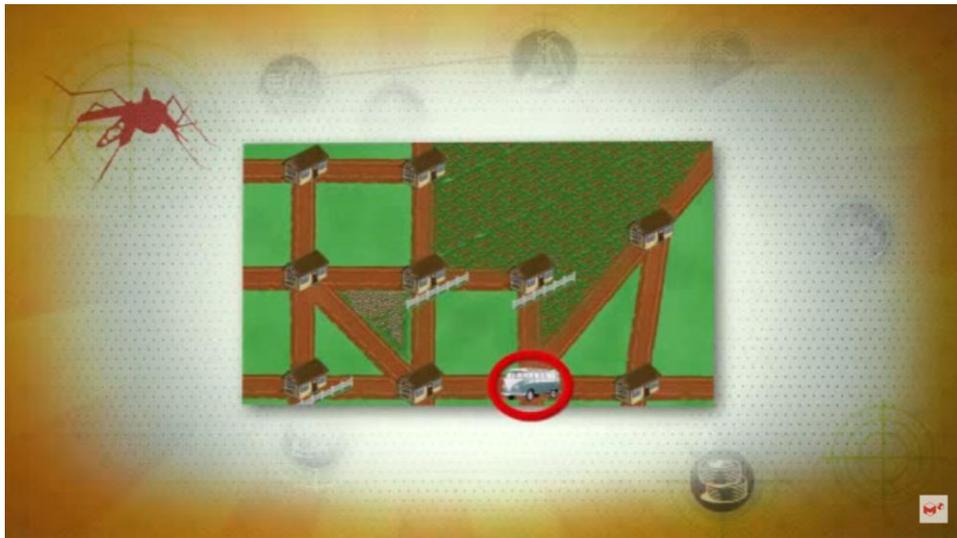


Figura 3.1 – Residências que devem ser visitadas pela agente de endemias (extraída de [21])

A partir dessa situação-problema, o material introduz alguns conceitos sobre os grafos, tais como *passeio* e *caminho*. As personagens dialogam em busca de uma solução que otimiza o percurso entre as casas que devem ser visitadas. A abordagem proposta neste vídeo é acessível e permite a exploração de outros problemas interessantes.

Os recursos físicos necessários para exibição desse material estão presentes na maior parte das escolas. É importante ressaltar que é possível baixar o vídeo antes da aula para ser exibido sem necessidade de utilizar internet, pois sabe-se que algumas escolas públicas não possuem conexão de rede.

Assim como em todos os recursos do projeto, este material apresenta um *guia do professor* com orientações pedagógicas que podem ser seguidas pelo docente. Além disso, sugere algumas atividades que podem ser trabalhadas junto ao vídeo, bem como referências bibliográficas para complementar o estudo.

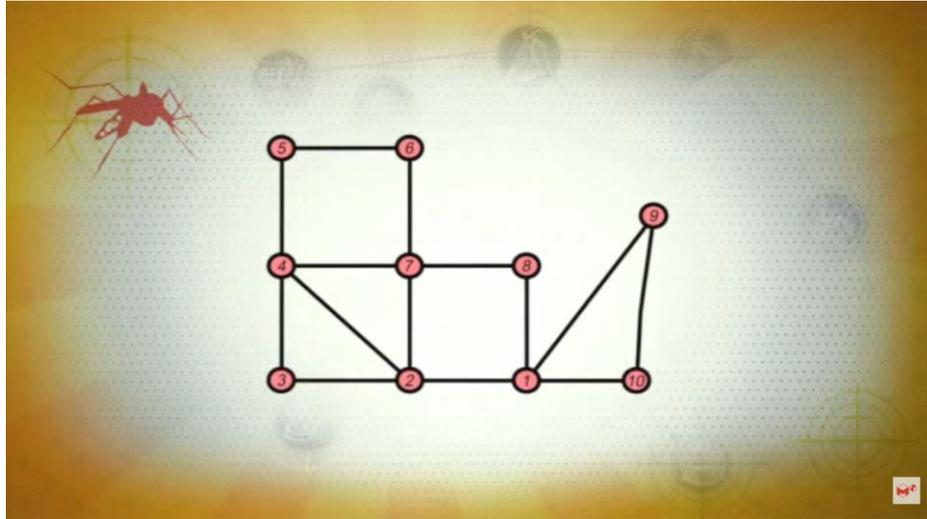


Figura 3.2 – Grafo proposto para modelar o problema (extraída de [21])

Geralmente, os grafos não são estudados no Ensino Médio, nem são um conteúdo obrigatório previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento referencial responsável por orientar um modelo curricular. No entanto, estes parâmetros não devem ser vistos como um formato rígido, homogêneo e impositivo, segundo o próprio documento (ver [6]). Sendo assim, o professor pode inserir o estudo dos grafos no cronograma de ensino. Este tema pode ser explorado com a análise combinatória, por exemplo.

