



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

CARLOS HENRIQUE LIMA

**GRUPOS DE SIMETRIAS NO PLANO  
EUCLIDIANO**

CAMPINAS  
2017



CARLOS HENRIQUE LIMA

# GRUPOS DE SIMETRIAS NO PLANO EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

**Orientadora: Claudina Izepe Rodrigues**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO CARLOS HENRIQUE LIMA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. CLAUDINA IZEPE RODRIGUES.

**Assinatura da Orientadora**

---

CAMPINAS  
2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L628g Lima, Carlos Henrique, 1986-  
Grupos de simetrias no plano euclidiano / Carlos Henrique Lima. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos de simetria. 2. Simetria (Matemática). 3. Isometria (Matemática).  
I. Rodrigues, Claudina Izepe, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Symmetry groups in the euclidean plane

**Palavras-chave em inglês:**

Symmetry groups

Symmetry (Mathematics)

Isometrics (Mathematics)

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestre

**Banca examinadora:**

Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]

Cintya Winck de Oliveira Benedito

Roberto Andreani

**Data de defesa:** 25-09-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado profissional defendida em 25 de setembro de 2017  
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES**

**Prof(a). Dr(a). CINTYA WINK DE OLIVEIRA BENEDITO**

**Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI**

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

*Dedico a Deus, que me deu o sopro da vida, a liberdade humana e o discernimento para questionar e investigar a realidade.*

# Agradecimentos

Início os agradecimentos a minha família, em especial meus pais, que sempre me orientaram sobre a importância do caminho dos estudos e que prezaram pela minha educação. Grato de todo meu coração ao Sr. Luis Carlos de Lima e Sra. Sueli Margarete Ciconato Lima por estarem presentes do meu lado, sou muito feliz por isso.

Acrescento meu agradecimento a minha orientadora Prof. Dra. Claudina Izepe Rodrigues, que foi muito dedicada e essencial na conclusão dessa tese, que sempre incentivou e acreditou em mim. Profissional de grande sabedoria, seriedade e humildade, ser humano extraordinário.

Tenho que agradecer aos grandes amigos que fiz durante o mestrado, compartilhamos um sonho, passamos várias horas de estudos juntos, vivenciamos o medo, a ansiedade, a insegurança, o choro, as muitas risadas, entre tantos outros sentimentos, meu obrigado pelos ensinamentos e toda ajuda que me foi dada, vocês são incríveis.

À Diretora Rosane Dorazio Nogueira da Escola Municipal de Ensino Integral Raul Pila e a representante regional do Naed Leste Angela Simone Faquini Costa pelo apoio na flexibilização do meu horário para poder frequentar as aulas, seria inviável minha permanência e conclusão do curso sem essa ajuda.

Agradecer a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por oferecer o curso, ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade de Campinas por aderir ao programa, assim como os professores que compartilharam do seu conhecimento e a CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Gostaria de agradecer Francine Champagne que me agraciou com belíssimas imagens de simetria no plano, sua arte se encontra no site [www.tessellations.ca](http://www.tessellations.ca).

Por fim, agradeço a Deus, razão e origem de tudo. Obrigado por colocar essas pessoas tão admiráveis em minha vida.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo de resultados básicos sobre as isometrias, apresentando os dezessete grupos de revestimentos possíveis no plano euclidiano. Para fazer a análise desses grupos de revestimentos, foram usados conhecimentos de grupos, transformações geométricas, isometrias (translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante) e suas composições. Após a classificação e estabelecidos os dezessete grupos de revestimentos, foram propostas e desenvolvidas atividades para os professores do ensino básico, afim de incentivar e auxiliar a aprendizagem de simetrias para os seus discentes.

**Palavras-chave:** Grupos de Simetrias, Simetria, Transformações Geométricas, Isometrias, Grupos de Revestimento.

## **Abstract**

This work aims to study the basic results on isometries and extends itself to the seventeen groups of possible wallpaper in the Euclidean plane. To make an analysis and conclusion of these symmetries, we used experiments with group knowledge, geometric transformations, isometries (translation, rotation, reflection and sliding reflection) and their compositions. After the classification and establishment of the seventeen groups of wallpaper, activities were proposed and developed for teachers of basic education, in order to encourage and help the learning of symmetries for their students.

**Keywords:** Symmetry Groups, Symmetry, Geometric Transformations, Isometries, Wallpaper Groups.

# Sumário

Dedicatória

Agradecimentos

<b>1</b>	<b>Grupos e Transformações</b>	<b>13</b>
1.1	Grupos . . . . .	13
1.1.1	Subgrupos . . . . .	15
1.2	Transformações . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Isometrias</b>	<b>17</b>
2.1	Definição de isometria . . . . .	17
2.2	Transformações isométricas do plano . . . . .	20
2.2.1	Translação . . . . .	20
2.2.2	Reflexão . . . . .	22
2.2.3	Rotação . . . . .	24
2.2.4	Reflexão Deslizante . . . . .	25
2.3	Produto de isometrias . . . . .	26
2.3.1	Produto de Translações . . . . .	27
2.3.2	Produto de reflexões . . . . .	28
2.3.3	Produto de rotações . . . . .	33
2.3.4	Produto de reflexões deslizantes . . . . .	33
2.3.5	Isometrias opostas e diretas . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Reticulados, Redes, Centros de Simetria e Simetria Axial</b>	<b>37</b>
3.1	Reticulados e redes . . . . .	37
3.2	Centros de Simetria . . . . .	40
3.3	Simetria axial de Polígonos . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Grupos de Revestimentos</b>	<b>49</b>
4.1	Grupos de revestimentos com 6-centro . . . . .	49
4.2	Grupos de revestimentos com 3-centro . . . . .	58
4.3	Grupos de revestimentos com 4-centro . . . . .	66
4.4	Grupos de Revestimentos com 2-centro . . . . .	72
4.5	Grupos de revestimentos sem n-centro . . . . .	81
4.6	Classificação dos tipos de grupos de revestimentos . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Atividades</b>	<b>90</b>
5.1	<b>Translação</b> . . . . .	91
5.2	<b>Rotação</b> . . . . .	94
5.3	<b>Reflexão em relação a uma reta</b> . . . . .	97
5.4	<b>Simetrias e polígonos</b> . . . . .	104
5.5	<b>Ladrilhamento ou pavimentação</b> . . . . .	110
5.6	<b>Revestindo o plano</b> . . . . .	116
5.6.1	<b>Comentário sobre a aplicação e resultados obtidos das atividades 1 e 2</b> . . . . .	120
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>129</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Desenhos para uso do espelho mágico</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Simetria na natureza</b>	<b>134</b>
<b>C</b>	<b>Molde para confeccionar polígonos regulares</b>	<b>136</b>

# Introdução

Pretendi dar continuidade à minha formação matemática no curso de mestrado na Universidade Estadual de Campinas com o propósito de melhor atender como um docente profissional na arte da matemática, bem como uma realização pessoal e afinidade/prazer com os estudos. Quando chegou o momento de escrever a dissertação de mestrado, sabia que queria estudar um assunto que envolvesse algo de minha área preferida - a geometria - e que se prestasse a um desenvolvimento didático com utilização de meios inovadores para a compreensão de conteúdos matemáticos. Quando a Professora Doutora Claudina Izepe Rodrigues me propôs estudar sobre os dezessete grupos de simetrias de padrões no plano, não sabia nada sobre o assunto e foi após uma pesquisa sobre o tema que decidi aceitar fazê-lo.

O desenvolvimento teórico deste texto se baseia principalmente no livro *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*, de Martin, George E. Trata-se das transformações geométricas que acontecem no plano euclidiano, que como o próprio nome já diz, transformam um objeto geométrico em outro, seguindo determinados padrões. Em especial trataremos das isometrias no plano que são transformações que preservam distâncias. Também um dos objetivos desta dissertação é o de desenvolver de modo acessível, a professores do ensino básico, as noções matemáticas referentes a este tema.

No primeiro capítulo falaremos de forma breve sobre a teoria de grupos e as transformações geométricas no plano, cujas definições e proposições são a base para o estudo que faremos neste trabalho.

No segundo capítulo trataremos do tema isometrias, que é o estudo das propriedades de figuras que se mantêm invariantes quando sujeitas a transformações geométricas que preservam distâncias. Faremos a classificação das isometrias no plano, mostrando que uma isometria é ou uma rotação, ou uma translação, ou uma reflexão, ou uma reflexão deslizante. Uma figura transformada por uma isometria ou composição de isometrias mantém o mesmo aspecto da figura original.

No terceiro capítulo desenvolveremos os conceitos de reticulado, que trata de um conjunto infinito adequado de pontos no plano; de rede, que é a estrutura que esse conjunto de pontos no plano forma; de célula básica, que é a menor região de uma rede; de centros de simetria, que são centros de rotação, e por último falaremos de forma sucinta de simetrias axiais de alguns polígonos, a saber, de polígonos que usaremos como células básicas de grupos de simetrias de padrões no plano, ou seja, grupos de revestimentos.

No quarto capítulo estudaremos os grupos de revestimentos e mostraremos que existem dezessete ao todo. Será feita a construção, análise e classificação de cada grupo. Também apresentaremos ilustrações que possibilitam a visualização dos grupos e um algoritmo para

---

ajudar na identificação do grupo de revestimento. Gostaríamos de mencionar que esses grupos de revestimentos recebem nomenclaturas diferentes dependendo do autor e podem ser denominados grupos de papéis de parede, grupos cristalográficos no plano ou grupos de simetrias bidimensionais.

No quinto e último capítulo são propostas algumas atividades que tratam de isometrias. Visamos mostrar nesse trabalho aspectos teóricos matemáticos que estruturam e organizam a ideia de simetria no plano euclidiano como subsídio para auxiliar o professor, assim como seu aperfeiçoamento. Apresentaremos atividades voltadas para o ensino básico que exploram os conceitos de isometrias e facilitam o aprendizado do aluno. Com o objetivo de facilitar o entendimento, a maioria das atividades foram elaboradas de forma concreta e lúdica.

# Capítulo 1

## Grupos e Transformações

Ao tentar reconhecer padrões e simetrias, nos deparamos informalmente com o conceito de estrutura de grupo. O conceito de grupo, definições e resultados, fornecem os princípios básicos e fundamentais para estabelecermos o estudo das simetrias de figuras.

O conjunto das transformações geométricas no plano, ou seja, o conjunto de aplicações bijetivas do plano no plano tem uma estrutura de grupo cujo produto é dado pela composição de transformações. As isometrias são transformações que preservam distâncias e constituem um subgrupo do grupo das transformações. As simetrias de uma figura são as isometrias que deixam a figura inalterada.

Neste capítulo apresentaremos um estudo de conceitos e resultados de grupos e transformações necessários para o estudo que faremos no capítulo 4 sobre os possíveis grupos de simetrias de revestimentos no plano.

Este capítulo tem como referências as bibliografias [3] e [6].

### 1.1 Grupos

**Definição 1.1.1.** Dizemos que  $G$  é um grupo se  $G$  é um conjunto não vazio e  $\cdot$  o produto de uma operação binária que satisfazem as seguintes propriedades:

- 1 - Dados  $a, b \in G$ , dizemos que  $G$  é fechado quando o produto  $a \cdot b \in G$ .
- 2 - Tem a propriedade associativa quando  $a, b, c \in G$  e  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- 3 - Existe um elemento em  $G$  que é chamado de neutro ou identidade, chamaremos de  $e$ , tal que  $a \cdot e = a$  para todo elemento  $a$ .
- 4 - Para qualquer  $a \in G$ , existe um elemento inverso  $a^{-1} \in G$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = e$ .

**Definição 1.1.2.** Se para todo  $a, b \in G$ , tivermos  $a \cdot b = b \cdot a$ , então  $G$  é chamado abeliano ou comutativo.

**Definição 1.1.3.** Se um grupo  $G$  tem exatamente  $n$  elementos, então  $G$  é chamado finito e dizemos que  $G$  tem ordem  $n$ . Caso contrário,  $G$  é chamado infinito.

**Definição 1.1.4.** Dado um elemento  $a$  em um grupo  $G$ , denotamos por  $a^n$  o produto  $a \cdot a \cdots a$ , isto é, o produto de  $n$  vezes o elemento  $a$ . Se existe um menor inteiro positivo  $n$  tal que  $a^n = a \cdot a \cdots a = e$ , então  $a$  tem ordem  $n$  e é finito, caso contrário  $a$  tem ordem infinita.

**Definição 1.1.5.** Se  $G$  é um grupo e  $a \in G$ , o período de  $a$  é o menor inteiro positivo  $n$  tal que  $a^n = e$ . Se não existe tal inteiro, dizemos que  $a$  tem período infinito.

**Definição 1.1.6.** Dizemos que  $G$  é um grupo cíclico se existe um elemento  $a \in G$  tal que  $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  e escrevemos  $G = \langle a \rangle$ . Todo elemento  $a$  que satisfaz esta condição é denominado gerador do grupo cíclico  $G$ .

**Proposição 1.1.1.** *Unicidade do elemento neutro.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $e$  e  $e'$  sejam elementos neutros, então  $e = e \cdot e'$ , pois  $e'$  é elemento neutro e  $e$  pertence ao grupo. Agora, como também  $e$  é elemento neutro temos  $e \cdot e' = e'$ . Assim,  $e = e \cdot e' = e'$ , ou seja,  $e = e'$ . Portanto, o elemento neutro é único.  $\square$

**Proposição 1.1.2.** *Unicidade do elemento inverso*

*Demonstração.* Dado  $a$  em um grupo, o seu inverso é único, pois se  $x$  e  $y$  são inversos de  $a$ ,  $x \cdot a = a \cdot x = e$  e  $y \cdot a = a \cdot y = e$ , pela Definição 1.1.1. Então:

$$\begin{aligned} x &= x \cdot e, \\ &= x \cdot (a \cdot y) \\ &= (x \cdot a) \cdot y, \\ &= e \cdot y \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto,  $x = y$  e, assim, o elemento inverso é único.

$\square$

**Proposição 1.1.3.** *Em um grupo, o inverso de um produto é o produto dos inversos na ordem contrária, tal que  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a$  e  $b$  pertencentes ao grupo  $G$  e  $(a \cdot b)^{-1}$  o inverso do produto  $a \cdot b$ . Vamos mostrar que  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ . De fato,  $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = ((a \cdot b) \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = (a \cdot (b \cdot b^{-1})) \cdot a^{-1} = (a \cdot e) \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e$ .

Assim, pela unicidade do elemento inverso em um grupo temos  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .

□

### 1.1.1 Subgrupos

**Definição 1.1.7.** *Um subconjunto  $H$  de um grupo  $G$  é dito um subgrupo de  $G$  se, com relação ao mesmo produto de  $G$  (mesma operação binária de  $G$ ) e o mesmo elemento neutro de  $G$ , o próprio  $H$  é um grupo. Ou seja:*

- (i)  $e \in H$ .
- (ii) Se  $a, b \in H$  então  $a \cdot b \in H$ .
- (iii) Se  $a \in H$  então  $a^{-1} \in H$ .

**Definição 1.1.8.** *Dizemos que um grupo  $G$  é gerado pelo subconjunto  $H$  se todo elemento de  $G$  pode ser representado como um produto de elementos de  $H$ .*

## 1.2 Transformações

**Definição 1.2.1.** *Uma transformação no plano  $\varphi$  é uma função  $t : \varphi \rightarrow \varphi$  bijetora, que associa a cada ponto  $P$  do plano um único ponto  $Q$ , tal que  $t(P) = Q$  e, de forma bilateral, para cada ponto  $Q$  existe um único ponto  $P$  tal que  $t(Q) = P$ .*

**Exemplo 1.2.1.** *A identidade do plano no plano é uma transformação. Denotamos a transformação identidade por 1.*

**Definição 1.2.2.** *Seja  $t$  uma transformação. Considere  $t^{-1}$  definida por:  $t^{-1}(P) = P'$  se, e somente se,  $t(P') = P$ . Dizemos que  $t^{-1}$  é a inversa de  $t$  e, também,  $t^{-1}$  é uma transformação.*

**Definição 1.2.3.** *Sejam  $t_1$  e  $t_2$  transformações. O produto  $t_1 t_2$  é a correspondência tal que  $(t_1 t_2)(P) = (t_2 \circ t_1)(P)$ , ou seja, a transformação  $t_1 t_2$  é definida pela composição  $t_2 \circ t_1$ . Note que, dado um ponto  $P$ , primeiro aplicamos  $t_1$  e depois  $t_2$ .*

**Proposição 1.2.1.** *O produto de  $t_1 t_2$  é uma transformação, ou seja, o produto de duas transformações é uma transformação.*

*Demonstração.* sejam  $P, Q$  tais que  $(t_1 t_2)(P) = (t_1 t_2)(Q)$ . Temos,  $(t_2 \circ t_1)(P) = (t_2 \circ t_1)(Q)$  e, portanto,  $t_2(t_1(P)) = t_2(t_1(Q))$ . Como  $t_2$  é injetora, pois é uma transformação, obtemos  $t_1(P) = t_1(Q)$  e sendo  $t_1$  também injetora temos  $P = Q$ , ou seja,  $t_1 t_2$  é injetora.

Agora para mostrar que  $t_1 t_2$  é sobrejetora, consideremos  $P$  um ponto qualquer no plano. Como  $t_2$  é sobrejetora, existe  $P'$  no plano tal que  $t_2(P') = P$ . E, como  $t_1$  é sobrejetora, existe  $P''$  no plano tal que  $t_1(P'') = P'$ . Portanto,  $(t_1 t_2)(P'') = t_2(t_1(P'')) = t_2(P') = P$ , o que implica que  $t_1 t_2$  é sobrejetora.  $\square$

**Proposição 1.2.2.** *O conjunto  $G$  de todas as transformações no plano é um grupo.*

*Demonstração.* Mostraremos as quatro propriedades como feito na definição de grupo:

i) Seja  $G$  o conjunto de todas as transformações no plano com o produto definido em 1.2.1. O conjunto  $G$  é não vazio, tem elemento identidade (transformação identidade) e possui a propriedade do fechamento.

ii) O conjunto  $G$  tem elemento inverso definido em 1.2.2, pois  $(t t^{-1})(P) = (t^{-1} \circ t)(P) = I(P) = P$ . Portanto,  $t t^{-1} = 1$ .

iii) O conjunto  $G$  tem a propriedade associativa, ou seja,  $t_1(t_2 t_3) = (t_1 t_2)t_3$ , com  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  transformações.

$\square$

# Capítulo 2

## Isometrias

As isometrias são transformações geométricas que preservam distâncias entre pontos. Aplicando isometrias a ponto, segmento, semirreta, reta, ângulo ou polígonos, os elementos transformados são geometricamente iguais aos elementos originais. De um modo geral, dizemos que duas figuras são congruentes se existe uma isometria que transforma uma das figuras na outra.

Neste capítulo desenvolveremos um estudo das isometrias no plano. Definiremos isometrias, analisaremos o resultado de alguns produtos de isometrias e apresentaremos as isometrias básicas, a saber, translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

Para compor este capítulo, consultamos as referências [1], [5], [6] e [10].

### 2.1 Definição de isometria

Nesse trabalho, se subentende que o plano  $\varphi$  é o plano  $\mathbb{R}^2$  e a distância entre dois pontos é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}, \text{ onde } P = (p_1, p_2) \text{ e } Q = (q_1, q_2).$$

**Definição 2.1.1.** *Uma isometria no plano  $\varphi$  é uma função  $f : \varphi \rightarrow \varphi$  que preserva distância entre dois pontos quaisquer, ou seja,  $f$  é uma isometria se, e somente se, dados  $P$  e  $Q$  arbitrários em  $\varphi$  temos  $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$ , isto é,  $PQ = f(P)f(Q)$ , ou ainda, se  $f(P) = P'$  e  $f(Q) = Q'$ , então  $PQ = P'Q'$ .*

Veremos no final dessa seção que uma isometria é um função injetiva e sobrejetiva.

**Proposição 2.1.1.** *A inversa de uma isometria é uma isometria.*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma isometria tal que  $f^{-1}(P') = P$  e  $f^{-1}(Q') = Q$  com  $P, P', Q$  e  $Q'$  sendo pontos do plano. Pela Definição 2.1.1 temos que  $PQ = P'Q'$ , pois  $f$  é isometria. Mas se  $PQ = f^{-1}(P')f^{-1}(Q')$  então  $P'Q' = f^{-1}(P')f^{-1}(Q')$ , o que mostra que  $f^{-1}$  é uma isometria.  $\square$

**Proposição 2.1.2.** *Se  $f$  e  $g$  são isometrias, então o produto  $fg$  é uma isometria.*

*Demonstração.* Seja  $f(P) = P'$ ,  $g(P') = P''$ ,  $f(Q) = Q'$  e  $g(Q') = Q''$ , devemos ter  $d((fg)(P), (fg)(Q)) = d(P, Q)$ , para todo ponto  $P$  e  $Q$  do plano. De fato,

$$d((fg)(P), (fg)(Q)) = d(g(f(P)), g(f(Q))) = d(g(P'), g(Q')) = d(P'', Q'') = P'', Q''.$$

Como  $f$  e  $g$  são isometrias, então as distâncias  $PQ = P'Q'$  e  $P'Q' = P''Q''$ , logo,  $PQ = P''Q''$ .

□

**Definição 2.1.2.** *Seja  $f$  uma isometria, dizemos que  $P$  é um ponto fixo ou invariante de  $f$  se, e somente se,  $f(P) = P$ .*

**Definição 2.1.3.** *Seja  $f$  uma isometria, dizemos que  $r$  é uma reta invariante de  $f$  se, e somente se,  $f(r) = r$ .*

**Teorema 2.1.** *Se  $f$  é uma isometria, então  $f$  preserva as distâncias e transforma:*

- i) pontos colineares em pontos colineares;
- ii) pontos médios dos segmentos de reta em pontos médio dos segmentos de reta;
- iii) segmentos, semirretas e retas em, respectivamente, segmentos, semirretas e retas;
- iv) triângulos em triângulos congruentes;
- v) ângulos em ângulos congruentes;
- vi) retas perpendicularidade em retas perpendiculares.

*Demonstração.* Em cada parágrafo, considere  $f$  uma isometria tal que  $f(P) = P'$ ,  $(Q) = Q'$  e  $f(R) = R'$  com  $P, Q, R, P', Q'$  e  $R'$  sendo pontos do plano.

i) Os pontos  $P, Q$  e  $R$  são colineares se, e somente se,  $PQ + QR = PR$ , como as distâncias  $PQ = P'Q'$ ,  $QR = Q'R'$  e  $PR = P'R'$ , então  $P'Q' + Q'R' = P'R'$ , logo, se  $P, Q$  e  $R$  são colineares, então  $P', Q'$  e  $R'$  também são colineares.

ii) Sejam  $P, Q$  e  $R$  pontos colineares no plano, se  $PQ = QR$ , então  $P'Q' = Q'R'$ , isto é, se  $Q$  é ponto médio de  $P$  e  $R$ , então  $Q'$  é ponto médio de  $P'$  e  $R'$ .

iii) Se  $PQ$  é um segmento da união dos pontos  $P$  e  $Q$  e todos os pontos dentro desse intervalo, então  $f(PQ)$  é a união de  $P'$  e  $Q'$  e todos os pontos nesse intervalo. Logo  $f(PQ) = P'Q'$  e  $f$  preserva a mesma distância entre os segmentos. Caso análogo para semirretas e retas.

iv) Seja  $P, Q$  e  $R$  pontos não colineares, então  $PQ + QR > PR$ , desse modo, temos  $P'Q' + Q'R' > P'R'$  com  $P', Q'$  e  $R'$  não colineares. Seja  $PQR$  o triângulo da união dos segmentos  $PQ, QR$  e  $PR$ , então concluímos que  $\triangle(PQR) = \triangle(P'Q'R')$ .

v) Como  $f$  preserva triângulos, segue que  $f$  também transforma ângulos em ângulos congruentes, tal que  $f(\widehat{PQR}) = \widehat{P'Q'R'}$ .

vi) Com a mesma analogia do item anterior temos que  $PQ \perp QR$ , em que  $\widehat{PQR} = 90^\circ$ , então  $\widehat{P'Q'R'} = 90^\circ$ , logo  $P'Q' \perp Q'R'$ .

□

**Proposição 2.1.3.** *Toda isometria é uma função injetiva.*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $Q$  pontos do plano.

$$\text{Se } P \neq Q \Rightarrow d(P, Q) > 0 \Rightarrow d(P', Q') = d(P, Q) > 0 \Rightarrow P' \neq Q'.$$

□

**Proposição 2.1.4.** *Toda isometria é uma função sobrejetiva.*

*Demonstração.* Seja  $f$  um isometria tal que  $f(P) = P'$  e  $f(Q) = Q'$  com  $P, Q$  e suas imagens sendo pontos do plano e, ainda,  $f(r) = r'$  e  $f(s) = s'$  com  $r, s$  e suas imagens sendo retas do plano. Dividiremos a demonstração em dois casos.

i) Caso trivial, se  $P' \in r'$  então, por definição, existe um ponto  $P \in r$  tal que  $f(P) = P'$ .

ii) Caso contrário, se  $P' \notin r'$ , seja  $s'$  uma reta perpendicular a  $r'$  com  $P' \in s'$  e  $Q'$  o ponto de interseção de  $r'$  com  $s'$ . Como  $Q' \in r'$ , existe  $Q \in r$  tal que  $f(Q) = Q'$ . Seja  $s$  a reta perpendicular a  $r$  passando por  $Q$ . A imagem de  $s$  pela isometria  $f$  é perpendicular a  $r'$  e contém  $Q'$ . Logo,  $f(s) = s'$ . Como  $P' \in s'$ , existe  $P \in s$  tal que  $f(P) = P'$ .

□

Desse modo, toda isometria no plano é bijetora e também é uma transformação.

## 2.2 Transformações isométricas do plano

### 2.2.1 Translação

**Definição 2.2.1.** A translação associada ao vetor  $\vec{u}$  pode ser representada por  $T_{\vec{u}}$  ou  $T_{AB}$  no qual  $T_{\vec{u}} = T_{AB}$ , em que  $A$  e  $B$  são pontos e as extremidades do vetor  $\vec{u}$ , com sentido de  $A$  para  $B$  e faz corresponder a cada ponto  $P$  do plano um ponto  $P'$  tal que  $T_{AB}(P) = P'$ , com  $PP' = AB$ .

Se os pontos  $A, B$  e  $P$  forem colineares, então o ponto  $P'$  também será colinear, sendo o único ponto pertencente à reta definida pelos pontos  $A$  e  $B$ , que se encontra à distância de  $P$  tal que  $AB = PP'$ , com  $BP$  e  $AP'$  tendo o mesmo ponto médio. Veja a Figura 2.1

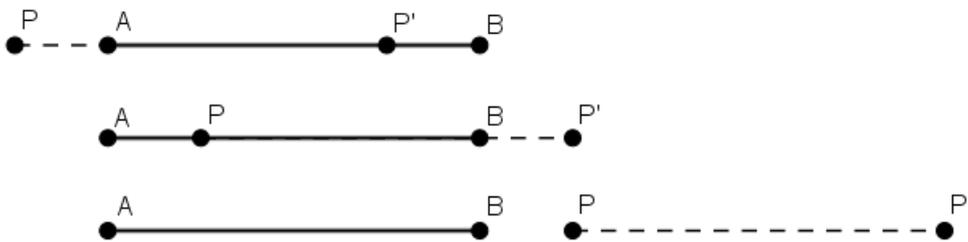


Figura 2.1: Translação entre pontos colineares

Se o ponto  $P$  for não colinear com os pontos  $A$  e  $B$ , então os pontos  $A, B, P$  e  $P'$  formam um paralelogramo, conforme está representado na figura 2.2. Da mesma forma, o ponto  $P'$  é o único ponto que se encontra à distância de  $P$  igual a  $AB$ . O segmento  $PP'$  é paralelo à  $AB$ .

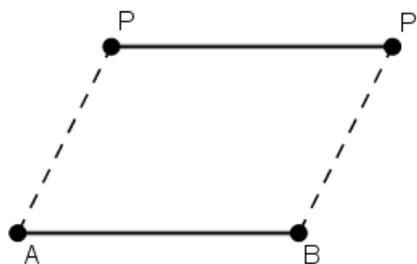


Figura 2.2: Translação entre pontos não colineares

**Proposição 2.2.1.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos do plano. A translação  $T_{AB}$  é uma isometria.

*Demonstração.* Considere dois pontos  $P$  e  $Q$  do plano e suas imagens, pela translação  $T_{AB}$ ,  $P' = T_{AB}(P)$  e  $Q' = T_{AB}(Q)$ .

Se a reta  $r$  que contém  $P$  e  $Q$  é paralela a  $AB$ , então  $T_{AB}$  aplicada em algum ponto de  $r$  é  $T_{AB} : r \rightarrow r$ .

Vamos verificar os casos observando a Figura 2.3. No primeiro caso, os segmentos  $PP'$  e  $QQ'$  não têm pontos em comum e no segundo têm.

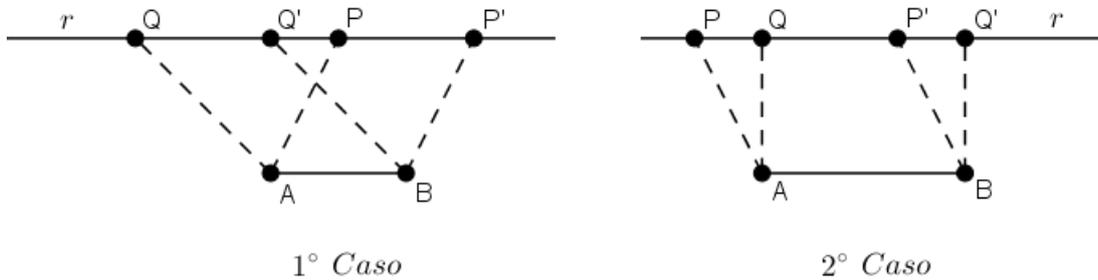


Figura 2.3: Translações de comprimento  $AB$

Assim, no primeiro caso, temos:

$$P'Q' = P'Q + QQ' = P'Q + PP' = PQ$$

e no segundo caso, temos:

$$P'Q' = QQ' - P'Q = PP' - PQ = PQ$$

Ainda, se  $r$  não é paralela a  $AB$ , então  $PP'$  e  $QQ'$  são lados opostos de um paralelogramo, o mesmo ocorre para  $PQ$  e  $P'Q'$ . Logo,  $P'Q' = PQ$ . Veja a Figura 2.4:

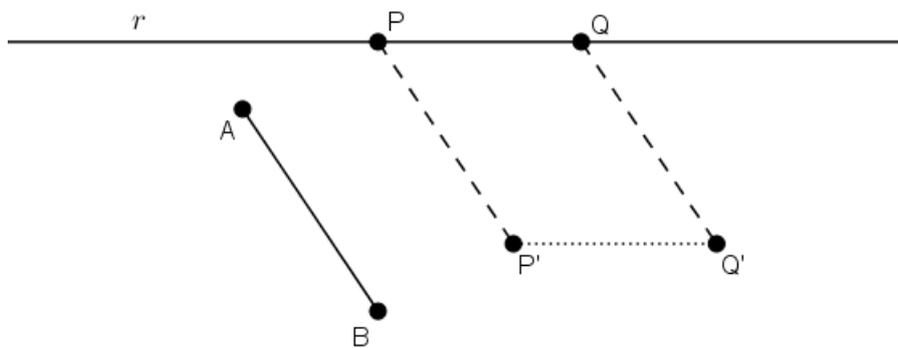


Figura 2.4: Paralelogramo formado por  $T_{AB}$

□

**Observação 2.2.1.** A inversa de  $T_{AB}$  é denotada por  $T_{AB}^{-1}$ , em que  $T_{AB}^{-1} = T_{BA}$ . Se  $A = B$ , então a translação é a identidade e tem deslocamento nulo. Qualquer translação, de deslocamento não nulo, é uma isometria que mantém os pontos não invariantes. Uma translação  $T_{AB}$  não possui ponto invariante, pois para cada ponto  $P$  no plano com  $T_{AB}(P) = P$ , temos  $PP' = AB$  o que implica  $P = P'$ .

### 2.2.2 Reflexão

**Definição 2.2.2.** *Sejam  $P, P'$  e  $M$  pontos do plano e a reta  $r$  sendo um eixo de reflexão no plano. As distâncias de  $P$  e  $P'$  em relação a reta  $r$  são iguais, com  $r$  sendo a mediatriz do segmento  $PP'$  e  $M$  o ponto de interseção entre  $PP'$  e  $r$ . Denotamos a reflexão em  $r$  por  $R_r$  e:*

- i) se  $P \in r$  então  $R_r(P) = P$ ;*
- ii) se  $P \notin r$  então  $R_r(P) = P'$ .*

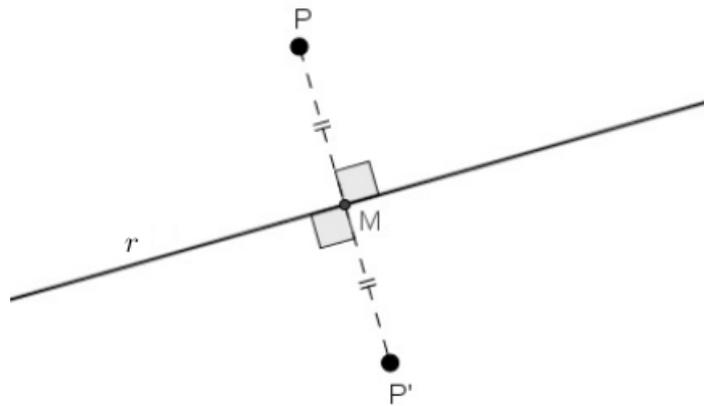


Figura 2.5: Reflexão em relação a reta  $r$

**Proposição 2.2.2.** *Seja  $r$  uma reta no plano. A reflexão em  $r$ , denotado por  $R_r$ , é uma isometria no plano.*

*Demonstração.* Seja  $r$  uma reta qualquer do plano, com  $P' = R_r(P)$  e  $Q' = R_r(Q)$  para quaisquer pontos  $P$  e  $Q$  do plano, então  $R_r$  é uma isometria se, e somente se,  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

Vamos analisar os quatro casos diferentes conforme a localização dos pontos  $P$  e  $Q$  em relação a  $r$ .

Caso 1: Se  $P \notin r$  e  $Q \in r$ . Desse modo temos que  $R_r(Q) = Q$ , com  $Q' = Q$ , como  $r$  é a mediatriz do segmento de reta  $PP'$ , então  $d(P, Q) = d(P', Q')$ .

Caso 2: Se o segmento  $PQ$  não é perpendicular, nem paralelo a  $r$  e  $P, Q \notin r$ , então temos os pontos  $M, N \in r$  que são os pontos médios de  $PP'$  e  $QQ'$ , respectivamente. Pelo critério *LAL* os triângulos  $\triangle PNQ$  e  $\triangle P'NQ'$  são congruentes, pois  $PN = P'N$ ,  $P\hat{N}Q = P'\hat{N}Q'$  e  $QN = Q'N$ , logo,  $PQ = P'Q'$ . Na Figura 2.7 vemos duas imagens, uma vez que o caso é válido independente se os pontos  $P$  e  $Q$  estão do mesmo lado ou em lados opostos de  $r$ .

Caso 3: Se  $P, Q \notin r$  e  $PQ$  é perpendicular a  $r$ , então temos duas situações:

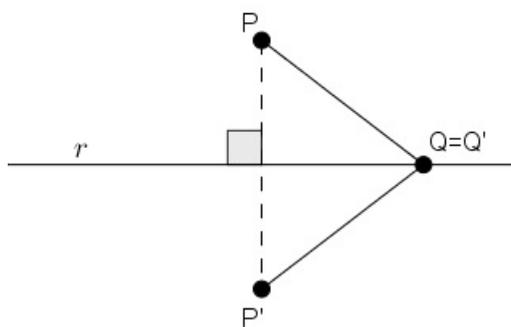


Figura 2.6: Reflexão em  $r$  em que  $P \in r$  e  $Q \notin r$

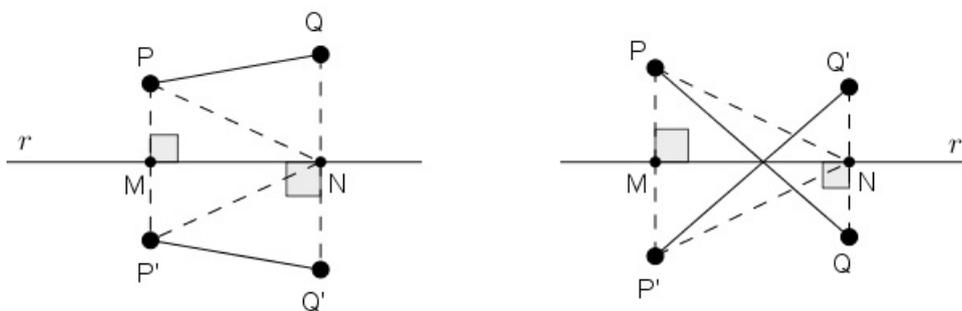


Figura 2.7: Reflexão em  $r$  em que  $P, Q \notin r$  e  $PQ$  não perpendicular a  $r$

i)  $PQ$  tem interseção com  $r$  no ponto  $M$ , logo  $d(P, Q) = QM + PM$ . Pela Definição 2.2.2, temos ainda que  $d(P', Q') = Q'M + P'M = QM + PM = d(P, Q)$ , que era o resultado desejado.

ii)  $PQ$  não tem interseção com  $r$ , logo  $d(P, Q) = |PM - QM|$ , temos ainda que  $d(P', Q') = |P'M - Q'M| = |PM - QM| = d(P, Q)$

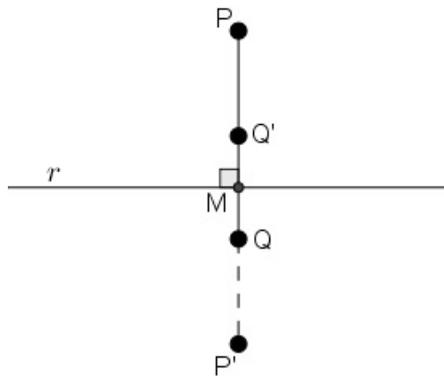


Figura 2.8: Reflexão em  $r$  em que  $P, Q \notin r$  mas  $PQ$  perpendicular a  $r$

Caso 4: Situação trivial da demonstração, se  $P, Q \in r$ , então  $R_r(P) = P' = P$  e  $R_r(Q) = Q' = Q$ , logo  $d(P, Q) = d(P', Q')$



Figura 2.9: Reflexão em  $r$  em que  $P, Q \in r$

□

**Observação 2.2.2.** O produto de duas reflexões em relação a mesma reta  $r$  é a identidade,  $R_r R_r = I$ . A inversa de uma reflexão em  $r$  é denotado por  $R_r^{-1}$ , com  $R_r^{-1} = R_r$ . A reflexão  $R_r$  em torno da reta  $r$  deixa invariante todos os pontos de  $r$ , ou seja, transforma os pontos da reta  $r$  neles próprios.

### 2.2.3 Rotação

**Definição 2.2.3.** Uma rotação é determinada por um centro de rotação  $O$  e por um ângulo  $\alpha$ , denotados por  $R_{O\alpha}$ . Assim, se a rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  for aplicada a um ponto  $P$ , obtém-se:

- (i)  $P'$  se  $P \neq O$ , tal que  $R_{O\alpha}(P) = P'$ ,  $OP = OP'$  e o ângulo orientado  $\angle(OP, OP')$  tem amplitude  $\alpha$ ;
- (ii)  $O$  se  $P = O$ , tal que  $R_{O\alpha}(P) = O$ .

