Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Gracielle Simões de Carvalho

Geometrias Não Euclidianas: Uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Gracielle Simões de Carvalho

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: UMA PROPOSTA DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

C331g
2017

Carvalho, Gracielle Simões de, 1983-
Geometrias não euclidianas : uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico / Gracielle Simões de Carvalho. - Florestal, MG, 2017.
xii, 49f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Danielle Franco Nicolau Lara.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.49.

1. Geometria (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Geometrias não euclidianas. 3. Esfera. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.3

GRACIELLE SIMÕES DE CARVALHO

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: UMA PROPOSTA DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 07 de agosto de 2017.

Jeanne Carmo Amaral Dias

Mehran Sabeti

Elisângela Aparecida de Oliveira
(Coorientadora)

Danielle Franco Nicolau Lara
(Orientadora)

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha amada irmã Glenda por todo incentivo, companheirismo e suporte emocional.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à amiga Eliane Alves pela insistência e estímulo: você é a grande "culpada" disso tudo.

À minha irmã Glenda por estar sempre do meu lado e suportar meus momentos de inquietações.

À minha "mãedrinha" Jane por todo amor e por sempre ter palavras lisonjeadoras que acalentam meu coração.

À amada amiga Silviane por todo incentivo, preocupação, por compreender minhas ausências, pelo carinho e cuidado dedicados a mim.

À amiga Rafaella, irmã de vida, afeto que supera todas as divergências.

Aos amigos Adriana e Helvécio pela prestatividade, assistência intelectual e psicológica.

À Escola Municipal Josefina Souza Lima e a querida amiga Eliane por ter proporcionado a realização do meu trabalho.

Ao amigo Matheus por sempre se fazer presente na minha vida e pela sua contribuição no abstract deste trabalho.

Às minhas companheiras de trabalho Marília, Sara e Natália por todo apoio e compreensão nos meus dias mais árduos.

Aos amigos do PROFMAT: minha eterna gratidão! Não só por todo companheirismo, pelos dias, noites e madrugadas de estudos compartilhados, mas também pelos inúmeros momentos de descontração e muitas risadas. Especialmente, agradeço à Ana Paula e Lívia por todas as caronas e boas conversas.

Aos professores que passaram pela minha vida e contribuíram para meu crescimento intelectual e me fizeram apreciar ainda mais a matemática e, principalmente, a geometria. Em particular, agradeço à minha orientadora Danielle.

Muito obrigada a todos que me encorajaram, torceram e oraram por mim. E, acima de tudo, agradeço a Deus: sem ele nada sou. Gratidão pela sua fidelidade, por me capacitar mesmo nos períodos de grandes tribulações e por colocar tantas pessoas admiráveis e inspiradoras na minha vida.

"As leis da natureza não são senão os
pensamentos matemáticos de Deus."
Euclides de Alexandria

Resumo

CARVALHO, Gracielle Simões de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2017. **Geometrias Não Euclidianas: Uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico**. Orientadora: Danielle Franco Nicolau Lara.

O presente trabalho expõe um estudo sobre as Geometrias Não Euclidianas, especialmente da Geometria Esférica, objetivando apresentar uma proposta de sua inserção no ensino básico. Em um primeiro momento, apresentamosuma pesquisa histórica sobre Euclides, o seu famigerado postulado das paralelas, bem como um relato sobre os matemáticos que se destacaram no estudo das "novas geometrias". Apresentamos também, um breve relato sobre as Geometrias Não Euclidianas com estudo mais direcionado na Geometria Esférica. Por fim, propomos uma atividade cujo intuito é apresentar aos alunos do ensino básico definições importantes da Geometria Esférica, objetivando aguçar o interesse e a curiosidade desses com o uso de uma atividade exploratória, empregando exemplos de aplicabilidade dessa geometria no cotidiano, buscando assim, tornar a aprendizagem mais acessível e agradável.

Palavras-chave: Quinto Postulado de Euclides, Geometrias Não Euclidianas, Geometria Esférica, Ensino de Geometria.

Abstract

CARVALHO, Gracielle Simões de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2017. **Geometrias Não Euclidianas: Uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico**. Adviser: Danielle Franco Nicolau Lara.

The present work presents a study on Non - Euclidean Geometries, especially of Spherical Geometry, aiming to present a proposal of its insertion in basic education. First, we present a historical research on Euclid, his infamous postulate of parallels, and present an account of the mathematicians who excelled in the study of ”new geometries”. We also present a brief report on Non - Euclidean Geometries with more direct study in Spherical Geometry. Finally, we propose an activity whose purpose is to present to students of basic education important definitions of Spherical Geometry, aiming to sharpen the interest and curiosity of students with the use of an exploratory activity with the use of examples of applicability of this geometry in everyday life, looking for Thus making learning more accessible and enjoyable.

Keywords: Euclid's Fifth Postulate, Non-Euclidean Geometries, Spherical Geometry, Geometry Teaching.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α	letra grega Alfa
β	letra grega Beta
γ	letra grega Gama
δ	letra grega Delta
ϵ	letra grega Épsilon
ζ	letra grega Zeta
η	letra grega Eta
θ	letra grega Teta
ι	letra grega Iota
κ	letra grega Kapa
λ	letra grega Lambda
μ	letra grega Mi
ν	letra grega Ni
ξ	letra grega Xi
o	letra grega Ômicron
π	letra grega Pi
ρ	letra grega Rô
σ	letra grega Sigma
τ	letra grega Tau
υ	letra grega Úpsilon
ϕ	letra grega Fi
χ	letra grega Chi
ψ	letra grega Psi
ω	letra grega Ômega

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A geometria é uma área da matemática de muita importância, o seu aprendizado é de grande valia até mesmo para outras áreas de conhecimento. Apesar disso, ainda há certa dificuldade no tratamento da geometria no ensino básico, tanto no ensino quanto na aprendizagem. Durante muito tempo, a geometria se caracterizou como o conteúdo dos capítulos finais dos livros de Matemática, por esse motivo, muitas vezes, nem era trabalhada pelos professores por falta de tempo e, também, por certa insegurança da parte dos docentes. Atualmente isso tem mudado e a geometria vem dividindo lugar com a álgebra e a aritmética, tomando seu devido grau de importância nas aulas de Matemática.

Porém, o conteúdo geométrico abordado nas escolas de ensino fundamental e médio se resumem, basicamente, ao estudo das Geometria Euclidiana, Geometria Espacial e Geometria Analítica. Pouco ou quase nunca se aborda a existência das Geometrias Não Euclidianas. No entanto, é razoável pensar que a Geometria Euclidiana não contempla o estudo de todas as superfícies e objetos ao nosso redor, deixando assim, algumas brechas.

As Geometrias Não Euclidianas explicam e demonstram, coerentemente, certos fenômenos não explicados pela Geometria Euclidiana, como exemplo, temos o estudo da esfera e sua associação com o globo terrestre e tal estudo não é explicado pela Geometria Euclidiana.

É na Geografia que os estudantes entram em contato com conceitos como: coordenadas geográficas, latitude, longitude, paralelos, meridianos entre outros. Por que não trabalhar essa geometria interdisciplinarmente? Junto com a Geografia, podemos inserir o conceito do estudo matemático de superfícies não planas.

> A utilização do globo terrestre, com suas consequentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, ou ainda, a confecção de mapas por meio de diversas projeções, abre caminho

> para um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia. ([2], p.8)

Vale salientar que é importante a inserção dos conceitos das Geometrias Não Euclidianas associadas às aplicações no nosso cotidiano, dessa maneira, conceitos em princípio abstratos aos olhos dos alunos tornam-se mais fáceis de serem compreendidos. Assim, a curiosidade e o prazer por se estudar matemática são aguçados. E pode-se utilizar tecnologias que nos trazem comodidade e conforto.

Um belo exemplo é o estudo da Geometria Esférica para ensinar o funcionamento de um importante dispositivo móvel muito utilizado atualmente: o GPS. A sigla GPS é abreviatura para Global Positioning System, ou ainda, Sistema de Posicionamento Global, e uma de suas principais funções é a navegação, e por isso é utilizado em aeronaves, navios, veículos, mas também desempenha um papel importante em alguns contextos como: no monitoramento de abalos sísmicos- os sinais captados pelo GPS tentam prever a ocorrência de terremotos com algumas horas de antecedência; no estudo de meteorologia- o GPS gera informações sobre a meteorologia e estudo do clima; no uso militar- com o uso do GPS é possível identificar áreas de ataques, bombardeio de aeronaves, defesa aérea, rastreamento de minas e radares inimigos; e ainda guia para resgaste- o GPS auxilia helicópteros de socorro até a localização do acidente.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é expor um breve estudo sobre as Geometrias Não Euclidianas, especialmente, sobre a Geometria Esférica. Apresentaremos uma pesquisa histórica sobre Euclides e o seu Quinto Postulado, além dos matemáticos que se destacaram no estudo dessas “Novas Geometrias”. Por fim, será proposta uma atividade cujo intuito é apresentar aos alunos do Ensino Básico definições importantes da Geometria Esférica, objetivando aguçar o interesse e a curiosidade deles para a aplicabilidade e a aprendizagem da Geometria Esférica.

2

Contexto Histórico

Para se falar das Geometrias Não Euclidianas, inicialmente, precisamos falar da Geometria Euclidiana.

A palavra Geometria resulta dos termos gregos ”geo”(terra) e ”métron”(medir), ou seja, é o ramo da matemática destinado ao estudo de questões relacionadas à forma, tamanho, posição relativos entre figuras do espaço. Trata-se de uma ciência bastante antiga. Alguns conhecimentos geométricos não triviais já eram desbravados no Egito Antigo, na Babilônia e na Grécia.

No entanto, a matemática antiga do Egito e da Babilônia, quase não se utilizava de nenhuma complexidade que sobressaia à matemática grega. Podemos assim estabelecer que a geometria, na forma que compreendemos, teve seu berço na Grécia, na época de Ptolomeu I, tempo no qual Euclides (300 a.C.) escreveu a obra Elementos.

Antes disso, porém, não podemos nos esquecer de que Tales de Mileto (600 a.C.) teve papel significativo no desenvolvimento da geometria dedutiva, e que Pitágoras (540 a.C.) já apresentava argumentos geométricos sofisticados como a descoberta das grandezas incomensuráveis, bem como o próprio Teorema de Pitágoras. Ademais, Aristóteles (340 a.C.) também teve grande importância na sistematização da lógica dedutiva, o grande feito de Euclides foi reunir em um livro todos estudos já realizados.

2.1 Euclides de Alexandria e o Quinto Postulado

Pouco se sabe da vida e da personalidade de Euclides de Alexandria, discípulo da escola platônica, pois acredita-se que ele foi o fundador da famosa e consolidada escola de Alexandria, e ainda, que ele tenha liderado um grupo de estudos. Euclides é considerado o pai da Geometria, já que se destacou ao obter resultados nada óbvios que serviam de instrumento para expandir conhecimentos ainda mais requintados. Ele foi inovador, por tentar escrever de outra forma teoremas sofisticados, desenvolvendo o método axiomático da geometria. Vale salientar que o método axiomático foi uma prática exposta pelo grego Aristóteles (384 a.C) como sendo uma forma de produzir uma teoria científica.

Figura 2.1: Euclides de Alexandria

A obra Os Elementos é a segunda que teve mais edições em toda a história da humanidade, só perdendo para a Bíblia, e nela, Euclides compilou resultados já conhecidos de outros matemáticos não só de geometria, mas também de aritmética e álgebra. Ele se tornou notável já que sua obra é considerada o primeiro tratado científico, no qual encontramos conceitos fundamentais da matemática, apresentados de forma revolucionária.

> Contrariamente à impressão muito difundida, os Elementos de Euclides não tratam apenas de geometria- contém também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 proposições distribuídas em trezes livros. Os textos de geometria plana e espacial da escola secundária americana trazem basicamente o material que se encontra nos livros I, III, IV, VI, XI e XII dos Elementos. ([7], p.169)

A obra Os Elementos é composta de treze livros e sua teoria se desenvolveu com o uso de três tipos de princípios matemáticos: definições, noções comuns e postulados. Ainda de acordo com [7], o Livro I é dividido em três grupos, sendo as primeiras vinte e seis proposições compostas de tratados sobre teoria elementar dos triângulos, nas proposições de 27 a 32 é apresentada a teoria das retas paralelas (que prova que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos) e por fim, a partir da proposição 34 são exibidas noções de áreas de paralelogramo e triângulo, o que tem como consequência o teorema de Pitágoras, o qual é exposto nas proposições 47 e 48.

Euclides apresentou dez axiomas que foram separados em dois grupos: as noções comuns e os postulados. Segundo [3] a distinção entre esses dois grupos não é muito clara, esse autor trata as noções comuns como sendo hipóteses aceitáveis a toda ciência, enquanto os postulados seriam hipóteses peculiares da geometria.