3.1.2 – Experimento “Espelhos e simetrias”

O objetivo desse experimento é estudar as simetrias por meio de espelhos planos. Inicialmente, o estudante deve encontrar linhas de simetrias em uma figura. A seguir, utilizando dois espelhos, o aluno precisa observar a quantidade de imagens obtidas variando a abertura entre os espelhos. Por fim, pretende-se encontrar uma

fórmula que relacione o ângulo formado pelos espelhos com o número de imagens formadas. Todas essas etapas são guiadas por questões que visam estimular o raciocínio dos estudantes.



Figura 3.3 – Guia do professor: Orientações para a realização do experimento (extraída de [21])

Ao contrário dos grafos, o estudo das simetrias é previsto nos PCN e deve ser feito no Ensino Fundamental II. Nesse momento, é importante que haja um tempo dedicado à formalização dos conceitos que envolvem os diferentes tipos de simetrias, tendo em vista que tais conceitos não voltarão a ser formalmente apresentados no Ensino Médio.

Durante este ciclo, as simetrias podem ser trabalhadas indiretamente em problemas de geometria geral ou, ainda, em projetos interdisciplinares. Por exemplo, os alunos estudarão Óptica, em Física; Geometria Molecular, em Química; Zoologia e Botânica, em Biologia. Todos esses temas relacionam-se com as simetrias, o que permite uma nova abordagem deste conteúdo.

3.2 – Poliomínós

Em 1953, o termo *poliominó* foi utilizado pela primeira vez em uma palestra dada pelo matemático Solomon Wolf Golomb (1932 – 2016) ao *Harvard Mathematics Club*. Desde então, ele dedicou-se intensamente buscando ampliar os conhecimentos relacionados a este tema.

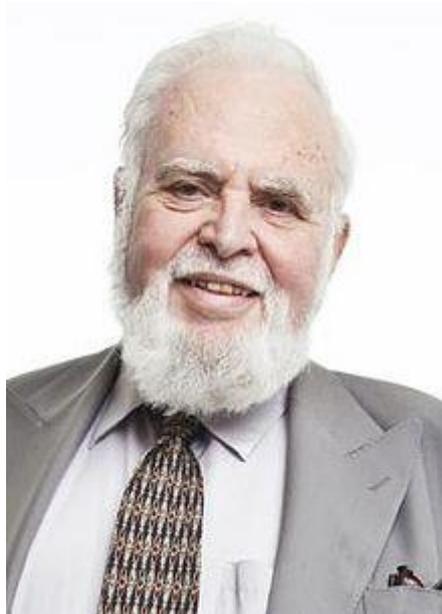


Figura 3.4 – Solomon W. Golomb (1932 – 2016)

Golomb era dotado de uma incrível criatividade e destacou-se, sobretudo, por suas criações e engenhosidades. Em 1954, quando tinha apenas 22 anos, publicou o artigo *Checker boards and polyminoes*, no periódico *The American Mathematical Monthly* (vol.61, n.10, p.675–682), propondo diversos problemas envolvendo o recobrimento de um tabuleiro de xadrez utilizando poliomínós.

Em 1965, Solomon publicou seu primeiro livro dedicado aos poliomínós, chamado *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Esta obra ganhou uma edição revisada e expandida, publicada em 1994 (ver [15]). No prefácio da primeira edição, ele relata que, após ter “inventado” os poliomínós, tomou conhecimento de um antigo jogo que utilizava os pentaminós (um tipo de poliomínó

que será estudado a seguir). Este problema foi publicado no livro *The Canterbury Puzzles*, em 1907, escrito pelo inventor inglês Henry Ernest Dudeney.

Outro importante matemático contribuiu para o desenvolvimento dos poliomínos, Martin Gardner (1914 – 2010). Uma das grandes inspirações no campo das recreações matemáticas, Gardner dedicou-se à divulgação científica. Ele ficou conhecido por produzir artigos que apresentam propostas não-convencionais que se relacionam com a filosofia, o ilusionismo e a literatura.

