UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Cálculo no Ensino Médio:

uma proposta fundamentada

Daniel Perdigão-Nass

Brasília

2017

DANIEL PERDIGÃO-NASS

Cálculo no Ensino Médio:

uma proposta fundamentada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, obrigatória para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Brasília

2017

Autorizo a reprodução e a divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, somente para fins de estudo e pesquisa e sem fins lucrativos, desde que citados autor e fonte.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob a exclusiva responsabilidade do autor.

Brasília, 7 de julho de 2017.

Daniel Perdigão-Nass

Ficha catalográfica gerada pelo Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Central da Universidade de Brasília

P433c

Perdigão-Nass, Daniel
Cálculo no Ensino Médio: uma proposta fundamentada / Daniel Perdigão-Nass; orientador Raimundo de Araújo Bastos Júnior. -- Brasília, 2017.
92 p.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2017.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Interdisciplinaridade. 3. Educação Matemática. I. Bastos Júnior, Raimundo de Araújo, orient. II. Título.

Aos polímatas

AGRADECIMENTOS

Uma vez que a minha trajetória neste curso se iniciou em 2012, na Universidade Federal do Tocantins (UFT), dedico meu muito obrigado a todos os professores e colegas da minha turma, pela integração acadêmica, pelas caronas de Gurupi a Palmas, enfim, por me dar o suporte necessário para eu cursar o primeiro ano completo do ProfMat.

Não consegui dar seguimento ao curso na UFT em 2013, mas agradeço especialmente aos professores Pedro Alexandre da Cruz e Francisco Satuf Rezende, meus então colegas docentes na UFT, campus de Gurupi, responsáveis pelas duas disciplinas do terceiro semestre do curso, por terem me dado apoio especial nessa tentativa.

Na Universidade de Brasília, sou especialmente grato ao prof. Rui Seimetz, coordenador local do ProfMat durante quase todo o curso. Desde o primeiro momento, o prof. Rui solucionou os entraves burocráticos referentes à minha transferência de polo, além de ter dado grande atenção, não somente a mim, mas a todos os colegas, ao longo de todo o curso. Uma pessoa de visão esclarecida, que busca fazer desta universidade um lugar um pouco menos hostil.

Minha gratidão também se estende de forma particular ao prof. Raimundo de Araújo Bastos Júnior, meu orientador. Não somente por ter depositado confiança em mim e dado guarida a este trabalho, apesar de eu lhe apresentá-lo de forma errática, mas especialmente por ter sido compreensivo nos momentos mais críticos da minha trajetória como docente, ocorridos justamente nos meses de redação do presente texto. O prof. Raimundo é um colega de extrema competência e generosidade, com o qual tive e tenho a satisfação de trabalhar.

Por fim, agradeço ao prof. Claud Wagner Gonçalves Dias Júnior, terceiro membro da banca de defesa, bem como aos demais colegas e professores do curso, pela oportunidade de aprender com cada um deles. Também sou grato a todos os amigos que me dão suporte para conquistas como esta, pessoas que me incentivam a liderar a caravana na rota do conhecimento sem fazer caso dos ruidosos cães.

Dedico um reconhecimento especial, que não se restringe a este trabalho, a meus avós, à Michelle e, agora, ao Xavier. São as pessoas com quem mais aprendo nesta vida.

“O objetivo de todo ensino [...]
é transmitir ideias, estimular o
pensamento independente
e a criatividade.”
Geraldo Ávila

RESUMO

PERDIGÃO-NASS, Daniel. **Cálculo no Ensino Médio**: uma proposta fundamentada. 2017. 92 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

O Ensino Médio brasileiro observa baixo rendimento dos alunos em Matemática, com reduzida contextualização e integração dos saberes. Nosso objetivo é apresentar proposta didática que inter-relaciona conteúdos do Ensino Médio, tendo como eixo de convergência elementos advindos do Cálculo. Em linha com os parâmetros curriculares nacionais em vigor, buscamos contemplar nesta proposta um sentido prático para o aluno. Uma vez que o Cálculo Diferencial e Integral não é conteúdo de Ensino Médio no Brasil, limitamo-nos a fazer uma abordagem alternativa do Cálculo, mais simples e informal.

Palavras-chave: educação matemática, Ensino Médio, cálculo diferencial e integral

ABSTRACT

PERDIGÃO-NASS, Daniel. **Calculus in secondary education**: a reasoned proposal. 2017. 92 p. Dissertation (Master in Mathematics in National Network). Graduate Program in Mathematics, University of Brasília, Brasília, 2017.

Brazilian High School (upper secondary education) observes low performance of the students in Mathematics, with reduced contextualization and integration of the knowledge. Our objective is to present didactic proposal that interrelates contents of High School, having as the axis of convergence elements coming from Calculus. In line with the national curricular standards in force, we seek to contemplate in this proposal a practical meaning for the student. Since Differential and Integral Calculus is not content of the secondary education in Brazil, we limit ourselves to making an alternative approach to Calculus, simpler and more informal.

Keywords: Mathematics education, secondary education, differential and integral calculus

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CIEM	Comissão Internacional para o Ensino de Matemática
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos PCNEM
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação e delimitação do tema

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das áreas de estudo de maior relevância no campo da Matemática, especialmente por suas diversas aplicações em outros campos do conhecimento, como as Ciências, as Engenharias e a Estatística. Dada a importância tão ampla do Cálculo, seu ensino vem sendo objeto de pesquisas em todo o mundo. Muitas dessas investigações apresentam como justificativa de sua realização o fato de serem observadas às altas taxas de reprovação e baixas médias de aproveitamento e rendimento acadêmico nas disciplinas acadêmicas de cursos de nível superior que têm o Cálculo entre os seus conteúdos, levando a altas taxas de evasão nesses cursos. Esta conclusão é corroborada por diversos estudos, de todo o mundo, citados por Pyzdrowski e colaboradores (2013). O problema assume contornos ainda mais graves quando nos damos conta da necessidade de recrutamento e de retenção de estudantes em cursos e profissões que exigem domínio das ferramentas matemáticas. Trata-se de uma urgência não apenas brasileira – há, no país, uma carência de profissionais de Engenharia, de Ciências, de Computação (BRITO, 2013) –, mas mundial (NAE, 2005).

Para Pyzdrowski e colaboradores (2013), em conclusão compartilhada com inúmeros estudiosos da área e frequentemente encontrada na literatura, sem um bom domínio das ferramentas típicas dos cursos secundários de Matemática, não é possível avançar no estudo universitário. Segundo aqueles autores, é essa deficiência na formação básica que implica em altas taxas de evasão e aumento da duração média dos cursos na educação superior. Destaca-se o fato de que aqueles autores não estão defendendo a introdução do Cálculo na educação secundária, mas sim que as ferramentas que lhe servem de alicerce sejam mais bem trabalhadas, para que efetivamente sirvam como preparação para estudos posteriores.

Nisto, Pyzdrowski e colaboradores (2013) divergem de vários outros autores (OLIVEIRA, 2010; BRITO, 2013; PEREIRA, 2009; SANTOS, 2012; MOTA, 2014): estes últimos, muitos deles em dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, defendem, de formas diversas, a abordagem do Cálculo na educação secundária. Na presente dissertação, nós também faremos uma defesa da introdução de elementos do Cálculo no Ensino Médio, mas de forma que contrasta com os autores citados, como se verá mais adiante e de forma mais clara. Nossa proposta encontra algum eco nas concepções de Ávila (1991, 1994, 2006a, 2006b), para quem o Cálculo é uma espécie de tema integrador, ao permitir o diálogo entre conteúdos que já pertencem ao nível secundário, como Álgebra e Geometria Analítica, e possibilitando a interdisciplinaridade – o exemplo daquele autor é a Cinemática. Spina (2002) também cita autores que têm ideias semelhantes às de Ávila quanto ao papel unificador do Cálculo em relação a várias áreas da Matemática. Por outro lado, nossa proposta também contrasta com muitas das existentes na literatura ao avançar ao Cálculo Integral, algo que nenhum livro do Ensino Médio atual, dentre aqueles que abordam Cálculo Diferencial e noções de limites, faz (SANTOS, 2012).

Acrescenta-se que, por vislumbrar ainda menos formalismos que a abordagem de Ávila, a nossa proposta acaba não seguindo a tradicional sequência de Cauchy-Weierstrass, de "limite-continuidade-derivada-integral", que, para Rezende (2003), pode ser uma sequência apropriada para cursos de Análise, mas não necessariamente para cursos de princípios e aplicações do Cálculo. Não chega a ser tão ousada quanto a de Machado (2008), de iniciar pela integral, mas, como na proposta deste especialista, em nossa sugestão, limites e continuidade são preteridos em um primeiro momento. Por fim, em concordância com Ávila (1991) e Duclos (1992), entre tantos outros, trata de proporcionalidades e funções afins na solução de problemas como subsídio a um estudo mais amplo sobre funções, ou seja, partindo do particular e do concreto para o geral e para o abstrato.

Uma vez que o Cálculo, para a maioria dos estudantes, servirá de ferramenta, e não de objeto de estudo em si ou de estudo propedêutico, a interdisciplinaridade como forma de abordar o Cálculo, tal como para Ávila (1991, 1994, 2006a, 2006b), não nos parece mera opção de caminho, mas rota obrigatória. E, se, como já indicamos, tantos estudos internacionais apontam que o problema se encontra na abordagem da Matemática na educação secundária, a responsabilidade recai sobre professores, gestores, livros, currículos, formadores de professores, universidades, enfim, sobre toda a noosfera (CHEVALLARD, 2013). Em outras palavras, pensar soluções é dever de todos.

Reforçamos, portanto, que a responsabilidade, a nosso ver, não é exclusiva de cursos, currículos e professores de Matemática. Afinal, se a interdisciplinaridade é caminho obrigatório, outras disciplinas do Ensino Médio também deveriam integrar de forma adequada a Matemática e não o fazem. Por exemplo: livros de Química e de Física do Ensino

Médio brasileiro possuem uma maioria de gráficos exposicionais, e não explicativos. Em outras palavras, é frequente que os gráficos não atendam aos fins ou objetivos que deles se esperam: o de explicar, de forma integrada ao texto, a dinâmica de um fenômeno natural de uma forma que seria difícil ou impossível fazer simplesmente por palavras, números ou fórmulas (NASS, 2008; PERDIGÃO-NASS; IPOLITO, 2009).

Por outro lado, 72% dos gráficos constantes dos capítulos de Cinemática em livros selecionados de Física do Ensino Médio cruzam informações da dependência da posição com o tempo e da velocidade com o tempo (PERDIGÃO-NASS; IPOLITO, 2009). Em Cinética Química, também há tal correlação, ainda que em menor grau (NASS, 2008). Identifica-se, aí, um grande indício de que o estudo de ambos os conteúdos, entre tantos outros, possa ser integrado a estudos de Matemática de Ensino Médio, como uma forma de familiarizar o estudante com conhecimentos necessários para um entendimento adequado do Cálculo Diferencial e Integral.

Outro indício de que estes estudos podem ser integrados é a tentativa, tanto dos autores dos livros de Física quanto de alguns dos autores de livros de Química, de utilizar as implicações geométricas, em gráficos cartesianos, do Cálculo Diferencial e Integral, como nas inclinações de tangentes e nas áreas sob curvas. A tentativa parece ser a de mostrar ao aluno a relação que se estabelece entre os dois gráficos mais frequentes nos capítulos de Cinemática e de Cinética Química dessas obras (posição física ou concentração química em função do tempo, e velocidade física ou química em função do tempo) (NASS, 2008; PERDIGÃO-NASS; IPOLITO, 2009).

Como professor de um centro de estudos especializado em Matemática, Física e Química para o Ensino Médio na década de 2000, tive a oportunidade de trabalhar de maneira próxima, individualizada, com um expressivo número de alunos, tanto nos conteúdos de Cinemática quanto nos de Cinética Química. Neste contato, foi possível ter uma significativa percepção de que os professores do Ensino Médio regular, tanto os de Física quanto os de Química, têm dificuldades no momento de trabalhar o conteúdo de forma interdisciplinar, de forma que os alunos acabam refletindo esta forma restritiva e estanque de trabalhar com os conhecimentos, não fazendo a inter-relação com os conteúdos das diversas disciplinas. Por outro lado, também pude concluir que, quando apresentados a formas de trabalho que evitam a memorização de fórmulas e que têm na lógica e na interdisciplinaridade os seus alicerces, os alunos se mostram mais atentos e mais receptivos (PERDIGÃO-NASS, 2008).

Diante deste quadro, é possível pensar que a elaboração de uma proposta educacional que contemple as demandas de aprendizagem dos alunos, com sequência didática e seleção de conteúdos e ênfases pensada em concordância com estas demandas, representa uma ação que pode contribuir de forma concreta para a melhoria da Educação Matemática no Brasil. Nossos trabalhos anteriores sugerem que é possível fazer contribuições a esse campo, visando a algo que satisfaça mais completamente às expectativas e necessidades dos estudantes secundaristas. Como consequências esperadas, vemos o impacto positivo no aproveitamento das disciplinas de Cálculo no nível superior e também na habilidade de egressos do Ensino Médio na interação com gráficos, seja no trabalho ou no cotidiano.

Justifica-se, assim, o presente trabalho, ao propor abordagens adicionais no estudo de Álgebra e Funções, ou mesmo de Geometria Plana, no Ensino Médio, de forma a familiarizar o estudante com noções do Cálculo Diferencial e Integral, resgatando da literatura trabalhos e conceitos que fundamentem a referida proposta. Acreditamos que já haja muitos trabalhos que identificam o problema com qualidade, embora poucos sugiram uma solução factível ou, se executável, que foque o processo de aprendizagem dentro da escola básica. Ao buscar integrar as conclusões dos diversos trabalhos e aplicar o nosso conhecimento em ensino de Ciências e Matemática, enxergamos oferecer algo com certo grau de ineditismo, que pode vir a ser um alicerce para novas propostas. Por fim, este trabalho também se coloca como uma forma de alimentar a discussão sobre uma eventual reforma do ensino de Cálculo e de Matemática no Brasil, com reflexos tanto no Ensino Médio quanto no Superior.

Neste capítulo 1, portanto, apresentamos o tema, justificamos sua escolha e, logo a seguir, definimos os objetivos do trabalho. O capítulo 2 é dedicado à apresentação dos referenciais teóricos a subsidiar o trabalho, com especial ênfase na interdisciplinaridade. O capítulo 3 traz fundamentações da proposta em si, principalmente de ordem epistemológica, sendo a maioria desses argumentos oriundos de outras pesquisas sobre o ensino de Cálculo. É no capítulo 4 que se concentra a construção de nossa proposta, permeada por justificativas e fundamentações. Para os leitores que buscam informações práticas e diretas sobre a proposta que aqui apresentamos, trata-se do capítulo principal para leitura. Por fim, há uma conclusão ponderada no capítulo 5.

1.2 Objetivos da pesquisa

O objetivo principal do presente trabalho é o de construir, com o necessário subsídio teórico, uma proposta de abordagem de noções e princípios do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio brasileiro, visando a atender tanto as necessidades do estudante que encerra seu ciclo educacional no secundário, dirigindo-se diretamente ao mercado de trabalho, quanto as necessidades do estudante que segue seus estudos em nível superior. Ressalta-se, portanto, que este trabalho não representa uma defesa da (re)introdução do Cálculo Diferencial e Integral na educação secundária brasileira, mas de intensificar os estudos de números reais, funções e geometria plana, exatamente no contexto típico do Cálculo, exibindo uma proposta de sequência didática e uma seleção de conteúdos, sempre com justificativa na literatura.

A evidente possibilidade de aplicação da pesquisa para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Matemática, especialmente em seu aspecto interdisciplinar, foi o principal fator a nortear a composição deste projeto. Esperamos, então, que, com esta nossa pesquisa, possamos proporcionar a docentes do Ensino Médio brasileiro, sejam da disciplina de Matemática ou de qualquer outra, uma abordagem diferenciada sobre noções e princípios do Cálculo Diferencial e Integral, de forma a fazer com que os alunos passem a ser capazes de resolver uma quantidade mais expressiva de problemas, especialmente aqueles que tenham aplicação na vida cotidiana. Também esperamos contribuir, ainda que não de forma explícita, com critérios que auxiliem os professores na adoção de outros recursos didáticos, na elaboração de uma avaliação, ou em outra atividade qualquer em sala de aula. Ou seja, esperamos influenciar positivamente ações docentes no universo da sala de aula.

Da mesma forma, a partir do uso que professores possam fazer de nossa proposta, esperamos que os estudantes possam usufruir da Matemática de uma forma mais ampla, avançando, por exemplo, na possibilidade de fazerem modelagem matemática de problemas reais de forma mais eficiente e eficaz. Em outras palavras, esperamos que os estudantes avancem na apropriação da Matemática como ferramenta efetiva na solução de problemas do cotidiano e do mundo do trabalho.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo, buscamos apresentar as bases e alicerces da proposta. Entendemos que há, ao menos, três áreas de estudos que merecem ser abordadas por apresentarem argumentos sólidos que consolidam a relevância do ensino de Cálculo e, com isso, subsidiam a proposta apresentada: a História da Matemática, os estudos interdisciplinares e a Educação Matemática.

2.1 Ensino de Cálculo na história

Em relação à importância histórica dada ao ensino de Cálculo e a outras áreas da Matemática, percebemos que estas se alteram expressivamente ao longo das épocas. Se, na idade Antiga, a adoção do *quadrivium* e seus conteúdos ligados à Matemática – Aritmética, Música, Geometria e Astronomia – representavam um primevo reconhecimento da importância universal dos conhecimentos matemáticos greco-romanos, na idade Média, o desenvolvimento da Matemática foi expressivo no mundo árabe, mas desprezível no universo cristão. Para D'Ambrosio (2005), isto tem relação com as necessidades econômicas, sociais e culturais, além dos ideais e crenças que constituem o espírito do tempo (*Zeitgeist*) a cada momento histórico. De certa forma, o movimento de Reforma e o Renascimento trouxe de volta a necessidade da Matemática, tanto para o exercício do ofício dos mestres artesãos quanto pela preocupação com o aprendizado em si, visto, por exemplo, na obra de Jan Amos Comenius (1592-1670), *Didactica Magna* (DRUCKER, 1997; D'AMBROSIO, 2005).

Como a adoção do *quadrivium* no Império Romano nos mostra, os temas relevantes da Matemática como área de conhecimento, de pesquisa e de aplicação técnica e tecnológica nem sempre são os temas escolhidos para o ensino da Matemática. Além disso, frequentemente, a abordagem é realizada com ênfase no rigor matemático, ainda que o ensino da Matemática seja feito, predominantemente, para alunos que não serão matemáticos. Neste sentido, é importante destacar o posicionamento vanguardista de Christian Felix Klein (1849-1925), líder da criação da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática (CIEM), sobre a necessidade de articulação entre a educação básica e a superior (MIORIM, 1998), bem como de um ensino de Matemática mais voltado para o pensamento funcional (SOUZA, 2010). Daí a necessidade vista por Klein sobre a introdução do Cálculo na escola secundária, sob a justificativa de ser este conhecimento importante para a formação para o trabalho. É preciso ressaltar, no entanto, que, de acordo com Oliveira (2010), Klein tinha um compromisso maior com a introdução do Cálculo no secundário visando à sua utilização como conhecimento base para estudos posteriores; ou seja, Klein tinha uma linha de defesa da reintrodução do Cálculo no secundário alemão que não difere muito daquela que muitos trabalhos brasileiros utilizam até hoje: Cálculo no Ensino Médio para reduzir as reprovações na disciplina congênere do Ensino Superior.

No Brasil, as discussões epistemológicas sobre o ensino de Cálculo na escola secundária não chegaram a ocorrer. Nos tempos de Klein, o Brasil chegou a participar do CIEM como observador, com professor do Colégio Pedro II, mas nenhuma das discussões ali ocorridas chegou até o Brasil (SOUZA, 2010). O mesmo Colégio Pedro II, pouco tempo depois, viria a ser o centro da defesa do ensino de Cálculo no secundário no Brasil, por meio da figura do professor Euclides Roxo (ALVAREZ, 2004). Roxo propôs uma alteração radical na forma como os conteúdos matemáticos eram apresentados, eliminando as disciplinas isoladas, como Geometria, Álgebra e Aritmética, e criando uma única disciplina, chamada Matemática, de forma a buscar integrar as diversas áreas da Matemática (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Durante a reforma Francisco Campos, na década de 1930, o Cálculo foi introduzido na escola básica brasileira, muito sob influência do professor Euclides Roxo, que participou da referida reforma (ALVAREZ, 2004), e pela importância do Colégio Pedro II na educação brasileira da época. Esta presença do Cálculo foi mantida na reforma Capanema, na década seguinte, e também em outras reformas pontuais entre as décadas de 1940 e 1950. Por fim, o Cálculo saiu do currículo com a descentralização promovida pela primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em 1961, talvez sob influência do movimento da Matemática Moderna e seus excessos de rigor (OLIVEIRA, 2010). Como mostra Spina (2002), o referido movimento tinha uma proposta referenciada em postulados estruturalistas e na sobrevaloração da abordagem de conjuntos, relações e estruturas, com foco no rigor da linguagem e nas demonstrações.

Enquanto o Cálculo esteve presente na educação secundária brasileira – que, à época, era de sete anos, incluindo-se aí, portanto, aqueles que hoje são os últimos quatro anos do Ensino Fundamental –, ele foi abordado no último dos cinco anos de duração do curso de

Matemática, o que significa que foi apresentado a jovens que finalizavam a sua formação em Matemática. Trata-se, portanto, de um posicionamento temporal de sequência didática que encontra eco em alguns dos livros didáticos atuais do Ensino Médio, mas não na proposta de Ávila (2006a), tampouco na que apresentamos neste documento. Outra questão a se destacar era a exigência, por parte do programa da reforma Francisco Campos, de que houvesse, nas discussões sobre os temas matemáticos, exemplos de aplicações em problemas de outras disciplinas. No entanto, de acordo com pesquisa histórica levada a cabo por Alvarez (2004), essa abordagem interdisciplinar provavelmente foi exceção entre os professores de Matemática da época, e não regra. O tratamento comum na década de 1930 era a demonstração rigorosa de cada regra de derivação, na teoria, e a aplicação das mesmas regras, como exercícios, em formato que persiste como principal até hoje.

Se, no Brasil, o Cálculo deixou de ser discutido como conteúdo da educação secundária, no resto do mundo, no entanto, a discussão sobre uma renovação do ensino de Cálculo nunca parou. Na Rússia e no Oriente, sempre receberam atenção. Já no Ocidente, a discussão ganhou fôlego no final da década de 1950, especialmente nos Estados Unidos, quando do programa soviético Sputnik, de lançamento de satélites, que motivou não somente uma discussão do ensino de Cálculo, mas também de toda a Matemática e das Ciências (TELES, 1992). O movimento de reforma teve altos e baixos, sendo relevante o ano de 1986, com dois eventos nos Estados Unidos: a Conferência de Sloan, ocorrida na Universidade Tulane, em Nova Orleans, Louisiana, e a Conferência de Washington, realizada nesse mesmo ano.

As conclusões advindas da Conferência de Sloan seguem guiando as propostas de reforma do ensino de Cálculo, e é a partir delas que entendemos que o Cálculo pode e deve servir a uma educação secundária de qualidade, especialmente àquela pensada para uma formação – e não meramente para uma preparação ou para um treinamento – voltada ao universo do trabalho. O Cálculo é uma das ferramentas de mais vasta aplicação no universo de cursos superiores e ofícios de nível médio, servindo não somente às áreas de Ciências Exatas e Biológicas, mas também às de Humanas Aplicadas. A Conferência de Sloan também nos permite perceber a adequação de um uso mais pleno de computadores na aprendizagem e da ênfase no desenvolvimento de competências para o uso efetivo das ferramentas do Cálculo (TEDESCHI, 2007).

Apesar do movimento mundial, o Brasil permaneceu sem realizar discussão efetiva sobre a reintrodução do Cálculo no secundário ou sobre a mudança de sua didática e de seus objetivos na educação superior, sendo meramente pontuais quaisquer iniciativas nesse sentido. Ainda é fortíssima, entre atuais e futuros professores de exatas em disciplinas que envolvem Cálculo, a ideia de um ensino meramente instrumental de Cálculo, ensino que não tem a preocupação de fornecer aos alunos contextos de utilização prática ou, o que seria ainda mais recomendado, a busca por incentivar, por meio de propostas didáticas inovadoras, o desenvolvimento do uso ativo das ferramentas do Cálculo na prática cotidiana e profissional (PERDIGÃO-NASS, 2013).

2.2 Rupturas da disciplinaridade

A interdisciplinaridade vem estando cada vez mais presente nos discursos dos produtores de conhecimento, como pesquisadores e professores universitários. Para Thiesen (2008), trata-se de uma revolução científica em curso, seja na economia, na política ou na tecnologia. No entanto, é como paradigma educacional renovado que a interdisciplinaridade tem mais permeado discursos, ainda que não esteja tão presente na prática educacional. Fazenda (2004) aponta que, já em 1990, a palavra de ordem na educação era "interdisciplinaridade", embora, antes disso, a palavra estivesse esquecida.

Moraes (2002), como tantos outros autores e pesquisadores da área que poderíamos citar, reconhece que a realidade é complexa e, por isso, exige um pensamento amplo, multidimensional, que busque quebrar as limitações das fragmentações impostas pelos limites disciplinares na construção de um conhecimento igualmente amplo. A autora faz um levantamento histórico amplo das razões que levaram o pensamento ocidental à extrema disciplinarização. Chassot (2016) reconhece a importância dessa disciplinarização na História, e também a existência persistente do embate entre especialistas e generalistas, mas ressalta que, se, por um lado, o conhecimento é gerado pelo pensamento especializado, por outro, na educação, são formados alunos generalistas e, portanto, a formação de professores que atuarão nesses espaços também precisa ser generalista.

Em outras palavras, no ambiente educacional, são trabalhados saberes consolidados, pertencentes aos paradigmas atuais de cada área do conhecimento. E nem poderia ser diferente: antes de podermos perseguir uma revolução científica (KUHN, 2012 [1962]), precisamos de uma compreensão clara dos paradigmas vigentes. O especialista só conseguirá a mudança de paradigma da sua área se teve uma formação generalista. Sendo assim, a educação deve ser generalista e ampla, para que os egressos dos espaços educacionais possam fazer eficientes interações interparadigmáticas na geração de novos conhecimentos.