Utilizaremos aqui os enunciados propostos por tal autor, que empregou algumas alterações, sendo tais enunciados não rigorosamente idênticos com os apresentados em Elementos, porém, tais alterações foram feitas para representar a maneira pela qual Euclides efetivamente empregou para as demonstrações dos teoremas.

I) Noções Comuns

N1) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.

N2) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

N3) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

N4) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

N5) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

II) Postulados

P1) Pode-se tratar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

P2) Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

P3) Pode-se tratar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

P4) Todos os ângulos retos são iguais.

P5) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

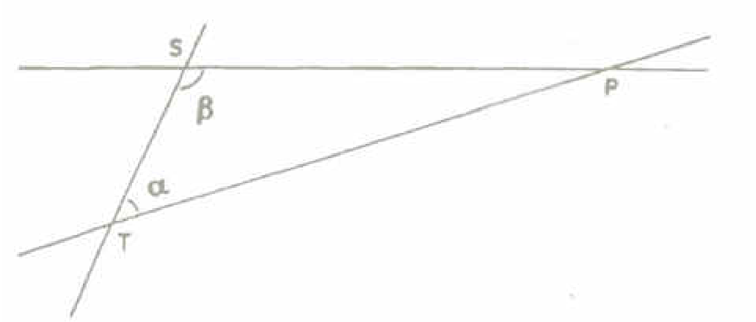


Figura 2.2: O Quinto Postulado de Euclides

Introduzido no contexto matemático geométrico, os quatro primeiros postulados propostos por Euclides figuram como aparentemente compreensíveis e óbvios. Todavia, o Quinto Postulado, mais conhecido como Postulado das Paralelas, desassemelha-se dos demais, uma vez que possui certa complexidade sendo pouco irrefutável.

2.2 As tentativas de demonstração do Quinto Postulado e o surgimento das Geometrias Não Euclidianas

O Postulado das Paralelas sempre causou certo desconforto e controvérsia por parte dos estudiosos, desde a época de Euclides. Por se tratar de um postulado de entendimento nada imediato, alguns acreditavam na possibilidade de se tratar de um teorema e que ele pudesse ser demonstrado, a partir dos quatro primeiros postulados, já outros presumiam uma substituição desse postulado por algum conceito mais preciso e simples. Assim, foram feitas diversas tentativas vãs para provar sua legitimidade.

Muitas dessas tentativas frustradas consistiam nada mais do que na elaboração de afirmações equivalentes ao Quinto Postulado ou admitiam fatos que não podiam ser demonstrados, utilizando exclusivamente, os quatro primeiros postulados. E essa busca gerou afirmações equivalentes para o Postulado das Paralelas. Cito abaixo algumas dessas equivalências e o matemático responsável por tal tentativa de demonstração ao longo dos anos:

- Retas paralelas são equidistantes- Poseidonios (séc I a.C);

- Dada duas retas paralelas, uma terceira reta que encontre uma, encontrará também, a outra- Proclus (séc V);

- Dados três pontos não pertencentes a uma mesma reta é sempre possível traçar um círculo que passe por eles- Adrien-Marie Legendre, Farkas Bolyai (início séc XIX);

- A soma dos ângulos de todo triângulo é 180º- Euclides (300 a.C.), Girolamo Saccheri (1733), Adrien-Marie Legendre (início do séc XIX);

- Existe ao menos um retângulo. Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes- Girolamo Saccheri (1733);

- Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada- John Playfair (1795).

Uma equivalência do Quinto Postulado que devemos enfatizar é a de Girolamo Saccheri. De acordo com [3], a equivalência proposta por Saccheri é considerada a mais importante, por ter sido a primeira a abranger a viabilidade de outras Geometrias que não a de Euclides, gerando assim, diversas consequências.

Apesar dos desapontamentos na prova do Quinto Postulado, não podemos deixar de mencionar que cada uma dessas tentativas teve sua devida relevância e contribuição para a então chamada Geometria Euclidiana e exibiram a complexidade do Quinto Postulado.

Há uma ideia de que o próprio Euclides acreditava que o Quinto Postulado deveria ser provado, já que só é utilizado a partir da proposição 29 da sua obra, logo as 28 proposições iniciais de Euclides são válidas para qualquer geometria. Todavia, hoje se sabe que a veracidade do Quinto Postulado submete-se diretamente à superfície geométrica da qual se é trabalhada, ou seja, o famigerado Postulado das Paralelas só é verídico quando inserido na Geometria Euclidiana que se trata de superfícies planas. Nesse caso, fica o questionamento: como estabelecer conceitos geométricos sobre superfícies curvas?

Em suma, das inúmeras tentativas fracassadas de se provar o Quinto Postulado de Euclides, obteve-se várias proposições intrigantes que decorreram do método de prova pela redução a um absurdo, ou seja, da negação do Postulado das Paralelas, o qual abriu lacunas, originando assim a "Nova Geometria".

2.3 Os grandes nomes das Geometrias Não Euclidianas

De acordo com [7], um grande progresso matemático evidente e revolucionário ocorrido na primeira metade do século XIX, foi a descoberta, perto de 1829, de uma geometria autoconsistente, distinta da Geometria habitual de Euclides. Abordaremos aqui as contribuições de alguns matemáticos que se destacaram por serem os então precursores das Geometrias Não Euclidianas.

2.3.1 John Playfair

O matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819) foi o responsável por uma das propostas moderna da equivalência do Quinto Postulado de Euclides, mais conhecida e difundida nos textos matemáticos atuais.

Como já dito na seção anterior, a versão de Playfair para o Postulado das Paralelas foi: "Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada". Tal versão foi muito utilizada por sucessores de Playfair, sendo fundamentada em três perspectivas: por um ponto dado pode-se traçar mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a uma reta dada.

Figura 2.3: John Playfair

2.3.2 Girolamo Saccheri

Adepto do método de prova pela redução a um absurdo, o padre jesuíta e professor italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), foi o responsável pela primeira análise, efetivamente, científica do Quinto Postulado de Euclides que só foi publicada em 1773.

O método da redução por absurdo, utilizado por Saccheri, teve como propósito aprimorar os resultados da negação do Postulado das Paralelas, tentando assim desenvolver uma geometria controvérsia, uma vez que originava da incontestabilidade de que o Postulado das Paralelas era absolutamente pertinente.

Figura 2.4: Girolamo Saccheri

Em seu trabalho, Saccheri tomou as 28 primeiras proposições de Euclides e demonstrou, sem erros, alguns teoremas. No entanto, seu propósito era o de finalizar o trabalho com a demonstração do Quinto Postulado. Para isso, ele utilizou um quadrilátero $ABCD$ cujo os ângulos da base AB são retos e os lados AD e BC são congruentes.

Figura 2.5: Quadrilátero de Saccheri

De acordo com o postulado de Euclides, tal quadrilátero teria que ter o lado CD igual à base AB e assim os ângulos C e D também seriam ângulos retos, ou seja, tal quadrilátero seria um retângulo.

Tomando as diagonais AC e BD, Saccheri empregou o teorema de congruência de triângulos para chegar à conclusão de que os ângulos C e D são iguais. O que gerou três hipóteses: os ângulos C e D são iguais e agudos, são retos ou são iguais e obtusos.

Para o caso da hipótese do ângulo obtuso, Saccheri, assim como Euclides, empregou a dedução da infinitude da reta, ou seja, partindo do pressuposto de que uma reta é infinita, ele conseguiu rejeitar tal hipótese. Porém, no caso da hipótese do ângulo agudo, não alcançou um resultado satisfatório utilizando a redução por absurdo.

> Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da Geometria Não Euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. Não tivesse ele mostrado tão ávido de exibir uma contradição, os méritos da descoberta da Geometria Não Euclidiana caberiam a ele. ([7], p.540)

2.3.3 Johann Heinrich Lambert

Matemático suíço autodidata, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), também é um nome que configura entre os estudiosos da descoberta da Geometria Não Euclidiana. Mesmo não tendo conhecimento dos feitos de Saccheri, Lambert desenvolveu um trabalho sobre o Postulado das Paralelas que se utilizava também da técnica de redução por absurdo, porém obteve resultados bem mais convincentes.

Figura 2.6: Johann Heinrich Lambert

Nos seus estudos, Lambert considerou um quadrilátero com três ângulos retos e em relação ao quarto ângulo, semelhantemente, a Saccheri, levou em consideração três hipóteses: o quarto ângulo é agudo, é reto ou é obstuso.

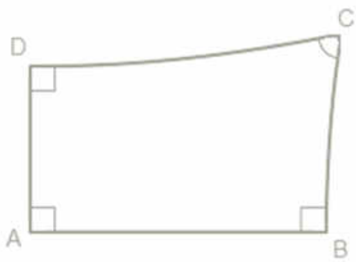


Figura 2.7: Quadrilátero de Lambert

Para o caso do quarto ângulo ser reto, temos o Quinto Postulado de Euclides. Quanto ao caso do ângulo obtuso, Lambert chegou ao mesmo desfecho que Saccheri, descartando tal hipótese. Já no caso do ângulo agudo, os resultados ainda continuaram insatisfatórios.

No entanto, Lambert teve mais sucesso ao concluir alguns teoremas, considerando o quarto ângulo agudo, dentre eles um muito importante que, posteriormente, foi reconhecido no tratamento da então Geometria Não Euclidiana: "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que 180°."

2.3.4 Johann Carl Friedrich Gauss

Desde o começo do século XIX, o matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostrava-se certo interesse com a tentativa de se provar o Quinto Postulado, ou negá-lo.

Figura 2.8: Johann Carl Friedrich Gauss

Entretanto, apesar de ter sido o primeiro matemático a nomear a Nova Geometria como Não Euclidiana, Gauss não publicou nada a respeito. Tudo que se sabe provém de seus livros de anotações, cartas e notas inéditas em suas pesquisas, que mostram indício de todo seu conhecimento e desenvolvimento sobre a "Nova Geometria".

> Os teoremas desta geometria parecem paradoxais e, para um não iniciado, absurdos; mas uma reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contém nada de impossível.
> Trecho de uma carta a Franz Adolph Taurinus, em Gottingen de 08/11/1824 ([3], p.38)

A ponderação de Gauss em não publicar seus feitos é facilmente entendida, uma vez que a filosofia de Kant, que era fundamentada no conhecimento empírico, imperava na época. Na sua mais célebre obra, Crítica da Razão Pura, Kant nomeia a superfície Euclidiana como "necessidade inevitável do pensamento", logo é compreensível a sabedoria de Gauss de não divulgar suas pesquisas a respeito do que ele chamou de Geometria Não Euclidiana.

A não publicação dos estudos de Gauss, fez com que o reconhecimento da descoberta da "Nova Geometria" fosse compartilhado com Bolyai e Lobachevsky.

2.3.5 Nicolai Ivanovitch Lobachevsky

Embora todo mérito tenha sido atribuído a Gauss, foi o matemático russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) o mentor oficial da Geometria Não Euclidiana, por ter sido dele a primeira publicação sobre tal assunto.

Figura 2.9: Nicolai Ivanovitch Lobachevsky

Lobachevsky foi visto como uma “pessoa excêntrica” por causa do seu interesse pela Geometria Não Euclidiana. Apesar do seu trabalho arrojado, ele teve pouco ou quase nenhum reconhecimento, talvez pelo fato de sua primeira publicação ter sido escrita em russo.

Na expectativa de ser reconhecido, Lobachevsky ainda escreveu outros trabalhos sobre o assunto e, um ano antes de seu falecimento, elaborou uma versão em francês chamada Pangéométrie, o que fez com que a geometria sugerida pelo mesmo ficasse conhecida como Pangeometria.

O ponto elementar do trabalho de Lobachevsky foi a negação do Quinto Postulado de Euclides, em que ele sugeriu uma “Nova Geometria” na qual admitisse que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada, e que a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois ângulos retos.

Lamentavelmente, Lobachevsky morreu sem presenciar a condecoração do seu trabalho.

2.3.6 Johann Bolyai

Nascido na Hungria, Johann Bolyai (1802-1860) foi filho de Farkas Bolyai, um professor de matemática e amigo íntimo de Gauss.

Figura 2.10: Johann Bolyai

Bolyai foi encorajado por seu pai a estudar o Postulado das Paralelas. Assim, em 1832, após cinco anos de estudos, publicou os resultados de sua pesquisa sobre tal geometria como um apêndice de um trabalho amplo de seu pai.

Como ponto chave de seu trabalho, Bolyai negou o Quinto Postulado de Euclides, constatando que a existência de duas retas paralelas a uma reta dada, ocasionava, na verdade, a existência de uma infinidade de retas paralelas a uma reta dada.

