UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALBIMAR SILVA NERI

FRAÇÕES CONTÍNUAS, EQUAÇÃO DE PELL E APLICAÇÕES

FORTALEZA-CEARÁ
2017

ALBIMAR SILVA NERI

FRAÇÕES CONTÍNUAS, EQUAÇÃO DE PELL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

FORTALEZA – CEARÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Neri, Albimar Silva .
Frações contínuas, equação de pell e aplicações [recurso eletrônico] / Albimar Silva Neri. - 2017 .
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 101 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017 .
Área de concentração: Matemática .
Orientação: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro.

1. Frações Contínuas. 2. Equação de Pell e Aplicações. I. Título.

ALBIMAR SILVA NERI

FRAÇÕES CONTÍNUAS, EQUAÇÃO DE PELL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 01 de dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará – (UFC)

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho à Deus e aos meus pais, Marta Maria Lopes da Silva e Albino Neri que, fortificaram minha caminhada, em todos os instantes na busca de meus sonhos, e se esforçaram para que eu sempre tivesse êxito nas batalhas de minha vida. Aos meus familiares e amigos que, por alguns momentos, souberam aceitar a minha ausência em situações de extrema importância e estiveram sempre na torcida pelo meu sucesso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me conceder a vida e me ajudar a vencer os desafios de cada dia, durante a realização desse trabalho.

À minha mãe, Marta Maria Lopes da Silva, e meu pai, Albino Neri, por sempre estarem comigo nos momentos mais difíceis de minha vida, apoiando, incentivando, acreditando nos meus sonhos e no meu potencial.

À Coordenação do PROFMAT, pela criação e manutenção desse belo projeto.

Aos excelentes professores, que tive a oportunidade de conhecê-los, Claudemir Leandro, Hermínio Borges, João Marques, João Montenegro, Ulisses Parente e em especial ao professor Tiago Caúla (meu orientador), uma pessoa justa, humilde e um professor quase perfeito, “Quase perfeito?”. Sim, caso contrário, ele jamais conseguiria se tornar cada vez melhor e ser sempre um professor perfeito para nós.

Aos meus colegas de turma, Diarlley Emanuel (Resistente), Fabrício Maia (Experiente), Gerlúcio Silva (Família), João Mendes (Humilde), José Aldeci (Esforçado), José Bernardo (Líder), José Ivan (Persistente), Jonathan Araújo (Detalhista), Marcelo de Castro (Guerreiro), Sérgio Augusto (Espiritual), pessoas fantásticas, escolhidas por Deus para fazerem parte de minha vida, o que tornou a caminhada mais agradável.

Ao meu amigo Thiago Barbosa de Oliveira, sem o qual não teria o suporte material para chegar até aqui.

Por último, quero agradecer aos meus familiares, que suportaram comigo durante essa batalha os dias e as noites de trabalho árduo que tive para alcançar meus objetivos.

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?”

(Augustin Louis Cauchy)

“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho tem a finalidade de despertar o interesse, que grandes matemáticos já tiveram, sobre frações contínuas e equação de Pell, assuntos belos e fascinantes da matemática que nos dias atuais tem sido pouco discutido, principalmente no ensino básico. Nesta perspectiva, apresentamos as definições, as propriedades e algumas aplicações de tais assuntos. A primeira parte iniciou com um pouco da história. Depois apresentamos a expansão dos números racionais e irracionais em forma de frações contínuas, juntamente com suas peculiaridades e propriedades de seus convergentes. Posteriormente tratamos do assunto frações contínuas periódicas. Na segunda parte, apreciamos algumas aplicações das frações contínuas. Por último, nos deparamos com a elegante equação de Pell, sua definição, suas propriedades e suas aplicações. Finalizando o trabalho, mais uma vez as frações contínuas se mostram com sua extrema importância, sendo utilizada como ferramenta para a resolução da equação de Pell.

Palavras-chave: Frações Contínuas. Equação de Pell e Aplicações.

ABSTRACT

This academic study has the purpose to awaken the interest, that great mathematicians have had, in continued fractions and Pell's equation, such beautiful and fascinating subjects are, nowadays, little discussed, especially in elementary schools. Having that in mind, are presented here it's definitions, properties, and applications. For the first part, it's history is shown. Then we present the expansion of rational and irrational numbers in the form of continued fractions along with their peculiarities and properties of their convergent. In the end periodical continued fractions are explained. On the second part, applications for continued fractions are presented. The last part consists on the definition, the properties, and the applications of Pell's equation. Finalizing this study, once more continued fractions are shown to be of extreme importance, being utilized as a tool for the resolution of Pell's equation.

Key words: Continued Fractions. Pell's Equation and Applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é enfatizar a importância das Frações Contínuas e da equação de Pell, buscando o maior interesse por estes assuntos, principalmente no ensino básico

Por esse motivo, em se tratando das frações contínuas, apresentamos algumas aplicações como: a aproximação de números irracionais por números racionais, resolução de circuito formado por infinitos resistores idênticos, ajuste de engrenagens, resolução de equações exponenciais, resolução de logaritmos, obtenção de raízes quadradas e resolução de Equações Diofantinas lineares de duas variáveis. Em relação à Equação de Pell, apresentamos a sua aplicação em exercícios curiosos de grande importância para a Matemática.

O desenvolvimento do trabalho é apresentado em três capítulos, sendo o primeiro sobre Frações Contínuas, iniciando com sua definição, apresentando o método de expansão em frações contínuas para números reais e aos poucos as propriedades e diferenças em se tratando do número ser racional ou irracional.

Posteriormente, trata-se das frações contínuas periódicas com o teorema de Euler e o teorema de Lagrange.

No segundo capítulo, por estarmos familiarizados com as frações contínuas, concentramos as suas aplicações.

Por fim, no terceiro capítulo, temos a definição de Equação de Pell com suas características, o processo para obtenção de suas soluções e as diferentes formas para a Equação de Pell. Além disso, neste capítulo também é discutida a relação existente entre frações contínuas e Equação de Pell. Esta ligação é propósito principal do trabalho, resultando na conexão entre esses belos assuntos matemáticos.

Para quem tiver um interesse maior, lembre-se de que a fração contínua tem aplicações em um nível bem mais avançado como, por exemplo: aproximantes de Padé, Séries de Potências, Sistemas Dinâmicos, Expansão de Funções, Probabilidade e Estatística e Polinômios Ortogonais.

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Não se sabe com exatidão quando tivemos o surgimento das frações contínuas. Isso se deve à falta de um tratamento organizado sobre o assunto pelos antigos estudiosos. Além disso, os fundamentos das frações contínuas não foram definidos até o final de 1600 e início de 1700, apesar de suas aparições em toda matemática, nos últimos 2000 anos.

Segundo historiadores da matemática tivemos na Grécia (306 a.C – 283 a.C), o primeiro passo para o surgimento das frações contínuas, pois os gregos tinham conhecimento do algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum de dois números inteiros, que é o processo essencial para se obter uma fração contínua simples finita.

No entanto, podemos considerar a ideia embrionária de frações contínuas os comentários feitos por Téon de Alexandria, filósofo e astrônomo grego, no final do século IV d.C, sobre o livro Almagesto de Cláudio Ptolomeu.

Téon de Alexandria, em seus comentários, procurava resolver o problema de encontrar, aproximadamente, o lado de uma superfície quadrada cujo valor da área não tem raiz exata.

Em seguida, (476 – 550 d.C) o matemático indiano Aryabhata, conhecido como o autor do texto matemático Ariabatiia, publicado em 499, faz uso de uma técnica que se aproxima do conceito de frações contínuas, segundo Boyer, o matemático Aryabhata neste texto tenta resolver uma equação linear indeterminada, de forma geral. O procedimento abaixo, que retrata a relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro permitindo concluir que $\pi = 3,1516$ é devido ao matemático indiano Aryabhata.

“Some quatro a cem, multiplique por oito e então adicione sessenta e dois mil. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo de diâmetro vinte mil”.

Em (598 – 668), aproximadamente, o matemático e astrônomo indiano Brahmagupta encontrou soluções gerais de equações diofantinas e aprofundou-se no estudo das equações diofantinas conhecidas hoje, como equação de Pell. É de Brahmaupta o método chakravala, que permite resolver equações diofantinas de grau dois, e foi utilizado por este quando investigou a resolução da equação $x^2 - 61y^2 = 1$, encontrando sua menor solução $x = 1766319049$ e $y = 226\,153\,980$, porém esse método foi melhorado no século XII por outro matemático e astrônomo indiano Bhaskara Acharia.

No consenso dos estudiosos de História da Matemática, a teoria moderna das frações contínuas surgiu com o matemático italiano Rafael Bombelli (1526 – 1572) nascido em Bolonha e autor do livro L'Álgebra Parte Maggiore dell` Arithmética, publicado em 1572. Na época fez a seguinte aproximação para $\sqrt{13}$

$$\sqrt{13} \cong 3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6}} = \frac{18}{5}$$

Porém, no século XVI, já se conhecia a seguinte expressão

$$\sqrt{a^2+b} \cong a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a}}$$

Dando continuidade aos estudos de Bombelli, outro matemático italiano de Bolonha, Pietro Antonio Caltadi (1458 – 1626) desenvolveu um algoritmo de frações contínuas, o qual utilizou no cálculo da raiz quadrada de 18 e também percebeu que as aproximações sucessivas eram alternadamente superiores e inferiores que a raiz quadrada buscada.

Em 1657, na Inglaterra, Pierre de Fermat desafiou os matemáticos europeus com vários problemas, entre os quais estava a equação resolvida por Brahmagupta. Não demorou muito e o matemático britânico Lord Brouncker (1620 - 1684), o primeiro presidente da Royal Society of London, apresentou sem demonstração, a primeira expansão em frações contínuas infinitas, do número π.

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}$$

Tal representação, em 1775, foi demonstrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). O resultado que Lord Brouncker encontrou foi consequência da seguinte identidade:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdots}$$

devido ao matemático inglês Jonhn Wallis (1616 – 1703), publicada em seu livro “Arithmetica Infinitorum”, em 1655. É também atribuído à Jonhn Wallis o uso pela primeira vez, do termo “Frações Contínuas”.

Desde então, grandes matemáticos, como Leonhard Euler (1707 - 1783), Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), dentre outros, interessaram-se pelo tema e estabeleceram as bases para a teoria moderna das frações contínuas.

O matemático suíço Leonhard Euler, nascido em Basiléia, em 1707 é considerado um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas, conforme Howard Eves.

É atribuída a Leonhard Euler, em 1737, a expansão em frações contínuas do número e

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \ddots}}}}}}}}}}$$

Além de

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}} \quad \text{e} \quad \frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}}$$

Johann Heinrich Lambert deu um tratamento essencial para frações contínuas e utilizou para demonstrar, pela primeira vez, que π é um número irracional, expressando a $tg(x)$ em forma de frações contínuas, na obra Beytrage Zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.

$$tg(x) = \cfrac{1}{\frac{1}{x} - \cfrac{1}{\frac{3}{x} - \cfrac{1}{\frac{5}{x} - \cfrac{1}{\frac{7}{x} - \cdots \ddots}}}}$$

Com base nessa expansão, Lambert demonstrou que se x fosse racional, não nulo, $tg(x)$ seria irracional. Como $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, logo concluiu que π era irracional.

Os matemáticos Leonhard Euler, Johann Heinrich Lambert e Joseph Louis Lagrange, dentre outros, desenvolveram a teoria das frações contínuas de forma sistemática como a conhecemos atualmente. Também observaram, que as frações contínuas estavam associadas à equação de Pell, a ponto de solucioná-las.

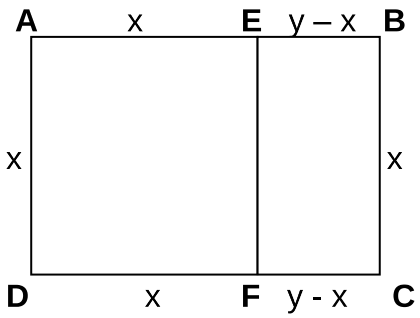
2 FRAÇÕES CONTÍNUAS

2.1 O RETÂNGULO ÁUREO E O NÚMERO ÁUREO

Por seu formato esteticamente belo, o Retângulo Áureo foi muito utilizado em obras de artistas e arquitetos como por exemplo, no Partenon.

Chamamos um retângulo de Retângulo Áureo quando retirado dele um quadrado, cujo lado é o menor lado deste retângulo e obtemos um retângulo semelhante ao primeiro.

Seja ABCD um retângulo de lados y e x **(y>x)**, e AEFD o quadrado de lado x, encontremos a relação entre y e x, através da semelhança entre ABCD e BCFE.

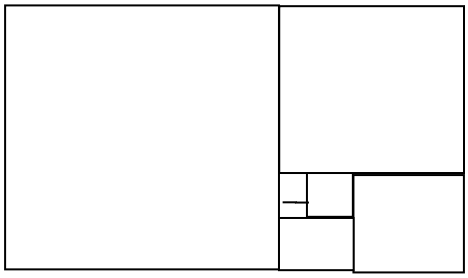


Vem que: $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CF} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$. Daí, $x^2 + yx - y^2 = 0$; resolvendo em y e sendo $y > 0$, encontramos:

$$y = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot x$$

Fazendo o lado menor do retângulo $x = 1$, obtemos $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ conhecido como o número áureo e vale aproximadamente $1{,}618$. Observe que o retângulo BCFE também é um retângulo áureo, uma vez que este é semelhante ao retângulo ABCD. Portanto, podemos repetir o processo com o retângulo BCFE e obter mais um retângulo áureo e assim sucessivamente.

Figura 1- Representação do número áureo



Fonte: elaborada pelo autor

Resolvendo-se então, de outra maneira, a equação $y^2 - y - 1 = 0$, para encontrarmos o número áureo. Chegamos à seguinte forma.

Sendo $y > 0$, dividindo a equação acima por y temos:

$$y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y - 1 - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{y}$$

Olhando para expressão e substituindo y de forma recursivamente, obtemos:

$$y = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{y}}} \Rightarrow y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}}$$

onde a sua representação geométrica é a figura 1.1. Esta nova representação encontrada, para o número de ouro, é conhecida como Fração Contínua.

2.2 DEFINIÇÃO E NOTAÇÃO DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

Definição 1.1: Uma fração contínua é uma expressão dada na forma

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \frac{b_4}{a_5 + \frac{b_5}{a_6 + \ddots}}}}}$$

ou de modo alternativo $a_1 + \frac{b_1}{a_2+}\frac{b_2}{a_3+}\frac{b_3}{a_4+}\frac{b_4}{a_5+}\frac{b_5}{a_6+\ldots}$ onde os valores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \cdots$ e $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \cdots$ são números inteiros, números reais ou complexos, ou funções de tais variáveis. São denominados de quocientes parciais os termos $\frac{b_n}{a_{n+1}}, n = 1, 2, 3, \ldots$ sendo b_n e a_{n+1} os respectivos numeradores e denominadores de tais quocientes.

Definição 1.2 Uma fração contínua simples ou regular é uma fração contínua da forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \ddots}}}}}$$

ou de maneira alternativa, $a_1 + \frac{1}{a_2+} \frac{1}{a_3+} \frac{1}{a_4+} \frac{1}{a_5+} \frac{1}{a_6+\cdots}$ ou $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_6, ..]$.

Preste atenção ao ponto e vírgula pois este símbolo indica a parte inteira a_1 da fração continua. Além disso, $a_2, a_3, a_4, \dots \dots$ são números naturais (excluindo-se aqui o zero) e a_1 um número inteiro qualquer, sendo neste caso os termos $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. os quocientes parciais de tal fração contínua.

É possível fornecermos uma representação geométrica para frações contínuas simples, nos casos particulares, em que a parte inteira é um número natural.

Para fins deste trabalho, daremos ênfase apenas nas frações contínuas simples nos referindo simplesmente como fração contínua.

2.3 ALGORITMO DE DESENVOLVIMENTO DE UM NÚMERO REAL NUMA FRAÇÃO CONTÍNUA.

Para desenvolver um número real em forma de fração contínua, que procedimentos deveremos tomar?

1° Passo: Destaca – se a parte inteira do número real x, representada por $[x]$, reescrevendo - o em soma de sua parte inteira com sua parte restante fracionária, representada por $\{x\}$, inferior à unidade

2° Passo: Representar a segunda parcela sob a forma de fração com numerador 1 e denominador maior que 1. A este denominador, aplica-se novamente o primeiro passo, e assim sucessivamente.

Exemplo 1.1: Expressaremos os seguintes números, $\frac{81}{29}, \frac{-81}{29}, \frac{29}{81}, \pi, \sqrt{3}$ em forma de frações contínuas.