Fazenda (2004) destaca que, pela forma como vêm sendo aplicados os currículos, organizados pelas disciplinas tradicionais, sem interdisciplinaridade, os alunos são levados tão somente a um “acúmulo de informações”, com chances reduzidas ou nulas de aplicabilidade de saberes em sua vida cotidiana ou profissional. E isto ocorre, segundo a autora, pelo fato de haver uma variedade muito ampla de formas verificadas atualmente para o desenvolvimento tecnológico, o que torna impossível fazê-las interagir e sistematizá-las na velocidade que seria necessária. Assim, cabe à educação trabalhar os conteúdos de forma interdisciplinar.

Como área de estudos ainda incipiente, a palavra interdisciplinaridade, em Educação, admite diversas interpretações. Uma das conceituações possíveis é a de que a interdisciplinaridade se caracterizaria pela articulação de elementos por meio de um eixo comum a um grupo de disciplinas associadas (FIEDLER-FERRARA; MATTOS, 2002). Essa articulação definiria um nível hierárquico imediatamente superior, tendo, portanto, dois níveis (o disciplinar, múltiplo, e o interdisciplinar, singular). A articulação no nível inferior teria objetivos múltiplos e uma tal coordenação que permite a sustentação do novo nível superior, que se caracterizaria como uma nova disciplina.

Outra interpretação vem de Lück (1995), que define interdisciplinaridade como processo que envolve educadores em trabalho conjunto, visando à interação das disciplinas escolares entre si e também com a realidade, à superação da fragmentação no ensino e à formação integral dos alunos. Uma formação interdisciplinar, na visão da autora, permitiria aos estudantes exercer sua cidadania de forma crítica, por meio de uma visão global do mundo, bem como enfrentar os problemas reais, em geral complexos, amplos e globais. Tal interpretação é complementar à apresentada no parágrafo anterior. Ambas têm pontos importantes em comum, especialmente a visão de complexidade do mundo, que só poderia ser enfrentada por aqueles que tivessem visão interdisciplinar.

Há, ainda, uma posição sobre a interdisciplinaridade, que Passos (2004) defende, com base em diversos autores. Para ele, interdisciplinaridade é uma atitude, ou seja, uma postura que os integrantes do processo educacional e de pesquisa devem assumir, sob pena de não haver, de fato, a interação entre as disciplinas. O autor segue dizendo que, mesmo que haja um encontro entre profissionais de diferentes disciplinas em uma construção conjunta, não existe a garantia de haver interdisciplinaridade, se não houver uma intenção de fazer os conhecimentos disciplinares interagirem no trabalho coletivo.

Além disso, a interdisciplinaridade também precisa estar presente nos materiais didáticos, para que haja tais interações. Como afirmam Sodré e Mattos (2006), para que mudanças nas orientações curriculares ocorram e prosperem, exigem-se metas comuns entre as disciplinas, metas estas que estariam, como definido por Fiedler-Ferrara e Mattos (2002), em outro nível hierárquico. Isto implicaria na necessidade de subsídios à formação de professores, estando entre eles a produção de material didático que trate os conteúdos de maneira interdisciplinar, ou seja, que busque fazer o aluno compreender as relações interdisciplinares dos conceitos ligados aos temas trabalhados.

Como já dissemos, tanto no Brasil quanto em todo o mundo, a interdisciplinaridade na Educação é um tema que somente em tempos mais recentes vêm sendo alvo de um número mais significativo de pesquisas, de estudos e de práticas. Isto contrasta com as competências que se espera que o aluno de Ensino Médio desenvolva, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999a). Somente na Parte III daquele documento, referente aos parâmetros curriculares para o ensino de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, o radical "interdisciplinar" aparece 22 vezes. Nas Orientações Educacionais Complementares aos PCNEM, os chamados PCN+, não é diferente. No referido documento, a interdisciplinaridade é colocada como inevitável e supradisciplinar, como se pode depreender pela leitura do excerto abaixo.

> "Nessa nova compreensão do ensino médio e da educação básica, a organização do aprendizado não seria conduzida de forma solitária pelo professor de cada disciplina, pois escolhas pedagógicas feitas numa disciplina não seriam independentes do tratamento dado às demais disciplinas da área e mesmo das outras duas áreas, uma vez que é uma ação de cunho interdisciplinar que articula o trabalho das disciplinas, no sentido de promoverem competências. As linguagens, ciências e humanidades continuam sendo disciplinares, mas é preciso desenvolver seus conhecimentos de forma a constituírem, a um só tempo, cultura geral e instrumento para a vida, ou seja, desenvolver, em conjunto, conhecimentos e competências. Contudo, assim como a interdisciplinaridade surge do contexto e depende da disciplina, a competência não rivaliza com o conhecimento; pelo contrário, só se funda sobre ele e se desenvolve com ele" (BRASIL, 2002, p.13-14).

Outros níveis de interação entre disciplinas e de rompimento de suas fronteiras são reconhecidos, além da interdisciplinaridade, sendo alguns mais modestos, outros mais audaciosos. Chassot (2016) enxerga que propostas educacionais que buscam enfraquecer, romper ou eliminar as fronteiras entre disciplinas podem ser categorizadas em um crescendo (em referência ao vocabulário musical): disciplinar $<$ pluridisciplinar $<$ multidisciplinar $<$ metadisciplinar $<$ interdisciplinar $<$ transdisciplinar $<$ indisciplinar. As propostas plúri, múlti e metadisciplinares têm um grau inferior de interação entre disciplinas. São feitas, essencialmente, pela reunião de profissionais especialistas, disciplinares, de áreas distintas, muitas vezes persistindo com seus vocabulários e seus paradigmas intradisciplinares, como já relatado aqui, em referência a Passos (2004). Já o transdisciplinar e o indisciplinar são propostas ainda mais ousadas. Vale a pena tratarmos delas.

Segundo Fiedler-Ferrara e Mattos (2002), na transdisciplinaridade, existe uma coordenação de todas as disciplinas, inclusive as intradisciplinas e as interdisciplinas, mas ainda ligadas por uma base axiomática geral. Tal sistema possui diversos níveis e múltiplos objetivos, mas se coordenam com vistas a uma finalidade comum. Os autores exemplificam o termo com o estudo ambiental, que é realizado na coordenação e na integração de disciplinas como Matemática, Física, Química, Biologia, Engenharia, Economia, Direito, Ciências Sociais, entre outras, além de suas subdisciplinas e de suas interdisciplinas.

Há propostas ainda mais ousadas, como a de Chassot (2016). Para ele, ainda há pendente de ocorrer no século 21, ao menos na área da educação, uma revolução que quebre quaisquer fronteiras entre as disciplinas e que não requeira sequer a base axiomática geral a uni-las. Para o autor, a indisciplinaridade representa passagem das disciplinas à indisciplina, o que pode ser entendido como um abandono das certezas e uma convivência mais amigável com a permanente incerteza. Trata-se de visão similar à já manifestada pelo educador e físico Luís Carlos de Menezes, da Universidade de São Paulo (USP) (MENEZES, 2010). Para Menezes, é necessário “aprender com o imponderável”, já que o mundo está vivendo uma era de transformações cada vez mais intensas e velozes. Tanto Chassot como Menezes, por sinal, exibem uma trajetória acadêmica e profissional de perfil eminentemente indisciplinar.

Mas o que vem a ser indisciplina? Chassot (2016) identifica ao menos três ações para o prefixo *in*, referentes a três acepções distintas: a primeira, no sentido de inclusão, de introduzir conhecimentos de dada área em outras disciplinas; a segunda, no sentido de incorporação, ou seja, de abrir uma área à incorporação dos saberes de outras; a terceira, no sentido de negação, de rebelar-se à submissão imposta pelas fronteiras disciplinares. Para o autor, a última destas ações seria a mais radical.

Ao defender que nenhum dos problemas centrais da vida pode ser tratado sem uma multiplicidade de conexões com todos os demais problemas, e que a indisciplina é o mais adequado método de abordagem da análise das principais tendências sociais, Chassot (2016) recorre a Feyerabend, que entende que qualquer ideia, mesmo que antiga, mesmo que absurda, pode aperfeiçoar nossos saberes, e que, como a história mostra, o conhecimento de hoje pode passar a ser desprezado amanhã, da mesma forma que o mito de hoje pode vir a ser uma sólida peça de ciência no futuro.

Entendemos que a ideia de Chassot (2016) é uma demanda válida, podendo ocorrer durante a realização da transposição didática, tal como definida por Chevallard (2013), por exemplo. Afinal, como lembra Chassot, Aristóteles já reconhecia o todo como maior do que a soma de suas partes. É na integração total do conhecimento que podemos fazê-lo crescer. E essa é uma demanda da educação de qualidade. Nós só não estenderemos a defesa da indisciplinaridade por não ser este o objetivo aqui. Limitar-nos-emos a buscar valorizar a interdisciplinaridade, que, se é uma integração tímida diante da transdisciplinaridade ou da indisciplinaridade, é uma pretensão menos utópica diante do pensamento médio e padrão da noosfera (CHEVALLARD, 2013) do Ensino Médio brasileiro.

2.3 Interdisciplinaridade para a Educação Matemática

Em relação à interdisciplinaridade em Matemática, vemos que ela tem raízes históricas. O próprio Christian Felix Klein enxergou a necessidade de um estudo integrado de disciplinas antes separadas, como Álgebra, Geometria e Aritmética, como uma única disciplina a ser denominada Matemática (OLIVEIRA, 2010). Tal fato remonta a 1908, ocasião do IV Congresso Internacional de Matemática. Segundo Oliveira (2010), facilitaram a aceitação das teorias de Klein os fatos de seus trabalhos serem muito bem estruturados na defesa da fusão de áreas distintas da Matemática para fins educacionais, além de o próprio Klein ter bastante desenvoltura junto à política, por ser ele mesmo filho de um político.

Como já foi mencionado, a integração entre as diferentes áreas da Matemática para fins educacionais chegou ao Brasil por meio da influência do professor Euclides Roxo. Este professor não somente semeou no Brasil as ideias que já vinham sendo implementadas na Europa e nos Estados Unidos, tampouco limitou-se a fazê-las funcionar no Colégio Pedro II, na então capital nacional, Rio de Janeiro, instituição que ainda era referência nacional na educação básica na década de 1930. Roxo também participou, efetivamente, da reforma Francisco Campos, que definiu novos conteúdos nacionais para a educação secundária (ALVAREZ, 2004).

Mas, se a Matemática da educação básica se unificou no Brasil na década de 1930, não se pode dizer o mesmo sobre a interação entre a Matemática e as diversas disciplinas desse nível educacional. Propostas de ampliar a interdisciplinaridade na educação, como já vimos, têm sido feitas com mais intensidade desde a década de 1990. No entanto, com a formação de professores ainda muito tradicional, presa aos paradigmas disciplinares, pouco se avançou.

Não que não tenha havido iniciativas práticas no sentido de se aumentar a interdisciplinaridade na educação básica. Ao contrário: houve algumas boas tentativas. A primeira delas corresponde à publicação, em 1999, dos PCNEM (BRASIL, 1999b). Neles, são definidas apenas três áreas para o Ensino Médio: linguagens, códigos e suas tecnologias; ciências da natureza, matemática e suas tecnologias; ciências humanas e suas tecnologias. Às páginas 18 e 19 das bases legais dos PCNEM, explica-se que a definição de apenas três áreas ocorreu exatamente para que se criassem condições para a introdução de uma perspectiva de interdisciplinaridade na prática escolar. Outra tentativa, que consideramos mais forte, pelo poder normativo que possui, ainda que indireto, foi a definição da separação de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio, o Enem, na reforma de 2009. O exame passou a ser composto de cinco provas, sendo uma de redação e as outras quatro, compostas de itens de múltipla escolha, são ligadas às três áreas dos PCNEM. A única alteração foi a separação de Ciências da Natureza e Matemática em duas provas distintas.

Mesmo assim, persistem existindo as licenciaturas brasileiras como cursos disciplinares – licenciaturas em Física, em Química, em Biologia, mas não em Ciências da Natureza, por exemplo, com habilitação simultânea em todas as disciplinas da área. Espera-se que a Base Nacional Comum Curricular, ainda em discussão, possa apontar ainda mais caminhos no sentido de aprofundar a interdisciplinaridade na educação, ainda que sejamos céticos quanto à real possibilidade de professores tão apegados ao paradigma em que foram formados, o paradigma da disciplinaridade, poderem atuar de forma efetivamente interdisciplinar.

Não são poucas as vozes a concordar com a necessidade de se aprofundar a interdisciplinaridade. Um dos critérios do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para a seleção e recomendação de livros de Matemática, por exemplo, é a contextualização, que implica uma queda das barreiras entre disciplinas. E isso é feito com o objetivo de tornar mais significativo o estudo do conteúdo disciplinar, segundo o Guia de Livros Didáticos PNLD 2015 da Matemática do Ensino Médio (BRASIL, 2014), em concepção partilhada por nós na presente monografia. A propósito, tal ideia não é exclusiva do presente trabalho. A contextualização, entre outros enfoques socioculturais para a Matemática, vem sendo defendida com ênfase por muitos pesquisadores da área da educação matemática, há muito tempo. Spina (2002), entre tantos outros educadores matemáticos, vê como marco inicial dessa tendência as discussões ocorridas no Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, ocorrido em Karlsruhe, Alemanha, em 1976.

Além disso, como reconhece Ávila (2004), é papel do professor de Matemática falar de aplicações da Matemática. Não é possível terceirizar esse tipo de abordagem, deixando, por exemplo, a parte histórica da Matemática com o professor de História, pois isso significaria forçar a fragmentação do saber em caixas lacradas. Essa construção de barreiras à livre circulação do conhecimento entre as disciplinas é negativa, pois implica em uma desvalorização dos saberes que os demais professores da escola têm a apresentar. Ainda segundo o autor, cada professor precisa ter conhecimentos sobre disciplinas que não a sua, e abordar esses saberes na educação básica.

Também nos parece claro que o papel do professor de Matemática seria imensamente facilitado se os professores das demais disciplinas fizessem o mesmo. Algo que, por sinal, recomendam os PCN+, ou seja, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. O referido documento diz:

> “Não só o professor de Matemática deve estar atento para ilustrar a utilidade dos instrumentos de representação que ensina, mas qualquer professor que estiver fazendo uso, em sua disciplina, de uma linguagem matemática já pode defini-la e ensiná-la sem esperar que o professor de Matemática seja o primeiro a desenvolver uma linguagem de uso amplo em todas as ciências. Cada professor deveria elaborar uma lista das linguagens, não só matemáticas, e estabelecer como regra de conduta promover o aprendizado delas entre seus alunos, não apenas como meio para o aprendizado de sua disciplina, mas como competência mais geral, instrumento para a vida” (BRASIL, 2002, p.26).

Concordamos com a ideia de Ávila (2004) quanto ao fato de que é salutar que professores “repitam” lições, sobrepondo exposições, quando dois ou mais professores tratam do mesmo tema, pois, com isso, os professores estarão promovendo a integração do conhecimento de forma orgânica e harmoniosa. Mas vamos além: quando mais de um professor trata do mesmo assunto em sala de aula, além de visões diferentes sobre o tema, os alunos têm a percepção mais clara da importância da temática que está sendo tratada e, especialmente, passam a valorizar de forma mais intensa o conhecimento escolar, pois há o reforço positivo dos professores quanto à importância daqueles assuntos para o mundo do trabalho, para o exercício da cidadania, enfim, para a vida.

Como argutamente percebe Machado (2014), o grau de multiplicação e de especialização das disciplinas é crescente. Com isso, os currículos se tornaram muito complexos e perderam a característica de unicidade que os caracterizava até meados do século XIX. Aquele autor reforça o argumento de Ávila (2004), de que todos os professores precisam falar de outras disciplinas para além da sua. No entanto, ressalva que pensa haver instalada uma espécie de "intolerância disciplinar", com cada especialista defendendo a sua área como imprescindível e rebaixando a importância das demais, criando um território intransponível na educação, com reflexos na quase infinita lista de conteúdos a serem estudados, por exemplo, no Ensino Médio brasileiro.

Mas Machado (2014), não somente na obra citada, mas em aulas e palestras gravadas a que pudemos assistir, vem defendendo uma solução não somente exequível, mas que vem ao encontro da proposta aqui apresentada: a necessidade de se concentrar em um número restrito de ideias fundamentais de cada área do conhecimento, especialmente aquelas cujas consequências ou implicações se propagam por outras áreas, exatamente por conta de sua posição de alicerce ou razão de existir da respectiva área. Entendemos que o Cálculo Diferencial e Integral está entre estas ideias fundamentais da Matemática, pois suas aplicações cobrem praticamente todas as áreas do conhecimento, desde as Ciências Exatas até as Sociais. Aliás, esse também é o entendimento do próprio Machado (2008).

Além disso, a interdisciplinaridade que se pretende ver presente na educação básica precisa ser real. Como relatam Tomaz e David (2008), as experiências de introdução da interdisciplinaridade em Matemática nem sempre são relatadas como bem-sucedidas, porque há uma artificialidade na busca de contextos de interação com outras disciplinas. Em outras palavras, os autores de livros matemáticos não se integram, de fato, com a comunidade de outras disciplinas para, em lugar de criar contextos, adaptar os já existentes.

Uma das possibilidades vislumbradas por nós para que essa integração seja bem-sucedida é o uso de temas geradores, como na concepção de Paulo Freire, tratada em sua obra "Pedagogia do Oprimido" (2005). Nessa obra, Freire aprofunda a ideia de diálogo e de palavra geradora, esta última usada na alfabetização de adultos, como na experiência de Angicos, no Rio Grande do Norte, e outras que se seguiram (GERMANO, 1997). Com isto, Freire propõe uma nova forma para a concepção de programas de ensino, pois o uso de temas geradores é uma forma de devolver ao povo os elementos fornecidos aos educadores em um formato organizado, sistematizado e ampliado e, em especial, que permitisse a mudança social.

Ao contrário do que possa se imaginar à primeira vista, a estruturação do programa educacional com estas bases e a definição dos temas geradores deve ocorrer antes do início das atividades de estudo sistemático; ou seja, da mesma forma como ocorre com a maior parte das demais metodologias, não há espontaneísmo nem improvisação. O que o conceito de tema gerador traz de novo e de inédito é a introdução do diálogo já na fase de elaboração dos programas; portanto, sem uma prefixação dos tópicos de estudo por parte de quem conduz o processo de elaboração destes programas ou de seus interesses pessoais ou corporativos. Ao contrário, propõe-se uma interação plena e elaborada entre uma equipe interdisciplinar e a população que participará do processo ensino-aprendizagem em busca conjunta de situações e tópicos significativos e de interesse coletivo, bem como de sua sequência e de sua articulação (FREIRE, 2005; PERNAMBUCO, 1994).

Para Delizoicov (1982), há cinco etapas de passagem obrigatória para a elaboração de um programa pedagógico baseado no conceito de tema gerador, em um processo comumente denominado investigação temática. A primeira dessas etapas trata de um levantamento preliminar da realidade local, com coleta de material, conversa com a comunidade, investigações de campo, além de uma busca por fontes secundárias, dados estatísticos e de administração pública, entre outras fontes. A segunda etapa compreende a análise do material coletado, buscando encontrar elementos significativos para aquele grupo social, algo considerado como uma dificuldade a ser superada, mas que, ao mesmo tempo, possibilite uma compreensão de outros elementos associados a esta dificuldade e que se insiram em um contexto mais amplo. Uma terceira etapa inclui o que Paulo Freire denomina "círculo de investigação temática", no qual os temas potenciais são codificados na forma de situações vivenciais associadas a tais temas e apresentados ao público-alvo, qual seja os educandos e seus familiares. Na quarta etapa, as falas do círculo de investigação temática são estudadas pelo grupo de educadores, de forma a ser examinadas e discutidas por especialistas no ensino de cada área do conhecimento de forma individual, mas, ao mesmo tempo, de forma articulada, interdisciplinar, de forma a selecionar o tema gerador ou os poucos temas geradores. Por fim, a quinta e última etapa é a do trabalho sobre os temas, com cada professor planejando as suas atividades e as confrontando tanto com os pares da mesma série quanto com os próprios alunos, que também são chamados a discutir e opinar sobre a lógica do programa naquilo que lhes cabe.

Outra possibilidade, que aparece muito mais frequentemente entre autores e estudiosos da área de educação matemática, é a aplicação da modelagem matemática no ensino. Tomaz e David (2008) são autoras que, ao tratar da interdisciplinaridade, sugerem a modelagem como um caminho para alcançá-la. Godoy (2015), de forma similar, enxerga a modelagem matemática como uma via de integração entre currículo, cultura e educação matemática. Já para Spina (2002), se, na atualidade, o universo e o ser humano não podem mais ser vistos como entes compostos de partes, mas como todos indivisíveis e de concepção sistêmica, então a modelagem matemática pode contemplar tais demandas, por incorporar a transdisciplinaridade, por relacionar educação e cotidiano, por estimular a criatividade e por ver o ser humano no todo. Nesse contexto, vale a pena explorar melhor as possibilidades da modelagem matemática.

São muitos os autores brasileiros a recorrer à modelagem matemática como estratégia na educação matemática. Biembengut e Hein (2009) veem a modelagem matemática como tão antiga quanto a própria Matemática, afinal, a Matemática surge como resposta a problemas cotidianos dos povos antigos. Trata-se, segundo aqueles autores, da arte de expressar situações-problema por meio de linguagem matemática ou, em outras palavras, um meio de fazer interagir dois universos distintos, o da Matemática e o da realidade. Os mesmos autores veem que o uso de modelagem matemática na educação matemática é um movimento que ganha força na década de 1980, embora já haja pesquisadores brasileiros trabalhando na área pelo menos desde a década anterior, como é o caso de Aristides Barreto.

Bassanezi (2015) escreveu um livro em que trata de maneira genérica sobre a modelagem matemática, não a restringindo ao ensino da Matemática, mas dando ênfase a ela. Nesse contexto, o autor define quais são as etapas da modelagem matemática. A primeira dessas etapas é a escolha de temas. Não há uma descrição plena sobre o processo de escolha de temas por parte do autor, embora ele enfatize que os temas devam ser escolhidos pelos alunos. Desta forma, a nosso ver, há uma similaridade com a concepção freireana de tema gerador desde o princípio. Nota-se, no entanto, com apoio da constatação de Barbosa (2001), que esta preocupação antropológica, política e sociocultural é marcadamente brasileira, não se verificando em trabalhos internacionais sobre modelagem matemática no ensino.

Como uma segunda etapa do trabalho educacional com modelagem matemática, Bassanezi (2015) aponta a coleta de dados, que se refere à construção e à execução de métodos de construção de informações matemáticas que, posteriormente, servirão de base para o trabalho. Podem ser entrevistas, levantamentos, questionários, pesquisas bibliográficas, uso de bases de dados públicas, experimentos, podendo ser, também amostrais ou populacionais, dependendo das possibilidades e das circunstâncias. Ainda nesta etapa, exige-se a organização adequada dos dados, como em tabelas.

Uma terceira fase da modelagem matemática, ainda de acordo com Bassanezi (2015), é a análise de dados e a formulação de modelos. É aqui que mora o núcleo da modelagem matemática: a busca por um modelo matemático que possa expressar a relação entre variáveis. Para o autor, é sempre conveniente compreender como se dá a variação das variáveis envolvidas no fenômeno que se está analisando.

Há, ainda, uma última fase de relevância para a Matemática da educação básica. Essa quarta fase é a de validação, que consiste no processo de aceitação ou de rejeição do modelo, o que se pode fazer por várias formas, sendo a principal o cotejamento dos dados reais com os dados previstos pelo modelo. Como afirma Bassanezi (2015), um bom modelo deve não somente prever adequadamente os dados já existentes, como também novos resultados.

É preciso notar que essa visão restrita da modelagem matemática, como apontada por Bassanezi (2015), recebe críticas, com as quais concordamos. A principal é a visão restrita da modelagem matemática do ponto de vista da Matemática Aplicada, e não da Educação Matemática. Barbosa (2001) traz alguns exemplos, como uma pesquisa em que os alunos investigaram quanto custava construir uma casa, mas sem construir um modelo matemático propriamente dito, ou outra em que os dados eram puramente fictícios, criados pelos alunos com o único objetivo de trabalhá-los matematicamente. Ora, como vimos, estas abordagens violam as preconizações colocadas por Bassanezi (2015). No que Barbosa (2001) responde que a Modelagem Matemática, tal como concebida pela Matemática Aplicada, é diferente da Modelagem como vista pela Educação Matemática.

Assim, Barbosa (2001) propõe, a partir da análise de estudos nacionais e internacionais sobre modelagem no ensino, a classificação dos mesmos em três casos: no primeiro, um professor apresenta a descrição de uma situação-problema, já com as informações necessárias, cabendo aos alunos apenas a resolução; no segundo, o professor, de forma interdisciplinar, traz para a sala de aula problema de outra área, cabendo aos alunos a coleta ou a construção dos dados para a resolução; no terceiro, este, sim, mais ligado à concepção de modelagem apresentada por Bassanezi (2015), os alunos formulam e resolvem problemas a partir de temas não matemáticos, sendo, também, responsáveis pela coleta de informações e pela simplificação das situações-problema.

Quando tratamos especificamente do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, percebemos que já há diversos trabalhos que vislumbram a contextualização e a interdisciplinaridade como caminhos para um resultado mais eficaz, ou seja, com um melhor rendimento e aproveitamento por parte dos alunos, ao mesmo tempo que com mais apropriação das ferramentas e do conteúdo. Spina (2002), por exemplo, defende a modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio. Pereira (2009) também sugere contextualizar problemas de Cálculo. Reis, Laudares e Miranda (2013) criam objeto de aprendizagem para o ensino de Cálculo pensando na aplicação. Mesmo quando limitamos nosso levantamento a egressos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ainda vemos muitos trabalhos com esse viés. Por exemplo, Brito (2013) apresenta dez problemas que envolvem aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, todos eles em contextos distintos dos matemáticos. De forma menos explícita, o trabalho de Mota (2014) também apresenta o Cálculo em contextos de aplicação.

Por fim, se esquecermos de tantas pesquisas que revelam sucesso no ensino de Cálculo quando este aparece de forma contextualizada e pensarmos somente em termos dos livros utilizados nas universidades brasileiras, ainda teremos um grande número de referências. Em geral, são adotados livros de Cálculo norte-americanos traduzidos para o português: muitos de seus autores e de suas obras valorizam a contextualização e a aplicação. Entre eles, destacamos as obras de Laurence D. Hoffmann (HOFFMANN *et al.*, 2013), que são publicadas em inglês desde o fim da década de 1970 (HOFFMANN; ORKIN, 1979), mostrando que o Cálculo é eminentemente interdisciplinar e basilar para outros estudos das mais diversas áreas do conhecimento. Falta, portanto, apenas incorporar efetivamente a interdisciplinaridade no ensino de Cálculo. Ferramentas e referências para isso existem de sobra.