Ao receber as primeiras reproduções da publicação do filho do amigo, Gauss fez a seguinte análise:

> Se eu começasse com a afirmação de que não ouso louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria: mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo. ([3], p.43)

Ainda segundo [3], Bolyai teria ficado decepcionado após saber que outro havia feito as mesmas investigaçõess que ele, tendo assim que dividir os louros da vitória.

2.3.7 Georg Friedrich Bernhard Riemann

No início do século XIX, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) se atentou para um lapso cometido por Euclides, Saccheri e outros precursores: o fato deles terem adotado, sem questionamentos, que uma reta é ilimitada e infinita.

Figura 2.11: Georg Friedrich Bernhard Riemann

Riemann, então, propôs que tal fato fosse válido somente para uma superfície Euclidiana. E assim, originava uma geometria que condizia exatamente com a hipótese do ângulo obtuso de Saccheri.

Portanto, Riemann trabalhou com a outra negação ao Postulado das Paralelas: por um ponto fora de uma reta não existe nenhuma reta paralela à reta dada. Ou ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180º.

3

Geometrias Não Euclidianas

Nos primórdios do século XIX, o Postulado das Paralelas continuava se mostrando impreciso, não apropriado de ser tratado como uma verdade incontestável, ou ainda, não se tinha a certeza se poderia ser aceito ou não fora de uma superfície que não fosse a Euclidiana. Vale ainda enfatizar que nessa época os trabalhos de matemáticos como Saccheri e Lobachevsky eram praticamente desprezados e ainda vistos como conceitos um tanto quanto absurdos.

Entretanto, as incertezas causadas pelo Quinto Postulado e os estudos dos precursores sobre a possibilidade de uma geometria distinta da de Euclides abriram precedentes para o surgimento de duas "Novas Geometrias", negando o Quinto Postulado:

• Por um ponto fora de uma reta, existe pelo menos duas retas paralelas à reta dada.

• Por um ponto fora de uma reta, não existe reta paralela à reta dada.

A primeira foi fundamentada na superfície hiperbólica, denominada então de Geometria Hiperbólica, e a segunda na superfície esférica, chamada de Geometria Esférica.

Pode-se expressar que o diferencial entre essas superfícies é a curvatura de cada uma. Tal definição não será aprofundada nesse trabalho, porém no apêndice consta uma breve explicação e alguns conceitos triviais sobre como se determina a curvatura de uma superfície.

Intuitivamente, o plano representado pela Geometria de Euclides, não possui curvatura, ou seja, sua curvatura é zero. Já a Geometria Hiperbólica, é definida em superfícies de curvaturas negativas enquanto que a Geometria Esférica é definida em superfícies de curvaturas positivas.

Figura 3.1: Exemplos de Curvatura das Superfícies Hiperbólica, Euclidiana e Esférica

Vale ainda ressaltar que esses são só alguns exemplos de superfícies. A superfície conhecida como sela, representa apenas um dos modelos da Geometria Hiperbólica, posteriormente veremos um outro modelo conhecido como pseudo-esfera. Outro exemplo a ser citado é o da superfície elíptica que, assim como a superfície esférica, possui curvatura positiva.

Essas geometrias se diferem em alguns conceitos básicos, como pode-se observar na tabela seguinte.

CONCEITOS BÁSICOS	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA HIPERBÓLICA	GEOMETRIA ESFÉRICA
Dados uma reta r e um ponto P exterior a r	É possível traçar somente uma reta por P paralela a r	É possível traçar pelo menos duas retas por P paralelas a r	Não é possível traçar nenhuma reta por P paralela a r
Interseção de duas retas distintas	É um ponto	É um ponto	São dois pontos antípodas (pontos diametralmente opostos)
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira	São paralelas	São paralelas	Se interceptam
A soma dos ângulos internos de um triângulo	É igual a dois ângulos retos	É menor que dois ângulos retos	É maior que dois ângulos retos

Figura 3.2: Comparações básicas entre as Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Esférica

Diante da apresentação desses detalhes que caracterizam cada uma das geometrias, iremos agora trabalhar com algumas particularidades da Geometria Hiperbólica e, principalmente, da Geometria Esférica, que é o ponto chave do nosso trabalho. Vale ainda salientar, que ambas as geometrias admitem os quatro primeiros postulados de Euclides como verdadeiros, isto é, tais postulados não perdem a validade nessas

"Novas Geometrias".

3.1 A Geometria Hiperbólica

A versão do Quinto Postulado de Euclides embasada na superfície hiperbólica ficou conhecida como Postulado de Lobachevsky, por ter sido ele o seu inventor: "Por um ponto exterior a uma reta, passa pelo menos duas retas paralelas à reta dada".

Um sistema axiomático deve ser consistente, independente e completo. É preciso que se tenha modelos, exemplos de ambientes que satisfaçam o conjunto de axiomas na qual a geometria se baseia.

Normalmente, são empregados quatro modelos para denotar a superfície hiperbólica: um modelo tridimensional e os outros três bidimensionais.

Desenvolvido pelo matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900), o modelo tridimensional é obtido pela rotação de uma curva tractriz, e a superfície em questão é a do sólido criado, conhecido como pseudo-esfera.

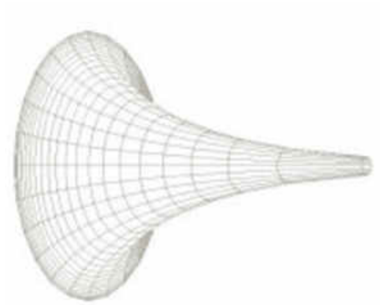


Figura 3.3: Pseudo-esfera: modelo hiperbólico tridimensional

Um dos modelos bidimensionais foi criado pelo alemão Felix Klein (1849-1925), a então superfície hiperbólica é definida pela região interna de um círculo Euclidiano. Ora, se dois pontos distintos definem uma corda única, tal corda passa a ser considerada então uma reta hiperbólica. Logo, duas retas hiperbólicas se interceptam, no máximo, em um ponto no interior do círculo, com isso, neste modelo, teremos infinitas retas paralelas a uma reta dada contendo um ponto P exterior a essa reta.

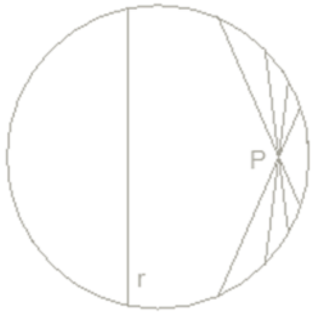


Figura 3.4: Modelo bidimensional hiperbólico de Félix Klein

Os outros dois modelos bidimensionais foram criados pelo francês Henri Poincaré (1854-1912). Também conhecido por Disco de Poincaré, o primeiro modelo, assim como no modelo de Klein, é definido pelo círculo Euclidiano limitado, se distinguindo pelo fato de as retas hiperbólicas serem definidas por arcos de circunferência perpendiculares à limitação do plano.

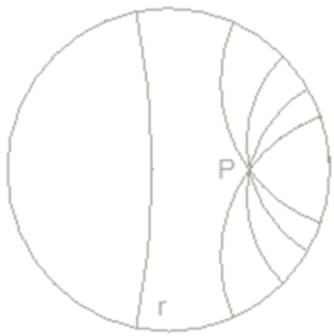


Figura 3.5: Disco de Poincaré: um dos modelos bidimensionais de Henri Poincaré

Denominado semiplano de Poincaré, nesse segundo modelo proposto por Henri, as retas hiperbólicas são definidas por semicírculos com centros no eixo x, sendo esse eixo a extremidade do semiplano cartesiano que contém as ordenadas positivas. Tal modelo se faz válido pela hipótese do ângulo agudo de Saccheri.

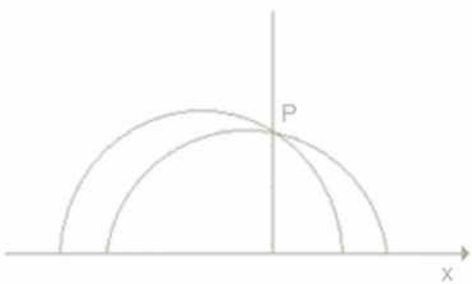


Figura 3.6: Semiplano de Poincaré: o segundo modelo bidimensional de Henri Poincaré

Em suma, a Geometria Hiperbólica se desenvolve sobre uma superfície de curvatura negativa. Com isso, como decorrência do Postulado das Paralelas nessa geometria, temos a formação de triângulos, cuja a soma dos ângulos internos é sempre menor que 180º, e ainda, a comprovação da existência de uma infinidade de retas paralelas a uma reta dada contendo um ponto P exterior a essa reta.

3.2 A Geometria Esférica

A Geometria Esférica, também conhecida como Geometria Riemanniana, contraria o Quinto Postulado de Euclides determinando que: "Por um ponto exterior a uma reta, não existe nenhuma reta paralela à reta dada".

3.2.1 Algumas Noções Importantes

Estabeleceremos algumas noções importantes para uma boa compreensão de tal geometria que é fundamentada na superfície esférica.

Superfície Esférica

Definição 3.1: A superfície esférica é determinada pelo conjunto de pontos do espaço que estão a uma mesma distância de um ponto interior, chamado centro e onde tal distância é denominada raio. Os pontos interiores são aqueles cuja distância do centro à superfície esférica é menor que esse raio. A união de todos esses pontos forma assim uma esfera, em que as secções planas sempre serão formadas por círculos.

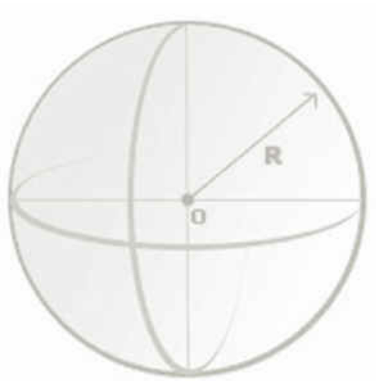


Figura 3.7: Superfície Esférica

3.2.2 Círculos Máximos e Círculos Menores

Definição 3.2: Um plano ao interceptar uma superfície esférica sempre define um círculo, podendo esse círculo ser um círculo máximo ou um círculo menor. Um círculo máximo é aquele que contém o centro da esfera, isto é, os centros dos círculos máximos sempre coincidem com o centro da esfera.

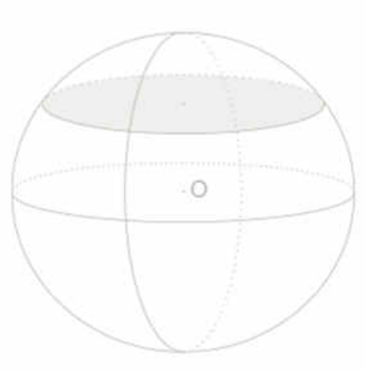


Figura 3.8: Círculos Máximos e Círculo Menor

Pontos Antípodas

Definição 3.3: Dois pontos são ditos antípodas, quando são diametralmente opostos, ou seja, esses dois pontos pertencem à superfície esférica e são extremos de um segmento de reta que contém o centro dessa esfera.

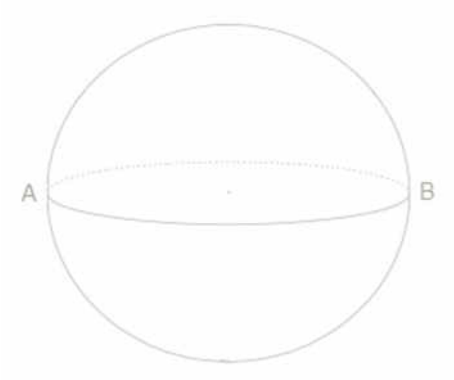


Figura 3.9: Pontos Antípodas A e B

Geodésicas e Arco de Geodésicas

Definição 3.4: As retas na Geometria Esférica são denominadas geodésicas, que nada mais são do que círculos máximos da esfera. Logo, os segmentos de reta são arcos de geodésicas, ou seja, são definidos pela menor distância que conectam dois pontos na superfície esférica. Ressalta-se que, caso esses dois pontos sejam antípodas, tal arco de geodésica não será único, haverá infinitos segmentos esféricos de mesmo comprimento contendo esses dois pontos.

Nessa geometria, as retas não são mais infinitas como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitadas: as geodésicas são finitas, ou seja, possuem uma medida específica, porém não possuem início e fim, sendo assim ilimitadas.