I) $\left[\frac{81}{29}\right]_1 = \mathbf{2}$, $\left\{\frac{81}{29}\right\}_1 = \frac{23}{29}$, $\left[\frac{29}{23}\right]_2 = \mathbf{1}$, $\left\{\frac{29}{23}\right\}_2 = \frac{6}{23}$, $\left[\frac{23}{6}\right]_3 = \mathbf{3}$, $\left\{\frac{23}{6}\right\}_3 = \frac{5}{6}$, $\left[\frac{6}{5}\right]_4 = \mathbf{1}$, $\left\{\frac{6}{5}\right\}_4 = \frac{1}{5}$, $[\mathbf{5}]_5 = \mathbf{5}$

$$\frac{81}{29} = 2 + \frac{23}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{23}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{6}{23}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{23}{6}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

II) $\left[\frac{-81}{29}\right]_1 = -\mathbf{3}$, $\left\{\frac{-81}{29}\right\}_1 = \frac{6}{29}$, $\left[\frac{29}{6}\right]_2 = \mathbf{4}$, $\left\{\frac{29}{6}\right\}_2 = \frac{5}{6}$, $\left[\frac{6}{5}\right]_3 = \mathbf{1}$, $\left\{\frac{6}{5}\right\}_3 = \frac{1}{5}$, $[\,\mathbf{5}]_4 = \mathbf{5}$

$$\frac{-81}{29} = -3 + \frac{6}{29} = -3 + \frac{1}{\frac{29}{6}} = -3 + \frac{1}{4 + \frac{5}{6}} = -3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}$$

$$= -3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} \; ou \; -3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}$$

III) $\left[\frac{29}{81}\right]_1 = \mathbf{0}$, $\left\{\frac{29}{81}\right\}_1 = \frac{29}{81}$, $\left[\frac{81}{29}\right]_2 = \mathbf{2}$, $\left\{\frac{81}{29}\right\}_2 = \frac{23}{29}$, $\left[\frac{29}{23}\right]_3 = \mathbf{1}$, $\left\{\frac{29}{23}\right\}_3 = \frac{6}{23}$, $\left[\frac{23}{6}\right]_4 = \mathbf{3}$, $\left\{\frac{23}{6}\right\}_4 = \frac{5}{6}$, $\left[\frac{6}{5}\right]_5 = \mathbf{1}$, $\left\{\frac{6}{5}\right\}_5 = \frac{1}{5}$, $[\mathbf{5}]_6 = \mathbf{5}$

$$\frac{29}{81} = 0 + \frac{1}{\frac{81}{29}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{23}{29}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{29}{23}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{6}{23}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{23}{6}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}$$

iv) $\boldsymbol{\pi} \sim \mathbf{3,1415926535..}$, $[\boldsymbol{\pi}]_1 = \mathbf{3}$, $\{\boldsymbol{\pi}\}_1 \sim \mathbf{0,1415926535..}$, $[\mathbf{1/0,1415926535}\ldots]_2 = \mathbf{7}$, $\{\mathbf{1/0,1415926535}\ldots\}_2 \sim \mathbf{0.0625133054...}$, $[\mathbf{1/0,0625133054}\ldots]_3 = \mathbf{15}$, $\{\mathbf{1/0,0625133054}\ldots\}_3 \sim \mathbf{0,9965945426}\ldots.$ $[\mathbf{1/0,9965945426...}]_4 = \mathbf{1}$, $\{\mathbf{1/0,9965945426}\ldots\}_4 \sim \mathbf{0,0034170942}\ldots$, $[\mathbf{1/0,0034170942}\ldots]_5 = \mathbf{292}$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

v) $\sqrt{\mathbf{3}} \sim$ **1,7320508....**

$$\left[\sqrt{\mathbf{3}}\right]_{\mathbf{1}} = \mathbf{1},$$

$$\left\{\sqrt{\mathbf{3}}\right\}_{\mathbf{1}} \sim \mathbf{0,7320508} \ldots.., [\mathbf{1/0,7320508} \ldots]_{\mathbf{2}} =$$

$$\mathbf{1}, \{\mathbf{1/0,7320508} \ldots\}_{\mathbf{2}} \sim \mathbf{0,36602541} \ldots., [\mathbf{1/0,36602541} \ldots.]_{\mathbf{3}} = \mathbf{2},$$

$$\{\mathbf{1/36602541} \ldots\}_{\mathbf{3}} \sim \mathbf{0,73205076} \ldots, [\mathbf{1/0,73205076} \ldots]_{\mathbf{4}} = \mathbf{1}$$

$$\{\mathbf{1/0,732050761} \ldots\}_{\mathbf{4}} \sim \mathbf{0,3660266} \ldots, [\mathbf{1/0,3660266}]_{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Obtemos: $\frac{81}{29} = [2; 1, 3, 1, 5]$, $\frac{-81}{29} = [-3; 4, 1, 5] = [-3; 4, 1, 4,1]$, $\frac{29}{81} = [0; 2, 1, 3, 1, 5]$, $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots \ldots]$, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots \ldots]$

É perceptível, pelo exposto acima, que:

1) O algoritmo apresentado na expansão de números racionais em frações contínuas constitui o algoritmo da Divisão de Euclides. (Utilizado para obter o m.d.c (p,q), q>0). Veja:

Encontremos o máximo divisor comum de 81 e 29 pelo processo das divisões sucessivas.

$$81 = \mathbf{2} \times 29 + 23$$

$$29 = \mathbf{1} \times 23 + 6$$

$$23 = \mathbf{3} \times 6 + 5$$

$$6 = \mathbf{1} \times 5 + 1$$

$$5 = \mathbf{5} \times 1 + 0$$

Portanto $(81,29) = 1$ e os quocientes são exatamente os quocientes parciais da fração contínua simples que representa $\frac{81}{29}$

2) De modo geral, todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita.

Se $a_n > 1$, temos:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1 + \frac{1}{1}} \Longrightarrow [a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n] = [a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n - 1, 1]$$

Se $a_n = 1$, temos:

$$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1} \Longrightarrow [a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n] == [a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1} + 1]$$

Porém a menos da modificação do último termo a_n, a unicidade da representação de um número racional em frações contínuas é garantida pelo Algoritmo da Divisão de Euclides.

3) Da relação sugerida a partir do $\frac{81}{29} = [2; 1, 3, 1, 5]$ e $\frac{29}{81} = [0; 2, 1, 3, 1, 5]$, temos a seguinte proposição

Proposição 1.1: Se a representação em fração contínua do número racional $\frac{p}{q}$ (p>q) é dada por $[a_1; a_2, \ldots. a_n]$, então a representação de $\frac{q}{p}$ é dada por $[0; a_1, a_2, \ldots. a_n]$. E a recíproca, se $\frac{q}{p}$ (p$> q$) é dada por $[0; a_1, a_2, \ldots. a_n]$, então $\frac{p}{q}$ (p> q) é dada por $[a_1; a_2, \ldots. a_n]$ também é válido.

Demonstração:

É conseqüência imediata do fato de

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}} = 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [0; a_1, a_2, \ldots\ldots a_n]$$

Reciprocamente temos:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

$$= [a_1; a_2, \ldots\ldots, a_n]$$

■

4) As frações contínuas representam números racionais de forma finita e números irracionais de forma infinita, sendo estas em alguns casos de forma periódica.

Teorema 1.1: Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita e toda fração contínua simples finita representa um número racional.

Demonstração:

Primeiramente lembre-se que, a menos da alteração do último termo onde se $a_n > 1$, teremos:$[a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n] = [a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n - 1,1]$ e se $a_n = 1$, temos: $[a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1}, 1] = [a_1; a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1} + 1]$, a unicidade da representação de um número racional em fração contínua é garantida pelo Algoritmo da Divisão de Euclides.

⇒ Seja $\frac{p}{q}$ um número racional qualquer, com $q > 0$. Pela divisão Euclidiana obtemos:

$$p = a_1 q + r_1 \quad (0 < r_1 < q) \Rightarrow \frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}$$

$$q = a_2 r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1) \Rightarrow \frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

$$r_1 = a_3 r_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2) \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \quad (0 < r_{n-1} < r_{n-2}) \Rightarrow \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}$$

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1} \quad (0 = r_n < r_{n-1}) \Rightarrow \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n$$

Observe que na divisão de números inteiros o resto pode ser igual a zero. No entanto, não admitimos essa possibilidade nas inequações acima, pois quando se verifica $r_i = 0$ essa igualdade será a última, uma vez que os restos são números não negativos e cada um deles menor que o anterior.

Substituindo cada igualdade obtida na anterior, chegamos à seguinte conclusão

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

$\Leftarrow$ Dada a fração contínua $[a_1; a_2, a_3, \dots\dots, a_n]$ simples finita, basta usarmos as operações elementares e obteremos um número racional.

■

2.4 FRAÇÕES REDUZIDAS E CONVERGENTES

Definição 1.3: Uma fração contínua $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$ pode ser truncada, mantendo os quocientes parciais $a_1; a_2, a_3, \dots, a_n$ e deixando de lado os quocientes parciais posteriores $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$ Se começarmos por considerar apenas os primeiros termos, podemos escrever.

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_2 a_3 + 1}$$

$$= \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1} = \frac{p_3}{q_3}$$

e assim por diante.

Estas frações $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ são chamadas de primeira, segunda, terceira reduzidas (ou convergentes) da fração contínua $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$.

A fração $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, que se obtém deste modo, é chamada de

n-ésima reduzida ou n-ésima convergente da fração contínua.

É claro que o n-ésimo convergente da fração contínua finita $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n]$ é igual à própria fração que a gerou. No caso de uma fração contínua infinita a sucessão das reduzidas é infinita e converge para um número irracional.

Observando os convergentes vistos, temos:

$$p_1 = a_1, \qquad q_1 = 1\,, \qquad p_2 = a_2 a_1 + 1, \qquad q_2 = a_2$$

Dessa maneira

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1}$$

Ou seja, $p_3 = a_3 p_2 + p_1$e $q_3 = a_3 q_2 + q_1$se continuarmos com os procedimentos, encontramos:

$$p_4 = a_4 p_3 + p_2 \text{ e } q_4 = a_4 q_3 + q_2$$

$$p_5 = a_5 p_4 + p_3 \text{ e } q_5 = a_5 q_4 + q_3$$

O que nos leva a conjecturar que os numeradores $p_i's$ e os denominadores $q_i's$ dos convergentes $c_i's$ satisfazem as seguintes relações:

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$$

$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

Veja a prova no teorema abaixo que realmente estas relações se verificam para $i = 1,2,3, \dots ..$

Teorema 1.2: Dada uma sequência (finita ou infinita) $a_1, a_2, a_3, \cdots \in \mathbb{R}$ tal que $a_k > 0$, para todo $k \geq 2$, definimos as sequências p_i e q_i

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \; e \; q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

Para $i = 1,2,3, \dots \dots$; onde

$p_{-1} = 0,\;\; q_{-1} = 1,\;\; p_0 = 1,\;\; q_0 = 0$

Temos então:

$$[a_1, a_2, a_3, \dots \dots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n} \;\; \forall_n \geq 1$$

Demonstração:

Provemos por indução em n. Como já vimos o teorema é válido para

$i = 1, 2, 3.$

$$c_1 = [a_1] = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$c_2 = [a_1; a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 a_1 + 1}{a_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}$$

Assumimos que a afirmação seja válida para n. Isto significa que

$$c_n = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

Agora, estamos prontos para provar que a relação é válida para $n + 1$. Lembrando que, o $(n + 1)$-ésimo convergente

$$c_{n+1} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}}$$

é obtido substituindo na expressão do n-ésimo convergente

$$c_n = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

o número a_n por $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$, vem

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right].$$

Perceba que esta substituição não modifica a definição dos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ precedentes pois por hipótese

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}}{a_{n-1} q_{n-2} + q_{n-3}}$$

Ou seja, os números p_{n-2}, p_{n-3}, q_{n-2}, q_{n-3} são independentes do quociente a_n portanto não se alteram com essa substituição. Logo, podemos obter c_{n+1} substituindo a_n por $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$

$$c_{n+1} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$= \frac{(a_{n+1}a_n + 1)p_{n-1} + a_{n+1}p_{n-2}}{(a_{n+1}a_n + 1)q_{n-1} + a_{n+1}q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}$$

$$= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

o que conclui a demonstração por indução.

■

Veremos a seguir que, para todo convergente $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, temos

(p_n, q_n) = 1; porém é necessário a prova da seguinte relação

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n.$$

Teorema 1.3: Sejam p_n e q_n, respectivamente, o numerador e o denominador do n – ésimo convergente. As igualdades $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n, n \geq 0$ e $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \,, n \geq 1$, se verificam.

Demonstração:

Novamente, provemos por indução em n. Para $n = 0$ temos

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$$

Suponha, como hipótese de indução, que para $i \leq n$, com $n \geq 0$ é válido a relação $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \,; i = 1, 2, 3 \ldots \ldots n$ mostraremos que a mesma é verdadeira para $i = n + 1$.

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1})$$

$$= a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - a_{n+1} p_n q_n - p_n q_{n-1}$$

$$= p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)$$

utilizando, pois a hipótese de indução, obtemos:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

o que conclui a demonstração da primeira igualdade.

Para demonstrar a segunda igualdade, basta fazer

$$\begin{aligned} p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_np_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-2} - a_np_{n-2}q_{n-1} - p_{n-2}q_{n-2} \\ &= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-1}a_n \end{aligned}$$

o que conclui a segunda igualdade e portanto o teorema. ■

Corolário 1.1: Para todo convergente $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ temos que $(p_n, q_n) = 1$.

Demonstração: Seja d um número inteiro não nulo, tal que d é um divisor comum de p_n e q_n, ou seja, existem k e r $(k, r \in \mathbb{Z})$; onde $p_n = dk$ e $q_n = dr$

Logo; pelo teorema anterior

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n \ \forall_{n\geq 0}$$

teremos

$$dkq_{n-1} - p_{n-1}dr = (-1)^n$$

Dividindo ambos os membros desta equação por d, vem

$$kq_{n-1} - p_{n-1}r = \frac{(-1)^n}{d}$$

Isto nos diz que qualquer divisor comum de p_n e q_n deve ser um divisor de 1 ou -1. Portanto o máximo divisor comum de p_n e $q_n$deve ser 1.

■

2.5 EXPANSÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS EM FRAÇÕES CONTÍNUAS

Vimos no início deste capítulo a expansão de $\sqrt{3}$ em frações contínuas, porém de uma maneira exaustiva. Descrevemos agora um processo para construir a expansão de um número irracional em frações contínuas.

Seja $\alpha = \alpha_1$ um irracional e seja a_1 o maior inteiro menor que α, isto é,

$a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$. Assim,

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \quad 0 < \frac{1}{\alpha_2} < 1$$

e $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} > 1$ é irracional. Da mesma forma, podemos escrever

$$\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3} \quad 0 < \frac{1}{\alpha_3} < 1$$

onde $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor$ e $\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} > 1$é irracional. Repetindo esse processo, teremos:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3}$$

$$\alpha_3 = a_3 + \frac{1}{\alpha_4}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\ , \qquad \alpha_{n+1} > 1 \;\; a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$

$$\vdots$$

Esse processo não termina e por isso pode ser repetido um número qualquer de vezes, visto que todos os $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ são números inteiros e todos os $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ números irracionais. Fazendo as substituições no processo encontrado acima, encontramos a seguinte fração contínua simples infinita.

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\alpha_3}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}},$$

o que denotaremos por $\alpha = [a_1; a_2, a_3, \dots \dots.]$. (veja o Corolário 1.2.)

Exemplo 1.2: Expresse o número $\sqrt{3}$ em forma de fração contínua simples infinita.

Solução: Sabemos que $1^2 < 3 < 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$; sendo portanto

$a_1 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$. Logo, escrevendo

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

Daí;

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)}\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ou seja,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

Como $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$, vem

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

De onde temos

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)}\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3} + 1.$$

Assim;

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

Logo $a_3 = \lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \sqrt{3} + 1 \rfloor = 2$

$$\sqrt{3} + 1 = a_3 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

Desta última equação determinando x_3

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Perceba que $x_3 = x_1$. Como consequência $x_4 = x_2$; $x_5 = x_3$ e assim sucessivamente o que nos fornece para a seqüência $a_1, a_2, a_3, ...$ os valores 1,1,2,1,2,1,2.... Portanto a fração contínua infinita que representa $\sqrt{3}$ é dada por:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1; 1,2,1,2, ...] = [1; \overline{1,2}]$$

Esse tipo de fração contínua é chamada fração contínua periódica.

Definição 1.4: Uma fração contínua simples é denominada fração contínua periódica se a sequência dos valores a_i apresenta repetição (período), que denotaremos por

$$[a_1; a_2, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}}]$$

Sendo $a_{k+n} = a_k$, e os valores $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}$ formam o período. A fração contínua

$$[\overline{a_1; a_2, a_3, \ldots., a_k}]$$

é denominada fração contínua periódica pura.