**Observação 2.2.3.** Seja  $\alpha$  o ângulo da rotação  $R_{O\alpha}$  com centro no ponto  $O$ . O sentido da rotação é determinado pelo valor de  $\alpha$ . Considera-se que se  $\alpha > 0$  (positivo) a rotação é feita no sentido anti-horário e se  $\alpha < 0$  (negativo) a rotação é feita no sentido horário.

**Proposição 2.2.3.** Toda rotação é uma isometria.

*Demonstração.* Considere a rotação  $R_{O\alpha}$ .

Se os pontos  $O, A$  e  $B$  forem colineares, temos as seguintes situações, ou  $AB = OB - OA = A'B'$  ou  $AB = OB + OA = A'B'$  (ver Figura 2.10), em ambas situações  $AB = A'B'$  e os segmentos de reta  $OA = OA'$  e  $OB = OB'$ .

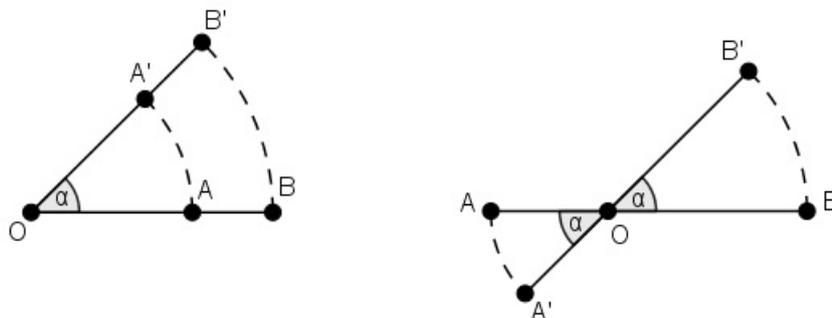


Figura 2.10: Rotações de ângulo  $\alpha$  de pontos colineares

Mas, se os pontos  $O, A$  e  $B$  não forem colineares, então  $A\hat{O}B'$  e  $A'\hat{O}B$  têm a mesma bissetriz  $b$ , logo  $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ , aplicando o critério de congruência de triângulos  $LAL$ , pois  $OA = OA'$  e  $OB = OB'$ , podemos concluir que  $AB = A'B'$ . Veja a figura abaixo.

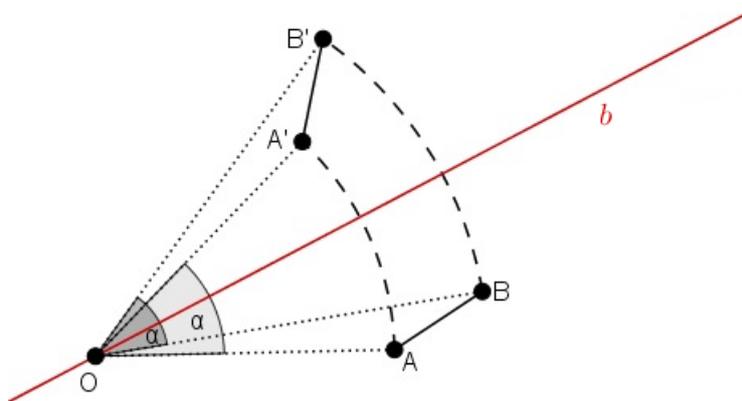


Figura 2.11: Rotações de ângulo  $\alpha$  de pontos não colineares

□

**Observação 2.2.4.** A rotação deixa invariante um único ponto no plano, o centro da rotação. A inversa da rotação  $R_{O\alpha}$  é a rotação  $R_{O(-\alpha)}$ , isto é,  $R_{O\alpha}^{-1} = R_{O(-\alpha)}$ . Quando  $\alpha = 180^\circ$ , a rotação  $R_{O\alpha}$  é simétrica ao ponto  $O$  ou meia-volta de centro  $O$ , denotamos a meia-volta em  $O$  por  $H_O$ .

### 2.2.4 Reflexão Deslizante

**Definição 2.2.4.** A reflexão deslizante é a isometria que se obtém pelo produto de uma reflexão numa dada reta  $r$ , a saber  $R_r$ , seguida por uma translação  $T_{AB}$  com  $A$  e  $B$  sendo pontos do plano e  $AB$  paralelo à reta  $r$ , ou vice-versa, isto é, o produto de uma translação seguida de uma

reflexão, tendo a reta  $r$  e o segmento  $AB$  a mesma direção. Denotamos a reflexão deslizante por  $\gamma$  e definimos ela pelo produto  $R_r T_{AB}$ . Desse modo, dado um ponto  $P$  no plano temos  $R_r T_{AB}(P) = P'$ . Veja a figura abaixo:

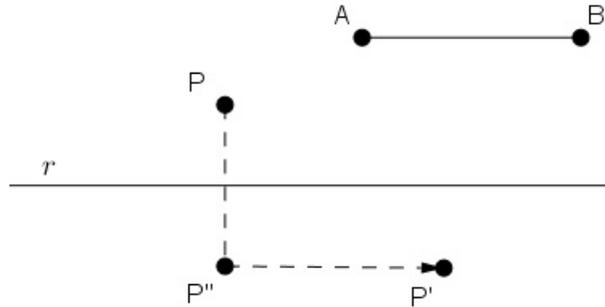


Figura 2.12: Reflexão deslizante  $\gamma(P) = R_r T_{AB}(P) = P'$

**Proposição 2.2.4.** *Toda reflexão deslizante é uma isometria.*

*Demonstração.* A reflexão deslizante é a composição das isometrias reflexão e translação, como vimos na Proposição 2.1.2, o produto de duas isometrias é uma isometria, logo, a reflexão deslizante é uma isometria. □

**Observação 2.2.5.** *A inversa da reflexão deslizante  $\gamma$  é representada por  $\gamma^{-1}$ . A reta  $r$  da reflexão deslizante é invariante, mas os pontos pertencentes à  $r$  não são fixos.*

## 2.3 Produto de isometrias

As Proposições 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 são resultados que usaremos para justificar os produtos das isometrias que veremos a seguir.

**Proposição 2.3.1.** *Se  $f$  é uma isometria que fixa dois pontos distintos de uma reta  $r$ , então  $f$  fixa todos os pontos de  $r$ .*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma isometria que fixa os pontos distintos  $A$  e  $B$  de uma reta  $r$ .

Se existe um ponto  $P \in r$  tal que  $P' = f(P) \neq P$  então, pelo fato de  $d(A, P) = d(f(A), f(P)) = d(A, P')$ , temos que  $A$  é o ponto médio do segmento  $PP'$ . Analogamente, teríamos que  $B$  seria o ponto médio de  $PP'$ , logo  $A = B$ , que é um absurdo. Logo, temos que  $f$  fixa qualquer ponto da reta  $r$ . □

**Proposição 2.3.2.** *Se  $f$  é uma isometria que fixa três pontos não colineares, então  $f$  é a identidade.*

*Demonstração.* Sejam  $P$ ,  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$  e  $f(C) = C$  com  $A, B$  e  $C$  sendo pontos quaisquer do plano e não colineares. Desse modo e pela Proposição 2.3.1, temos que as retas que contém os pontos:  $A$  e  $B$ ,  $A$  e  $C$  e  $B$  e  $C$  são invariantes por  $f$ .

Agora tracemos uma reta  $m$  em  $P$  que intersecta o triângulo  $\triangle ABC$  em pelo menos dois pontos distintos, chamemos de  $P_1$  e  $P_2$ . Como esses dois pontos da reta  $m$  pertencem a duas retas distintas que fixam seus pontos, então, novamente pela Proposição 2.3.1,  $m$  é uma reta cujo os pontos são fixos. Portanto, como  $P \in m$ , então  $f(P) = P$  para todo ponto  $P$  do plano, logo  $f$  é a identidade.

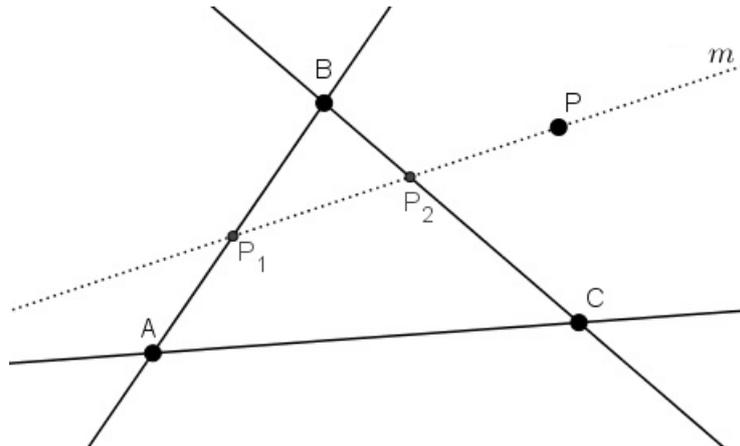


Figura 2.13: Reta  $m$  invariante

□

**Proposição 2.3.3.** *Se  $f$  e  $g$  são isometrias que coincidem em três pontos distintos não colineares, então  $f = g$ .*

*Demonstração.* Seja  $f$  e  $g$  isometrias que coincidem em três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$ , então temos que  $f(A) = g(A) = A'$ ,  $f(B) = g(B) = B'$  e  $f(C) = g(C) = C'$ .

Desse modo podemos dizer que:

$$\begin{aligned} (gf^{-1})(A) &= f^{-1}(A') = A \\ (gf^{-1})(B) &= f^{-1}(B') = B \\ (gf^{-1})(C) &= f^{-1}(C') = C \end{aligned}$$

Logo, segue da Proposição 2.3.2 que  $gf^{-1} = I$ . Podemos concluir então que  $f = g$ .

□

### 2.3.1 Produto de Translações

**Proposição 2.3.4.** *O produto de translações é uma translação.*

*Demonstração.* Como analisado na Definição 2.2.1, a translação está associada a um vetor e esse vetor pode ser definido através de pontos. Tomemos  $A, B$  e  $C$  pontos do plano, agora

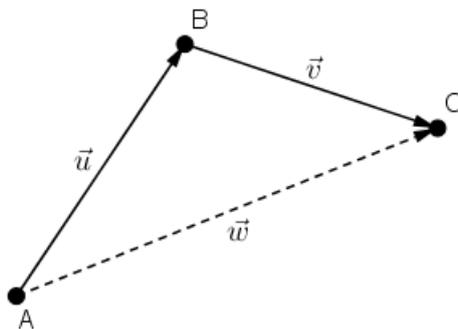


Figura 2.14: Composição duas translações é uma translação

sejam  $T_{\vec{u}} = T_{AB}$  e  $T_{\vec{v}} = T_{BC}$ , se  $\vec{w}$  é o vetor soma de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então temos que  $T_{\vec{w}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{u}}T_{\vec{v}} = T_{AB}T_{BC} = T_{AC}$ .

□

### 2.3.2 Produto de reflexões

**Proposição 2.3.5.** *Seja  $r$  uma reta qualquer no plano e sejam  $m$  e  $n$  retas perpendiculares a  $r$  que a interceptam, respectivamente, nos pontos  $P$  e  $Q$ . A isometria  $h$  composta pelas reflexões  $f$  e  $g$  nas retas  $m$  e  $n$  é uma translação paralela a  $r$  de comprimento igual ao dobro da distância entre  $m$  e  $n$  e com sentido de  $m$  para  $n$ , ou seja,  $h = fg = R_mR_n = T_{2PQ}$*

*Demonstração.* Seja  $r$  uma reta perpendicular as retas  $m$  e  $n$  e ainda,  $A, B$  e  $C$  pontos distintos do plano, com  $AB$  perpendicular a  $r$ , com  $B, C \in r$  e  $C \in m$ . Pela Definição 2.2.2 temos que  $R_m(A) = A'$  e  $R_n(A') = A''$  e se os pontos  $P$  e  $Q$  são os pontos médios de  $AA'$  e  $A'A''$ , respectivamente, em que  $P \in m$  e  $Q \in n$ , temos que  $AP = A'P$  e  $A'Q = A''Q$ . Como o comprimento do segmento  $AA'' = AP + A'P + A'Q + A''Q$ , a distância entre  $m$  e  $n$  pode ser dada por  $d = AP + A''Q$ , logo  $AA'' = 2d$ . Caso análogo para o ponto  $B$ , já que  $AB$  é paralelo a  $m$ , assim  $R_mR_n(B) = B'$ , com  $BB' = 2d$ .

Verificando o que acontece no ponto  $C$ , temos que  $R_m(C) = C$  e  $R_n(C) = C'$ , com  $CC' = 2d = 2(PA' + A'Q)$ . Se considerarmos uma translação com deslocamento igual ao dobro do comprimento de  $PQ$  e com sentido de  $P$  para  $Q$ , temos que  $T_{2PQ}(A) = A'', T_{2PQ}(B) = B'$  e  $T_{2PQ}(C) = C'$ . Logo, Pela proposição 2.3.3,  $R_mR_n = T_{2PQ}$ .

Podemos concluir que quando se efetuam reflexões em eixos paralelos, se o número de reflexões for par, a isometria obtida é uma translação. □

**Proposição 2.3.6.** *O produto de duas reflexões em eixos não paralelos é uma rotação. De outro modo, sejam  $r$  e  $s$  retas do plano e  $O$  o ponto de intersecção entre essas retas, se  $f = R_rR_s$ , com  $r$  e  $s$  não paralelas, então  $f$  é uma rotação com centro no ponto  $O$  e com ângulo igual ao dobro do ângulo que as duas retas fazem entre si.*

*Demonstração.* Seja  $O$  o ponto de intersecção entre  $r$  e  $s$  e  $P$  e  $A$  pontos do plano.

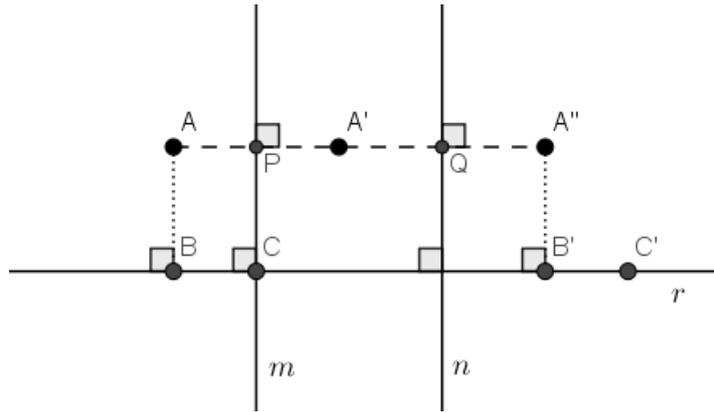


Figura 2.15: A composição de duas reflexões paralelas é uma translação

Sejam  $P' = R_r(P)$  e  $P'' = R_s(P')$ . Seja  $A \in r$  o ponto que  $r$  intersecta  $PP'$  e  $A' \in s$  o ponto  $s$  que intersecta  $P'P''$ .

Como  $AP = AP'$ , então os ângulos  $\widehat{AOP}$  e  $\widehat{AOP'}$  são iguais, pois os triângulos  $\triangle AOP$  e  $\triangle AOP'$  são congruentes, caso análogo para  $\triangle A'OP'$  e  $\triangle A'OP''$ .

Para determinar o ângulo da rotação, seja  $\alpha = \widehat{AOP} = \widehat{AOP'}$ ,  $\beta = \widehat{A'OP'} = \widehat{A'OP''}$  e  $\theta = \alpha + \beta$ , como  $\widehat{POP''} = \widehat{AOP} + \widehat{AOP'} + \widehat{A'OP'} + \widehat{A'OP''}$ , temos que:

$$\widehat{POP''} = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\theta$$

Em outra situação pode-se obter o valor para  $\theta$  através de  $\alpha - \beta = \theta$ . A demonstração é feita de modo análogo ao anterior, mas com os vértices dos triângulos dispostos em lugares diferentes, porém o resultado final se mantém inalterado,  $\widehat{POP''} = \alpha + \alpha - \beta - \beta = 2\theta$ .

Logo,  $\widehat{POP''} = 2\theta$  e a rotação está centrada no ponto de intersecção dos eixos.

Pode-se concluir que quando se efetuam reflexões em eixos não paralelos se o número de reflexões for par, a isometria obtida é uma rotação.

□

**Proposição 2.3.7.** *Seja  $l$  uma reta passando por um ponto  $O$  e  $R_{\theta O}$  uma rotação nesse ponto. Então existem e são únicas as retas  $r$  e  $s$  tais que  $R_{\theta O} = R_r R_l = R_l R_s$  e os ângulos entre  $r$  e  $l$  e  $l$  e  $s$  são iguais a  $\frac{\theta}{2}$ .*

*Demonstração.* Seja  $R_{\theta O}(P) = P'$ . De acordo com a Proposição 2.3.6, temos que a rotação  $R_{\theta O}$  pode ser definida como o produto de duas reflexões em retas concorrentes, com centro no ponto de intersecção e sendo o ângulo entre essas duas retas a metade do ângulo existente na rotação.

Logo, as retas  $r$  e  $s$  são únicas e tem o mesmo ângulo com  $l$ . Veja a Figura 2.17

□

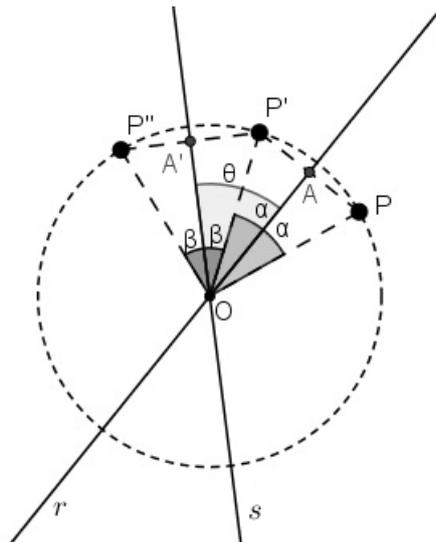


Figura 2.16: A composição de duas reflexões não paralelas é uma rotação

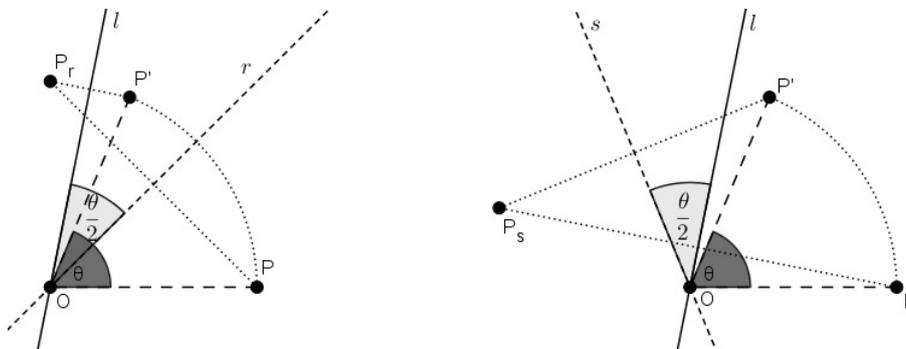


Figura 2.17:  $R_{\theta O} = R_r R_l$  e  $R_{\theta O} = R_l R_s$

**Proposição 2.3.8.** *Sejam  $r, s$  e  $t$  três retas concorrentes passando por um ponto  $P$ . Então existe uma única reta  $l$  passando por  $P$  tal que  $R_r R_s R_t = R_l$ .*

*Demonstração.* Sejam os eixos de  $R_r, R_s$  e  $R_t$  concorrentes no ponto  $P$ . Tomemos a reta  $l$  também passando por  $P$  tal que o ângulo entre  $l$  e  $t$  é igual ao ângulo entre  $r$  e  $s$  e o sentido de  $l$  para  $t$  é o mesmo que de  $r$  para  $s$ . Pela Proposição 2.3.7 temos que  $R_r R_s = R_l R_t$ . Logo, o produto  $R_r R_s R_t = R_l R_t R_t = R_l$ . □

**Proposição 2.3.9.** *Sejam  $r, s$  e  $t$  retas não concorrentes num mesmo ponto e nem duas a duas paralelas, então o produto entre essas três retas é uma reflexão deslizante  $\gamma$ , ou seja,  $R_r R_s R_t = \gamma$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $r$  e  $s$  se intersectam no ponto  $P$  e seja  $l$  a reta que passa por  $P$  e é perpendicular a reta  $t$ , seja ainda  $Q$  o ponto de intersecção das retas  $l$  e  $t$ . Usando a Proposição 2.3.8, sabemos que existe uma reta  $m$  passando por  $P$  tal que  $R_r R_s = R_m R_l$  e multiplicando por  $R_t$  em ambos lados da equação obtemos  $R_r R_s R_t = R_m R_l R_t$ . Consideremos ainda a reta  $n$  que passa por  $Q$  perpendicular a  $m$  e  $n'$  a reta que passa por  $Q$

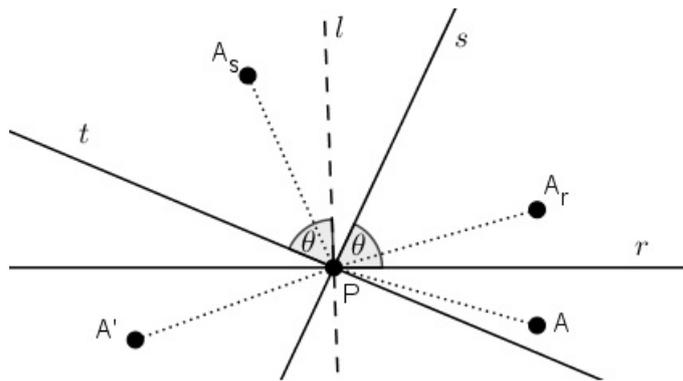


Figura 2.18:  $R_r R_s R_t = R_l$

perpendicular a  $n$ , então temos a meia volta  $H_Q = R_l R_t = R_{n'} R_n$ .

Como  $n$  é perpendicular a  $n'$  e  $n$  é perpendicular a  $m$ , segue que  $m$  e  $n'$  são paralelas, desse modo considere a translação  $T_{mn'} = R_m R_{n'}$ .

Logo, temos que  $R_r R_s R_t = R_m R_{n'} R_n = T_{mn'} R_n = \gamma$  é uma reflexão deslizante com eixo em  $n$  e a translação com deslocamento igual ao dobro da distância entre  $mn'$ .

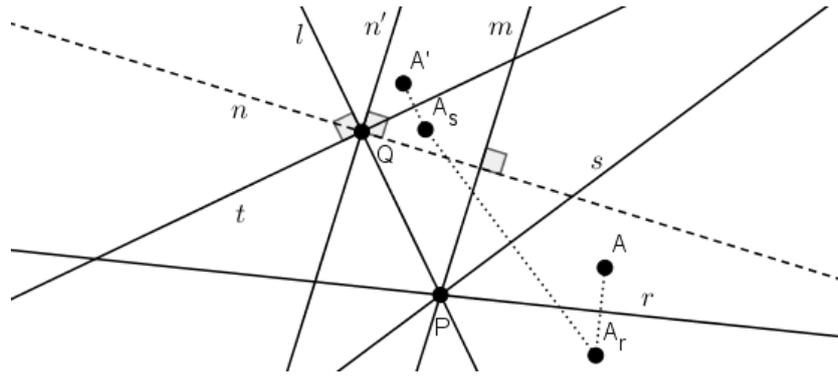


Figura 2.19:  $R_r R_s R_t = \gamma$

□

**Proposição 2.3.10.** *Sejam as retas  $r$  e  $s$  perpendiculares, o produto  $R_r R_s$  é uma meia-volta cujo centro é o ponto de intersecção entre as retas  $r$  e  $s$ .*

*Demonstração.* Seja  $O$  o ponto de intersecção entre as retas perpendiculares  $r$  e  $s$ , pela Proposição 2.3.6 temos que  $R_r R_s = R_{O\theta}$ , com  $\theta$  igual ao dobro do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$ , isto é,  $\theta = 180^\circ$ . Desse modo  $R_r R_s = R_{O180^\circ} = H_O$ , com  $H_O$  sendo a meia volta de centro em  $O$ .

□

**Proposição 2.3.11.** *O produto de duas meias-voltas é uma translação e, reciprocamente, uma translação sempre pode ser escrita como o produto de duas meias-voltas.*

*Demonstração.* Seja  $r$  e  $s$  duas retas paralelas do plano perpendiculares a reta  $t$  e, ainda, os pontos  $P$  e  $Q$  são intersecções de  $r$  e  $s$  em  $t$ , respectivamente. Considere  $H_P = R_r R_t$  e  $H_Q = R_t R_s$ , fazendo o produto entre essas duas meia-volta teremos  $H_P H_Q = R_r R_t R_t R_s = R_r R_s$ , como  $r$  e  $s$  são paralelas, e de acordo com a Proposição 2.3.5, temos que o produto  $R_r R_s$  é uma translação com deslocamento igual ao dobro da distância entre as retas e com sentido de  $r$  para  $s$ . Caso análogo para a volta.

□

**Proposição 2.3.12.** *O produto de uma meia volta e uma reflexão (ou vice-versa) é uma reflexão deslizante, desde que o centro da meia volta não pertence à reta de reflexão.*

*Demonstração.* Seja a meia volta  $H_O$  e a reflexão  $R_m$  em relação à reta  $m$ . Considere a reta  $r$  perpendicular à reta  $m$  passando pelo ponto  $O$ , e seja  $O'$  a intersecção das retas  $r$  e  $m$ . Assim,  $R_m = H'_O R_r = R_r H'_O$ . Logo,  $H_O R_m = H_O H'_O R_r = T R_r = R_r T$ , em que  $T$  é a translação  $H_O H'_O$ , pela Proposição 2.3.11. Observe que o segmento  $OO'$  está contido na reta  $r$ , assim o deslocamento da translação é na direção da reta  $r$ . Então o produto de uma meia volta  $H_O$  e uma reflexão  $R_m$  é uma reflexão deslizante, desde que o centro da meia volta não pertence à reta de reflexão.

□

### 2.3.3 Produto de rotações

**Proposição 2.3.13.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos do plano, considere ainda as rotações  $R_{A\alpha}$  e  $R_{B\beta}$ . A isometria resultante do produto  $R_{A\alpha}R_{B\beta}$  depende da soma entre  $\alpha$  e  $\beta$ , isto é, se  $\alpha + \beta$  for igual a  $0^\circ$  ou  $360^\circ$  então o produto  $R_{A\alpha}R_{B\beta}$  é uma translação, caso contrário a isometria é uma rotação.*

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 2.3.6, uma rotação pode ser escrita como o produto da reflexão entre duas retas concorrentes. Considere então as rotações  $R_{A\alpha} = R_rR_s$  e podemos impôr, sem perda de generalidade, que uma dessas retas do produto de  $R_{A\alpha}$  também pertence ao produto de reflexões de  $R_{B\beta}$ , seja essa reta  $s$ , desse modo  $R_{B\beta} = R_sR_t$ .

Assim  $R_{A\alpha}R_{B\beta} = R_rR_sR_sR_t = R_rR_t$  isto é, o produto de duas rotações é igual ao produto de duas reflexões.

Sabemos que o produto de duas reflexões em retas concorrentes é uma rotação, logo  $R_{A\alpha}R_{B\beta} = R_{C\alpha+\beta}$ , sendo  $C$  o ponto de intersecção entre as retas  $r$  e  $t$ . Caso contrário, as duas retas serão paralelas e teremos uma translação e  $\alpha + \beta$  será  $0^\circ$  quando o sentido de rotação dos ângulos são diferentes ou  $360^\circ$  quando o sentido de rotação dos ângulos são iguais, então  $R_{A\alpha}R_{B\beta} = T_{rt}$ , com  $T_{rt}$  sendo a translação com o dobro do deslocamento da distância entre  $r$  e  $t$  e com sentido de  $r$  para  $t$ .

□

### 2.3.4 Produto de reflexões deslizantes

**Proposição 2.3.14.** *Sejam  $\gamma$  e  $\epsilon$  reflexões deslizantes. A isometria resultante do produto  $\gamma\epsilon$  é ou uma rotação, se as retas de simetria das reflexões deslizantes são concorrentes, ou é uma translação, se as retas de simetria das reflexões deslizantes são paralelas.*

*Demonstração.* Pela Definição 2.2.4, uma reflexão deslizante é dada pelo produto de uma reflexão e uma translação, em que o deslocamento da translação é paralelo a reta de reflexão. E, como uma translação pode ser expressa como o produto de duas reflexões em retas paralelas, as reflexões deslizantes  $\gamma$  e  $\epsilon$  podem ser expressas por

$$\begin{aligned}\gamma &= R_1R_2R_3 = R_3R_1R_2 \\ \epsilon &= R_4R_5R_6 = R_6R_4R_5.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

com  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  reflexões em relação as retas  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ , sendo  $R_1R_2$  e  $R_4R_5$  as translações de  $\gamma$  e  $\epsilon$ , respectivamente, e  $R_3$  e  $R_6$  as reflexões de  $\gamma$  e  $\epsilon$ , também respectivamente. Além disso,  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas e perpendiculares ao eixo  $r_3$  da reflexão deslizante  $\gamma$  e, também,  $r_4$  e  $r_5$  são paralelas e perpendiculares ao eixo  $r_6$  de  $\epsilon$ .

Agora, para analisar o produto das reflexões  $\gamma$  e  $\epsilon$ , consideramos dois casos.

Caso 1: Os eixos  $r_3$  e  $r_6$  das reflexões deslizantes  $\gamma$  e  $\epsilon$ , respectivamente, são paralelos.

Temos que  $\gamma\epsilon = R_1R_2R_3R_6R_4R_5$ , em que os produtos  $R_1R_2$ ,  $R_3R_6$  e  $R_4R_5$  são translações, pois o produto de reflexões em retas paralelas é uma translação. E, pela Proposição 2.3.4, sabendo que o produto de translações é uma translação, concluímos que  $\gamma\epsilon$  é uma translação.

Caso 2: Os eixos  $r_3$  e  $r_6$  das reflexões deslizantes  $\gamma$  e  $\epsilon$ , respectivamente, são concorrentes.

Seja  $P$  o ponto de intersecção dos eixos  $r_3$  e  $r_6$  das reflexões deslizantes  $\gamma$  e  $\epsilon$ , respectivamente. As retas  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_4$  e  $r_5$  podem ser tomadas com  $r_2$  e  $r_4$  passando pelo ponto  $P$ . Como  $r_2$  é perpendicular a  $r_3$  e também  $r_4$  é perpendicular a  $r_6$ , então  $R_2R_3 = R_3R_2 = R_4R_6 = R_6R_4 = H_P$ , desse modo  $\gamma\epsilon = R_1R_2R_3R_4R_5R_6 = R_1R_6R_4R_4R_5R_6 = R_1R_6R_5R_6 = R_1R_6R_6R_5 = R_1R_5$ . Como  $r_1$  e  $r_5$  são perpendiculares a  $r_3$  e  $r_6$ , respectivamente, e ainda,  $r_3$  e  $r_6$  são concorrentes, então  $r_1$  e  $r_5$  tem ponto de intersecção. Portanto, podemos concluir que o produto  $R_1R_5 = \gamma\epsilon$  é uma rotação. □

### 2.3.5 Isometrias opostas e diretas

**Teorema 2.2.** *As isometrias translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante podem ser escritas como o produto de no máximo três reflexões.*

*Demonstração.* Caso trivial para a isometria reflexão.

As demais isometrias do teorema já foram comprovadas nas proposições anteriores, a saber: pela Proposição 2.3.5, a translação pode ser escrita como o produto de duas reflexões em retas paralelas, pela Proposição 2.3.6, a rotação pode ser escrita como o produto de duas reflexões em retas concorrentes e, pela Proposição 2.3.9, a reflexão deslizante foi expressa como o produto de uma reflexão e uma translação, como essa última pode ser escrita como o produto de duas reflexões em retas paralelas, temos que a reflexão deslizante pode ser escrita usando três reflexões.

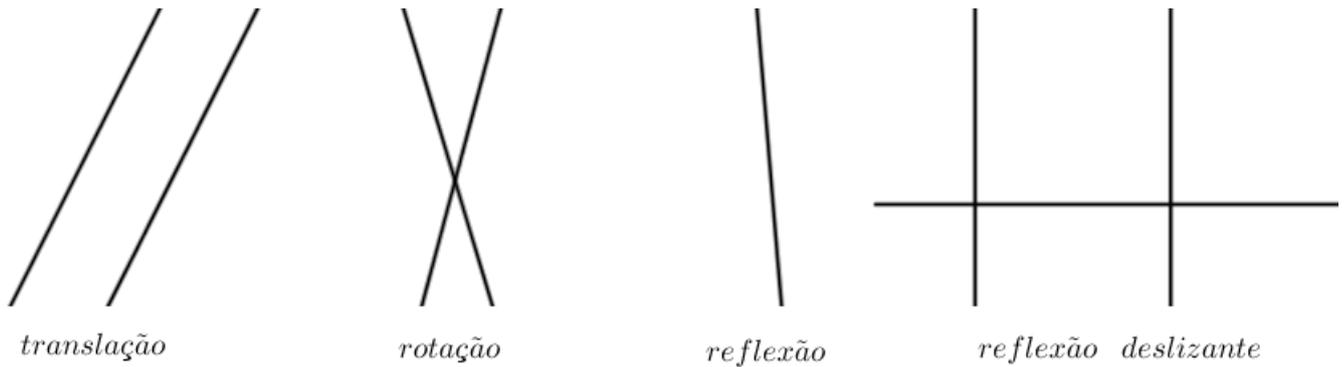


Figura 2.20: Isometrias apresentadas como o produto de no máximo três reflexões

□

**Proposição 2.3.15.** *O produto de quatro reflexões pode ser expresso pelo produto de duas reflexões, de forma geral, o produto de um número par de reflexões pode ser escrito como o produto de duas reflexões.*

*Demonstração.* Sejam as reflexões  $R_1, R_2, R_3, R_4$  em relação às retas  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , respectivamente. Considere um ponto  $P$  na reta  $r_1$ . Existem retas  $r'_2$  e  $r'_3$ , com  $P$  pertencente à  $r'_2$  e  $R_2R_3 = R'_2R'_3$ , em que  $R'_2$  e  $R'_3$  são as reflexões em relação às retas  $r_2$  e  $r_3$ , respectivamente, assim,  $R_1R_2R_3R_4 = R_1R'_2R'_3R_4$ .

A seguir, considere as retas  $r''_3$  e  $r''_4$  com  $P$  pertencente à reta  $r''_3$  e  $R'_3R_4 = R''_3R'_4$ , em que  $R''_3$  e  $R'_4$  são as reflexões em relação às retas  $r''_3$  e  $r''_4$ , respectivamente. Logo,  $R_1R_2R_3R_4 = R_1R'_2R'_3R_4 = R_1R'_2R''_3R'_4$  com  $P$  pertencente às retas das três primeiras reflexões. Assim, pela Proposição 2.3.8, existe uma reta  $r$  passando pelo ponto de concorrência  $P$  das retas destas três reflexões com  $R_1R'_2R''_3 = R_r$ , em que  $R_r$  é a reflexão em relação à reta  $r$ . Portanto,  $R_1R_2R_3R_4 = R_rR'_4$ , ou seja, o produto das quatro reflexões pode ser expresso como o produto de duas reflexões.

Como o produto de três reflexões sempre pode ser escrito como o produto de uma reflexão, então podemos concluir que um número par de reflexões,  $2n$  com  $n \in \mathbb{N}$ , pode ser escrito como o produto de duas reflexões. □

**Proposição 2.3.16.** *O produto de um número ímpar de reflexões pode ser escrito como um produto de três reflexões ou é igual a uma reflexão.*

*Demonstração.* Segue como consequência da Proposição 2.3.15. □

**Definição 2.3.1.** *Uma isometria é direta (ou par) se é dada pela composição de um número par de reflexões, caso contrário a isometria é oposta (ou ímpar).*

**Observação 2.3.1.** *A identidade  $I$  é uma isometria direta, pois pode ser expressa como o produto de duas reflexões, ou seja,  $I = R_rR_r$ , em que  $r$  é uma reta qualquer do plano.*

**Proposição 2.3.17.** *Uma isometria par ou é uma rotação ou uma translação e uma isometria ímpar ou é uma reflexão ou uma reflexão deslizante.*

*Demonstração.* Essa demonstração segue do Teorema 2.2. □

**Proposição 2.3.18.** *Uma isometria no plano com um ponto invariante é ou uma reflexão ou uma rotação, dependendo se é direta ou oposta.*

*Demonstração.* Como visto na Proposição 2.2.3, a isometria de rotação  $R_{O\theta}$ , com ângulo  $\theta \neq 0$ , deixa invariante apenas um ponto, que é o centro de rotação  $O$ . Ainda, na Proposição 2.2.2, temos que a reflexão  $R_r$  deixa invariante todos os pontos que pertencem a reta  $r$ .

Logo, segue que as isometrias, não identidade, que possuem pontos invariantes ou é uma rotação, se for direta, ou uma reflexão, se for oposta.

□

**Proposição 2.3.19.** *Toda isometria oposta sem ponto invariante é uma reflexão deslizante.*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma isometria oposta sem ponto invariante e  $A$  um ponto do plano com  $f(A) = A'$ . Logo,  $A \neq A'$ , pois  $f$  não tem ponto invariante. Seja a meia volta  $H_O$  tal que  $O$  é o ponto médio do segmento  $AA'$ . Assim,  $H_O(A) = A'$  e  $H_O(A') = A$ . Considere a isometria dada pelo produto  $H_O f$ , que é oposta pois  $H_O$  é direta (rotação de  $180^\circ$ ) e  $f$  é oposta. Então  $(H_O f)(A') = f(H_O(A')) = f(A) = A'$  pois  $H_O(A') = A$  e  $f(A) = A'$ . Assim, a isometria oposta  $H_O f$  tem o ponto invariante  $A'$ , e isto implica que  $H_O f$  é uma reflexão  $R_r$  na reta  $r$ , isto é,  $H_O f = R_r$ . Portanto,  $f = H_O R_r$  com  $R_r(O) = H_O f(O) = f(H_O(O)) = f(O) \neq O$  pois  $f$  não tem ponto invariante. Assim a reta  $r$  da reflexão  $R_r$  não contém o ponto  $O$  e, então  $f$  é o produto de uma meia-volta e uma reflexão em relação a reta  $r$  que não passa pelo centro da meia-volta. Logo,  $r$  é uma reflexão deslizante.

□

## Capítulo 3

# Reticulados, Redes, Centros de Simetria e Simetria Axial

Neste capítulo apresentamos os conceitos de revestimento, reticulados, redes, centros de simetria e célula básica. Célula básica constitui em uma pequena parte de um padrão ornamental no plano, que possui as características gerais do padrão, e, ainda, que possibilita reconstruí-lo completamente por meio de cópias da célula e justapostas de modo adequado. Estabeleceremos o Teorema da Restrição Cristalográfica que diz sobre os possíveis centros de simetria de rotação de um padrão no plano. Estes conceitos e teorema são importantes para o estudo que faremos no capítulo 4 sobre os grupos de simetrias de padrões no plano, ou seja, os grupos de revestimentos.

Os grupos de revestimentos serão estudados no capítulo 4, mas serão definidos nesse momento. Este capítulo está fundamentado principalmente nas Referências [6] e [10].