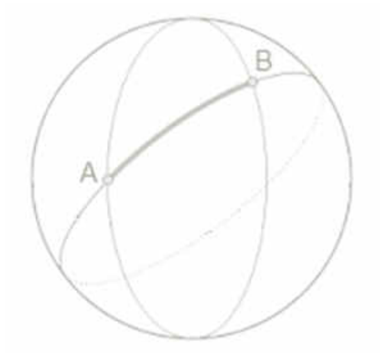


Figura 3.10: Geodésicas e Arco de Geodésica AB

Teorema 3.1: Dados dois pontos A e B não antípodas, na superfície esférica, existe uma, e somente, uma geodésica que contém A e B.

Demonstração: Sejam A e B dois pontos não antípodas na superfície esférica, e consideremos o ponto O como centro da esfera. Ora, temos então três pontos distintos e não colineares, no espaço, o que nos leva a concluir que tais pontos determinam um único plano que contém o centro da esfera. Com isso, só existe um círculo máximo que representa a interseção deste plano com a esfera, isto é, só há uma geodésica que contém os pontos A e B.

□

Triângulos Esféricos

Definição 3.5: A interseção de dois círculos máximos da esfera determina dois pontos, cada um desses pontos define assim um ângulo esférico. A medida de um ângulo esférico é igual à medida do arco de círculo máximo oposto a ele e limitado pelos dois lados desse ângulo. Por outro lado, o arco de círculo máximo é medido através do ângulo que corresponde a ele no centro da circunferência. Com isso, um triângulo esférico é determinado por três pontos distintos sobre a superfície esférica, formado sempre por três arcos de círculos máximos, ou seja, arcos de geodésicas.

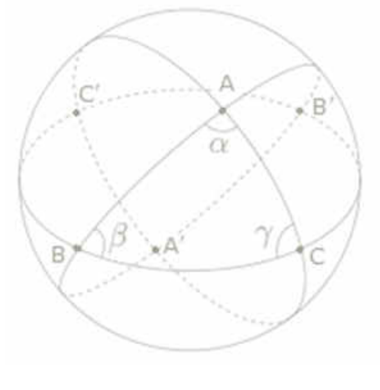


Figura 3.11: Triângulo Esférico ABC

Como nos triângulos Euclidianos, os triângulos Esféricos possuem três bissetrizes, três alturas e três medianas, porém em vez de se tratar de segmentos de reta, trata-se de geodésicas. Entretanto, diferente da Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo não é fixa. Dado um triângulo esférico ABC, e sendo os seus ângulos internos α, β e γ, a soma desses ângulos internos sempre estará representada pela desigualdade:

$$180^o < \alpha + \beta + \gamma < 540^o$$

Apresentadas tais propriedades, inferimos que diferentemente dos triângulos Euclidianos, em triângulos Esféricos, podemos ter mais de um ângulo reto, e ainda, triângulos com três ângulos retos e três lados medindo também 90º, chamados assim de trirretângulo e trirretilátero.

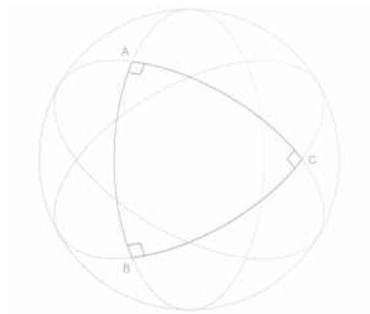


Figura 3.12: Triângulo Esférico ABC Trirretângulo e Trirretilátero

Definição 3.6: A área de um triângulo esférico é a região da superfície esférica limitada pelos três arcos de geodésicas que constituem tal triângulo.

Um grande colaborador nos estudos das áreas dos triângulos esféricos foi o matemático francês Albert Girard (1595-1632). Diferentemente da Geometria de Euclides, Girard demonstrou que a área de um triângulo esférico é definida sem utilizar os lados do triângulo, e sim, obtida apenas com os ângulos internos e o raio da esfera.

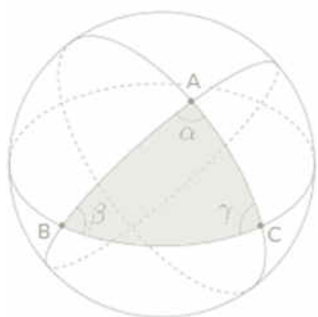


Figura 3.13: Área do Triângulo Esférico ABC

Definição 3.7: A região da superfície esférica limitada por dois círculos máximos é chamada de fuso esférico. Os dois pontos antípodas, interseções desses círculos, são ditos vértices do fuso esférico que possui um ângulo θ formado pelos dois círculos máximos.

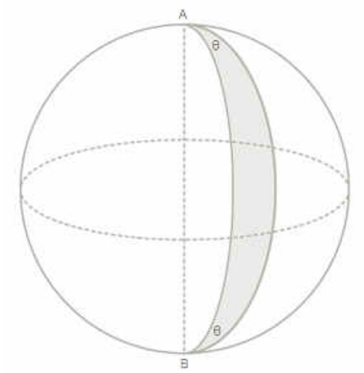


Figura 3.14: Fuso Esférico de Ângulo θ e Vértices A e B

Teorema 3.2: A área S_f de um fuso esférico de ângulo θ (em radianos) é dada por $S_f = 2\theta R^2$, em que R é o raio da superfície esférica.

Demonstração: A área de um fuso esférico é proporcional ao seu ângulo. Para demonstrar a área do fuso, basta fazermos uma simples proporção utilizando a área total da superfície esférica de raio R, que é dada por $S_e = 4\pi R^2$.

$$\frac{S_f}{4\pi R^2} = \frac{\theta}{2\pi} \rightarrow S_f = 2\theta R^2$$

$\square$

Definição 3.8: Um fuso completo é constituído pela união de um fuso com o seu fuso antípoda, ou seja, os dois fusos formados por pontos antípodas.

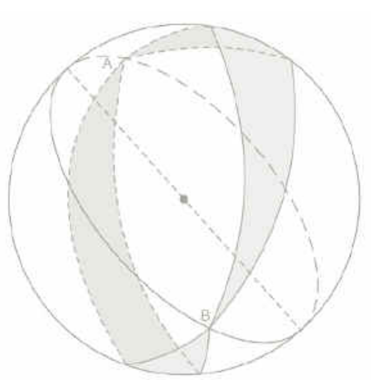


Figura 3.15: Fuso Esférico Completo

Teorema 3.3: (Teorema de Girard) Sendo α, β e γ os ângulos internos de um triângulo esférico, temos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \dfrac{S}{R^2}$, em que R é o raio da esfera e S a área desse triângulo.

Demonstração: Consideremos um triângulo esférico ABC com ângulos internos α, β e γ (em radianos). Ao considerar os prolongamentos dos três lados desse triângulo, teremos três fusos esféricos completos, cujos ângulos são os próprios ângulos internos do triângulo.

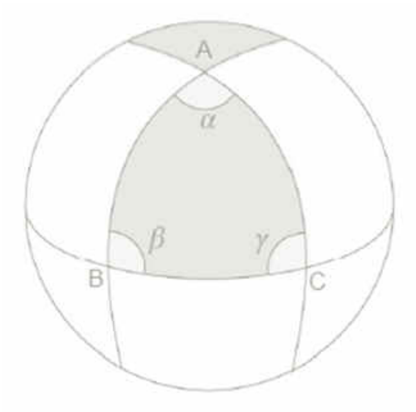


Figura 3.16: Triângulo Esférico e seus Fusos Completos

Considerando R o raio da superfície esférica em questão, a soma das áreas desses três fusos completos é:

$$2(2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2)$$

$$= 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2$$

Considere o triângulo $A^{‘}B^{‘}C^{‘}$, congruente ao triângulo ABC, cujos vértices $A^{‘}B^{‘}C^{‘}$ são os pontos antípodas de A, B e C. Cada um dos fusos completos que contém o triângulo ABC contém o triângulo $A^{‘}B^{‘}C^{‘}$ de mesma área. Ao somarmos as áreas de todos os fusos completos, teremos a área da superfície esférica acrescida ao quádruplo da área do triângulo.

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi R^2 + 4S$$

$$4(\alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2) = 4(\pi R^2 + S)$$

$$\alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 = \pi R^2 + S$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$$

□

Teorema 3.4: A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo esférico é sempre maior que 180º e menor que 540º.

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, utilizaremos como ponto de partida o resultado do Teorema de Girard.

Considere um triângulo esférico de área S. Pelo Teorema de Girard, quando S tende a zero, temos que $\alpha + \beta + \gamma$ tende a 180º. Porém, como não podemos ter um triângulo de área nula, concluímos que a $\alpha + \beta + \gamma$ é estritamente maior que 180º.

Em contrapartida, ao considerarmos um triângulo máximo, isto é, que envolva quase a totalidade da semiesfera que o contém, obteremos um triângulo esférico cujos vértices são eqüidistantes e bem próximos do círculo máximo. Ora, essa área então será próxima a $2\pi R^2$ (metade da área da superfície esférica), mas sem assumir tal valor. Pelo Teorema de Girard concluímos que $\alpha + \beta + \gamma$ tende a $180^o + \dfrac{2\pi R^2}{R^2}$, ou seja, tende a $180^o + 360^o = 540^o$.

Portanto, concluímos que sendo α, β e γ os ângulos internos de um triângulo esférico, sempre teremos que:

$$180^o < \alpha + \beta + \gamma < 540^o.$$

□

3.2.3 Alguns Conceitos Conhecidos na Geografia

Tomando como referencial o globo terrestre e considerando sua superfície como esférica, há alguns termos bem notáveis na Geografia que são associáveis à Geometria Esférica.

Pólos, na Geometria Esférica, são os pontos antípodas, cujo diâmetro da esfera que os contém é perpendicular a um outro círculo máximo, um exemplo no globo terrestre são os pólos Norte e Sul.

Hemisférios são formados por um plano que contém o centro da superfície esférica, isto é, um círculo máximo divide a superfície em dois hemisférios. Um exemplo é a Linha do Equador que divide a Terra nos Hemisférios Norte e Sul.

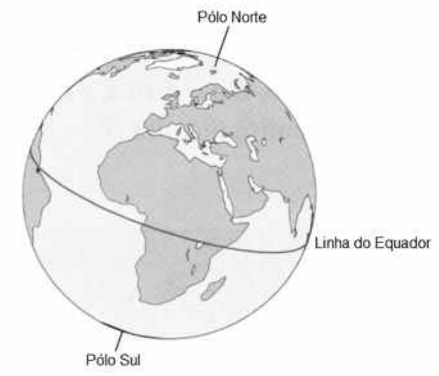


Figura 3.17: Globo Terrestre: Pólo Norte, Linha do Equador e Pólo Sul

Os Meridianos do globo terrestre são semicírculos máximos que contém os pólos norte e sul, ou seja, nada mais são do que os arcos máximos de geodésicas.

Já os paralelos são compostos de um círculo máximo e de círculos menores. Esse círculo máximo nada mais é do que a Linha do Equador e os Trópicos de Capricórnio, de Câncer e os Círculos Polar e Ártico que são exemplos de círculos menores.

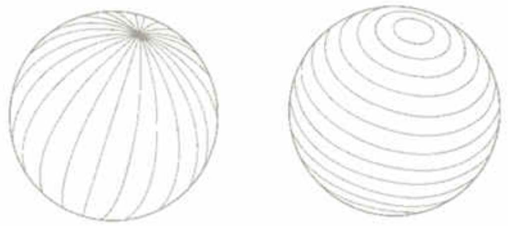


Figura 3.18: Meridianos e Paralelos

Como tais conceitos são conhecidos pelos alunos na Geografia, porque não utilizá-los para o entendimento da Geometria Esférica? Na observação dos meridianos, por exemplo, fica mais claro entender o porquê de não existir retas paralelas nesta "Nova Geometria", já que todas as geodésicas se interceptam nos pólos norte e sul.

3.2.4 O Postulado de Riemann

Como já dito, Georg Friedrich Bernhard Riemann, contrariou o Quinto Postulado de Euclides afirmando a não existência de retas paralelas.

Teorema 3.5: Quaisquer duas retas em uma superfície esférica têm sempre dois pontos antípodas em comum.

Demonstração: Tomando duas geodésicas na superfície esférica, concluímos que cada uma delas intersecta a esfera em um círculo máximo que contém o centro dessa esfera. Ora, esses círculos possuem então um ponto em comum que nada mais é do que o centro da esfera. Logo, esses círculos máximos possuem uma reta em comum que, logicamente, terão dois pontos antípodas como interseção dessa superfície esférica.

□

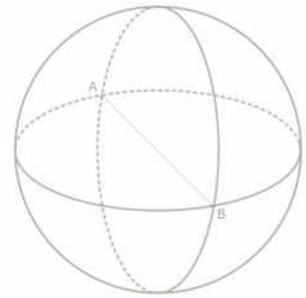


Figura 3.19: Pontos Antípodas: Interseção entre duas Geodésicas

Desse modo, afirmamos que na Geometria Esférica não existe retas paralelas.