Exemplo 1.3: Determine a expansão de $\sqrt{8}$ em frações contínuas

Solução: Sabemos que $2^2 < 8 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$; sendo portanto $a_1 = \lfloor\sqrt{8}\rfloor = 2$. Logo;

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{1}{(\sqrt{8}-2)}\frac{(\sqrt{8}+2)}{(\sqrt{8}+2)} = \frac{\sqrt{8}+2}{4}$$

Daí;

$a_2 = \lfloor x_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{8}+2}{4} \right\rfloor = 1$, vem

$$\frac{\sqrt{8}+2}{4} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{8}-2}{4}} = \frac{4}{(\sqrt{8}-2)}\frac{(\sqrt{8}+2)}{(\sqrt{8}+2)} = \sqrt{8}+2$$

De onde temos

$a_3 = \lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \sqrt{8} + 2 \rfloor = 4$, assim

$$\sqrt{8} + 2 \; = \; 4 + \frac{1}{x_3} \; \Rightarrow \; x_3 = \frac{1}{\sqrt{8} - 2} = \frac{1}{\left(\sqrt{8} - 2\right)} \frac{\left(\sqrt{8} + 2\right)}{\left(\sqrt{8} + 2\right)} = \frac{\sqrt{8} + 2}{4} = x_1$$

Como $x_3 = x_1$, vemos que $a_4 = a_2$; $a_5 = a_3$, $a_6 = a_2$; $a_7 = a_3$. Portanto

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}} = [2; 1{,}4{,}1{,}4, \ldots.] = [2; \overline{1{,}4}]$$

Será possível revertermos esse processo? Sim, dada a fração contínua periódica, somos capazes de obter o número irracional que esta representa.

Considere

$$[2; \overline{1{,}4}] = y = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

Observe desta última igualdade, que:

$$y = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}} \Leftrightarrow (y - 2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (y - 2)}} \Leftrightarrow (y - 2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y + 2}} \Leftrightarrow (y - 2) = \cfrac{1}{\cfrac{y + 3}{y + 2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) = \frac{y + 2}{y + 3} \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \sqrt{8}$$

portanto$[2; \overline{1{,}4}] = \sqrt{8}$.

Devemos lembrar que nem todo irracional possui uma representação periódica quando representado sob a forma de frações contínua. Lembra do

$\pi = [3; 7{,}15{,}1{,}292{,}1{,}1{,}1{,}2{,}1{,}3, \ldots\ldots]$ no início do capítulo, onde não há uma sequência periódica.

Lagrange, em 1770, caracterizou todos os irracionais que possuem representação periódica quando expressos sob a forma de fração contínua.

Ele mostrou que a fração contínua infinita que representa um irracional é periódica se, e somente se, este irracional for raiz de um polinômio da forma $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b e c são inteiros. Porém trataremos deste assunto mais adiante.

2.6 PROPRIEDADES DOS CONVERGENTES

No teorema a seguir mostramos algumas propriedades importantes da sequência dos convergentes $c_1, c_2, c_3, ...$ de uma fração contínua. Lembrando que os convergentes das frações contínuas simples infinitas são obtidos do mesmo modo que os convergentes das frações contínuas simples finitas.

Definição 1.5: Diz-se que uma sequência (c_n) é crescente se

$c_1 < c_2 < \cdots < c_n < \cdots$ e decrescente se $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > \cdots$

Diz-se que a sequência é não decrescente se $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq \cdots$ e não crescente se $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$ ... Diz-se que a sequência é monótona se ela satisfaz qualquer uma dessas condições.

Definição 1.6: Dizemos que uma sequência (c_n) é limitada se é limitada superiormente e limitada inferiormente ao mesmo tempo, ou seja, existem números reais a e b tais que $a \leq c_n \leq b$.

Teorema 1.4: A sequência $c_1, c_2, c_3, ...$ dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:

I Os convergentes de ordem ímpar formam uma sequência numérica crescente.

$$c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \cdots \cdots < c_{2n+1}$$

II Os convergentes de ordem par formam uma sequência numérica decrescente.

$$c_2 > c_4 > c_6 > c_8 > \cdots \cdots > c_{2n}$$

III Todo convergente de ordem ímpar é menor do que qualquer convergente de ordem par e para cada convergente $(c_n), n \geq 3$, tem-se que c_n está entre c_{n-2} e c_{n-1}:

$$c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \cdots < c_{2n+1} < \cdots < c_{2n} < \cdots < c_6 < c_4 < c_2,$$

$$c_{n-1} < c_n < c_{n-2} \text{ ou } c_{n-2} < c_n < c_{n-1}$$

Demonstração:

Do teorema (1.3) temos que, seja a fração contínua simples finita ou infinita, são válidas as seguintes expressões

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^{n-1} a_n$$

Dividindo, respectivamente, ambos os membros da primeira e segunda igualdade por $q_n q_{n-1}$ e $q_n q_{n-2}$, temos:

$$c_n - c_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \quad n \geq 2 \quad (1.4.1)$$

e

$$c_n - c_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} \quad n \geq 3 \quad (1.4.2)$$

Lembrando que $a_n > 0$, para $n > 1$ e que $q_n > 0$ para, $n \geq 1$.

Se n for par, vem:

$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} > 0 \Rightarrow c_n > c_{n-1}$ e $c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} < 0 \Rightarrow c_n < c_{n-2}$

De onde, se tem

$$c_{n-1} < c_n < c_{n-2}$$

Se n for ímpar, vem:

$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} < 0 \Rightarrow c_n < c_{n-1}$ e $c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} > 0 \Rightarrow c_n > c_{n-2}$

De onde, se tem

$$c_{n-2} < c_n < c_{n-1}$$

O que conclui a nossa demonstração. ■

Pretendemos, agora, mostrar que toda fração contínua simples infinita é convergente, porém para isso é preciso algumas definições e um teorema fundamental da Análise, vejamos.

Teorema 1.5: Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Demonstração:

Consideremos, para fixar as ideias, uma sequência não decrescente (c_n) (portanto, limitada inferiormente pelo elemento a_1).

A hipótese de ser limitada significa que ela é limitada superiormente, lembre-se que todo conjunto limitado superiormente possui supremo e que supremo é a menor das cotas superiores. Seja S o supremo do conjunto (c_n). Vamos provar que este número S é o limite de c_n.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um elemento da seqüência, com um certo índice N, tal que $S - \varepsilon < a_N \leq S$. Ora, como a seqüência é não decrescente, $a_N \leq a_n$ para todo $n > N$, de sorte que

$$n > N \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$$

que é o que desejávamos mostrar.

A demonstração do teorema no caso de uma sequência não crescente é análoga.

■

Teorema 1.6: Toda fração contínua simples infinita é convergente, sendo seu limite L dado por

$$L = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} c_{2n}$$

Demonstração:

Vimos no teorema (1.4) que a sequência dos convergentes de índice ímpar $\{c_{2n-1}\}$ é uma sequência crescente, limitada superiormente por c_2, enquanto que a sequência dos convergentes de índice par $\{c_{2n}\}$ é uma sequência decrescente, limitada inferiormente por c_1. Dessa maneira, pelo teorema (1.5), temos que ambas as sequências dos convergentes de uma fração contínua convergem.

Assim, sejam L_i e L_j, os limites das sequências $c_1, c_3, \dots\dots, c_{2n+1}, \dots$ e $c_2, c_4, \dots\dots, c_{2n}, \dots$, respectivamente, ou seja, $L_i = \lim_{n\to\infty} c_{2n-1}\ e\ L_j = \lim_{n\to\infty} c_{2n}$

Para o nosso propósito, falta mostrar quer $L_i = L_j$. Utilizando a expressão (1.4.1), segue que:

$$c_{2n} - c_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n-1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}}$$

lembrando que os valores dos $a_n (n \geq 2)$ e $q_n (n \geq 1)$ são todos inteiros positivos e que $q_{n+1} > q_n$, visto que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \in \mathbb{N}$, concluímos que a sequência dos $q_n's$ cresce indefinidamente. Isto nos permite concluir que:

$$\lim_{n\to\infty}(c_{2n} - c_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n-1}} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} c_{2n} - \lim_{n\to\infty} c_{2n-1} = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} c_{2n} = \lim_{n\to\infty} c_{2n-1}$$

Portanto $L = L_j = L_i$. ■

Até aqui, sabemos como obter a representação de um número irracional sob a forma de fração contínua e que a sequência dos convergentes desta fração contínua converge. No entanto, quem nos garante que o limite L, para o qual a sequência dos convergentes converge, é realmente o número irracional que deu origem à fração contínua? Para isto necessitamos dos próximos dois teoremas

Teorema 1.7: Para qualquer número real α temos a seguinte relação:

$$[a_1; a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ uma seqüência de números inteiros positivos com a possível exceção de a_1 e onde as sequências dos $p_i's$ e $q_i's$ são dadas por

$$p_0 = 1, \qquad p_{-1} = 0, \qquad q_0 = 0, \qquad q_{-1} = 1$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}\,, n \geq 1.$$

Demonstração:

Provemos por indução em n a demonstração desse teorema

Para $n = 1$, temos

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1 p_0 + p_{-1}}{\alpha_1 q_0 + q_{-1}} = \alpha_1 = \alpha$$

resultado verdadeiro pelas condições iniciais

Para $n = 2$

$$[a_1; \alpha_2] = \frac{\alpha_2 p_1 + p_0}{\alpha_2 q_1 + q_0} = \frac{\alpha_2 a_1 + 1}{\alpha_2} = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para um certo $n \in \mathbb{N}$,

$$[a_1; a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Mostraremos que ele é verdadeiro para $n+1$, como segue:

$$[a_1; a_2, \ldots\ldots, a_n, \alpha_{n+1}] = \left[a_1; a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right] = \frac{\left(a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$= \frac{\left(a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$= \frac{(\alpha_{n+1} a_n + 1) p_{n-1} + \alpha_{n+1} p_{n-2}}{(\alpha_{n+1} a_n + 1) q_{n-1} + \alpha_{n+1} q_{n-2}}$$

$$= \frac{\alpha_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}$$

$$= \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

O que conclui a demonstração do teorema.

■

Teorema 1.8: Sejam $\frac{p_n}{q_n}$ os convergentes da expansão de α, sendo este um número irracional, sob forma de fração contínua. Então;

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

Demonstração:

Seja $\alpha = [a_1; a_2, \ldots\ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ segue do teorema (1.7) que

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}$$

$$= \frac{\alpha_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - \alpha_{n+1} p_n q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

$$= \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

$$= \frac{(-1)(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

pelo teorema 1.3.

■

Uma vez que a sequência dos $q_i's$ é crescente e os números $\alpha_n's$ são positivos, podemos concluir que $\lim_n \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right) = 0$.

Assim,

Corolário 1.2: $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty}[a_1; a_2, \dots, a_n]$.

Ou seja, o limite da seqüência dos convergentes da representação do irracional α sob forma de fração contínua é igual ao próprio α. Por isto escrevemos $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots \dots]$.

Corolário 1.3: Todo convergente $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ de α satisfaz

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Demonstração:

Pelo teorema (1.4) sabemos que $a_n \leq \alpha$ e pelo teorema (1.8) que

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

além disso, a sequência dos $q_i's$ é crescentee os números $\alpha_n's$ são positivos

Logo;

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

Por outro lado, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ e $q_{n+1} > q_n$ de onde vem:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

■

Proposição 1.2: Dois números irracionais α e β com expansões em frações contínuas $\alpha = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$ e $\beta = [b_1; b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]$ são iguais se, e somente se, $a_i = b_i, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Demonstração: $\Longrightarrow$)

Óbvio, uma vez que o processo definido na seção 2.5 está bem definido.

($\Longleftarrow$

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n, \dots \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha = \lim_{n\to\infty}[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n] = \lim_{n\to\infty}[b_1; b_2, b_3, \dots, b_n] = \beta.$$

■

Vamos provar, no próximo teorema, que toda fração contínua simples infinita representa um irracional.

Teorema 1.9: Toda fração contínua simples infinita $[a_1; a_2, a_3, \dots\dots]$ representa um irracional.

Demonstração:

Sabemos pelo teorema 1.6 que os convergentes da fração contínua dada tendem para um número real α. Suponha que α seja racional, isto é, $\alpha = \frac{a}{b}, a$ e b inteiros e $b > 0$, de acordo com o corolário (1.2) sendo $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, com p_ne q_n inteiros, um convergente de α, então:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow \left|\frac{aq_n - bp_n}{bq_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_n}$$

Sendo a sequência dos $q_n's$ crescente podemos escolher n suficientemente grande de forma que $b < q_n$.

Dessa maneira, o inteiro $aq_n - bp_n$ é não nulo pois neste caso teríamos $a = \frac{bp_n}{q_n} \in \mathbb{Z}$, um absurdo, já que q_n dividiria b e $b < q_n$.

Portanto $aq_n - bp_n$ se encontra entre 0 e 1, o que é impossível.

■

No contexto do Teorema anterior, podemos mostrar ainda que aplicando-se o processo descrito na seção 2.5 ao número α, obtendo–se assim a sequência de números $b_1, b_2, b_3, ...$, vale $a_i = b_i, \forall\ i \in \mathbb{N}$. Com efeito, com as notações já utilizadas,

$$a_1 + \frac{1}{\alpha_2} = b_1 + \frac{1}{\beta_2} \Longrightarrow a_1 - b_1 = \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\alpha_2}.$$

Sendo $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_2, \beta_2 > 1$, vem

$$0 \leq |a_1 - b_1| = \left|\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2}\right| < 1 \text{ e } |a_1 - b_1| \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a_1 = b_1 \text{ e } \alpha_2 = \beta_2.$$

Continuando com a igualdade entre os números α_2 e β_2, temos:

$$a_2 + \frac{1}{\alpha_3} = b_2 + \frac{1}{\beta_3} \Longrightarrow a_2 - b_2 = \frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{\alpha_3}.$$

Um argumento completamente análogo ao anterior nos leva a

$$a_2 = b_2 \text{ e } \alpha_3 = \beta_3,$$

e assim por diante.

2.7 BOAS APROXIMAÇÕES SÃO REDUZIDAS

O próximo teorema juntamente com seu corolário, através da aproximação de x por $\frac{p}{q}$, caracterizam as reduzidas em termos do erro reduzido desta aproximação que é por definição, $|qx - p|$, a razão entre $\left|x - \frac{p}{q}\right|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q, que é $\frac{1}{q}$.

Teorema 1.10: Para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{n+1}$, temos

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$$

Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita.

Demonstração:

Se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então existe algum inteiro $k \neq 0$ tal que $p = kp_n, q = kq_n$; pois sabemos que $(p_n, q_n) = 1$. Neste caso:

$$|q_n x - p_n| = \left|\frac{q}{k}x - \frac{p}{k}\right| = \left|\frac{1}{k}\right| |qx - p| \leq |qx - p|$$

Assim, supondo que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|$$

pois $q < q_{n+1}$ e dessa maneira $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$. Portanto;

$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx-p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$

Além disso, se vale a igualdade $\frac{1}{q_{n+1}} = |q_n x - p_n|$, então pelo corolário (1.2) teremos $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$ e $q_{n+1} > 2q_n$, pois o último coeficiente a_{n+1} de uma fração contínua finita é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q < q_n$, teremos

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1}-q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}}$$

O que implica

$$|qx-p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

■

Corolário 1.4: Para todo $q < q_n$,

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x-\frac{p}{q}\right|$$

Demonstração:

Sendo $q < q_n$, pelo teorema (1.10) vem $|q_n x - p_n| < |qx-p|$ e $\frac{1}{q_n} < \frac{1}{q}$, logo:

$$\frac{1}{q_n}|q_n x - p_n| < \frac{1}{q}|qx-p| \Rightarrow \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x-\frac{p}{q}\right|$$

■

Corolário 1.5: Se $|qx-p| < |q'x-p'|$, para todo p' e $q' \leq q$ tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.

Demonstração:

Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$

Teremos $|q_n x - p_n| \leq |qx-p|$ e, portanto $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$

Já que pelo teorema (1.10) obtemos $|qx-p| < |q_n x - p_n|$ apenas se $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ com $q < q_n$

■

Teorema 1.11: (Lagrange) Seja α um número irracional. Se existir um racional $^{a}/_{b}$, $b \geq 1$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

então $^{a}/_{b}$ é um convergente da expansão de α em fração contínua.

Demonstração:

Suponha que o racional $^{a}/_{b}$ não seja um convergente da fração contínua de α, porém satisfaça a hipótese e que sem perda de generalidade $(a, b) = 1$.

Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $q_n \leq b < q_{n+1}$ e $^{a}/_{b} \neq {}^{p_n}/_{q_n}$, logo pelo corolário (1.4)

$$|\alpha q_n - p_n| \leq |\alpha b - a|$$

E por hipótese $|\alpha b - a| < \frac{1}{2b}$ logo:

$$|\alpha q_n - p_n| \leq |\alpha b - a| < \frac{1}{2b}$$

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2bq_n}$$

Usando o fato de que $bp_n - aq_n$ é um inteiro não nulo, obtemos:

$$(I)\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\alpha - \frac{a}{b} + \frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bq_n}$$

$$(II)\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|bp_n - aq_n|}{bq_n} \geq \frac{1}{bq_n}$$

Assim:

$$\frac{1}{bq_n} < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bq_n} \Rightarrow \frac{2b}{2b^2 q_n} < \frac{q_n + b}{2b^2 q_n} \Rightarrow 2b < q_n + b \Rightarrow b < q_n$$

Mas $q_n \leq b < q_{n+1}$. Portanto, uma contradição o que conclui o teorema.