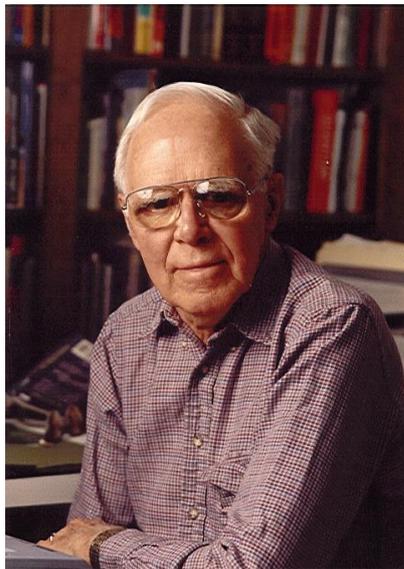


Figura 3.5 – Martin Gardner (1914 – 2010)

Segundo Golomb (ver prefácio, em [15]), os poliomínos ganharam amplo destaque a partir das publicações feitas por Gardner em sua coluna na revista *Scientific American*. Mais do que isso, ele tornou-se uma referência no esclarecimento de novas ideias e resultados encontrados por leitores de sua coluna. A partir destas contribuições, Gardner forneceu novas fontes bibliográficas que ajudaram Golomb na revisão de seu livro sobre os poliomínos.

3.2.1 – Explorando os poliomínós

Um poliomínó é uma figura plana formada por quadrados iguais e justapostos, isto é, pelo menos um lado de cada quadrado deve coincidir com o lado de outro quadrado. É importante ressaltar que dois poliomínós são considerados iguais se puderem ser sobrepostos após aplicarmos uma rotação ou reflexão.

A partir dessa definição, concluímos que existem apenas um poliomínó de um quadrado (chamado *monomínó*), um poliomínó de dois quadrados (*dominó*), dois poliomínós de três quadrados (*triminós*) e cinco poliomínós de quatro quadrados (*tetraminós*). A figura abaixo apresenta esses poliomínós.

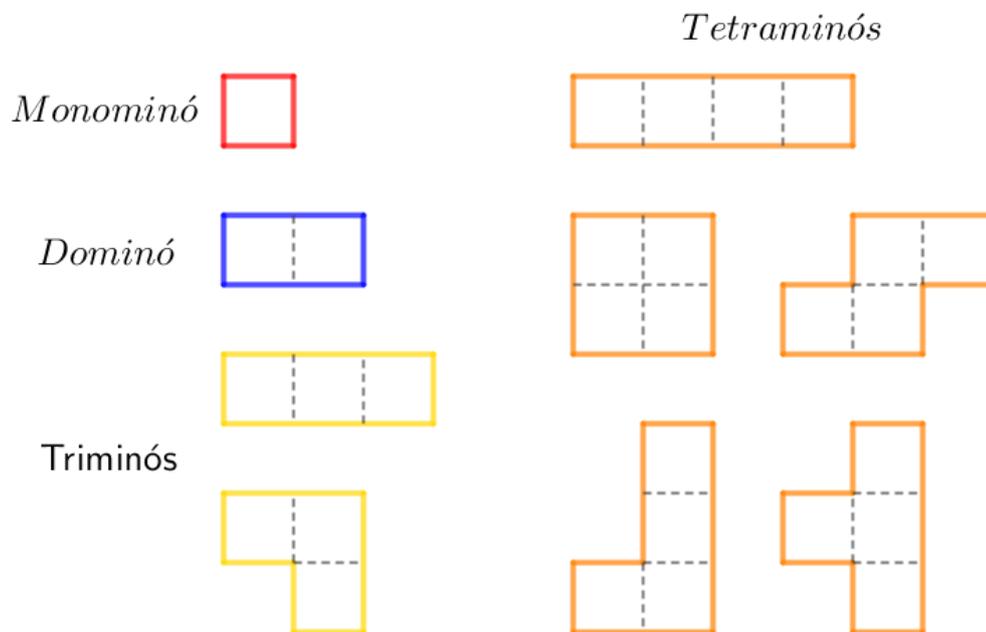


Figura 3.6 – Poliomínós com até 4 quadrados

Os pentaminós são poliomínós formados por cinco quadrados. Dessa forma, podemos formar doze figuras distintas em que cada uma se assemelha à uma letra maiúscula diferente. Por isso, cada pentaminó é identificado por uma letra. Após apresentar a regra de formação e os primeiros poliomínós aos estudantes, uma atividade interessante é pedir para que eles encontrem os pentaminós.