Contudo, os estudos de Riemann ampliaram as noções geométricas para além das Geometrias Euclidiana e Hiperbólica. Ele analisou do seu modo os conceitos primitivos como; ponto, reta e plano, definindo a superfície esférica como plana, os pontos como posições no espaço e tratando a reta como ilimitada e não como infinita, assim como é nas geometrias de Euclides e de Lobachevsky.

4

Proposta de uma Atividade de Inserção da Geometria Esférica para Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental

Neste capítulo, apresentaremos uma atividade realizada em uma turma do 9º ano. Escolhemos essa turma, pois ao final do ensino fundamental os estudantes já possuem certa convivência com a geometria, tendo assim, um conhecimento geométrico passível de exploração.

É importante incentivar os alunos a estudar geometria, a construir o entendimento de que estamos inseridos em um mundo de formas, e que assim, é incontestável a importância da aprendizagem e da concepção da geometria, sem visar unicamente a questão de contextualização didática. A habilidade do professor de inserir diferentes situações que incluam ideias geométricas, ao cotidiano dos alunos, se torna um elemento facilitador para compreensão do discente. Afinal, a geometria está presente não só na natureza, mas também em várias áreas de conhecimento, como a arquitetura, engenharia, artes e tecnologias.

O intuito desta atividade é aguçar no aluno o interesse e a curiosidade em investigar diversas noções geométricas, a começar pela percepção espacial, pela averiguação histórica e pelos conceitos mais sutis e complexos que a eles são desconhecidos.

Metodologicamente, objetiva-se propor uma atividade que será dividida em três partes. A primeira parte constará de uma aula expositiva em que exploraremos a parte histórica da geometria. Nesse momento, os alunos serão informados sobre a origem da geometria e sobre quem foi Euclides de Alexandria. Ademais, será relatada a existência da geometria não Euclidiana e o porquê do seu surgimento, bem como sua relevância não só na matemática antiga, como também suas contribuições que nos beneficiam até hoje. Em tempo, serão citados alguns conceitos básicos e exemplos que diferenciam a Geometria Euclidiana da Geometria Não Euclidiana, focando na Geometria Esférica.

Na segunda parte, será apresentado um exercício bem trivial que abranja as diferenças da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica. A intenção é instigar o aluno a compreender as particularidades de cada geometria e, assim, reforçar o que foi exposto na primeira parte. Neste momento os alunos trabalharão em pequenos grupos interagindo entre si.

Já a terceira parte, será composta por uma atividade exploratória como alternativa metodológica de ensino, para a introdução da Geometria Esférica, no Ensino Básico. Valorizando os conhecimentos prévios dos alunos, pretende-se inserir a Geometria Esférica em uma atividade lúdica com manipulação, de forma que os alunos tenham maior percepção espacial, facilitando a compreensão pelos mesmos.

4.1 Elaboração da Atividade

Ao desenvolver a atividade, os principais objetivos almejados foram:

- Desenvolver e instigar o interesse do aluno para o aprendizado da geometria;

- Dotar o aluno de novos conhecimentos, contribuindo para o desenvolvimento da percepção acerca da geometria, utilizando atividades exploratórias;

- Propiciar a compreensão da existência das Geometrias Não Euclidianas, bem como apresentar as diferenças entre as duas geometrias e a relevância de ambas dentro e fora da sala de aula, com o enfoque na Geometria Esférica.

Para isso, preparamos um conteúdo programático, no qual fossem apresentadas as seguintes noções:

- Parte histórica sobre a origem da geometria;

- Euclides de Alexandria e a obra Elementos;

- Conceitos básicos da Geometria Euclidiana;

- O Quinto Postulado de Euclides e o surgimento da "Nova Geometria";

- Os geômetras responsáveis pela descoberta das Geometria Não Euclidianas;

- Apresentação de conceitos básicos da Geometria Esférica;

- Comparação entre as Geometrias Euclidiana e a Esférica;

• Exploração das características da Geometria Esférica.

Metodologia a ser empregada:

• Aula expositiva utilizando recursos instrucionais: material de apoio, quadro e pincel;

• Lição interativa, estimulando os alunos a trabalharem em pequenos grupos;

• Oficina lúdica de exploração dos princípios da Geometria Esférica.

Atividade dividida em três tempos, sendo os dois primeiros de, aproximadamente, trinta minutos e o terceiro de uma hora, totalizando duas horas de aula.

Para a atividade exploratória, serão utilizados objetos de manipulação como bolas de isopor, elásticos, alfinetes e um transferidor esférico, cuja construção será descrita na próxima seção.

Apresentaremos abaixo duas questões bastante comuns no trabalho com a Geometria Esférica, que finalizarão o trabalho com os alunos após a atividade exploratória.

Problema dos Foguetes: Suponha que as cidades Rubra e Anil estão situadas bem próximas da linha do Equador. Em um determinado dia, dois foguetes foram lançados no mesmo horário e com a mesma velocidade, um na cidade de Rubra e o outro na cidade de Anil. O que você acha que acontecerá com os foguetes?

Nesta questão, espera-se que os alunos utilizem os objetos de manipulação e os conhecimentos da Geometria Esférica para concluir que os dois foguetes se encontrarão.

Problema do Urso: Começando de um determinado ponto da Terra, um urso caminha um quilômetro para o sul. Ele muda, então, de direção e caminha um quilômetro para o leste. Logo, ele vira de novo para a esquerda e caminha mais um quilômetro para o norte, chegando assim exatamente no mesmo ponto de partida.

a) Utilizando uma folha de papel, desenhe o percurso que o urso fez.

b) Agora, utilize a bola de isopor e os elásticos para fazer esse percurso.

c) Qual é a cor do urso? O que levou você a essa conclusão?

Ao utilizar a folha de papel na primeira parte da questão, os alunos irão trabalhar na superfície plana, ou seja, estarão trabalhando com a Geometria Euclidiana.

Nesta parte, deverão observar que a princípio o problema é falho e, portanto, o urso não volta para o ponto de partida. Importante à análise de que tal fato acontece porque a superfície da Terra é esférica e não plana.

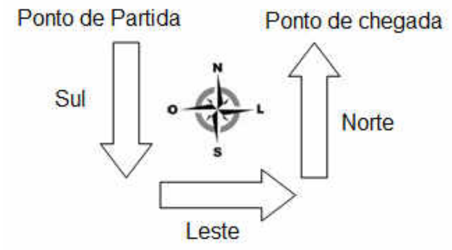


Figura 4.1: Problema do Urso na Superfície Plana

Já na segunda parte, os alunos utilizarão as bolas de isopor para representar a superfície terrestre. Assim, utilizando os materiais de manipulação: os elásticos, a bola de isopor e o transferidor esférico, os alunos terão uma percepção melhor de que o ponto de partida coincidirá com o ponto de chegada, ou seja, o urso sairá e chegará ao pólo norte. Com isso, o urso só poderá ser branco por se tratar de um urso polar.

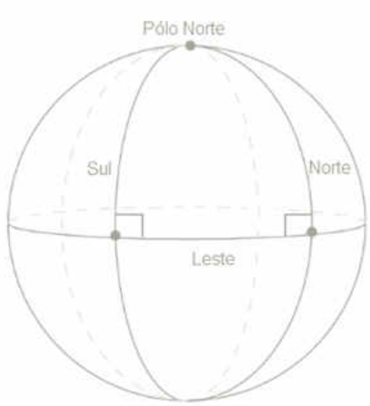


Figura 4.2: Problema do Urso na Superfície Esférica

Uma observação necessária aqui é pensar que se o urso partisse do pólo do Sul, devido ao fato de sempre caminhar por círculos máximos, ele voltaria ao pólo Sul. No entanto, essa possibilidade nos leva a um problema completamente fictício, uma vez que no Pólo Sul não existe urso.

4.2 Descrição da Aula Prática

A atividade foi aplicada em uma escola pública municipal, localizada na região norte da capital mineira. Contei com a colaboração da professora da turma, que leciona as aulas de álgebra para os alunos do 9º ano (a turma possui uma segunda professora que ministra as aulas de geometria). Foram-me cedidas duas aulas de uma hora cada, assim o trabalho foi realizado em dois dias: no primeiro dia ocorreu a aula expositiva e a primeira parte dos exercícios sobre os conceitos triviais da geometria, já no segundo dia, finalizamos os exercícios de comparação entre as geometrias e a atividade exploratória.

A primeira situação desafiadora na qual me deparei, foi ser informada que os alunos não tinham um suporte muito satisfatório no conteúdo da geometria. Eles tinham acabado de finalizar o estudo do teorema de Tales e, consequentemente, a aprendizagem quanto aos conceitos e definições sobre triângulos, como por exemplo, o valor da soma dos ângulos internos. Portanto, na primeira parte da minha aula, tive que ter uma atenção maior e reforçar além do planejado, alguns conceitos básicos da Geometria Euclidiana.

A atividade foi aplicada para dezessete alunos, e todos demonstraram certo entusiasmo por aprender uma "geometria diferente".

A aula expositiva transcorreu de maneira tranquila, e mesmo com algumas inquietações dos alunos, o tempo foi suficiente para expor todo o conteúdo planejado para o primeiro dia.

Contudo, a aula do segundo dia foi mais participativa e os alunos se mostraram mais empolgados com a atividade exploratória, utilizando os objetos de manipulação.

Primeiro Momento: utilizando as bolas de isopor e os elásticos para representar as geodésicas.

Figura 4.3: Aula Exploratória: Geodésicas

Segundo Momento: expondo os exemplos dos meridianos e paralelos.

Figura 4.4: Aula Exploratória: Meridianos e Paralelos

Terceiro Momento: explicando a utilização do transferidor esférico.

O transferidor esférico foi construído com tiras de acetato, da seguinte forma: primeiro cortam-se duas tiras de acetato com o mesmo comprimento do círculo máximo da bola de isopor e divide-se, proporcionalmente, esse comprimento com uma escala de tal forma que o comprimento final dessas divisões corresponda ao ângulo de 360º. A primeira tira deve ser cortada em duas iguais e unidas perpendicularmente na metade de cada uma, e depois as quatro pontas dessa primeira tira são unidas com a segunda tira, obtendo um dispositivo como o da Figura 4.5. Nesse caso, cada espaço demarcado equivale a um ângulo de aproximadamente 10º.

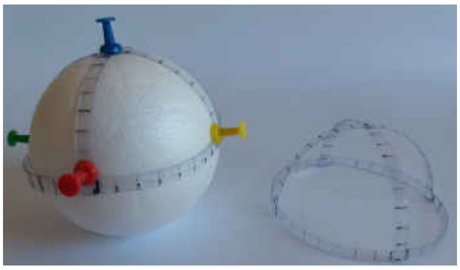


Figura 4.5: Aula Exploratória: Transferidor Esférico

Quarto Momento: utilizando as bolas de isopor, os elásticos e os alfinetes para representar as retas perpendiculares e seus pontos de interseção.

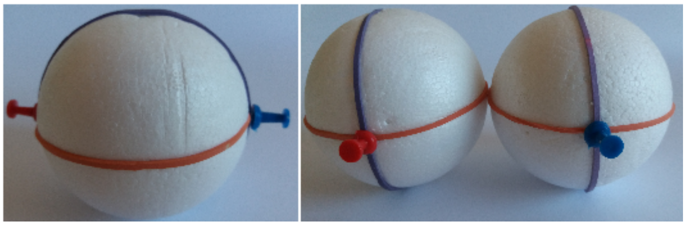


Figura 4.6: Aula Exploratória: Retas Perpendiculares

Quinto Momento: utilizando as bolas de isopor, os elásticos e os alfinetes para representar os triângulos esféricos.

Neste momento, os alunos exploraram o transferidor esférico para verificarem que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico é sempre maior que 180º.

Para se determinar um ângulo esférico, posiciona-se o ponto central do transferidor no vértice do ângulo e observa-se o valor do ângulo correspondente, marcado no lado oposto do transferidor. Na figura seguinte, tem-se um triângulo com três ângulos retos: o trirretângulo.