■

2.8 FRAÇÕES CONTÍNUAS PERIÓDICAS

Estudaremos, nesta seção, um assunto já citado anteriormente, as frações contínuas periódicas. Apresentaremos os teoremas de Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange que relacionam números irracionais quadráticos e frações contínuas periódicas.

Lembremos da definição de frações contínuas periódicas, vista no teorema **(1.4)**.

Uma fração contínua simples é denominada fração contínua periódica se a sequência dos valores a_i apresenta repetição (período), que denotaremos por

$$[a_1; a_2, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}}]$$

sendo $a_{k+n} = a_k$, e os valores $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}$ formam o período. A fração contínua

$$[\overline{a_1; a_2, a_3, \dots., a_k}]$$

é denominada fração contínua periódica pura.

Definição 1.7: Designa-se irracionalidade quadrática qualquer número da forma

$p + q\sqrt{D}$, onde p e q são números racionais e D, um número natural que não é igual ao quadrado de nenhum outro número inteiro. Em outras palavras, é raiz de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $b^2 - 4ac > 0$ não é quadrado perfeito. Quando $p\ , q \in \mathbb{Z}$ dizemos que a irracionalidade quadrática é inteira

Definição 1.8: Dado um irracional quadrático $\alpha = p + q\sqrt{D}$ definimos o seu conjugado $\bar{\alpha}$ como

$\bar{\alpha} = p - q\sqrt{D}$, obtido simplesmente trocando o sinal do coeficiente q de $\sqrt{D}$.

Tal definição nos fornece ainda as seguintes propriedades:

I) Se α satisfaz a equação $ax^2 + bx + c = 0$, então $\bar{\alpha}$ também satisfaz esta equação.

II) O conjugado do conjugado de um número irracional quadrático α é ele próprio. (Consequência da própria definição)

III) O conjugado da soma, diferença, produto ou quociente de dois números irracionais quadráticos é igual, respectivamente, à soma, diferença, produto ou quocientes de seus conjugados.

Vejamos as demonstrações: sejam $\alpha = p + q\sqrt{D}$ e $\beta = r + s\sqrt{D}$

i) $\overline{(\alpha \pm \beta)} = \overline{\left((p + q\sqrt{D}) \pm (r + s\sqrt{D}\right)} = \overline{\left((p \pm r) + (q \pm s)\sqrt{D}\right)} =$

$(p \pm r) - (q \pm s)\sqrt{D} = (p \pm r) + (-q \mp s)\sqrt{D} = \left(p - q\sqrt{D}\right) \pm \left(r - s\sqrt{D}\right) = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$

ii) $\overline{(\alpha \cdot \beta)} = \overline{\left((p + q\sqrt{D}) \cdot (r + s\sqrt{D}\right)} = \overline{\left(\left(pr + ps\sqrt{D}\right) + \left(qsD + qr\sqrt{D}\right)\right)} =$

$=\overline{\left((pr + qsD) + (ps + qr)\sqrt{D}\right)} = (pr + qsD) - \left(ps + qr\right)\sqrt{D} =$

$$= \left(p - q\sqrt{D}\right)r + \left(qsD - ps\sqrt{D}\right) = \left(p - q\sqrt{D}\right)r + \left(-s\sqrt{D}\right)\left(p - q\sqrt{D}\right) =$$

$$= \left(p - q\sqrt{D}\right) \cdot \left(r - s\sqrt{D}\right) = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

iii) Utilizando a propriedade ii) temos $\overline{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\bar{\beta}}$ donde

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \overline{\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right)} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\frac{1}{\beta}} = \bar{\alpha} \cdot \frac{1}{\bar{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

■

Definição 1.9: Um número irracional quadrático α é dito reduzido se $\alpha > 1$ e seu conjugado $\bar{\alpha}$ está entre -1 e 0.

Oservação 1.1:

Se $\alpha = p + q\sqrt{D}$ é um irracional quadrático inteiro reduzido, então $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$.

De fato, sendo α reduzido temos por definição que:

$$\begin{cases} p + q\sqrt{D} > 1 \\ -1 < p - q\sqrt{D} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} p + q\sqrt{D} > 1 \\ p - q\sqrt{D} > -1 \end{cases} \Rightarrow 2p > 0 \Rightarrow p > 0 \therefore p \in \mathbb{N} \\ \begin{cases} p + q\sqrt{D} > 1 \\ -p + q\sqrt{D} > 0 \end{cases} \Rightarrow 2q > 0 \Rightarrow q > 0 \therefore q \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Teorema 1.12: (Euler) Se x é uma fração contínua periódica, isto é, se:

$$x = [a_1; a_2, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}}],$$

então x é um número irracional quadrático.

Demonstração:

Considere que a fração contínua periódica x tenha período de comprimento n, ou seja,$a_{k+n+i} = a_{k+i}$; $1 \leq i \leq n$. Assim; consideremos

$$x_k = [a_1; a_2, \dots, a_k, x_k]; com\ x_k = \left[a_{k+1}; a_{k+2,} \dots., x_{k+n}\right] \text{ e}$$

$$x_{2k} = [a_1; a_2, \dots, a_k, x_{2k}]; com\ x_{2k} = \left[a_{k+1}; a_{k+2,} \dots, x_{k+n}, \dots, x_{k+2n}\right]$$

pelo teorema (1.7), vem

$$x_k = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\ e\ x_{2k} = \frac{x_{2k} p_{2k-1} + p_{2k-2}}{x_{2k} q_{2k-1} + q_{2k-2}}$$

o que implica

$$\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{x_{2k} p_{2k-1} + p_{2k-2}}{x_{2k} q_{2k-1} + q_{2k-2}},$$

pois$x_k = x_{2k}$, lembrando que $x_k = x_{2k} = x$ temos:

$(p_{k-1}q_{2k-1} - p_{2k-1}q_{k-1})(x)^2 + [(p_{k-1}q_{2k-2} + q_{2k-1}p_{k-2}))$

$+(-p_{2k-1}q_{k-2} - p_{2k-2}q_{k-1})](x) + (p_{k-2}q_{2k-2} - p_{2k-2}q_{k-2}) = 0$

Logo

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

com:

$A = p_{k-1}q_{2k-1} - p_{2k-1}q_{k-1}$ que é um valor não nulo, pois caso contrário, teríamos:

$p_{k-1}q_{2k-1} = p_{2k-1}q_{k-1} \Rightarrow p_{k-1} = \frac{p_{2k-1}q_{k-1}}{q_{2k-1}} \in \mathbb{Z}, \text{onde } (p_{2k-1}, q_{2k-1}) = 1$ e assim q_{2k-1} dividiria q_{k-1} um absurdo já que $q_{2k-1} > q_{k-1}$.

$$B = p_{k-1}q_{2k-2} + q_{2k-1}p_{k-2} - p_{2k-1}q_{k-2} - p_{2k-2}q_{k-1}$$

$$C = p_{k-2}q_{2k-2} - p_{2k-2}q_{k-2}$$

Portanto A, B e C são números inteiros e $A \neq 0$. Por hipótese, x é um número irracional. Assim, x é um irracional quadrático.

■

Teorema 1.13: (Lagrange) A fração contínua que representa um número irracional quadrático x é periódica.

Demonstração:

Pela definição de número irracional quadrático x satisfaz a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com a,b e c inteiros e $b^2 - 4ac > 0$ livre de quadrados perfeitos. Sabemos pelo teorema (1.7) que:

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

Substituindo esse valor de x na equação quadrática, obtemos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right)^2 + b\left(\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_k x_k^2 + B_k x_k + C_k = 0$$

onde

$$A_k = ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2$$

$$B_k = 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}$$

$$C_k = ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2$$

Note que $C_k = A_{k-1}$. Vamos provar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_k| \leq M$

para todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_k| \leq M, \forall_{k \in \mathbb{N}}$:

$$A_k = ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2 = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right)\left(\bar{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right),$$

onde$x$ e $\bar{x}$ são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, mas

$$\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{q_{k-1}^2} \leq 1 \Rightarrow |A_k| = aq_{k-1}^2\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|\left|\bar{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|$$

$$\leq a\left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|\right)$$

$$\leq a(|\bar{x} - x| + 1) = M$$

Notemos que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k^2 - 4A_kC_k = (p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac$$

Portanto,

$$B_k^2 \leq 4A_kC_k + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow B_k \leq \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac} = M'$$

Provamos que A_k, B_k e C_k estão uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_kX^2 + B_kX + C_k = 0$, e portanto de possíveis valores de x_k. Assim, necessariamente $x_{k+n} = x_k$ para alguma escolha de $k \in \mathbb{N}, n \in \ \mathbb{N}_{>0}$.

■

2.9 A EXPANSÃO DE $\sqrt{A}$ SOB FORMA DE FRAÇÃO CONTÍNUA

Pretendemos mostrar aqui que, a expansão sob forma de fração continua de $\sqrt{A}$, segue um padrão periódico de uma forma especial.

No entanto, precisamos de alguns teoremas antes.

Teorema 1.14: Seja α um irracional quadrático. Então α é puramente periódico se, e somente se, α é reduzido.

Demonstração:

Sabemos que α possui uma fração contínua periódica, pois este é um irracional quadrático. Dividiremos a demonstração em duas partes.

$\Longrightarrow$ Se α é puramente periódico então α é reduzido.

Suponhamos que α seja puramente periódico e tenha período $n-1$, ou seja, tenha a forma$\alpha = [\overline{a_1; a_2, \dots \dots, a_{n-1}}]$. Como $a_i > 0 \; \forall \; i \geq 1$ temos $\alpha > 1$. Assim, temos $\alpha = [a_1; a_2, \dots \dots, a_{n-1}, \alpha]$ e do teorema (1.7), vem:

$$\alpha = \frac{\alpha p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Logo;

$$q_{n-1}\alpha^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\alpha - p_{n-2} = 0$$

De onde α é raiz de

$$f(x) = q_{n-1}x^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})x - p_{n-2}$$

Veja que

$$f(0) = -p_{n-2} < 0 \text{ e } f(-1) = q_{n-1} - q_{n-2} + p_{n-1} - p_{n-2} > 0$$

segue do Teorema do Valor Intermediário que, a outra raiz de $f(x)$, α' ,conjugado de α, está situada entre 0 e -1. Portanto α é um irracional quadrático reduzido.

$\Longleftarrow$ Se α é reduzido então α é puramente periódico.

Agora suponha que $\alpha = [a_1; a_2, a_3 \ldots]$ seja reduzido e $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ para $n \geq 1$ com $\alpha = \alpha_1$. Como $\alpha_1 > 1$ e seu conjugado $-1 < \beta_1 < 0$. Temos:

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} > 1$$

pois $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$. Além disso;

$$\beta_1 = a_1 + \frac{1}{\beta_2} \Rightarrow \frac{1}{\beta_2} = \beta_1 - a_1 < -a_1 \leq 1$$

e assim $-1 < \beta_2 < 0$. Continuando esse processo, geramos passo a passo uma série de equações.

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3}, \ldots \ldots, \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}$$

onde todos os $\alpha_i's$ são irracionais quadráticos reduzidos.

Por contradição, suponhamos que α não seja puramente periódica e tenha a forma $\alpha = [a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{n+m-1}}]$ com $n \geq 1$. Então

$a_{n-1} \neq a_{n+m-1}$, caso contrário, o período teria iniciado uma posição antes.

Contudo, $\alpha_n = \alpha_{n+m}$, assim obtemos

$$\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m-1} = \left(a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}\right) - \left(a_{n+m-1} + \frac{1}{\alpha_{n+m}}\right) = a_{n-1} - a_{n+m-1}$$

observe que esse resultado é um inteiro não nulo, visto que $a_{n-1} \neq a_{n+m-1}$ e consequentemente $\beta_{n-1} - \beta_{n+m-1}$ também é um inteiro não nulo e ainda

$\beta_{n-1} - \beta_{n+m-1}$ está entre -1 e 1. Esta contradição prova o teorema. ■

Teorema 1.15: Seja $\alpha_1 = [\overline{a_1; a_2, \ldots, a_m}]$. Então ${}^{-1}/_{\beta_1} = [\overline{a_m; a_{m-1}, \ldots, a_1}]$, onde β_1 é o conjugado de α_1.

Demonstração:

Sabemos que

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3}, \ldots, \alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \ldots, \alpha_m = a_m + \frac{1}{\alpha_1}$$

então, calculando os respectivos conjugados, obtemos:

$$\beta_1 = a_1 + \frac{1}{\beta_2}, \beta_2 = a_2 + \frac{1}{\beta_3}, \dots, \beta_k = a_k + \frac{1}{\beta_{k+1}}, \dots, \beta_m = a_m + \frac{1}{\beta_1}$$

Resolvendo essas equações na ordem inversa, vem

$$-\frac{1}{\beta_1} = a_m - \beta_m, \dots, -\frac{1}{\beta_{k+1}} = a_k - \beta_k, \dots, -\frac{1}{\beta_3} = a_2 - \beta_2, -\frac{1}{\beta_2} = a_1 - \beta_1$$

Assim cada $-\frac{1}{\beta_k}$ é maior que 1 e, portanto podemos pensar neles como sendo os quocientes parciais do número ${}^{-1}/_{\beta_1} = [\overline{a_m; a_{m-1}, \dots, a_1}]$ ■

Com os teoremas, vistos acima, agora somos capazes de averiguar a forma da expansão de $\sqrt{A}$ em frações contínuas.

Teorema 1.16: Se $A > 1$ não é um quadrado perfeito. Então

$$\sqrt{A} = [a_1; \overline{a_2, \dots \dots, a_{n-2}, 2a_1}]$$

onde$a_j = a_{n-j}$ para $j = 2,3,4, \dots\dots n-2$ e $a_1 = \lfloor\sqrt{A}\rfloor$

Demonstração:

Note que $\sqrt{A} > 1$, assim seu conjugado $-\sqrt{A}$ não está entre -1 e 0. Portanto $\sqrt{A}$ não é um irracional quadrático reduzido e pelo teorema (1.14) sua expansão não é puramente periódica. Digamos que sua expansão seja da forma:

$$\sqrt{A} = [a_1; a_2, \dots, a_{n-2}, \overline{a_{n-1}, \dots, a_{n+m-1}}]$$

Por outro lado, adicionando a_1 em ambos os lados da equação acima, obtemos $\sqrt{A} + a_1 > 1$, cujo conjugado $-\sqrt{A} + a_1$ situa-se entre -1 e 0, ou seja, $\sqrt{A} + a_1$ é um irracional quadrático reduzido e portanto sua expansão é puramente periódica; logo:

$$\sqrt{A} + a_1 = [\overline{2a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n-2}}]$$

Consequentemente, a expansão para $\sqrt{A}$ é

$$\sqrt{A} = [a_1; \overline{a_2, \dots \dots, a_{n-2}, 2a_1}] \quad (1.16.1)$$

onde o período se inicia após o primeiro termo.

Para concluirmos, nosso objetivo, falta mostrar que exceto o termo $2a_1$, a parte periódica é simétrica, podendo ter ou não um termo central.

Pelo teorema (1.15) temos que a expansão de $\frac{-1}{-\sqrt{A}+a_1} = \frac{1}{\sqrt{A}-a_1}$ é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{A}-a_1} = [\overline{a_{n-2}; a_{n-3}, \dots, a_2, 2a_1}]$$

dessa maneira, o inverso é

$$\sqrt{A} - a_1 = [0; \overline{a_{n-2}; a_{n-3}, \dots, a_2, 2a_1}]$$

mas, pela expressão (1.16.1)

$$\sqrt{A} - a_1 = [0; \overline{a_2; a_3, \dots, a_{n-2}, 2a_1}]$$

ou seja, $a_2 = a_{n-2}, a_3 = a_{n-3}, \dots\dots, a_{n-2} = a_2$.

Portanto $\sqrt{A} = [a_1; \overline{a_2, \dots\dots, a_{n-2}, 2a_1}]$ onde $a_j = a_{n-j}$

para$j = 2,3,4, \dots\dots n-2$ e $a_1 = \lfloor\sqrt{A}\rfloor$

■

Exemplo 1.4: Dado um número inteiro positivo a. Determine as expansões em frações contínuas periódicas de:

a) $\sqrt{a^2+1}$
b) $\sqrt{10}$
c) $\sqrt{a^2-a}$
d) $\sqrt{12}$

Solução:

a) Observe que pelo o que foi visto no teorema, além de ser simétrica, exceto o termo $2a_1$, a parte periódica da expansão de $\sqrt{A}$ em fração contínua periódica termina no termo $2a_1$.