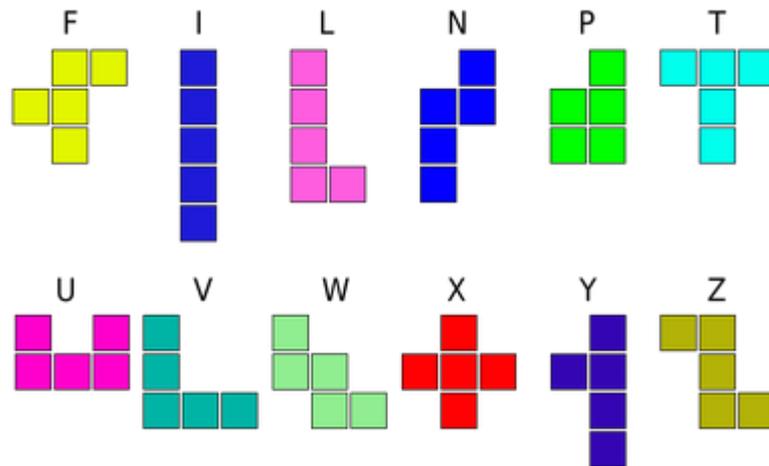


Figura 3.7 – Pentaminós identificados por letras

A partir dos *hexaminós*, poliomínós formados por seis quadrados, o número de peças que podemos formar aumenta demasiadamente, o que dificulta um pouco a exploração didática dessas figuras. Existem 35 hexaminós, 108 heptaminós (formado por sete quadrados) e 369 octaminós (formado por oito quadrados), por exemplo.

3.3 – Ladrilhando retângulos com poliomínós

Em 1968, David A. Klarner definiu a *ordem n* de um poliomínó P como o número mínimo de cópias congruentes de P (sendo permitido aplicar translação, rotação e reflexão) necessárias para formar um retângulo. A figura (3.8) apresenta alguns possíveis padrões obtidos pela união de poliomínós idênticos.

O retângulo (I) é formado por dois pentaminós L, que possuem ordem 2. O retângulo (II) possui três dominós, que possuem ordem 1. Observamos que não há poliomínós de ordem 3. Este resultado foi provado por Ian Stewart, da Universidade de Warwick, na Inglaterra, em 1992. De fato, a única maneira de dividir um retângulo em três cópias idênticas de um polígono é dividi-lo em três retângulos e, por definição, um retângulo tem a ordem 1. Por fim, o retângulo (III) é composto por quatro *nonominós*, poliomínós formado por nove quadrados, que possuem ordem 4.

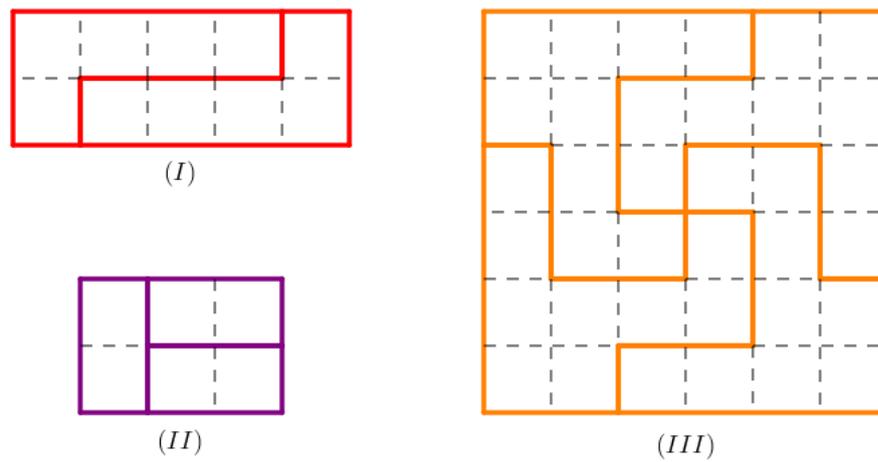


Figura 3.8 – Retângulos formados por poliomínós

A partir da definição feita por Klarner, muitos padrões de ladrilhamento de retângulos foram descobertos. Conseqüentemente, já conhecemos poliomínós de diferentes ordens. Por exemplo, a figura abaixo ilustra um heptaminó de ordem 76 e um hexaminó de ordem 92. Esses padrões foram feitos por Karl A. Dahlke, em 1987, e descobertos por T. W. Marlow, em 1985 (ver capítulo 8, em [15]).