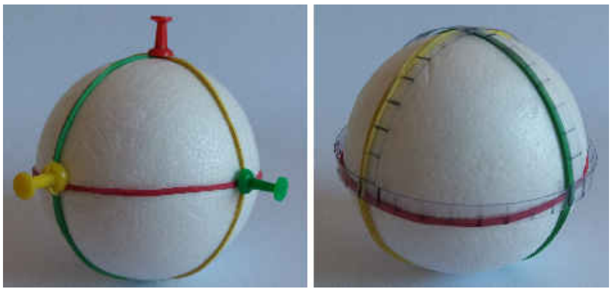


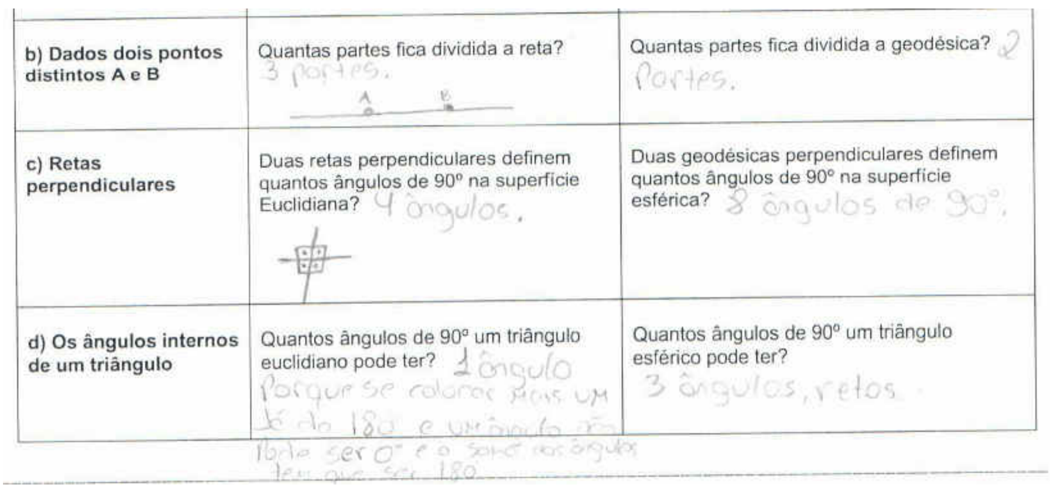
Figura 4.7: Aula Exploratória: Triângulo Esférico Trirretângulo

4.3 Resultado dos Trabalhos dos Alunos

Apesar do pouco conhecimento geométrico dos alunos, as aulas transcorreram de maneira bem satisfatória.

Muitos questionamentos interessantes foram feitos durante a aula expositiva. Cito alguns exemplos: "as geometrias então tem o nome de Euclides porque ele foi mais inteligente?", "a geometria esférica é mais legal por causa da Terra!", "nunca pensei que o Pokemon Go tinha matemática!", "para ter GPS tem que ter geometria?", "até para lançar foguete precisa de matemática?". Essas entre outras foram algumas observações bem pertinentes feitas pelos alunos.

As questões propostas também tiveram bons resultados. Como apresentados nas próximas figuras.



b) Dados dois pontos distintos A e B	Quantas partes fica dividida a reta? 3 partes. A B	Quantas partes fica dividida a geodésica? 2 Partes.
c) Retas perpendiculares	Duas retas perpendiculares definem quantos ângulos de 90º na superfície Euclidiana? 4 ângulos.	Duas geodésicas perpendiculares definem quantos ângulos de 90º na superfície esférica? 8 ângulos de 90º.
d) Os ângulos internos de um triângulo	Quantos ângulos de 90º um triângulo euclidiano pode ter? 1 ângulo Porque se colocar mais um já da 180 e um ângulo não Pode ser 0º e a soma dos ângulos tem que ser 180	Quantos ângulos de 90º um triângulo esférico pode ter? 3 ângulos, retos.

Figura 4.8: Questões Comparativas entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica

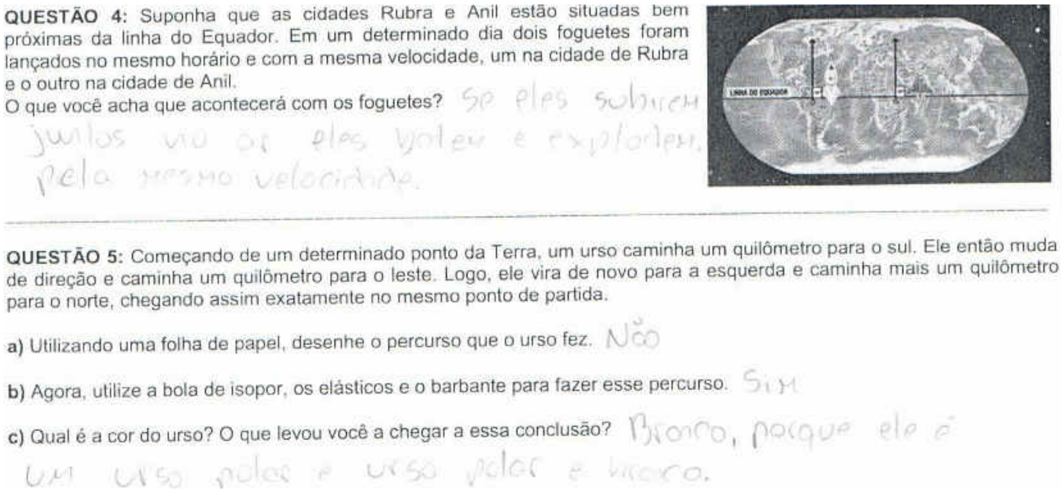


Figura 4.9: Problema dos Foguetes e Problema do Urso

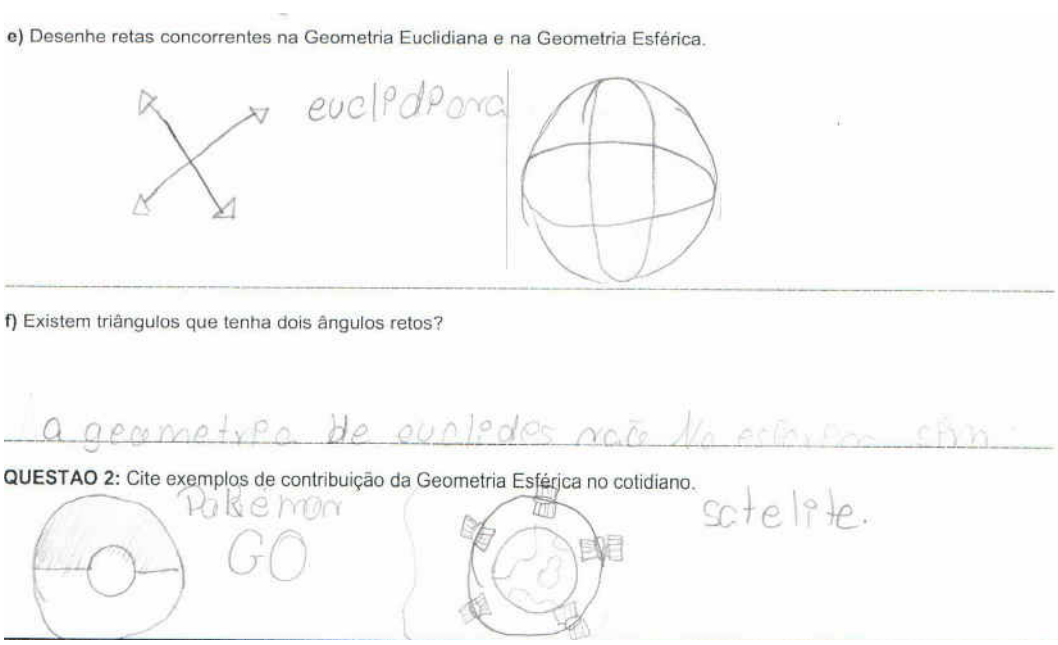


Figura 4.10: Retas na Geometria Euclidiana e na Geometria Esférica, Ângulos de um Triângulo e Exemplo de Aplicações da Geometria Esférica

Contudo, a aula exploratória foi, com certeza, a parte mais produtiva por parte dos alunos. A curiosidade para trabalhar com os objetos resultou na concentração e na compreensão dos conceitos apresentados na aula expositiva. Uma ressalva relevante a se fazer, é a de que dentre os dezessete alunos da turma, havia uma aluna da educação inclusiva. Tal aluna trabalhou com os objetos de manipulação bem entusiasmada e conseguiu compreender a diferença entre as retas no plano e as geodésicas, além disso, atingiu resultados bastante satisfatórios nas construções dos triângulos esféricos e na utilização do transferidor esférico para a medição dos ângulos desses triângulos.

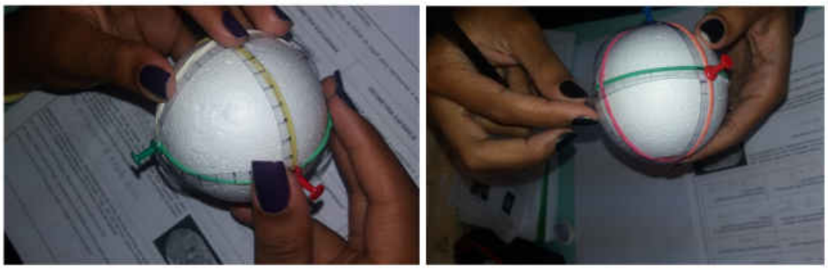
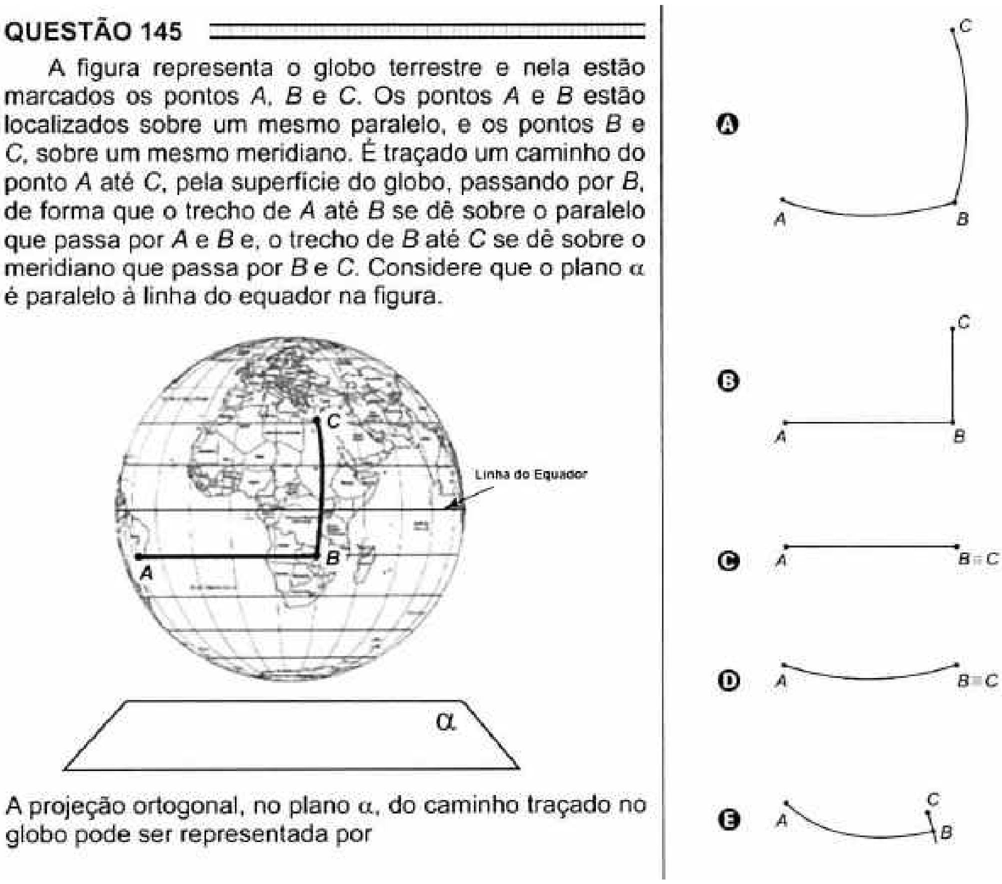


Figura 4.11: Alunas Manipulando o Transferidor Esférico

Apesar da atividade ter sido proposta para os alunos do 9º ano, pode ser aplicada também para alunos do ensino médio. De fato,aplicando-a aos alunos do ensino médio, eles poderão contribuir com um maior retorno, por já ter um conhecimento maior, principalmente, na abordagem da geometria sólida.

Outro ponto importante a destacar, é que apesar das Geometrias Não Euclidianas não fazerem parte do conteúdo lecionado no Ensino Básico, o entendimento e conhecimento de tais geometrias auxiliam na resolução de questões que envolvem esfera e o globo terrestre, por exemplo. Menciono aqui uma questão contida na prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do ano de 2015, em que um conhecimento prévio da Geometria Esférica iria facilitar na resolução da questão.



QUESTÃO 145

A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos *A*, *B* e *C*. Os pontos *A* e *B* estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos *B* e *C*, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto *A* até *C*, pela superfície do globo, passando por *B*, de forma que o trecho de *A* até *B* se dê sobre o paralelo que passa por *A* e *B* e, o trecho de *B* até *C* se dê sobre o meridiano que passa por *B* e *C*. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.