Seja $A = a^2 + 1 > 1$, assim $a_1 = \lfloor\sqrt{A}\rfloor = a$, então podemos escrever

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{A}-a} = \frac{\sqrt{A}+a}{A-a^2} = \sqrt{A} + a$$

do resultado obtido, temos que $a_2 = \lfloor\alpha_1\rfloor = \lfloor\sqrt{A}+a\rfloor = 2a = 2a_1$, ou seja, $a_2 = 2a_1$ o que implica que chegamos ao final da questão.

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \ddots}}} = [a; \overline{2a}]$$

b) Podemos reescrever $\sqrt{10}$ da seguinte maneira $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1}$, logo pelo item a), vem

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}} = [3; \bar{6}]$$

c) Consideremos $A = a^2 - a, e\ a > 1$, de onde temos que $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 < A = a^2 - a$ e assim $a_1 = \lfloor\sqrt{A}\rfloor = \lfloor\sqrt{a^2 - a}\rfloor = a - 1$, então podemos escrever

$$\sqrt{A} = (a-1) + \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{A} - (a-1)} = \frac{\sqrt{A} + (a-1)}{a-1}$$

do resultado obtido, temos que $a_2 = \lfloor\alpha_1\rfloor = \left\lfloor\frac{\sqrt{A}}{a-1} + 1\right\rfloor = 2$ segue que:

$$\sqrt{A} = (a-1) + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_2}} \Rightarrow 2 + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{A} - (a-1)} \Rightarrow 2 + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{A} + (a-1)}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{A}}{a-1} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{A} - (a-1)}{a-1} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{a-1}{\sqrt{A} - (a-1)} = \sqrt{A} + (a-1).$$

Continuando o procedimento, encontramos

$a_3 = \lfloor\alpha_2\rfloor = \lfloor\sqrt{A} + (a-1)\rfloor = (a-1) + (a-1) = 2(a-1) = 2a_1 \Longrightarrow a_3 = 2a_1$.
Portanto:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 - a} = (a-1) + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = \left[(a-1); \overline{2, 2(a-1)}\right]$$

d) Podemos escrever $\sqrt{12}$ do seguinte modo $\sqrt{12} = \sqrt{4^2 - 4}$, Logo:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4^2 - 4} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}} = [3; \overline{2,6}]$$

3 APLICAÇÕES DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

3.1 FRAÇÕES CONTÍNUAS E O AJUSTE DE ENGRENAGENS

A aproximação de números irracionais por racionais é uma questão de grande importância, por isso a aplicabilidade de frações contínuas em diversas situações.

Um primeiro contexto que caracteriza este tipo de situação, frações contínuas e engrenagens, remonta ao século XVI. O físico holandês Christiaan Huygens utilizou as frações contínuas para a construção de instrumentos científicos, e, em particular, elaborou um modelo reduzido do sistema solar.

Para a construção do modelo mecânico necessitava das relações de transmissão entre as engrenagens, o que permitiria reproduzir as órbitas planetárias numa escala adequada.

Precisamente, já vimos que a cada número real α está associado uma única seqüência de números racionais (convergentes) $\{P_n/Q_n\}(n \in \mathbb{N})$ com a seguinte propriedade: entre todos os números racionais com denominador menor ou igual a Q_n; P_n/Q_n é o mais próximo de α.

Mostraremos agora uma situação problema, na qual se faz necessário a aproximação de um irracional por racional, que nos leva a utilizar as frações contínuas.

Situação problema: Um relojoeiro precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão de $\sqrt{3}/1$, sendo impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de rodas que irão aproximar a razão desejada. [Adaptado de Sanches; Salomão (2003)].

Solução:

Representaremos por x o número de dentes da coroa (engrenagem maior) e por y o número de dentes do pinhão (engrenagem menor). Assim, a relação de transmissão da coroa para o pinhão é dada por $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$ com x e y inteiros positivos. A solução da questão consiste em encontrarmos uma fração (convergente), que respeite o limite de 20 dentes para a engrenagem maior (coroa).

Foi visto, anteriormente que:

$\sqrt{3} \sim$ **1,7320508....**

$$[\sqrt{3}]_1 = \mathbf{1},$$
$$\{\sqrt{3}\}_1 \sim \mathbf{0,7320508} \ldots\ldots, [\mathbf{1/0,7320508} \ldots]_2 =$$
$$\mathbf{1}, \{\mathbf{1/0,7320508} \ldots\}_2 \sim \mathbf{0,36602541} \ldots., [\mathbf{1/0,36602541} \ldots.]_3 = \mathbf{2,}$$
$$\{\mathbf{1/36602541} \ldots\}_3 \sim \mathbf{0,73205076} \ldots, [\mathbf{1/0,73205076} \ldots]_4 = \mathbf{1}$$

$$\{\mathbf{1/0,732050761} \ldots\}_4 \sim \mathbf{0,3660266} \ldots, [\mathbf{1/0,3660266}]_5 = \mathbf{2..}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Logo, temos os seguintes convergentes:

(1º convergente).

$$c_0 = \sqrt{3} = 1{,}7320508 = 1$$

(2º convergente).

$$c_1 = \sqrt{3} = 1{,}7320508 = 1 + 0{,}7320508 = 1 + \frac{1}{1{,}3660254} \approx 1 + \frac{1}{1} = 2$$

(3º convergente).

$$c_2 = 1 + \frac{1}{1{,}3660254} = 1 + \frac{1}{1 + o{,}3660254} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2{,}7320508}} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

(4º convergente).

$$c_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2{,}7320508}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+0{,}7320508}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1{,}366025}}} = \frac{7}{4}$$

(5° convergente)

$$c_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+0{,}366025}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2{,}7320508}}}} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{11}$$

A nossa solução é obtida no 5° convergente, onde temos que o número de dentes na coroa seria 19 e o do pinhão 11.

3.2 ASTRONOMIA E FRAÇÕES CONTÍNUAS

Seguindo o nosso raciocínio, a astronomia é um ramo que utiliza bastante frações contínuas, visto o uso excessivo de aproximações de números irracionais por racionais. Veja um problema interessante descrito no artigo de Varella (2006).

Situação problema: No final de agosto de 2003, tivemos a melhor ocasião para observar o planeta Marte de todo o século XXI. Marte esteve em oposição ao Sol em 28 de agosto e, no dia anterior, na sua menor distância à Terra dos últimos 60.000 anos! Seu brilho excepcional superou, nessa ocasião, o de todas as estrelas do céu noturno. Essa oposição repetiu, em condições muito mais favoráveis, a oposição de 23 de agosto de 1924, quando Marte esteve a 55,78 milhões de quilômetros da Terra. Quando ocorrerá a próxima oposição em que o planeta Marte se encontra em sua menor distância em relação ao Sol, como a ocorrida em 2003?

Solução:

Inicialmente, precisamos saber o significado de certos termos da astronomia, essenciais na resolução do problema.

Considerando às órbitas dos planetas circunferências e coplanares, já que as excentricidades da maioria dos planetas do Sistema Solar são próximas a unidade, com exceção de Mercúrio e ao atualmente "rebaixado" Plutão.

Oposição: É a posição em que ocorre o alinhamento do Sol – Terra – Marte, nessa ordem, e, nessa ocasião, encontra-se em sua menor distância em relação a Terra.

Período sinódico(S): Do grego synodikós, é o intervalo de tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivas, de modo que um astro (ou objeto) reaparece no mesmo local, em relação ao astro da órbita mais interna.

Período Sideral (P): É o intervalo de tempo que um objeto (astro, planeta) percorre uma revolução (ou órbita) completa em torno de outro, tendo como referência as estrelas fixas (Translação).

O período sinódico difere do sideral pelo fato de haver o movimento de translação do astro em relação a estrela fixa.

Relação entre o período sideral dos planetas, sejam:

$\boldsymbol{P_i}$**:** período sideral do planeta interno

$\boldsymbol{P_e}$**:** período sideral do planeta externo

Considere que em um dia o planeta interior e o planeta exterior movem-se respectivamente $\frac{360°}{P_i}$ e $\frac{360°}{P_e}$. Dessa maneira, após um dia, o planeta interior terá ganho um ângulo de $\frac{360°}{P_i} - \frac{360°}{P_e}$ em relação ao planeta exterior.

Assim, por definição, esse ganho é equivalente ao período sinódico.

(Expressão desenvolvida por Copérnico)

$$\frac{360°}{S} = \frac{360°}{P_i} - \frac{360°}{P_e} \Leftrightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_e}$$

Sabendo que;

O período sideral da Terra é $P_T = 365d\ 6h\ 09m\ 10s\ \cong 365{,}256363$ dias

O período sideral de Marte é $P_M = 686{,}979852$ dias

Logo, o período sinódico de Marte será:

$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_T} - \frac{1}{P_M} = \frac{1}{365{,}256363} - \frac{1}{686{,}979852} \longrightarrow S = 779{,}936096$ dias

Então, dado que ocorreu uma oposição, as próximas oposições nos mesmos pontos de suas órbitas ocorrerão num intervalo de tempo que seja um múltiplo comum de P_T e S. Portanto, a solução do problema consiste em determinar dois números inteiros **m** e **n** que satisfaçam a relação:

$$mS = nP_T \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{S}{P_T} = \frac{779{,}936096}{365{,}256363} = 2{,}135311146$$

Aqui, faz-se uso do método das frações contínuas.

(1º convergente).

$$\mathrm{c}_0 = 2{,}135311146 = 2 + 0{,}135311146 = 2$$

(2º convergente).

$$\mathrm{c}_1 = 2{,}135311146 = 2 + 0{,}135311146 = 2 + \frac{1}{7{,}390374182} \approx 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$$

(3º convergente).

$$c_2 = 2 + \frac{1}{7{,}390374182} = 2 + \frac{1}{7 + 0{,}390374182} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2{,}561644814}}$$
$$\approx 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}} = \frac{32}{15}$$

(4º convergente)

$$c_3 = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2{,}561644814}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1{,}780484703}}} \approx 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{47}{22}$$

(5° convergente)

$$c_4 = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1{,}780484703}}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1{,}2812550921}}}} \approx 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{79}{37}$$

Perceba que $\frac{79}{37} = 2{,}135135135$

Concluímos que as oposições ocorrem em 2 anos, 15 anos, 32 anos, 47 anos, 79 anos, dentre outras.

No entanto destas, a que Marte se encontra em sua menor distância em relação ao Sol, como ocorrida em 2003 será após 79 anos. Visto que

$\frac{79}{37} = 2{,}135135135$tem a melhor aproximação.

Portanto a próxima oposição ocorrerá em agosto de 2082.

3.3 RESOLVENDO EQUAÇÕES EXPONENCIAIS POR MEIO DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

A resolução de Equações Exponenciais por meio de Frações Contínuas foi encontrada em uma publicação do início do século XX, *Elementos de Álgebra,* de André Pérez y Marin, publicado em 1909.

André Pérez y Marin (1858 – 1928) foi um professor espanhol que lecionou em um importante estabelecimento de ensino no município de Campinas Colégio Culto à Ciências de 1901 a 1928.

Por ser um método no qual se utiliza frações contínuas, a resolução é pautada em aproximações instigando nos alunos o desenvolvimento da capacidade de estimativa e inferências. No entanto, esse método ficou esquecido, nos dias atuais, visto que a existência de máquinas calculadoras ou similares é de fácil acesso. Por outro lado, é exatamente pela independência de tais máquinas obtida por esse processo e pelo aprofundamento de conhecimentos, que tal procedimento se torna admirável.

Equações Exponenciais

Denominamos equação exponencial à sentença

$$a^x = b$$

em que a e b são números reais conhecidos $(a > 0 \ e \ a \neq 1)$ e x é a incógnita.

Se conseguirmos expressar o número b como uma potência de base a,

$b = a^{\alpha}$, então recaímos em

$$a^x = a^{\alpha}$$

cuja única solução é $x = \alpha$.

Exemplos:

$3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$, logo S = {4}

$2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$, logo S = {-3}

E se b não for potência perfeita de a? Exemplo: $3^x = 15$

Bem, nessa situação, a maioria dos livros didáticos atuais apresenta a solução aplicando logaritmos, isto é;

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Vejamos como é feito o procedimento de Pérez y Marin, no qual se dispensa o uso de logaritmos e por meio das frações contínuas e suas reduzidas chegamos a valores aproximados de x.

Visto que não é possível determinar um valor, é notável em todas as etapas que o aluno tenha uma boa noção de aproximação. Porém somos capazes de encontrar valores bastantes perto do qual se espera.

Para a resolução de $3^x = 15$, observamos que x é um valor que se encontra entre 2 e 3; pois $3^2 = 9 < 15 < 3^3 = 27$. Afim de uma solução, onde o erro seja mínimo, trabalharemos até a quinta reduzida. Assim, temos:

$$2 < x < 3 \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{y} \ ; y > 0 \ \Rightarrow 3^{\left(2+\frac{1}{y}\right)} = 15 \Rightarrow 9 \cdot 3^{\frac{1}{y}} = 15 \Rightarrow 3^{\frac{1}{y}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{y} = 3$$

Onde $2 < y < 3$; pois $\left(\frac{5}{3}\right)^{2} \sim 2{,}777 \dots \dots$ e $\left(\frac{5}{3}\right)^{3} \sim 4{,}629 \dots \dots$

$$2 < y < 3 \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{z}; z > 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\left(2+\frac{1}{z}\right)} = 3 \Rightarrow \frac{25}{9} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{z}} = 3 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{27}{25}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{25}\right)^{z} = \frac{5}{3} \sim 1{,}666 \dots$$

Agora temos $6 < z < 7$; pois $\left(\frac{27}{25}\right)^{6} \sim 1{,}586 \dots \dots e \left(\frac{27}{25}\right)^{7} \sim 1{,}713 \dots \dots$

$$6 < z < 7 \Rightarrow z = 6 + \frac{1}{t}; t > 0 \Rightarrow \left(\frac{27}{25}\right)^{\left(6+\frac{1}{t}\right)} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3^{18}}{5^{12}} \cdot \left(\frac{27}{25}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{25}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{5^{13}}{3^{19}} \Rightarrow \left(\frac{5^{13}}{3^{19}}\right)^{t} = \frac{27}{25} \sim 1{,}08 \dots$$

Encontramos $1 < t < 2$; uma vez que $\frac{5^{13}}{3^{19}} \sim 1{,}050 \dots \dots$ e $\left(\frac{5^{13}}{3^{19}}\right)^{2} \sim 1{,}103 \dots \dots$

$$1 < t < 2 \Rightarrow t = 1 + \frac{1}{w}; w > 0 \Rightarrow \left(\frac{5^{13}}{3^{19}}\right)^{\left(1+\frac{1}{w}\right)} = \frac{27}{25} \Rightarrow \frac{5^{13}}{3^{19}} \cdot \left(\frac{5^{13}}{3^{19}}\right)^{\frac{1}{w}} = \frac{27}{25}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5^{13}}{3^{19}}\right)^{\frac{1}{w}} = \frac{3^{22}}{5^{15}} \Rightarrow \left(\frac{3^{22}}{5^{15}}\right)^{w} = \frac{5^{13}}{3^{19}} \sim 1{,}050 \dots.$$

E por fim temos $1 < w < 2$; pois $\frac{3^{22}}{5^{15}} \sim 1{,}028 \dots e \left(\frac{3^{22}}{5^{15}}\right)^{2} \sim 1{,}057 \dots.$

Portanto lembrando que $x = 2 + \frac{1}{y},\ y = 2 + \frac{1}{z},\ z = 6 + \frac{1}{t}, t = 1 + \frac{1}{w},$

Obtemos $x = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$

Calculando a quinta reduzida temos:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6+\frac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{13}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{13}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{28}{13}} = 2 + \frac{13}{28} = \frac{69}{28}$$
$$= 2{,}4642857143 \dots \dots$$

Utilizando uma calculadora, encontramos $\mathrm{x} = \log_3 15 = 2{,}4649735207 \ldots$ ...,ou seja, obtivemos $x = \frac{69}{28}$ admitindo um erro de 0,0006878064 que é inferior à $\frac{1}{28^2} = 0{,}0012755102$. Confirmando o que aprendemos sobre frações contínuas.

3.4 FRAÇÕES CONTÍNUAS PARA CÁLCULO DE LOGARITMOS

Apresentamos, nesta seção, um método, utilizando frações contínuas, para a resolução de logaritmos. Devido a sua adaptabilidade e alta velocidade computacional, nosso objetivo principal é apresentar mais uma ferramenta para utilizar os recursos computacionais.

No entanto, como visto anteriormente, esse tipo de resolução instiga nos alunos o desenvolvimento de sua capacidade de estimativa e inferências, pois resoluções com frações contínuas são relacionados a aproximações de irracionais por racionais. Além disso, obtemos uma certa independência das máquinas calculadoras atuais.

Em Abril de 1954, esse método foi exposto por Daniel Shanks em um jornal dedicado a Cálculos Numéricos [Mathematical Tables and Other Aids to Computation, vol 8, n° 45, PP. 60 - 64]. Vejamos agora o método e sua aplicação.