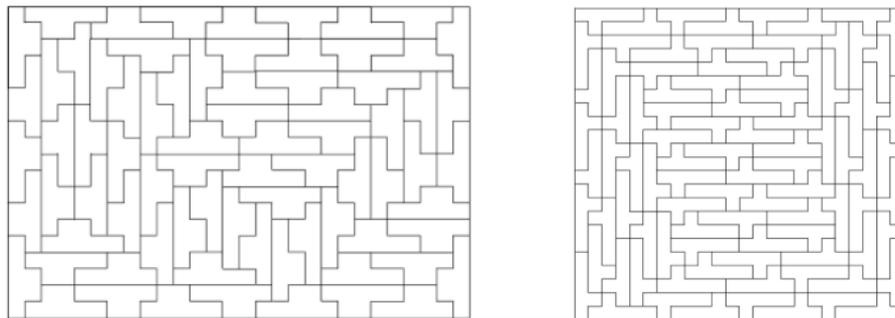


Figura 3.9 – Um heptaminó de ordem 76 (à esquerda) e um hexaminó de ordem 92 (à direita)

No entanto, o mais famoso problema envolvendo ladrilhamento de retângulos por poliomínós diz respeito aos pentaminós (ver Apêndice C, em [15]). Pergunta: De quantas maneiras diferentes podemos formar um retângulo utilizando os doze pentaminós? Primeiramente, como cada peça contém cinco quadrados, o retângulo formado terá $12 \times 5 = 60$ quadrados. Daí segue que podemos formar retângulos com

dimensões 6×10 , 5×12 , 4×15 e 3×20 . Este problema já foi solucionado (ver [22]) e a figura abaixo apresenta algumas combinações possíveis.

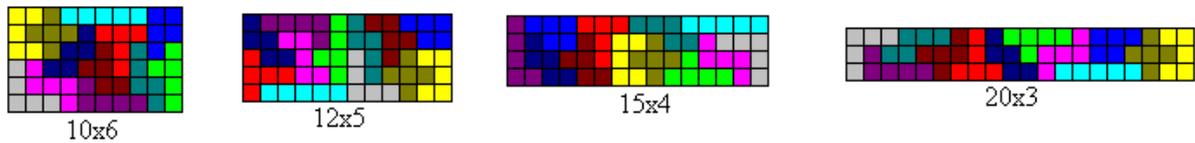


Figura 3.10 – Retângulos formados pelos doze pentaminós (extraída de [22])

Todas as construções apresentadas nessa seção podem ser exploradas didaticamente em sala de aula e constituem possíveis atividades de investigação para os estudantes. Elas podem ser trabalhadas tanto no Ensino Fundamental, durante o estudo de simetrias, quanto no Ensino Médio, no estudo de análise combinatória.

3.4 – Poliominós associados à Geometria do Táxi

A *geometria do táxi* é uma geometria não-Euclidiana feita sob um sistema de coordenadas cartesianas no plano com eixos ortogonais. Esse nome vem da associação a trafegar por ruas perpendiculares na lateral dos quarteirões (ver figura 3.11).

Uma *métrica* M (ver [20]) é uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par ordenado $(x, y) \in M$ a um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y . Essa função satisfaz as seguintes condições:

- (i) $d(x, x) = 0$;
- (ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$.

De forma geral, tomando dois vetores x e y de \mathbb{Z}^n (ou \mathbb{R}^n), a métrica conhecida como *métrica* l_p , com $1 \leq p < \infty$, é definida por:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Assumindo $p = 2$, temos a distância euclidiana usual. Podemos escrevê-la assim: Se $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, então $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Por outro lado, se $p = 1$, temos a distância do táxi, também conhecida como *distância de Lee*. Ou seja, $d_1(X, Y) = d_{\text{táxi}}(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$.

Esta distância em \mathbb{Z}^2 pode ser interpretada como o menor número de quadras a serem percorridas de um ponto na malha quadrada. A geometria do táxi é um tema muito interessante para ser abordado com alunos do Ensino Médio, sendo uma excelente motivação para introduzir o estudo de geometria discreta e combinatória.