### 3.1 Reticulados e redes

**Definição 3.1.1.** *Um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  é um grupo de isometrias cujas translações são as de um grupo  $\langle T_1, T_2 \rangle$  em que  $T_1 = T_{AB}$  e  $T_2 = T_{AC}$  e  $A, B$  e  $C$  são pontos não colineares.*

**Observação 3.1.1.** *Dizemos que as translações  $T_1$  e  $T_2$  são translações independentes quando os pontos  $A, B$  e  $C$  não são colineares e  $T_1 = T_{AB}$  e  $T_2 = T_{AC}$ .*

**Definição 3.1.2.** *Seja  $\mathcal{W}$  um grupo de revestimento. Um reticulado de  $\mathcal{W}$  determinado pelo ponto  $A$  é o conjunto de todas as imagens de  $A$  pelas translações do grupo  $\mathcal{W}$ .*

**Observação 3.1.2.** *Toda translação no grupo  $\mathcal{W}$  é do tipo  $T_1^i T_2^j$ . Dado um ponto  $A$  no plano, os pontos  $A_{ij}$  formam um reticulado onde  $A_{ij} = (T_1^i T_2^j)(A)$ . O quadrilátero  $A_{ij} A_{(i+1)j} A_{(i+1)(j+1)} A_{i(j+1)}$  é um paralelogramo.*

**Definição 3.1.3.** *Sejam  $r$  e  $s$  as retas que contêm os segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, com  $A, B$  e  $C$  sendo pontos não colineares. A rede, de um grupo  $\mathcal{W}$  de revestimento, são todas as imagens de  $r$  e  $s$  pelas translações  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  do grupo  $\mathcal{W}$ .*

**Definição 3.1.4.** *Uma célula básica para um grupo  $\mathcal{W}$  de revestimento com relação a um ponto  $A$  e translações geradoras  $T_1$  e  $T_2$  é uma região quadrilátera com vértices  $A_{ij}, A_{(i+1)j}, A_{(i+1)(j+1)}$  e  $A_{i(j+1)}$ , e, é sempre uma região determinada por um paralelogramo. Um reticulado determinado por translações com uma célula retangular é chamado reticulado retangular e, se for determinado por uma célula em forma de um losango é chamado reticulado rômbo. Uma célula básica é também chamada uma região fundamental.*

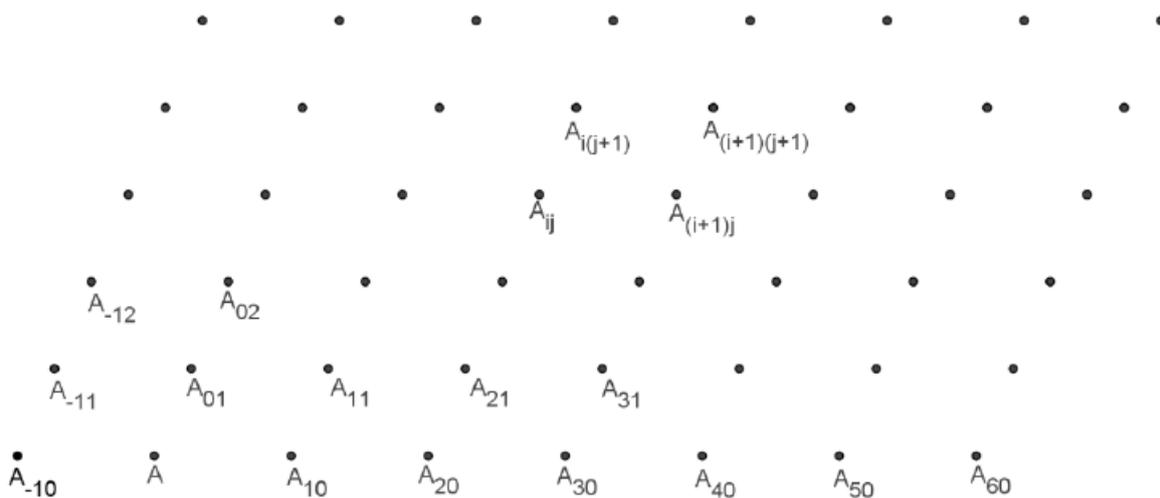


Figura 3.1: Reticulado para o grupo de translações determinado pelo ponto  $A : A_{ij} = (T_1^i T_2^j)(A)$

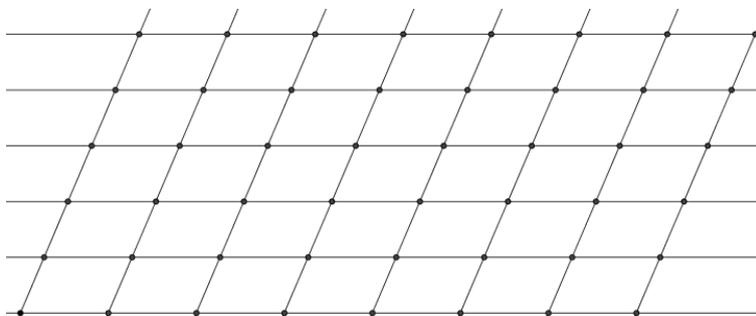


Figura 3.2: Rede determinada por um reticulado

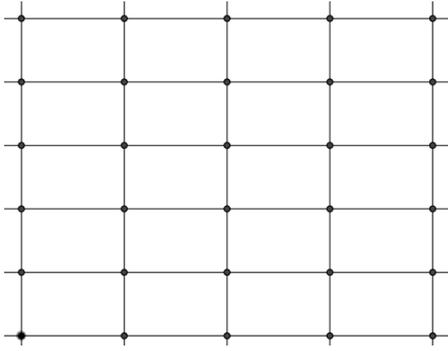


Figura 3.3: Reticulado retangular

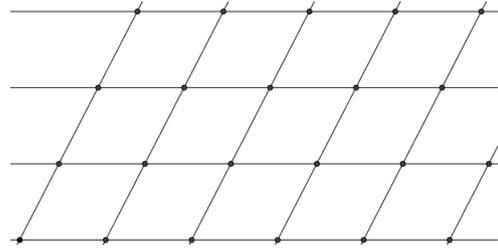


Figura 3.4: Reticulado rômico

A forma da região fundamental (célula básica) não é única. Qualquer paralelogramo servirá, desde que tenha 4 pontos do reticulado para seus vértices e nenhum outro em seus bordos ou em seu interior.

**Proposição 3.1.1.** *O grupo gerado pelas translações  $T_1$  e  $T_2$  é da mesma forma gerado pelas translações  $T_1^a T_2^b, T_1^c T_2^d$  desde que  $ad - bc = \pm 1$*

*Demonstração.* Seja  $G_1 = \langle T_1, T_2 \rangle$  e  $G_2 = \langle T_1^a T_2^b, T_1^c T_2^d \rangle$ :

(i)  $G_1 \subset G_2$  Devemos mostrar que  $T_1, T_2 \in G_2$ , ou seja,  $T_1$  e  $T_2$  são expressos pelas translações  $T_1^a T_2^b$  e  $T_1^c T_2^d$ . Sejam  $x$  e  $y$  tais que  $(T_1^a T_2^b)^x (T_1^c T_2^d)^y = T_1 \Rightarrow (T_1^{ax+cy})(T_2^{bx+dy}) = T_1$

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1 \neq 0 \quad (\text{por hipótese})$$

Portanto

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \frac{d}{ad - cb} = d$$

e

$$y = \frac{\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \frac{-b}{ad - cb} = -b$$

Logo,  $(T_1^a T_2^b)^d (T_1^c T_2^d)^{-b} = T_1$  e, portanto,  $T_1 \in G_2$ .(1)

Agora, sejam  $x$  e  $y$  tais que  $(T_1^a T_2^b)^x (T_1^c T_2^d)^y = T_2 \Rightarrow (T_1^{ax+cy})(T_2^{bx+dy}) = T_2 \Rightarrow (T_1^{ax+cy})(T_2^{bx+dy}) = T_2$

$$\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 1 \end{cases}$$

Portanto

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \frac{-c}{ad - bc} = -c$$

e

$$y = \frac{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \frac{a}{ad - bc} = a$$

Assim,  $(T_1^a T_2^b)^{-c} (T_1^c T_2^d)^a = T_2$  e, portanto,  $T_2 \in G_2$ . (2)

De (1) e (2), temos  $G_1 \subset G_2$ . (I)

(ii)  $G_2 \subset G_1$

Como  $T_1^a T_2^b$  e  $T_1^c T_2^d \in G_1 = \langle T_1, T_2 \rangle$ , pois são expressos pelos geradores de  $G_1$ , temos  $G_2 \subset G_1$ . (II)

De (I) e (II), temos  $G_1 = G_2$ , ou seja,  $\langle T_1, T_2 \rangle = \langle T_1^a T_2^b, T_1^c T_2^d \rangle$ , quando  $ad - bc = 1$

De modo análogo, vale quando  $ad - bc = -1$

□

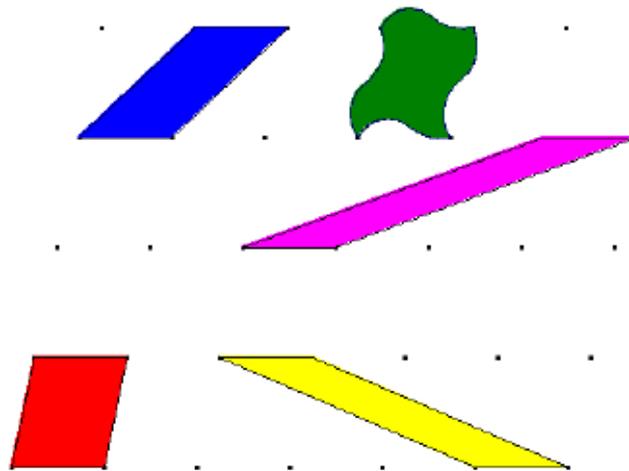


Figura 3.5: Exemplos de células básicas

### 3.2 Centros de Simetria

Primeiramente vamos mostrar através de proposições que um reticulado por translações é rômboico ou retangular quando  $\mathcal{W}$  contém isometrias opostas.

**Proposição 3.2.1.** *Se  $R_l$  está em um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ , então  $l$  é paralela a diagonal de uma célula básica rômboica de  $\mathcal{W}$  ou  $l$  é paralela ao lado de uma célula básica retangular de  $\mathcal{W}$ .*

*Demonstração.* Supor que a reflexão  $R_l$  pertence a  $\mathcal{W}$ . Vamos provar que  $l$  é paralela a uma diagonal de uma célula básica rômboica ou  $l$  é paralela a um lado de uma célula básica retangular.

Seja  $A$  um ponto na reta de reflexão  $l$  e  $T_{AP}$  uma translação mínima distinta da identidade em  $\mathcal{W}$ . Vamos dividir a demonstração em 3 casos.

Caso 1: A reta  $AP$  é distinta de  $l$  e, também, não é perpendicular à reta  $l$ . Seja  $Q$  a imagem do ponto  $P$  pela reflexão em relação à reta  $l$ , ou seja,  $Q = R_l(P)$ . A isometria  $T_{AQ}R_l$  coincide com a isometria  $R_lT_{AP}$ , pois coincidem nos três pontos não colineares  $A, P$  e  $Q$ , ou seja:

$$\begin{aligned} (T_{AQ}R_l)(A) &= (R_lT_{AP})(A) = P \\ (T_{AQ}R_l)(P) &= (R_lT_{AP})(P) = Q_1 \\ (T_{AQ}R_l)(Q) &= (R_lT_{AP})(Q) = Q_2. \end{aligned}$$

Assim,  $T_{AQ}R_l = R_lT_{AP}$ , e  $T_{AQ} = R_lT_{AP}R_l$ . Logo, a translação  $T_{AQ}$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$  e, como  $T_{AP}$  e  $T_{AQ}$  são translações independentes, o grupo  $\langle T_{AP}, T_{AQ} \rangle$  é o grupo de todas as translações em  $\mathcal{W}$  e  $l$  contém uma diagonal de uma célula básica rômbrica (em forma de losango).

Caso 2: A reta  $AP$  é perpendicular à reta  $l$ . Seja  $m$  a mediatriz do segmento  $AP$  e  $n$  a imagem pela reflexão em relação à reta  $l$  da reta  $m$ , isto é,  $n = R_l(m)$ . Seja  $T_{AQ}$  a translação mínima em  $\mathcal{W}$  que não está no grupo  $\langle T_{AP} \rangle$ , isto é,  $T_{AQ}$  não é obtida a partir da translação  $T_{AP}$ . Agora, vamos analisar onde pode estar localizado o ponto  $Q$ . Se  $Q$  não está em  $m, n$ , ou entre as retas  $m$  e  $n$ , temos que a translação  $T_{AP}^{-1}T_{AQ}$  ou a translação  $T_{AP}T_{AQ}$  é mais curta que  $T_{AQ}$  (para obter esse resultado vale lembrar que em um triângulo ao maior lado opõe-se o maior ângulo, também pode ser usado semelhança de triângulos).

Podemos supor, sem perda de generalidade que o ponto  $Q$  está em  $m, l$  ou entre  $m$  e  $l$ , pois, por exemplo, se  $Q$  está entre  $n$  e  $l$  podemos verificar de modo análogo ao caso 1 que  $T_{AQ'}$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ , em que  $Q' = R_l(Q)$  e  $AQ = AQ'$ , e, assim, em vez de considerar  $Q$  podemos utilizar  $Q'$ .

Agora supondo que  $Q$  está entre  $l$  e  $m$  e  $Q' = R_l(Q)$ , a translação  $T_{AQ}T_{Q'A}$  tem deslocamento menor do que o deslocamento de  $T_{AP}$ , na direção de  $AP$ , o que não é possível. Logo,  $Q$  não pode estar entre  $l$  e  $m$ . ( $T_{Q'A}$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ , como no caso 1, e assim  $T_{AQ}T_{Q'A}$  também pertence a  $\mathcal{W}$ .)

Portanto,  $Q$  deve estar em  $m$  ou em  $l$ .

(i) Se  $Q$  está em  $m$ ,  $\langle T_{AQ}, T_{AQ'} \rangle = \langle T_{AP}, T_{AQ} \rangle$ , em que  $Q' = R_l(Q)$ , pois  $T_{AP} = T_{AQ}T_{Q'A} = T_{AQ}T_{AQ'}^{-1}$ , ou seja,  $T_{AP}T_{AQ'} = T_{AQ}$ . Assim, o grupo das translações é gerado por  $T_{AQ}$  e  $T_{Q'A}$ , e  $l$  é paralela a uma diagonal de uma célula básica rômbrica. (Pode ser verificado que  $T_{Q'A}$  pertence a  $\mathcal{W}$  de modo análogo ao caso 1.)

(ii) Se  $Q$  está em  $l$ ,  $\langle T_{AP}, T_{AQ} \rangle$  é o grupo das translações em  $\mathcal{W}$  e  $l$  é paralela a um lado de uma célula básica retangular.

Caso 3: A reta  $AP$  é paralela a  $l$ . Seja  $m$  a mediatriz do segmento  $AP$  e a a reta perpendicular á reta  $l$  passando pelo ponto  $A$ . Considere  $T_{AQ}$  a translação de menor deslocamento em  $\mathcal{W}$  que não está em  $\langle T_{AP} \rangle$ . Seja  $n$  a imagem pela reflexão em relação a reta  $a$  da reta  $m$ , isto é,  $n = R_a(m)$ .

Como no caso anterior, é possível verificar que podemos assumir que o ponto  $Q$  está entre as retas  $m$  e  $a$ , ou em  $m$  ou em  $a$ . Agora, se  $Q$  está entre as retas  $m$  e  $a$  e  $Q' = R_l(Q)$ , a translação  $T_{AQ'}$  está no grupo  $\mathcal{W}$ . Assim  $T_{AQ}T_{AQ'}$  é uma translação na mesma direção da translação  $AP$  e de deslocamento menor do que o deslocamento da translação  $T_{AP}$ , o que não pode ocorrer. (Pode ser verificado que  $T_{Q'A}$  pertence a  $\mathcal{W}$  utilizando o mesmo argumento do caso 1.). Assim, o ponto  $Q$  deve estar na reta  $a$  ou na reta  $m$ .

(i) Se  $Q$  está na reta  $m$ , temos que o grupo das translações é gerado por  $T_{AQ'}$  e  $T_{AQ}$ , pois  $\langle T_{AQ}, T_{AQ'} \rangle = \langle T_{AP}, T_{AQ} \rangle$ , pois  $T_{AP} = T_{AQ}T_{AQ'}$ . Assim o reticulado tem uma célula básica em forma de losango. (Pode ser verificado que  $T_{Q'A}$  pertence a  $\mathcal{W}$  utilizando o mesmo argumento do caso 1.)

(ii) Se  $Q$  está na reta  $a$ , o grupo de translações é gerado por  $T_{AQ}$  e  $T_{AP}$  e tem uma célula básica retangular e  $l$  é paralela a um dos lados de uma célula retangular.

□

**Proposição 3.2.2.** *Se o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  contém uma reflexão deslizante, então  $\mathcal{W}$  tem um reticulado rômboico ou retangular.*

*Demonstração.* Se o grupo contém uma reflexão o resultado vale pela Proposição 3.2.1.

Vamos supor que o grupo não contém reflexão e tem uma reflexão deslizante. Podemos supor que  $\gamma^2$  é a translação mínima deixando  $l$  invariante, com  $l$  sendo a reta da reflexão deslizante. Seja  $A$  um ponto em  $l$ . Seja  $a$  a reta perpendicular à reta  $l$  em  $A$ ,  $m = \gamma(a)$ ,  $p = \gamma^2(a)$  e  $P = \gamma^2(A)$ . Assim,  $T_{AP}$  é uma translação mínima em  $\langle \gamma \rangle$ .

Seja  $T_{AB}$  a translação mínima em  $\mathcal{W}$  que não está em  $\langle \gamma^2 \rangle$ . Se  $B$  não está nas retas  $p$  ou  $p' = R_a(p)$ , ou entre estas retas, a translação  $T_{AB}T_{AP}$  ou  $T_{AB}T_{PA}$  tem deslocamento menor do que o deslocamento de  $T_{AB}$ , o que não é possível.

Assim,  $B$  não pode estar à esquerda da reta  $p' = R_a(p)$  e também não pode estar à direita da reta  $p$ . Também  $B$  não pode estar em  $p$  e em  $p'$  pela mesma razão. Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que  $B$  está entre as retas  $a$  e  $p$ , pois, por exemplo, se  $B$  está entre as retas  $p'$  e  $a$  temos que  $T_{AB'}$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ , em que  $B' = T_{BA}(A)$  ( $T_{AB'}$  é a inversa de  $T_{AB}$ ), e, assim, em vez de considerar  $B$  podemos utilizar  $B'$  que está entre  $a$  e  $p$ .

Agora, temos duas possibilidades:

(i) Seja  $B$  entre a reta  $a$  e a reta  $p$  e  $C = R_l(B)$ . Como  $\gamma = T_{AM}R_l = R_lT_{AM}$ , temos  $T_{AB}\gamma = T_{AB}T_{AM}R_l = T_{AX}R_l$ , em que  $X = T_{AM}T_{AB}(A)$  e  $\gamma T_{AC} = R_lT_{AM}T_{AC} = R_lT_{AY}$ , com  $Y = R_l(X)$ . Assim, pelo lema anterior  $\gamma T_{AC} = T_{AB}\gamma$  e  $T_{AC} = \gamma^{-1}T_{AB}\gamma$ . Portanto,  $T_{AC}$  pertence ao grupo gerado por  $\gamma$  e  $T_{AB}$ . Como  $T_{AB}T_{AC}$  é uma translação na direção da translação  $\gamma^2$  e pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ , então deve estar no grupo gerado pela translação  $\gamma^2$ . Sendo assim, a única possibilidade é  $T_{AB}T_{AC} = \gamma^2$ . Logo, o ponto  $B$  pertence à reta  $m$  e o reticulado determinado pelas translações  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  é rômboico com  $l$  contendo a diagonal.

(ii) Se  $B$  está na reta  $a$ , o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  tem um reticulado retangular e  $l$  é paralela a um lado de uma célula básica retangular.

□

**Proposição 3.2.3.** *Se uma reflexão deslizante em um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  deixa um reticulado invariante, então  $\mathcal{W}$  contém uma reflexão.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma reflexão deslizante em  $\mathcal{W}$  que leva o ponto  $A$  no ponto  $P$  pertencente ao reticulado, ou seja,  $\gamma(A) = P$ . Como os pontos  $A$  e  $P$  estão no reticulado determinado pelo ponto  $A$ , então a translação  $T_{AP}$  e sua inversa  $T_{PA}$  pertencem ao grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ . Assim, o produto da reflexão deslizante  $\gamma$  e a translação  $T_{PA}$  também pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ . Sendo o produto  $\gamma T_{PA}$  uma isometria oposta que fixa o ponto  $A$ , pois  $\gamma T_{PA}(A) = A$ , então  $T_{PA}$  é uma reflexão no grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ .

□

A seguir, vamos analisar os  $n$ -centros do grupo de simetrias de uma figura. Veremos que o conjunto dos  $n$ -centros de uma figura é invariante para toda isometria no grupo.

**Definição 3.2.1.** 1. O ponto  $P$  é um  $n$ -centro para o grupo  $G$  de isometrias se as rotações em  $G$  com centro  $P$  formam um grupo cíclico finito  $C_n$  com  $n > 1$ .

2. Uma figura geométrica é qualquer conjunto não vazio de pontos.

3. Se  $P$  é um  $n$ -centro para o grupo de simetrias de uma figura, então  $P$  é também chamado um  $n$ -centro para a figura.

4. Um centro de simetria é um  $n$ -centro para algum  $n$ .

A definição acima também pode ser colocada da seguinte forma:  $P$  é  $n$ -centro de  $G$  se, e somente se, o subgrupo  $H = \text{rot}_{P\theta} \in G; 0 \leq \theta \leq 2\pi = C_n$  para algum  $n > 1$ .

**Proposição 3.2.4.** Para um dado  $n$ , se o ponto  $P$  é um  $n$ -centro para o grupo  $G$  de isometrias e  $G$  contém uma isometria que leva  $P$  em  $Q$ , então  $Q$  é um  $n$ -centro para  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  uma isometria em  $G$  e  $\alpha(P) = Q$ . Vamos mostrar que  $P$  um  $n$ -centro para o grupo  $G$  se, e somente se, o ponto  $Q$  também é um  $n$ -centro para o grupo  $G$ .

Seja  $X$  um ponto arbitrário,  $\alpha(X) = X'$  e  $Y$  a imagem do ponto  $R_{P\theta}(X)$  pela isometria  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha(R_{P\theta}(X)) = Y$ . Então, se  $\alpha$  é uma isometria direta  $\alpha(R_{P\theta}(X)) = Y = R_{Q\theta}(X') = R_{Q\theta}(\alpha(X))$ . Logo,  $(R_{P\theta}\alpha)(X) = (\alpha R_{Q\theta})(X)$  para qualquer ponto  $X$ . Assim,  $R_{P\theta}\alpha = \alpha R_{Q\theta}$ . Também, se  $\alpha$  é uma isometria oposta  $\alpha(R_{P\theta}(X)) = Y = R_{Q(-\theta)}(X') = R_{Q(-\theta)}(\alpha(X))$ , o que implica  $(R_{P\theta}\alpha)(X) = (\alpha R_{Q(-\theta)})(X)$  e  $R_{P\theta}\alpha = \alpha R_{Q(-\theta)}$ .

Assim, em qualquer caso temos  $\alpha R_{Q(\pm\theta)} = R_{P\theta}\alpha$ . Portanto,  $R_{Q(\pm\theta)} = \alpha^{-1}R_{P\theta}\alpha$  e  $R_{P\theta} = \alpha R_{Q(\pm\theta)}\alpha^{-1}$ . Isto implica que  $R_{P\theta}$  pertence ao grupo  $G$  se, e somente se,  $R_{Q\theta}$  pertence ao grupo  $G$ , quando  $\alpha$  pertence ao grupo. Portanto,  $P$  é um  $n$ -centro se, e somente se,  $Q$  é um  $n$ -centro em que  $Q = \alpha(P)$ . □

**Proposição 3.2.5.** Se  $R_{A\theta_n}$  e  $R_{P\theta_n}$ , com  $\theta_n = \frac{360}{n}$  e  $n > 1$ , e  $P \neq A$ , estão no grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ , então  $2AP$  não é menor do que o comprimento do deslocamento da translação, não identidade, mínima em  $\mathcal{W}$ .

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $P$  pontos do plano, com  $R_{A\theta_n}, R_{P\theta_n} \in \mathcal{W}$ , como as rotações  $R_{A\theta_n}$  e  $R_{P\theta_n}$  estão no grupo  $\mathcal{W}$ , então  $\mathcal{W}$  contém o produto  $R_{A(-\theta_n)}R_{P\theta_n}$  que é uma translação  $T_1^i T_2^j$ , assim  $R_{P\theta_n}(A) = (R_{A\theta_n} T_1^i T_2^j)(A) = A_{ij}$ . Nessa condições, temos duas possibilidades:

(i) Quando  $n = 2$ ,  $P$  é o ponto médio de  $AA_{ij}$ , então  $2AP = AA_{ij}$



Figura 3.6:  $2AP = AA_{ij}$

(ii) Quando  $n \neq 2$ , então  $\triangle APA_{ij}$  é isósceles e, pela desigualdade triangular,  $2AP = AP + PA_{ij} \geq AA_{ij}$ .

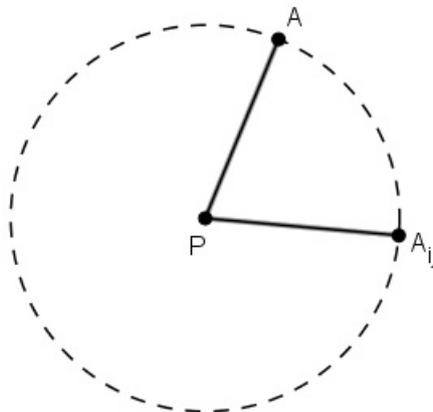


Figura 3.7:  $2AP_{ij}$

Portanto, em qualquer situação temos  $2AP \geq AA_{ij}$ . Assim  $2AP$  não é menor que o deslocamento de toda translação diferente da identidade, de outro modo,  $2AP$  não é menor do que o comprimento do deslocamento da translação mínima em  $\mathcal{W}$ .

□

Pela Proposição 3.2.5 o podemos concluir que os centros de simetria não podem estar arbitrariamente próximos. Se  $A$  é um centro de simetria e  $d$  é o comprimento da translação mínima, então não existe outro centro de simetria  $P$  com  $AP < d/2$ . Logo,

1. Dois  $n$ -centros, de mesmo  $n$ , não podem ser os mais próximos.
2. Um 2-centro e um 4-centro não podem ser os mais próximos.

- 3. Um 3-centro e um 6-centro não podem ser os mais próximos.
- 4. Um 2-centro e um 6-centro não podem ser os mais próximos.

**Teorema 3.1.** (Restrição Cristalográfica) Se o ponto  $P$  é um  $n$ -centro para um grupo de revestimento, então  $n$  é 2, 3, 4 ou 6.

*Demonstração.* Suponha que  $P$  é um  $n$ -centro para o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ . Seja  $Q$  um  $n$ -centro mais próximo de  $P$  com  $P \neq Q$ . A existência do ponto  $Q$  é garantida pelas Proposições 3.2.5 e 3.2.4. Seja  $P' = R_{Q\theta}(P)$ , em que  $\theta = 360/n$ . Então  $P'$  é um  $n$ -centro e  $PQ = QP'$ . Seja  $Q' = R_{P'\theta}(Q)$ . Então  $Q'$  é um  $n$ -centro e  $P'Q = P'Q'$ . Se  $Q' = P$ , então  $n = 6$ . Se  $Q' \neq P$ , então devemos ter  $Q'P \geq PQ = P'Q$ , pois  $Q$  é o  $n$ -centro mais próximo de  $P$ . Logo, se  $Q' \neq P$ , então  $n \leq 4$ . Portanto, as possibilidades para  $n$  são: 2, 3, 4 ou 6. □

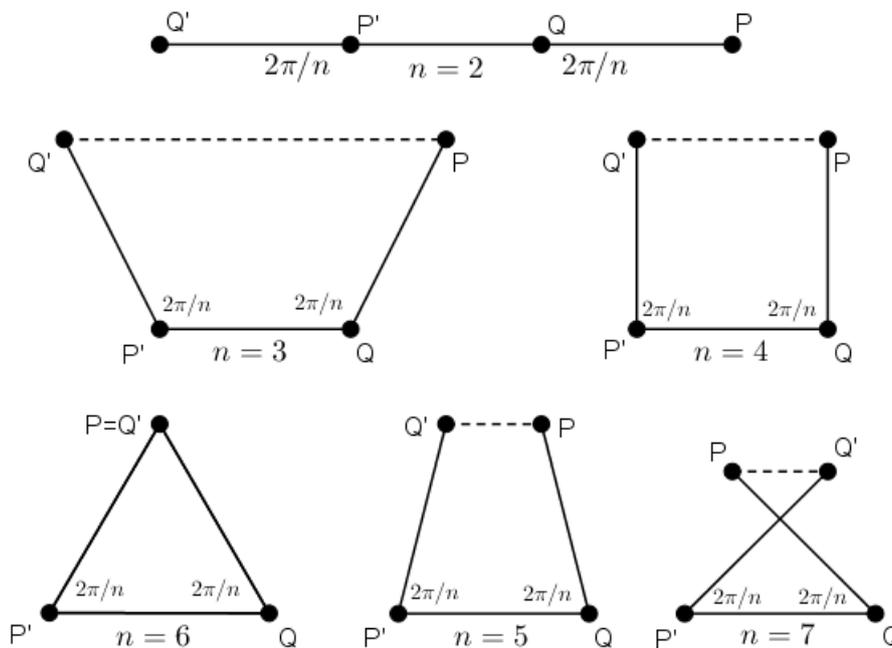


Figura 3.8: Construções geométricas para alguns valores de  $n$  do Teorema da Restrição Cristalográfica

**Corolário 3.2.** Se um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  tem um 4-centro, então o grupo não tem 3-centro e também não tem 6-centro.

*Demonstração.* Se um grupo de revestimento tem um 4-centro  $P$  e um 3-centro  $Q$ , então as rotações  $R_{Q120}$  e  $R_{P(-90)}$  pertencem ao grupo de revestimento. Assim, o produto  $R_{Q120}R_{P(-90)}$  também pertence ao grupo de revestimento. Temos,  $R_{P(-90)}R_{Q120} = R_sR_rR_rR_t = R_sR_t = R_{X30}$ . Assim, o produto  $R_{P(-90)}R_{Q120}$  da origem a rotação de  $30^\circ$  no ponto  $X$ , ou seja,  $n = 12$ . Mas, pelo Teorema 3.1 (Restrição Cristalográfica) um grupo de revestimento não tem  $n$ -centro para  $n > 6$ . Assim, como por hipótese, o grupo tem um 4-centro, então não pode ter um 3-centro e também não pode ter um 6-centro. □

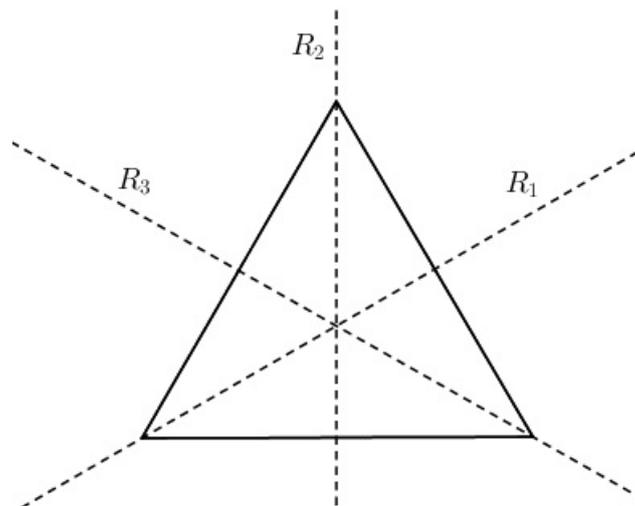
### 3.3 Simetria axial de Polígonos

Nesse subtópico, identificaremos as retas de simetria de polígonos que serão usados como célula básica nos reticulados. O tema será abordado de forma breve. Esse estudo tem como objetivo analisar qual a célula básica adequada a ser usada em um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  que contém a isometria de reflexão.

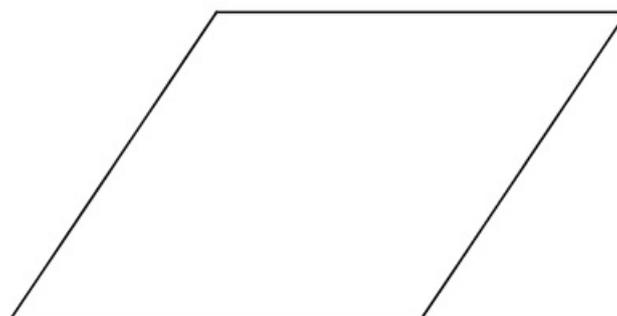
**Definição 3.3.1.** *Uma figura geométrica  $F$  é dita ter uma reta de simetria  $r$  se é invariante sob a reflexão em relação à reta  $r$ .*

Uma isometria que deixa uma figura geométrica  $F$  invariante é chamada uma simetria de  $F$  e dizemos que a isometria é uma operação de simetria. O conjunto de todas as simetrias, incluindo a identidade, de uma figura  $F$  forma um subgrupo do grupo de isometrias chamado o grupo de simetrias da figura. Vale lembrar que não iremos analisar a isometria de rotação, apenas a reflexão. Algumas importantes figuras geométricas admitem nenhuma, uma ou mais retas de simetria interna. Vejamos:

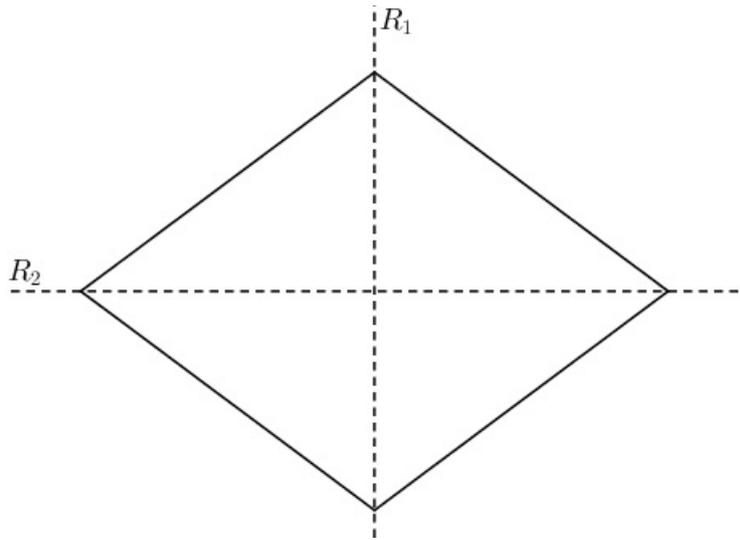
- i) No triângulo equilátero, há três retas de simetria: as mediatrizes dos lados.



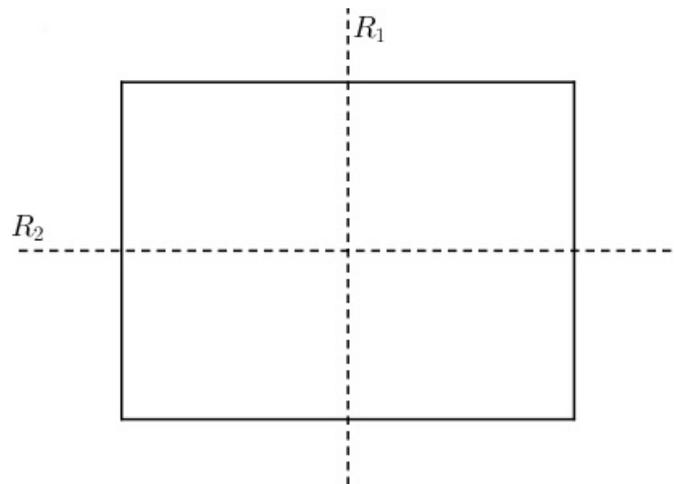
- ii) No paralelogramo, não existe reta de simetria.



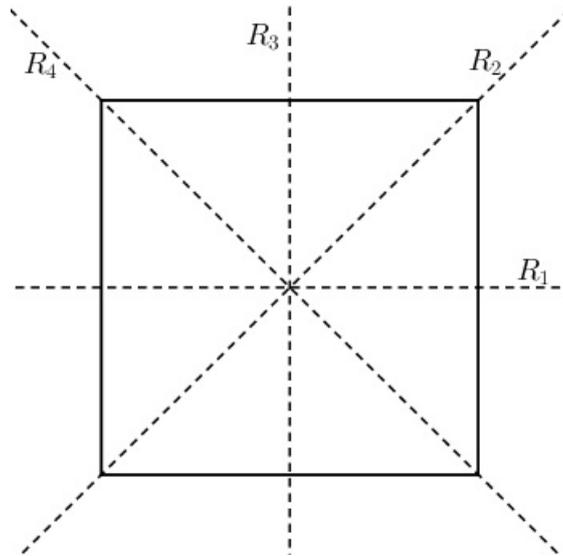
iii) No losango, há duas retas de simetria: as retas suportes das diagonais



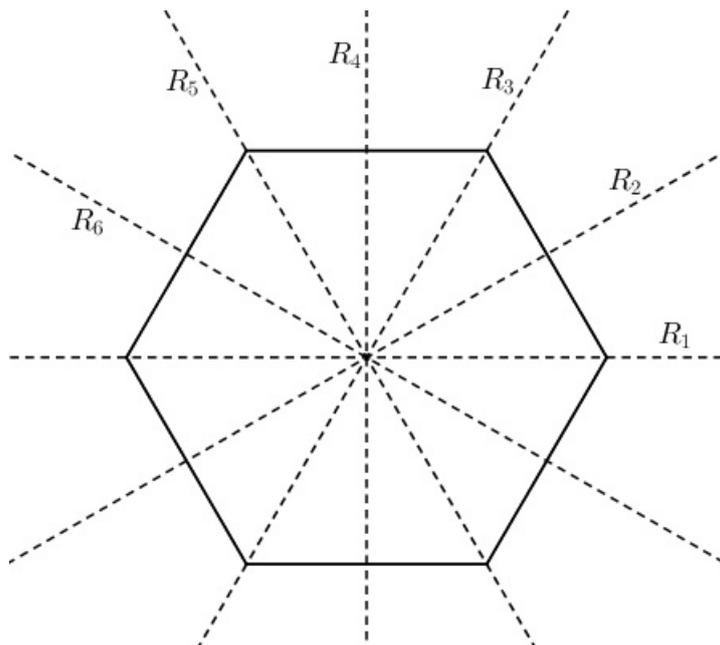
iv) No retângulo, há duas retas de simetria: as mediatrizes dos lados;



v) No quadrado (losango e retângulo), há quatro retas de simetria: as retas suportes das diagonais e as mediatrizes dos lados;



vi) No hexágono regular, há seis retas de simetria: as mediatrizes dos lados e as retas que passam pelos vértices opostos;



# Capítulo 4

## Grupos de Revestimentos

Neste capítulo analisaremos os grupos de simetrias possíveis de padrões no plano, que possuem simetrias de translação em duas direções distintas. A análise inicia com os grupos que contém centros de rotação e, devido a Restrição Cristalográfica, é suficiente considerar centros de rotação de 60, 120, 90 e 180 graus. Por meio de todas as combinações de simetrias possíveis confirmaremos a existência de dezessete grupos de simetria de padrões no plano, ou seja, dezessete grupos de revestimentos.