Definição: Sejam b_0 e b_1 números reais positivos com $(b_0 \neq 1)$. O número x que é a solução da equação ${b_0}^x = b_1$ é denominado logaritmo de $b_1$na base b_0.

$$\log_{b_0} b_1 = x \Leftrightarrow {b_0}^x = b_1$$

Em $\log_{b_0} b_1$ dizemos que b_0 é a base do logaritmo e o número b_1 é o logaritmando (ou antilogaritmo).

Iniciaremos aplicando o método para o caso em que $(1 < b_1 < b_0)$

Determine $\log_{b_0} b_1$

Para isso, precisamos obter duas sequências

$$b_2, b_3, b_4, b_5, \cdots\cdots$$

e a sequência de números inteiros positivos

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots$$

onde os números $n_1, b_{2,}\, n_2, b_3, n_3, b_4, \cdots$ são obtidos por meio das relações

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}, \quad \text{consideremos } b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}},$$
$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}, \quad \text{consideremos } b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}},$$
$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}, \quad \text{consideremos } b_4 = \frac{b_2}{b_3^{n_3}},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1}, \quad \text{consideremos } b_{k+1} = \frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

Primeiramente, precisamos encontrar n_1 tal que:

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}$$

Da expressão acima, obtemos

$$b_0 = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \text{ onde } x_1 > 1$$

Em seguida, calculemos

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}$$

e obtemos n_2 tal que:

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$$

Usando a hipótese de que n_2é um número inteiro positivo, então:

$$b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}} \text{ onde } x_2 > 1$$

Continuando esse processo, calculemos

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

e obtemos n_3 tal que:

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$$

Daí, escrevemos

$$b_2 = b_3^{n_3+\frac{1}{x_3}} \text{onde} x_3 > 1$$

Assim sucessivamente.

Das expressões $b_0 = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}}$ e $b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}$, vem:

$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} = b_0 \cdot b_1^{-n_1} = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \cdot b_1^{-n_1} = b_1^{\frac{1}{x_1}}$, ou seja, $b_2^{x_1} = b_1$

Comparando $b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}}$ com o resultado acima, temos:

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}$$

Como conseqüência das expressões $b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$ e $b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}}$ temos:

$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}} = b_1 \cdot b_2^{-n_2} = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}} \cdot b_2^{-n_2} = b_2^{\frac{1}{x_2}}$, ou seja, $b_3^{x_2} = b_2$

Porém, $b_2 = b_3^{n_3+\frac{1}{x_3}}$ logo

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3}$$

Repetindo esse procedimento, somos capazes de mostrar que:

$$x_3 = n_4 + \frac{1}{x_4}$$

Assim concluímos que

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2} = n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{x_3}} = n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \frac{1}{x_4 + \ddots}}}$$

Retornando ao logaritmo

$$\log_{b_0} b_1 = x \Leftrightarrow {b_0}^x = b_1$$

Sabemos que: $b_0 = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \Leftrightarrow b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}} = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\frac{1}{n_4+\frac{1}{x_4+\ddots}}}}}}$

Portanto:

$$\log_{b_0} b_1 = x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cfrac{1}{n_4+\cfrac{1}{x_4+\ddots}}}}} = [0; n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\ldots]$$

Daí segue-se que:

$$\log_{b_1} b_0 = [n_1; n_2, n_3, n_4, \ldots\ldots]$$

o que nos fornece o caso $1 < b_0 < b_1$

Exemplo: Utilizando o método apresentado acima, determine $\log 3$ e $\log_3 10$.

Nesse exemplo, temos $b_0 = 10\ e\ b_1 = 3$. Determinaremos n_1 tal que

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}$$

Consequentemente $n_1 = 2$; pois $3^2 < 10 < 3^3$ e:

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} = \frac{10}{3^2} \cong 1{,}111111$$

Em seguida, obtemos n_2 tal que $b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$, por meio de cálculos simples.

Temos $n_2 = 10$; pois $(1{,}111)^{10} < 3 < (1{,}111)^{11}$ e:

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}} = \frac{3}{(1{,}111)^{10}} \cong 1{,}047081$$

Continuando com esse processo devemos obter n_3 tal que $b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$
Encontramos

$$n_3 = 2 \text{ ; pois } (1{,}047)^2 < 1{,}111 < (1{,}047)^3 \text{ e}$$

$$b_4 = \frac{b_2}{b_3^{n_3}} = \frac{1{,}111}{(1{,}047)^2} \cong 1{,}026257$$

De maneira análoga, encontramos os seguintes resultados:

$$\begin{array}{ll} b_1 = 3 & n_1 = 2 \\ b_2 \cong 1{,}1111 & n_2 = 10 \\ b_3 \cong 1{,}0470 & n_3 = 2 \\ b_4 \cong 1{,}0262 & n_4 = 1 \\ b_5 \cong 1{,}0204 & n_5 = 1 \\ \vdots & \\ \vdots & \end{array}$$

Portanto:

$$\log_{b_0} b_1 = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \cfrac{1}{n_5 + \ddots}}}}} \Rightarrow$$

$$\log_{10} 3 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} = [0; 2{,}10{,}2{,}1{,}1 \ldots\ldots]$$

e daí obtemos também

$$\log_3 10 = \cfrac{1}{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} = [2; 10{,}2{,}1{,}1 \ldots\ldots]$$

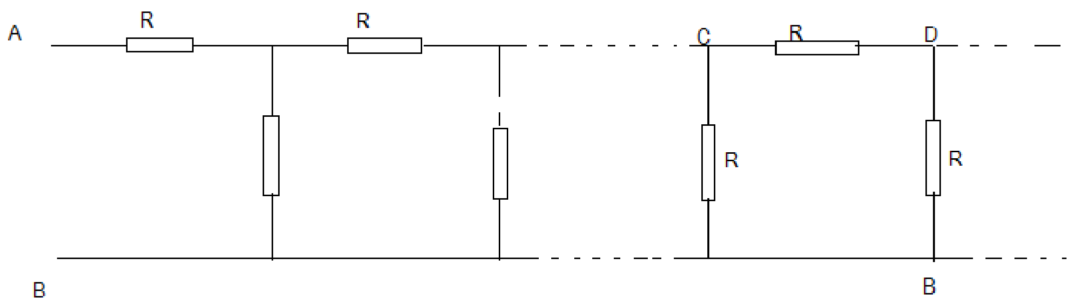
3.5 FRAÇÕES CONTÍNUAS E ASSOCIAÇÃO MISTA INFINITA DE RESISTORES IDÊNTICOS

Uma estreita relação existente, durante todo o ensino médio, é a relação de interdisciplinaridade entre os conteúdos da Física e da Matemática.

É perceptível a necessidade de pré-requisitos matemáticos a cada novo assunto inserido na Física, porém uma aplicação hipotética de Frações Contínuas à associação mista de resistores idênticos passa despercebida devido a pouca atenção dada a esse assunto matemático.

(Olimpíada Internacional de Física 1967) Considere uma rede infinita consistindo de resistores (cada qual com resistência r) como mostra a figura. Determine a resistência equivalente R_{AB} entre os pontos A e B.

Figura 2 - Resistor infinito



Fonte: elaborado pelo autor

Solução: Lembremos primeiramente que a resistência equivalente a duas resistências R_1 e R_2 em série é dada por $R_e = R_1 + R_2$, e estando as resistências em paralelo a resistência equivalente é obtida da seguinte maneira; $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

1° Passo: $R_{e_S} = R + R = 2R$ (Resistência equivalente em série C – D – B)

$$\frac{1}{R_{e_1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{1+1}\right) \Rightarrow R_{e_1} = R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}\right)$$

$\Rightarrow R_{e_1} = R\left(\frac{2}{3}\right)$ (Resistência Equivalente na 1° malha)

2° Passo: $R_{e_S} = R + R_{e_1} = R + R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}\right)$ (Resistência equivalente em série)

$$\frac{1}{R_{e_2}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}\right)} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}\right) \Rightarrow R_{e_2} = R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}\right)$$

$\Rightarrow R_{e_2} = R\left(\frac{5}{8}\right)$ (Resistência Equivalente na 2° malha)

3° Passo: $R_{e_S} = R + R_{e_2} = R + R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}\right)$ (Resistência equivalente em série)

$$\frac{1}{R_{e_3}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}\right)} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}\right) \Rightarrow R_{e_3} = R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}}\right)$$

$\Rightarrow R_{e_3} = R\left(\frac{13}{21}\right)$ (Resistência Equivalente na 3° malha).

Note que as frações convergentes $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \ldots$ da resistência equivalente em função de R nos lembra os termos da Seqüência de Fibonacci: (1,1,2,3,5,8,13,21,....)

Dessa maneira, percebemos que a resistência equivalente ao circuito infinito de resistências R é dado por:

$$R_{e_\infty} \sim R\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}}\right)$$

Ou seja; $R_{e_\infty} \sim R[0; 1,1,1,1, \ldots\ldots]$. Também podemos expressar nossa solução da seguinte maneira:

$\frac{1}{R_{e_\infty}} \sim \frac{1}{R}x$, onde $x > 0$ e $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}$

Observando o padrão recursivo existente na expressão de x temos:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

De onde obtemos; $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; pois $x > 0$.

Assim, $\frac{1}{R_{e_\infty}} \sim \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, ou $R_{e_\infty} \sim R[0; 1,1,1,1, \ldots\ldots]$, ou $\frac{1}{R_{e_\infty}} \sim \frac{1}{R} \cdot\ [1; 1,1,1 \ldots\ldots]$

3.6 TORNEIO DAS CIDADES (CANADÁ - ADAPTADA)

Calcule o valor de

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}}$$

Solução: Observe que podemos escrever a primeira parcela da seguinte maneira:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}}=\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}}$$

Substituindo a expressão

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}$$ por A em ambas as parcelas, obtemos como soma

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}}=$$

$$=\frac{1}{1+A}+\frac{1}{1+\frac{1}{A}}=\frac{1}{1+A}+\frac{A}{1+A}=1$$

3.7 FRAÇÕES CONTÍNUAS E EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

A solução de vários problemas de aritmética recai na resolução de equações do tipo:

$$ax + by = c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ não nulos;}$$

cujas soluções devem ser números inteiros (geralmente positivos).

Tais equações são denominadas equações diofantinas lineares em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox. 300 d.C). Nem sempre essas equações possuem soluções. É de nosso conhecimento que para uma equação desse tipo admitir solução é necessário e suficiente que $d = mdc(a, b)$ divida c.

Desenvolvendo a fração $\frac{a}{b}$ em fração contínua, lembremos do teorema (1.3):

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

Ou seja,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1.$$

Porém, sabemos que $dp_n = a$ e $dq_n = b$; logo

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = \pm d.$$

Multiplicando a equação acima por $\pm c/d$, obtemos:

$$a[\pm(\frac{c}{d})q_{n-1}] - b[\pm\left(\frac{c}{d}\right)p_{n-1}] = c,$$

o que nos fornece a seguinte solução particular para a equação $ax - by = c$ (e também para $ax + by = c$)

$$x_0 = \pm(\frac{c}{d})q_{n-1} \text{ e } y_0 = \pm\left(\frac{c}{d}\right)p_{n-1}.$$

E para todas as outras soluções inteiras teremos:

$$x = x_0 - (\frac{b}{d})t \text{ e } y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t, t \in \mathbb{Z}, \text{ para a equação } ax - by = c$$

e

$$x = x_0 + (\frac{b}{d})t \text{ e } y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t, t \in \mathbb{Z}, \text{ para a equação } ax + by = c.$$

Veja: para $ax - by = c$,

$$a(x_0 - (\frac{b}{d})t) - b\left(y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right) = ax_0 - by_0 = c.$$

E para $ax + by = c$,

$$a(x_0 + (\frac{b}{d})t) + b\left(y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right) = ax_0 + by_0 = c,$$

o que nos mostra que realmente são soluções de tais equações.

Reciprocamente, se (x', y') é uma solução de $ax - by = c$, obtemos $ax' - by' = ax_0 - by_0$, donde $a(x - x_0) = b(y - y_0)$, ou seja, $\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y - y_0)$. Como $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são primos entre si, conclui-se que $\frac{b}{d}$ divide $x - x_0$, isto é, existe $t \in \mathbb{Z}$ com $x - x_0 = (\frac{b}{d})t$. Substituindo na equação anterior, vem $y - y_0 = (\frac{a}{d})t$, como queríamos demonstrar (argumento análogo para a equação $ax + by = c$).

Exemplo: Na compra de alimentos que custam 11 reais e 7 reais, quanto podemos gastar, respectivamente, com cada tipo de alimento, dispondo-se de 100 reais, de maneira que não sobre dinheiro?

Solução:

Do enunciado, obtemos que uma quantia é múltiplo de 11 enquanto que a outra é múltiplo de 7. Assim, podemos escrever $Q_1 = 11x$ e $Q_2 = 7y$, onde x e y são números inteiros positivos.

Portanto a solução do problema consiste em resolver a seguinte equação:

$$11x + 7y = 100$$

Fazendo a expansão, em frações contínuas, da fração $\frac{11}{7}$, vem:

$$11 = \mathbf{1} \cdot 7 + 4$$

$$7 = \mathbf{1} \cdot 4 + 3$$

$$4 = \mathbf{1} \cdot 3 + 1$$

$$3 = \mathbf{3} \cdot 1 + 0$$

$$\frac{11}{7} = [1; 1,1,3]$$

Logo, temos: $\frac{p_n}{q_n} = \frac{11}{7}$ e $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Então

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \Leftrightarrow 11(2) - 7(3) = 1 \Leftrightarrow 11(200) + 7(-300) = 100$$

Portanto, obtemos como solução geral da equação $11x + 7y = 100$

$$\begin{cases} x = 200 + 7t \\ y = -300 - 11t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Porém sendo x e y números positivos, decorre que:

$$x = 200 + 7t > 0 \; e \; y = -300 - 11t > 0 \;\Rightarrow -27{,}3 > t > -28{,}5$$

Daí, $t = -28 \in \mathbb{Z}$, de onde se tem;

$$\begin{cases} x = 200 + 7(-28) = 4 \\ y = -300 - 11(-28) = 8 \end{cases}$$

Consequentemente, podem ser gastos a quantia de $Q_1 = 11(4) = 44$ reais, comprando alimentos que custam 11 reais e a quantia de $Q_2 = 7(8) = 56$ reais comprando alimentos que custam 7 reais.

3.8 UMA BIJEÇÃO DE $\mathbb{R}^n$ COM $\mathbb{R}$

Lembremos que dois conjuntos X e Y tem a mesma cardinalidade quando existe uma bijeção $f: X \to Y$, caso em que escreveremos $X \approx Y$ (" $\approx$ " é uma relação de equivalência).

Provaremos que $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$.

Com efeito, seja I o conjunto dos números irracionais. Primeiramente, mostraremos que $\mathrm{I} \approx \mathbb{R}$. Para isso, seja $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma enumeração dos racionais

Agora defina $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{I}$ por $f(r_n) = \sqrt{2} + r_{2n-1}, f\left(\sqrt{2} + r_n\right) = \sqrt{2} + r_{2n}$ e

$f(x) = x$, caso $x \in \mathbb{R} \backslash \left[\mathbb{Q} \cup \left(\sqrt{2} + \mathbb{Q}\right)\right]$. É imediato verificar que f é bijetiva, donde $\mathrm{I} \approx \mathbb{R}$.

Agora, o algoritmo para determinação da fração contínua de um número real nos permite considerar uma função $g: \mathrm{I} \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots)$ dada por $g(\alpha) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ em que $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ é a fração contínua de α. Pela Proposição 1.2, g está bem definida e é injetiva; pelo Teorema 1.9 (e o comentário que segue) g é sobrejetiva, donde g é uma bijeção e $\mathrm{I} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots$

Logo,

$\mathrm{I} \times \mathrm{I} \approx (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots) \approx (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots \approx \mathrm{I}$, ou seja, $\mathrm{I} \approx \mathrm{I} \times \mathrm{I}$, donde $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (pois $\mathrm{I} \approx \mathbb{R}$).

Agora é fácil provar por indução que $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$, para cada n natural. Para o passo de indução, note que supondo $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$, temos

$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$.

■

4 EQUAÇÃO DE PELL

4.1 A EQUAÇÃO DE PELL

Examinaremos, nesta seção, as soluções de um tipo particular de equações quadráticas diofantinas, conhecida como equação de Pell.

A denominação "Equação de Pell" foi um equívoco que vingou e foi mantido pelo uso e pelo costume. Na verdade, trata-se de um engano de Euler que entendeu que o matemático inglês John Pell (1611 – 1685) teria obtido um método de resolução deste tipo particular de equação. No entanto, esse método deve-se também ao inglês Lord Brouncker (1620 - 1684).

Definição 3.1: Toda equação do tipo $X^2 - AY^2 = c$, onde $A \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{A} \notin \mathbb{N}$ e sendo c um inteiro qualquer é denominada equação de Pell.

Da definição podemos obter as seguintes informações:

1. $\sqrt{A}$ é irracional.