3 FUNDAMENTAÇÃO EPISTEMOLÓGICA

Neste capítulo, trabalharemos os alicerces epistemológicos da proposta que será apresentada no próximo capítulo. Retomamos, assim, as temáticas de referenciais teóricos das seções anteriores, que foram a História da Matemática, os estudos interdisciplinares e a Educação Matemática, mas, agora, de forma mais específica em referência ao tema do trabalho, que é o Cálculo Diferencial e Integral. Em outras palavras, é neste capítulo que se encontram os eixos de sustentação da viabilidade da proposta que se fará a seguir. É relevante destacar que entendemos os fundamentos epistemológicos de um campo de conhecimento de forma similar à apresentada por Rezende (2003) e Pereira (2009), por exemplo: tratam-se de saberes ligados à própria natureza daquele conhecimento.

3.1 O atual estado de coisas no ensino de Cálculo

Um dos empecilhos para que o rendimento dos alunos em Cálculo seja melhor é o fato de que alunos e professores têm dificuldade em vislumbrar abordagens inovadoras para o conteúdo, abordagens que avancem para além daquela que baseia aulas teóricas em demonstrações e enfatiza a resolução de exercícios, em listas prévias e nas avaliações, essencialmente sobre a aplicação das regras de derivação e integração, a despeito das críticas e propostas alternativas serem, ambas, abundantes (REZENDE, 2003; PERDIGÃO-NASS, 2013). A mesma visão é colocada por Santos (2012), reforçando que há uma lógica interna neste método que o torna pouco questionado: são definidos os termos, são aceitos os axiomas, são demonstrados os teoremas, exemplos aparecem de forma meramente ilustrativa, e toda essa base fundada no formalismo justifica a ideia de aprendizado por exercitação e memorização. Em outras palavras, se a ideia é valorizar o formalismo, então, o método atual não é ruim.

Pereira (2009) faz crítica muito pertinente à adoção desse tipo de abordagem didática do Cálculo, com base em outros pesquisadores da área de educação matemática. É muito lógico, sob o ponto de vista da construção do conhecimento matemático, ou de sua estrutura formal, que sejam acordadas, pela comunidade matemática, definições de conceitos. Além disso, por ser a Matemática uma área do conhecimento essencialmente dedutiva, parece natural aos matemáticos que quaisquer resultados da disciplina exijam construção a partir desses conceitos, que, neste caso, são representadas por definições primitivas e por axiomas. No entanto, o cérebro humano, em geral, não funciona com a linearidade das deduções matemáticas. É difícil, portanto, forçar um sistema cognitivo a agir contra sua natureza, exigindo dele a consulta a definições no processo de construção de saberes mais elaborados. Em outras palavras, não é adequado forçar a educação matemática a ter a mesma lógica da Matemática.

Para Pereira (2009), o conflito cognitivo deve ser evitado, sendo estimulado apenas quando houver a necessidade de levar os alunos a atingir patamares mais elevados de compreensão. Não nos parece ser o caso de quem usa o Cálculo meramente como ferramenta. Daí a relevância de se criar um método de abordagem que evite fatores de conflito potencial, como os que costumam ocorrer, por exemplo, entre as imagens de conceito de limite e continuidade que os alunos levam para a aula e a definição conceitual formal.

Até mesmo os alunos têm uma percepção razoável sobre os problemas do atual ensino de Cálculo, com a atual ênfase no formalismo, que, talvez, possam se estender a todo o ensino de Matemática. Segundo Pereira (2009), baseado em outras pesquisas, os alunos, muitas vezes, já trabalham e não veem aplicação daquele conhecimento no seu trabalho; consideram as aulas monótonas – talvez por se basearem em demonstrações –; e também responsabilizam o professor, embora de forma não muito clara, alegando que eles não têm segurança na matéria e que eles não têm bons métodos de exposição – talvez refletindo o fato de, mesmo quando perguntados sobre onde aplicarão tais saberes, o professor não dar uma resposta satisfatória.

Esta situação, na verdade, parece mostrar uma falta de reflexão sobre o ensino de Cálculo por parte daqueles que o ministram. Os matemáticos responsáveis pelas disciplinas de Cálculo I reproduzem o modelo que eles próprios viram como graduandos – embora como graduandos de Matemática, e não de outros cursos, como é o caso da maioria de seus alunos – sem que haja um repensar sobre os objetivos, os métodos, a avaliação. Os professores de Cálculo parecem apenas olhar para as altas taxas de reprovação, culpando, no Brasil, a tibieza da educação básica, sem perceber que são corresponsáveis pelo fraco desempenho dos alunos.

Falta, também, uma compreensão mais plena sobre as propostas de inovação no ensino de Cálculo. Santos (2012) e Mota (2014), por exemplo, colocam como justificativas para suas defesas da introdução do Cálculo no Ensino Médio a alta taxa de reprovação dessa disciplina no Ensino Superior. Trata-se de uma justificativa que não encontra alicerce nos atuais pressupostos pedagógicos do Ensino Médio. Este nível de ensino deve ser considerado terminal, e não propedêutico. Além disso, não há referência à educação para a cidadania ou a educação para o trabalho, de forma que não transparece uma coerência no discurso da defesa do Cálculo na educação secundária. Pior: ambos os autores citados, que não estão sós, reforçam a sua posição citando Ávila (1991, 2006a). Mas Ávila tem posição completamente diversa. Para este último autor, o Cálculo no Ensino Médio justifica-se por si próprio, e não como um conteúdo adicional, à parte, mas como um tema de unificação da Matemática, ao reunir elementos da Álgebra, da Aritmética e da Geometria, e como um tema que incentiva e contextualiza o estudo de funções.

Rezende (2003) tem ideias similares sobre as dificuldades de aprendizagem dos alunos em relação ao Cálculo. Depois de investigar esses embaraços e relacioná-los com a história e a conceituação do Cálculo, de forma específica e, também, da Matemática de modo geral, o referido autor conclui que as dificuldades de aprendizagem do Cálculo que têm natureza epistemológica se devem essencialmente à omissão ou à evitação das ideias básicas e das questões que alicerçam esse conhecimento, sendo o maior obstáculo a ausência das concepções de Cálculo na educação básica. Nesse contexto, introduzir noções de Cálculo ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio seria essencial para que os alunos pudessem dominar as ferramentas matemáticas de forma suficiente no Ensino Superior.

Reforçando essa concepção de Rezende, voltamos a Ávila (1991), que lembra que o Cálculo é conteúdo do secundário de diversos países, com destaque para os Estados Unidos. Segundo o autor, que viveu por algum tempo naquele país, embora o sistema educacional seja independente em cada Estado e varie até mesmo entre os distritos educacionais de um mesmo Estado, há uma característica universal de flexibilidade nos anos finais da escola básica, próximo do nosso Ensino Médio. Assim, um aluno nesse estágio pode preferir estudar mais Matemática, mais Ciências ou mais Humanidades, sendo que, na primeira hipótese, poderá cursar Cálculo em profundidade, inclusive abatendo créditos em Cálculo na universidade, de forma a poder se matricular em disciplinas mais avançadas, como Análise e Física. Note-se, no entanto, que a proposta que apresentamos aqui, e que Ávila também concebe, é a da universalização da abordagem de noções do Cálculo. Ou seja, há duas diferenças em relação ao relato do que ocorre nos Estados Unidos: nossa pretensão de formalização é menor, de forma que nosso curso não serviria para eliminar a necessidade de os alunos cursarem disciplinas iniciais de Cálculo na universidade; com isso, é possível propor que as noções de Cálculo sejam tratadas em aulas do núcleo comum do Ensino Médio, ou seja, para a totalidade dos estudantes, independentemente da área de ênfase que venham a escolher.

Em suma, entre as razões para a pouca compreensão do Cálculo, estariam a reduzida contextualização prática do Cálculo, com a consequente sobrevaloração dos aspectos instrumentais, o baixo nível de conhecimento prévio dos alunos naquilo que se convencionou chamar de Pré-Cálculo, e as más condições de formação e de trabalho dos docentes. Para Pyzdrowski e outros (2013), em análise mundial e baseada na literatura internacional, há aspectos relevantes e mais específicos a se colocarem como barreiras ao aprendizado: os alunos veem funções como fórmulas; têm dificuldade de expressar funções em gráficos; consideram as funções como algo estático – o que dificultaria compreender o conceito de limite –; não conseguem enxergar elementos geometricamente; têm fraca concepção intuitiva da derivada e de sua relação com taxa de variação. Alguns desses fatores são combatidos pela proposta de Ávila (2006a): o Cálculo passaria a se integrar ao ensino de funções na educação secundária. Outros são consequências naturais da atual abordagem de Cálculo, formalista e baseada na sequência didática que refutaremos com base na literatura. Tal ordem de tópicos se convencionou chamar sequência de Cauchy-Weierstrass, mas não sem controvérsias, como apontam Borowik e Katz (2012).

3.2 Epistemologia do Cálculo e da Álgebra

A abordagem tradicional do Cálculo no Brasil é a correntemente chamada sequência de Cauchy-Weierstrass, de “limite-continuidade-derivada-integral” (REZENDE, 2003), e que, como Pereira (2009) conclui a partir de outros trabalhos, exige o limite no começo porque as demais definições são apresentadas aos alunos alicerçadas na rigorosa definição de limite. A continuidade depende de o limite existir e ser igual ao valor da imagem da função em cada ponto; a derivada é o limite do quociente incremental; a integral é o limite da soma de Riemann. Para Rezende (2003), esta pode ser uma sequência apropriada para cursos de Análise, mas não necessariamente para cursos de princípios e aplicações do Cálculo. A razão é simples: o formalismo nas definições é, em grande parte, dispensável se o foco é a aplicação do Cálculo na modelagem matemática para a resolução de problemas.

Ávila (2006a) retoma essa questão pelo viés histórico. Segundo ele, a derivada foi criada no século XVII como forma de resolução de problemas particulares, até que se começou a perceber que havia elementos comuns em todos eles. Durante todo aquele século e em boa parte do seguinte, não havia sido desenvolvido o conceito de limite. Ou seja, Newton e Leibniz, de alguma forma, falavam em algo como quantidades evanescentes, às vezes tratadas como nulas e desprezíveis, outras vezes tratadas como inferiores a qualquer quantidade positiva, essencialmente variando apenas a notação com que o faziam. Para Ávila, D'Alembert o primeiro matemático a interpretar a derivada como um limite, mas apenas em meados do século XVIII, quando os métodos do Cálculo já tinham sido mais bem desenvolvidos, por conta dos trabalhos como os dos Bernoulli e de Euler. Limite como teoria estruturada e útil ao desenvolvimento da Análise Matemática só teria surgido em 1815, de acordo com o autor. Em suma, o Cálculo viveu por muito tempo sem uma definição rigorosa de limites, servindo não somente à Ciência, mas aos próprios matemáticos. Então, é de se questionar a pertinência de se insistir em uma abordagem didática baseada em um desenvolvimento que, se fosse elementar, certamente teria sido descoberto e realizado ainda nos tempos de Newton e Leibniz.

De fato, poucos se questionam sobre a pertinência da sequência de Cauchy-Weierstrass em um ensino menos formal, mais focado nas aplicações e na interdisciplinaridade. Santos (2012), por exemplo, cita diversos livros de Ensino Médio brasileiros que abordam o Cálculo Diferencial – nenhum aborda o Cálculo Integral –, sendo que nenhum deixa de tratar do tema nessa sequência, com alguns casos em que a abordagem do conceito de continuidade é feita de forma superficial, ou mesmo é abandonada. Ainda assim, uma abordagem intuitiva da noção de limite é persistente e inicial em todos os livros. Mesmo na produção acadêmica, que, em tese, questiona o atual estágio do ensino de Cálculo no Brasil, a sequência de Cauchy-Weierstrass permanece, como em Mota (2014), por exemplo.

Ao analisar o conteúdo de Cálculo em livros de Ensino Médio brasileiros, Oliveira (2010) também chega à constatação de que eles não abordam o Cálculo Integral, restringindo-se ao estudo de limites – em geral, de forma intuitiva – e de Cálculo Diferencial, todos com regras de derivação. Alguns deles se servem do Cálculo Diferencial para fazer a análise de pontos críticos de funções, sem, no entanto, contextualizar tal estudo. Entendemos que tal abordagem é insatisfatória por pelo menos duas razões: a ausência do Cálculo Integral, que também tem aplicações imediatas no contexto da formação no Ensino Médio, e a falta de exemplos de resolução de problemas contextualizados, seja em situações do cotidiano, seja relacionados a outras disciplinas do currículo do Ensino Médio.

Uma crítica a essa abordagem é feita de forma mais clara e contundente por Ávila (1991, 2006a), que entende que o ensino de derivadas, por exemplo, só acaba ficando de fora da lista de conteúdos da educação secundária por conta da insistência em precedê-lo por uma pesada abordagem de limites, o que, segundo mostra o autor em seu artigo, é completamente desnecessário. Há ainda mais ironia no mesmo texto de Ávila: segundo ele, os reformadores do ensino da Matemática da década de 1960, no já citado movimento da Matemática Moderna, baseavam suas críticas no fato de que os conteúdos matemáticos abordados na educação básica não iam além do que havia sido desenvolvido até 1700, e, mesmo assim, excluíram o Cálculo, que é todo anterior a 1700. O mesmo Ávila lamenta que, quando o Cálculo aparece no livro de Ensino Médio, preserva a estrutura geral com que é apresentado no Ensino Superior e, com isso, mantém os problemas relacionados à didática específica do Cálculo.

Cabe dizer que, como nota Pereira (2009), o desenvolvimento histórico das concepções centrais do Cálculo se deram em ordem muito distinta daquela dada pela sequência de Cauchy-Weierstrass, o que, para nós, é mais um sinalizador claro da inexigibilidade de uma sequência rígida de apresentação de conteúdos. Historicamente, os limites só foram formalizados depois do Cálculo Integral, o primeiro, e do Cálculo Diferencial. Passaram décadas ou séculos sendo utilizados como ferramentas sem que houvesse um formalismo significativo nas suas definições. Se concebermos a persistência de obstáculos epistemológicos no processo de aprendizagem do Cálculo por parte dos alunos, é mais do que esperado que haja uma dificuldade de compreensão do formalismo que, por tanto tempo, nem mesmo se conhecia.

Segundo Pereira (2009), as definições e redefinições de conceitos como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade utilizando a linguagem dos limites ocorreram na esteira de um movimento de aritmetização da Análise, em busca de mais rigor, o que representaria o nível de exigência mínimo da sociedade matemática até a atualidade. Essa consciência de que a fixação pelo rigor e de que prevalece o significado lógico sobre o sentido dos resultados do

Cálculo não é compartilhada pelos demais especialistas que apenas fazem uso desses saberes como ferramenta deveria permear qualquer projeto de ensino de Cálculo para não matemáticos, não somente este que se apresenta aqui. Até mesmo propostas tidas como inovadoras na academia, como o uso de jogos ou de trabalho cooperativo no ensino de Cálculo, não mostram tal preocupação: mantêm-se meramente na tradição de aplicar regras de derivação e integração, sem contextualização ou mesmo uma abordagem adequada das relações entre o Cálculo e a Geometria.

É pertinente dizer que o rigor de um curso de Análise Matemática acaba se reproduzindo nos cursos de Cálculo no Brasil por razões históricas. Raad (2012) informa que, por conta da influência do professor Omar Catunda e de suas obras, extensamente utilizadas no Brasil, o curso de Análise acabou servindo como espécie de embrião do curso de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior no Brasil. O mesmo autor, baseado em referências da literatura, compara dois livros de Cálculo utilizados na década de 1960 no Brasil, de autorias de Omar Catunda e de William Anthony Granville, visando identificar elementos de cada escola, de cada conjunto de influências teóricas e metodológicas, chegando à conclusão de que o livro de Catunda busca precisar de forma rigorosa a noção de limite, por uma influência europeia, enquanto a obra de Granville trata do Cálculo com base na noção de infinitesimais, como fizeram Newton e Leibniz, nos primórdios. A questão, aqui, é que, de acordo com o mesmo autor, ainda com base em literatura, conclui que o livro de Catunda influenciou gerações de matemáticos, físicos e engenheiros brasileiros graduados em instituições as mais diversas, mas especialmente em dois centros importantíssimos da educação superior brasileira: a USP e a Universidade Federal da Bahia.

Ávila (2002) também faz a sua contribuição para elucidar a questão. Segundo ele, até 1960, o ensino de Cálculo no Brasil não se separava do ensino de Análise. Os próprios livros eram europeus, tendo como base o "Cours d'Analyse" de escolas francesas. Foi a partir dessa década, por influência norte-americana, que o ensino de Cálculo começou a mudar. Separaram-se o Cálculo e a Análise, começando pelo primeiro, e os livros europeus foram sendo abandonados em prol dos norte-americanos. A história de Ávila é compatível com a que encontramos em Teles (1992), para quem o ensino de Cálculo nos Estados Unidos começou a ser reformado na década de 1960, e não na de 1980, com a famosa Conferência de Sloan, na Universidade Tulane.

A conclusão trazida por Raad (2012) não difere em nada daquela apontada por Lima e Silva (2011). Segundo estes últimos autores, que realizaram uma análise histórica do desenvolvimento dos cursos de Análise e de Cálculo na USP, o primeiro curso a se estabelecer foi o primeiro, tendo havido uma transição lenta e repleta de idas e vindas. Duas datas se põem como marcantes: 1964, ano em que o curso de Análise passa a se chamar Cálculo, mas sem, necessariamente uma mudança de foco e abordagem; início dos anos 1990, época em que o curso efetivamente passa a poder ser considerado de Cálculo e não de Análise. Ainda de acordo com os mesmos autores, no curso de graduação em Matemática naquela instituição, a disciplina inicial de Cálculo já fora criada como um curso de pré-Análise, de forma oposta à verificada no desenvolvimento histórico dos dois campos do conhecimento.

Para Raad (2012), há uma cultura de ensino de Cálculo, cuja influência sobre os professores de Cálculo não deve ser desprezada. Os professores da USP na década de 1960, por exemplo, eram fortemente influenciados pelo movimento da Matemática Moderna. Por trás desse movimento, havia um grupo de matemáticos, na maioria franceses, escondidos sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki (SPINA, 2002). Entre eles, estava Jean Dieudonné, com quem certos professores da USP à época haviam trabalhado, de acordo com fontes consultadas por Raad. Esta autora, com base em outros trabalhos da literatura, ainda sugere que o efeito cultural sobre o ensino é persistente: mesmo que o curso de Cálculo seja ministrado para alunos de cursos das mais diversas áreas, inclusive fora das Ciências Exatas, o professor, em graus variados, tende a dar um curso influenciado pela sua formação e pela sua atuação. Matemáticos puros seriam mais formais e demonstrativos; matemáticos aplicados dariam mais ênfase às equações diferenciais e seus usos; educadores matemáticos se preocupariam com o processo de ensino-aprendizagem e seu entorno.

Mas essa constatação não é regra. Raad (2012) realizou uma historiografia do ensino de Cálculo na Universidade Federal de Juiz de Fora nas décadas de 1970 e 1980, constatando que, apesar de o curso de Cálculo naquela instituição ter como principal público-alvo alunos de Engenharia, especialmente de Engenharia Elétrica, e de a formação dos próprios professores ser em Engenharia, e não em Matemática, os cursos de Cálculo não tinham enfoque prático, como era de se esperar. Em lugar disso, havia um rigor de linguagem associado a uma cultura de ensino de Cálculo alicerçado em um curso de Análise Matemática.

Ao longo do nosso levantamento bibliográfico para a construção dos presentes referenciais, uma conclusão, em particular, chama a nossa atenção sobre a possibilidade de limitação do nosso trabalho. Raad (2012) aponta, com base em pesquisa que realizou análise de livros de Cálculo utilizados no Brasil editados ao longo da segunda metade do século XX, que, muitos anos atrás, já havia livros de Cálculo considerados bons: obras que apresentam propostas diferenciadas, nas quais os problemas e as ideias são privilegiados em detrimento da lógica interna e do formalismo. A mesma autora, juntando a literatura com seus levantamentos, conclui que, ainda que os livros de Cálculo realizem uma abordagem adequada, os alunos usam muito pouco os livros em seus estudos. Em outras palavras, a construção de uma nova proposta de ensino de Cálculo não passa, apenas, pela redação de um novo livro, mas também pela conscientização dos professores sobre a impertinência de uma abordagem sistematizada do Cálculo para estudantes que não necessitam do formalismo.

Se voltarmos nosso olhar às produções acadêmicas que defendem o ensino de Cálculo no secundário, limitando-nos, por óbvio, àquelas às quais tivemos acesso ao longo da produção do presente trabalho, veremos que a maioria delas vê o Cálculo no Ensino Médio como propedêutico, preparatório para a formação universitária (SANTOS, 2012; MOTA, 2014; OLIVEIRA, 2010). Em outras palavras, os autores daquelas monografias pensam diferentemente da nossa proposta, que é a de preparar o cidadão para o cotidiano e para o trabalho, ou seja, para o exercício da cidadania. De fato: a motivação que a maioria dos autores vê para querer introduzir o Cálculo no Ensino Médio é a alta taxa de reprovação nas disciplinas de Cálculo na universidade, não havendo, em seus trabalhos, uma motivação intrínseca ao Ensino Médio. Neste sentido, estamos com Ávila (1991, 2006a): há, sim, motivos de sobra para introduzirmos noções de Cálculo na educação secundária, sendo que todos estão nesse mesmo nível educacional.

Além disso, a maioria das propostas de introdução do Cálculo no Ensino Médio vistas na literatura não diferem, na essência, daquela que já está presente nos livros didáticos do Ensino Médio brasileiro: começam por limites e param na derivação. Nós propomos falar não somente de derivação, mas também de integração; além disso, propomos tratar de limites apenas nos devidos contextos da derivação e da integração, e não de forma prévia e destacada. Na proposta que apresentamos aqui, procuramos explorar aspectos relacionados à dificuldade que os alunos do Ensino Superior apresentam no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, especificamente quanto à aplicação dos conhecimentos matemáticos ligados ao Cálculo na resolução de situações-problema práticas de suas áreas.

Praticamente todas as propostas sugerem que se fale de limite, ainda que de forma intuitiva, antes de falar de derivada, bem ao estilo da sequência de Cauchy-Weierstrass. No entanto, quando chegam no capítulo de derivadas, os autores simplesmente se abstêm de falar de infinitesimais, para tratar da interpretação geométrica do Cálculo Diferencial meramente como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em cada ponto, com delta y/delta x não infinitesimais. Em suma, recorre-se a um conceito matemático que não é elementar, como o de limite, para depois desprezá-lo sumariamente nas etapas seguintes da explanação. Não há indício, na literatura, de uma explicação convincente para o que se vê nos livros e nas monografias. Afinal, para que falar de limites?

Há muito tempo, matemáticos envolvidos com educação matemática vislumbram novas abordagens que visem a uma apropriação mais ampla dos conhecimentos matemáticos por uma fração mais expressiva dos estudantes. Christian Felix Klein foi um deles. Segundo Oliveira (2010), além da fusão de ramos aparentemente distintos da Matemática, Klein defendia um pensamento matemático que, ao menos parcialmente, fosse mais intuitivo. Em outras palavras, um pensamento que pudesse aproveitar melhor o que já passa pela cabeça do aluno em termos matemáticos, facilitando a apropriação de novos conhecimentos. Imbuídos dessa percepção, apresentaremos nossa proposta no próximo capítulo.

3.3 Fundamentações adicionais

O Cálculo ainda é visto como conteúdo recomendado, mas desnecessário para a educação secundária. Isto talvez se deva à própria estrutura do secundário brasileiro, comprimido em meros três anos e historicamente destinado a ser propedêutico, e nunca verdadeiramente voltado à formação para o trabalho, nem mesmo nos tempos de profissionalização compulsória. Além disso, não se enxerga o Cálculo como um componente necessário para a formação do cidadão: leituras mais plenas de gráficos em jornais e outras fontes de informação; manipulação mais ampla das grandezas matemáticas envolvidas em um fenômeno; compreensão mais ampla das correlações estabelecidas entre as grandezas que intervêm em um dado fenômeno do dia a dia, entre tantas outras utilidades que se pode encontrar para o Cálculo.

Ávila (1991) traz alguns fatores que justificam a retirada do Cálculo do currículo da educação secundária brasileira na década de 1960. Entre os motivos elencados, encontra-se o movimento da Matemática Moderna, que se caracterizava, entre outras coisas, por uma preocupação com o pensamento rigoroso. Para aquele autor, o estudo detalhado dos números reais exigido por uma abordagem rigorosa do Cálculo se mostrava incompatível com tempo disponível para o estudo desse conteúdo, razão pela qual ele foi descartado. Isto evidencia que o Cálculo só tem uma forma de ser reintroduzido na educação secundária, independentemente da forma: com a valorização da intuição em detrimento do rigor. Em outras palavras, se formalizado, o estudo do Cálculo se torna muito extenso para ser conteúdo do Ensino Médio; a abordagem intuitiva é a única opção.

A ausência, na educação secundária brasileira, dos elementos que alicerçam o Cálculo traz consequências nefastas, que se mostram com clareza na educação superior, por meio das altíssimas taxas de reprovação em disciplinas matemáticas, mas que ficam ocultas ou, ao menos, não adequadamente quantificadas nos egressos do Ensino Médio que não seguem seus estudos no Superior. Lima (2014), com base em autores consultados por ele, afirma que há uma diferença entre o Cálculo e a matemática escolar anterior a ele. O autor entende que o Cálculo compreende ideias adicionais, como taxas de variação, variação instantânea, processos infinitos, entre outras, implicando a introdução de novos símbolos ou o uso de símbolos já conhecidos, mas cujo sentido é alterado ou ampliado, como o símbolo da igualdade. No entanto, a nosso ver, a ruptura entre Ensino Médio e Ensino Superior existe unicamente porque as noções elementares do Cálculo persistem ausentes da educação básica. Aliás, não somente há uma ruptura entre níveis de ensino, como também uma lacuna na formação do Ensino Médio, já que essas noções, como reconhece o mesmo Lima, estarão presentes e serão necessárias na realidade dos egressos do Ensino Médio, mesmo que não ingressem no Ensino Superior.

Como a nossa proposta é a de reintrodução do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, independentemente de o mesmo estar ou não explicitado na vindoura Base Nacional Comum Curricular para a disciplina de Matemática, é importante olharmos os documentos atualmente em vigor em relação ao Ensino Médio, como seus Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM) e suas Orientações Educacionais Complementares aos PCN (PCN+). Vejamos o que diz os PCN+ para as Ciências da Natureza e Matemática.

> “Especialmente em sua versão pré-universitária, o ensino médio tem se caracterizado por uma ênfase na estrita divisão disciplinar do aprendizado.