A ordem dos  $n$ -centros foi feita com propósito de facilitar seu entendimento, a sequência é dada eliminando as possibilidades já criadas. Este capítulo está fundamentado principalmente nas Referências [6], [10] e [14].

### 4.1 Grupos de revestimentos com 6-centro

**Proposição 4.1.1.** *Suponha que  $A$  é um 6-centro para um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ . Então não existem 4-centros para  $\mathcal{W}$ .*

*Demonstração.* Pelo Corolário 3.2, concluímos que o grupo não tem 4-centro, pois ele afirma que se o grupo de revestimento tem 4-centro, então não tem 3-centro e nem 6-centro.

□

**Proposição 4.1.2.** *Se  $A$  é um 6-centro, o centro de simetria mais próximo de  $A$  é um 2-centro  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $X$  o  $n$ -centro mais próximo do 6-centro  $A$  com  $X \neq A$ . Se  $X$  fosse um 3-centro então as rotações  $R_{A60}$  e  $R_{X120}$  estariam em  $\mathcal{W}$  e, assim, o produto  $R_{A60}R_{X120}$  também pertenceria a  $\mathcal{W}$ . Mas,  $R_{A60}R_{X120} = R_s R_r R_r R_t = R_s R_t = H_M$ , onde  $R_s, R_r, R_t$  são as reflexões nas retas  $s, r, t$ , respectivamente, e  $M$  é o vértice do triângulo  $AMX$ , retângulo em  $M$ , como na Figura 4.1.

Assim, o produto seria uma meia-volta no ponto  $M$ . Deste modo, o 2-centro  $M$  estaria mais próximo de  $A$ , o que contraria a hipótese do ponto  $X$  ser o  $n$ -centro mais próximo do ponto  $A$ . Portanto, o  $n$ -centro mais próximo de  $A$  não pode ser um 3-centro.

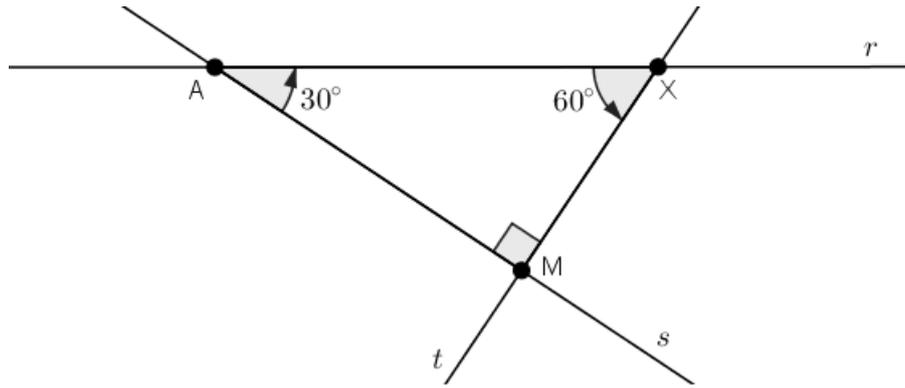


Figura 4.1: Produto  $R_{A60}R_{X120} = H_M$

Também, podemos concluir que  $X$  não pode ser um 6-centro, pois, caso contrário,  $(R_{X60})^2 = R_{X120}$  pertenceria ao grupo de revestimento e, com a mesma análise feita acima, encontraríamos o ponto  $M$  tendo uma meia-volta e mais próximo de  $A$ , o que não pode ocorrer.

Portanto, podemos concluir que o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  possui 2-centros e o centro de simetria mais próximo de um 6-centro é um 2-centro.

□

**Proposição 4.1.3.** *Se  $A$  é um 6-centro, então ele é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros e cujos pontos médios dos lados são 2-centros. Todos os centros de simetria para  $\mathcal{W}$  são determinados por  $A$  e o 2-centro  $M$ .*

*Demonstração.* Considerando o 6-centro  $A$  e o 2-centro  $M$ , temos que as rotações  $R_{A(-60)}$  e  $R_{M180}$  estão no grupo de revestimento. Assim, o produto  $R_{A(-60)}R_{M180}$  está no grupo e  $R_{A(-60)}R_{M180} = R_sR_rR_rR_t = R_sR_t = R_{G120}$ , onde  $R_s, R_r, R_t$  são as reflexões nas retas  $s, r, t$ , respectivamente, e  $G$  é a interseção das retas  $s$  e  $t$ , como na Figura 4.2. Note que o ângulo entre as retas  $s$  e  $t$  é  $60^\circ$ . Portanto, existe no grupo uma rotação de  $120^\circ$  no ponto  $G$ ,  $R_{G120}$ .

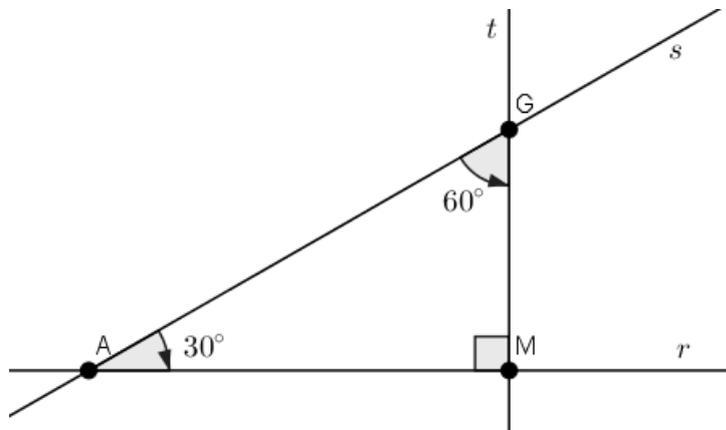


Figura 4.2: Produto  $R_{A(-60)}R_{M180} = R_{G120}$

Veamos que não existe uma rotação de  $60^\circ$  em  $G$ . Se existisse uma rotação de  $60^\circ$  em  $G$ , o produto  $R_{A60}R_{G60}$  estaria no grupo e como  $R_{A60}R_{G60} = R_rR_sR_sR_g = R_rR_g = R_{J(-240)} = R_{J120}$ , em que  $J$  é a interseção das retas  $r$  e  $g$ , como na Figura 4.3. Isto não pode ocorrer, pois  $M$  é o centro de simetria mais próximo do ponto  $A$  e não podemos ter uma rotação pertencente ao grupo em um ponto  $J$  mais próximo de  $A$  do que  $M$ . Assim, se em  $G$  não podemos ter uma rotação de  $60^\circ$  e existe em  $G$  uma rotação de  $120^\circ$ , então  $G$  deve ser um 3-centro.

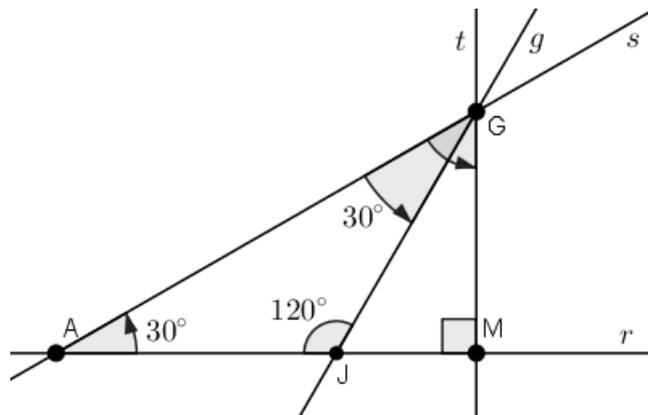


Figura 4.3:  $G$  não é um 6-centro, pois  $J$  estaria mais próximo de  $A$  do que  $M$

Assim, em um grupo de revestimento de 6-centro temos a seguinte configuração:

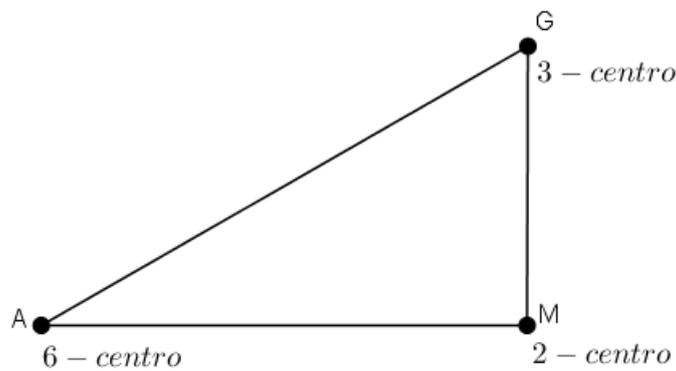


Figura 4.4:  $\triangle AMG$  com  $G$  sendo um 3-centro

Como o 6-centro  $A$  e o 2-centro  $M$  estão em  $\mathcal{W}$ , podemos aplicar as transformações nesses pontos para configurar os demais pontos. Desse modo, o ponto  $B$ , simétrico do ponto  $A$  em relação ao ponto  $M$ , é um 6-centro, pois a meia-volta  $H_M$  leva o 6-centro  $A$  em um 6-centro, e, também, o ponto  $C$ , rotação de  $60^\circ$  do ponto  $B$  em relação ao ponto  $A$ , é um 6-centro. Note que o ponto  $G$  é o centro do triângulo equilátero  $ABC$ .

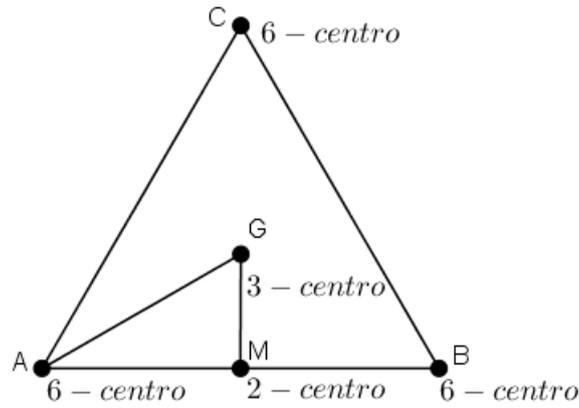


Figura 4.5:  $H_M(A) = B$  e  $R_{A60}(B) = C$

Aplicando as transformações do grupo  $\mathcal{W}$ , podemos então verificar que em um grupo de revestimento que tem um 6-centro temos a configuração da Figura 4.6 e, conseqüentemente, a célula é rômbrica.

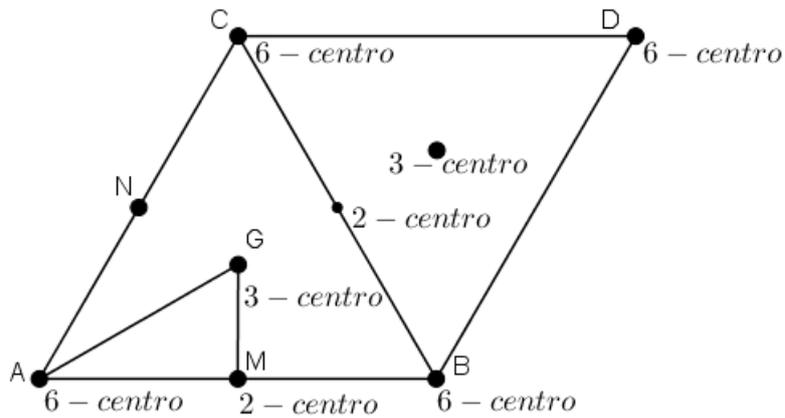


Figura 4.6: Região da célula básica de um grupo 6-centro

Finalmente, as imagens do 3-centro  $G$  pelas potências da rotação  $R_{A60}$  são os vértices do hexágono citado na afirmação da Proposição 4.1.3 e estas imagens são 3-centros.  $\square$

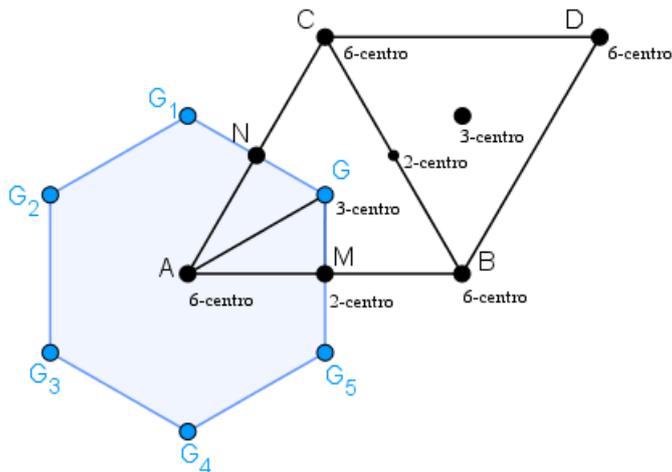


Figura 4.7: As imagens de  $G$  por  $R_{A60}$

Observe que a meia-volta em  $A$  está no grupo, pois  $H_A = (R_{A60})^3$ , e o produto dessa meia-volta e a meia-volta em  $M$  é uma translação que pertence ao grupo e leva o 6-centro  $A$  no 6-centro  $B$ . De modo análogo, o produto das meia-voltas  $H_A$  e  $H_N$  é uma translação que está no grupo e leva o 6-centro  $A$  no 6-centro  $C$ , em que  $B$  e  $C$  são os 6-centros existentes mais próximos de  $A$ . Lembrando-se de que uma translação no grupo deve levar um  $n$ -centro em um mesmo  $n$ -centro. Desse modo, concluímos que os produtos  $H_A H_M$  e  $H_A H_N$ , com  $H_A H_M = R_s R_r R_r R_t = R_s R_t = T_{AB}$  e  $H_A H_N = R_s' R_{r'} R_{r'} R_{t'} = R_s' R_{t'} = T_{AC}$ , são as translações mínimas no grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ , veja as Figuras 4.8 e 4.9. Logo, as translações  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  devem gerar o subgrupo de translações do grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ .

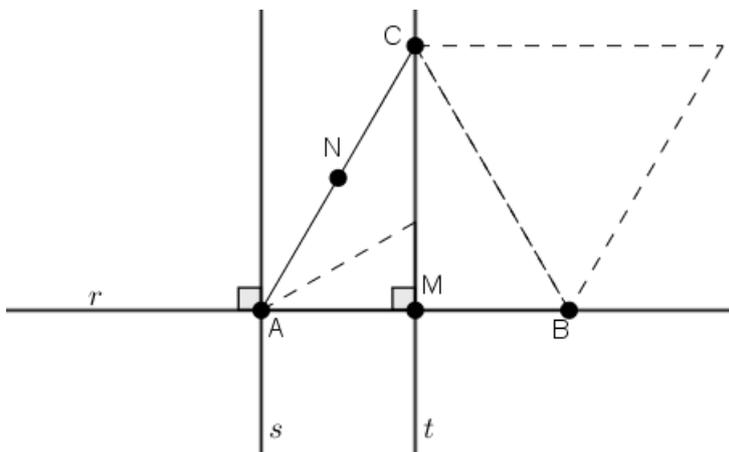


Figura 4.8:  $T_{AB}$

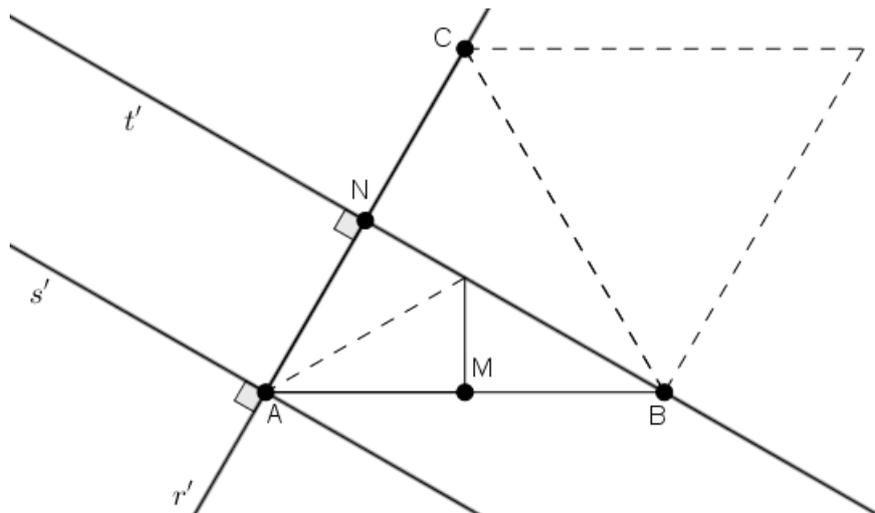


Figura 4.9:  $T_{AC}$

A região menor em destaque na Figura 4.10 é chamada de motivo para p6. O motivo pode ser usada para criar padrões de revestimentos tendo o grupo p6 como grupo de simetrias. Se na região em destaque temos um desenho assimétrico, ou seja, uma figura com grupo de simetria a identidade, então utilizando os geradores do grupo p6 podemos criar um revestimento tendo como grupo de simetrias este grupo. Neste caso, como já visto, o grupo pode ser gerado pela rotação de  $120^\circ$  e centro  $G$  e a meia-volta em relação ao ponto  $M$  ou pela rotação de  $60^\circ$  e centro  $A$  e a meia-volta em relação ao ponto  $M$ .

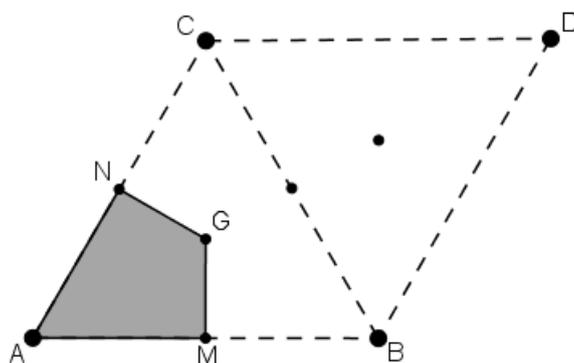


Figura 4.10: Célula básica de p6 e um exemplo de motivo

**Observação 4.1.1.** Para melhor ilustrar a célula básica e o motivo de um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ , utilizaremos a partir de agora a Tabela 4.11 de símbolos.

	Símbolos	Descrição
Centros de rotação		2-centro (180°)
		3-centro (120°)
		4-centro (90°)
		6-centro (60°)
		Eixo de reflexão
		Eixo de reflexão deslizante

Figura 4.11: Tabela de símbolos

Pela Proposição 4.3, obtemos o primeiro tipo de grupo de revestimento, de reticulado rômbo, que é o grupo gerado por uma rotação de 60° e uma meia-volta, ou, como já demonstrado anteriormente, gerado por uma rotação de 120° e uma meia-volta:

$$p6 = \langle R_{A60}, H_M \rangle = \langle R_{G120}, H_M \rangle$$

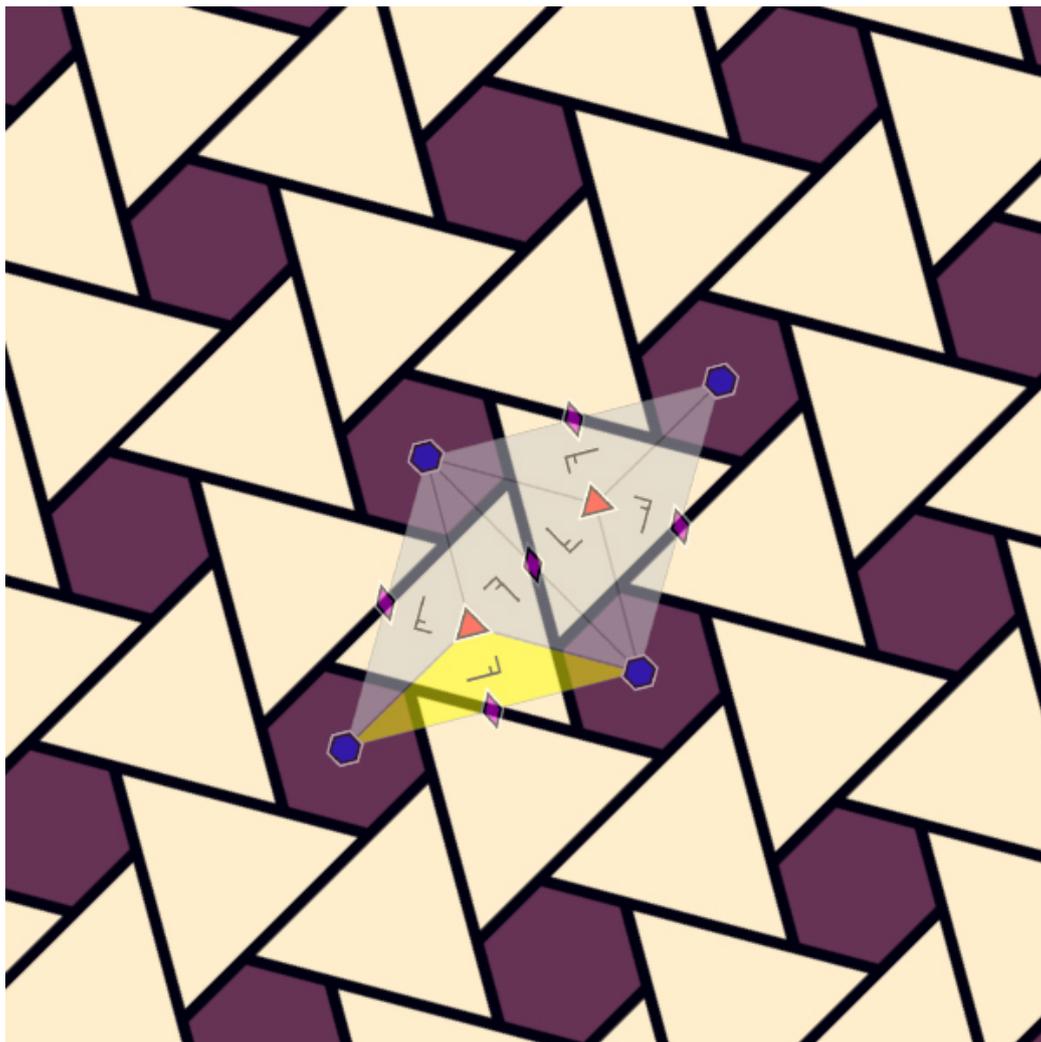


Figura 4.12: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p6$  e sua célula básica

No tipo de grupo anterior, isto é  $p6$ , não existe isometria oposta. Agora vamos analisar o tipo de grupo de revestimento que tem 6-centro e também isometria oposta. Desde que o reticulado rômbo de 6-centros determinado pelo 6-centro  $A$  deve ser invariante por qualquer isometria no grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  e, além disso, pela Proposição 3.2.3, se uma reflexão deslizante no grupo de revestimentos  $\mathcal{W}$  deixa um reticulado invariante, então  $\mathcal{W}$  contém uma reflexão e qualquer extensão de  $p6$  é obtida acrescentando-se reflexões que deixam invariante o reticulado. Uma reflexão no grupo  $\mathcal{W}$  deve deixar invariante o reticulado rômbo. Entretanto, acrescentando-se uma das possíveis reflexões requer a introdução de todas as possíveis reflexões. Por exemplo, se a reflexão na reta que passa pelos pontos  $C$  e  $G$  está no grupo, então a reflexão na reta que passa por  $A$  e  $M$  também está no grupo, pois  $H_M R_{CG} = R_{AM} R_{CG} R_{CG} = R_{AM}$ , ou seja, a reflexão  $R_{AM}$  pertence ao grupo como produto da rotação  $H_M$  e da reflexão  $R_{CG}$  que pertencem ao grupo.

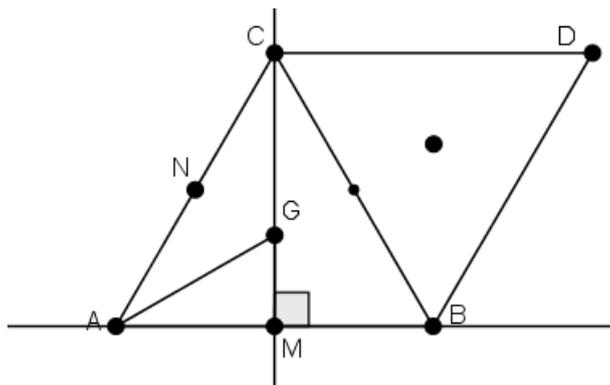


Figura 4.13:  $H_M R_{CG} = R_{AM}$

Da mesma forma, podemos verificar que as reflexões nas retas que passam pelos segmentos  $AC$ ,  $BC$ ,  $AG$  e  $BG$  pertencem ao grupo, se a reflexão na reta em  $CG$  está no grupo. Também, podemos ver que se a reflexão na reta em  $CG$  está no grupo então as reflexões nas retas em  $CD$  e  $BD$  pertencem ao grupo. É fácil ver também que se partíssemos da hipótese de pertencer ao grupo qualquer uma das reflexões citadas acima, de modo análogo concluiríamos que as demais reflexões também pertenceriam ao grupo. Então, além do grupo  $p6$ , temos apenas mais um tipo de grupo de revestimento tendo 6-centro, que é o grupo que contém isometrias opostas, denotado por  $p6m$ . Este grupo, pelo que vimos acima, é gerado por uma rotação de  $60^\circ$  de centro  $A$ , uma meia-volta no ponto  $M$  e uma reflexão em relação à reta em  $CG$ . Da mesma forma, este grupo é gerado pelas reflexões em relação às retas em  $MG$ ,  $AG$ ,  $AM$ , ou seja, reflexões em relação aos três lados do triângulo retângulo  $AMG$  ( $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ), pois  $R_{A60} = R_{AM}R_{AG}$ ,  $H_M = R_{AM}R_{MG}$ .

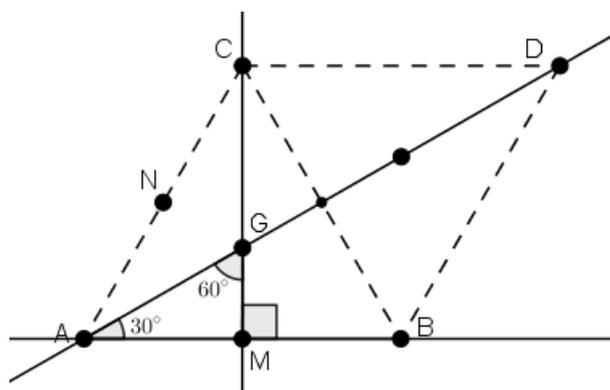


Figura 4.14: Célula básica de  $p6m$  e as retas de reflexões em  $AG$  e  $MG$

$$p6m = \langle R_{A60}, H_M, R_{CG} \rangle = \langle R_{MG}, R_{AG}, R_{AM} \rangle$$

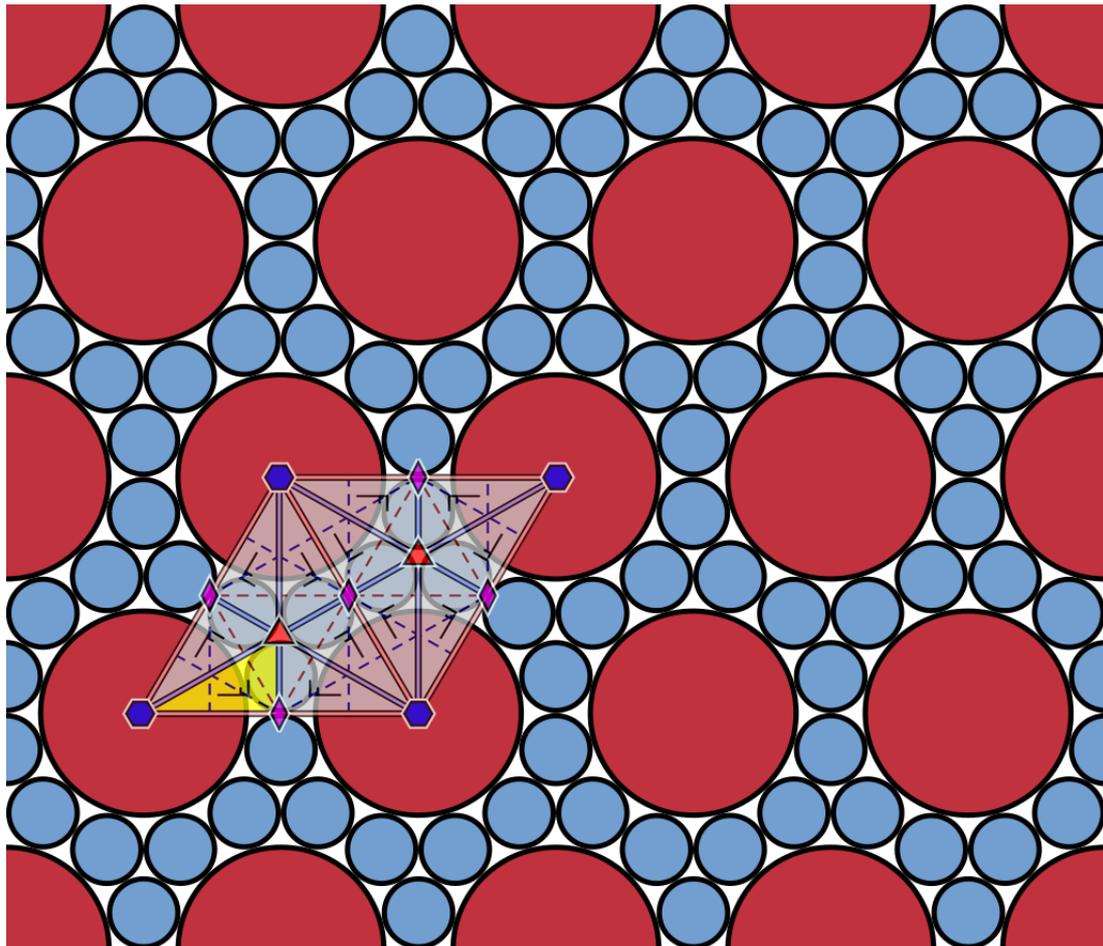


Figura 4.15: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p6m$  e sua célula básica

Assim, todo o padrão de revestimento contendo 6-centro tem ou  $p6$  ou  $p6m$  como grupo de revestimento.

- $p6$  o grupo possui centro de rotação de  $60^\circ$  e  $120^\circ$  e  $180^\circ$ . Não tem reflexões ou reflexões deslizantes.
- $p6m$  O grupo possui 6-centro, 3-centro e 2-centro. Ele também tem reflexões em seis direções distintas. Há reflexões deslizantes em seis direções distintas, cujos eixos estão localizados nas mediatrizes das retas de reflexões, mas não estão contidas nas retas de reflexão.

## 4.2 Grupos de revestimentos com 3-centro

**Proposição 4.2.1.** *Se  $\mathcal{W}$  é um grupo de revestimento que possui 3-centros e não possui 6-centro, então  $\mathcal{W}$  não possui ponto de simetria e, também, não possui 2-centro e 4-centro.*

*Demonstração.* Como visto anteriormente pelo Corolário 3.2, em um grupo de simetria que possui 3-centro não existe um 4-centro.

Agora, supondo que exista o ponto  $P$  de simetria (2-centro),  $A$  um ponto qualquer do plano e, ainda, considere as retas  $r, s$  e  $t$  do plano, então:

$$(I) R_{A(-120)} = R_s R_r$$

$$(II) H_P = R_r R_t$$

De (I) e (II) temos  $R_{A(-120)} H_P = R_s R_r R_r R_t = R_s R_t = R_{X60}$

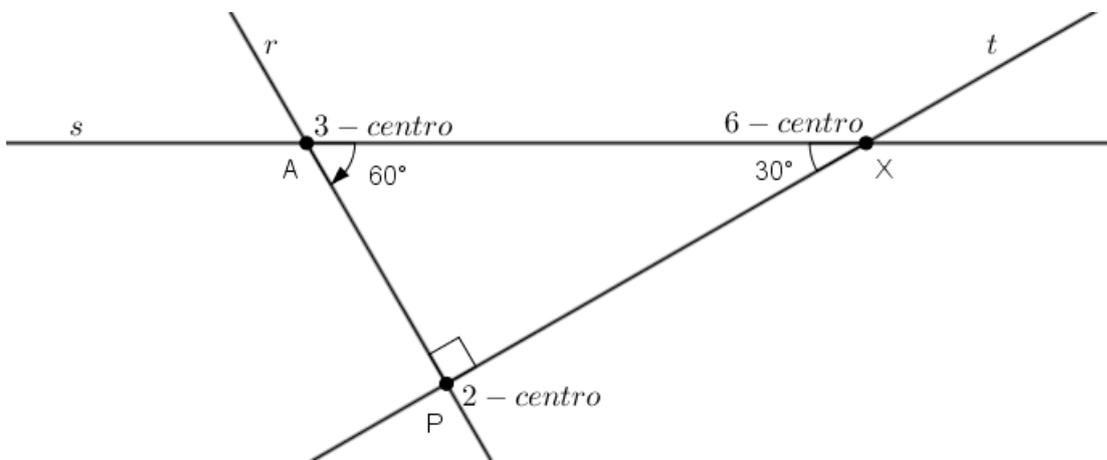


Figura 4.16:  $R_{A(-120)} H_P = R_{X60}$

Portanto,  $X$  tem rotação de  $60^\circ$ , o que não pode acontecer, pois o grupo não tem 6-centro. Logo, não tem ponto de simetria e, também, não tem 2-centro.

□

**Proposição 4.2.2.** *Seja  $A$  um 3-centro e  $G$  um 3-centro mais próximo de  $A$ , então o produto  $R_{A120} R_{G120}$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ , além disso,  $R_{A120} R_{G120} = R_{J(-120)}$ , em que  $J$  é tal que o triângulo  $AGJ$  é equilátero e  $A$  é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros.*

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $G$  3-centros, então o produto das rotações  $R_{A120}$  e  $R_{G120}$  também estão em  $\mathcal{W}$ . Como  $R_{A120} R_{G120} = R_s R_r R_r R_t = R_s R_t = R_{J(-120)}$ , então  $R_{J(-120)}$  pertence ao grupo. Assim,  $J$  pode ser um 3-centro ou um 6-centro. Mas como o grupo não tem 6-centro, então  $J$  é um 3-centro e  $AGJ$  é um triângulo equilátero.

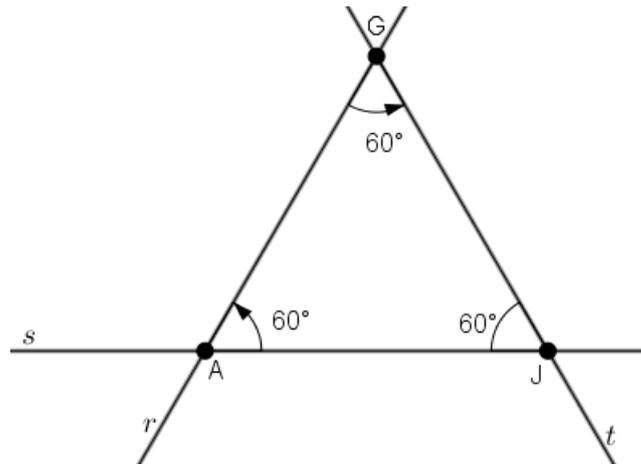


Figura 4.17:  $R_{A120}R_{G120} = R_{J(-120)}$

Seguindo, considere as imagens de  $G$  e  $J$  pelas potências da rotação  $R_{A120}$ . Estas imagens são 3-centros e são vértices de um hexágono de centro  $A$ , pois  $G$  é 3-centro e  $J$  é 3-centro e  $A_1 = R_{A120}(J)$ ,  $A_2 = R_{A120}(G)$ . Portanto  $A_1$  e  $A_2$  são 3-centros.

Além disso,  $A_3 = R_{A120}(A_1)$ ,  $A_4 = R_{A120}(A_2)$ . Portanto  $A_3$  e  $A_4$  são 3-centros, pois  $A_1$  e  $A_2$  são 3-centros.

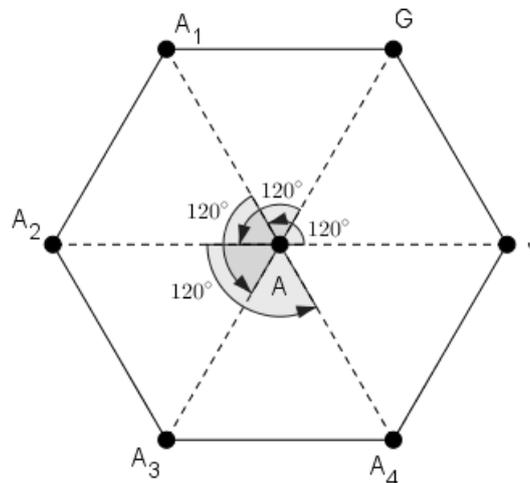


Figura 4.18: Hexágono regular com centro  $A$  e todos os vértices 3-centro

□

**Proposição 4.2.3.** *Sejam os pontos  $B$  e  $C$  definidos por  $T_{AB}(A) = (R_{A120}R_{J(-120)})(A) = B$  e  $T_{AC}(A) = (R_{A(-120)}R_{J120})(A) = C$ , respectivamente, então  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  são as translações mínimas em  $\mathcal{W}$ .*

*Demonstração.* Vamos considerar as translações que podem ocorrer em um grupo de 3-centros.



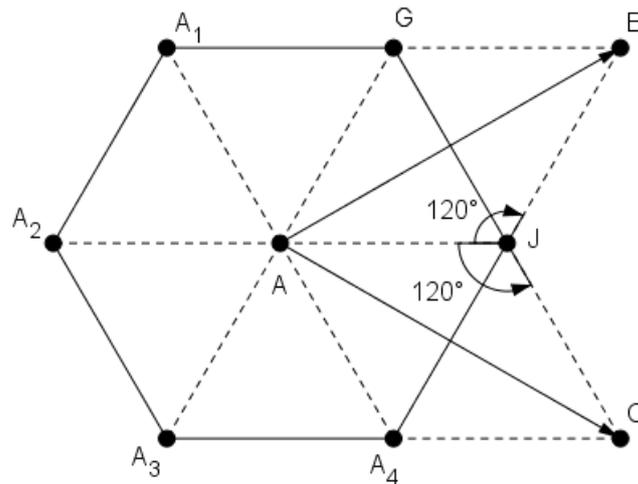


Figura 4.20:  $T_{AB}(A) = B$  e  $T_{AC}(A) = C$

Se  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  são as translações mínimas em  $\mathcal{W}$ , então os pontos  $B$  e  $C$  são 3-centros, mas não são vértices do hexágono  $JGA_1A_2A_3A_4$  de centro  $A$ . De outro modo,  $T_{AB}(A) = B$  e  $T_{AC}(A) = C$ .

De modo análogo, podemos concluir que os demais vértices  $A_n$  do hexágono de centro  $A$  também são tais que não existe translação que leva o ponto  $A$  em um destes vértices.

□

O grupo de revestimento gerado por  $T_{AB}$ ,  $T_{AC}$  e  $R_{A120}$  é o mesmo que o grupo gerado por  $R_{A120}$  e  $R_{J120}$ , ou seja,  $\langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120} \rangle = \langle R_{A120}, R_{J120} \rangle$ . Vejamos:

Seja  $G_1 = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120} \rangle$  e  $G_2 = \langle R_{A120}, R_{J120} \rangle$ , então:

(i)  $G_1 \subset G_2$

$T_{AB} = R_{A120}R_{J(-120)} \in G_2$ , pois  $R_{A120}$  e  $R_{J(-120)}$  pertencem a  $G_2$ .