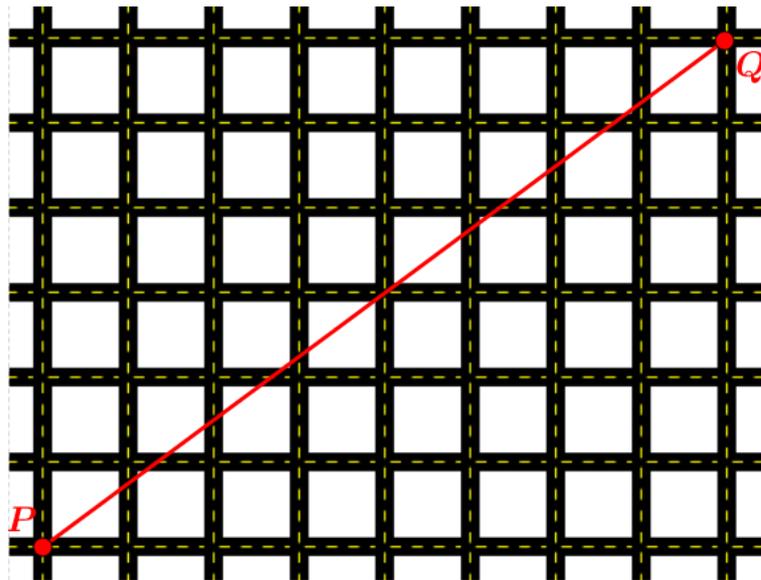


Figura 3.11 – Software “Geometria do Táxi – Distâncias”, da coleção M3 (extraída de [21])

Na figura acima, tomando o ponto P como origem do sistema cartesiano, temos que $d(P, Q) = \sqrt{(8 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{100} = 10$ e $d_{\text{táxi}} = |8 - 0| + |6 - 0| = 14$. A Coleção M³ apresenta alguns recursos destinados ao estudo da geometria do táxi (ver [21]), tais como o software “Geometria do Táxi – Distâncias”, que podem ser utilizados para apresentar este assunto aos estudantes do Ensino Médio.

3.4.1 – A conjectura de Golomb-Welch

Consideramos uma bola fechada de raio R , com $R \in \mathbb{N}$, e centro (a, b) na métrica do táxi, como sendo todos os pontos em \mathbb{Z}^n com distância menor ou igual a R do centro dessa bola. Podemos mostrar (ver [20]) que tal bola em \mathbb{Z}^2 contém exatamente $R^2 + (R + 1)^2$ pontos. Para $n \geq 3$, o número de pontos de uma bola é estabelecido recursivamente por meio de uma série hipergeométrica.

Um problema ligado à área de comunicação/transmissão de sinais é como distribuir pontos no plano de tal forma que as bolas de um determinado raio cubram (ou cubram o máximo possível) todo o espaço. Uma abordagem interessante deste problema é proposta em [16] ao associar cada bola a um poliomínó composto por quadrados de lado 1 centrado nos pontos da bola. Na figura abaixo, são ilustrados poliomínós associados a bolas de raio 1 centradas em diferentes pontos.

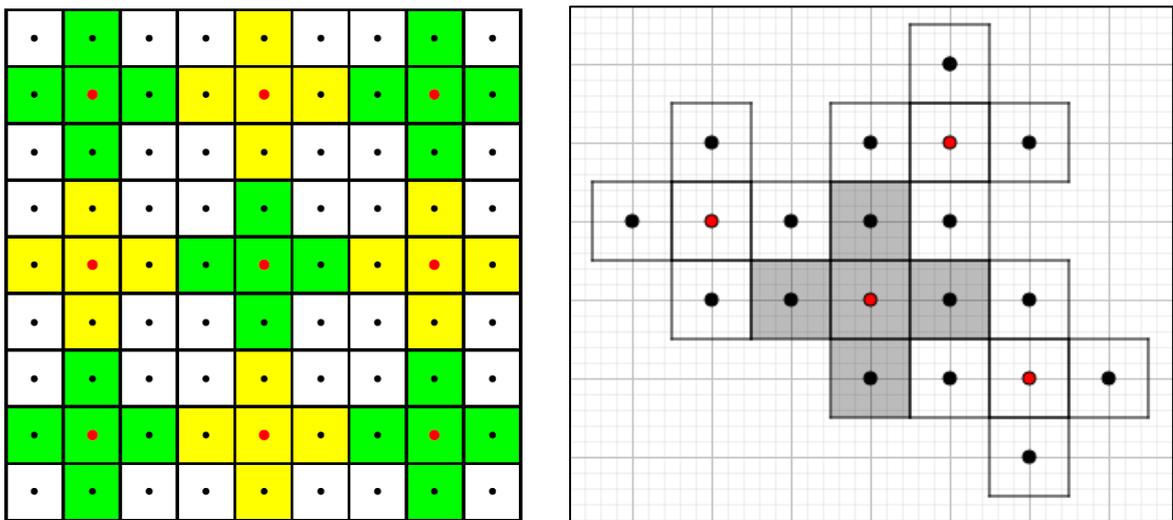


Figura 3.12 – Poliomínós associados à bolas de raio $R = 1$

Na figura (3.12), à esquerda, os centros estão em pontos em que as coordenadas são múltiplos de 3; à direita, conseguimos um ladrilhamento do plano por estes poliomínós quando os centros das bolas são vetores do plano dados por combinações inteiras de $\vec{v}_1 = (1,2)$ e $\vec{v}_2 = (-2,1)$, isto é, os centros das bolas são os pontos $i(1,2) + j(-2,1)$, com $i, j \in \mathbb{Z}$. Os centros dessas bolas compõem o que chamamos de um *código perfeito* de raio 1 na métrica de Lee (ou do táxi).