> Seus objetivos educacionais se expressavam e, usualmente, ainda se expressam em termos de listas de tópicos que a escola média deveria tratar, a partir da premissa de que o domínio de cada disciplina era requisito necessário e suficiente para o prosseguimento dos estudos. Dessa forma, parecia aceitável que só em etapa superior tais conhecimentos disciplinares adquirissem, de fato, amplitude cultural ou sentido prático. Por isso, essa natureza estritamente propedêutica não era contestada ou questionada, mas hoje é inaceitável" (BRASIL, 2002).

Em concordância com esta visão dos PCN+, a proposta que aqui desenvolvemos buscou contemplar, em si, um sentido prático para o aluno, limitando-se a seu nível de ensino de origem, o Ensino Médio. O fato de o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral ser potencialmente propedêutico, uma vez que o estudo de áreas sob curvas e inclinações de retas tangentes em gráficos cartesianos, bem como a relação entre as grandezas envolvidas (posição, velocidade, aceleração) está diretamente associado a conteúdos típicos da educação superior, fez com que o nosso desafio fosse ainda maior.

Os PCN+, visando à organização da aprendizagem, definem três grandes conjuntos de objetivos educacionais, ou grupos de competências, para a área de Ciências da Natureza e Matemática. O primeiro é o de representação e comunicação, que compreende domínios de leitura, interpretação e emprego de linguagens diversas (escrita, simbólica, visual etc.) na expressão de saberes matemáticos e científicos. O segundo é o de investigação e compreensão, que abrange competências de raciocínio indutivo e dedutivo para a interpretação e a utilização adequada dos saberes matemáticos e científicos de relevância para o enfrentamento e a solução de problemas que podem surgir no exercício da cidadania. O último grupo é o da contextualização sociocultural, que, ao reconhecer que o conhecimento disciplinar é recurso necessário, mas não suficiente, para um desígnio humano, inclui as competências de uso dos saberes matemáticos e científicos na análise de ideias e de problemas do mundo, em um contexto maior, da vida humana. Esta última competência é a mais transdisciplinar, desde a sua concepção. Retornaremos a essas e a outras passagens dos PCNEM e dos PCN+ no capítulo a seguir, em que estruturamos, de fato, a nossa proposta.

4 DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA

Existem diversas propostas de introdução do Cálculo no Ensino Médio, como as de Ávila (2006a) ou de Oliveira (2010). Fosse meramente esta a nossa proposta, a de usar o espaço já destinado ao estudo de funções ou de Geometria no Ensino Médio para introduzir disciplinarmente e formalmente o Cálculo, ainda que não seja uma abordagem corrente, ela já nasceria envelhecida. Nossa proposta se baseia na percepção da necessidade de um ensino interdisciplinar, que reforce o discurso escolar, e de um ensino contextualizado, preferencialmente em aplicações do cotidiano ou da área em que o Cálculo será aplicado. Afinal, a esmagadora maioria dos estudantes de Cálculo o veem como meio, não como fim. Eles têm o Cálculo como ferramenta, e não como objeto de estudo.

Além disso, mesmo no Brasil, tem sido observada a introdução, nos currículos de cursos de graduação, de disciplinas intituladas “Cálculo Aplicado a X”, onde X é o nome do curso ou da área de estudos, disciplinas estas ministradas por especialistas da área X, e não por matemáticos. Isto tem sido feito como uma resposta ao fato de que os departamentos de Matemática das universidades brasileiras não vêm dando formação adequada em Cálculo, insistindo nas formalizações, insistindo em se limitar às enormes listas de aplicação de regras de derivação, integração e estudos de funções, deixando de lado o contexto e a aplicação. É preciso que o ensino de Cálculo seja útil aos estudantes. A retomada das disciplinas de Cálculo pelos departamentos de Matemática mostraria que os matemáticos não estão alheios às necessidades práticas dos estudantes, reconhecendo e respeitando o uso predominante do Cálculo como ferramenta.

Não pretendemos desprezar a importância de se aprender a utilização de regras de determinação de derivadas e primitivas. Só é necessário ressaltar que isto se encontra muito longe de bastar. Por sinal, não somente no ensino de Cálculo, mas também na educação básica. Como reconhecem os PCN+,

> “(...) não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho” (BRASIL, 2002, p.113).

Spina (2002) é precisa ao citar concepções de Régine Douady, educadora matemática francesa, acerca do tema. De acordo com Spina, para Douady, os conceitos matemáticos são, primeiramente, uma ferramenta para a resolução de determinados problemas, devidamente contextualizados. Uma vez apropriados pelos alunos como ferramenta, aí, sim, os conceitos podem ser explicados pelo professor, permitindo-se que sejam separados dos problemas em que primeiro se apresentaram aos alunos e, assim, possam ser aplicados em outras situações, adquirindo aplicabilidade e versatilidade.

A interdisciplinaridade nos guiou nessa trajetória de construção de uma educação inovadora. Como já se mencionou, essa opção foi feita ao se constatar que as disciplinas escolares, bem como os docentes por elas responsáveis, vêm se apresentando de forma estanque e isolada entre si. Apenas os estudantes têm contato com todos os conhecimentos; os professores, não. Não há, portanto, um reforço positivo da importância do conhecimento escolar: cada professor, isoladamente, tenta convencer o alunado da importância daquilo que ele próprio fala, mas não há reforço por parte dos colegas docentes. Se, digamos, o professor de Geografia despreza os gráficos na sua explanação, como o professor de Matemática conseguiria convencer os alunos sobre a importância de dominar os saberes e as ferramentas gráficas? Daí surge a demanda por mais diálogo e interdisciplinaridade.

Uma vez que não é objetivo deste limitado estudo a construção de um novo material, mas apenas mostrar as suas possíveis potencialidades, além das referências da literatura, devidamente interpretadas, fizemos uso de um livro de Cálculo cuja abordagem é contextualizada para ilustrarmos cenários em que se poderá desenvolver o estudo de noções e princípios do Cálculo: "Matemáticas aplicadas a la administración y los negocios" (HOFFMANN et al., 2014). Outra referência que nos guiou foi a de Brito (2013), que traz exemplos de aplicação do Cálculo em diversas áreas do conhecimento.

4.1 Prolegômenos de funções e geometria

4.1.1 Justificando a proposta

Como introdução à nossa proposta, mostraremos algumas reflexões sobre o ensino de funções presentes nos PCN+.

> "O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a

> ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.
>
> Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares" (BRASIL, 2002, p.121).

Esta percepção sobre a falta de objetividade no ensino de funções é compartilhada por Ávila (1991). Para o autor, é desnecessário e até contraproducente insistir em introduzir noções novas e trabalhá-las em exercícios descontextualizados, como determinar domínio, contradomínio e inversa, compor funções, entre outras tarefas desestimulantes. Ávila ainda critica a insistência de se tratar função como caso particular de uma relação, e não de forma mais direta e intuitiva, quando, de funções, só serão exigidos saberes de tipos simples de funções: polinomiais, racionais elementares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

A solução compartilhada por Ávila (1991, 1994) e pelos PCN+ (BRASIL, 2002) é similar: o que não precisa ser trabalhado, não deve ser trabalhado. Nas palavras de Ávila, é "antipedagógico" apresentar conceitos que não estejam sendo solicitados no desenvolvimento da explanação. Acumular informações e conceitos em uma sequência didática por mero diletantismo do professor é uma ofensa grave à tentativa dos alunos de aprender algo útil e, também, um desvio indevido dos objetivos do ensino de Matemática para o nível secundário.

Os PCN+ seguem tratando de funções, em uma maneira que tem diversos pontos de aproximação com as ideias dos que defendem a modelagem matemática no ensino e a contextualização dos conteúdos.

> "Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas" (BRASIL, 2002, p.121).

Mais do que afinados com visões contemporâneas da educação matemática, os PCN+ são coerentes com o desenvolvimento histórico do conhecimento sobre funções. De acordo com Ávila (1991), os matemáticos só chegaram ao conceito de função depois de um longo percurso de formulação e de tratamento de problemas aplicados. Como diz o autor, foi ao longo de uma lenta maturação, de um lento acúmulo de conhecimentos práticos sobre funções, que se reconheceu a importância do conceito e se buscou formalizá-lo.

Mas o estudo de funções, quando falamos de Cálculo Diferencial e Integral, não se dissocia de um estudo de Geometria. Com base na análise de Oliveira (2010), entendemos ser positiva a abordagem de interpretação geométrica do Cálculo Diferencial, por meio do estudo da inclinação da reta tangente ao gráfico em um ponto. Tal abordagem tem o potencial de integrar, no mínimo, duas áreas distintas da Matemática: o estudo de funções, em Álgebra, com a Geometria Plana e Analítica. A propósito, essa abordagem é defendida por Ávila (1991) e utilizada por ele (1994, 2006a). Assim, o Cálculo Diferencial é apresentado no contexto de um estudo sobre funções, fazendo uso de alguns elementos bem específicos da Geometria Plana, como o conceito de reta tangente, e da Geometria Analítica, como um estudo introdutório da equação da reta. Neste ponto, não se prolonga o estudo de Geometria para além do necessário, sob pena de perdermos o foco e, também, o interesse do aluno.

A esse propósito, cabe citar novamente Ávila (1991), que entende que o movimento da Matemática Moderna prejudicou o ensino de Geometria. Como a Geometria, ao ser apresentada já a partir de uma formalização rigorosa, acaba ficando difícil, o que desmotivaria os alunos. Concordamos com o autor quando ele diz que a Geometria deve ser abordada aos poucos, à medida que surgirem os contextos em que ela é aplicada. Ao se introduzir noções de Cálculo na educação básica, sobrevêm certa necessidade de Geometria, que servem para introduzir alguns de seus elementos, como intersecções e posições relativas de retas e curvas, bem como equações de retas. Sem dúvida, uma abordagem mais orgânica e integrada do que a axiomática.

4.1.2 Apresentando funções de primeiro grau

Assim sendo, propomos uma abordagem baseada em Ávila (1994, 2006a), mas revisitada, acrescida de contextualização. No início, apresentamos uma situação geradora que atuaria como contexto persistente, permeando todo o estudo introdutório de funções de primeiro grau. Uma situação que nos serve de exemplo é a de uma padaria que possui uma única máquina de fazer pão, com capacidade máxima de produção de 300 pães por hora. Trabalharíamos intuitivamente o conceito de função linear – usando o exemplo prático de produção de pães em função do tempo – para posteriormente formalizá-lo em notação matemática:

$$P = 300 \cdot T$$

Introduziríamos o conceito de taxa – neste caso, taxa de produção de pães, de 300 pães por hora – e o estenderíamos à formalização de uma taxa de variação, como uma razão entre a variação da variável dependente (neste exemplo, número de pães produzidos) e a variação da variável independente (no exemplo, tempo em horas). Destacaríamos, por fim, o fato de que essa taxa de variação está claramente presente na expressão da função matemática, como fator que multiplica a variável independente.

Em uma segunda etapa, seguindo a mesma situação geradora, suporíamos que já há uma quantidade fixa e inicial de pães já pronta, por ter sido fornecida por outra padaria, de, digamos, 500 pães. Com isso, estaríamos apresentando uma função afim:

$$P = 300 \cdot T + 500$$

Após a formalização matemática, buscaríamos comparar as duas funções apresentadas, enfatizando a manutenção do coeficiente do termo linear e, portanto, a manutenção da taxa de variação nas duas situações. Com isso, mostraríamos que a taxa de variação é intrínseca da máquina da padaria original e, portanto, independente de outras alterações, como foi o caso da mudança do termo independente. A seguir, recorreríamos à apresentação dessas situações em gráficos cartesianos, mostrando a relação entre as leis das funções trabalhadas e a equação da reta.

Na prática, vemos que os alunos apresentam grandes dificuldades no trabalho com gráficos (NASS, 2008). Entre elas, encontram-se, por exemplo, a incapacidade de localizarem um ponto no gráfico, por não entenderem como um único ponto precisa de duas coordenadas para ser descrito. Não é incomum que marquem dois pontos, um sobre o eixo das abscissas e outro sobre o eixo das ordenadas, cada qual correspondendo a uma coordenada do ponto original. Por exemplo, quando se solicita a marcação do ponto (2,600) no plano cartesiano, o que se vê como resposta não tão infrequente é a marcação de dois pontos: (2,0) e (0,600).

Outra dificuldade é compreender a infinitude da reta. Ao receberem a informação de que os pontos (1,300) e (2,600) pertencem à função de primeiro grau e, portanto, à reta que a representa, mesmo localizando os pontos com sucesso. Os alunos traçam somente o segmento de reta com tais pontos como extremidades e, assim, frequentemente mostram-se incapazes de afirmar com segurança que o ponto (0,0) também pertence à reta e, por extensão, à função.

Portanto, a passagem de uma situação concreta, baseada na Aritmética e, aos poucos, na Álgebra, para uma abstração ainda maior, que é o plano cartesiano, requer bastante tempo. Entre os aspectos a serem explorados nesses trabalhos que buscam ensinar os alunos a traçar retas a partir de funções e vice-versa, está a ênfase no coeficiente do termo linear, ou seja, o coeficiente angular. A esta altura, espera-se que os alunos já tenham percebido seu papel central: não somente foi mantido nas duas funções do exemplo inicial, como representa a capacidade máxima da máquina para fazer pães em função do tempo.

Em continuação à explanação, podemos destacar aos alunos que é possível termos máquinas mais rápidas ou mais lentas que aquela da padaria em questão – o que nos levaria a situações em que teríamos outros coeficientes angulares nas funções que representassem a capacidade máxima das máquinas panificadoras. Por exemplo, poderíamos ter uma padaria concorrente cuja máquina de produção de pães tivesse capacidade máxima de 400 pães por hora. Inserindo no mesmo plano cartesiano as duas retas que representam cada uma das máquinas panificadoras das padarias concorrentes, seria possível perceber visualmente a diferença de inclinação das retas. A função referente à segunda reta seria a seguinte:

$$P = 400 \cdot T$$

4.1.3 Avançando em funções de primeiro grau

Também poderíamos mostrar ser possível que a máquina da primeira padaria não operasse todo o tempo à sua capacidade máxima – e, nesta última situação, apresentaríamos um gráfico que é muito comum no cotidiano, em jornais, na televisão etc., mas raramente tratado no Ensino Médio, que é aquele formado por segmentos de reta com inclinações variadas. Um exemplo seria o que está no Gráfico 1 abaixo. Nas duas primeiras horas, a padaria produz à taxa de 200 pães por hora. Fica uma hora com a máquina desligada, depois religa à capacidade máxima por mais uma hora, baixando a taxa de produção nas duas horas seguintes para 100 pães por hora.

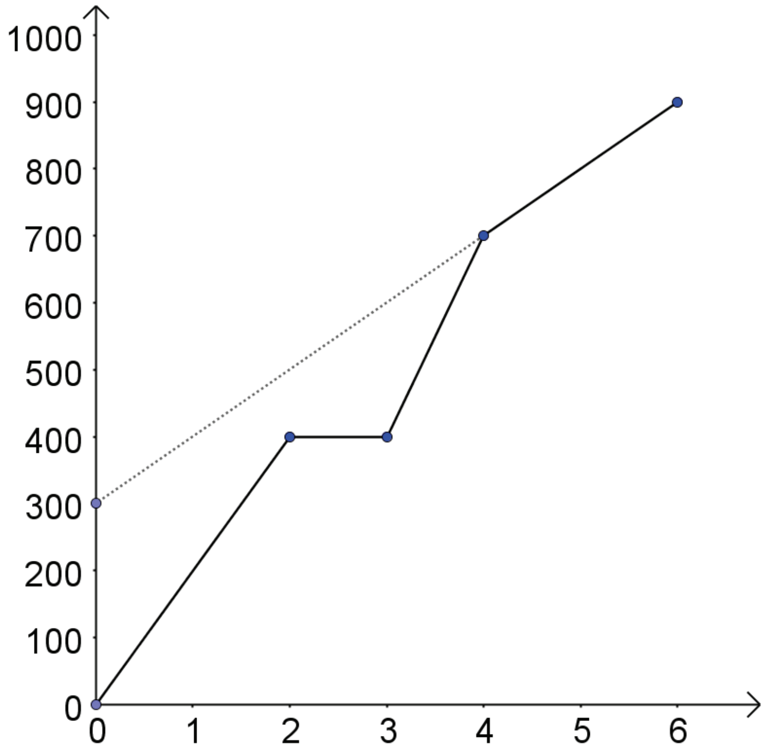

Gráfico 1 – Número de pães fabricados em função do tempo em dada situação (elaborado pelo autor)

Ótima oportunidade de introduzir a noção de funções representadas por mais de uma lei, mostrando que a lei associada depende do intervalo do domínio em que é válida. É preciso, no entanto, explorar alguns rudimentos de Geometria Analítica, permitindo que se determine a equação da reta dados dois pontos. No exemplo dado, temos os pontos (4,700) e (6,900). A equação da reta suporte do último segmento de reta é o seguinte:

$$P = 100 \cdot T + 300$$

Nesse caso, não somente a alteração do coeficiente angular, a essa altura esperado, merece ser destacado, mas principal e especialmente a alteração da função, como um todo, percebida pelo surgimento de um termo independente. Merece discussão com os alunos o fato de que essa lei tem validade reduzida ao intervalo do domínio [4,6], não fazendo sentido aplicar a ela valores fora desse intervalo.

Somente depois de atuarmos com eficácia apresentando a situação prática e fazendo uma abordagem matemática preliminar, com ênfase no uso de gráficos para representar as situações, apresentaríamos outras discussões que estenderiam os conceitos abordados até aqui a outros contextos. Uma delas seria apresentar o contraste entre grandezas discretas e grandezas contínuas. Isto poderia ser feito no mesmo contexto da panificação, a título de exemplo, mudando-se a unidade de tempo para minuto ou segundo, para se evidenciar o fato de que a grandeza é, de fato, discreta, e, depois, generalizado para outros contextos.

Outra ênfase, vital para que se possa mostrar noções de Cálculo Diferencial, é a associação do coeficiente angular associado a uma função de primeiro grau com qualquer razão delta y por delta x que se queira tomar para determiná-la. Para isto, pode-se pegar, de forma específica e aplicada, qualquer gráfico de função linear ou afim e se calcular, para diferentes pares de pontos, o coeficiente angular, mostrando-se, assim, que o mesmo não varia e, portanto, está geometricamente associado à inclinação da reta, como já se buscou evidenciar anteriormente. Posteriormente, este resultado merece ser formalizado de alguma forma. Sugerimos que se tome a forma geral da função de primeiro grau:

$$y = a \cdot x + b$$

Depois, que se tomem dois pontos genéricos e distintos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B), com valores distintos de abscissa, pelos quais passa uma reta. Inserindo-se as coordenadas dos pontos A e B na equação acima, obteremos um sistema de duas equações e duas variáveis, como abaixo:

$$\begin{cases} y_A = a \cdot x_A + b \\ y_B = a \cdot x_B + b \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre as duas equações e isolando-se a, teremos:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Podemos avançar também na Geometria, traçando o triângulo retângulo que tem como hipotenusa o segmento de reta AB. Podemos, com isso, explorar a relação entre o resultado acima e a tangente do ângulo entre a hipotenusa do triângulo e seu cateto paralelo ao eixo Ox, levando os alunos a associar os dois resultados, tendo o primeiro vindo da Álgebra e o segundo, da Geometria.

Por fim, é preciso destacar que, em problemas aplicados, também a unidade do coeficiente angular é a unidade obtida pela razão entre a grandeza da variável dependente e a grandeza da variável independente. Volta-se ao exemplo da panificação: em um gráfico de produção de pães em função do tempo, o coeficiente angular é expresso na unidade pães por hora, representando, assim, a velocidade ou a capacidade máxima da máquina panificadora.

Esta última conclusão é particularmente importante porque está diretamente vinculada à possibilidade de obtenção de informações adicionais de um gráfico no contexto das noções de Cálculo Diferencial aplicado a situações concretas. Pode ser, inclusive, o momento de se iniciar a interdisciplinaridade escolar. Por exemplo, com a Cinemática, conteúdo curricular da disciplina de Física. Pode-se mostrar que, em um gráfico retilíneo da posição de um corpo em função do tempo, o coeficiente angular da reta tem unidade de distância por tempo, como metros por segundo ou quilômetros por hora, representando, portanto, a velocidade (constante, neste caso) do corpo. Ou seja, de um gráfico que representa posição em função do tempo, podemos extrair outra informação adicional: a velocidade. Vale, ainda, enfatizar que, nesse contexto, a velocidade não é grandeza aleatória: ela é a grandeza cuja dimensão é dada pela razão entre as duas grandezas plotadas, respectivamente, nos eixos Oy e Ox.

4.1.4 Apresentando funções de segundo grau

Aderindo aos fortes argumentos de Ávila (1994), sugerimos que sejam trabalhadas, com o mesmo grau de detalhamento, as funções de segundo grau. Sua importância é grande na solução de um grande número de problemas, mas elas são relevantes porque, em contraste com a função de primeiro grau, têm pontos de máximo ou de mínimo, não são retilíneas – e isso permitirá uma primeira aproximação à abertura de novas fronteiras realizada pelo Cálculo Diferencial, com taxas de variação variáveis, algo que não se consegue alcançar se o estudo de funções for limitado às funções de primeiro grau –, têm concavidades, não são crescentes ou decrescentes em todo o intervalo de seu domínio real e, por fim, têm funções derivadas fáceis de serem trabalhadas, porque já estudadas pelos alunos na etapa anterior.

Este tipo de abordagem embute algumas vantagens bastante visíveis. Consideramos que a principal é a de mostrar que a obtenção de raízes de funções de segundo grau não constitui a aplicação mais importante relacionada ao estudo dessa categoria de funções. Não se cria, portanto, a frustração no aluno ao perceber que, fora da escola, muito raramente utilizará a comumente chamada "fórmula de Bháskara". Muito pelo contrário: dada a ênfase no gráfico, na existência de intervalos crescentes e decrescentes, na existência de concavidades para baixo ou para cima, na existência de pontos de máximo ou mínimo locais, os alunos terão a oportunidade constante de fazer uso do que aprenderam no estudo de funções de segundo grau em situações reais, ainda que, não necessariamente, limitadas a situações modeláveis por funções desse tipo.

Aqui, no estudo de funções de segundo grau, podemos começar com um contexto de Cinemática. Podemos tratar da posição de um corpo lançado verticalmente para cima e, portanto, submetido à aceleração gravitacional constante. Um exemplo de função que pode ser utilizada é o que segue:

$$H = 30 \cdot T - 5 \cdot T^2$$

Trata-se de uma função simples de ser trabalhada, com termo independente nulo. Seu maximante é inteiro, bem como seu valor máximo. Pode-se construir uma tabela relacionando valores de H em função de valores de T, com este último variando entre 0 e 6. Pode-se traçar um esboço gráfico a partir dos pontos definidos na tabela gerada, que venha a sugerir o formato da parábola como padrão gráfico associado à função de segundo grau.

Note-se que, somente se limitando a esse procedimento, já é possível mostrar a existência de um valor máximo na função, de duas raízes, de um gráfico não retilíneo, cuja inclinação em relação à horizontal varia continuamente. A partir desse estudo, vale a pena graficar outras funções similares. Em uma, altera-se o coeficiente do termo linear para 40. Em outra, altera-se o coeficiente do termo quadrático para 10. Em outras, alteram-se os sinais de cada um dos termos da fórmula da função. Com isso, torna-se possível perceber que, ao preservar a forma de parábola, nem sempre a função de segundo grau tem raízes; que a concavidade está relacionada ao sinal do termo quadrático; que a abertura dessa concavidade está relacionada ao módulo do coeficiente desse mesmo termo, entre outras observações pertinentes. A introdução do termo independente e a determinação de raízes por meio de fórmulas pode ser feita em uma segunda etapa, mas sempre com o apoio de contextualizações, as quais, a essa altura do desenvolvimento do tema, não deveriam se limitar à Cinemática.

Entendemos que esta abordagem preliminar de funções (quase se restringindo às funções de primeiro e de segundo graus, estendendo-se de forma pontual apenas para apresentar conceitos como pontos de inflexão, por exemplo) e de Geometria Analítica (não indo muito além da apresentação do plano cartesiano, da localização de pontos e retas e da obtenção da equação da reta), por mais que possa parecer diminuta e limitada, trabalha com as cinco dualidades fundamentais do Cálculo e de seu ensino, tais como identificadas por Rezende (2003): discreto ante contínuo; variabilidade ante permanência; finito ante infinito; local ante global; sistematização ante construção. Em outras palavras, a proposta apresentada aqui atende ao requisito de trabalhar com os alunos todas as dimensões e conceituações necessárias para um domínio adequado do Cálculo Diferencial e Integral.

4.2 Cálculo Diferencial

4.2.1 Justificando a proposta

Uma das reações mais comuns de matemáticos e, especialmente, professores de Matemática à ideia de se introduzir o Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio é a de responder ser impossível sua implementação, já que não se consegue sequer cobrir o conteúdo já previsto em sua plenitude. Como dizia Ávila (1991), a ideia de que os programas de Matemática são extensos demais não é precisa; o correto seria dizer que estão mal estruturados. Mal estruturados do ponto de vista didático, é o que se depreende do que já se relatou nesta monografia. Já se tratou, por exemplo, sobre o mal que o movimento da Matemática Moderna causou à educação matemática, iniciando todo e qualquer estudo com definições e formalismos, e deixando as aplicações em segundo plano, quando não para fora das sequências didáticas.

Mas a ideia que apresentamos aqui, partilhada por muitos educadores matemáticos e outros pesquisadores na área, entre os quais o próprio Ávila (1991), é a de que o Cálculo deve ser apresentado de forma orgânica junto com o estudo de funções. Para esse autor, descartar o Cálculo no Ensino Médio é ruim, porque deixa de ser apresentada uma componente significativa e relevante da Matemática para a formação do aluno. E, para conseguir espaço para a introdução do Cálculo nesse nível de ensino, bastaria fazermos com as definições de domínio, contradomínio, função composta, inversa, par, ímpar, injetiva, sobrejetiva etc. o mesmo que a Matemática Moderna fez com a abordagem intuitiva: colocá-las em último plano. Spina (2002) é uma das especialistas em educação matemática que também está em grande parte alinhada com a nossa proposta e a defende de forma adequada. Diz a autora:

> [N]ão temos a intenção de sugerir um novo currículo para estas séries [as três séries do Ensino Médio] com a inclusão da disciplina CDI [Cálculo Diferencial e Integral], mas tão somente o objetivo de usar as ideias do CDI como elemento facilitador da compreensão e unificador dos atuais conteúdos desenvolvidos nestas séries. [...] [N]ossa proposta não consiste em "mudar" o currículo ora vigente no Ensino médio, retirando alguns pontos para contemplar outros, muito menos para reintroduzir o Cálculo para ser trabalhado da maneira tradicional (como constatamos nas obras consultadas). [...] [P]ropomo-nos a trabalhar os mesmos conteúdos vigentes, porém de uma maneira diferente, dentro do contexto do CDI e utilizando uma estratégia de ensino interdisciplinar – a Modelagem Matemática. Neste sentido, o Cálculo não surge aqui como uma "nova disciplina", mas como

> ferramenta auxiliar na resolução de problemas diversos, conferindo-lhes significado [...] (SPINA, 2002, p.24-25).