$T_{AC} = R_{A(-120)}R_{J120} \in G_2$ , pois  $R_{A(-120)}$  e  $R_{J120}$  pertencem a  $G_2$ .

Logo, como os geradores de  $G_1$  pertencem a  $G_2$ , o grupo gerado por eles, isto é  $G_1$ , está contido em  $G_2$ .

$\therefore G_1 \subset G_2$  (I)

(ii)  $G_2 \subset G_1$

$R_{A_{120}} \in G_1$ , basta concluir que  $R_{J_{120}}$  também pertence a  $G_1$ .

Ainda,  $R_{J_{120}} = R_{A_{120}}T_{AB}$  também  $\in G_1$ , pois  $R_{A_{120}}$  e  $T_{AB}$  pertencem a  $G_1$ .

Logo, o grupo gerado por  $R_{A_{120}}$  e  $R_{J_{120}}$  está contido em  $G_1$

$\therefore G_2 \subset G_1$  (II)

De (I) e (II),  $G_1 = G_2$ .

Se  $\mathcal{W}$  não contém isometrias opostas, então seu grupo é denotado por:

$$p3 = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A_{120}} \rangle = \langle R_{A_{120}}, R_{J_{120}} \rangle.$$

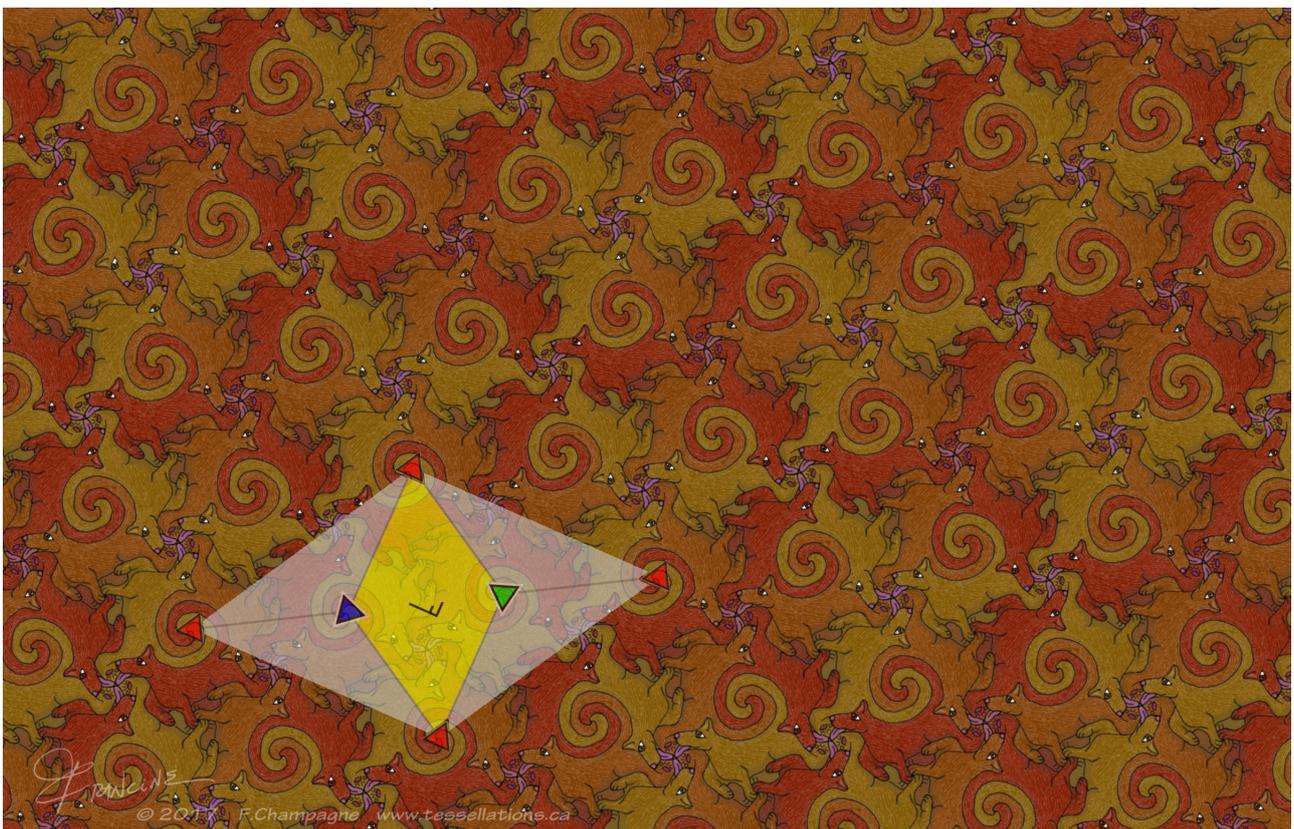


Figura 4.21: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p3$  e sua célula básica. Arte "Three Dogs" por Francine Champagne.

Seguindo, vamos estender  $p3$  a um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  que possui reflexão



de um mesmo grupo  $\mathcal{W}$ , pois adicionando reflexões em ambas as diagonais da célula se introduz uma meia-volta e um 6-centro. De outro modo, os grupos  $p3m1$  e  $p31m$  podem ser obtidos por três reflexões em três retas contendo os lados de um triângulo equilátero,  $\triangle AGJ$  e  $\triangle ABC$ , respectivamente.

$$p3m1 = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120}, R_{AG} \rangle$$

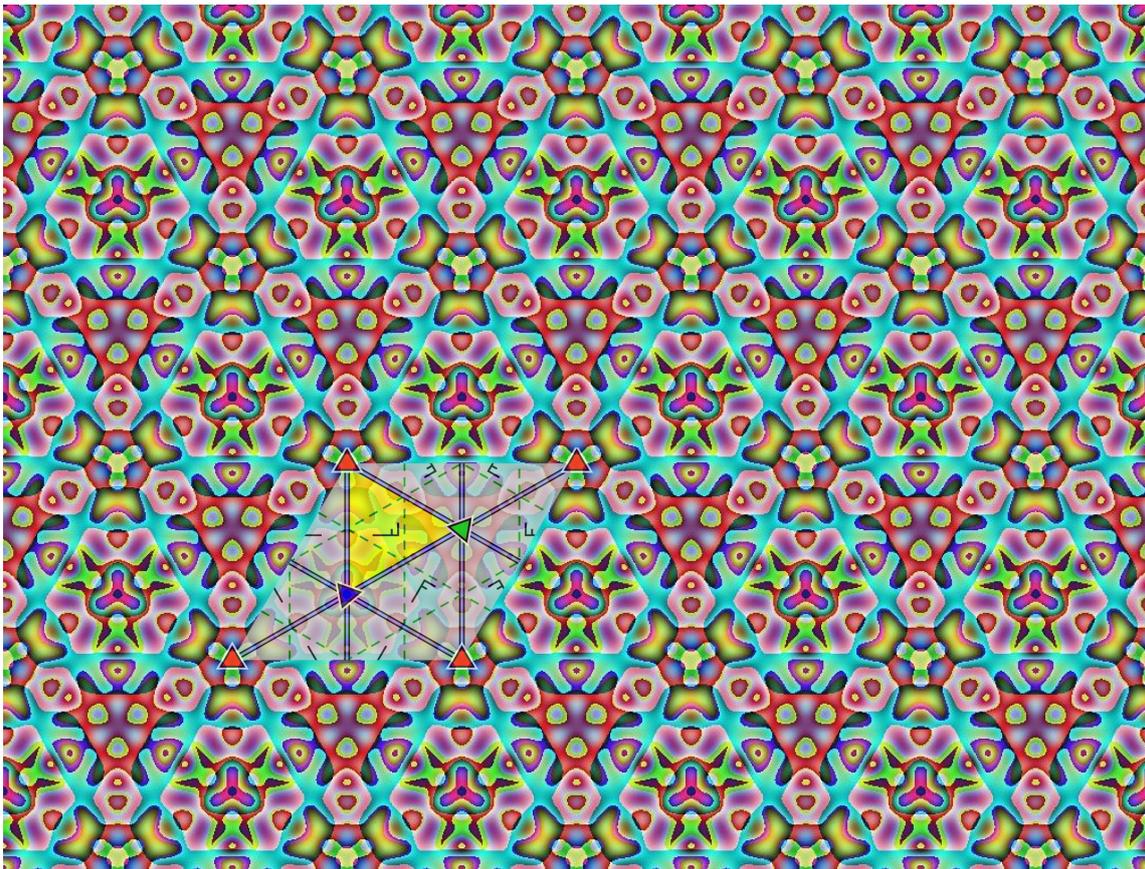


Figura 4.23: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p3m1$  e sua célula básica

e

$$p31m = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120}, R_{AB} \rangle$$

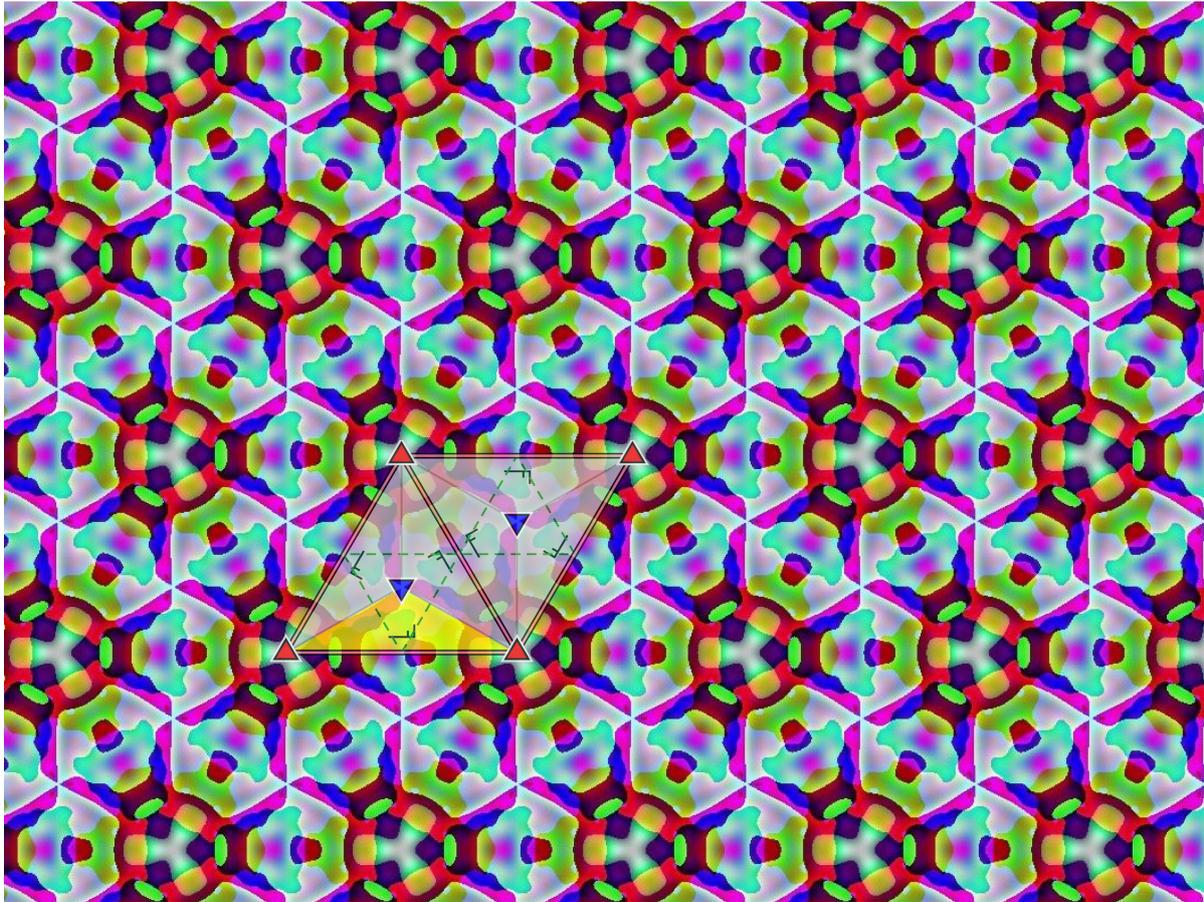


Figura 4.24: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p31m$  e sua célula básica

Assim, todo o padrão de revestimento contendo somente 3-centro tem ou  $p3$  ou  $p3m1$  ou  $p31m$  como grupo de revestimento.

- $p3$  possui 3-centro mas não tem 6-centro, e não tem retas de simetria.
- $p3m1$  possui 3-centro mas não tem 6-centro, existem retas de simetria em três direções diferentes, cada 3-centro está em uma reta de simetria, possui reflexões deslizantes cujos eixos estão nas mediatrizes das retas de simetria, mas não estão contidos nas retas de reflexão.
- $p31m$  possui 3-centro mas não tem 6-centro, existem retas de simetria em três direções diferentes, há 3-centro que estão fora da reta de simetria, possui reflexões deslizantes cujos eixos estão nas mediatrizes das retas de simetria, mas não estão contidos nas retas de reflexão.

### 4.3 Grupos de revestimentos com 4-centro

**Proposição 4.3.1.** *Se  $\mathcal{W}$  é um grupo de revestimento que contém um 4-centro, então não existem 3-centro e 6-centro em  $\mathcal{W}$ .*

*Demonstração.* Pelo Colorário 3.2, se o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  tem um 4-centro, então ele não tem 3-centro e também não tem 6-centro. Dessa forma,  $\mathcal{W}$  só pode ter 2-centro e 4-centro. □

**Proposição 4.3.2.** *Se  $\mathcal{W}$  é um grupo de revestimento que contém um 4-centro  $A$ , então o  $n$ -centro mais próximo de  $A$  é um 2-centro  $M$ .*

*Demonstração.* Agora seja  $M$  o centro de simetria mais próximo de  $A$ . Se  $M$  é um 4-centro, então o  $\triangle AMK$ , retângulo em  $K$ , é obtido pelo produto  $R_{M(-90)}R_{A(-90)} = R_sR_rR_rR_t = R_sR_t = R_{K180} = H_k$ . Assim,  $K$  seria um centro de simetria mais próximo de  $A$  do que  $M$ , isto não é possível, portanto, não pode  $M$  ser um 4-centro. Como  $M$  é determinado como o centro de simetria mais próximo de  $A$ , então  $M$  deve ser um 2-centro.

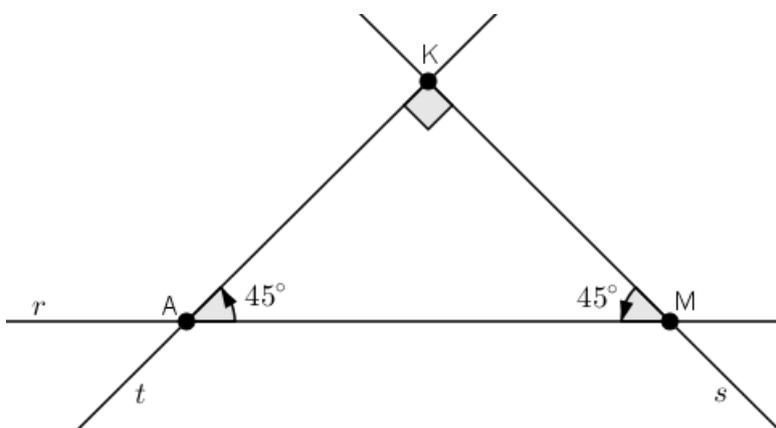


Figura 4.25:  $R_{M90}R_{A90} = R_{K180} = H_k$

□

**Proposição 4.3.3.** *Seja  $A$  um 4-centro, então  $A$  é o centro de um quadrado cujos vértices são 4-centros e cujos lados são bissectados por 2-centros. Todos os centros de simetria de  $\mathcal{W}$  são determinados por  $A$  e  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $E$  um 4-centro obtido por  $R_{A(-90)}H_M = R_sR_rR_rR_t = R_{E90}$ . As imagens de  $E$  e  $M$  através de  $R_{A90}$ , são respectivamente, os vértices e pontos médios de um quadrado nas condições da Proposição 4.3.3. □

Considerando agora as translações mínimas existentes em  $\mathcal{W}$ , observamos que  $T_{AE}$  não está em  $\mathcal{W}$ , pois se isso ocorresse, existiria um ponto  $Z$ , com  $H_A T_{AE} = R_tR_rR_rR_s = H_Z$ , em que  $r$  e  $s$  são retas do plano, que seria o centro de simetria mais próximo de  $A$  do que  $M$ , o que é um absurdo, já que  $M$  é o  $n$ -centro de simetria mais próximo de  $A$ . Logo,  $T_{AE} \notin \mathcal{W}$ .

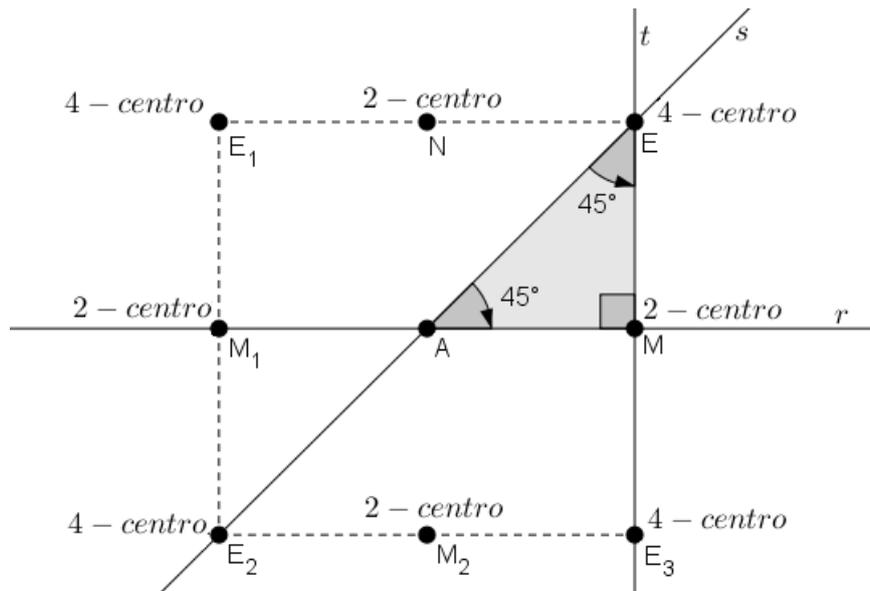


Figura 4.26:  $R_{A(-90)}H_M = R_{E90}$

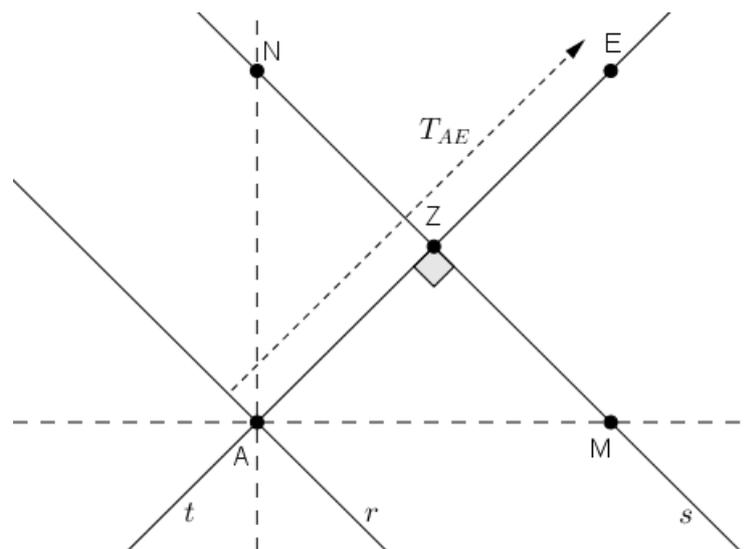


Figura 4.27:  $H_A T_{AE} = H_Z$

Agora seja  $N = R_{A90}(M)$ ,  $T_{AB} = H_A H_M$  e  $T_{AC} = H_A H_N$ , então temos o quadrado  $NAME$  e  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  são as translações mínimas em  $\mathcal{W}$ , pois  $T_{AB}(A) = H_A H_M(A) = H_M(H_A(A)) = H_M(A) = B$ , em que o ponto  $B$  é o 4-centro mais próximo do 4-centro  $A$ , excluindo os 4-centro das imagens de  $E$  pelas rotações em  $A$ , que são os vértice do quadrado de centro  $A$ . Caso análogo para a translação  $T_{AC}(A) = C$ , portanto,  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  são o subgrupo das translações de  $\mathcal{W}$ .

Logo, segundo a Proposição 3.2.5, não existe mais centros de simetria entre os pontos determinados acima.

Então, se  $E$  é o centro do quadrado  $ABCD$  temos que:

$$p4 = \langle R_{A90}, R_{E90} \rangle = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A90} \rangle$$

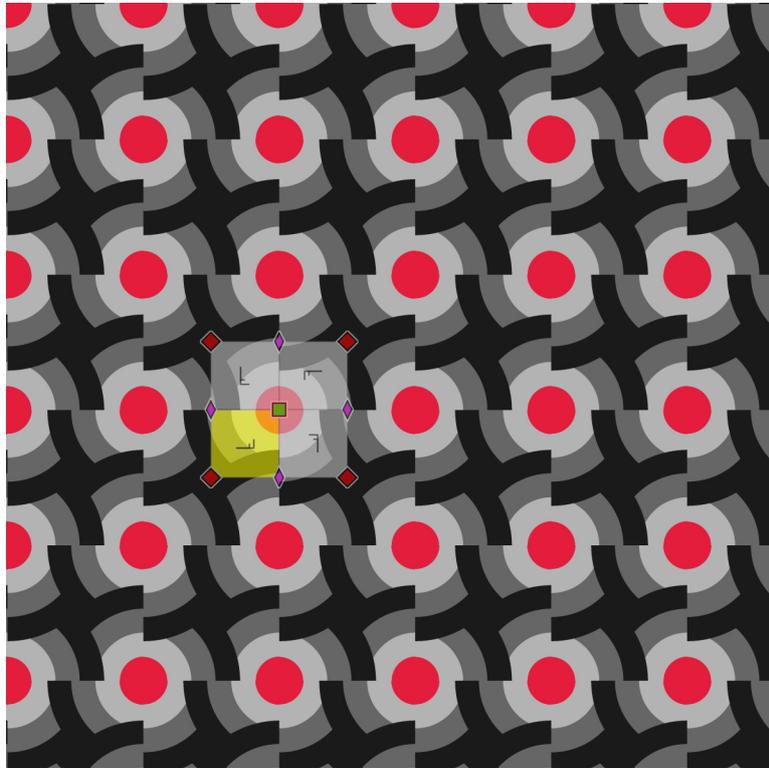


Figura 4.28: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p4$  e sua célula básica

Para analisar os demais tipos de grupos de revestimentos tendo 4-centro, deve ser considerada a presença de isometrias opostas em  $p4$ . Para isso é necessário considerar as simetrias presentes no quadrado, que são quatro, dois eixos de simetria nas diagonais e outros dois eixos de simetrias nas medianas dos lados.

Assim, se considerarmos o quadrado  $AEMN$ , podemos ou ter uma reflexão no eixo de simetria que passa por um 4-centro, como a reta que contém  $AE$ , ou uma reflexão no eixo de simetria fora de todos os 4-centros, como a reta em  $MN$ . Porém, essas duas isometrias não podem ser adicionadas no mesmo grupo, pois se isso ocorresse, como já foi analisado anteriormente, teria um centro de simetria mais próximo de  $A$  do que  $M$ , na intersecção das diagonais do quadrado  $AEMN$ . Dessa maneira, adicionando  $R_{AE}$  em  $p4$ , temos:

$$p4m = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A90}, R_{AE} \rangle$$

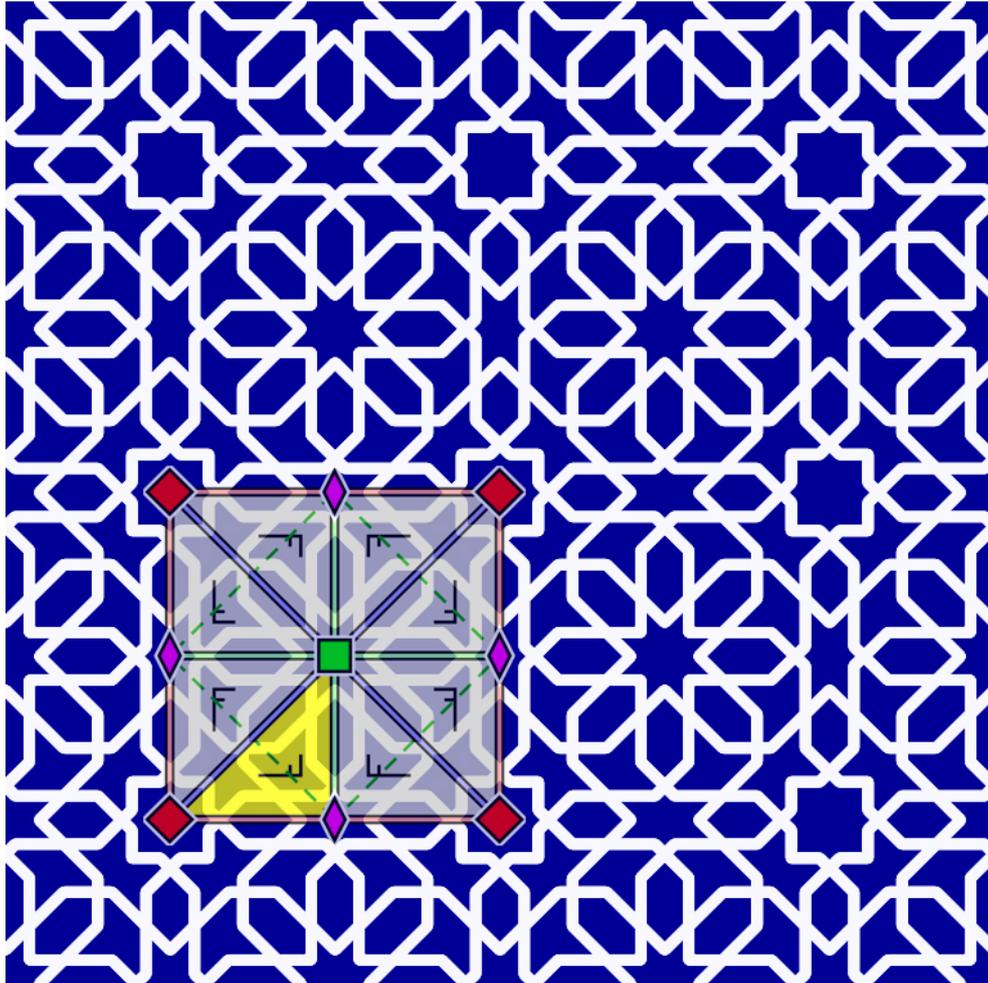


Figura 4.29: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p4m$  e sua célula básica.

E, do mesmo modo, adicionando  $R_{MN}$  em  $p4$ , temos:

$$p4g = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A90}, R_{MN} \rangle$$

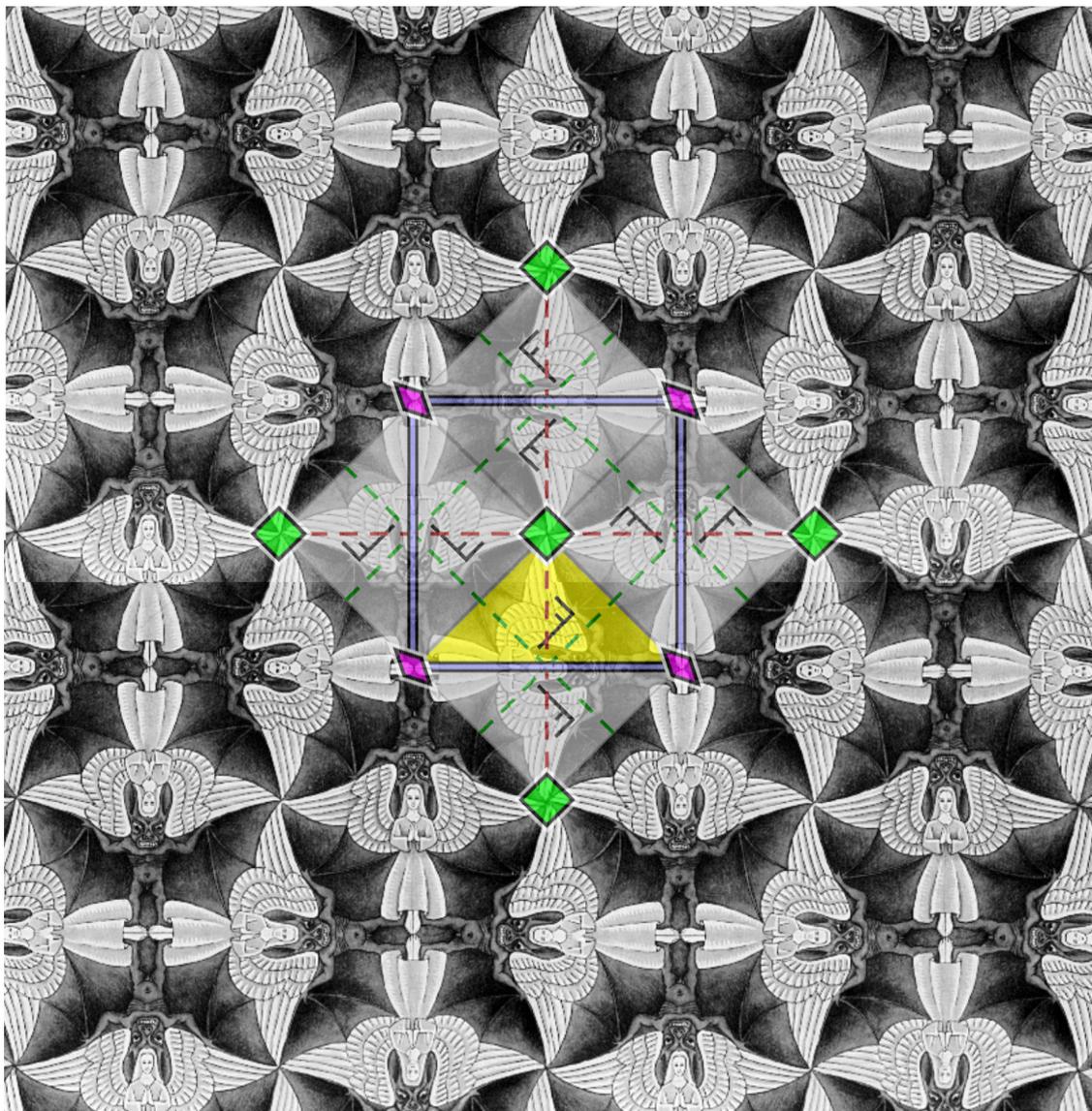


Figura 4.30: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p4g$  e sua célula básica. Escher, M. C., “Anjos e Demônios”, 1941, nanquim, lápis de cor, tinta branca.

Assim, todo o padrão de revestimento contendo 4-centro tem ou  $p4$  ou  $p4m$  ou  $p4g$  como grupo de revestimento.

- $p4$  possui 4-centro e 2-centro. Não existe simetria oposta no grupo.
- $p4m$  possui 4-centro e 2-centro. Tem quatro retas de simetria em direções opostas, todas elas passando por um 4-centro. Possui reflexões deslizantes cujos eixos não são de simetria.
- $p4g$  possui 4-centro e 2-centro. Tem duas retas de simetria em direções opostas que não passam por 4-centro, mas passam em todos os 2-centro. Existem reflexões deslizantes cujos eixos não são de simetria.

### 4.4 Grupos de Revestimentos com 2-centro

Supondo que  $\mathcal{W}$  contém um 2-centro  $A$ , então  $H_A \in \mathcal{W}$  e, após analisar os casos dos grupos de revestimento com 6-centro, 3-centro e 4-centro, podemos concluir que todo centro de simetria de  $\mathcal{W}$  é um 2-centro. Além disso, seja  $\langle T_{AB}, T_{AC} \rangle$  o subgrupo das translações mínimas em  $\mathcal{W}$  e que  $H_M = H_A T_{AB}$ ,  $H_N = H_A T_{AC}$  e  $H_E = H_M H_A H_N$ <sup>1</sup>, com  $M$ ,  $N$  e  $E$  sendo 2-centros e o ponto médio, respectivamente, de  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$ , e que  $D = (T_{AB} T_{AC})(A)$ . Desse modo, temos o quadrilátero  $ABCD$  sendo a célula básica do grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ .

Além disso, todo ponto  $A_{ij}$  no reticulado é um 2-centro, assim como o ponto médio de dois pontos quaisquer do reticulado. Veja a figura abaixo:

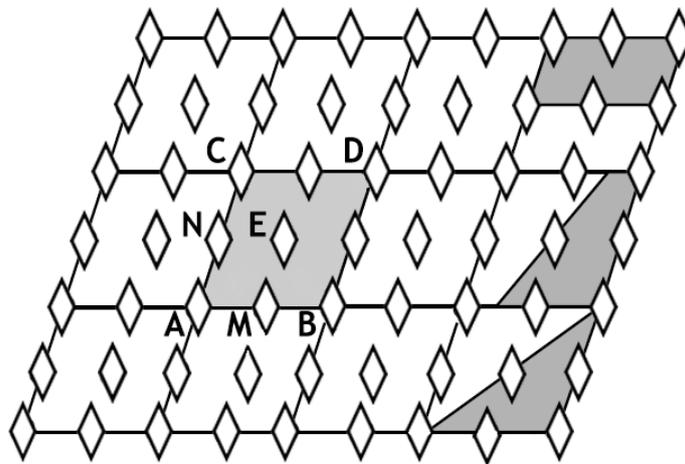


Figura 4.31: Reticulado de 2-centro, célula básica e alguns exemplos de motivos

Não existe mais  $n$ -centros de simetria além dos descritos acima. Logo, estes são todos os centros de simetria de  $\mathcal{W}$ . Assim, se o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  não contém reflexões e nem reflexões deslizantes, temos:

$$p2 = \langle T_{AB}, T_{AC}, H_A \rangle = \langle H_M, H_E, H_N \rangle.$$

<sup>1</sup>Nota: para demonstrar basta usar a Proposição 2.3.3, mostre que  $H_E$  e  $H_M H_A H_N$  coincidem em três pontos não colineares



Figura 4.32: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p2$  e sua célula básica

Considere o grupo  $\mathcal{W}$ , a seguir, como uma extensão de  $p2$ , então, adicionando à  $p2$  isometrias opostas obteremos outros grupos de revestimentos.

Suponhamos que uma reflexão tenha seu eixo na reta  $l$  com  $R_l \in \mathcal{W}$  e, pelo Teorema 3.2.1, o reticulado de  $\mathcal{W}$  é rômboico ou retangular.

No caso de um reticulado rômboico, se a reta  $l$  é paralela a uma diagonal da célula básica e passa por um 2-centro, podemos supor que o ponto  $A$  é o 2-centro que está contido em  $l$ , então  $l$  contém uma diagonal da célula básica  $ABCD$  do reticulado determinado por  $A$ . Logo, acrescentando uma reflexão em uma diagonal da célula básica, necessariamente, tem a reflexão na outra diagonal, pois as retas  $AD$  e  $BC$  são perpendiculares e, ainda, o centro da célula básica é um 2-centro  $E$ , em que  $H_E R_{AD} = R_{BC}$ , desse modo obtemos:

$$cmm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AD}, R_{BC} \rangle = \langle R_{AD}, R_{BC}, H_M \rangle$$

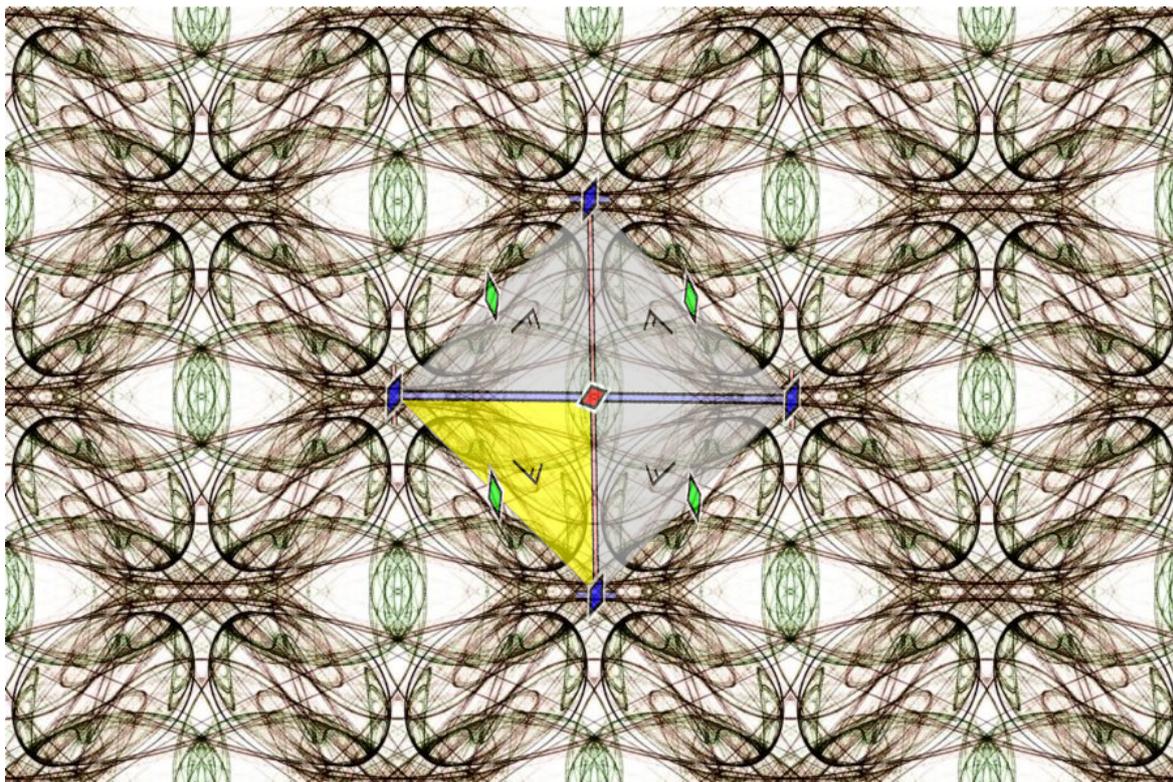


Figura 4.33: Um exemplo de um grupo de revestimento  $cmm$  e sua célula básica

Então, no caso do reticulado rômbo, nós temos somente uma possibilidade, que é o grupo de revestimento  $cmm$ . Para este grupo de revestimento, existe um caso especial quando a célula básica é quadrada, pois suas diagonais também formam um ângulo de  $90^\circ$  e ela contempla o grupo  $cmm$  e o grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  que veremos a seguir, em que a célula básica é um retângulo. Estendendo  $p2$  a um outro grupo de revestimento  $\mathcal{W}$ , em que o reticulado é retangular, não é possível que haja uma reflexão em uma diagonal da célula básica, pois não existe eixo de simetria na diagonal de um retângulo<sup>2</sup>. Então, só resta considerar o caso em que a reta de reflexão na em  $l$ , com  $R_l \in \mathcal{W}$ , é paralela a um lado da célula determinada por  $ABCD$ . Desse modo, temos dois casos:

Caso 1: A reta  $l$  passa por um 2-centro.