De modo geral, os códigos perfeito de raio R são, a menos de simetria, dados por combinações inteiras de $\vec{u} = (R, R + 1)$ e $\vec{v} = (-(R + 1), R)$ e formam uma malha quadriculada rotacionada. Na figura (3.13) é mostrado um código perfeito de raio 2 e os poliominós associados a estas bolas.

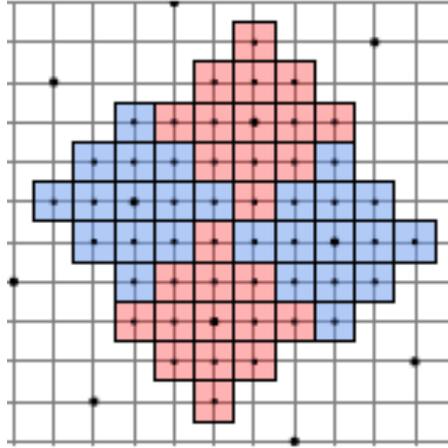


Figura 3.13 – Poliominó associado a bola de raio $R = 2$ (extraída de [7])

É importante ressaltarmos que a associação de bolas a poliominós é feita sendo estes últimos formados por “cubos” de lado 1 em \mathbb{R}^n centrados nos pontos da bola de raio R em \mathbb{Z}^n . Por exemplo, uma bola de raio 1 em \mathbb{Z}^3 tem 7 pontos e o poliominó associado será composto por 7 cubos.

De maneira mais geral, esses padrões de ladrilhamento do plano (\mathbb{R}^2) com esses tipos de poliominós motivam uma pergunta: quais poliominós associados a bola na norma l_1 conseguem ladrilhar o \mathbb{R}^n ? Uma conjectura, postulada em 1970, surgiu a partir dessa questão e afirma que, para dimensões maiores que 2, poliominós associados a bolas com raio $R > 1$ não ladrilham o \mathbb{R}^n . A seguir enunciamos tal conjectura:

Conjectura (Golomb-Welch). Para $n > 2$ e $R > 1$, o poliominó $L_1(n, R)$ não ladrilha o \mathbb{R}^n .

Ela apareceu, pela primeira vez, em um artigo publicado por S. W. Golomb e L. R. Welch [16] e sua solução permanece em aberto. Apesar disso, muitos

pesquisadores acreditam em sua veracidade, tendo em vista que ela vem sendo resolvida para alguns casos especiais.

Considerações finais

A partir dos estudos apresentados nos capítulos desta dissertação, fazemos algumas considerações. Primeiramente, buscamos enfatizar uma abordagem matemática não apenas construída dentro da formalidade acadêmica. Muitas áreas e conhecimentos surgiram ou foram motivados por atividades recreativas, que despertaram o interesse e aguçaram a intuição de algumas pessoas. Dessa forma, vemos a Matemática mais como uma criação humana do que como um saber construído pela genialidade de poucos, ainda que admiremos a criatividade e as engenhosidades nas criações e soluções elaboradas por matemáticos(as).

Nesse sentido, é possível propor aos estudantes do Ensino Básico experiências abordando novos conceitos em Matemática. Uma possibilidade é justamente a de nos valer de atividades recreativas, como o Stomachion e os poliomínos, a fim de estimular seu raciocínio. Sendo assim, os conceitos matemáticos são apresentados de forma a transcender o caráter instrumental, mas assume uma função científica de investigação e um papel fundamental para o avanço de outras ciências.

Com isso, é possível também notar uma beleza estética sempre presente nessas construções. E o que seria essa tal beleza? Observando os temas abordados neste trabalho, vemos como a busca por regularidades e padrões está sempre presente na evolução dos conhecimentos matemáticos. Além disso, ao generalizarmos ou formalizarmos um conceito, alcançamos uma confiabilidade nos resultados obtidos. Essas são pistas para compreendermos a beleza matemática.

Ressaltamos ainda a importância didática da inclusão da história da Matemática. Ao longo dos capítulos, buscamos narrar alguns episódios históricos em meio às teorias. Acreditamos que conhecer os acontecimentos e as personagens que participaram do desenvolvimento científico estimula na obtenção desses conhecimentos, além de contribuir para uma visão de mundo mais ampla e uma melhor interpretação da realidade.