A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

Figura 4.12: Questão do Exame Nacional do Ensino Médio do ano de 2015

5

Considerações Finais

Sabe-se como é desafiador desempenhar o papel de professor e como é importante o ensino e a aprendizagem da geometria no Ensino Básico. É preciso que o professor, com toda a sua vivacidade em sala de aula, estimule os alunos a abrirem a mente para "novos horizontes matemáticos", e a terem a percepção de que o mundo no qual eles estão inseridos é repleto de exemplos aplicáveis das diferentes geometrias.

Espera-se que esse trabalho seja um instrumento facilitador para a introdução do ensino das Geometrias Não Euclidianas e que possa colaborar e despertar a curiosidade dos docentes para este conteúdo não lecionado no Ensino Básico, mas que é de grande relevância para o entendimento de vários elementos do nosso cotidiano.

Afinal, as Geometrias Não Euclidianas representam uma grande evolução dos conhecimentos matemáticos e explicam diversos fenômenos do qual a Geometria de Euclides deixa lacunas. Convém aqui mencionar a admirável citação do sábio matemático Henri Poincaré:

"Nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente".

A

Apêndice: Curvaturas de Superfícies

Para um melhor entendimento das Geometrias Não Euclidianas, precisamos entender as superfícies em que essas geometrias são fundamentadas. Será exposto aqui, alguns conceitos básicos sobre curvatura, para a fim de que seja compreendido o porquê de uma superfície ter uma curvatura positiva, negativa ou nula.

Primeiramente veremos as noções sobre curvatura de uma curva, para depois apresentarmos essas noções para uma superfície.

A.1 Curvatura de uma curva

Tomando uma linha reta r e uma linha curva s, dizemos que o que diferencia essas linhas é a curvatura de cada uma. Em uma linha reta, a curvatura será nula enquanto na linha curva, a curvatura será diferente de zero.

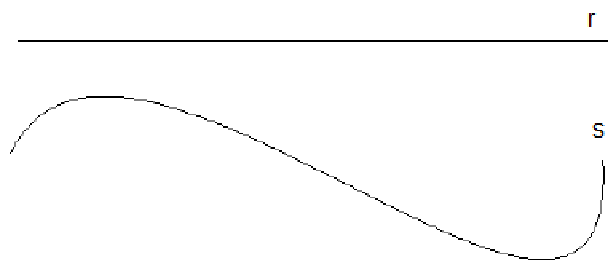


Figura A.1: Reta r e Curva s: Duas Linhas Diferenciadas pela Curvatura

Axiomaticamente, para estabelecer o tamanho da curvatura é preciso levar em consideração as seguintes observações:

I) A curvatura de uma linha reta deve ser zero,

II) A curvatura de uma circunferência deve ser constante, e inversamente proporcional ao seu raio.

A valer, dadas duas circunferências α_1 e α_2 de raios R_1 e R_2, respectivamente, e sendo $R_1 > R_2$, teremos sempre curvaturas constantes. Porém, a curvatura de α_2 é maior que a de α_1: quanto menor o raio, maior é a curvatura.

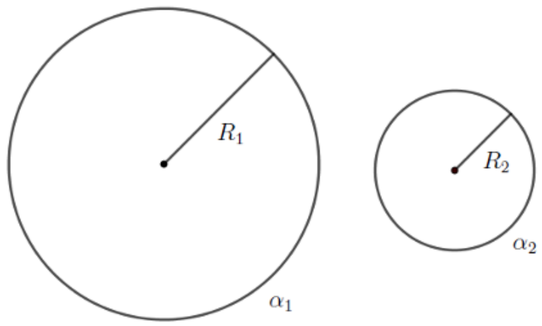


Figura A.2: Circunferências α_1 e α_2: Curvaturas Diferentes

Ainda podemos concluir que em uma circunferência muito grande, com o raio tendendo ao infinito, teremos uma curvatura tendendo a zero, isto é, tenderá a uma linha reta. Por outro lado, quanto menor for o raio da circunferência, maior será a curvatura, isto é, se o raio tende a zero, a curvatura tenderá ao infinito.

Com isso, temos que a curvatura C de uma circunferência é inversamente proporcional ao a seu raio R:

$$C = \frac{1}{R}$$

Utilizaremos a circunferência para determinar a curvatura de uma curva em um determinado ponto A. Para isso, precisamos traçar uma circunferência de maior raio possível que tangencia a curva em A. Tal círcunferência recebe o nome de círculo osculante.

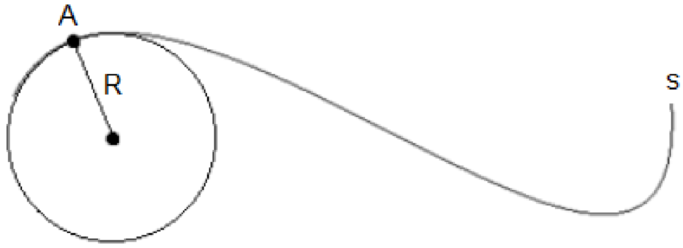


Figura A.3: Círculo Osculante: Tamanho da Curvatura de uma Curva em um Ponto A

Assim, a curvatura da curva no ponto A será igual à do círculo osculante nesse mesmo ponto. Consequentemente, podemos medir a curvatura de qualquer ponto da curva, basta encontrar o raio da maior cincunferência que tangencia a curva no ponto em questão.

A.2 Curvatura de uma superfície

Consideremos um ponto A qualquer de uma superfície. Por esse ponto passa uma infinidade de curvas distintas e cada uma delas possui um círculo osculante correspondente. Logo, como teremos círculos osculantes de raios distintos, a curvatura no ponto A teria valores diferentes. Essa indefinição mostra que temos que encontrar uma outra maneira de determinar a curvatura em um ponto da superfície.

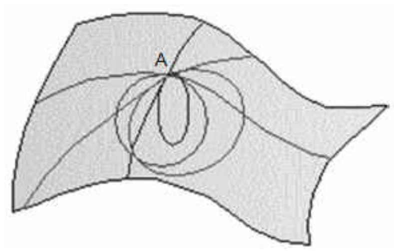


Figura A.4: Curvatura de uma Superfície: Por um Ponto A existe uma infinidade de Curvas Distintas

Analisando planos que interceptam a superfície curva em questão no ponto A, teremos que a interseção desses planos com a superfície sempre definirá uma curva. Dentre todos esses planos, vamos encontrar dois planos em particular: um que determina uma curva que contém o maior círculo osculante possível e outro que determina uma curva que contém o menor círculo osculante entre todos os demais.

Sendo r_{max} e r_{min} os raios dos círculos osculantes máximo e mínimo, respectivamente. A maior curvatura C_1 será definida pelo círculo de raio r_{min} e a menor curvatura C_2 será definida pelo círculo de raio r_{max}. Determinamos que a curvatura C, no ponto A dessa superfície será definida pelo produto das curvaturas:

$$C = C_1 \times C_2$$

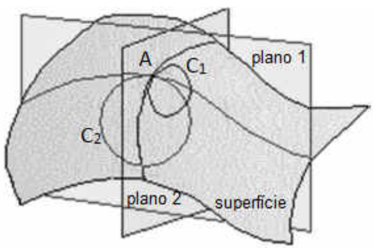


Figura A.5: Planos que Interceptam uma Superfície: Círculos Osculadores Máximo e Mínimo

Desse modo, podemos achar a curvatura C em algum ponto A de uma superfície qualquer.

Ressaltando que, se a superfície em questão for um plano, teremos que todas as interseções de planos que passam pelo ponto A serão determinadas por retas, ou seja, a curvatura será nula. No entanto, existem superfícies que tenham curvatura positiva ou negativa.

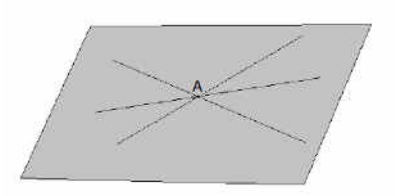


Figura A.6: Plano: Superfície de Curvatura Nula

Assim, para que $C = C_1 \times C_2$ seja positivo, deveremos ter C_1 e C_2 com mesmo sinal, isto é, elas devem ter os círculos osculantes máximo e mínimo voltados para o mesmo lado da superfície.

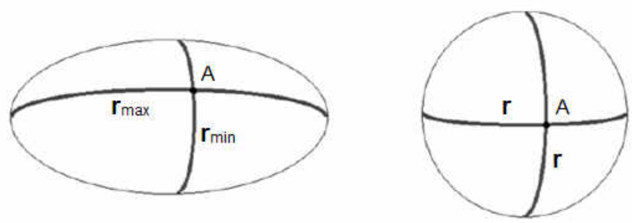


Figura A.7: Elipsóide e Esfera: Superfícies de Curvatura Positiva

Já para as superfícies onde $C = C_1 \times C_2$ seja negativo, deveremos ter C_1 e C_2 com sinais distintos, isto é, os círculos osculantes máximo e mínimo devem estar em lados opostos da superfície.

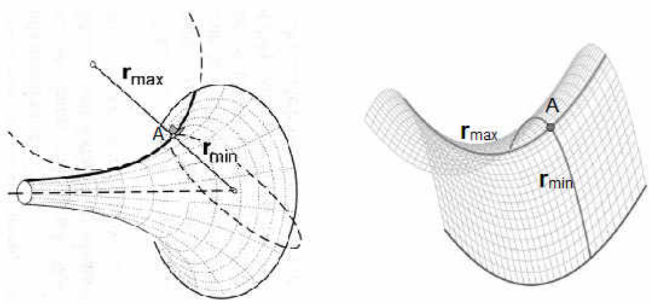


Figura A.8: Sela e Pseudo-esfera: Superfícies de Curvatura Negativa

Contudo, temos que a Geometria Hiperbólica é fundamentada em superfícies de curvatura negativa, a Geometria Esférica é fundamentada em superfícies de curvatura positiva e a Geometria Euclidiana é fundamentada no plano, que é uma superfície de curvatura nula.

B

Apêndice da Aula Expositiva

GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

PROFESSORA: Gracielle Simões de Carvalho	DATA: 13/06/2017	9º ANO

O que é Geometria?

GEO- significa Terra
METRIA- significa medida

Para que estudamos Geometria?

A geometria é a parte da matemática que estuda questões relacionadas a forma, tamanho e posição relativa entre figuras do espaço.
É uma ciência bastante antiga, alguns conhecimentos geométricos já eram desbravados no Egito Antigo, na Babilônia e na Grécia.

GEOMETRIA EUCLIDIANA

Quem foi Euclides de Alexandria?

Euclides (300 a.C.) escreveu a obra Elementos que revolucionou os estudos da geometria.
Elementos contém 13 livros e é a segunda obra com mais edições no mundo.
Nela, Euclides escreveu sobre estudos não só de geometria, mas também de aritmética e álgebra.

Noções básicas da Geometria

Ponto: não possui dimensão, pois não tem nem comprimento, nem largura e nem espessura.
Reta: possui comprimento, mas não tem nem largura e nem espessura.
Plano: possui largura e comprimento, mas não possui espessura.

O que é um postulado?

Podemos dizer que postulado é um princípio ou conceito primitivo que é aceito sem demonstração.

O Quinto Postulado de Euclides

"Por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma única reta paralela à reta dada."

IMPORTANTE

A Geometria de Euclides não explica todos os fenômenos.
Ela é adequada para superfícies planas.

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

A Geometria Não Euclidiana é distinta da geometria de Euclides e foi descoberta por volta de 1829.
Foi um grande progresso matemático evidente e revolucionário ocorrido na primeira metade do século XIX.

Modificação do Quinto Postulado de Euclides

" Por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma, mais de uma ou nenhuma reta paralela à reta dada."

Precursores da Geometria Não Euclidiana

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a Geometria Não Euclidiana.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856)

Matemático russo que propôs uma "nova geometria" chamada de Geometria Hiperbólica.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Matemático alemão que descobriu a Geometria Esférica.

Superfície Esférica, Plana e Hiperbólica

Por que a Geometria Esférica é Não Euclidiana?

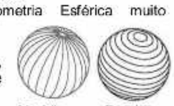
Porque a esfera é uma superfície curva, ou seja, não é plana!
Na Geometria Esférica as retas são círculos máximos da superfície esférica. Logo, a reta não é mais infinita como na geometria Euclidiana, mas sim ilimitada.
Na Geometria Esférica não existem retas paralelas à uma reta dada.

Para que serve a Geometria Esférica?

Um exemplo é o estudo da esfera e sua associação com o globo terrestre.