Teorema 3.1: Se $A \, \epsilon \, \mathbb{N} \; e \; \sqrt{A} \notin \mathbb{N},$ então $\sqrt{A}$ é irracional.

Prova:

Se $\sqrt{A} \, \epsilon \, \mathbb{Q}$, teríamos $\sqrt{A} = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, $mdc(p,q) = 1$ e $q > 1$; pois $\sqrt{A} \notin \mathbb{N}$. Assim, $A = \frac{p^2}{q^2}$; $note\ que\ mdc(p^2, q^2) = 1, visto\ que\ mdc(p,q) = 1$, e, além disso, $q > 1$ implica $q^2 > 1$. Logo $A \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, e isso é um absurdo já que $A \in \mathbb{N}$. Portanto $\sqrt{A}$ é irracional.

■

2. Se $c = 0$, a equação só admite a solução trivial $x = y = 0$.

Se existissem $x \neq 0 \; e \; y \neq 0$ tais que (x, y) é uma solução da equação $X^2 - AY^2 = 0$, obteríamos $\sqrt{A} = \frac{|x|}{|y|}$, ou seja, $\sqrt{A} \in \mathbb{Q}$, absurdo, pois $\sqrt{A}$ é irracional.

3. Se $A < 0 \; e \; c < 0$, então a equação de Pell não possui soluções.
   Sendo $A < 0 \, e \, c < 0$ temos que existem D, m inteiros positivos tais que: $A = -D \; e \; c = -m$; logo temos $0 < x^2 - Ay^2 = x^2 + Dy^2 = -m < 0$ (absurdo).
4. Se $A > 0 \; e \; c > 0$, podemos não ter nenhuma solução ou podemos ter infinitas soluções, a partir de uma solução não nula.

Exemplo 3.1: Mostre que a equação $X^2 - AY^2 = c$, não possui soluções inteiras se A e c deixam resto 3 quando divididos por 4.

Solução:

Do enunciado temos que $A \equiv -1(mod\ 4)\ e\ c \equiv -1(mod\ 4)$.

Além disso, para todo $n \in \mathbb{Z}$ sabemos que $n \equiv 0, \pm 1\ ou\ 2\ (mod\ 4)$ o que implica $n^2 \equiv 0\ ou\ 1(mod\ 4)$,

Assim, analisando a equação dada módulo 4.

$$x^2 - Ay^2 \equiv 0 + 1 \cdot 0 \equiv 0(mod\ 4)$$

$$x^2 - Ay^2 \equiv 0 + 1 \cdot 1 \equiv 1(mod\ 4)$$

$$x^2 - Ay^2 \equiv 1 + 1 \cdot 0 \equiv 1(mod\ 4)$$

$$x^2 - Ay^2 \equiv 1 + 1 \cdot 1 \equiv 2(mod\ 4)$$

Obtemos:

$$x^2 - Ay^2 \equiv 0{,}1\ ou\ 2(mod 4)\ e\ c \equiv -1(mod\ 4),$$

Um absurdo, portanto a equação não possui soluções inteiras.

Exemplo 3.2: Seja (z, w) uma solução de $X^2 - AY^2 = -1$ com $z, w \epsilon \mathbb{Z}$ e

$z + \sqrt{A}w > 1$. Então $z + \sqrt{A}w$ é uma irracionalidade quadrática inteira reduzida. Em particular $z, w \epsilon \mathbb{N}$.

Solução:

Sendo (z, w) uma solução da equação $X^2 - AY^2 = -1$, temos que

$$\left(z + \sqrt{A}w\right)\left(z - \sqrt{A}w\right) = -1 \Rightarrow \begin{cases} z - \sqrt{A}w = \dfrac{-1}{z + \sqrt{A}w} \Rightarrow \left|z - \sqrt{A}w\right| = \left|\dfrac{-1}{z + \sqrt{A}w}\right| < 1 \\ z - \sqrt{A}w < 0 \end{cases}$$

Ou seja, $z - \sqrt{A}w$ encontra-se entre -1 e 0. Portanto $z + \sqrt{A}w$ é uma irracionalidade quadrática reduzida, em particular pela **observação 1.1** $z, w \epsilon \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3: Mostre que a equação $X^2 - 2Y^2 = 1$ possui infinitas soluções inteiras positivas.

Antes da solução, perceba a importância de termos $\sqrt{A} \notin \mathbb{N}$, na equação simples de Pell: $X^2 - AY^2 = 1$. Suponha que $A = K^2$ para algum $K \in \mathbb{N}$, então teremos:

$$X^2 - AY^2 = 1 \Rightarrow X^2 - K^2Y^2 = 1 \Rightarrow (X - KY)(X + KY) = 1 \Rightarrow$$

$$X - KY = \pm 1 = X + KY \Longrightarrow 2KY = 0 \ \Longrightarrow Y = 0 \Longrightarrow X^2 = 1 \Longrightarrow X = \pm 1.$$

Assim só temos as soluções triviais $(-1{,}0)$ e $(1{,}0)$ para a equação. Portanto é necessário $\sqrt{A} \notin \mathbb{N}$ para obtermos alguma solução não - triviais.

Solução: Note que x = 3 e y = 2 é uma solução da equação. Podemos a partir de uma solução não nula (x_1, y_1) gerar infinitas soluções. Temos:

$$x_1^2 - 2y_1^2 = 1 \Longrightarrow \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{2}\right) = 1 \Longrightarrow \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)^2\left(x_1 - y_1\sqrt{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(x_1^2 + 2y_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{2}\right)\left(x_1^2+2y_1^2 - 2x_1y_1\sqrt{2}\right) = 1 \Longrightarrow (x_1^2 + 2y_1^2)^2 - 2(2x_1y_1)^2 = 1$$

Dessa maneira, encontramos outro par de soluções (x_2, y_2) $onde$

$x_2 = x_1^2+2y_1^2$ e $y_2 = 2x_1y_1$, sendo $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ com $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ já que são naturais. Fazendo esse procedimento sucessivamente, obtemos infinitas soluções para a equação dada. Utilizando o método acima, fica fácil mostrar que a equação de Pell $X^2 - AY^2 = 1$ admite infinitas soluções, se admite alguma não – trivial. Entretanto, o que vimos até agora foram soluções de casos particulares, para que possamos seguir adiante precisamos de um resultado preliminar sobre aproximação de irracionais por racionais.

Lema (Dirichlet) 3.1: Se α é um irracional qualquer, então existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, com p, q inteiros não nulos, primos entre si tais que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Prova:

Primeiramente, lembremos que dado $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ indica o maior inteiro menor do que ou igual a x e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ indica a parte fracionária de x. Assim $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ e $\{x\} \in [0{,}1)$.

É importante perceber que se α for um racional, digamos $\alpha = \frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$, onde (a, b) = 1 e $b > 0$, então a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tem apenas um número finito de soluções racionais. De fato, temos:

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \Leftrightarrow 1 \leq |aq - pb| < \frac{b}{q} \Rightarrow q < b.$$

Seja $\mathbf{N} > 1$ um número natural qualquer (grande). Considere os $\boldsymbol{N+1}$ seguintes números $0, \{\boldsymbol{\alpha}\}, \{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}\}, \ldots\ldots, \{\mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}\} \in [0{,}1)$ e $\mathbf{N}$ intervalos obtidos pela partição do intervalo $[0{,}1)$ por $\boldsymbol{N}$:

$$[0,1) = [0,\frac{1}{N}) \cup \left[\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right) \cup \dots \dots \cup \left[\frac{N-1}{N},1\right).$$

Pelo princípio da casa dos pombos, um dos $\mathbf{N}$ intervalos acima contém dois dos **N** + **1** números acima.

Digamos que tais números sejam $\{\mathbf{i\alpha}\}$ e $\{\mathbf{j\alpha}\}$ com $\mathbf{0} \le \mathbf{i} < \mathbf{j} < \mathbf{N}$. Então, temos:

$$|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| = |j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor - i\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor| = |(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{N}$$

Sejam $q = j - i \le N$ e p = $\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, obtemos:

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \le \frac{1}{q^2} \text{visto que N} \ge \text{q}$$

Isto conclui a existência de ao menos um racional, como no enunciado do teorema. Segue da ideia de podermos tomar **N** tão grande quanto desejarmos, a consequência de existirem infinitos racionais. Observe:

Se considerarmos $\mathbf{N}_1$ obtemos um racional $\mathbf{r_1} = \frac{\boldsymbol{p_1}}{\mathbf{q_1}}$, tal que:

$$\left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{q_1}}\right| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_1 q_1}} \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q_1^2}}$$

Agora, tomemos $\mathbf{N_2} > \mathbf{N_1}$; sendo $\frac{1}{\mathbf{N_2}} < \left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{q_1}}\right|$; obtemos assim $\mathbf{r_2} = \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{q_2}}$ um racional associado a $\mathbf{N_2}$ tal que

$$\left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{q_2}}\right| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_2 q_2}} \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q_2^2}}$$

Nesse procedimento temos que $\mathbf{r_2} \neq \mathbf{r_1}$ e que $\mathbf{r_2}$ é uma melhor aproximação de $\boldsymbol{\alpha}$do que $\mathbf{r}_1$; já que.

$$\left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{q_2}}\right| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_2 q_2}} \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_2}} < \left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{q_1}}\right|$$

Repetindo esse processo, obtemos uma sequência de números inteiros $\mathbf{N_1} < N_2 < \mathbf{N_3} < \cdots$ e uma sequência de números racionais $\mathbf{r_i} = \frac{\mathbf{p_i}}{\mathbf{q_i}}$; tais que:

$$\left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p_i}}{\mathbf{q_i}}\right| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_i q_i}} \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q_i^2}}$$

Com $|\alpha - r_1| > |\alpha - r_2| > |\alpha - r_3| > \cdots e\ r_n \to \alpha$, pois sendo N_n uma sequência crescente de números inteiros positivos($N_n \to +\infty$); temos $|\alpha - r_n| < \frac{1}{N_n} \to 0$. Isto conclui o Teorema de Dirichlet. ■

Lema 3.2: Se $A \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{A} \notin \mathbb{N}$,então existe $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tal que a equação $X^2 - AY^2 = c$ admite infinitas soluções inteiras.

Prova:

A partir do enunciado temos que $\sqrt{A}$ é irracional. Portanto, pelo lema de Dirichlet, existem infinitos pares $(p,q) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}\backslash\{0\})$ primos entre si tais que $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{A}\right| < \frac{1}{q^2}$ .No entanto, sendo (p, q) tal par ordenado e utilizando a desigualdade triangular, obtemos:

$$|P^2 - Aq^2| = |p - q\sqrt{A}||p + q\sqrt{A}| = \left|q^2\left(\frac{p}{q} - \sqrt{A}\right)\left(\frac{p}{q} + \sqrt{A}\right)\right| < q^2 . \frac{1}{q^2} . \left|\frac{p}{q} + \sqrt{A}\right| =$$
$$= \left|\frac{p}{q} + \sqrt{A}\right| \leq 2\sqrt{A} + \left|\frac{p}{q} - \sqrt{A}\right| < 2\sqrt{A} + \frac{1}{q^2} \leq 2\sqrt{A} + 1$$

Dessa forma, para os infinitos pares (p,q), temos que o conjunto dos inteiros da forma $p^2 - Aq^2$ está contido no conjunto dos inteiros não nulos situados entre os números reais $-\left(2\sqrt{A} + 1\right)$e $2\sqrt{A} - 1$, um conjunto, finito.

Assim, existe um inteiro $c \neq 0$ entre $-\left(2\sqrt{A} + 1\right)$ e $2\sqrt{A} + 1,$ o qual se repete em número infinito de vezes dentre os valores de $p^2 - Aq^2$. Isso é equivalente a dizer que a equação $x^2 - Ay^2 = c$ admite uma infinidade de soluções inteiras.

$\blacksquare$

Utilizando o método da descida de Fermat e o lema anterior, estamos em condições de caracterizar todas as soluções da equação $x^2 - Ay^2 = 1$

Definição 3.2: Dizemos que um natural *A* é livre de quadrados se *A*=1 ou

$A = p_1 \dots p_k$, com $p_1 < \cdots < p_k$ primos.

Teorema 3.2: Se *A* é um natural livre de quadrados, então a equação

$X^2 - AY^2 = 1$ admite pelo menos uma solução em inteiros x, y positivos.

Prova.

Sendo $\{0,1,2, \dots, c-1\}$ as possibilidades para o resto da divisão de um inteiro por c, então existem apenas c^2 possibilidades para o par ordenado $(x\, mod|c|, y\, mod|c|)$, onde $x\, mod|c|$ representa o resto da divisão de x por c.

Vimos pelo lema anterior que existe $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tal que a equação $X^2 - AY^2 = c$ admite infinitas soluções inteiras positivos. Assim, existe $(r_1, r_2) \in \{0,1,2, \dots, c-1\}^2$ com $(r_1, r_2) = (x\, mod|c|, y\, mod|c|)$ para infinitos pares $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\backslash\{(0,0)\}$ de soluções (versão infinita do princípio das casas dos pombos). Logo, existem pares (x,y) e (u,v) de soluções tais que:

$$u \equiv x \ (mod|c|) \ e \ v \equiv y \ (mod|c|).$$

Tomemos tais pares de solução, ou seja:

$u - x = ct$ e $v - y = cs$ com $t, s \ \in \mathbb{Z}$ e sendo $x < u$.

Então:

$$(x^2 - Ay^2)(u^2 - Av^2) = c \cdot c \Longrightarrow (x + y\sqrt{A})(x - y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A})(u - v\sqrt{A}) = c^2 \Longrightarrow$$

$\Rightarrow (x + y\sqrt{A})(u - v\sqrt{A})(x - y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A}) = c^2$. Observe **I** e **II**

I. $$(x + y\sqrt{A})(u - v\sqrt{A}) = (xu - yvA) + (yu - xv)\sqrt{A} =$$

$$(xu - x^2 + x^2 - Ay^2 + Ay^2 - yvA) + (uy - xy + xy - xv)\sqrt{A} =$$

$$(x(u - x) + c + (y - v)Ay) + \big(y(u - x) - x(v - y)\big)\sqrt{A} =$$

$$(x \cdot c \cdot t + c - c \cdot s \cdot Ay) + (y \cdot c \cdot t - x \cdot c \cdot s)\sqrt{A} =$$

$$c \cdot (xt + 1 - sAy) + c \cdot (y \cdot t - x \cdot s)\sqrt{A} = c \cdot a + c \cdot b\sqrt{A} = c(a + b\sqrt{A}),$$

onde $a = (xt + 1 - sAy)$ e $b = (yt - xs)$.

Utilizando a propriedade do conjugado, tem-se:

II. $$(x - y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A}) = \overline{(x + y\sqrt{A})(u - v\sqrt{A})} = \overline{(x + y\sqrt{A})(u - v\sqrt{A})} = \overline{(c \cdot a + c \cdot b\sqrt{A})} = c \cdot a - c \cdot b \cdot \sqrt{A} = c(a - b\sqrt{A}),$$

Onde $a = (xt + 1 - sAy)$ e $b = (yt - xs)$.

Obtemos de **I** e **II** que:

$$c^2 = (x^2 - Ay^2)(u^2 - Av^2) = \left(c \cdot \left(a + b\sqrt{A}\right)\right)\left(c \cdot \left(a - b\sqrt{A}\right)\right) = c^2 \cdot (a^2 - Ab^2).$$

Dessa maneira temos que $a^2 - Ab^2 = 1$. Agora, basta mostrar que $a, b \neq 0$.

Se $a = 0$, teríamos $-Ab^2 = 1$ o que implica $b^2 < 0$, um absurdo. Já se $b = 0$, teríamos $a = \pm 1$, o que implicaria em **I**:

$$(x + y\sqrt{A})(u - v\sqrt{A}) = c(a + b\sqrt{A}) = \pm c = \pm(u^2 - Av^2) \Longrightarrow$$

$$(x + y\sqrt{A}) = \pm(u + v\sqrt{A})$$

Logo; uma vez que $\sqrt{A} \notin \mathbb{Q}$, temos $x = \pm u$.Contradizendo nossas escolhas de x e u. ■

Já sabemos que a equação admite pelo menos uma solução, então como caracterizar todas as soluções da equação $X^2 - AY^2 = 1$, sendo A um natural livre de quadrados?

Dentre todas as soluções $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ da equação de Pell $X^2 - AY^2 = 1$, existe uma solução mínima ou fundamental, isto é, com x mínimo e portanto y e $x + y\sqrt{A}$ mínimos.

Teorema 3.3: Se (x_1, y_1) é a solução mínima em inteiros positivos da equação $X^2 - AY^2 = 1$ então todas as outras soluções inteiras positivas podem ser obtidas através da igualdade:

$$\textbf{(III)}\ x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n,$$

onde n é um número natural.