Introduzindo  $l$  no lado que contém  $AN$  do retângulo  $NAME$  temos o eixo de reflexão em  $AN$  e ainda  $H_A R_{AN} = R_{AM} R_{AN} R_{AN} = R_{AM}$ ,  $H_M R_{AM} = R_{ME}$  e  $H_E R_{ME} = R_{NE}$ , determinamos então:

<sup>2</sup>Exceto no caso especial quando a célula básica é um quadrado

$$pmm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AM}, R_{AN} \rangle = \langle R_{AM}, R_{ME}, R_{AN}, R_{NE} \rangle$$

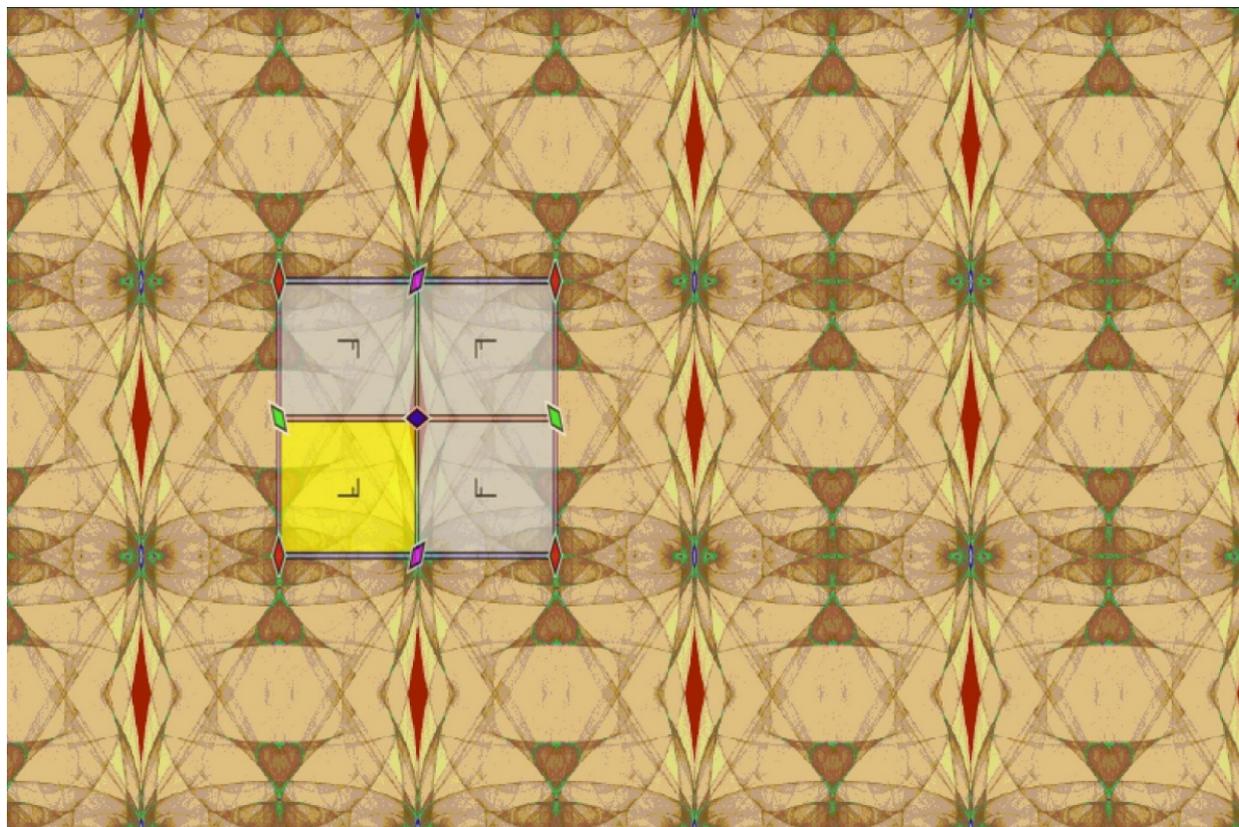


Figura 4.34: Um exemplo de um grupo de revestimento  $pmm$  e sua célula básica

Caso 2: A reta  $l$  não passa por um 2-centro.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $l$  é paralela a  $AM$  e  $p$  é a mediatriz de  $AN$ , além disso, todas as retas de reflexões são paralelas à reta  $l$ , pois caso contrário, teríamos duas retas de reflexão concorrentes e isso geraria um  $n$ -centro que não pertenceria ao grupo, desse modo temos:

$$pmg = \langle T_{AB}, T_{AC}, H_A, R_p \rangle = \langle H_A, H_M, R_p \rangle$$

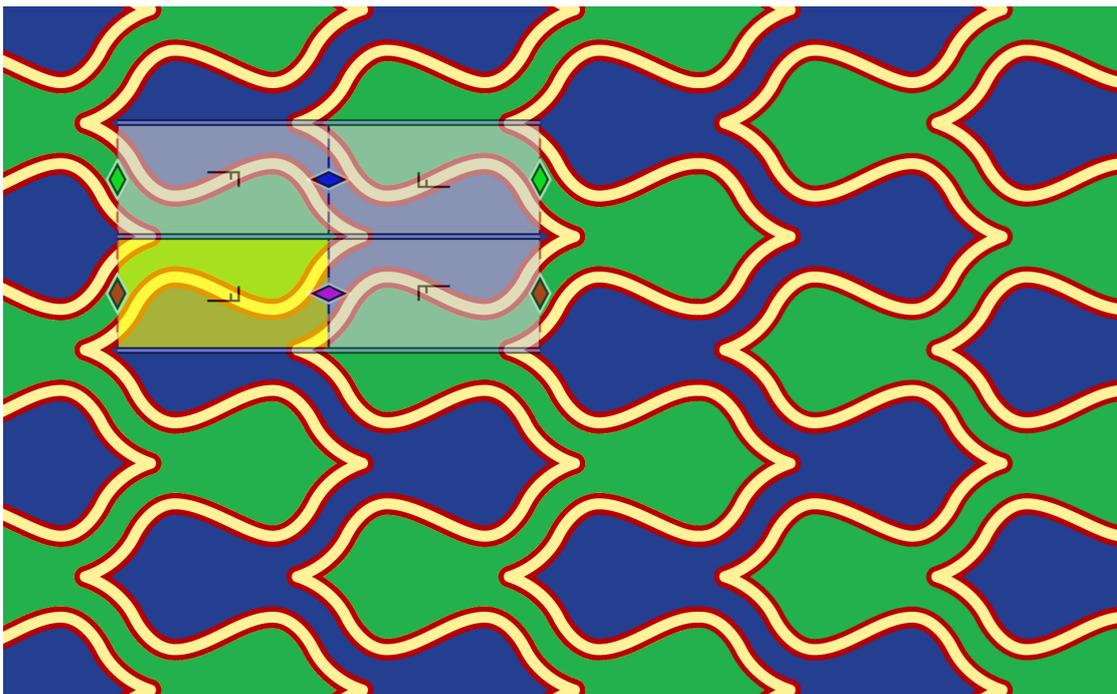
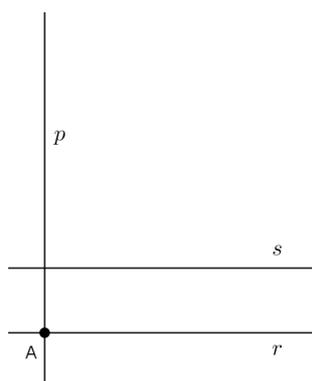


Figura 4.35: Um exemplo de um grupo de revestimento  $pmg$  e sua célula básica

Agora vamos estender  $p2$  a um grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  que contém reflexão deslizante, mas não contém reflexão.

Seja  $\alpha$  uma reflexão deslizante, com  $p$  sendo o eixo de simetria de  $\alpha$ . Nenhum centro de meia-volta ocorre no eixo  $p$ , pois, caso contrário, supondo  $A$  um 2-centro em  $p$ , podemos escrever:  $H_A = R_r R_p$ , com a reta  $r$  passando por  $A$  e perpendicular a  $p$  e  $\alpha = R_p T_\alpha$ , em que  $T_\alpha$  é a translação na direção do eixo  $p$ . Assim,  $T_\alpha$  pode ser expressa como o produto de duas reflexões em retas paralelas e perpendiculares ao eixo  $p$ .

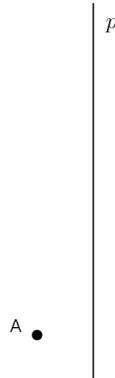


Seja  $T_\alpha = R_r R_s$ . Assim,

$$H_A \alpha = R_r R_p R_p R_r R_s = R_s.$$

Logo, a reflexão  $R_s$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ , pois  $H_A$  e  $\alpha$  pertencem a  $\mathcal{W}$ . Isto não ocorre, pois  $\mathcal{W}$  não tem reflexão. Dessa forma, concluí-se que o centro da meia-volta não está contido em um eixo de reflexão deslizante.

Então, considere  $A$  o ponto de meia-volta mais próximo do eixo  $p$  da reflexão deslizante  $\alpha$ .



Seja  $T_1$  a translação de menor deslocamento na direção da translação de  $\alpha^2$ . Então  $\alpha^2 = T_1^i$ , para algum  $i$  inteiro, que pode ser assumido como positivo. Existem dois casos a serem considerados.

Caso 1:  $\alpha^2 = T_1^{2n}$ , com  $i = 2n$  e  $n$  sendo inteiro positivo.

Como  $\alpha T_1 = T_1 \alpha$ , pois a direção da translação envolvida na translação deslizante e a direção de  $T_1$  são iguais, temos

$$\begin{aligned} \alpha^2 T_1^{-2n} &= 1 \\ \alpha \alpha T_1^{-n} T_1^{-n} &= 1 \\ \alpha T_1^{-n} \alpha T_1^{-n} &= 1 \\ (\alpha T_1^{-n})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Assim,  $\alpha T_1^{-n}$  tem período 2, e, como é uma isometria oposta, consequentemente é a reflexão  $R_p$ , ou seja,  $\alpha T_1^{-n} = R_p$ , pois  $p$  é o eixo da reflexão deslizante  $\alpha$ . Dessa forma concluímos que a reflexão  $R_p$  está no grupo de revestimento  $\mathcal{W}$  o que não acontece pois o grupo não tem reflexão. Logo, o caso 1 fica excluído.

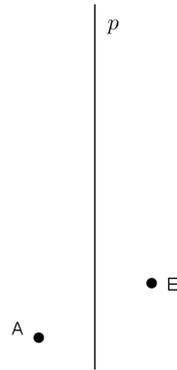
Caso 2:  $\alpha^2 = T_1^{2n+1}$ , com  $i = 2n + 1$  e  $n$  sendo inteiro positivo.

$$\begin{aligned} \alpha^2 T_1^{-2n} &= T_1 \\ \alpha \alpha T_1^{-n} T_1^{-n} &= T_1 \\ \alpha T_1^{-n} \alpha T_1^{-n} &= T_1 \\ (\alpha T_1^{-n})^2 &= T_1 \end{aligned}$$

Neste caso,  $(\alpha T_1^{-n})^2 = T_1$  e, assim,  $\alpha T_1^{-n}$  não tem período 2. E, como é isometria oposta, é uma reflexão deslizante.

Seja  $\gamma = \alpha T_1^{-n}$  e  $\gamma(A) = E$ . Assim,  $\gamma^2 = (\alpha T_1^{-n})^2 = T_1$ .

Todas as reflexões deslizantes tendo eixo  $p$  podem ser expressas a partir de  $\gamma$ . De fato, se temos a reflexão deslizante  $\alpha_1$  com eixo  $p$ , existe um inteiro positivo  $n_1$  tal que  $\alpha_1^2 =$

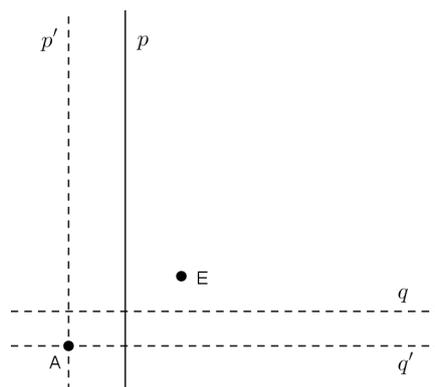


$T_1^{2n_1+1} = (\gamma^2)^{2n_1+1} = \gamma^{2(2n_1+1)}$ , o que implica que:

$$\alpha_1^2 = (\gamma^{2n_1+1})^2.$$

Assim,  $\alpha_1 = \gamma^{2n_1+1}$ . Portanto,  $\alpha_1$  pode ser expressa a partir de  $\gamma$ .

Sejam as retas  $p'$  paralela a  $p$  por  $A$ ,  $q'$  perpendicular a  $p$  por  $A$  e  $q$  paralela a  $q'$  equidistante de  $q'$  e  $E$ .



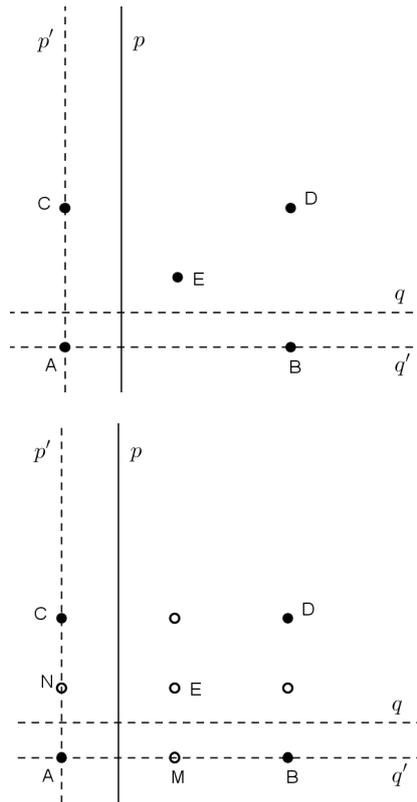
Assim,

$$\begin{aligned} H_A\gamma &= R_{p'}R_{q'}R_{q'}R_qR_p \\ &= R_{p'}R_qR_p \\ &= R_qR_{p'}R_p \end{aligned}$$

Seja  $T_{2p'p}$  a translação  $R_{p'}R_p$ , ou seja,  $T_{2p'p} = R_{p'}R_p$ , e seja  $\epsilon = R_q2p'p$ . Assim,  $\epsilon = H_A\gamma$  e, portanto, a reflexão deslizante  $\epsilon$  de eixo  $q$  pertence ao grupo  $\mathcal{W}$ .

Sejam  $\gamma^2(A) = C$ ,  $\epsilon^2(A) = B$  e  $D = \gamma^2\epsilon^2(A)$ . Assim,  $\gamma^2 = T_{AC}$  e  $\epsilon^2 = T_{AB}$ .

Como  $T_{AB} = H_AH_M$ , com  $M$  sendo o ponto médio de  $AB$  e  $T_{AC} = H_AH_N$ , com  $N$  sendo o ponto médio de  $AC$ , assim como os pontos médios de  $CD$  e  $BD$ , desse modo, temos a seguinte configuração:



Com isto, concluimos que a célula básica é retangular e obtemos o grupo:

$$pgg = \langle T_{AB}, T_{AC}, H_A, \gamma \rangle = \langle \gamma, \epsilon \rangle$$

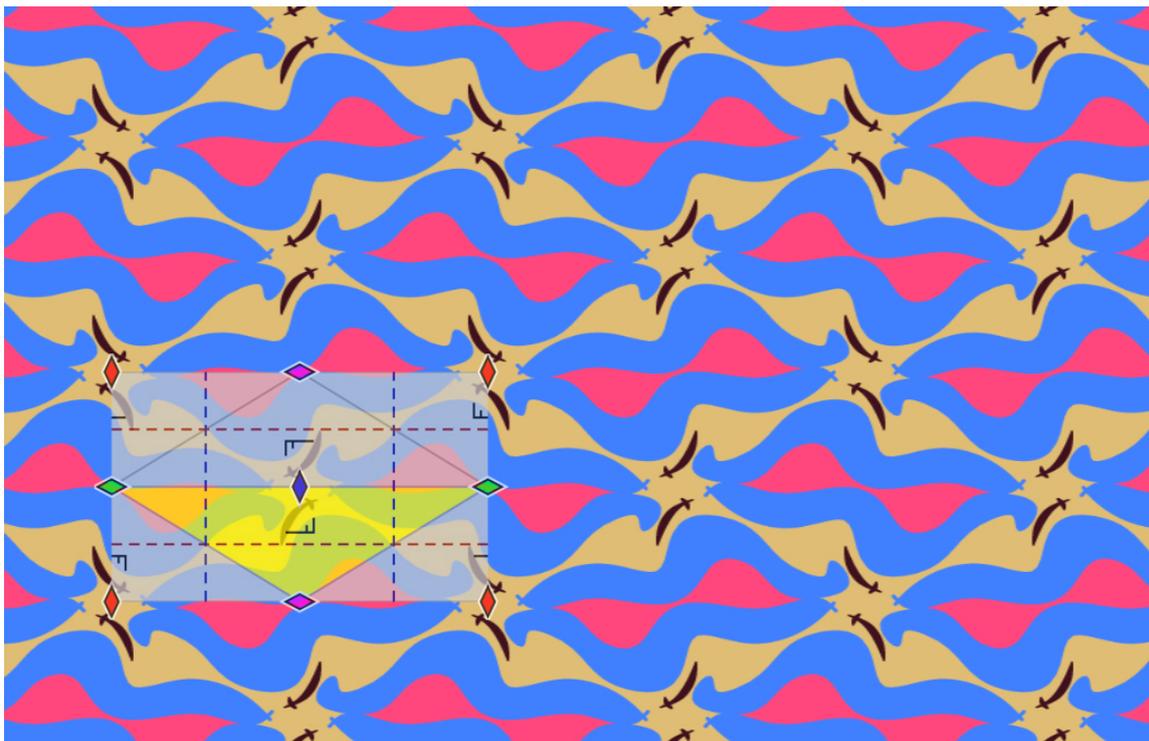


Figura 4.36: Um exemplo de um grupo de revestimento  $pgg$  e sua célula básica

Assim, todo o padrão de revestimento contendo somente 2-centro tem ou  $p2$  ou  $cmm$  ou  $pmm$  ou  $pmg$  ou  $pgg$  como grupo de revestimento.

- $p2$  cada centro de simetria é um 2-centro e não existe isometria oposta no grupo.
- $cmm$  cada centro de simetria é um 2-centro, contém reflexões em direções perpendiculares, cujo ponto de intersecção é um 2-centro, porém, nem todo 2-centro está contido em uma reta de simetria. Ainda, os eixos de reflexão deslizante não estão nas retas de simetria.
- $pmm$  cada centro de simetria é um 2-centro, contém reflexões perpendiculares e cada 2-centro está no ponto de intersecção das retas de simetria.
- $pmg$  cada centro de simetria é um 2-centro, tem reta de simetria e todas as retas de simetria são paralelas. Os eixos de reflexão deslizante são todos perpendiculares as retas de simetria. Todos os centros de simetria estão contidos nos eixos de reflexão deslizante e nenhum centro de simetria pertence a reta de reflexão.
- $pgg$  cada centro de simetria é um 2-centro, não tem reta de simetria, mas possui reflexões deslizantes perpendiculares. Nenhum 2-centro está contido nos eixos das reflexões deslizantes.

### 4.5 Grupos de revestimentos sem n-centro

Finalmente, consideremos os grupos de revestimentos que não possuem centros de rotações. O caso trivial é aquele em que o grupo  $\mathcal{W}$  contém apenas as translações  $T_{AB}$  e  $T_{AC}$  com os pontos  $A, B$  e  $C$  sendo não colineares e o ponto  $D = T_{AB}T_{AC}(A)$ . Dessa forma temos o grupo de revestimento:

$$p1 = \langle T_{AB}, T_{AC} \rangle$$

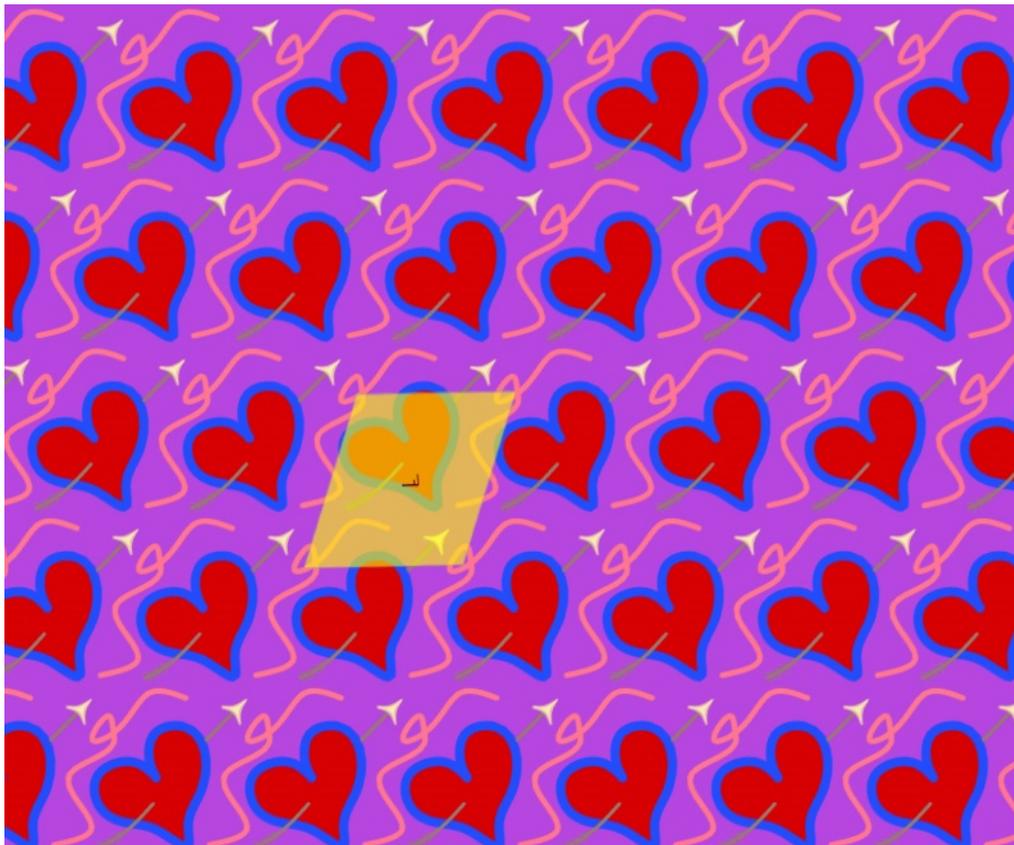


Figura 4.37: Um exemplo de um grupo de revestimento  $p1$  e sua célula básica

Acrescentando isometrias opostas em  $p1$  temos as variações e outros grupos de revestimentos em  $\mathcal{W}$ . Verifiquemos então o que acontece quando é adicionado  $R_l$  em  $p1$ , com  $l$  sendo uma reta do plano. Para isso, dividaremos a situação em dois casos. Se  $R_l \in \mathcal{W}$ , com  $A \in l$ , então, pela Proposição 3.2.1:

Caso 1:  $l$  passa pela diagonal  $AD$  da célula básica rômica  $ABCD$ , dessa forma:

$$cm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AD} \rangle$$



Figura 4.38: Um exemplo de um grupo de revestimento  $cm$  e sua célula básica

Caso 2:  $l$  contém o lado  $AC$  da célula básica  $ABCD$ , que é retangular, então teremos:

$$pm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AC} \rangle$$

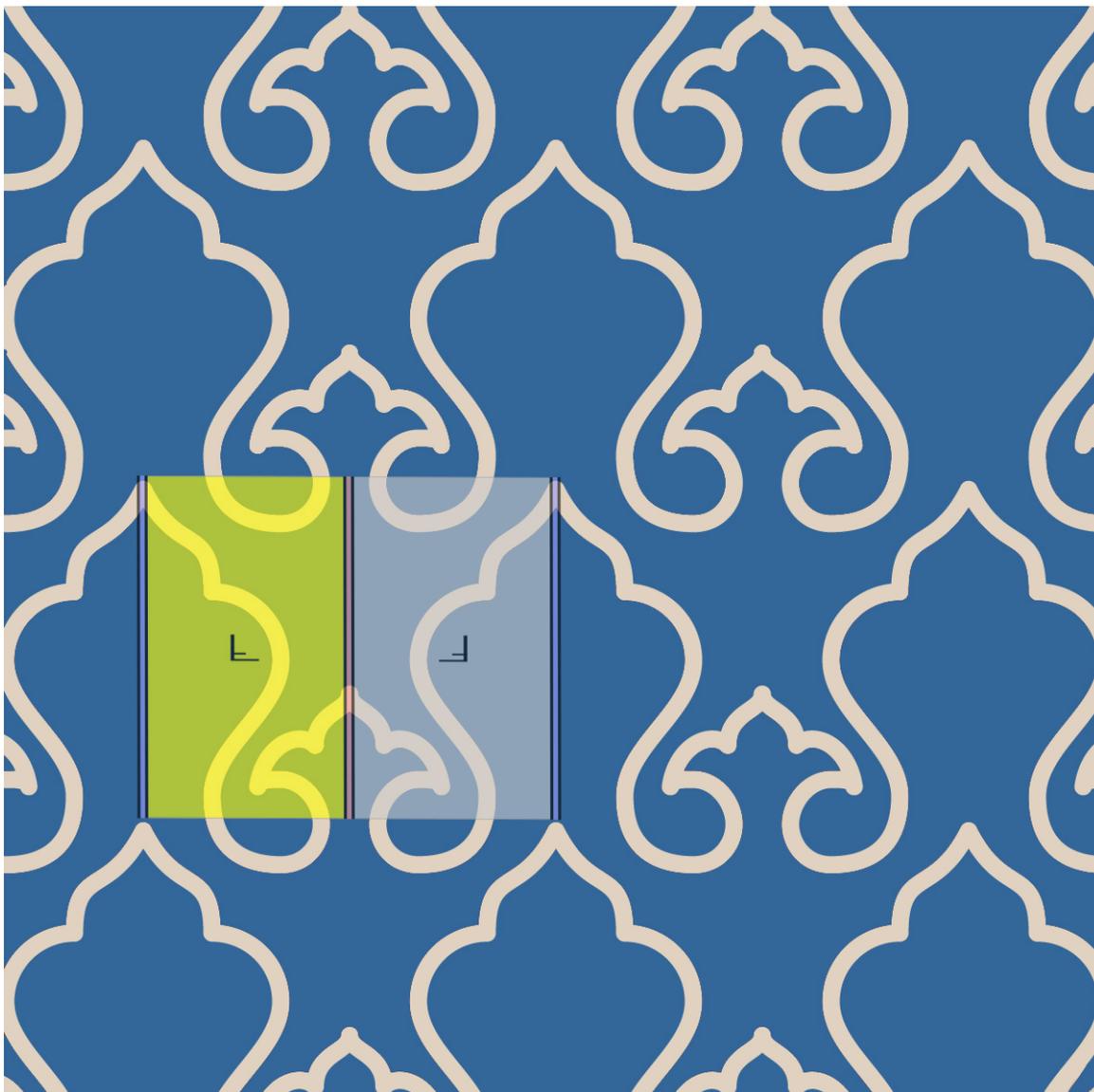


Figura 4.39: Um exemplo de um grupo de revestimento  $pm$  e sua célula básica

É fácil observar que  $\mathcal{W}$  não pode conter ambas as reflexões  $R_{AC}$  e  $R_{AD}$ , pois  $\mathcal{W}$  não contém rotações, além disso, todas as retas de reflexões são paralelas, tanto em  $cm$  quanto  $pm$ , já que  $\mathcal{W}$  não possui  $n$ -centros.

Agora, vamos fazer uma comparação das reflexões deslizantes que acontecem nos grupos  $cm$  e  $pm$ . Suponhamos que  $\mathcal{W}$  contém uma reflexão deslizante  $\lambda$  com eixo em  $NK$ , que leva  $N$  em  $K$ , em que  $N$  é o ponto médio de  $AC$  e  $K$  é o ponto médio de  $CD$ , logo  $\lambda^2 = T_{AD} = T_{AB}T_{AC}$ .

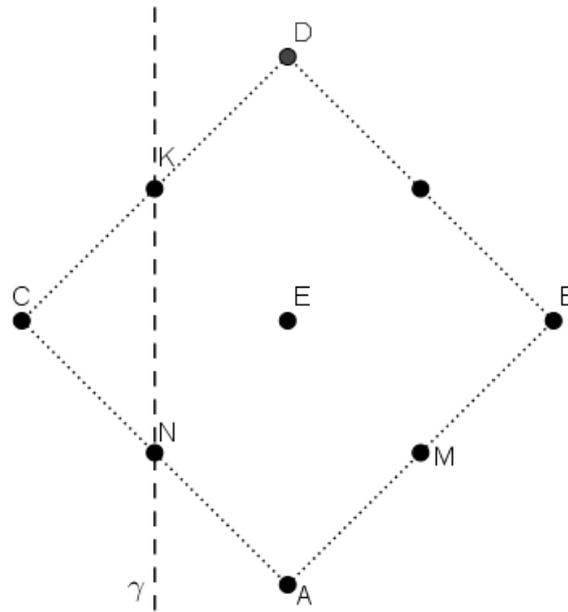


Figura 4.40:

Note que  $\lambda \in cm$ , pois  $cm = \langle \lambda, R_{AD} \rangle = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AD} \rangle$ .

Desse modo podemos verificar que o eixo de reflexão deslizante em  $cm$  é paralelo a reta de reflexão e passa pelos pontos equidistantes de duas retas de simetria, mas não passa por reta de reflexão.

Por outro lado, toda reflexão deslizante em  $pm$  pode ser escrita da forma  $T_{AC}^i(T_{AB}^j R_{AC})$ , com  $i \neq 0$ , em que seus eixos de reflexões deslizantes também são as retas de simetria para  $pm$ . Portanto, em  $pm$ , os eixos de reflexão deslizante são retas de reflexão.

Estas propriedades da reflexão deslizante nesses grupos podem ser usadas para distinguir padrões entre os grupos de revestimento  $cm$  e  $pm$ .

Em seguida, vamos considerar a extensão de  $p1$  somente com reflexão deslizante. Assim, consideremos  $\gamma \in \mathcal{W}$  o eixo de reflexão deslizante, sendo todas as reflexões deslizantes de  $\mathcal{W}$ , pela Proposição 2.3.14, paralelas, pois  $\mathcal{W}$  não contém rotações. Portanto consideremos  $\gamma$  a reflexão deslizante de eixo  $AB$  que leva  $A$  em  $M$ , então  $\gamma^2 = T_{AB}$  e  $\gamma T_{AC} = \varepsilon$ , em que  $\varepsilon$  é a reflexão deslizante de eixo  $NE$  que leva  $N$  em  $E$ . Logo, temos:

$$pg = \langle T_{AB}, T_{AC}, \gamma \rangle = \langle \gamma, \varepsilon \rangle$$

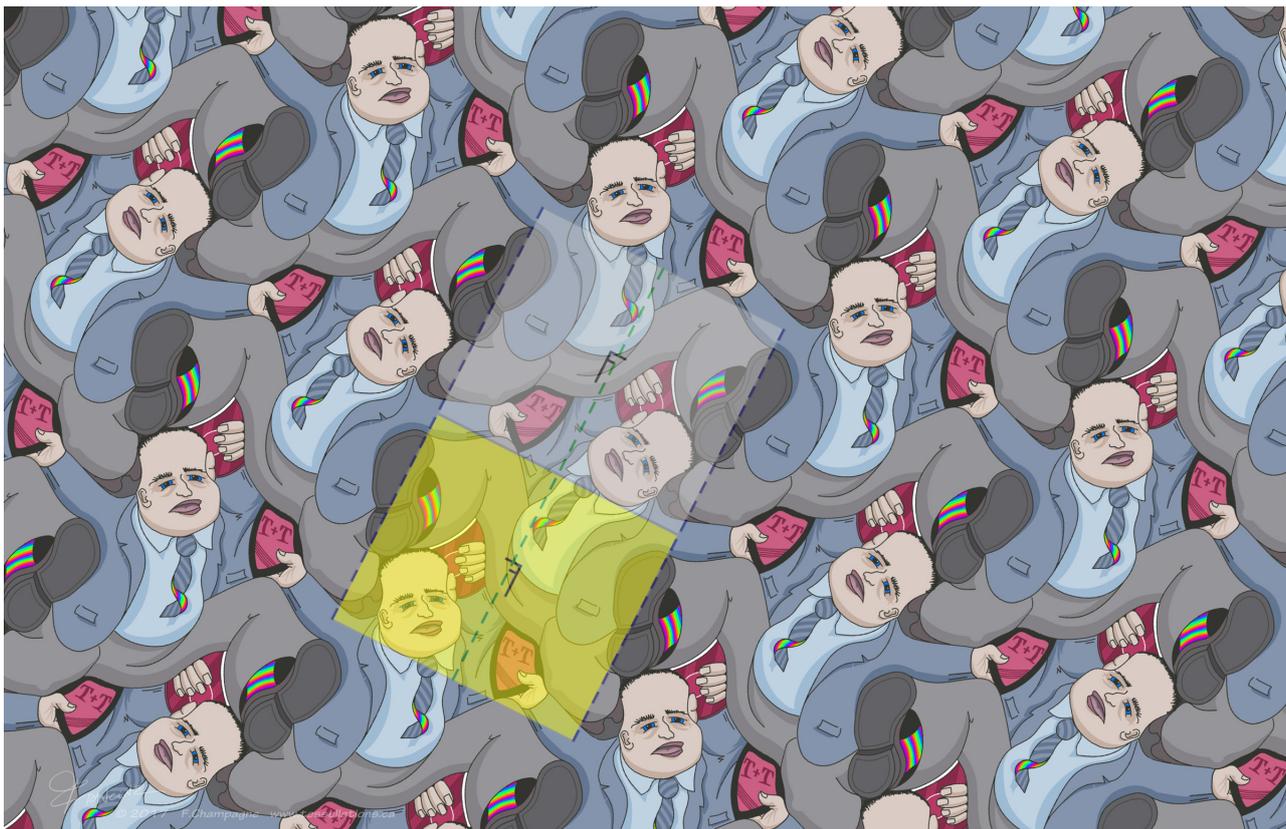


Figura 4.41: Um exemplo de um grupo de revestimento  $pg$  e sua célula básica. Arte "Run Away Office Boy" por Francine Champagne.

Assim, todo o padrão de revestimento contendo sem  $n$ -centro tem ou  $p1$  ou  $cm$  ou  $pm$  ou  $pg$  como grupo de revestimento.

- $p1$  contém apenas translações; não há rotações, reflexões, ou reflexões deslizantes.
- $cm$  não tem rotações, mas tem eixos de reflexões e todos são paralelos. Há reflexões deslizantes, esses eixos estão nas mediatrizes da distância entre duas retas de reflexão, mas não estão contidas nas retas de simetria.
- $pm$  não tem rotações, mas tem retas de reflexões, todas elas são paralelas e a reflexão deslizante está contida em toda reta de simetria.
- $pg$  não tem rotação, nem reta de simetria; contém apenas reflexões deslizantes e translações.

## 4.6 Classificação dos tipos de grupos de revestimentos

Para a classificação dos tipos de grupos de revestimentos, devemos considerar as seguintes situações:

- (a) Considerar o grupo  $\mathcal{W}$  tendo 6-centro e 3-centro.
- (b) Considerar o grupo  $\mathcal{W}$  tendo 3-centro e sem 6-centro.
- (c) Considerar o grupo  $\mathcal{W}$  tendo 4-centro e 2-centro.
- (d)  $\mathcal{W}$  contendo apenas 2-centro.
- (e)  $\mathcal{W}$  não contendo n-centro.

A seguir, vamos enunciar o teorema de classificação dos 17 tipos de grupos de revestimentos possíveis.

**Teorema 4.1.** Se  $\mathcal{W}$  é um grupo de revestimento, então  $\mathcal{W}$  é um dos dezessete grupos:

$$\begin{array}{lll}
 p6 = \langle R_{A60}, H_M \rangle & p3 = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120} \rangle & p4 = \langle R_{A90}, R_{E90} \rangle \\
 p6m = \langle R_{A60}, H_M, R_{CG} \rangle & p31m = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120}, R_{AG} \rangle & p4m = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A90}, R_{AE} \rangle \\
 & p31m = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A120}, R_{AB} \rangle & p4g = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{A90}, R_{MN} \rangle
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 p2 = \langle T_{AB}, T_{AC}, H_A \rangle & p1 = \langle T_{AB}, T_{AC} \rangle \\
 cmm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AD}, R_{BC} \rangle & cm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AD} \rangle \\
 pm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AM}, R_{AN} \rangle & pm = \langle T_{AB}, T_{AC}, R_{AC} \rangle \\
 pmg = \langle T_{AB}, T_{AC}, H_A, R_p \rangle & pg = \langle T_{AB}, T_{AC}, \gamma \rangle \\
 pgg = \langle T_{AB}, T_{AC}, H_A, \gamma \rangle &
 \end{array}$$

De outro modo, o Teorema 4.1 pode ser mostrado na Tabela 4.1.