A ideia de introduzir noções de Cálculo no Ensino Médio como forma de integrar conteúdos que já fazem parte do currículo desse nível de ensino não surgiu com Ávila, nem mesmo se nos limitarmos ao desenvolvimento dessa ideia no Brasil. Spina (2002) cita autores que apontam para Felix Klein, dizendo que este acreditava que os professores do secundário da época se entusiasmariam com a ideia de apresentar elementos de Cálculo aos alunos à medida que fossem trabalhando com funções. Como sabemos, isso acabou não ocorrendo. Ainda assim, estamos ao lado de Klein, de Ávila e de Spina nesse aspecto: noções elementares de Cálculo no Ensino Médio possibilitam um avanço tão grande no conhecimento matemático e nas suas possibilidades de aplicação que é difícil abster-se de fazer a defesa de que tais noções sejam inseridas de maneira adequada nesse nível de ensino. Como pergunta Spina (2002, p.57): "A diversidade de aplicações do Cálculo não justificaria plenamente sua popularização, por meio da inclusão de seus conceitos no ensino médio?" Acreditamos que sim. E, exatamente por isso, nossa proposta é estritamente prática.

A principal aplicação do Cálculo Diferencial é a determinação de taxas de variação de uma grandeza em função de outra. Um gráfico cartesiano da posição de um corpo em função do tempo expressará, por meio da determinação de inclinações de retas tangentes à curva, a velocidade do corpo. Um gráfico da variação da carga elétrica em função do tempo indicará a corrente elétrica. Um gráfico da variação da energia em função do tempo mostrará a potência. Um gráfico da variação de preços, ou, melhor, do logaritmo dos preços, em função do tempo indicará a inflação ou a rentabilidade de um investimento. Ora, são gráficos, todos eles, abordados no Ensino Médio ou fazem parte da formação necessária do cidadão. Portanto, fornecer elementos matemáticos que permitam uma compreensão mais plena destes gráficos e das situações reais que eles representam é algo que precisa ser feito na educação obrigatória, que termina no Ensino Médio. Deixar de fora deste nível de ensino um tratamento destes temas, ainda que de forma elementar, é sonegar saber de importância inquestionável àqueles tantos alunos que não ingressarão no Ensino Superior, bem como àqueles que não cursarão disciplinas de Matemática ou de Cálculo nesse nível de ensino.

Realizada a contextualização de nossa proposta, passaremos, agora, a apresentá-la. O ponto de partida é o fim da abordagem de funções e Geometria, apresentada na seção anterior: a função de segundo grau. O primeiro objetivo é a abordagem de noções de Cálculo Diferencial. Propomos que o Cálculo Integral seja abordado posteriormente. O que, em nossa proposta, motiva o início dos estudos das noções do Cálculo Diferencial é evidenciar aos alunos que limitarmo-nos a dizer que, em certo intervalo do domínio, a função de segundo grau é crescente, e que, em outro intervalo, ela é decrescente, é insuficiente para mostrar as nuances da variação de uma grandeza em função da outra. Ou seja, há mais o que explorar. Não somente podemos ver que y cresce quando x cresce, mas também podemos ver que o tanto que y cresce quando x cresce é algo que muda. É algo que muda e, no gráfico da função de segundo grau, está relacionado com a inclinação do gráfico. Já mencionamos tal abordagem na seção anterior, mas entendemos pertinente o reforço, já que esta percepção intuitiva é central para a compreensão das aplicações potenciais do Cálculo Diferencial.

Surgirá, portanto, naturalmente, uma demanda por um método que nos permita determinar essa inclinação de forma objetiva. Sim, porque, na função de primeiro grau, a inclinação era constante, podendo ser determinada pela razão delta y por delta x em qualquer intervalo pertencente ao domínio da função. Agora, a inclinação varia. Ainda que, de forma puramente preliminar e motivadora, optemos por escolher dois pontos pertencentes à curva e que estejam próximos do ponto onde se quer determinar a inclinação da curva, mais adiante será preciso mostrar, também, a limitação desse método de traçar secantes à curva. Mais à frente, pode-se mostrar que, embora traçar uma reta que contenha esses dois pontos escolhidos ao acaso e determinar seu coeficiente angular nos dá um resultado razoável, ele, em geral, não é preciso, tampouco satisfatório, exceto se a curva for uma parábola. Neste último caso, coincidirão o coeficiente angular da reta tangente com os coeficientes angulares de quaisquer retas secantes à parábola, desde que a reta a intercepte em pontos de abscissas equidistantes do ponto em que buscamos a “inclinação” da curva, já que a derivada de uma função de segundo grau é uma função de primeiro grau.

4.2.2 Explorando contextos com funções de primeiro e segundo graus

A partir deste ponto, concordando com Ávila (2006b), entendemos que o melhor contexto preliminar que pode haver é o da Cinemática. A ideia de velocidade instantânea é familiar e cotidiana demais para ser tratada como se faz em um Ensino Médio que evita o Cálculo, que precisa recorrer a malabarismos como a memorização de diversas equações cinemáticas para resolver uns poucos casos particulares de movimento, como o uniforme e o uniformemente variado. Somente com a apresentação de noções de Cálculo Diferencial e Integral é possível ir além disso, abandonando a memorização em prol de um entendimento amplo que pode ser aplicado a qualquer tipo de movimento. Podemos, então, retomar a função de segundo grau motivadora trabalhada na seção anterior:

$$H = 30 \cdot T - 5 \cdot T^2$$

Com essa função, é possível determinar a altura em que se encontra o corpo a qualquer tempo. Mas esta não é a única informação possível de se obter com essa função. Como já discutimos, é possível determinar, a partir do gráfico, a taxa de variação da altura em função do tempo. Esta taxa de variação representa uma terceira grandeza: a velocidade. Ou seja, conclui-se que, a partir do gráfico de altura do corpo em função do tempo, pode-se determinar também a velocidade do corpo a qualquer instante de tempo, bastando, para isso, determinar a inclinação da parábola em cada ponto.

Mas, como fazê-lo se a parábola, afinal, não é uma reta? Nossa proposta é mostrar que, quanto mais "damos zoom" no ponto em relação ao qual queremos saber a inclinação da curva, mais essa curva se parecerá com uma reta. O mesmo pode ser feito por aproximações secantes sucessivas, cada vez mais próximas do ponto em relação ao qual se quer determinar a reta tangente e, mostrando, assim, que, quanto menor o intervalo, mais a curva e a reta secante se aproximam de coincidir com a reta tangente. Portanto, a Geometria voltará a ser abordada neste ponto. Deve ser enfatizada a diferença entre a reta tangente e a reta secante a uma curva, mostrando que o processo de aproximações secantes sucessivas nos fornece cada vez melhores aproximações, mas, ainda assim, diferentes da reta tangente à curva no ponto específico. Retas diferentes, sim, mas que, no caso da parábola, como já dissemos, terão coeficientes angulares coincidentes.

Usemos a função de segundo grau e seu gráfico, que já havia sido elaborado anteriormente. Podemos determinar o coeficiente angular da reta suporte do segmento cujas extremidades são dois pontos pertencentes à função, de abscissas equidistantes de 2: (1,25) e (3,45). Temos, aí, o valor:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{45 - 25}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Agora, determinemos o coeficiente angular da reta suporte do segmento cujas extremidades são dois outros pontos pertencentes à função, também de abscissas equidistantes de 2, mas mais próximos deste valor: (1,5, 33,75) e (2,5, 43,75). Temos, agora, o valor:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{43{,}75 - 33{,}75}{2{,}5 - 1{,}5} = \frac{10}{1} = 10$$

Ao traçarmos essas retas secantes com diferenças entre abscissas dos pontos de interseção cada vez menores, vemos que, progressivamente, elas se aproximam da reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 2, como se pode ver pelo Gráfico 2 abaixo, construído com auxílio de computador, mas que poderia ter sido feito em papel milimetrado, para se facilitar atingir os objetivos educacionais.

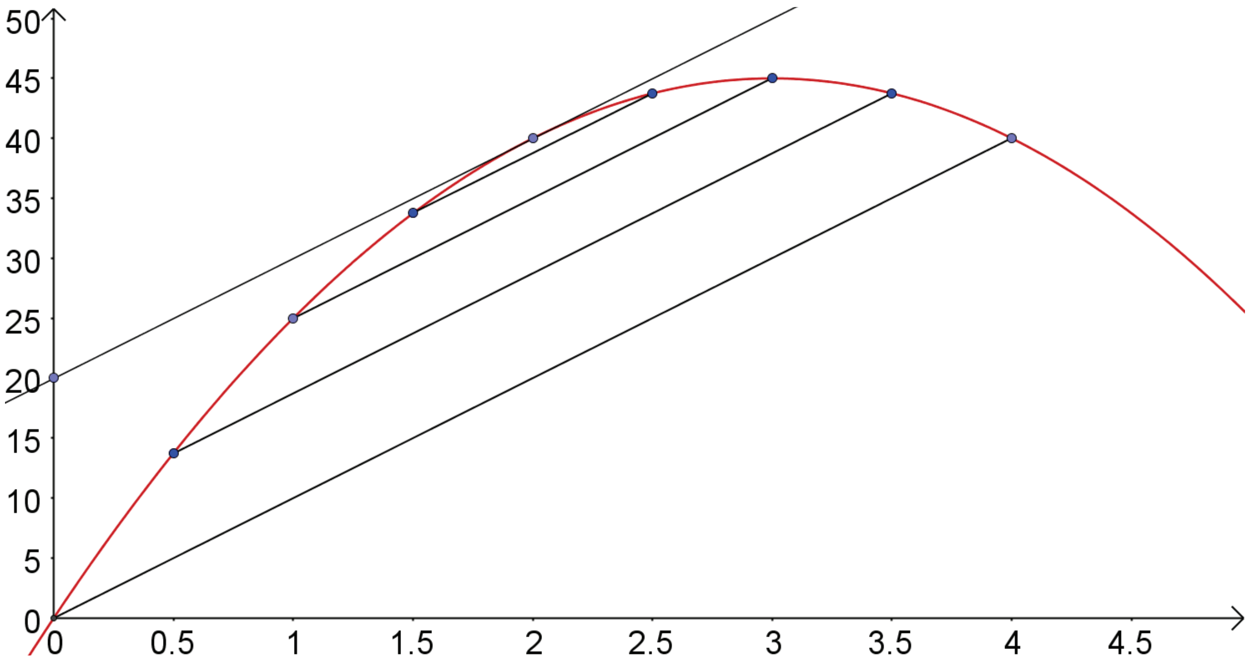

Gráfico 2 – Altura de um corpo em função do tempo em dada situação (elaborado pelo autor)

Portanto, é um bom momento para se fazer uma introdução, ainda que puramente intuitiva, ao conceito de infinitesimal. Se tivermos ferramentas computacionais na retaguarda, como softwares didáticos de Matemática ou softwares para a elaboração de gráficos de funções, tanto melhor. Não se faz necessário ir além da interpretação do infinitesimal como sendo o infinitamente pequeno. O que é relevante, aqui, é mostrar que, quando diminuímos a distância entre os pontos escolhidos, chegamos mais perto de nosso objetivo, que é obter a reta tangente ao gráfico, para determinar seu coeficiente angular e, portanto, de forma indireta, determinar a "inclinação" da curva naquele ponto. Assim, poderíamos pensar, de forma um tanto abstrata, na redução da distância ao infinitamente pequeno, ao infinitesimal. Em tal situação, a reta secante seria coincidente à tangente ao gráfico no ponto.

A esta altura, já podemos deixar de traçar retas secantes para traçar a reta tangente ao gráfico no ponto (2,40), pelo menos até os pontos em que esta cruza os eixos coordenados. Veremos que esta reta passa pelos pontos (0,20) e (–2,0). Estes dois pontos podem ser usados para a determinação do coeficiente angular da respectiva reta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{20 - 0}{0 - (-2)} = \frac{20}{2} = 10$$

Fecha-se a explanação voltando-se ao contexto. No gráfico retilíneo da posição de um corpo em função do tempo, podíamos determinar a velocidade constante desse corpo. Fizemos isso, de certa forma, com a máquina de fazer pão, pois a taxa de produção de pães é uma espécie de "velocidade". Agora, trabalhando não mais com uma função cujo gráfico é retilíneo, traçamos retas secante a essa curva, podendo determinar uma velocidade média em um dado intervalo de tempo. Por fim, com a reta tangente, "secante em um intervalo infinitesimal", conseguimos determinar a velocidade média em um infinitesimal intervalo de tempo, ou seja, a velocidade instantânea.

A pergunta que poderá ser feita pelos alunos é a seguinte: se o coeficiente angular da reta tangente é igual aos coeficientes angulares das retas secantes traçadas anteriormente, qual é a diferença entre traçar secantes e traçar a tangente? Não seria mais fácil traçar sempre a tangente? A resposta, por enquanto, deve esperar. Não tardará o trabalho com outros tipos de funções, como a exponencial, em que os coeficientes angulares das secantes variam, bem como são diferentes do coeficiente angular que nos interessará, que é o da reta tangente. O resultado com as parábolas seria esperado pelos alunos que estudaram Cinemática anteriormente com um pouco mais de profundidade. Estes sabem que a velocidade média de um corpo em movimento uniformemente variado em dado intervalo de tempo é dada pela média aritmética das velocidades instantâneas do início e do fim do intervalo, mas que este resultado é limitado a esse tipo de movimento.

Ainda que concordemos com Ávila (2006b) quanto à interdisciplinaridade entre Álgebra e Cinemática, que permite a introdução de noções de Cálculo Diferencial ainda no primeiro ano do Ensino Médio, discordamos da abordagem apresentada pelo autor, pois recorre à notação de limites. Em nosso entendimento, tal tratamento formal não ajuda na conduta do professor do Ensino Médio em sala de aula.

Mas, afinal, como o professor poderia trabalhar velocidade instantânea sem recorrer à definição do limite em que se baseia o Cálculo Diferencial? Como mostramos há pouco, uma das formas é o de recorrer ao gráfico que representa o fenômeno. Possivelmente, esta opção tem o maior potencial de resultados, ao menos no princípio, Toma-se o gráfico que representa a variação da posição em função do tempo. Traça-se a reta tangente ao gráfico no ponto cuja abscissa representa o instante de tempo para o qual se quer determinar a velocidade. Por fim, determina-se o coeficiente angular dessa reta, a partir da fixação de dois pontos a ela pertencentes e a subsequente obtenção da razão delta y por delta x.

Além disso, discordamos de Ávila (2006b) quanto a limitar a explanação sobre noções de Cálculo Diferencial ao contexto da Cinemática. A recorrência à Cinemática é uma espécie de tributo à disciplina de Física e a seu professor na escola. É uma forma de se mostrar interdisciplinaridade e de, mutuamente, professor de Matemática e professor de Física reforçarem que trazem algo relevante para a educação do cidadão. Mas, se o objetivo é exatamente esse, a formação do cidadão, então, estas noções de Cálculo Diferencial apresentadas até aqui precisam ser aplicadas por professores e alunos em outros contextos, mais comuns no cotidiano.

De fato, a partir deste ponto, o professor já pode estender o mesmo princípio de abordagem de problemas apresentado há pouco para outras situações que não, necessariamente, referidas à Cinemática. O aluno já se encontra capaz de compreender que, em qualquer situação em que há uma grandeza, digamos, y e outra grandeza, digamos x, devidamente conhecidas em um dado intervalo, é possível obter informações de uma terceira grandeza, representada pelo quociente y por x. O estudante procederá da mesma forma: determinará a variação das grandezas de cada eixo, determinará seu quociente ou coeficiente angular e, assim, obterá a grandeza representada por esse quociente.

4.2.3 Apresentando e explorando funções exponenciais e logarítmicas

As curvas também não precisarão estar associadas a funções de segundo grau. Com isso, rompem-se vários limites. Um deles é o do próprio estudo da Cinemática no Ensino Médio. Outros movimentos, irregulares, que não tenham aceleração constante, poderão ser estudados. Outro limite que se pode romper é o de pensar que os coeficientes angulares das retas secantes são sempre iguais ao coeficiente angular da reta tangente. Tomando-se outras curvas que não a parábola, o estudante poderá, por si próprio, perceber que não há tal igualdade. Neste ponto, não são necessários exemplos. Em breve, trabalharemos outras funções, como exponenciais e logarítmicas, e ali se poderá estudar e perceber o fato.

Além disso, ao se trabalhar com outros tipos de curvas, abre-se uma janela muito interessante para a apresentação intuitiva de conceitos mais complexos. No caso, os conceitos de continuidade e o da derivabilidade. Haverá casos em que gráficos apresentam "quinas", haverá casos em que gráficos se referem a funções que não têm, em seu domínio, todo o conjunto dos números reais. Questionar o que ocorre nesses casos é uma forma de fazer os alunos refletirem sobre tais ideias e sobre a existência de situações-problema que não podem ser resolvidas pelo Cálculo. Reforçamos que tal abordagem se limita à observação geométrica, não tendo razão nenhuma para ser analítica ou formal.

A partir deste ponto, o professor pode voltar a pôr o Cálculo no banco de reservas. É hora de trabalhar funções exponenciais e funções logarítmicas. Os contextos são quase infinitos. Pode-se trabalhar com o professor de Química para abordar decaimentos radioativos ou Cinética Química (neste caso, em cinéticas de primeira ordem, de tempos de meia vida constantes), ou trabalhar com o professor de Biologia o crescimento exponencial de populações, ou, ainda, com o professor de Geografia, em análise de situações que podem ser modeladas por exponenciais. Aliás, não somente pode, como recomendamos fortemente. Se um professor despreza o conhecimento que o colega está ensinando, como convencer os alunos de que esse saber é importante? Por outro lado, se os professores mostram tantos pontos de contato entre os saberes, se mostram tantas aplicações, em tantos contextos, como os alunos vão poder manter o surrado e falacioso discurso que não se empenham em seus estudos porque não o aplicarão em lugar algum?

Estamos de acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002) e Ávila (1994), para citar poucos exemplos, de que a ênfase na abordagem de logaritmos e exponenciais deve se dar sobre as respectivas funções. Como diz Ávila, com o advento das calculadoras portáteis e o consequente abandono das tábuas de logaritmos e das réguas de cálculo, o logaritmo se justifica por seu aspecto funcional. Para o mesmo autor, mais que funções logarítmicas, o foco deve ser em funções exponenciais. Os exemplos que colocamos há pouco são todos sobre fenômenos modelados por funções exponenciais. Portanto, é esse o nosso ponto de partida. Achamos muito adequada a sequência didática proposta por Ávila, de forma que, em relação à abordagem de exponenciais e logaritmos, mais nada temos a acrescer. Trata-se de uma abordagem intuitiva e fortemente enriquecida com exemplos interdisciplinares, fazendo de sua obra uma referência adequada, tanto para os professores de Matemática quanto para os docentes das outras disciplinas associadas, visando à abordagem interdisciplinar dos conteúdos.

Se, a partir deste ponto, os alunos já conhecem mais tipos de funções, é hora de recorrermos novamente ao Cálculo Diferencial para mostrar que podemos tirar ainda mais informações de situações regidas por leis exponenciais, se recorrermos aos princípios do

Cálculo. Vamos recorrer a uma situação de decaimento radioativo, para fazer abordagem interdisciplinar com a Química do Ensino Médio. Uma função a representar a quantidade de nuclídios radioativos em função do tempo é a que segue:

$$N = 256 \cdot 2^{-t}$$

A partir desta função, pode-se trabalhar novamente com a noção de velocidade, agora aplicada a um contexto químico. Veremos, assim, que a velocidade instantânea varia de forma não linear, mas também exponencial. Basta que os alunos determinem, graficando retas tangentes ao gráfico de número de nuclídios restantes em função do tempo em diversos pontos, as diversas velocidades instantâneas e, com elas, construam um novo gráfico, que é o de velocidade instantânea de decaimento em função do tempo ou, de forma ainda mais didática, o módulo da velocidade instantânea em função do tempo, já que a velocidade de decaimento radioativo será sempre negativa. Neste ponto, vale destacar que o novo gráfico obtido também é o de uma função exponencial. Ou seja, a velocidade também varia exponencialmente.

A comparação do uso de retas secantes com retas tangentes na determinação de "inclinações" do gráfico também pode ser feita com o mesmo contexto. Desta vez, o resultado será diferente. Tomemos como exemplo a tentativa de se determinar a velocidade do processo de decaimento no tempo t igual a 1. Se traçarmos a reta secante que passa pelos pontos de abscissas 0 e 2, teremos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{64 - 256}{2 - 0} = \frac{-192}{2} = -96$$

Já se traçarmos a reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 1, veremos que ele cruza os eixos coordenados próximo aos pontos (0,220) e (2,5, 0). Ao se determinar o coeficiente angular dessa reta, teremos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 220}{2{,}5 - 0} = \frac{-220}{2{,}5} = -88$$

O resultado –88 é mais próximo do verdadeiro do que –96. Logo, o processo a ser utilizado é o segundo, e não o primeiro.

Análise de gráficos de Economia também representa um contexto em que se apresentam elementos de Cálculo Diferencial aplicado a funções exponenciais e logarítmicas. Interpretar preços como posições, índices de inflação como velocidades, e variações nos índices de inflação como acelerações, já dão uma ideia de que o que se estudou no contexto da Cinemática se amplia e se espraia a outras áreas do conhecimento. Mas, neste caso, as variações de preços não podem ser tomadas como lineares. É fácil apresentar aos alunos a ideia de que, proporcionalmente, o aumento de um real no preço de um pão não significa o mesmo que o aumento de um real no preço de um automóvel. Preços variam, portanto, não por somas, mas por produtos. Daí a inflação e os índices de correção monetária serem fornecidos de forma proporcional, em percentuais, por exemplo.

Cabe ao professor, no entanto, apresentar a possibilidade e a conveniência de não se graficar preços em função do tempo, mas logaritmos do preço em função do tempo. Um caso que pode servir de referência para este trabalho é o que segue. Uma conhecida empresa petrolífera local, com ações negociadas em Bolsa de Valores, tinha os seguintes valores médios por ação em janeiro: em 2010, 35 reais por ação; em 2011, 30 reais por ação; em 2012, 25 reais; em 2013, 20 reais; em 2014, 15 reais; em 2015, 10 reais; em 2016, 5 reais. Ao se fazer o gráfico, tem-se um segmento de reta de coeficiente angular negativo, como ilustrado no Gráfico 3 abaixo:

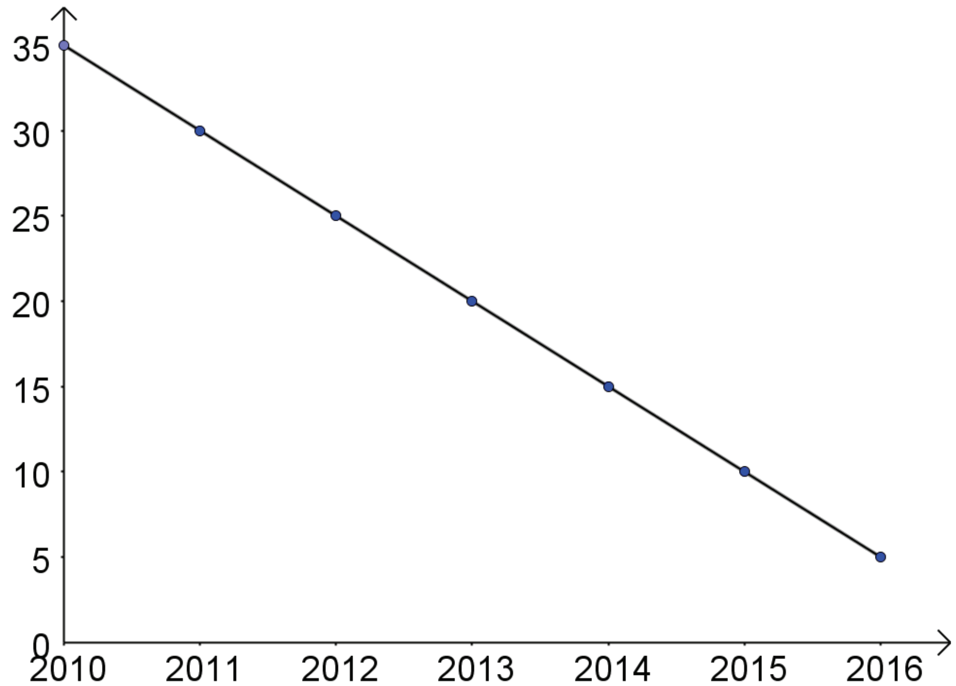

Gráfico 3 – Variação do preço unitário da ação de empresa petrolífera em função do tempo (elaborado pelo autor)

Pergunta-se aos alunos, por exemplo: quem teve mais prejuízo, o investidor que comprou 1000 reais em ações em janeiro de 2010 e as vendeu dois anos depois, ou o investidor que comprou 1000 reais em ações em janeiro de 2014 e as vendeu já no ano seguinte? Bastaria algum conhecimento aritmético para perceber que as perdas do primeiro investidor foram próximas de 28,6%, enquanto as do segundo foram de cerca de 33,3%. Portanto, não se trata, meramente, de olhar a diferença entre o valor unitário de cada ação entre a compra e a venda, nem de olhar o tempo decorrido de forma isolada. Vai ficando claro que as quedas anuais, embora constantes do ponto de vista linear, são proporcionalmente crescentes, a ponto de representarem 50% de perdas entre janeiro de 2015 e janeiro de 2016.

É aqui que vale mostrar a pertinência de se graficar o logaritmo do preço unitário da ação em função do tempo. Isto pode ser feito a partir de mostrar como se dá a variação logarítimica em relação à variação do logaritmando. Se escolhermos o de base decimal, podemos mostrar que o logaritmo de 10, de 100 e de 1000 vale 1, 2 e 3, respectivamente. Evidenciamos, a partir daí, que uma variação multiplicativa do logaritmando implica em variação aditiva do logaritmo. Se os alunos já tiveram contato com progressões, pode-se relembrar que os logaritmandos estão em progressão geométrica, enquanto logaritmos estão em progressão aritmética. Daí, basta mostrar que a variação percentual do logaritmando quando cresce de 10 para 100 (acréscimo de 900%) é igual à variação percentual do crescimento de 100 para 1000. No logaritmo, no entanto, as respectivas variações são iguais por diferença, e não por razão: três menos dois é igual a dois menos um.