Por fim, podemos destacar a apresentação de problemas em aberto como um recurso didático imprescindível, por demonstrarem aos estudantes que a Matemática não é imutável e nem conclusa, mas sim permanece em construção. O estudo de algumas conjecturas, tais como a de Golomb-Welch, possibilita que os alunos percebam que ainda existem muitos caminhos a serem percorridos buscando aprimorar conhecimentos e descobrir outros novos.

Analisando [6], percebemos que essas considerações são possíveis e estão, direta ou indiretamente, previstas nos PCN. Acreditamos que essas são formas que podem proporcionar aos estudantes uma formação escolar mais completa e prazerosa, capaz de torná-los cidadãos mais autônomos e capacitados.

Referências

- [1] ALMEIDA, Vera Lia Marcondes Criscuolo de; GUIMARÃES, Diego Dias Machado; BESERRA, Vagner de Sousa. *Pentaminós como uma ferramenta didática*. São Paulo: Editora Cultura Acadêmica, 2007 (Artigo em Capítulo de Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da UNESP).
- [2] AREAS, E. das Neves. *Sobre simetrias e ornamentos*. Dissertação (Mestrado) – Campinas, SP: UNICAMP, 1999.
- [3] BACALHAU, F. M. *Isometrias do plano e simetrias*. Dissertação (Mestrado) – Lisboa: Universidade de Lisboa, 2012.
- [4] BIGGS, Norman L., LLOYD, E. Keith e WILSON, Robin J. *Graph Theory 1736-1936* – Oxford: Clarendon Press, 1976.
- [5] BOLDRINI, Jose Luiz et al. *Álgebra linear*. Harper & Row do Brasil, 1984.
- [6] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2000.
- [7] CAMPELLO, Antonio et al. *Ladrilhamentos por poliomínos na norma lp*. Proceeding Series Of The Brazilian Society Of Applied And Computational Mathematics, Natal, v. 3, n. 1, p.1-7, 25 ago. 2015. SBMAC. <http://dx.doi.org/10.5540/03.2015.003.01.0240>.
- [8] COSTA, F. S. *Áreas e contornos*. Dissertação (Mestrado) – Campinas, SP: UNICAMP, 2008.
- [9] COSTA, Sueli I. R. “O Método” de Arquimedes: História, Tecnologia e Projetos de Investigação para Alunos de Cálculo. In: Luis Mariano de Carvalho. (Org.) *História e Tecnologia em Educação Matemática* – Rio de Janeiro: Livraria Ciência Moderna, 2007.
- [10] COXETER, H.M.S. *Introduction to Geometry*. New York Wiley , 1961
- [11] EVES, H. *Introdução à história da matemática*; [tradução: Hygino H. Domingues]. – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

- [12] FRANCO, M. C. L. Guimarães. *Simetria*. Dissertação (Mestrado) – Campinas, SP: UNICAMP, 2015.
- [13] GARBI, Gilberto G. *A rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- [14] GEOGEBRA. URL: <<http://www.geogebra.org>>
- [15] GOLOMB, Solomon W. *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packing*. New Jersey: Princeton University Press, 1996.
- [16] GOLOMB, S.W.; WELCH, L. R. *Perfect codes in the Lee Metric and the Packing of Polyominoes*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 18(2): 302 – 317, 1970.
- [17] GRAHAM, Fan Chung; GRAHAM, Ron. *A tour of Archimedes' Stomachion*. Disponível em: <<http://www.math.ucsd.edu/~fan/stomach/>>. Acesso em: 15 abr.2017.
- [18] HERMES, J. D. V. *O Teorema de Pick*. Dissertação (Mestrado) – São João del-Rei, MG: UFSJ, 2014.
- [19] LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.
- [20] LIMA, Elon Lages. *Espaços métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2013.
- [21] *Matemática Multimídia (Projeto M3)*. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/>>. Acesso em: 01 jul. 2017.
- [22] Mathematische Basteleien. Disponível em: <<http://www.mathematische-basteleien.de/pentominos.htm>>. Acesso em: 19 ago. 2017.
- [23] NETZ, R. e NOEL W. *Códex Arquimedes*; [tradução: Rachel Schwartz]. – Rio de Janeiro: Record, 2009.
- [24] SANTOS, José Plínio O., MELLO, Margarida P. e MURARI, Idani T. C. *Introdução à Análise Combinatória* – Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.
- [25] TUTTE, W. T. *Graph Theory* – Cambridge University Press, 2001.