	Grupo	Geradores dos grupos de revestimentos	
1.	p6	uma meia-volta e uma rotação de 120°	Tem 6-centro Tem 3-centro
2.	p6m	reflexões em três lados de um triângulo (30°, 60°, 90°)	Tem 2-centro Não tem 4-centro
3.	p3	duas rotações de 120°	Tem 3-centro
4.	p3m1	reflexões nos três lados de um triângulo equilátero	Não tem 6-centro Não tem 2-centro
5.	p31m	uma reflexão e uma rotação de 120°	Não tem 4-centro
6.	p4	uma meia-volta e uma rotação de 90°	Tem 4-centro
7.	p4m	reflexões nos três lados de um triângulo (45°, 45°, 90°)	Tem 2-centro Não tem 6-centro
8.	p4g	uma reflexão e uma rotação de 90°	Não tem 3-centro
9.	p2	três meia-voltas	
10.	cmm	duas reflexões perpendiculares e uma meia-volta	Tem 2-centro
11.	pmm	reflexões nos quatro lados de um retângulo	Não tem 6-centro
12.	pmg	uma reflexão e duas meia-voltas	Não tem 3-centro
13.	pgg	duas reflexões deslizantes perpendiculares	Não tem 4-centro
14.	p1	duas translações	
15.	cm	uma reflexão e uma reflexão deslizante paralela	
16.	pm	duas reflexões e uma translação	Não tem n-centros
17.	pg	duas reflexões deslizantes paralelas	

Tabela 4.1: Classificação dos 17 grupos de revestimentos

Ainda, apresentamos dois algoritmos para identificar um grupo de revestimento, o primeiro como mapa conceitual e o segundo na forma de tabela:

Algoritmo I

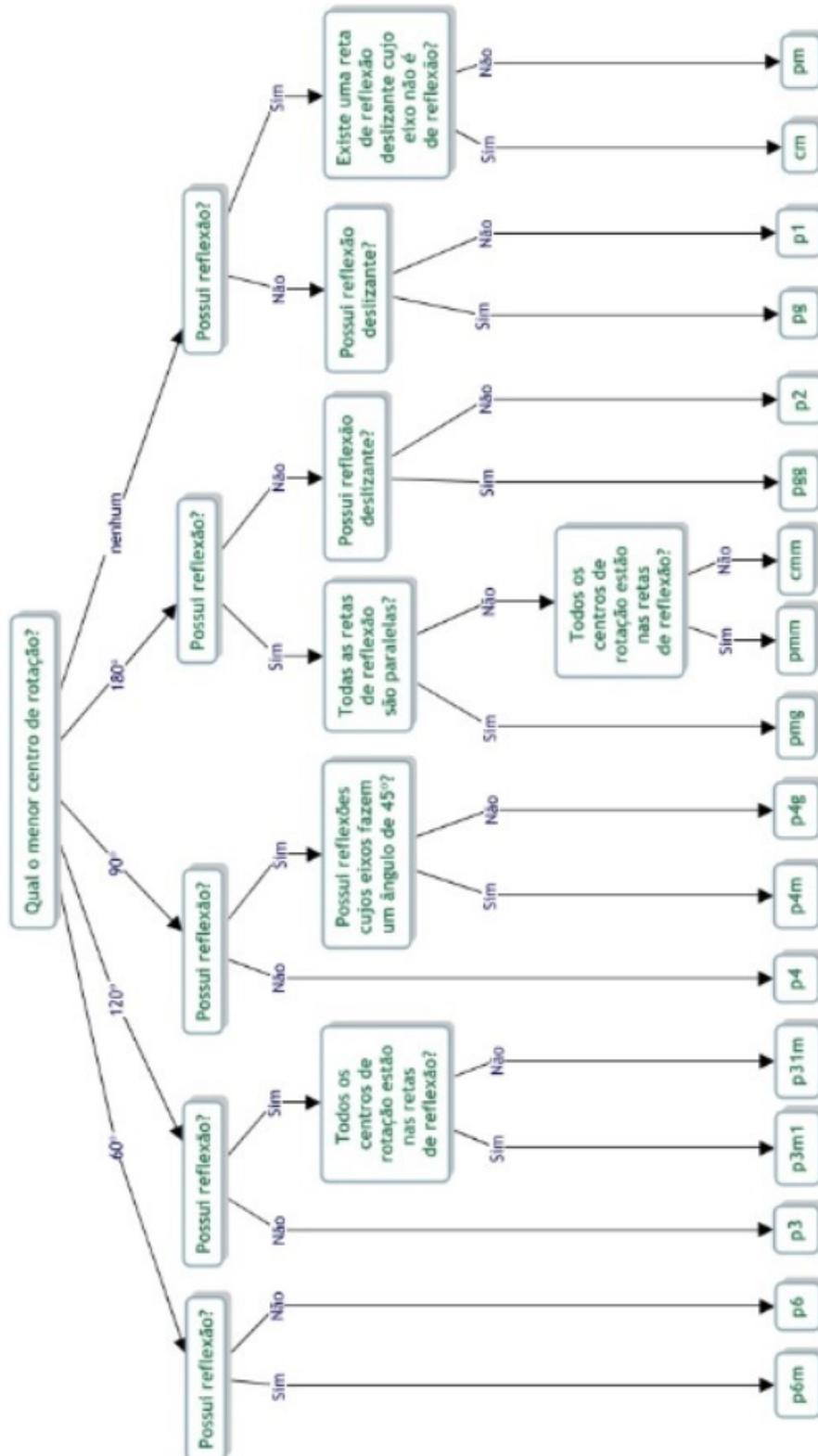


Figura 4.42: Algoritmo I de identificação de grupos de revestimentos

Algoritmo II

Grupo	Estrutura da rede	Ordem da Maior rotação	Reflexão	Reflexão deslizante	Motivo	Propriedades para distinguir
p1	paralelograma	1	não	não	1 unidade	
p2	paralelograma	2	não	não	1/2 unidade	
pm	retangular	1	sim	não	1/2 unidade	
pg	retangular	1	não	sim	1/2 unidade	
cm	rômbica	1	sim	sim	1/2 unidade	
pmm	retangular	2	sim	não	1/4 unidade	
pmg	retangular	2	sim	sim	1/4 unidade	retas de reflexões paralelas
pgg	retangular	2	não	sim	1/4 unidade	
cmm	rômbica	2	sim	sim	1/4 unidade	retas de reflexões perpendiculares
p4	quadrada	4	não	não	1/4 unidade	
p4m	quadrada	4	sim	sim	1/8 unidade	todo 4-centro nas retas de reflexões
p4g	quadrada	4	sim	sim	1/8 unidade	4-centro fora das retas de reflexões
p3	hexagonal	3	não	não	1/3 unidade	
p3m1	hexagonal	3	sim	sim	1/6 unidade	todo 3-centro nas retas de reflexões
p31m	hexagonal	3	sim	sim	1/6 unidade	3-centro fora das retas de reflexões
p6	hexagonal	6	não	não	1/6 unidade	
p6m	hexagonal	6	sim	sim	1/12 unidade	

Tabela 4.2: Algoritmo II de identificação de grupos de revestimentos

# Capítulo 5

## Atividades

À primeira vista as transformações geométricas podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano, podemos notar com veemência a inserção dessa regularidade, equilíbrio e elegância em toda a natureza e nas próprias construções dos seres vivos. Além do mais, as atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas.

O estudo de simetria é rico em informações históricas e culturais. Antes de iniciar esse estudo seria interessante explorar e dizer que as transformações geométricas fazem parte da história da humanidade, há mais tempo do que se possa imaginar, para isso, seria conveniente produzir um material para ser usado em um projetor para visualização das imagens de simetria. Como exemplos, pode ser interessante citar que uma das primeiras evidências que aparece na pintura rupestre do sítio de El Buey na Bolívia; na cerâmica chinesa, que remonta ao período Neolítico (3000 a.C.), pode notar-se a presença do uso de transformações geométricas na sua decoração; a cerâmica marajoara (Brasil), é considerada uma das mais antigas artes cerâmicas do continente Americano; no tapete Pazyryk (Sibéria) datado do século V a.C. pode-se observar padrões geométricos e simetrias na sua ornamentação; o artista Escher, cujas obras ficaram conhecidas pelos seus desenhos impossíveis e simétricos, pelas ilusões espaciais que concebeu e pelos padrões que desenvolveu.

Essas são algumas referências que podem ser usadas como iniciação a esse tópico da geometria, a gama de materiais, histórias e ilustrações é ampla e é adequado usar para instigar o discente a se interessar pela matéria. Na elaboração destas atividades, procuramos escolher procedimentos que abordem os conceitos básicos e interessantes de se verificar, de modo mais concreto e lúdico possível, buscando torna-los acessíveis a todos os alunos. Apenas foram aplicadas as atividades 1 e 2 do Tópico 5.6 (Revestindo o plano), um breve relato de como ocorreu a aplicação dessas atividades será descrito logo após a apresentação das mesmas.

## 5.1 Translação

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 3 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Materiais utilizados:

- Cópias das atividades.
- Lápis.

### Objetivos:

- Mostrar que um segmento  $\overline{AB}$  e sua imagem  $\overline{A'B'}$  pela translação  $T_{\vec{v}}$ , são paralelas e suas medidas são iguais.

- Todos os pontos da figura inicial e os seus respectivos transformados definem a mesma direção, o mesmo sentido e estão à mesma distância.

### Atividade 1:

#### Roteiro:

- A figura  $A'$  é o transformado de  $A$  por uma isometria de \_\_\_\_\_.



Figura A

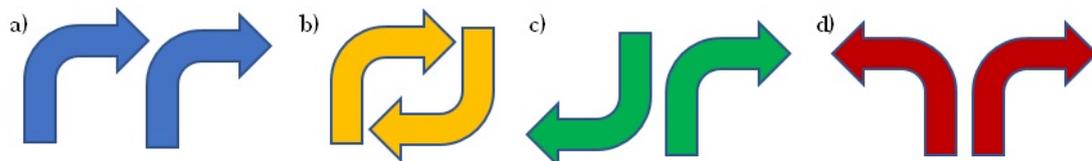


Figura A'

**Atividade 2:**

**Roteiro:**

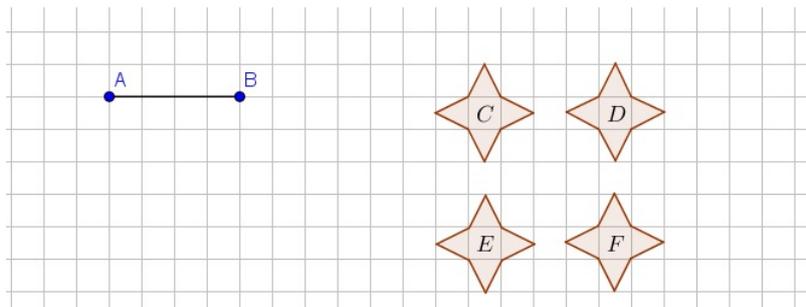
- Indique a situação que representa uma translação:



**Atividade 3:**

**Roteiro:**

- Indique qual é o transformado da figura  $F$  por uma translação com direção da reta  $AB$ , no sentido de  $B$  para  $A$  e de distância igual ao comprimento do segmento de reta  $AB$ .



**Atividade 4:**  
**Roteiro:**

- Observe a figura 5.1.

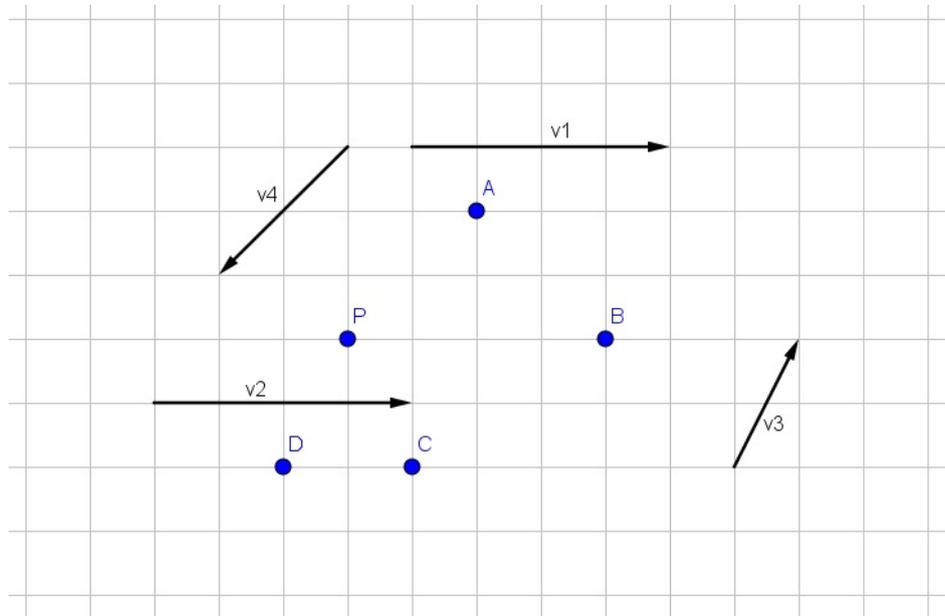


Figura 5.1:

- Indique a imagem de  $P$  pela translação associada:

- ao vetor  $\vec{v}_1$ .
- ao vetor  $\vec{v}_2$ .
- ao vetor  $\vec{v}_3$ .
- ao vetor  $\vec{v}_4$ .

## 5.2 Rotação

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 3 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Materiais utilizados:

- Cópias das atividades.
- Transferidor.
- Lápis.

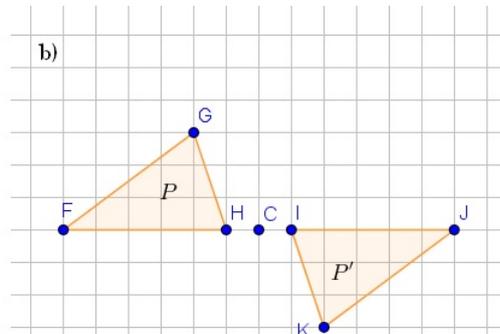
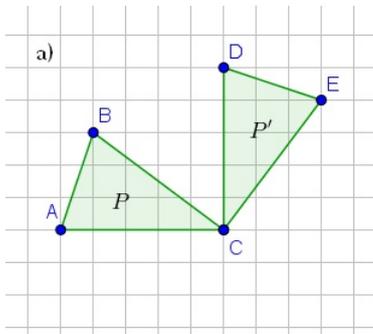
### Objetivos:

- Mostrar que, no plano, uma rotação de centro  $A$  e amplitude  $\alpha$  é uma transformação geométrica que a cada ponto  $B$  faz corresponder um ponto  $B'$  tal que:  $AB = AB'$  e  $\angle = \alpha$ .
- Mostrar que a figura  $A$  e sua imagem  $A'$  pela rotação  $R_{O\theta}$ , tem medidas iguais.
- Identificar e medir a amplitude do ângulo de rotação.
- Desenhar figuras com simetria de rotação.

**Atividade 1:**

**Roteiro:**

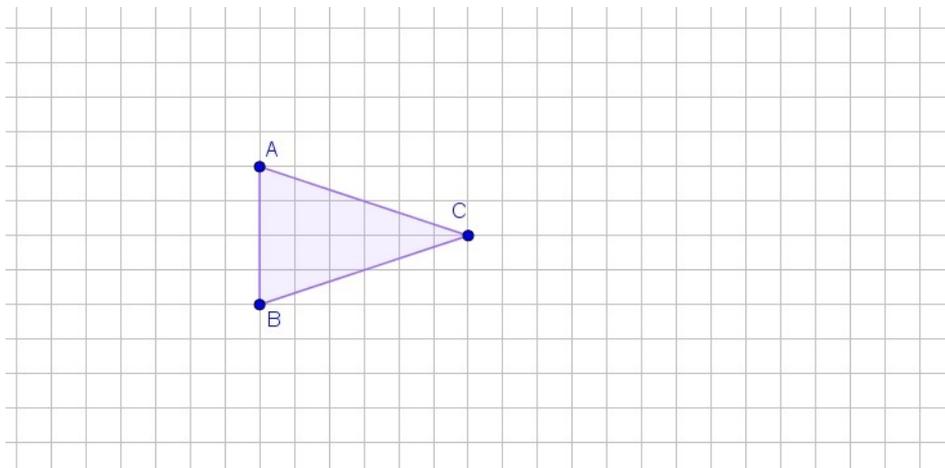
- Em cada alternativa, as figuras  $P'$  foram obtidas da figura  $P$  por uma rotação de centro  $C$ . Identifique, em cada caso, a medida da amplitude do ângulo de rotação.



**Atividade 2:**

**Roteiro:**

- Desenhe o triângulo  $A'B'C'$  transformado do triângulo  $ABC$  pela rotação de centro em  $C$  e amplitude  $180^\circ$ .



**Atividade 3:**

**Roteiro:**

- Dê os pares ordenados  $(x, y)$  que representam os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo na figura 5.2.

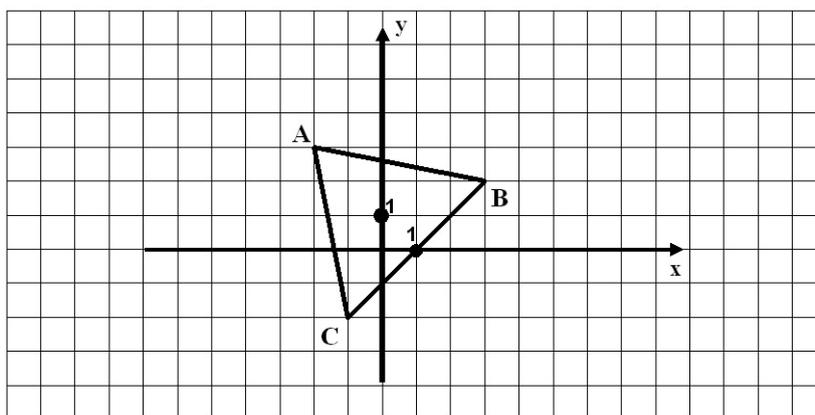


Figura 5.2: Triângulo ABC na malha quadriculada

- Gire o triângulo anterior em  $-90^\circ$  considerando o ponto  $C$  como centro de rotação e a represente na malha quadriculada (plano cartesiano) 5.3.

- Dê os pares ordenados  $(x, y)$  que representam os novos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  da nova figura.

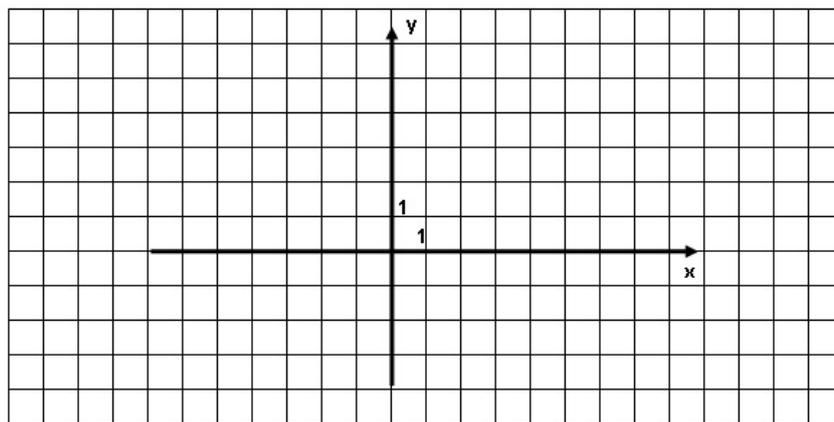


Figura 5.3: Malha quadriculada

## 5.3 Reflexão em relação a uma reta

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 8 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

**Recursos multimídia:** Softwares lúdicos de sites com fins educacionais.

### Materiais utilizados:

- Cópias das atividades
- Lápis
- Espelho mágico
- Espelho
- Geoplan
- Elásticos

### Observações:

- O material espelho mágico é uma placa retangular de acrílico vermelho transparente com aproximadamente 3mm de espessura, através do qual é possível visualizar uma figura refletida e assim desenhar sua imagem pela reflexão, veja a Figura.

### Objetivos:

- Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo.
- Desenhar no plano figuras simétricas relativas a um eixo.
- Desenhar a imagem de uma figura refletida em relação a uma reta usando o espelho mágico.
- Usar o espelho mágico para encontrar a reta de simetria, dadas uma figura e sua imagem por uma reflexão.
- Mostrar que a distância entre um ponto  $P$  e sua imagem  $P'$  pela reflexão em relação a uma reta  $r$  é igual ao dobro da distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$ .
- Mostrar que o segmento  $\overline{PP'}$  é perpendicular a reta  $r$ .
- Mostrar que o ponto de interseção entre o segmento  $\overline{PP'}$  e a reta  $r$  coincide com o ponto médio de  $\overline{PP'}$ .

**Orientações para o professor:**

- Alguns exemplos de imagens para se fazer o desenho estão no apêndice A.
- Veja o exemplo da figura 5.4.



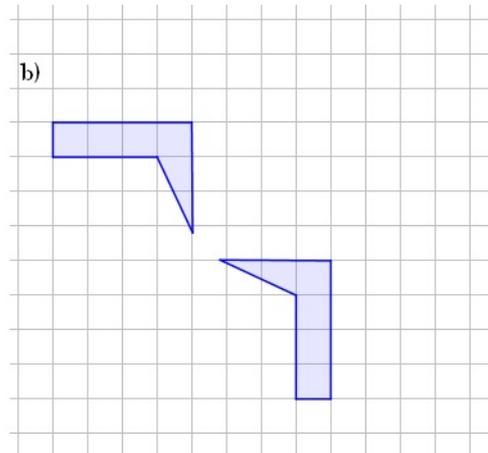
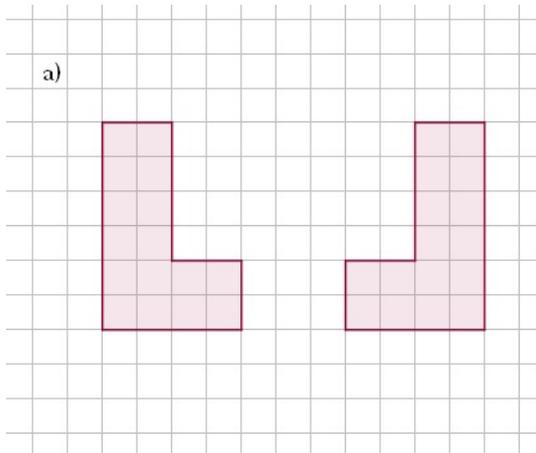
Figura 5.4: Espelho mágico

**Atividade 1:****Roteiro:**

- Usando o espelho mágico, desenhe a imagem da figura refletida.
- Antes de iniciar o desenho, mova a figura que será reproduzida e observe o que acontece com o seu reflexo. Escreva as mudanças que você notou.

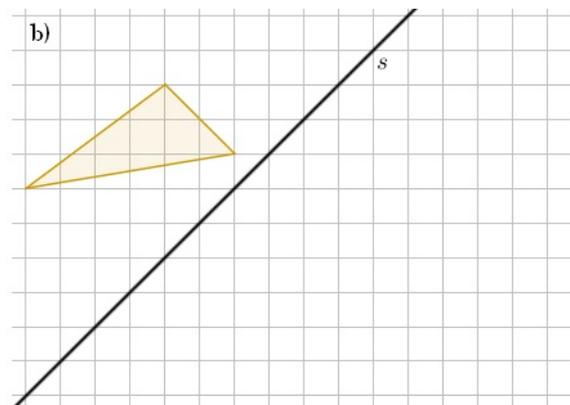
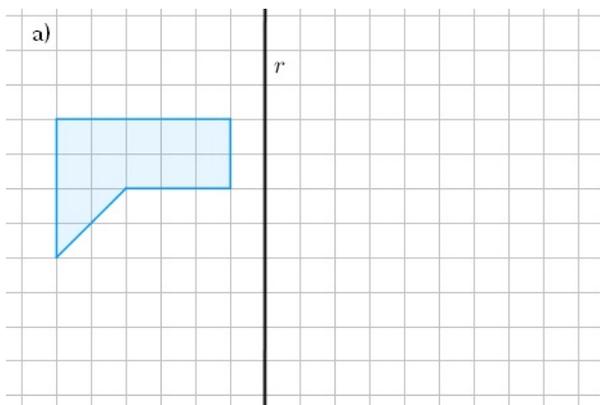
**Atividade 2:**  
**Roteiro:**

- Encontre e desenhe a reta  $s$  de simetria que permite transformar um dos polígonos no outro.



**Atividade 3:**  
**Roteiro:**

- Desenhe a imagem do polígono pela reflexão do eixo  $r$ .



**Atividade 4:**

**Roteiro:**

- Observe a figura 5.5 e complete frase:



Figura 5.5:

"A composição de duas reflexões é uma \_\_\_\_\_."

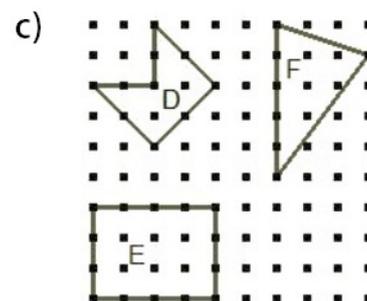
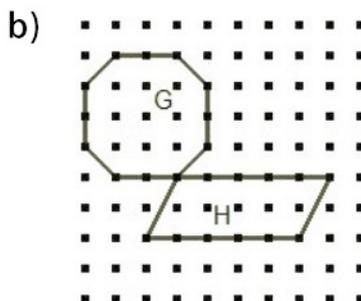
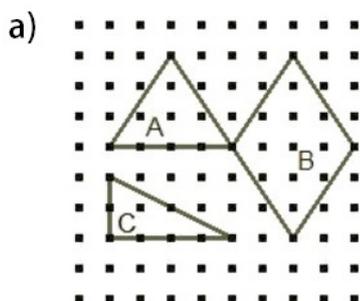
**Atividade 5:**

**Orientções para o professor:**

- Se desejar e achar conveniente, essa atividade pode ser aplicada com o geoplan.

**Roteiro:**

- Identifique os eixos de simetria nas figuras apresentadas abaixo, ou então explique porque a figura não tem eixo de simetria.



**Atividade 6:**  
**Roteiro:**

- Identifique os eixos de simetria de reflexão da figura 5.6.

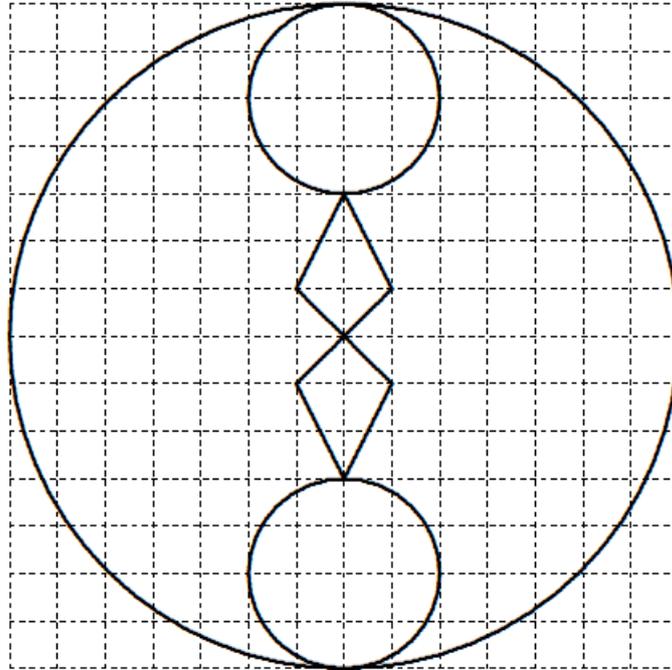


Figura 5.6:

**Atividade 7:**  
**Roteiro:**

- Complete a figura abaixo sabendo que possui uma simetria de reflexão em relação a reta tracejada.

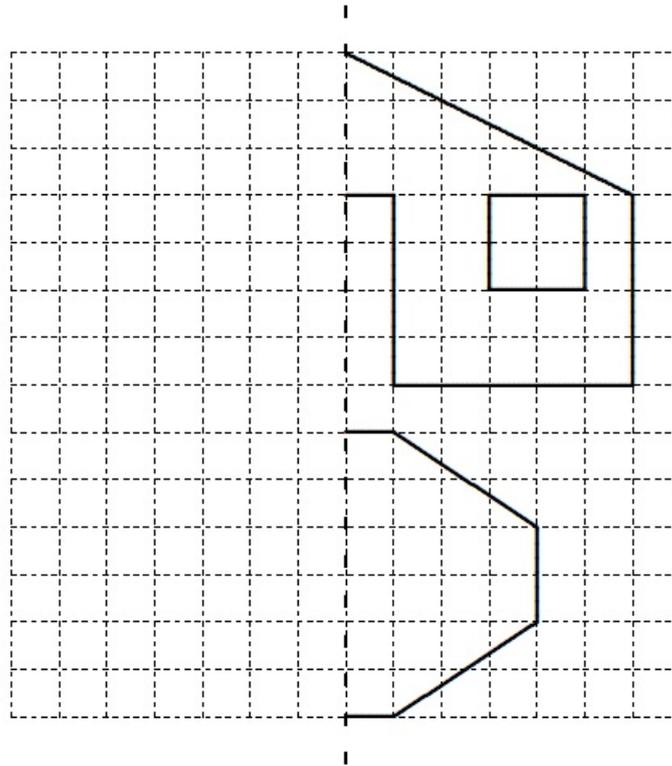
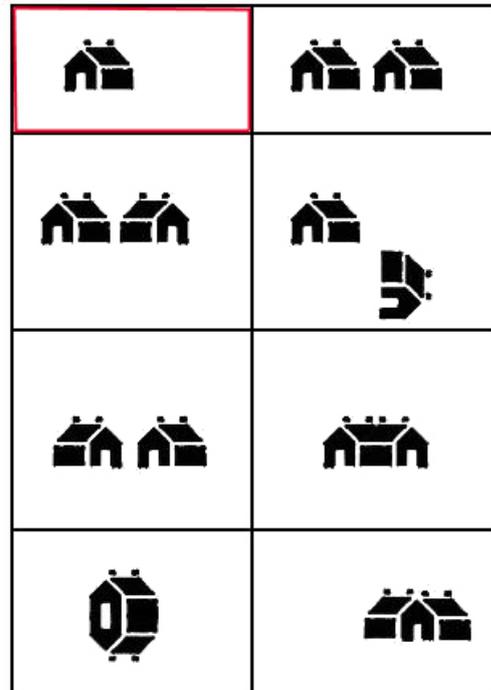
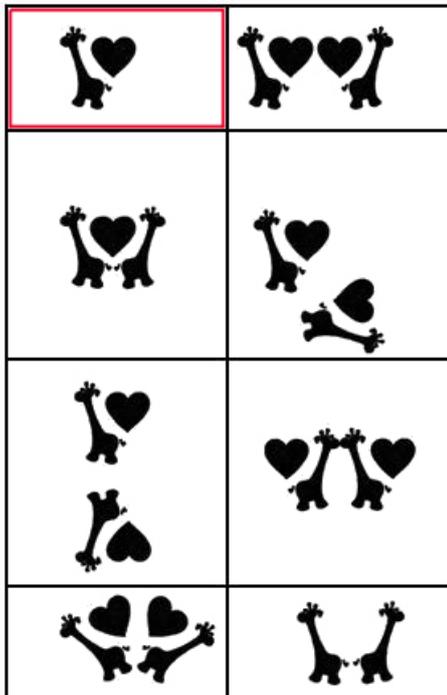


Figura 5.7:

**Atividade 8:**  
**Roteiro:**

- Observe a imagem destacada em cada um dos quadros. Com o uso do espelho, diga quais das imagens dispostas dentro dos retângulos é possível obter?



## 5.4 Simetrias e polígonos

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 4 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

**Materiais utilizados:**

- Cópias das atividades.
- Tesoura. - Papel cartão. - Lápis.

### Objetivos:

- Recordar os conceitos de geometria plana: ponto, reta, semirreta e ângulos;
- Reforçar o conceito de simetria;
- Identificar polígonos regulares e irregulares.
- Analisar polígonos regulares adequados para recobrir superfícies e identificar suas propriedades.
- Incentivar a criatividade através do uso da simetria.

### Atividade 1:

#### Orientações para o professor

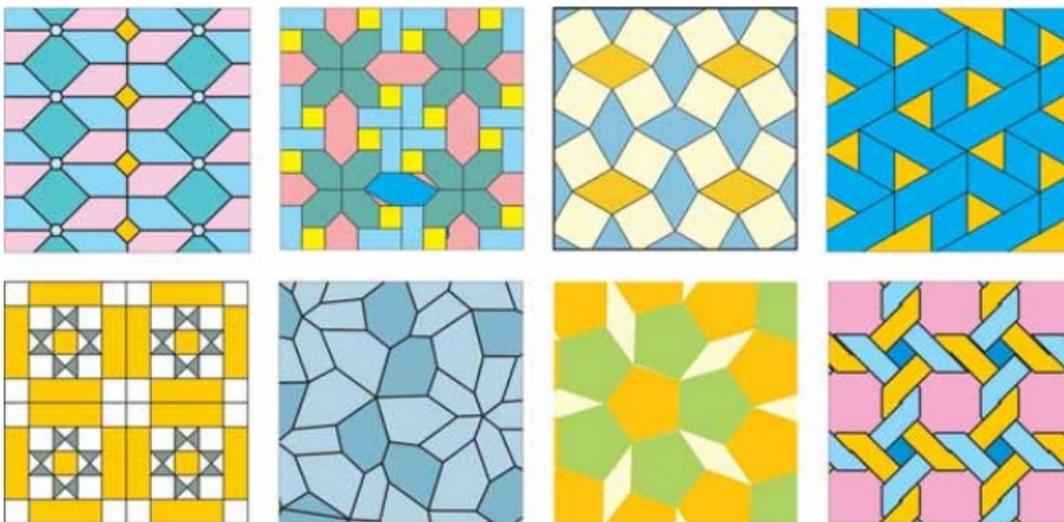
- Expor imagens que retratem a simetria na natureza (sugestões no Apêndice B). As imagens podem ser mostradas através de slides ou cartazes.
- Explorar o conhecimento prévio dos alunos sobre simetria em cada imagem apresentada.
- Explicar de maneira informal os conceitos de figura invariante e de simetria.

**Atividade 2:****Orientações para o professor**

- Relembre os conceitos de polígonos regulares e irregulares.

**Roteiro**

- Marque  $x$  em alguns triângulos não regulares e  $x'$  em alguns regulares.
- Marque  $y$  em alguns quadriláteros não regulares e  $y'$  em alguns regulares.
- Marque  $z$  em alguns pentágonos não regulares e  $z'$  em alguns regulares.
- Marque  $w$  em alguns hexágonos não regulares e  $w'$  em alguns regulares.



### Atividade 3: Roteiro

- Assinale o ponto de encontro dos mosaicos da ilustração 5.8 e depois responda:

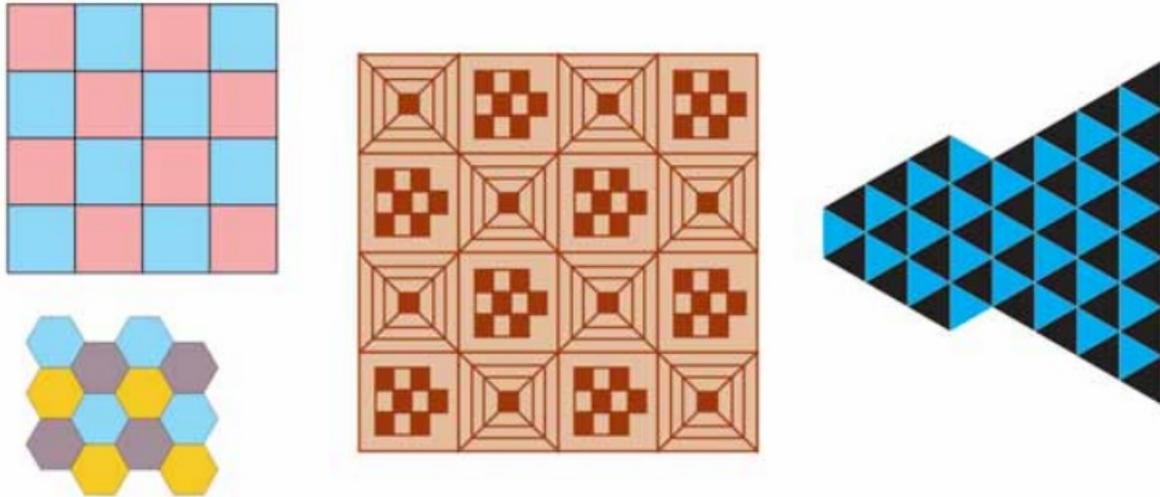


Figura 5.8:

- Quantos quadrados encontram-se em um ponto? Quanto vale o ângulo em cada um deles? Quanto vale a soma dos ângulos cujos vértices encontram-se em um ponto?
- Quantos triângulos encontram-se em um ponto? Quanto vale o ângulo em cada um deles? Quanto vale a soma dos ângulos cujos vértices encontram-se em um ponto?
- Quantos hexágonos encontram-se em um ponto? Quanto vale o ângulo em cada um deles? Quanto vale a soma dos ângulos cujos vértices encontram-se em um ponto? (Uma dica: Decomponha o hexágono regular em seis triângulos regulares, isto é, equiláteros, cujos ângulos internos valem  $60^\circ$ . A partir disso, conclua quanto vale cada ângulo interno do hexágono regular.)
- É possível revestir uma superfície apenas com octógonos regulares (Figura 5.9) idênticos? Apresente seus argumentos.

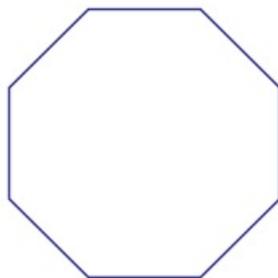


Figura 5.9:

**Atividade 4:  
Orientações para o professor**

- A intenção dessa atividade é que o aluno perceba as relações de simetria que são criadas com a dobradura e as diferentes simetrias que surgem desse experimento.

- Incentive a criatividade, explorando os diversos tipos de simetria e os números de eixos. Note a possibilidade de debater sobre a relação entre a matemática e a forma de alguns elementos da natureza.

**Roteiro**

- Com a tesoura e papel cartão, recortem diferentes figuras simétricas da seguinte maneira (observem os exemplos em cada passo):

Passo 1: Se desejar recorte a folha, depois dobre ela da maneira que almejar. Na figura abaixo a folha não foi recortada, as dobras aconteceram nos pontos médios dos lados e nas diagonais.

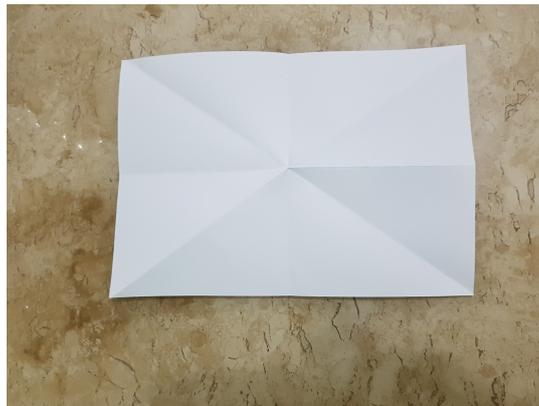


Figura 5.10: Atividade 4.1

Passo 2: Com o uso da tesoura, faça cortes vazados, na parte dobrada do papel.

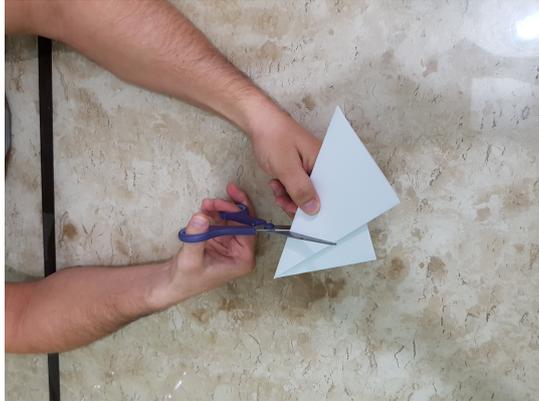


Figura 5.11: Atividade 4.2

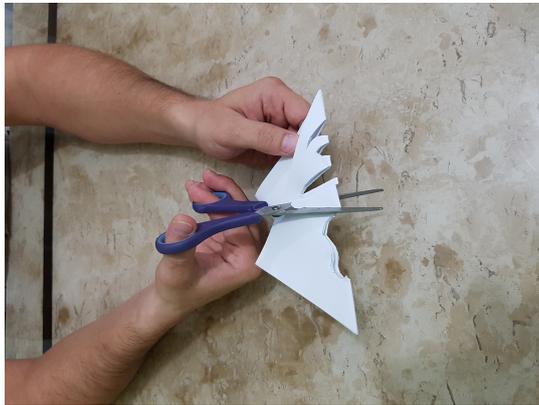


Figura 5.12: Atividade 4.3

Passo 3: Refaça a atividade. Use a criatividade explorando os diversos tipos de simetria e os números de eixos. Note que a possibilidade de construção é infinita.



Figura 5.13: Atividade 4.4

## 5.5 Ladrilhamento ou pavimentação

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 12 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

**Recursos multimídia:**

**Materiais utilizados:**

- Cópias das atividades.
- Cópias do apêndice C.
- Lápis.
- Tesouras.
- Folhas de sulfite.

### Objetivos:

- Identificar polígonos regulares.
- Reconhecer a conservação e justaposição de medidas dos lados e ângulos de figuras poligonais.
- Perceber a relação entre polígonos regulares na construção de ladrilhamentos.

### Nota:

Todas as atividades desse tópico foram retiradas do livro AAA3 do GESTAR II de matemática, de domínio público, alguns exercícios sofreram pequenas modificações. O material do GESTAR II de matemática pode ser encontrado em:

<http://portal.mec.gov.br/par/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/13056-programa-gestao-da-aprendizagem-escolar-gestar-ii-matematica>.