Conclui-se, com isso, que o eixo Oy do gráfico deve exibir uma grandeza que varie de forma aritmética, e não geométrica; de forma aditiva, e não multiplicativa. Persistimos utilizando o logaritmo decimal para construir o Gráfico 4 abaixo, da variação do logaritmo dos preços unitários da ação em função do tempo.

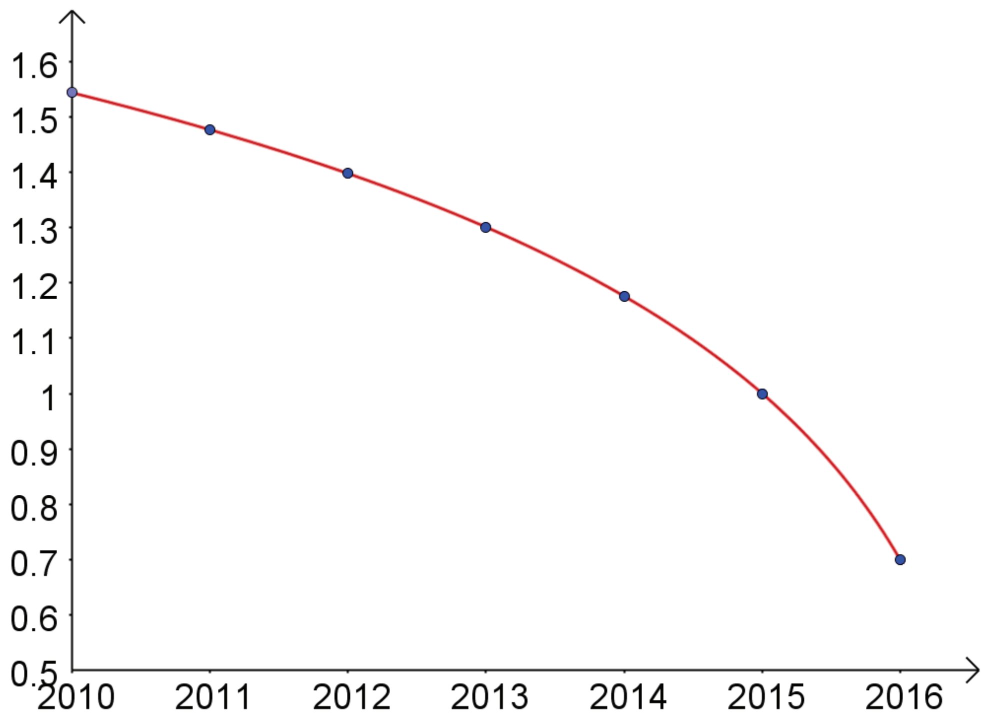

Gráfico 4 – Logaritmo decimal do preço unitário da ação em função do tempo (elaborado pelo autor)

Nesse gráfico, fica claro que a “inclinação” negativa é cada vez maior. Dependendo do perfil dos alunos, pode ser muito compensador mostrar que, em plataformas de negociação e páginas de economia de jornais e portais de internet, o gráfico exibido é do preço da ação em função do tempo, o que mascara a realidade que o segundo gráfico evidencia.

Finalizada essa abordagem, já é possível sintetizar comportamentos de curvas em quatro tipos, combinando concavidades (para baixo ou para cima) e relações de y com x (intervalos em que a função é crescente ou decrescente). Podemos refletir que, quando um ativo vem diminuindo progressivamente o ritmo de desvalorização (situação em que o gráfico do logaritmo do seu valor no tempo se mostra decrescente, mas a concavidade é para cima), pode ser um bom momento para investir no ativo. Entretanto, o leigo acaba investindo quando o ativo já ganhou muito valor e vem diminuindo o ritmo relativo de valorização (situação em que o gráfico do logaritmo do seu valor no tempo se mostra crescente, mas com concavidade para baixo, já tendo superado um ponto de inflexão), o que diminui imensamente a lucratividade do investimento.

A abordagem dos aspectos do Cálculo não difere daquilo que já vínhamos apresentando: na falta de um conhecimento sobre regras de derivação, que até podem ser apresentadas, mas somente depois de apresentados todos os elementos de Cálculo Diferencial e, também, de Cálculo Integral, os problemas são resolvidos graficamente. No papel, com régua, traçando reta tangente e determinando seu coeficiente angular. No computador, pode haver a aplicação de ferramentas adicionais, mas sem recorrer a derivações e integrações de funções. Definitivamente, não é este o objetivo nesta apresentação das noções de Cálculo.

4.2.4 Explorando contextos com outros tipos de funções

Daí em diante, quaisquer contextos podem ser utilizados. Em Hoffmann *et al.* (2014), livro de Cálculo Aplicado, há muitos. A fonte pode bem ser outra. O que interessa é que o estudante seja capaz de modelar a situação, tanto na forma de uma função (especialmente se for de primeiro ou de segundo graus ou, ainda, exponenciais e logarítmicas, pois estas ele já estudou) quanto na forma de seu gráfico (que é o que acontece quando o problema já apresenta pronta, previamente, a modelagem da situação em uma função, e esta não pertence a nenhuma das categorias estudadas). Mesmo neste último caso, o estudante tem todas as condições de resolver o problema. Afinal, reforçamos: a partir do gráfico que representa a modelagem da situação, o aluno poderá traçar a reta tangente ao gráfico no ponto de interesse, determinando seu coeficiente angular. Exemplo adaptado de Hoffmann *et al.* (2014, p.195):

Uma doença se propaga de tal forma que o número de pessoas infectadas em cada semana t é dado pelo gráfico abaixo, de

$$N(t) = 50 - t^3\ (t - 8)$$

com $0 < t < 8$. Pergunta-se: a) a que razão se propaga a epidemia na semana 2? b) em que semana a epidemia se propagará para um maior número de pessoas? c) suponha que uma doença alcança proporções epidêmicas quando a taxa de variação percentual do número de infectados alcança 50%. Em quanto tempo se configurará essa condição de epidemia?

Inicialmente, cabe destacar que a função matemática que modela o problema não é uma das que foram trabalhadas com ênfase especial junto aos alunos. Mesmo assim, o problema é solucionável, bastando que os alunos tracem um gráfico aproximado da função ou, se estiverem disponíveis ferramentas computacionais, que plotem a função com auxílio de software e a imprimam, não fazendo uso, neste estágio, da possibilidade de determinação de coeficientes angulares de retas tangentes ao gráfico fornecidas pelo próprio software. Em um momento posterior, obviamente, poderão fazer uso. No entanto, para fins pedagógicos, recomenda-se que façam as determinações das retas tangentes com lápis e régua, no papel. Para obtermos apresentação adequada para esta monografia, utilizamos o computador na construção do Gráfico 5 abaixo, que representa a função associada ao problema.

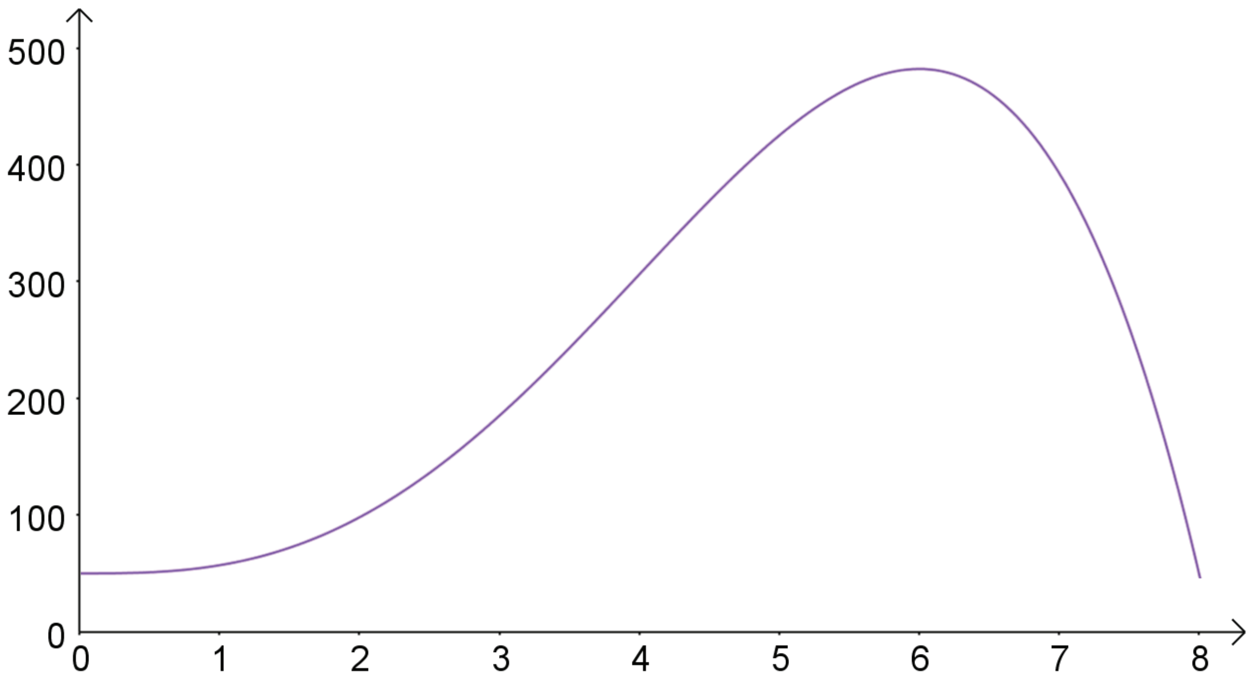

Gráfico 5 – Número de pessoas infectadas em função da semana decorrida (elaborado pelo autor)

A resposta do item a) é obtido traçando-se a reta tangente ao gráfico no ponto em que $t = 2$ e determinando-se seu coeficiente angular. A resposta do item b) também pode ser obtida com o auxílio da régua: o ponto da curva (dentre os de abscissa inteira) no qual a régua está mais inclinada representa a semana t em que a doença atingiu um maior número de pessoas, o que dá próximo da semana 4. Por fim, a obtenção da resposta exata do item c) a partir do gráfico exigiria um pouco mais de trabalho, mas valeria a pena pelo exercício de estimativa. Teria de ser determinado $N(t) - N(t-1)$ para cada t e, posteriormente, tal valor deveria ser dividido por $N(t)$ até que se chegasse a um valor igual ou superior a 0,5, o que se obtém entre a semana 1 e a semana 2. Note-se que, em um gráfico do logaritmo do número de infectados em função do tempo, seria mais simples fazer tal estimativa, já que a inclinação do gráfico não se referiria ao número de novos doentes no tempo, mas à proporção de novos doentes no tempo.

O estudo de noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio ainda pode prosseguir, especialmente na análise do comportamento de funções e na determinação de alguns de seus pontos notáveis, como máximos e mínimos locais e globais, pontos de inflexão, raízes, concavidades, mas sem a necessidade de abordagem de funções que convergem a uma assíntota, ou divergem ao infinito, ou apresentam descontinuidades ou inderivabilidades.

Mais uma vez, consideramos que a proposta que aqui apresentamos trabalha com as cinco dualidades fundamentais do Cálculo e de seu ensino listadas por Rezende (2003) e mencionadas ao fim da seção anterior. Obviamente, algumas das dualidades são abordadas com mais ênfase, outras com menos, mas todas são, de alguma forma, contempladas, contribuindo para um entendimento efetivo dos princípios do Cálculo.

4.3 Áreas e Cálculo Integral

4.3.1 Justificando a proposta

Como já mencionamos anteriormente, se o Cálculo Diferencial ainda parece distante da educação secundária, apesar de se integrar de forma tão orgânica ao estudo de funções e, em grau menor, ao estudo de Geometria, o Cálculo Integral está ainda mais afastado. Documentos acadêmicos que tratam da introdução do Cálculo no Ensino Médio raramente abordam o Cálculo Integral. Livros didáticos de Ensino Médio, quando falam de limites e derivadas, o que não é comum, limitam-se a estes temas, sem avançar às integrais. Claro que a maioria deles persiste na sequência de Cauchy-Weierstrass e, com isso, o Cálculo Integral ficaria por último, muito distante de ser alcançado. Mas mesmo quem tem propostas alternativas e vai direto às derivadas sem definir limites e continuidade, como Ávila (1994, 2006a, 2006b), não chega a falar de integrais.

Fomos em busca de outros autores que pudessem nos ajudar a construir nossa proposta, para que esta não saísse do zero, mas estivesse devidamente subsidiada. Afinal, como o próprio título desta monografia impõe, queremos uma proposta fundamentada. E, de forma indireta, encontramos a fonte com o próprio Ávila (1991). Geraldo Ávila mostra grande admiração pelo trabalho de Nilson José Machado, também autor de várias obras que defendem a introdução do Cálculo no nível secundário brasileiro.

Assim, encontramos texto de Machado (2008) em que, de forma a romper qualquer laço com a sequência de Cauchy-Weierstrass e assumir uma sequência didática mais associada ao desenvolvimento histórico do Cálculo, o autor inicia tratando do Cálculo Integral. De fato, historicamente, os rudimentos do Cálculo Integral surgiram séculos antes daqueles do Cálculo Diferencial. O Cálculo Integral surge na Antiguidade; o Diferencial, apenas na Idade Moderna.

Machado (2008) faz uma apresentação bem-humorada e interdisciplinar do Cálculo Integral que vale a pena mencionarmos. O autor chama funções constantes de Gabriela, em referência à música de Dorival Caymmi ("eu nasci assim, eu cresci assim, vou ser sempre assim...") e funções não constantes de Raul Seixas, por conta de sua composição "Metamorfose Ambulante", aproveitando para introduzir ideias filosóficas dos pré-socráticos Parmênides e Heráclito neste mesmo contexto.

Como mostra Machado (2008), o conceito de integral passa pela ideia de tratar uma grandeza variável como se fosse constante em sucessivos pequenos trechos. Ele trabalha com a área sob o gráfico de uma função constante, ou "Gabriela", em dado intervalo: fácil determinar, pois trata-se de um retângulo. E áreas de retângulos são trabalhadas ainda no Ensino Fundamental. A seguir, mostra o gráfico de uma função não constante, positiva em todo o intervalo considerado, e questiona como determinar a área sob a curva. Mostra o "fatiamento" da área em pequenos retângulos e diz que a área total seria igual à soma das áreas desses retângulos. Integrar, então, seria somar as áreas desses retângulos. Reproduzimos abaixo as figuras usadas no artigo original de Machado, para fins de ilustração.

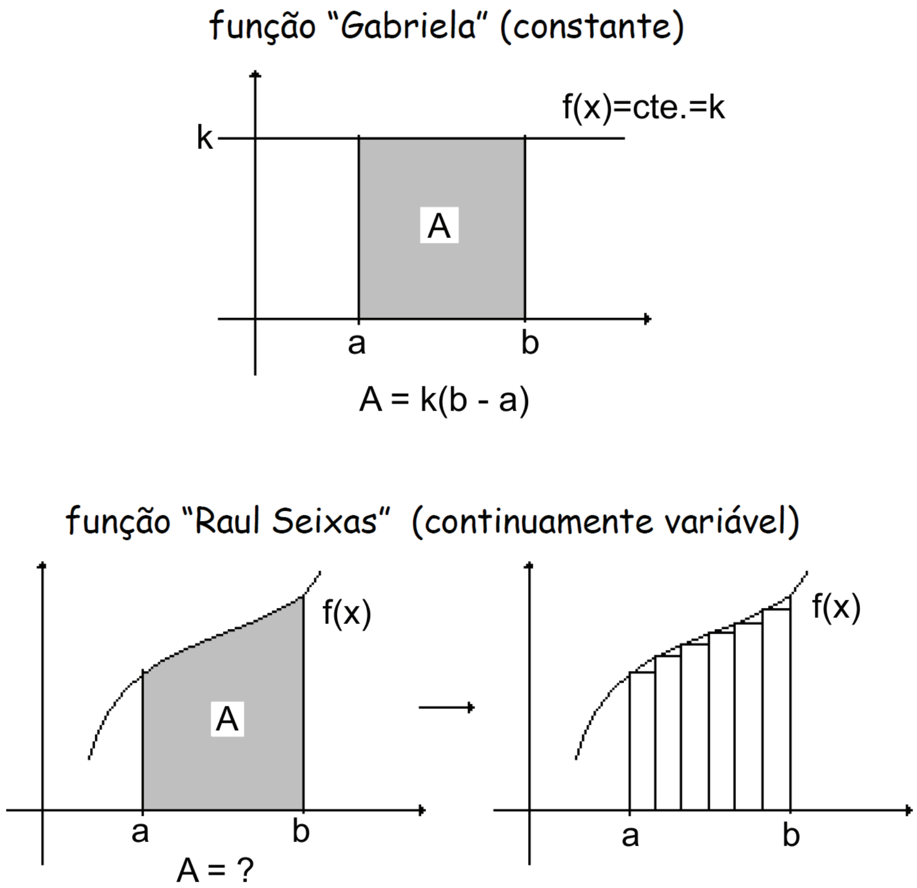

Figura 1 – Gráficos de funções “Gabriela” e “Raul Seixas”, adaptados de Machado (2008)

Trata-se de uma explanação intuitiva, mas que atinge os objetivos a que se propõe. Como diz o próprio Machado, com o sarcasmo que os acríticos da realidade atual merecem ouvir, a “técnica desses cálculos pode ser deixada para o ensino de Cálculo propriamente dito (*os cursos de Cálculo quase que se resumem às técnicas* [grifo nosso]), mas as ideias podem ser tratadas desde cedo” (p.4).

O Cálculo Integral se baseia na determinação do limite de uma soma de áreas infinitesimais. Assim, suas principais aplicações são a determinação de áreas (não infinitesimais), além de totais ou de valores médios de uma grandeza. Em um gráfico cartesiano em que o produto da grandeza expressa no eixo das abscissas pela grandeza expressa no eixo das ordenadas resulta em uma terceira grandeza de interesse, relevância ou significado, a determinação de áreas sob a curva poderá levar à determinação dos valores referentes a essa terceira grandeza. Um gráfico da variação da força elástica em função da elongação da mola expressa a energia potencial elástica. Um gráfico da variação da pressão em função do volume expressa o trabalho realizado. Um gráfico da variação do preço de um produto em função do tempo pode informar seu preço médio em qualquer fração do período retratado no gráfico.

4.3.2 Revisitando os contextos trabalhados anteriormente

Nossa proposta de abordagem mantém a premissa de que devemos nos limitar a trabalhar conceitos e situações que efetivamente são basilares para a compreensão dos conteúdos posteriores. Assim, é necessária uma abordagem preliminar sobre determinações de áreas de superfícies planas, ainda como um conteúdo de Geometria que, posteriormente, servirá de alicerce para uma abordagem intuitiva do Cálculo Integral. Sugerimos iniciar com a área do quadrado, estendendo para áreas do retângulo, do triângulo e do trapézio. Essas figuras podem aparecer como regiões limitadas por um ou dois segmentos de reta verticais, de abscissas correspondentes aos limites de integração, pelo eixo das abscissas e por uma reta que represente uma função de primeiro grau, de forma similar à apresentada acima, em reprodução de Machado (2008), com sua "função Gabriela".

Tendo sido já trabalhadas as noções de Cálculo Diferencial aplicado à Cinemática, podemos voltar a utilizar esse contexto para tratar do Cálculo Integral. O início pode ser com o gráfico da velocidade em função do tempo, com o qual se pode determinar deslocamentos em certos intervalos de tempo. Se este gráfico for o de uma reta horizontal, representando uma função constante (velocidade constante) será possível obter, a partir da análise da figura, uma relação tradicional do estudo da Cinemática no Ensino Médio, referente à área de um retângulo. Vejamos o Gráfico 6, que representa um movimento uniforme, de velocidade constante 4 m/s:

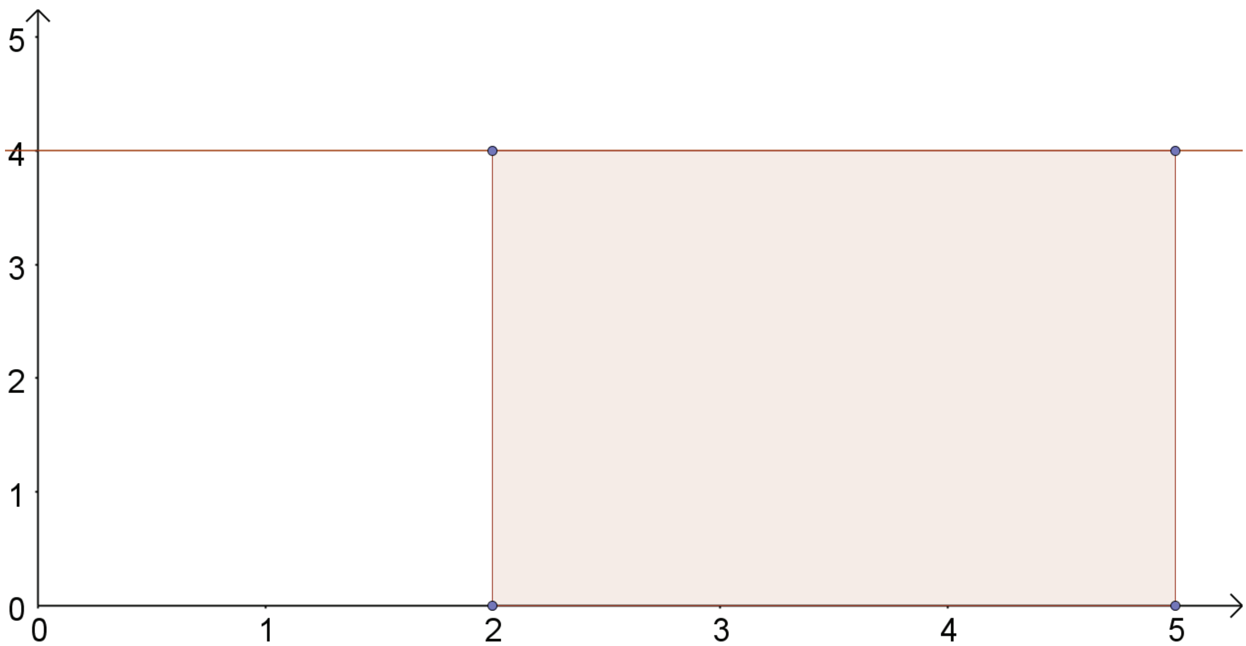

Gráfico 6 – Velocidade constante de um certo corpo em função do tempo (elaborado pelo autor)

Neste caso particular, o deslocamento do corpo entre o instante 2 s e o instante 5 s (período de tempo decorrido Δt igual a 3 s) foi igual àquele associado à área sob o gráfico nesse intervalo de tempo, ou, em outras palavras, igual ao seguinte produto:

$$\Delta S = \frac{4\ m}{s} \times 3\ s = 12\ m$$

Poderíamos trabalhar com mais exemplos até generalizarmos o que se vê na igualdade acima. O deslocamento de um corpo a velocidade constante é dado pela seguinte relação, equivalente à da área de um retângulo:

$$\Delta S = v \cdot \Delta t$$

Já se o gráfico da velocidade em função do tempo for o de uma reta inclinada, representando uma situação de função de primeiro grau (aceleração constante e não nula), será possível obter, a partir da análise da figura, outra das equações tradicionais da Cinemática, representando a soma das áreas de um triângulo retângulo com a de um retângulo. Vejamos, agora, o Gráfico 7, que representa um movimento uniformemente variado, de velocidade 1 m/s no instante 0 s e de 13 m/s no instante 3 s:

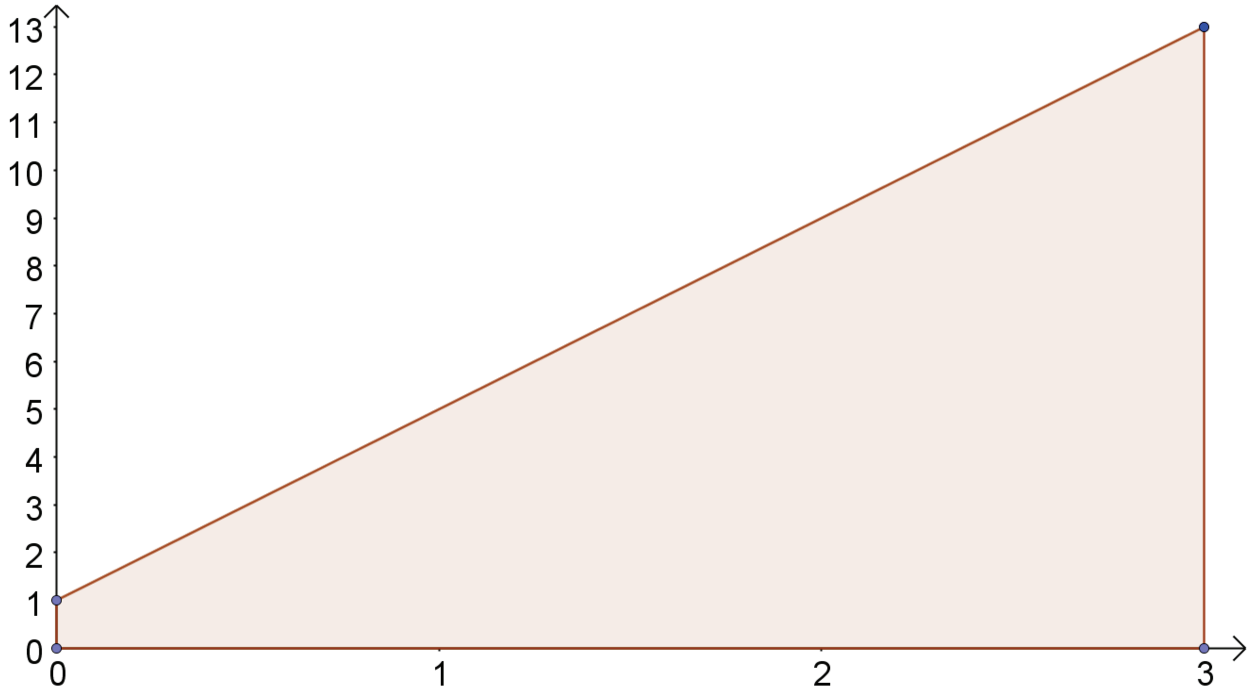

Gráfico 7 – Velocidade uniformemente variada de um certo corpo em função do tempo (elaborado pelo autor)

A região sob o gráfico entre as retas de abscissas 0 s e 3 s é equivalente à de um trapézio. Sendo assim, podemos associar sua área à relação que fornece a área do trapézio. São "bases" 1 m/s e 13 m/s, e é "altura" 3 s. Logo, temos:

$$\Delta S = \frac{(1\ m/s + 13\ m/s)}{2} \times 3\ s = \frac{7\ m}{s} \times 3\ s = 21\ m$$

Outra maneira de ver a região sob o gráfico não é como similar a um trapézio, mas como similar à soma de regiões equivalentes à de um retângulo e de um triângulo retângulo. Assim, a área dessa região também poderia ser expressa dessa forma, como uma soma de áreas de duas regiões. Recalculando:

$$\Delta S = \Delta S_{ret} + \Delta S_{tri} = \frac{1\ m}{s} \times 3\ s + \frac{12\ m/s \times 3\ s}{2} = 3\ m + 18\ m = 21\ m$$

Mais uma vez, poderíamos trabalhar com mais exemplos até generalizarmos o que se vê na igualdade acima. O deslocamento de um corpo a velocidade uniformemente variada é dado pela seguinte relação, equivalente à soma das áreas de um retângulo e de um triângulo retângulo, exatamente as mesmas figuras trabalhadas no exemplo:

$$\Delta S = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a \cdot (\Delta t)^2}{2}$$

O estudo em Cinemática pode continuar, agora com o gráfico de aceleração em função do tempo, com o qual se obtém a variação da velocidade no intervalo de tempo. Pode-se iniciar com aceleração constante, o que dará ao aluno a oportunidade de resolver de forma alternativa e, talvez, mais rapidamente, exercícios quantitativos de Cinemática, presentes no livro de Física, de forma a ser percebida a interdisciplinaridade que se queria mostrar.