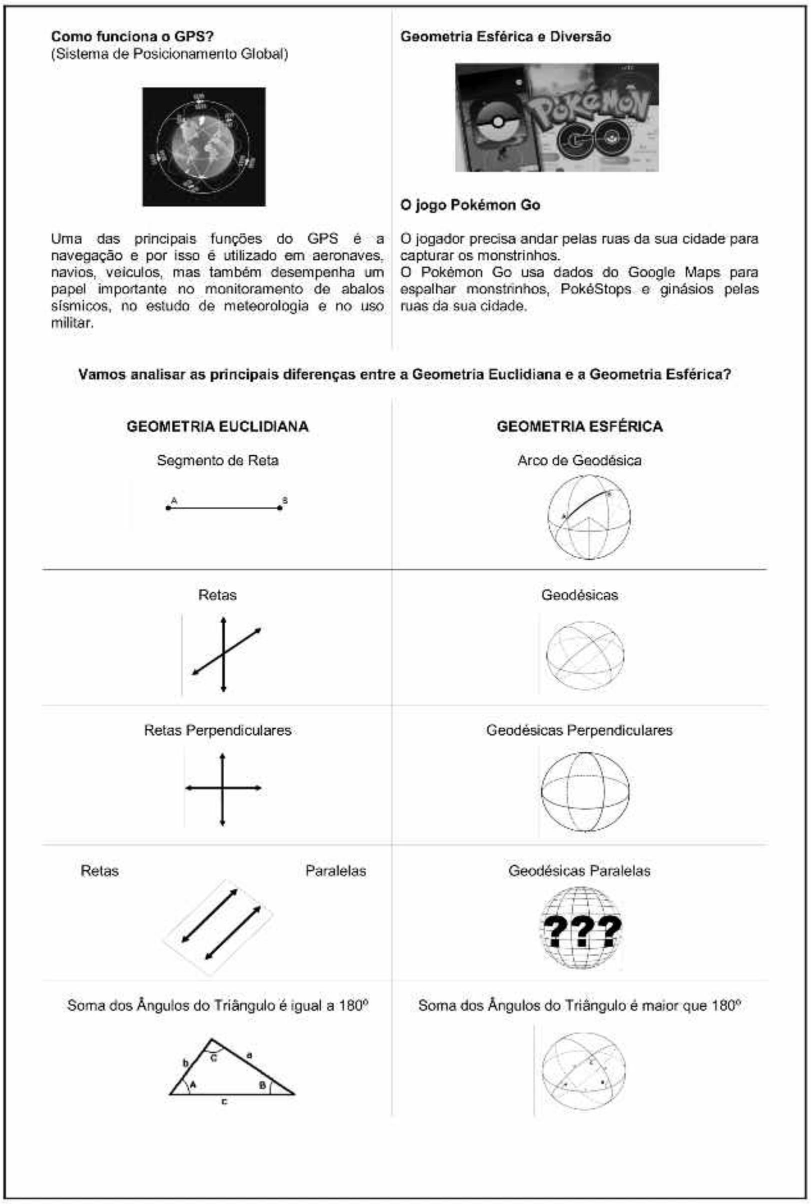
Geometria Esférica e a Geografia
Alguns elementos da Geometria Esférica muito conhecidos na Geografia:

Coordenadas geográficas, latitude, longitude, paralelos e meridianos.



Meridianos e Paralelos

Figura B.1: Primeira parte da aula expositiva



Como funciona o GPS?
(Sistema de Posicionamento Global)

Uma das principais funções do GPS é a navegação e por isso é utilizado em aeronaves, navios, veículos, mas também desempenha um papel importante no monitoramento de abalos sísmicos, no estudo de meteorologia e no uso militar.

Geometria Esférica e Diversão

O jogo Pokémon Go

O jogador precisa andar pelas ruas da sua cidade para capturar os monstrinhos.
O Pokémon Go usa dados do Google Maps para espalhar monstrinhos, PokéStops e ginásios pelas ruas da sua cidade.

Vamos analisar as principais diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica?

GEOMETRIA EUCLIDIANA	**GEOMETRIA ESFÉRICA**
Segmento de Reta	Arco de Geodésica
Retas	Geodésicas
Retas Perpendiculares	Geodésicas Perpendiculares
Retas Paralelas	Geodésicas Paralelas
Soma dos Ângulos do Triângulo é igual a 180º	Soma dos Ângulos do Triângulo é maior que 180º

Figura B.2: Segunda parte da aula expositiva

C

Apêndice da Aula Exploratória

ATIVIDADE- GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA ESFÉRICA		
PROFESSORA: Gracielle Simões de Carvalho	DATA: 14/06/2017	9º ANO
ALUNO(A):		

PRIMEIRA PARTE: Comentando as diferenças das Geometrias.

QUESTÃO 1: Explique com suas palavras:

a) O que é Geometria?

b) Para que estudamos Geometria?

c) O que diferencia a Geometria Euclidiana da Geometria Esférica?

d) As retas na Geometria Euclidiana são infinitas e ilimitadas. E como são retas na Geometria Esférica?

e) Desenhe retas concorrentes na Geometria Euclidiana e na Geometria Esférica.

f) Existem triângulos que tenha dois ângulos retos?

QUESTAO 2: Cite exemplos de contribuição da Geometria Esférica no cotidiano.

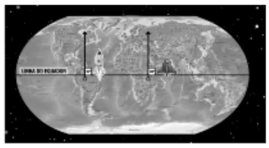
Figura C.1: Primeira parte da aula exploratória

SEGUNDA PARTE: Explorando as propriedades das Geometrias.

QUESTÃO 3: Vamos comparar as geometrias utilizando as folhas de papel para representar a superfície Euclidiana e as bolas de isopor para representar a superfície Esférica.

	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA ESFÉRICA
a) Dados uma reta r e um ponto P fora de r	É possível traçar reta paralela a r contendo o ponto P? Quantas retas podemos traçar?	É possível traçar reta paralela a r contendo o ponto P? Quantas retas podemos traçar?
b) Dados dois pontos distintos A e B	Quantas partes fica dividida a reta?	Quantas partes fica dividida a geodésica?
c) Retas perpendiculares	Duas retas perpendiculares definem quantos ângulos de 90º na superfície Euclidiana?	Duas geodésicas perpendiculares definem quantos ângulos de 90º na superfície esférica?
d) Os ângulos internos de um triângulo	Quantos ângulos de 90º um triângulo euclidiano pode ter?	Quantos ângulos de 90º um triângulo esférico pode ter?

QUESTÃO 4: Suponha que as cidades Rubra e Anil estão situadas bem próximas da linha do Equador. Em um determinado dia dois foguetes foram lançados no mesmo horário e com a mesma velocidade, um na cidade de Rubra e o outro na cidade de Anil.
O que você acha que acontecerá com os foguetes?



QUESTÃO 5: Começando de um determinado ponto da Terra, um urso caminha um quilômetro para o sul. Ele então muda de direção e caminha um quilômetro para o leste. Logo, ele vira de novo para a esquerda e caminha mais um quilômetro para o norte, chegando assim exatamente no mesmo ponto de partida.

a) Utilizando uma folha de papel, desenhe o percurso que o urso fez.

b) Agora, utilize a bola de isopor e os elásticos para fazer esse percurso.

c) Qual é a cor do urso? O que levou você a chegar a essa conclusão?

Figura C.2: Segunda parte da aula exploratória

D

Apêndice da Proposta de Atividade e Resultados Entregues a Escola

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CAMPUS FLORESTAL
Pós-Graduação Stricto Sensu em Matemática - PROFMAT
Campus Universitário - Florestal, MG - 35690-000
Telefone: (31) 3536-3367 E-mail: profmatcampusflorestal@gmail.com

PROFMAT

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA: UMA PROPOSTA DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO BÁSICO

Gracielle Simões de Carvalho

Atividade contida na Dissertação apresentada a Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título Magister Scientiae.

PROPOSTA DE UMA ATIVIDADE DE INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA PARA ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

INTRODUÇÃO

Primeiramente expõe-se o motivo da proposta de atividade ser voltada, prioritariamente, para os alunos do 9º ano do ensino fundamental. Sabe-se que a geometria é na matemática, parte estruturante do conteúdo programático do ensino básico. Espera-se, por isso, que estudantes do ano final do ensino fundamental já possuam certa convivência com a geometria, tendo assim um conhecimento geométrico passível de exploração.

É importante incentivar os alunos a construir o entendimento de que estamos inseridos em um mundo de formas, e que assim, é incontestável a importância da aprendizagem e da concepção da geometria, sem visar unicamente a questão de contextualização didática. A habilidade do professor de inserir diferentes situações que incluam ideias geométricas, ao cotidiano dos alunos se torna um elemento facilitador para compreensão do discente. Afinal, a geometria está presente não só na natureza, mas também em várias áreas de conhecimento,como a arquitetura, engenharia, artes e tecnologias.

O intuito desta atividade é aguçar no aluno o interesse e a curiosidade em investigar diversas noções geométricas, a começar pela percepção espacial, até mesmo, pela averiguação histórica e pelos conceitos mais sutis e complexos que a eles são desconhecidos.

Metodologicamente, objetiva-se propor uma atividade que será dividida em três partes.

A primeira parte constará de uma aula expositiva da parte histórica da geometria. Nesse momento, os alunos serão informados sobre a origem da geometria e sobre quem foi Euclides de Alexandria. Ademais, será relatada a existência da geometria não Euclidiana e o porquê do seu surgimento, bem como sua relevância não só na matemática antiga, como também suas contribuições que nos beneficiam até hoje. Em

Figura D.1: Documento Entregue para a Escola com a Proposta de Atividade e os Resultados- página 1 tempo, serão citados alguns conceitos básicos e exemplos que diferenciam a geometria Euclidiana da geometria não Euclidiana, focando na geometria esférica.

Na segunda parte, será apresentado um exercício bem trivial que abranja as diferenças da geometria Euclidiana e da geometria Esférica. A intenção é instigar o aluno a compreender as particularidades de cada geometria e assim reforçar o que foi exposto na primeira parte. A intenção é fazer com que os alunos trabalhem em pequenos grupos interagindo entre si.

Já a terceira parte, será composta por uma atividade exploratória como alternativa metodológica de ensino da introdução da geometria esférica, no ensino básico. Valorizando os conhecimentos prévios dos alunos, pretende-se inserir a geometria esférica em uma atividade lúdica com manipulação, de forma que os alunos tenham maior percepção espacial, facilitando a compreensão pelos mesmos.

OBJETIVOS

- Desenvolver e instigar o interesse do aluno para o aprendizado da geometria;
- Dotar o aluno de novos conhecimentos, contribuindo para o desenvolvimento da percepção acerca da geometria, utilizando atividades exploratórias;
- Propiciar a compreensão da existência da geometria não Euclidiana, bem como apresentar as diferenças entre as duas geometrias e a relevância de ambas dentro e fora da sala de aula.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Parte histórica sobre a origem da geometria;

Euclides de Alexandria e a obra Elementos;

Conceitos básicos da geometria Euclidiana;

Oquinto postulado de Euclides e o surgimento da nova geometria;

Os geômetras responsáveis peladescoberta da geometria não Euclidiana;

Apresentação de conceitos básicos da geometria esférica;

Comparação entre as geometrias Euclidiana e a esférica;

Exploração das características da geometria esférica.

METODOLOGIA

Aula expositiva utilizando recursos instrucionais: material de apoio, quadro e pincel;

Lição interativa, estimulando os alunos a trabalharem em pequenos grupos;

Oficina lúdica e instigante de exploração dos princípios da geometria esférica;

Figura D.2: Documento Entregue para a Escola com a Proposta de Atividade e os Resultados- página 2

Bibliografia

[1] Abreu, S.: *As aventuras de Radix.* Matemática na Escola.

[2] Alves, S.: *A Geometria do Globo Terrestre.* Apostila OBMEP, 2009.

[3] Barbosa, J. L. M.: *Geometria Hiperbólica.* Publicações Matemáticas. IMPA, 2007.

[4] Bicudo, I.: *Os Elementos/ Euclides.* Editora da Unesp, 2009.

[5] Coutinho, L.: *Convite às Geometrias Não Euclidianas.* Editora Interciência, 2001.

[6] Dario, D.F.: *Geometrias Não Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica no Ensino Médio.* Tese de Mestrado, Universidade Federal Tecnológica do Paraná, 2014.

[7] Howard, E.: *Introdução à História da Matemática.* Editora Unicamp, 2004.

[8] Polya, G.: *A Arte de Resolver Problemas.* Editora Interciência, 1995.

[9] Silva, W.D.: *Uma introdução à Geometria Esférica.* Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.

[10] Tomei, C.: *Euclides- A Conquista do Espaço.* Odysseus Editora, 2003.

[11] Zanella, I.A.: *Geometria Esférica: Uma proposta de Atividades com Aplicações.* Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, 2013.