**Orientações para o professor:**

- Na criação de revestimentos existe uma técnica que é chamada de ladrilhamento ou pavimentação, que consiste no preenchimento do plano com polígonos, sem superposições ou buracos. Normalmente, o ladrilhamento está presente nos pisos, assentamento de azulejos, etc. Num mosaico feito pelo ladrilhamento as formas geométricas precisam se encaixar ou fechar. A técnica de ladrilhamento é conhecida desse modo por poder misturar diferentes polígonos para recobrir o plano. Forneça essas informações para que o aluno saiba distinguir um ladrilhamento de um revestimento com um único motivo.

- No apêndice C há um modelo de figuras para as atividades 1 até a 7.

**Atividade 1:  
Roteiro**

Você já viu alguns trabalhos feitos com pedaços de azulejos e pisos chamados de ou revestimentos ou mosaicos ou pavimentação? Veja um exemplo:

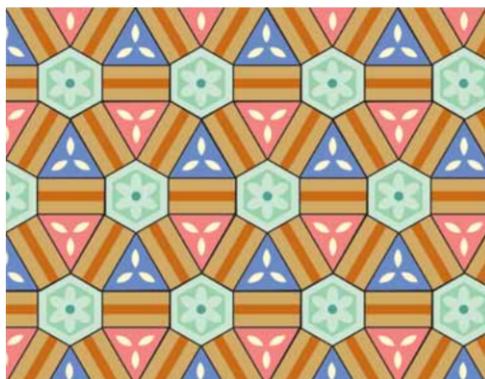


Figura 5.14: Um padrão Persa

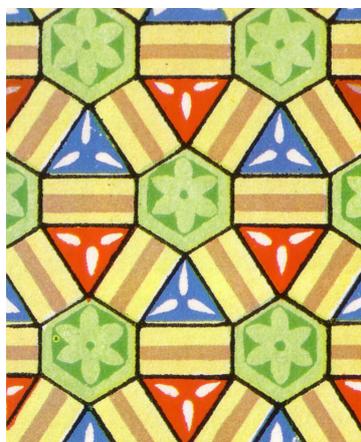


Figura 5.15: Padrão Persa

Passo 1: Tire a folha e recorte o interior das figuras geométricas.

Passo 2: Pegue uma cartolina ou folhas de papel colorido e marque com a figura desejada.

Passo 3: Recorte as figuras e construa um ladrilhamento. Veja o exemplo [5.16](#).

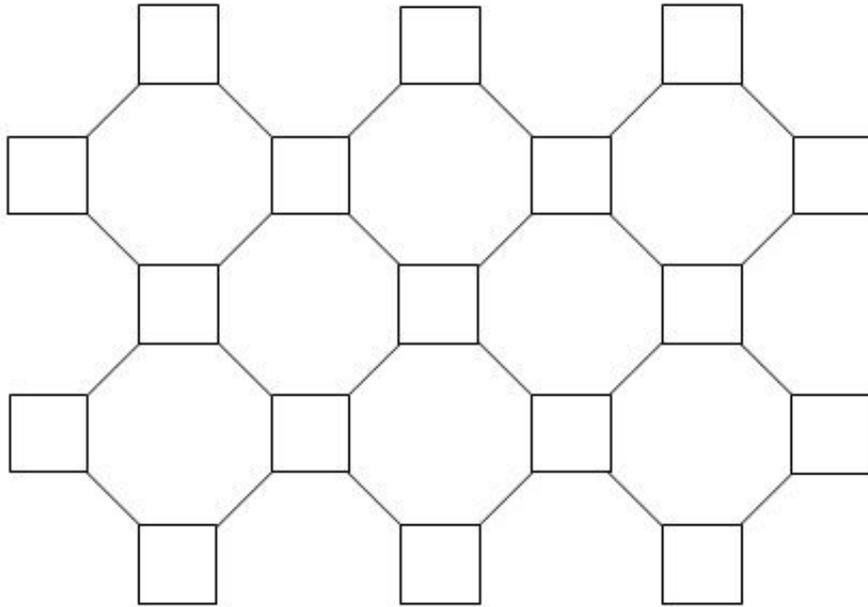


Figura 5.16: Ladrilho com quadrados e octógonos

**Atividade 2:  
Roteiro**

- Complete os ladrilhamentos a seguir, usando as figuras que você confeccionou com o molde da atividade 1:

a)



b)

**Atividade 3:  
Roteiro**

- Observe as construções da atividade 2: os ângulos dos polígonos juntos em um mesmo ponto somam quantos graus?

**Atividade 4:  
Roteiro**

Conforme a conversa entre os dois personagens, responda: por que os pisos não têm formato pentagonal?



**Atividade 5:**  
**Roteiro**

- Do que você estudou até aqui, existe alguma explicação geométrica para que os pisos e azulejos tenham o formato de retângulos ou quadrados? Qual?

**Atividade 6:**  
**Roteiro**

- Analise os polígonos regulares do molde da atividade 1: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono e verifique quais deles podem ser usados em um ladrilhamento que adote apenas um desses polígonos:

## 5.6 Revestindo o plano

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 12 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Recursos multimídia:

- TV ou projetor.
- Caixas de som.
- Computador com acesso a internet.
- Iphone, ipad ou ipod touch.

### Materiais utilizados:

- Cópias das atividades.
- Lápis.
- Tesouras.
- Papel cartão.
- Papel colorido.
- Cartolina.

### Objetivos:

- Analisar polígonos regulares adequados para recobrir superfícies.
- Construir um motivo.
- Fazer uso de tecnologias para o revestimento do plano.
- Explorar na geometria a arte. (Interdisciplinaridade )
- Criar um motivo, que não seja uma figura geométrica padrão, a partir do transformado de um triângulo equilátero, quadrado ou hexágono regular.

**Atividade 1:**  
**Orientações para o professor**

- Articulando Artes e Matemática é possível explorar na geometria dos revestimentos as contribuições do artista plástico M. C. Escher, são ricos os conceitos matemáticos no ensino de simetria que compõem suas obras. Seria interessante explorar um pouco das suas criações, mostrar a simetria que ele fez em seus motivos e o que ele teve de estudar para fazer essas construções. Para melhor explorar esses detalhes, aqui está o endereço eletrônico do documentário em vídeo da vida de Escher:

<https://www.youtube.com/watch?v=pVwrUUwzBRo>

- Também é farto e de fácil acesso o conteúdo digital de seus trabalhos. Nas obras de Escher é constante o revestimento e a pavimentação regular de uma superfície, usando padrões que se justapõem sem deixar espaço vazio. As próximas atividades propiciam um ensino de matemática contextualizado e significativo, também desperta no aluno a sensibilidade e a curiosidade pelo mundo das Artes.

**Atividade 2:**

- Observe o transformado de um triângulo, quadrado e hexágono que M. C. Escher criou, essas são algumas das diversas células básicas que ele produziu.

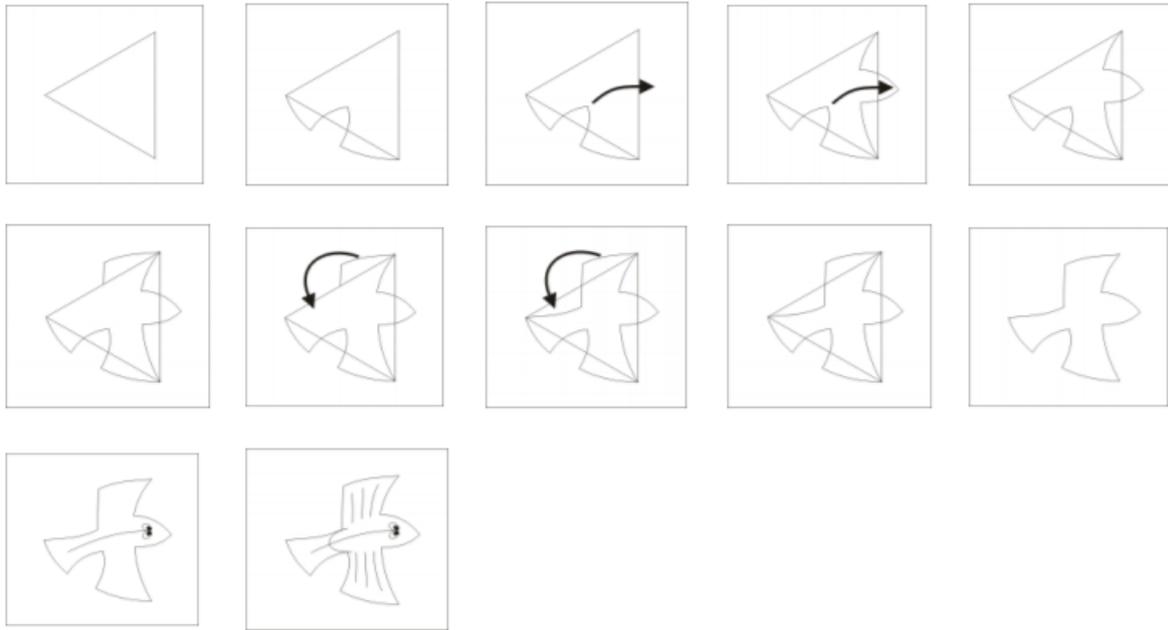


Figura 5.17: Transformado de um triângulo num pássaro de mesma área

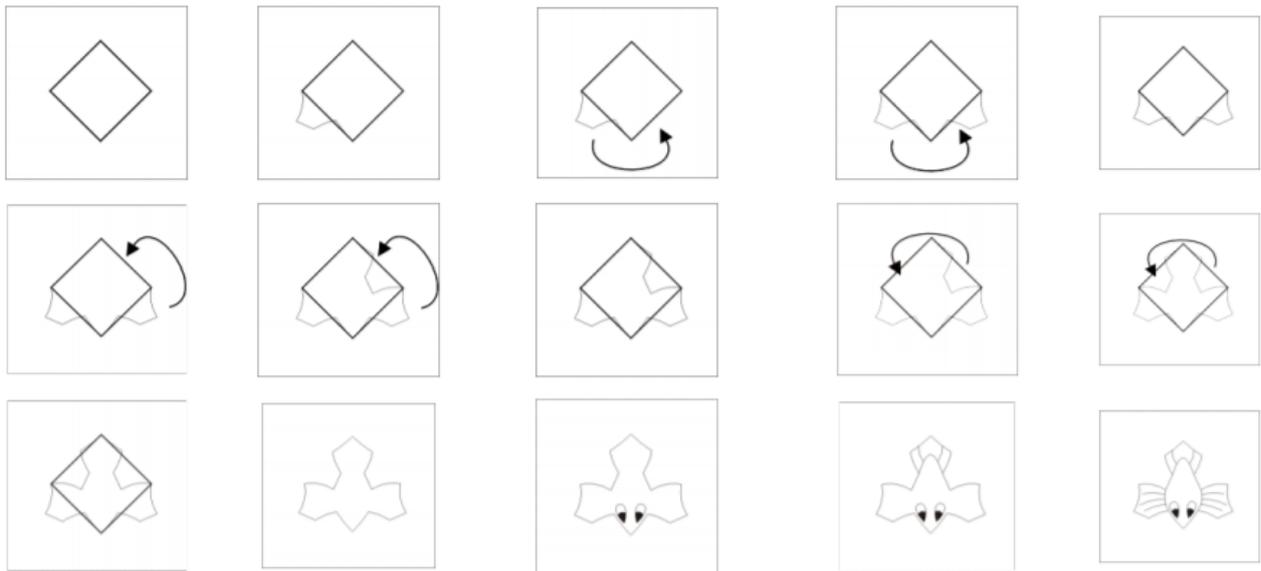


Figura 5.18: Transformado de um quadrado num peixe de mesma área

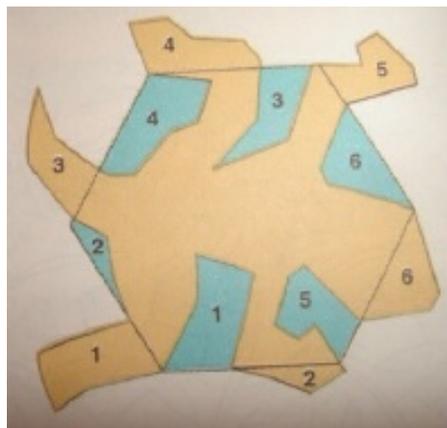


Figura 5.19: Transformado de um hexágono numa lagartixa de mesma área

- Escolham uma das formas de polígonos (triângulo equilátero, quadrado ou hexágono regular) e a partir disso e com o uso do papel cartão, crie o seu modelo (célula básica). A parte que é repetida dentro da célula básica é chamada de motivo.

- Agora preencha a cartolina com a célula básica que construiu.

### 5.6.1 Comentário sobre a aplicação e resultados obtidos das atividades 1 e 2

Em 2.016 lecionei na escola municipal de Campinas CEMEFEJA Pierre Bonhomme, com alunos da educação de jovens e adultos, nos 4º termos A e B, a faixa etária desses alunos variava entre 15 a 83 anos. O estudo da matemática realizado com esses discentes acontecia de forma prática, então pude trabalhar essa atividade 2 com eles.

Alguns dos alunos apresentavam defasagem matemática severa e também possuíam dificuldades para o aprendizado teórico, porém, tinham grande facilidade no trabalho prático e manual. Para que acontecesse de forma produtiva essa atividade, falei de forma breve para o alunos sobre a ideia matemática de rotação, translação, reflexão e polígonos regulares, mostrei o documentário da vida do artista Escher - encontrado na Atividade 1 dessa seção - e alguns dos seus trabalhos, com foco nos de simetria plana. Tendo salientado essas informações, introduzi de forma prática a construção de um motivo para revestir o plano, construindo um exemplo concreto com eles para facilitar o entendimento. Daí em diante, fui auxiliando os alunos para que cada um produzisse sua própria célula básica e motivo, decorando e fazendo os desenhos de modo que achasse mais pertinente. Todos os moldes formaram desenhos abstratos, que foram sendo repetidos em uma cartolina afim de destacar a ideia de revestir o plano.

O conteúdo teve retorno positivo por partes dos alunos, a maioria das senhoras que estudavam na escola possuíam algum tipo de habilidade artesanal, o que facilitou muito durante a atividade. Alguns dos estudantes se identificaram e gostaram tanto da atividade que começaram a criar por conta próprio e em suas residências outros revestimentos. Uma parte da produção dos alunos foi para a exposição do PESCO <sup>1</sup> de 2.016. Veja exemplos das produções dos alunos nas Figuras 5.20 e 5.21.

---

<sup>1</sup>Programa Pesquisa e Conhecimento na Escola. Criado para apoiar o trabalho dos professores da rede municipal de Campinas.



Figura 5.20: Exemplo 1 de revestimentos



Figura 5.21: Exemplo 2 de revestimentos

### Atividade 3: Orientações para o professor

Essa atividade teve como referência [17]. Existem diversas atividades semelhantes a essa, pode modificar conforme achar pertinente. Se preferir, essa atividade pode ser aplicada no lugar da atividade 1 desse tópico, ou antes dela.

Passo 1: Construção de um motivo.

Desenho a - Construir um triângulo equilátero;

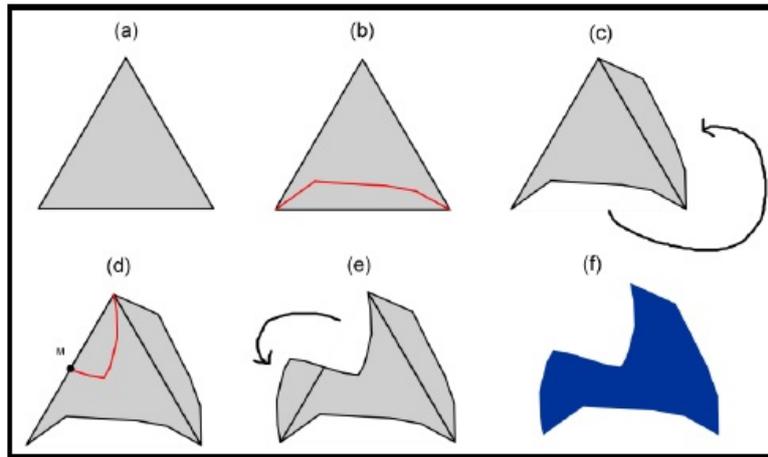
Desenho b - Construir um polígono em um dos lados do triângulo (em vermelho);

Desenho c - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

Desenho d - Marcar o ponto médio,  $M$ , do lado do triângulo e construir um polígono utilizando apenas metade do lado (em vermelho);

Desenho e - Recortar este polígono e colar na outra metade do lado, conforme indicado na seta;

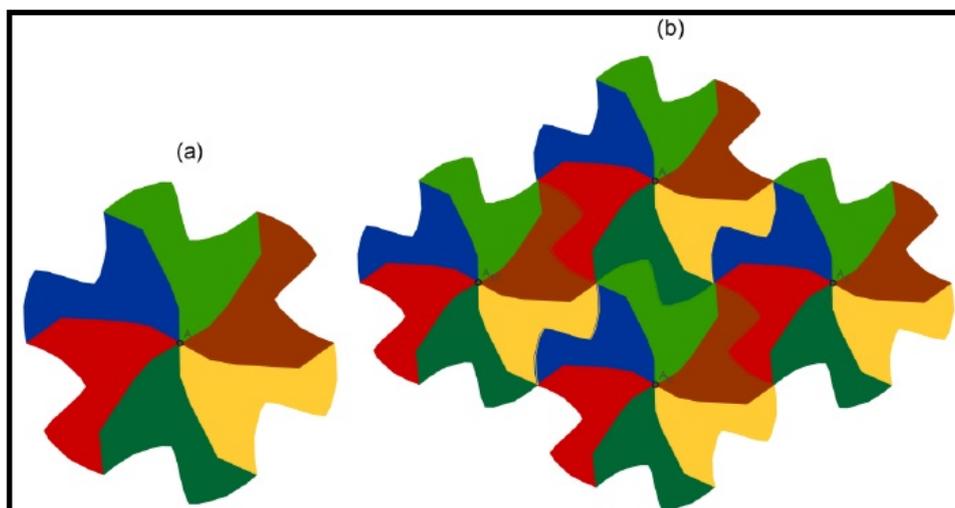
Desenho f - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Esse será o motivo que será usado no revestimento.



Passo 2: Processo para construção e translação da estrutura da rede.

Desenho a - Escolher um dos vértices do triângulo que será usado como centro de rotação. Fazer uma rotação de  $60^\circ$  da base inicial em relação ao vértice indicado. Colorir esse polígono (em vermelho), repetir esta operação (em verde escuro, amarelo, marrom e verde claro) encaixar os polígonos formados. Estas seis rotações das áreas recortadas geram a estrutura da rede, que se repetida reveste o plano.

Desenho b - Transladando esta estrutura da rede e encaixando um nos outros, seguindo com os encaixes dos hexágonos, esta feito o revestimento.



#### Atividade 4: Orientações para o professor

- Como propostas informatizada, trago um software chamado "simetrizador" que reveste o plano com figuras pré-estabelecidas. Nesse programa é possível usar as simetrias de rotação, translação e reflexão de um único motivo, além de poder pintá-los. O programa é online, não precisa de instalação, seu manuseio é simples e torna o aprendizado lúdico. Alguns dos motivos usados são da criação do artista Escher. O programa está disponível em:

[http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos\\_iniciais/](http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/)

## Roteiro

- Com o uso do software online “simetrizador”, o desafio é recobrir o plano com as figuras disponíveis no programa, através das translações, rotações e reflexões das imagens.

Veja alguns exemplos dos revisamentos feitos com o "simetrizador":

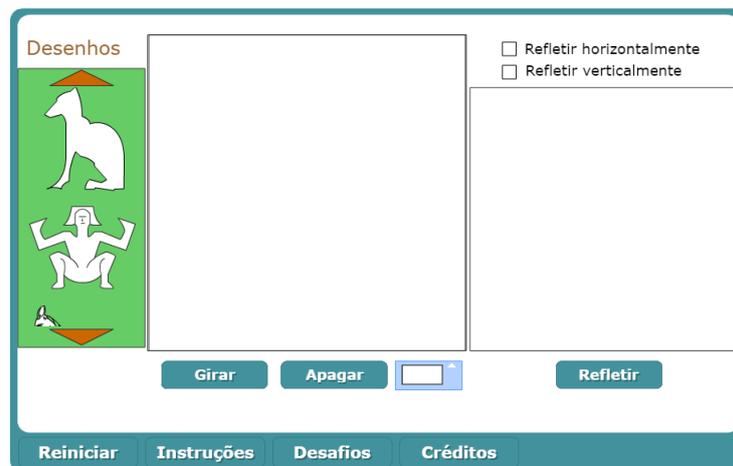


Figura 5.22: Imagem 1 simetrizador

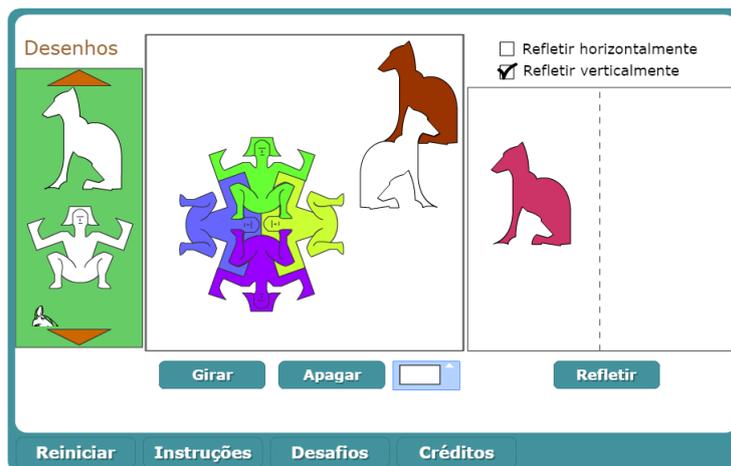


Figura 5.23: Imagem 2 simetrizador

### Atividade 5: Orientações para o professor

- Essa última atividade é opcional e também serve para o professor tomar ciência da existência desse recurso. Tal atividade faz uso do aplicativo gratuito KaleidoPaint, encontrado na appstore, que para ser utilizado é necessário ter um desses três aparelhos: ipad, iphone ou ipod touch. Mesmo que a sala como um todo não possa usar o recurso, é interessante falar a respeito do aplicativo, pois alguns alunos podem conter algum desses três aparelhos citados acima.

- Como ele funciona: de forma básica, para desenhar no KaleidoPaint você precisa primeiro escolher um dos 17 grupos de simetria, depois basta ajustar o pincel e selecionar as cores desejadas, após essa etapa basta passar o dedo na tela para desenhar até criar um design desejado, e infinitamente repetitivo.

Francine Champagne, que faz imagens fantásticas com o KaleidoPaint, dá dicas de como utilizar melhor o aplicativo e todas suas ferramanetas disponíveis em:

<https://tessellations.ca/2016/12/28/tileable-rectangles-from-kaleidopaint>

Algumas características e recursos do aplicativo:

- Possui os 17 grupos de revestimento no plano;
- Rola, gira, tem zoom;
- Suavização das curvas;
- Preenchimento de área;
- Reformar e recolorir qualquer ponto, curva ou área;
- Desfazer / Redução ilimitada;
- Exportar suas pinturas favoritas para um aplicativo de Fotos, ou enviá-las diretamente para um amigo.

- Como atividade, seria interessante explorar seu uso de forma prática, fazendo rabiscos, para os alunos notarem os padrões de simetria.

- As Figuras 4.28, 4.32, 4.36, 4.37, 4.38 dessa dissertação foram feitas por mim, com o uso do aplicativo KaleidoPaint.

- Segue alguns exemplos de outras imagens criadas com o KaleidoPaint:

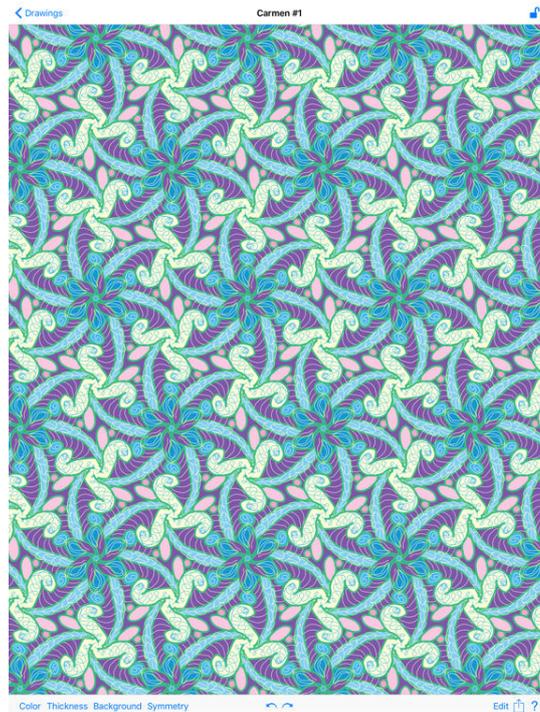


Figura 5.24: Imagem KaleidoPaint 1

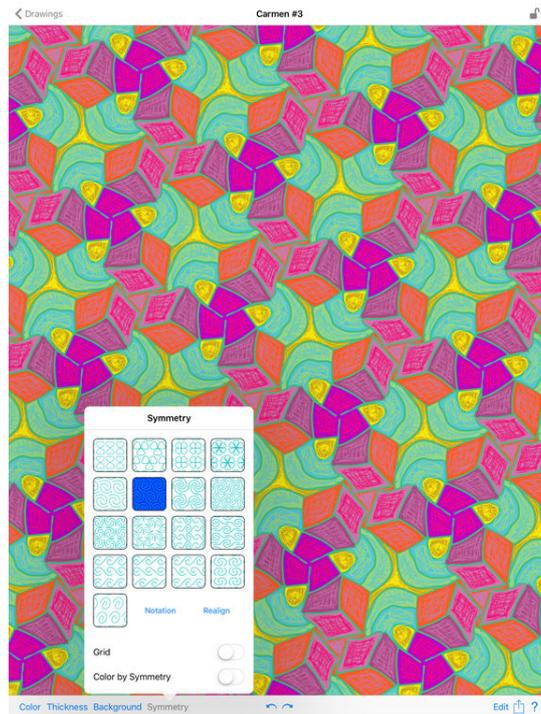


Figura 5.25: Imagem KaleidoPaint 2

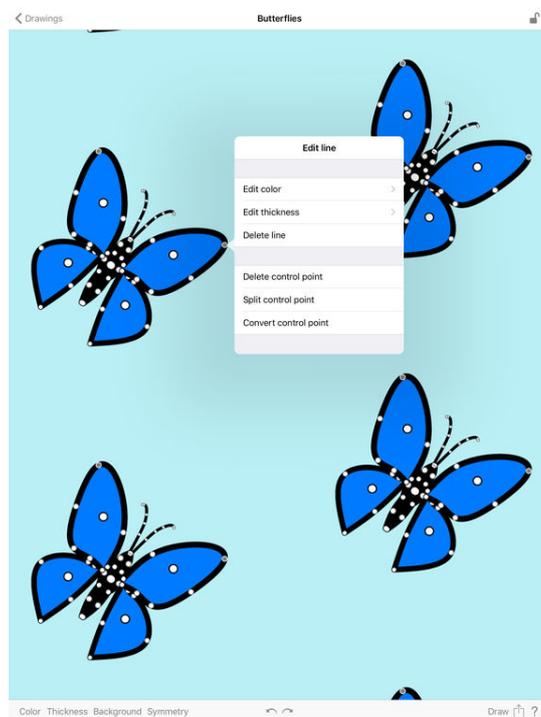


Figura 5.26: Imagem KaleidoPaint 3

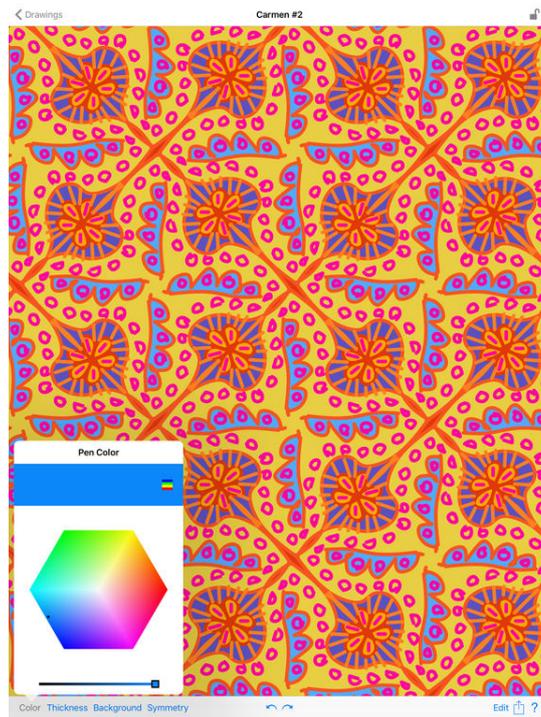


Figura 5.27: Imagem KaleidoPaint 4

# Referências Bibliográficas

- [1] COXETER, H.M.S. **Introduction to Geometry**. New York Wiley , 1961. 443 p.
- [2] GEOGEBRA: *software* livre. Matemática dinâmica. Disponível em: <<https://www.geogebra.org>>. Acesso em: 31 de março de 2015.
- [3] HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo, SP: Editora da Universidade de São Paulo: Poligono, 1970. 414 p.
- [4] LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. São Paulo, SP: Atual Ed.: Editora da USP, 1982. 191p.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. 94 p. (Coleção do professor de matemática)
- [6] MARTIN, George Edward. **Transformation geometry: an introduction to symmetry**. New York, NY: Springer, c1982. xii, 237p.
- [7] MUNKRES, James R. **Topology: a first course**. New Jersey: Prentice-Hall, c1975. 413p., il. ISBN 0139254951 (enc.).
- [8] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROF-MAT)
- [9] REZENDE, Eliane Q. F.; Rodrigues, Claudina Izepe. **Minicurso: Transformações de figuras**. Campinas, 2006.
- [10] RODRIGUES, Claudina Izepe. **Notas de Aula da disciplina MA770 - Geometria**. Campinas: IMECC, Unicamp, 2014.
- [11] ROSE, Bruce I.; STAFFORD, Robert D. **An Elementary Course in Mathematical Symmetry**; Mathematical Association of America, Vol. 88, No. 1 (Jan., 1981), pp. 59-64.
- [12] SCHATTSCHEIDER, Doris. **The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation**; Mathematical Association of America, 85(6), 1978, pp. 439-450.
- [13] SINGER, I. M.; THORPE, John A. (Coaut. de). **Lecture notes on elementary topology and geometry**. Glenview, Ill.: Scott, Foresman and Company, c1967. 214 p., il.
- [14] VELOSO, Eduardo. **Geometria: temas actuais**; materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998. 399 p., il. (Desenvolvimento curricular no ensino secundario, 11).

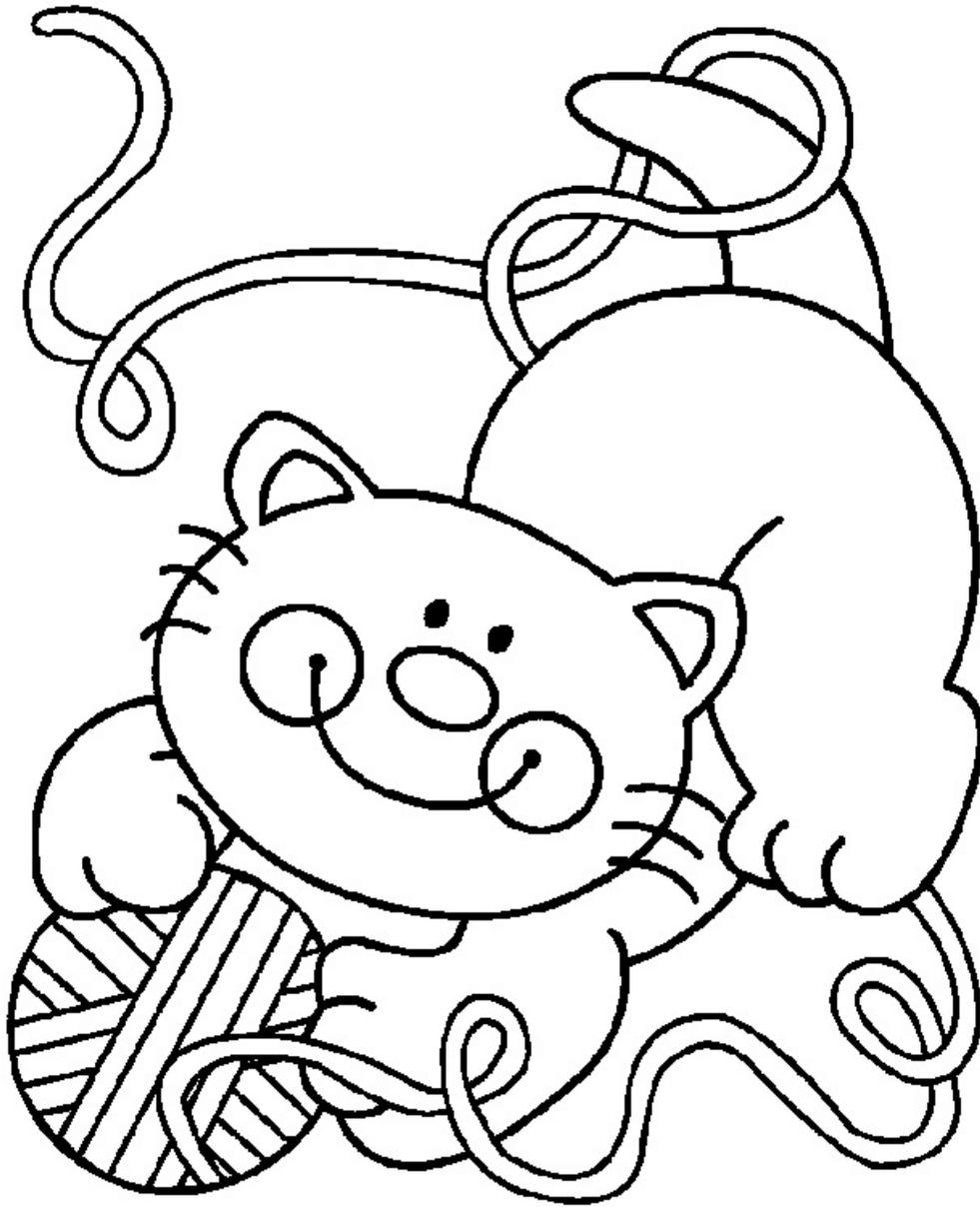
- 
- [15] WEYL, Hermann. **Symmetry**. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982, c1952. 168 p.
- [16] FRANCO, M. C. L. G. **Simetria**. Tese de Mestrado. Unicamp. Campinas, SP, 2015. 123 p.
- [17] ALVES, C. M. F. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher**. Tese de Mestrado. IMPA. Rio de Janeiro, RJ, 2014.
- [18] BRASIL. PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR (GESTAR II) - Matemática.

## Apêndice A

### Desenhos para uso do espelho mágico





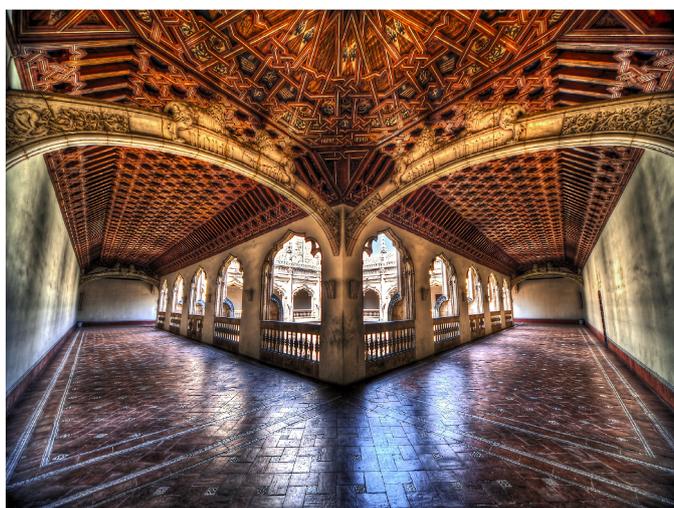


## Apêndice B

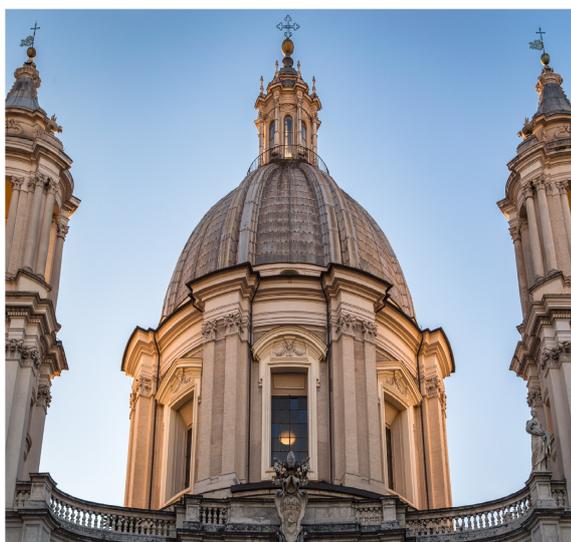
### Simetria na natureza



<https://flic.kr/p/6mfxvj>



<https://flic.kr/p/bUDhne>



<https://flic.kr/p/Se5EVf>



<https://flic.kr/p/a3NeWH>



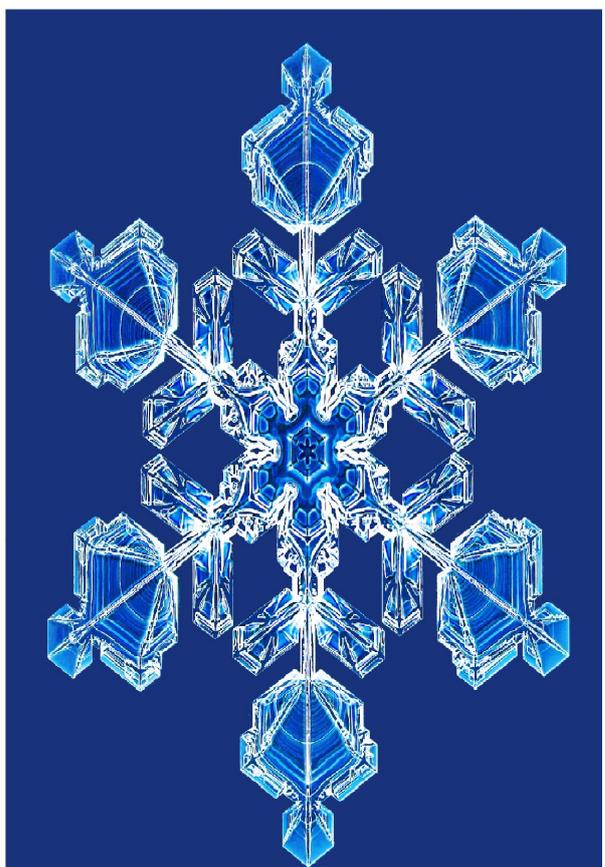
<https://flic.kr/p/qqfdkt>



<https://flic.kr/p/dnXkQy>



<https://flic.kr/p/6NbZ1Z>



<https://flic.kr/p/qqfdkt>

## Apêndice C

### Molde para confeccionar polígonos regulares