Depois, podemos passar a casos que não costumam ser abordados no Ensino Médio: movimentos em que a aceleração é variável. É aqui que a soma de pequenas áreas vai se mostrar importante. Para evitarmos a confusão da introdução de outro contexto, manteremos a Cinemática, mas não somente isso. Seguiremos, também, usando como referência um gráfico de velocidade em função do tempo. A diferença, aqui, é que o gráfico não é retilíneo. Portanto, a região determinada por duas retas verticais, pelo eixo das abscissas e pela curva que representa a função não será, mais, um retângulo ou um trapézio. Sua área, portanto, não é fornecida por uma relação simples, imediata, como um simples produto de base por altura.

Temos de recorrer, portanto, a estimativas. Da mesma forma que, ao apresentar ideias do Cálculo Diferencial, usamos retas secantes ao gráfico em intervalos cada vez mais curtos e, portanto, retas cada vez mais próximas da reta tangente ao gráfico no valor de abscissa médio do intervalo, aqui, usaremos áreas de retângulos, como se esperaria: cada vez mais retângulos, tendo estes retângulos bases cada vez menores. Além disso, faremos variar a forma como a altura de cada retângulo é determinada: por vezes no maior valor do intervalo;

outras vezes, no menor valor. Tomemos como referência o Gráfico 8 a seguir, relacionando a velocidade de um corpo em função do tempo de acordo com a relação abaixo, com tempo em segundos e velocidade em metros por segundo:

$$v = 1 + 8t - t^2$$

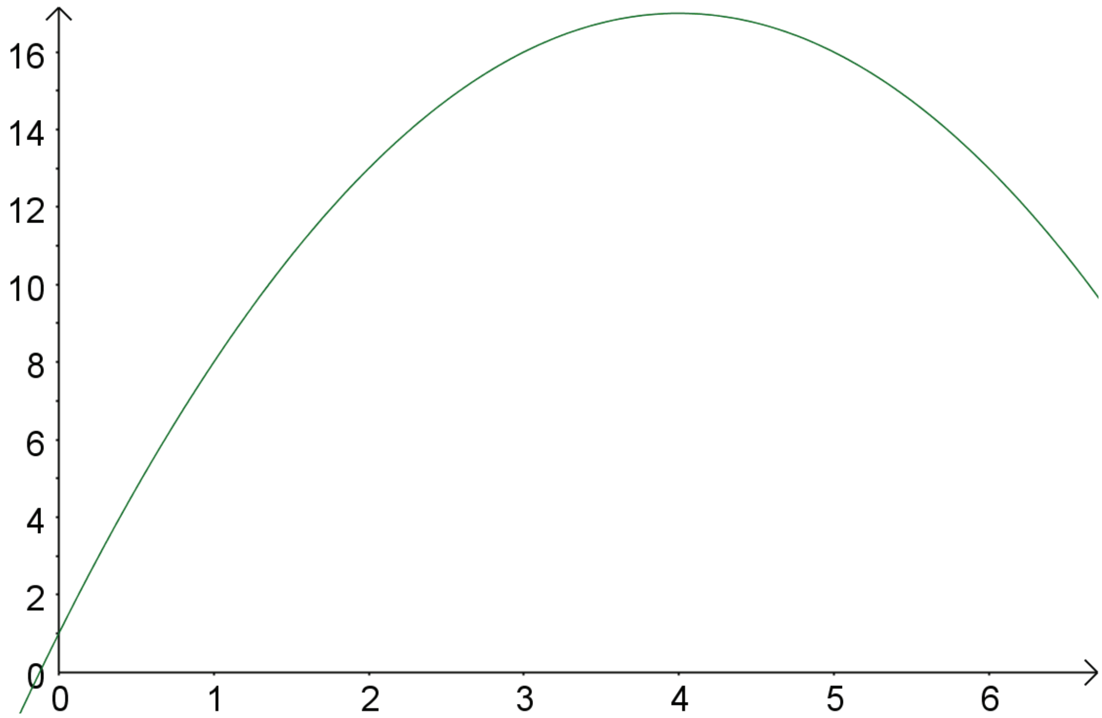

Gráfico 8 – Velocidade quadraticamente variada de um certo corpo em função do tempo (elaborado pelo autor)

Como os alunos já devem saber a esta altura do trabalho, a área sob o gráfico está associada ao deslocamento em certo intervalo de tempo. Aqui, especificamente, resolvemos tomar o intervalo decorrido entre o tempo 0 s e o tempo 6 s. Tentaremos determinar três retângulos de bases iguais cuja soma das áreas seja próxima da área sob o gráfico. Uma vez que o intervalo tem dimensão equivalente a 6 s, as bases de cada retângulo equivalerão a 2 s cada uma. Quanto a suas alturas, não as determinaremos aleatoriamente. Utilizaremos o valor que a função assume no início do intervalo. O Gráfico 9 a seguir ilustra os três retângulos.

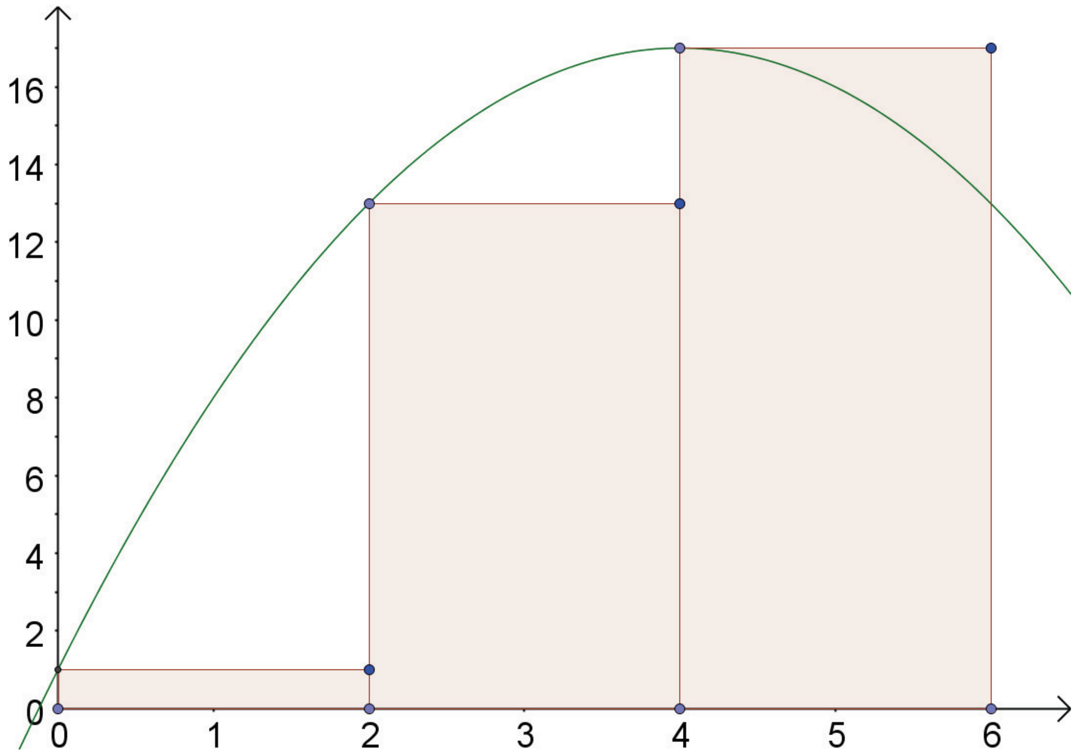

Gráfico 9 – Velocidade variada de um certo corpo em função do tempo, com retângulos de base 2 e altura dada pelo valor da função no início do intervalo (elaborado pelo autor)

Nota-se que, acima de dois dos três retângulos, há uma região sob o gráfico que não é ocupada pelos respectivos retângulos. Portanto, tomando os retângulos no lugar da curva da função, estamos considerando área a menos. No caso do terceiro retângulo, ele ocupa uma região que está acima da curva da função. Assim, neste caso, estamos tomando área a mais. A área somada dos três retângulos, isto é, a estimativa da área total sob a curva, é:

$$A = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 17 = 2 + 26 + 34 = 62$$

Poderíamos mudar o critério de determinação da altura de cada retângulo. Em lugar de tomarmos o valor que a função assume no início do intervalo, tomaremos o valor assumido pela função no fim do mesmo intervalo. O Gráfico 10 a seguir mostra como serão os três novos retângulos.

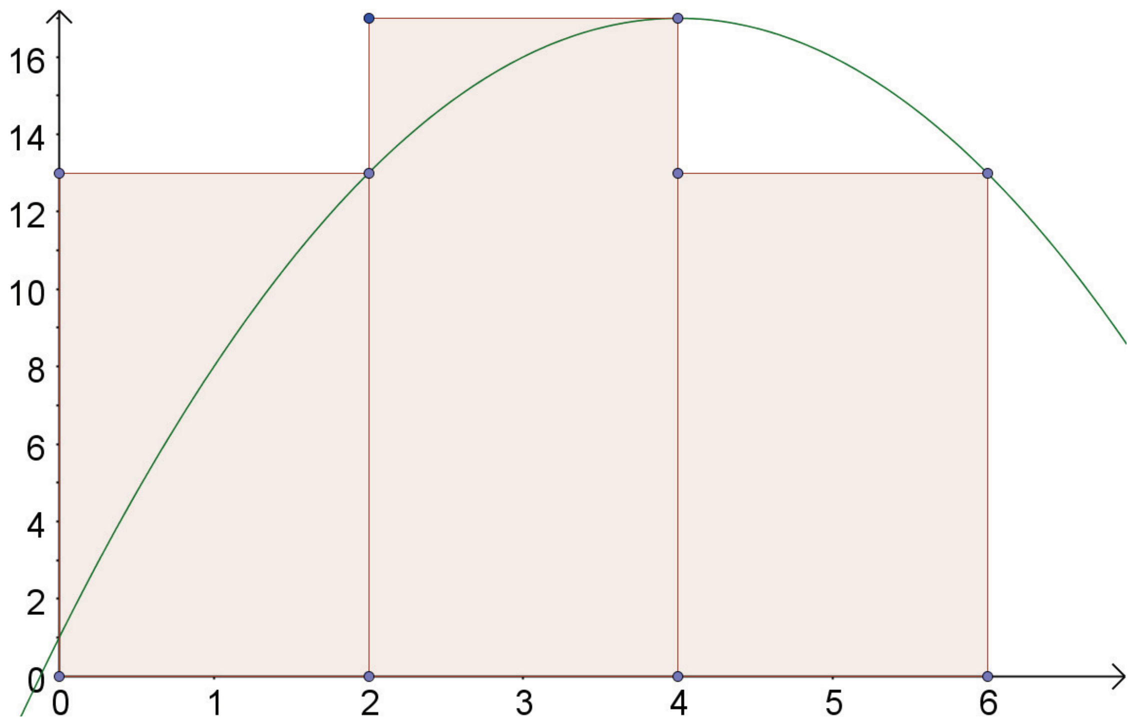

Gráfico 10 – Velocidade variada de um certo corpo em função do tempo, com retângulos de base 2 e altura dada pelo valor da função no fim do intervalo (elaborado pelo autor)

Agora, temos uma inversão: os dois retângulos mais à esquerda estão tomando área a mais, enquanto o retângulo à direita toma área a menos. Neste caso, a área somada dos três retângulos, isto é, a estimativa da área total sob a curva, é:

$$A = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 13 = 26 + 34 + 26 = 86$$

Um valor razoável para a área efetiva poderia ser obtido determinando-se a média aritmética entre os dois valores estimados para a área, igual a 74. Como, visualmente se percebe, a primeira estimativa representa valor menor que a área efetiva, e a segunda estimativa, um valor maior, uma média poderia nos aproximar da área sob a curva.

Mas há um processo ainda mais confiável de aproximação ao valor efetivo da área. Em lugar de tomarmos três retângulos com base equivalente a 2 s, tomaremos seis retângulos com base equivalente a 1 s. Neste caso, a soma das áreas dos retângulos é outra. As duas expressões abaixo mostram a soma das áreas dos retângulos com suas alturas determinadas pelas duas formas com as quais já trabalhamos, respectivamente: altura como o valor que a função assume no início de cada intervalo e altura como o valor que a função assume no fim de cada intervalo. O Gráfico 11 a seguir mostra os retângulos gerados no processo de assumir a altura de cada um como sendo o valor que a função assume no início de cada intervalo.

$$A = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 17 + 1 \cdot 16 = 1 + 8 + 13 + 16 + 17 + 16 = 71$$

$$A = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 17 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 13 = 8 + 13 + 16 + 17 + 16 + 13 = 83$$

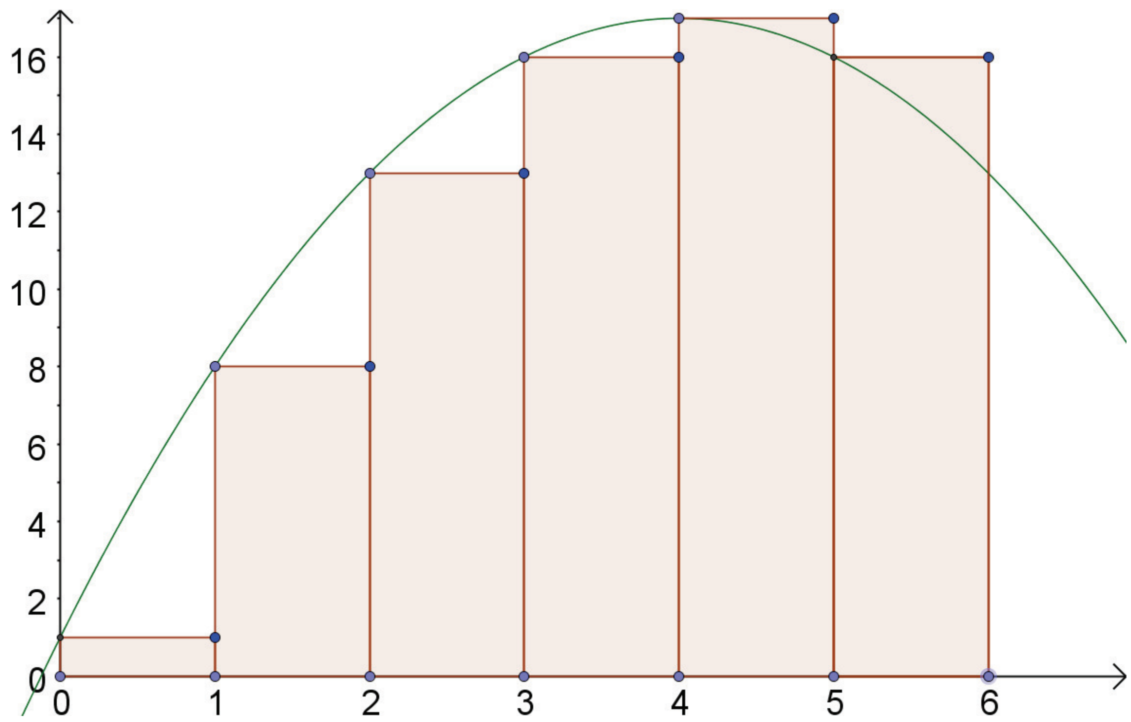

Gráfico 11 – Velocidade variada de um certo corpo em função do tempo, com retângulos de base 1 e altura dada pelo valor da função no início do intervalo (elaborado pelo autor)

Note-se que os valores estão mais próximos entre si do que estavam os valores do primeiro par obtido. Se, sucessivamente, tomarmos um número cada vez maior de retângulos, cada um com base cada vez menor, chegaremos cada vez mais perto da área efetiva da região sob o gráfico. Assim, chegamos, aqui, a mais um ponto em que a ideia de infinitesimal pode ser trabalhada. No contexto do Cálculo Integral, trata-se da base Δx de cada retângulo que converge a um valor infinitesimal, da mesma forma que, quando foram estudados elementos do Cálculo Diferencial, viu-se que o intervalo Δx entre dois pontos de secância do gráfico também converge ao valor infinitesimal. De forma alguma, deve haver formalização. Mas a ideia parece suficientemente possível de ser apresentada, dado o trabalho que já fora realizado anteriormente com os alunos.

Na prática, o trabalho de determinação de áreas não precisa ser feito apenas pelos grandes retângulos. Uma vez que a conceituação da soma de áreas de retângulos já foi feita, o que se precisará é de uma precisão mais razoável na estimativa da área sob o gráfico, para que os valores obtidos sejam os mais próximos possíveis do valor efetivo. Neste caso, pode-se fazer uso de papel quadriculado, pois, contando os pequenos quadradinhos, podemos chegar a valores mais razoáveis para a área. Continuemos com o mesmo exemplo, fazendo o mesmo gráfico, agora em grade de fundo equivalente à do papel milimetrado, e resultando no Gráfico 12 a seguir.

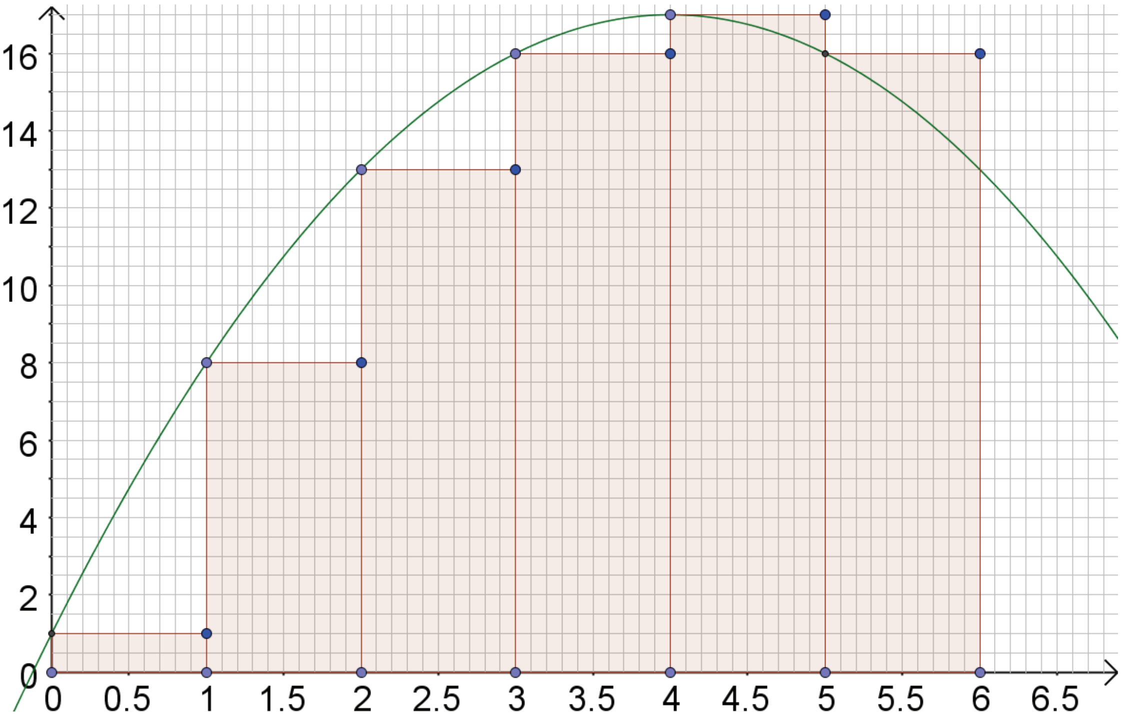

Gráfico 12 – Velocidade variada de um certo corpo em função do tempo, com retângulos de base 1 e altura dada pelo valor da função no início do intervalo, com grade (elaborado pelo autor)

Vemos que é possível estimar a área que falta ou que sobra em relação à soma das áreas dos retângulos contando quadradinhos que ficaram para dentro ou para fora, respectivamente, da região cuja área queremos determinar. No caso, fizemos a seguinte estimativa, já considerando a soma das áreas dos retângulos igual a 71, como visto há pouco, e a área de cada quadradinho, de 0,05. Acima do primeiro retângulo, contamos algo como 72 quadradinhos, somando inteiros e frações. Acima do segundo retângulo, contando da mesma forma, cerca de 52 quadradinhos. Acima do terceiro, 32. Acima do quarto, 12. Em compensação, haveria 8 quadradinhos na parte superior do quinto retângulo que estariam acima da curva. No sexto retângulo, seriam 28. A totalização da área se dá pela soma da área dos retângulos, 71, com as áreas dos quadradinhos situados entre os retângulos e a curva, subtraídas as áreas dos quadradinhos pertencentes aos retângulos, mas acima da curva. Temos:

$$A = 71 + 0{,}05 \cdot (72 + 52 + 32 + 12 - 8 - 28) = 71 + 0{,}05 \cdot 132 = 71 + 6{,}6 = 77{,}6$$

Trata-se de uma estimativa bastante razoável, visto que, usando-se normas de integração para a mesma função, obteríamos o valor 78.

Retornando-se ao contexto: o deslocamento nesses seis segundos seria, pela estimativa, de 77,6 metros (unidade obtida pelo produto da unidade da velocidade, metros por segundo, pela unidade do tempo, segundos).

Citamos outro exemplo de aplicação, baseado em exercício de lista distribuída aos alunos da disciplina de Cálculo I, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (BRASIL, 2017):

Suponha que, no instante t, a velocidade de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta seja dada pela função $v(t)$, em que $t \in [0,9] \rightarrow \mathbb{R}$, com sua posição inicial em $S = 0$ (ou seja, na origem), e cujo gráfico está ilustrado abaixo. Considere, ainda, que t seja dado em segundos, que $v(t)$ seja dada em metros por segundo e que, para $0 \leq t \leq 3$, seu gráfico seja um segmento de reta. A partir do gráfico da função velocidade, julgue os itens a seguir.

a) A partícula está se afastando da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$.

b) A partícula percorre menos de 4 metros nos primeiros 3 segundos.

c) No instante $t = 6$, a partícula está na origem.

d) No instante $t = 9$, a posição da partícula é positiva.

e) O espaço total percorrido pela partícula equivale à área entre a curva e o eixo Ox no intervalo [0,6] somada à área entre a curva e o eixo Ox no intervalo [6,9].

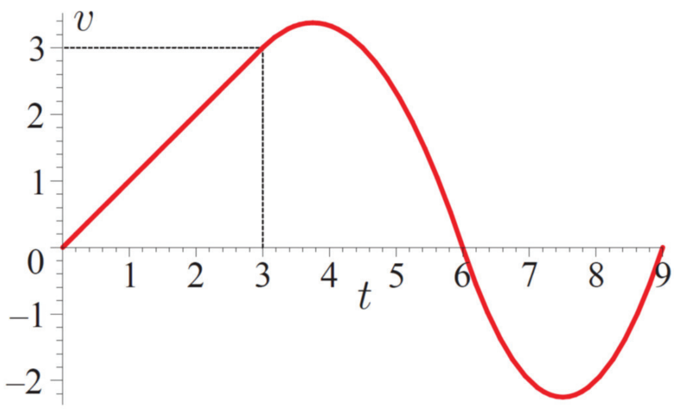

Figura 2 – Gráfico da velocidade de uma certa partícula em função do tempo, em exemplo reproduzido de Brasil (2017)

Vejamos a resolução.

a) Verdadeiro, pois a velocidade é positiva no intervalo. A despeito de a velocidade estar diminuindo no intervalo considerado, a partícula segue no sentido de afastamento da origem.

b) Falso. A área sob a curva no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$, uma região triangular, equivale a 4,5 m:

$$\Delta S = \frac{3\ m/s \times 3\ s}{2} = 4{,}5\ m$$

c) Falso. Uma vez que a partícula estava na origem no tempo $t = 0$, e teve um deslocamento positivo no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 6$, sua nova posição é $S > 0$.

d) Verdadeiro. Ainda que, no intervalo $6 \leq t \leq 9$, a partícula tenha recuado, pois a área entre a curva e o eixo Ox fica abaixo do eixo, a partícula ainda está em posição de $S > 0$, pois tal área é menor do que a verificada no intervalo $0 \leq t \leq 6$. Ou seja, se atribuirmos sinal negativo às áreas das regiões entre a curva e o eixo Ox que se encontrem abaixo do eixo, ao somarmos as áreas, o valor ainda resulta positivo.

Destacamos a importância de se trabalhar situações em que a curva está abaixo do eixo Ox, ou seja, situações em que a função assume valores negativos. É o que ocorre no intervalo $6 \leq t \leq 9$ e, portanto, algo a se evidenciar na resolução do item d.

e) Verdadeiro. O conceito de espaço percorrido difere do conceito de deslocamento. Para computar espaço percorrido, qualquer mudança de posição deve levar sinal positivo; já o deslocamento deve considerar o sentido. Partícula que sai da origem, vai à posição 1 e retorna à origem tem espaço percorrido igual a 2 e deslocamento nulo. Assim, o espaço percorrido equivale à soma de áreas – e áreas são sempre positivas.

A partir daqui, já é possível apresentar a generalização do Cálculo Integral aplicado: se um contexto qualquer apresenta duas grandezas que variam, uma em função da outra, e há interesse na variação de uma terceira, obtida pelo produto entre as duas primeiras, então, a área sob o gráfico no intervalo adequado representará a variação dessa terceira grandeza nesse mesmo intervalo.

Também podemos tratar de gráficos cuja área se associa a população, fração populacional, ou outro conceito relacionado. Aqui, a interdisciplinaridade também é intensa. Um gráfico da distribuição normal permitiria a discussão de conceitos básicos da Estatística, como desvio-padrão. Por exemplo, poderíamos analisar a fração da população situada acima da média mais um desvio-padrão, usando, mais uma vez, estimativas por retângulos e comparando com o valor real. Conversando com a Química, vemos que um gráfico da concentração de nuclídios radioativos em função do tempo permitiria a discussão do conceito de tempo médio de vida, que é distinto do tempo de meia-vida. O tempo médio de vida é dado pelo tempo cuja reta vertical no gráfico dividiria a região sob o gráfico em duas partes iguais. A interdisciplinaridade com a Física também é possível. No estudo de gases, a distribuição das partículas em função de sua energia cinética é um gráfico cujo estudo de áreas sob a curva é importante. Poderíamos, por um gráfico como esse, determinar a proporção de partículas que possui energia cinética superior a um dado valor ou, de forma inversa, dada uma fração de partículas, qual é a energia cinética mínima das mesmas.

Por fim, a partir daqui, é igualmente possível tratar, ainda que de forma puramente intuitiva, do Teorema Fundamental do Cálculo. Se, com o gráfico que relaciona a variação de posição do corpo em função do tempo é possível saber sua velocidade, e com o gráfico que relaciona a variação da velocidade do corpo com o tempo se pode encontrar sua variação de posição, então, uma operação é inversa da outra. Encontrar coeficientes angulares de retas tangentes e encontrar áreas são operações relacionadas, sendo que uma faz o contrário do que a outra faz.

Machado (2008) usa outro contexto da Física para mostrar possibilidades de uso do Cálculo Integral: determinação do trabalho da força elástica a partir do gráfico da variação dessa força em função da elongação em relação à posição de repouso. Há outros, sem dúvida: determinação do impulso (ou variação do momento linear) a partir de um gráfico de força aplicada em função do tempo; determinação do trabalho (ou variação da energia) realizado por um sistema em uma transformação a partir do gráfico de pressão por volume; determinação da variação da energia em um gráfico de potência em função do tempo; entre tantos outros exemplos. A Química também apresenta os seus exemplos, especialmente no estudo de Cinética Química. Mas há outras possibilidades, como em Matemática Financeira (que pode trazer alguns contextos de Economia) ou em Geografia.

4.3.3 Ampliando e encerrando o assunto

Da mesma forma que a proposta para o Cálculo Diferencial, aqui também temos apenas a intenção prática de extrair a informação a partir de um gráfico que já modela uma situação. No caso, por meio de estimativas, faremos a determinação da área sob o gráfico, obtendo o valor da variação da grandeza representada pelo produto das grandezas dos dois eixos. Exemplo adaptado de Hoffmann *et al.* (2014, p.488):

Estima-se que, t anos a partir do início de 2012, a demanda de petróleo em certo país varia a uma taxa de

$$D'(t) = (1 + 2t)^{-1}$$

bilhões de barris por ano. Quanto se consome (demanda) mais petróleo, em 2013 ou em 2014? Quanto mais?

Neste caso, o gráfico que se precisa estudar é o de D' em função de t. Já substituídos os valores de t pelos seus equivalentes em anos, o Gráfico 13, que representa a situação, se encontra exibido a seguir.

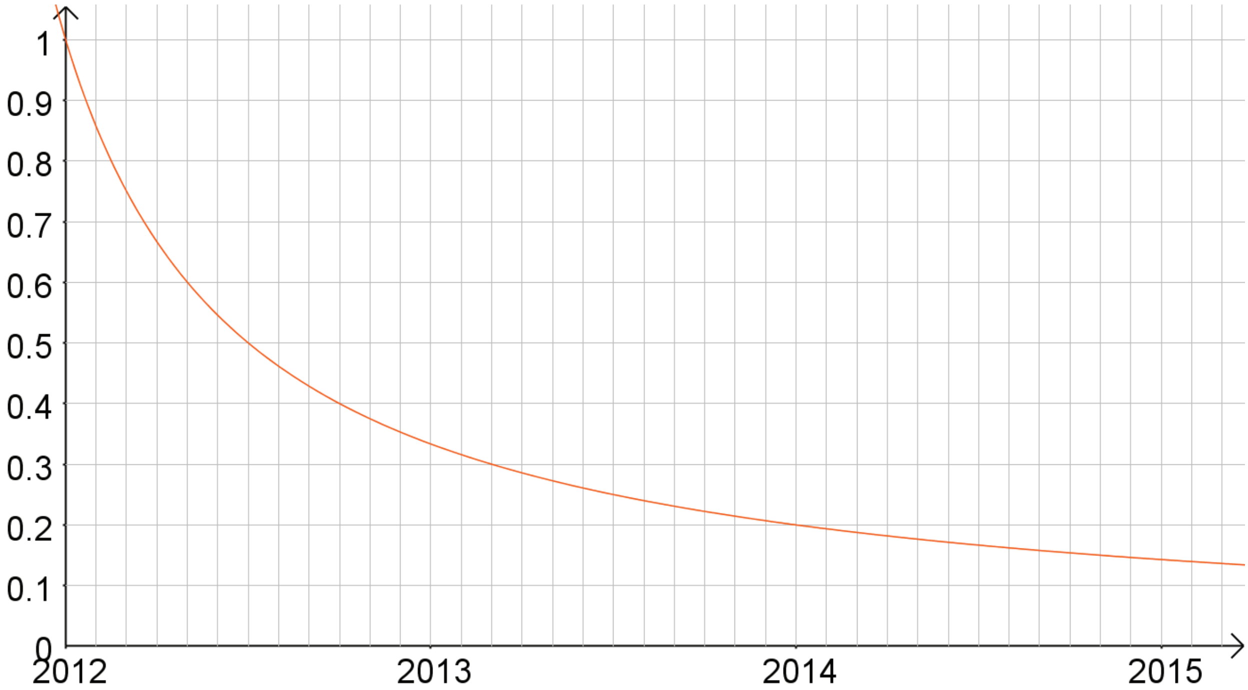

Gráfico 13 – Variação da demanda de petróleo em certo país, dada em bilhões de barris por ano, em função do tempo, dado em anos (elaborado pelo autor)

As informações a serem obtidas são as áreas sob os gráficos entre $t = 1$ e $t = 2$, e entre $t = 2$ e $t = 3$. Tais áreas precisam ser comparadas, determinando-se, assim, qual delas é maior para se responder à primeira pergunta, bem como precisam ser subtraídas uma da outra, para se determinar a resposta à segunda pergunta. As áreas sob o gráfico serão determinadas de forma estimada. Se for utilizado papel milimetrado em sua confecção, como foi o caso do gráfico acima, a determinação das áreas pode ser bastante precisa. Nossa estimativa e posterior resolução são as seguintes:

Número de quadradinhos entre 2013 e 2014: 34. Dividindo por 12 (a base de cada quadradinho é de um "mês") e multiplicando pela sua área de 0,1, temos o valor 0,283.

Número de quadradinhos entre 2014 e 2015: 18. Dividindo por 12 (a base de cada quadradinho é de um "mês") e multiplicando pela sua área de 0,1, temos o valor 0,150.

A área maior é a que se refere ao ano de 2013; logo, a demanda nesse ano foi maior. Não é possível saber quanto foi a demanda (absoluta) em cada ano, pois não temos um valor ou ponto de referência na função D, mas é possível determinar a diferença entre esses valores, subtraindo-se a área sob o gráfico referente a 2014 da área sob o gráfico referente a 2013. Pode não ser imediato aos alunos este fato, mas podemos retornar ao contexto da Cinemática para ajudar: a área sob o gráfico que relaciona velocidade e tempo nos fornece o deslocamento (variação da posição), mas não a posição (absoluta) em qualquer tempo, como o exemplo da partícula dado há pouco mostra bem.

Eis a resposta faltante:

$$A = 0{,}283 - 0{,}150 = 0{,}133 \text{ bilhão} = 133 \text{ milhões de barris}$$

Por fim, propomos a apresentação da integração de Monte Carlo, que é mais uma forma de integração numérica (LANDAU; BINDER, 2003), para além da que já foi apresentada. Com isso, outros conceitos e elementos de funções e Geometria acabarão sendo discutidos: valor máximo que assume uma função em um dado intervalo; proporções e regras de três para relacionar grandezas aparentemente díspares (razões entre quantidades de pontos gerados aleatoriamente se relacionam a razões entre áreas); áreas sob gráficos em que não é elementar dividir a área se determinar em pequenos retângulos.

A integração de Monte Carlo usa, necessariamente, ferramentas computacionais. É preciso ter um gerador de um grande volume de números aleatórios, o que um computador pode fazer bem e pode fazer rápido. A ideia é a seguinte: determina-se uma região retangular que exceda a área sob o gráfico. Faz-se o computador gerar pontos aleatórios que pertençam ao interior dessa região. Verifica-se se o ponto fica abaixo da curva. A proporção de pontos abaixo da curva em relação ao total de pontos gerados, multiplicada pela área total do retângulo, indicará uma excelente estimativa da área sob o gráfico.

Tomemos como exemplo o gráfico da função que já vínhamos trabalhando na seção anterior, cuja equação é:

$$v = 1 + 8t - t^2$$

Tomemos, ainda, um valor de ordenada que seja maior que o valor máximo da função no intervalo estudado. No caso, a função não supera o valor 18 no intervalo [0,6]. Temos, assim, uma região retangular de área (6 × 18), ou 108. O Gráfico 14, que representa a situação, encontra-se abaixo.

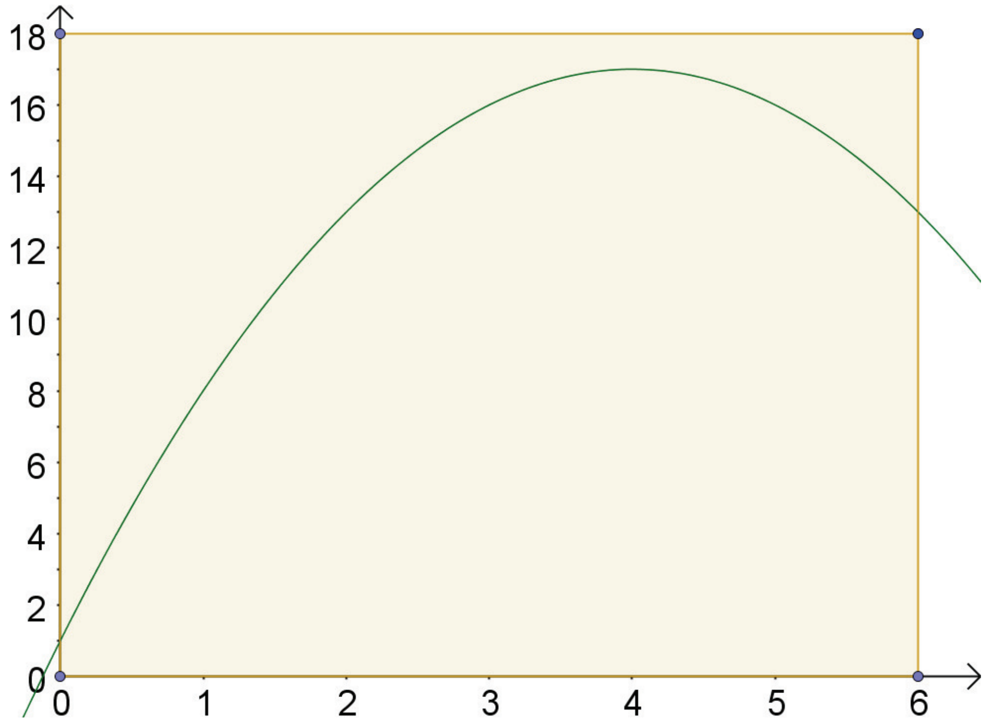

Gráfico 14 – Velocidade quadraticamente variada de um certo corpo em função do tempo com região retangular auxiliar à integração de Monte Carlo (elaborado pelo autor)

Começa-se a gerar aleatoriamente pares ordenados $(t,\ v)$. Como primeiro exemplo, digamos que tenha sido gerado o par (2, 12). Como a função assume o valor 13 para $t = 2$, e 13 está acima de 12, o ponto gerado pertence à região sob a curva. Depois, digamos que tenha sido gerado aleatoriamente um segundo ponto, (1, 10). Como a função assume o valor 8 para $t = 1$, e 8 está abaixo de 10, o ponto gerado pertence à região do retângulo que fica acima da curva.

Se, ao fim do processo, foram gerados 1000 pontos, e 721 desses pontos encontravam-se abaixo da curva, a estimativa para a área sob a curva é de:

$$A = \frac{721}{1000} \times 108 = 77{,}868$$

Mais uma vez, tratar-se-ia de aproximação bastante razoável para o valor efetivo da área sob o gráfico, determinada por técnicas de integração definida como sendo igual a 78.

Com isso, encerraríamos a abordagem de noções de Cálculo a alunos do Ensino Médio. Como se vê, não usamos nenhuma definição formal, tampouco técnicas ou regras de derivação ou integração. A ideia era a de apresentar as informações que os gráficos escondem e que o Cálculo Diferencial e Integral permite desvelar. Mais do que isso: buscamos, a cada passagem, fazê-lo usando apenas conteúdos previstos para o Ensino Médio. Esperamos, com isso, ter oferecido mais uma alternativa de abordagem ao professor do Ensino Médio.

5. CONCLUSÕES

Todas as experiências que tivemos como alunos de Cálculo Diferencial e Integral, inclusive a deste mestrado profissional, sugeriam a necessidade de um trabalho a questionar as bases em que se assenta o ensino de Cálculo no Brasil e a propor soluções eficazes. Um levantamento bibliográfico preliminar já foi suficiente para perceber uma enorme quantidade de documentos que se propunham a esquadrinhar e buscar soluções para um ensino que possui objetivos muito distantes dos necessários. Mais especificamente, há inúmeras sugestões de reintrodução do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio.

Entretanto, como pudemos mostrar, muitos desses textos não mostram ter compreendido o problema, de modo que justificam mal a sua busca e não propõem saídas factíveis. Raros são os autores que se limitam a fazer uso da formalização e dos conteúdos já presentes no Ensino Médio. A maioria pede mais conteúdo de Álgebra para que haja um eficaz aproveitamento por parte dos alunos. Alegar que o curso de Cálculo possui alta taxa de reprovação e propor a antecipação de elementos de Cálculo para o Ensino Médio, sem uma reflexão substantiva sobre a fundamentação desse ensino tecnicista, seja histórica, seja epistemológica, foi a situação mais comum.

Como Pereira (2009) também afirma na conclusão de seu trabalho, a prevalência da técnica sobre o significado no ensino de Matemática leva à equivocada conclusão de que o baixo desempenho dos egressos do nosso secundário em testes nacionais e internacionais, bem como os altos índices de reprovação em disciplinas matemáticas na educação superior brasileira, se devem à habilidade reduzida dos estudantes em realizar procedimentos algébricos. Se fosse esse o problema, as disciplinas de Pré-Cálculo já o teriam resolvido, pois, em geral, a ênfase desses cursos é exatamente o desenvolvimento de tal habilidade.

Além disso, muitas das propostas de reformas do ensino de Cálculo a que tivemos acesso, em realidade, não o reformam, pois insistem em ter como foco o ensino das regras para obtenção das funções derivadas e primitivas de funções comuns, como as polinomiais e as trigonométricas, mantendo a sequência de Cauchy-Weierstrass. Até mesmo propostas que introduzem a ludicidade e o trabalho colaborativo no ensino de Cálculo o fazem sem mexer no essencial: propõem-se jogos de memorização de regras de derivação e integração e novas dinâmicas de colaboração entre alunos, mas não se questionam as sequências didáticas e as prioridades inadequadas à formação de profissionais não matemáticos, como engenheiros.

Nossa proposta trabalha com conteúdos que já estão previstos no currículo da Matemática de Ensino Médio. Buscamos inserir noções elementares de Cálculo Diferencial e Integral de forma orgânica, ao longo do estudo de funções, deixando a formalização em posição secundária. Questionamos a pertinência das prioridades das sequências didáticas mais comuns. No ensino secundário, inclusive fundamentados em documentos oficiais, rejeitamos o rigor com que se faz a apresentação do conceito de funções e a necessidade de definição de conceitos que, muitas vezes, nunca são aplicados. Na educação superior, desaprovamos as prioridades atuais na abordagem do Cálculo, cujo ensino no Brasil tem raízes na Análise Matemática, o que significa rejeição à sequência histórica de desenvolvimento do Cálculo e priorização de definições formais em detrimento da apresentação do Cálculo como poderosa ferramenta, plena de possíveis aplicações nas mais diversas áreas.

Nossa sugestão coloca como central a construção de gráficos e a obtenção de informações a partir deles, informações que o aluno de Ensino Médio não teria como saber que são facilmente obtidas do gráfico sem conhecer os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. De fato, o objetivo do Cálculo no Ensino Médio nunca poderia ser o de aumentar a quantidade de memorização de informações que, em geral, são de aplicação restrita. Uma vez que o perfil do aluno desse nível de ensino é bastante diverso, é preciso pensar nas diversas aplicações cotidianas da Matemática de Ensino Médio. E isso, como esperamos ter mostrado, as noções e os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral têm de sobra.

Sabemos o quanto é difícil mudar uma cultura negativa tão arraigada no ensino de Matemática no Brasil. Trata-se de um pensamento, raras vezes escrito, mas frequentemente verbalizado, que busca desdenhar das intenções de ampliar a interdisciplinaridade em Matemática no Brasil e critica os avanços ocorridos em países cuja educação matemática mostra resultados superiores à nossa em avaliações internacionais. O referido pensamento cria entendimentos universais a partir de leituras pessoais de mundo, sem qualquer base na literatura especializada, em especial a da comunidade internacional de pesquisadores em educação matemática.

Ainda assim, temos a esperança de que o presente trabalho possa representar mais um pequeno tijolo na construção de uma Matemática mais útil e mais universal no Ensino Médio. Afinal, só podemos esperar que a educação básica seja mais eficaz se readequarmos suas prioridades. A educação básica precisa ser básica. É o que este trabalho buscou mostrar.

REFERÊNCIAS*

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A Matemática da reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. 2004. 257 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, n.18, p.1-9, 1991.

_______. **Introdução às funções e à derivada**. São Paulo: Atual, 1994.

_______. O ensino do Cálculo e da Análise. **Matemática Universitária**, n.33, p.83-95, dez.2002.

_______. Se eu fosse professor de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n.54, p.2-11, 2004.

_______. Limites e derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, n.60, p.30-38, 2006a.

_______. Derivadas e Cinemática. **Revista do Professor de Matemática**, n.61, p.25-30, 2006b.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 24., 2001, Caxambu, MG. **Anais...** Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2001. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf>. Acesso em: 1 abr.2017.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2009.

BOROWIK, Alexandre; KATZ, Mikhail G. Who gave you the Cauchy–Weierstrass tale? The dual history of rigorous Calculus. **Foundations of Science**, v.17, n.3, p.245-276, ago.2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 1 abr.2017.

---

* De acordo com:
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Bases Legais. Brasília: MEC/Semtec, 1999b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 1 abr.2017.

_______. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Semtec/MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 1 abr.2017.

_______. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: matemática: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 2014.

_______. Universidade de Brasília. Departamento de Matemática. Cálculo 1. **Lista de Aplicações**: semana 12. Brasília: Universidade de Brasília, 2017.

BRITO, Janylson Claydson Silva. **O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio**. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

CHASSOT, Attico. Do rigor cartesiano disciplinar à indisciplinaridade feyerabendiana. **Química Nova na Escola**, v.38, n.2, p.127-132, maio 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5935/0104-8899.20160017>. Acesso em: 22 fev.2017.

CHEVALLARD, Yves. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias**. Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.3, n.2, p.1-14, maio/ago.2013. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2338/1111>. Acesso em: 22 fev.2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, v.31, n.1, p.99-120, jan./abr.2005.

DELIZOICOV Neto, Demétrio. **Concepção problematizadora para o ensino de ciências na educação formal**: relato e análise de uma prática educacional na Guiné-Bissau. 1982. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Instituto de Física e Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1982.

DRUCKER, Peter. **Sociedade pós-capitalista**. São Paulo: Pioneira, 1997.

DUCLOS, Robert Costallat. Cálculo do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, n.20, p.26-30, 1992.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. Reflexões metodológicas sobre a tese: "Interdisciplinaridade – um projeto em parceria". In: _______. **Metodologia da pesquisa educacional**. 9.ed. São Paulo: Cortez, 2004.

FIEDLER-FERRARA, Nelson; MATTOS, Cristiano Rodrigues de. Seleção e organização de conteúdos escolares: recortes na pandisciplinaridade. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, 8., 2002, Águas de Lindóia, SP. **Atas...** Águas de Lindóia, SP:

Sociedade Brasileira de Física, 2002. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/viii/PDFs/CO81_2.pdf>. Acesso em: 1 abr.2017.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005a.

GERMANO, José Willington. As quarenta horas de Angicos. **Educação & Sociedade**, Campinas, v.18, n.59, p.389-393, ago.1997.

GODOY, Elenilton Vieira. **Currículo, cultura e educação matemática**: uma aproximação possível? Campinas: Papirus, 2015.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L.; SOBECKI, David; PRICE, Michael. **Applied Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences**: expanded edition. 11th ed. New York: McGraw-Hill, 2013.

HOFFMANN, Laurence D.; ORKIN, Michael. **Mathematics with applications**. New York: McGraw-Hill, 1979.

KUHN, Thomas S. **The Structure of Scientific Revolutions**: 50th Anniversary Edition. Chicago: UCP, 2012.

LANDAU, David P.; BINDER, Kurt. **A guide to Monte Carlo simulations in Statistical Physics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003.

LIMA, Gabriel Loureiro de; SILVA, Benedito Antonio da. Inicialmente Cálculo ou diretamente Análise? O caso do curso de Matemática da USP. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2011. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/ xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/333/88>. Acesso em: 1 abr.2017.

LÜCK, Heloísa. **Pedagogia interdisciplinar**: fundamentos teórico-metodológicos. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

MACHADO, Nílson José. Cálculo Diferencial na Escola Básica: possível e necessário. **Seminários de Ensino de Matemática**, p.1-11, 1.sem.2008. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080311.pdf>. Acesso em: 15 fev.2017.

________. Ensino de matemática: das concepções às ações docentes. In: ARANTES, Valéria Amorim (org.). **Ensino de Matemática**: pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, 2014.

MENEZES, Luís Carlos de. **Aprender com o imponderável**. Canal TEDx Talks. 28 ago.2010. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Lbp0tqgQR-s>. Acesso em: 8 jun.2017.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORAES, Maria Candida Borges de. **O paradigma educacional emergente**. Campinas: Papirus, 2002.

MOTA, Janaina Oliveira. **Derivadas no Ensino Médio**: reflexões e propostas. 2014. 37 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2014.

NAE. National Academy of Engineering. **Educating the engineer of 2020**: Adapting engineering education to the new century. Washington, DC, EUA: National Academies Press, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.17226/11338>. Acesso em: 2 fev.2017.

NASS, Daniel Perdigão. **Gráficos como representações visuais relevantes no processo ensino-aprendizagem**: uma análise de livros didáticos de Química do Ensino Médio. 2008. 237 f. Dissertação (Mestrado em Química Analítica). Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues de. **Uma proposta para o ensino de noções de Cálculo no Ensino Médio**. 2010. 58 f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

PASSOS, Ivan Carlin. **A interdisciplinaridade no ensino e na pesquisa contábil**: um estudo do município de São Paulo. 2004. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

PERDIGÃO-NASS, Daniel. Uso de fatores de conversão no ensino de Cálculos Químicos para o nível médio: o desenvolvimento e a opinião dos alunos. In: Encontro Nacional de Ensino de Química, 14., 2008, Curitiba, PR. **Anais...** Curitiba, PR: Sociedade Brasileira de Química, 2008.

_______. Cálculo Diferencial e Integral na visão de atuais e futuros professores de exatas. In: SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 1., 2013, Brasília, DF. **Anais...** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

PERDIGÃO-NASS, Daniel; IPOLITO, Michelle Zampieri. Representações visuais em livros didáticos de Física para o Ensino Médio: analisando gráficos cartesianos de Cinemática. In: Simpósio Nacional de Ensino de Física, 18., 2009, Vitória, ES. **Anais...** Vitória, ES: Editora da Universidade Federal do Espírito Santo, 2009.

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. **Cálculo no Ensino Médio**: uma proposta para o problema da variabilidade. 2009. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

PERNAMBUCO, Marta Maria Castanho Almeida. **Educação e escola como movimento**: do ensino de ciências à transformação da escola pública. 1994. 156 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

PYZDROWSKI, Laura J.; SUN, Ye; CURTIS, Reagan; MILLER, David; WINN, Gary; HENSEL, Robin A.M. Readiness and attitudes as indicators for success in college Calculus. **International Journal of Science and Mathematics Education**, n.11, p.529-554, 2013.

RAAD, Marcos Ribeiro. **História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral**: a existência de uma cultura. 2012. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

REIS, Júlio Paulo Cabral dos; LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe de. A criação de um objeto de aprendizagem para resolver problemas de fenômenos físicos com taxas relacionadas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p.750-774, 2013.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 449 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, Marcelo de Sousa. **Um estudo sobre a introdução de conceitos de Cálculo no Ensino Médio**. 2012. 92 f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SOARES, Flávia dos Santos; DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. Ensino de Matemática no século XX – da reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v.22, n.1, p.7-15, jan./jun.2004.

SODRÉ, Fernanda Cavaliere Ribeiro; MATTOS, Cristiano Rodrigues de. Abordagem de livros didáticos sobre a relação entre Física e Nutrição. In: Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, 10., 2006, Londrina. **Atas...** Londrina, PR: Sociedade Brasileira de Física, 2007. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/x/sys/resumos/ t0136-1.pdf>. Acesso em: 1 abr.2017.

SOUZA, Giseli Martins de. **Felix Klein e Euclides Roxo**: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX. 2010. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio**. 2002. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

TEDESCHI, Wania. A curiosidade epistemológica e atividade de ensino: experiências com o Cálculo na formação de professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem>. Acesso em: 17 jul.2013.

TELES, Elizabeth J. Calculus Reform: what was happening before 1986? **Primus**: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, v.2, n.3, p.224-234, 1992. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/10511979208965665>. Acesso em: 1 abr.2017.

THIESEN, Juares da Silva. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**, v.13, n.39, p.545-554, set./dez.2008.

TOMAS, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.