Prova:

É fácil mostrar que se é possível calcular x_n e y_n pela igualdade **III**, então $x_n^2 - Ay_n^2 = 1$; ou seja, todos os pares (x_n, y_n) do enunciado são soluções da equação. Temos:

$$\textbf{(IV)}\ x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right) \cdots \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right).$$

onde há n fatores na expressão do lado direito. Assim, lembrando que o conjugado de um produto é igual ao produto dos conjugados, decorre que:

$$\textbf{(V)}\ x_n - y_n\sqrt{A} = \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right) \cdots \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)$$

Ou
$$x_n - y_n\sqrt{A} = \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n.$$

Portanto, fatorando $x_n^2 - Ay_n^2$ e utilizando $x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$ e $x_n - y_n\sqrt{A} = \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n$;

$$x_n^2 - Ay_n^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{A}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{A}\right) = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n = (x_1^2 - Ay_1^2)^n = 1$$

Portanto x_n e y_n são soluções da equação $X^2 - AY^2 = 1$.

Agora, tomemos uma solução qualquer em inteiros positivos, (x, y) e verifiquemos então que existe um $n \in \mathbb{N}$,tal que:

$$x + y\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$$

Suponha o contrário. Sendo $x_1 + y_1\sqrt{A} > 1$, temos $\lim_{n \to +\infty}\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n = +\infty$, de modo que existe $n \in \mathbb{N}$,tal que:

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n < x + y\sqrt{A} < \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^{n+1}$$

Multiplicando a expressão acima por $\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n$, obtemos:

$$1 \leq \left(x + y\sqrt{A}\right) \cdot \left(\mathrm{x}_1 - \mathrm{y}_1\sqrt{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{n}} < \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)$$

Observe, que:

$$\left(x + y\sqrt{A}\right) \cdot \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n = \left(x + y\sqrt{A}\right) \cdot \left(x_n - y_n\sqrt{A}\right) =$$

$$= (xx_n - Ayy_n) + (x_n y - y_n x)\sqrt{A} = u + v\sqrt{A}.$$

Onde $u = (xx_n - Ayy_n)$ e $v = (x_n y - y_n x)$; $(u\,, v \in \mathbb{Z})$

Assim:

$$1 \leq u + v\sqrt{A} < \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)$$

com isso, verificamos que $u + v\sqrt{A} \geq 1$ e

$$u^2 - Av^2 = \left(x + y\sqrt{A}\right) \cdot \left(x - y\sqrt{A}\right) \cdot \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n \cdot \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$$
$$= (x^2 - Ay^2)^n (x_1^2 - Ay_1^2)^n = 1 \cdot 1 = 1$$

ou seja, (u, v) é solução da equação.

Além disso;

$$\left(u + v\sqrt{A} \geq 1 \text{ e } u^2 - Av^2 = 1\right) \Rightarrow u - v\sqrt{A} = \frac{1}{u + v\sqrt{A}} > 0 \Rightarrow u > 0$$

já que podemos escrever $2u = \left(u - v\sqrt{A}\right) + \left(u + v\sqrt{A}\right) > 0$

Por outro lado;

$$\left(u - v\sqrt{A} = \frac{1}{u + v\sqrt{A}} < 1 \; e \; u > 0 \right) \Rightarrow u - v\sqrt{A} < 1 \Rightarrow v\sqrt{A} > u - 1 \Rightarrow v > 0$$

Chegamos então a um absurdo, u e v inteiros positivos com $u^2 - Av^2 = 1$ e $u + v\sqrt{A} < \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)$, contrariando a minimalidade de (x_1, y_1).

Consequentemente existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left(x + y\sqrt{A}\right) = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$$

■

Os valores de x_n e y_n são obtidos, pela equiparação das partes, da equação resultante da expansão do termo $\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$ pelo teorema binomial.

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n = {x_1}^n + \binom{n}{1}{x_1}^{n-1}y_1\sqrt{A} + \binom{n}{2}{x_1}^{n-2}{y_1}^2A + \cdots\cdots + {y_1}^n\sqrt{A^n} =$$

$$= x_n + y_n\sqrt{A}$$

Daí:

$$x_n = {x_1}^n + \binom{n}{2}{x_1}^{n-2}{y_1}^2A + \binom{n}{4}{x_1}^{n-4}{y_1}^4A^2 + \cdots + \binom{n}{2\lfloor n/2\rfloor}{x_1}^{n-2\lfloor n/2\rfloor}{y_1}^{2\lfloor n/2\rfloor}A^{\lfloor n/2\rfloor}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}{x_1}^{n-2k}{y_1}^{2k}A^k$$

$$\mathrm{y_n} = \binom{n}{1}{x_1}^{n-1}y_1 + \binom{n}{3}{x_1}^{n-3}{y_1}^3A + \cdots + \binom{n}{2\lfloor n-1/2\rfloor+1}{x_1}^{n-2\lfloor n-1/2\rfloor-1}{y_1}^{2\lfloor n-1/2\rfloor+1}A^{\lfloor n-1/2\rfloor}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n-1/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}{x_1}^{n-(2k+1)}{y_1}^{2k+1}A^k$$

Por exemplo, se (x_1, y_1) é a solução positiva mínima da equação $X^2 - AY^2 = 1$ então a solução (x_2, y_2) pode ser obtida fazendo $n = 2$ na igualdade **(III)**, obtendo

$$x_2 + y_2\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^2 = (x_1^2 + Ay_1^2) + (2x_1y_1)\sqrt{A}$$

De modo que:

$x_2 = {x_1}^2 + \binom{2}{2}{x_1}^{2-2}{y_1}^2A = x_1^2 + Ay_1^2$ e $y_2 = \binom{2}{1}{x_1}^{2-1}y_1 = 2x_1y_1$.

É fácil verificar que $(x_2\,, y_2)$ é solução, veja

$$x_2^2 - Ay_2^2 = (x_1^2 + Ay_1^2)^2 - A(2x_1y_1)^2 = x_1^4 + 2Ax_1^2y_1^2 + A^2y_1^4 - 4Ax_1^2y_1^2 =$$
$$x_1^4 - 2Ax_1^2y_1^2 + A^2y_1^4 = (x_1^2 - Ay_1^2)^2 = 1.$$

Uma vez que por suposição (x_1, y_1) é uma solução da equação $X^2 - AY^2 = 1$.

Além disso, somando e subtraindo **(IV)** e **(V)**, encontramos:

$$x_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n}{2}$$

$$y_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n}{2\sqrt{A}}$$

Observe que as sequências (x_n) e (y_n) acima satisfazem a recorrência

$$u_n = 2x_1u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad \forall n \geq 1$$

Proposição 3.1: Sejam $(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$ a solução fundamental da equação

$X^2 - AY^2 = 1, A \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{A} \notin \mathbb{N}$ e $(u_0, v_0) = (1,0)$ a solução trivial. Dadas as sequências (u_n) e (v_n) tais que $u_n = 2x_1u_{n-1} - u_{n-2}$ e $v_n = 2x_1v_{n-1} - v_{n-2}$, Então o par ordenado (u_n, v_n) é solução da Equação de Pell $X^2 - AY^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

As equações $u_n = 2x_1u_{n-1} - u_{n-2}$ e $v_n = 2x_1v_{n-1} - v_{n-2}$ têm $r^2 - 2x_1r + 1 = 0$ como equação característica, cujas raízes são:

$$r_1 = \frac{2x_1 + \sqrt{4x_1^2 - 4}}{2} = x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1} = x_1 + y_1\sqrt{A}$$

$$r_2 = \frac{2x_1 - \sqrt{4x_1^2 - 4}}{2} = x_1 - \sqrt{x_1^2 - 1} = x_1 - y_1\sqrt{A}$$

Já que (x_1, y_1) é solução da equação de Pell. Assim, as soluções são da forma:

$u_n = a_1r_1^n + a_2r_2^n$ e $v_n = b_1r_1^n + b_2r_2^n$; com $a_1;\ a_2;\ b_1\ e\ b_2$ constantes.

Solucionemos os sistemas abaixo, a fim de obter tais constantes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = u_0 = 1 \\ a_1\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right) + a_2\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right) = x_1 \end{cases}$$

Substituindo $a_2 = 1 - a_1$ na segunda equação, temos:

$$a_1\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right) + (1 - a_1)\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right) = x_1 \Rightarrow 2a_1y_1\sqrt{A} + x_1 - y_1\sqrt{A} = x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1y_1\sqrt{A} = y_1\sqrt{A} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

Que nos fornecem; $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Portanto a solução da recorrência é dada por

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n\right]$$

Já para $b_1\ e\ b_2$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = v_0 = 0 \\ b_1\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right) + b_2\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right) = y_1 \end{cases}$$

Substituindo $b_2 = -b_1$ na segunda equação

$$b_1(x_1 + y_1\sqrt{A}) + (-b_1)(x_1 - y_1\sqrt{A}) = y_1 \Rightarrow 2b_1y_1\sqrt{A} = y_1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2\sqrt{A}}$$

De onde vem $b_2 = \frac{-1}{2\sqrt{A}}$. Portanto a solução da recorrência é dada por

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(x_1 + y_1\sqrt{A})^n - (x_1 - y_1\sqrt{A})^n\right]$$

Reescrevendo as soluções das recorrências obtidas, somando as igualdades e em seguida subtraindo a segunda da primeira, vem

$$\begin{cases} 2u_n = \left[(x_1 + y_1\sqrt{A})^n + (x_1 - y_1\sqrt{A})^n\right] \\ 2v_n\sqrt{A} = \left[(x_1 + y_1\sqrt{A})^n - (x_1 - y_1\sqrt{A})^n\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$2u_n + 2v_n\sqrt{A} = 2\left((x_1 + y_1\sqrt{A})^n\right)$$

$$2u_n - 2v_n\sqrt{A} = 2\left((x_1 - y_1\sqrt{A})^n\right)$$

Com os resultados obtidos, eliminando os fatores 2 e efetuando o produto entre eles, encontramos

$$(u_n + v_n\sqrt{A})(u_n - v_n\sqrt{A}) = (x_1^2 - Ay_1^2)^n \Rightarrow$$

$$u_n^2 - Av_n^2 = 1$$

■

4.2 A EQUAÇÃO $X^2 - AY^2 = -1$

Já vimos que a equação de Pell $X^2 - AY^2 = 1$, sendo A um inteiro positivo livre de quadrados, pode sempre ser resolvida. Mas nem todas as equações de Pell da forma $X^2 - AY^2 = -1$ têm solução. No entanto, se assumirmos que possua solução, temos então o seguinte teorema.

Teorema 3.4: Assumindo que $X^2 - AY^2 = -1$ tenha solução e (x_1, y_1) seja a solução positiva mínima, então:

i) (x_2, y_2) é a solução fundamental da equação $X^2 - AY^2 = 1$, em que $x_2 + \sqrt{A}y_2 = (x_1 + \sqrt{A}y_1)^2$;

ii) todas as soluções positivas (x_n, y_n) de $X^2 - AY^2 = -1$ podem ser obtidas através da equação:

$$x_n + y_n\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^n \text{ , sendo } n = 1, 3, 5 \cdots\cdots$$

iii) todas as soluções positivas (x_n, y_n) de $X^2 - AY^2 = 1$ podem ser obtidas através da equação:

$$x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n \text{ , sendo } n = 2,4,6,\cdots\cdots$$

Prova:

i) Sendo (x, y) a solução mínima da equação $X^2 - AY^2 = 1$, perceba que

$$x_2 + \sqrt{A}y_2 = \left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^2 \Rightarrow \left(x_2 + \sqrt{A}y_2\right)\left(x_2 - \sqrt{A}y_2\right) =$$
$$\left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^2\left(x_1 - \sqrt{A}y_1\right)^2 \Rightarrow x_2^2 - Ay_2^2 = (x_1^2 + Ay_1^2)^2 = 1,$$

ou seja, (x_2, y_2) é solução da equação $X^2 - AY^2 = 1$.
Devemos mostrar agora que tal solução é mínima, isto é,

$$(x_2, y_2) = (x, y).$$

Pelo **teorema 3.3**, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_2 + \sqrt{A}y_2 = \left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^2 = \left(x + \sqrt{A}y\right)^k.$$

Sendo $(x, y) \neq (x_1, y_1)$ devemos ter $k \neq 2$. Mostraremos que a hipótese $k > 2$ nos leva a uma contradição. Sendo assim seja

$$z + \sqrt{A}w = \frac{x_1+\sqrt{A}y_1}{x+\sqrt{A}y}.$$

Note que $z, w \in \mathbb{Z}$. Se $k > 2$, então $\left(z + \sqrt{A}w\right)^2 = \left(\frac{x_1+\sqrt{A}y_1}{x+\sqrt{A}y}\right)^2 = \left(x + \sqrt{A}y\right)^{k-2} > 1$ donde

$$x_1 + \sqrt{A}y_1 > z + \sqrt{A}w > 1.$$

Mas

$$z + \sqrt{A}w = \left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)\left(x - \sqrt{A}y\right) \Rightarrow z^2 - A^2w = (x_1^2 - Ay_1^2)(x^2 - Ay^2) = -1$$

Pelo **exemplo 3.2**, $z + \sqrt{A}w$ é uma irracionalidade quadrática reduzida com $z, w \in \mathbb{N}$. Os fatos anteriores nos mostram que (z, w) é uma solução em inteiros positivos da equação $X^2 - AY^2 = -1$, menor que a solução mínima (x_1, y_1), uma contradição. Logo, $k = 1$ e portanto

$$x + \sqrt{A}y = \left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^2 = x_2 + \sqrt{A}y_2,$$

isto é, $(x_2, y_2) = (x, y)$ é a solução mínima de $X^2 - AY^2 = 1$.

ii) e **iii**)

Mais uma vez, lembrando que o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados, e que (x_1, y_1) é uma solução da equação $X^2 - AY^2 = -1$ temos:

$$x_n - y_n\sqrt{A} = \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n$$

Logo; $x_n^2 - Ay_n^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{A}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{A}\right) = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^n = (x_1^2 - Ay_1^2)^n = (-1)^n$

Portanto, para $n = 1, 3, 5 \cdots\cdots (x_n, y_n)$ será solução da equação $X^2 - AY^2 = -1$, e para $n = 2,4,6 \cdots\cdots (x_n, y_n)$ será solução da equação $X^2 - AY^2 = 1$.

Reciprocamente, seja (u, v)uma solução positiva de $X^2 - AY^2 = (-1)^n$.

Se (u', v') é tal que $u' + \sqrt{A}v' = \left(u + \sqrt{A}v\right)^2$, já mostramos que

$(u')^2 - A(v')^2 = 1$. Pelo **teorema 3.3** e pelo item anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$\left(u + \sqrt{A}v\right)^2 = u' + \sqrt{A}v' = \left(x + \sqrt{A}y\right)^k = \left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^{2k} \Longrightarrow u + \sqrt{A}v = \left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^k$.

Agora é fácil ver que n e k tem a mesma paridade.

■

Exemplo 3.4: Determine, se existir, as soluções inteiras da equação

$$x^2 - 5y^2 = -1.$$

Observe que o par ordenado (2,1) é a solução mínima da equação, assim as soluções inteiras da equação são dadas por:

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \left(2 + 1\sqrt{5}\right)^n, com\ n = 1,3,5 \cdots\cdots$$

Perceba que para $n = 3$ temos: $x_3 + y_3\sqrt{5} = \left(2 + 1\sqrt{5}\right)^3 = 38 + 17\sqrt{5}$; ou seja, $(x_3, y_3) = (38,17)$, veja que $38^2 - 5 \cdot 17^2 = -1$; porém se fizermos $n = 2$ temos: $x_2 + y_2\sqrt{5} = \left(2 + 1\sqrt{5}\right)^2 = 9 + 4\sqrt{5}$. No entanto; $9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$.

Com o exposto até aqui, estamos capazes de mostrar que:

Sejam $A, c \in \mathbb{N}$, sendo A um inteiro positivo livre de quadrados. Se a equação $x^2 - Ay^2 = c$ tiver uma solução (x_1, y_1) em inteiros positivos, então ela terá infinitas soluções.

Solução:

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a^2 - Ab^2 = 1$ e $x_1^2 - Ay_1^2 = c$, então

$$\left(a+b\sqrt{A}\right)\left(a-b\sqrt{A}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{A}\right)\left(x_1-y_1\sqrt{A}\right)=$$
$$=\left(a+b\sqrt{A}\right)\left(x_1+y_1\sqrt{A}\right)\left(a-b\sqrt{A}\right)\left(x_1-y_1\sqrt{A}\right)$$
$$=\left[(ax_1+by_1A)+(ay_1+bx_1)\sqrt{A}\right]\left[(ax_1+by_1A)-(ay_1+bx_1)\sqrt{A}\right]$$
$$=\left(x_2+y_2\sqrt{A}\right)\left(x_2-y_2\sqrt{A}\right)=x_2^2-Ay_2^2=c$$

Onde $x_2=(ax_1+by_1A)e\ y_2=(ay_1+bx_1)$ de modo que (x_2,y_2) é solução da equação $x^2-Ay^2=c$ e observe que:

$$x_2^2+Ay_2^2=(ax_1+by_1A)^2+A(ay_1+bx_1)^2=$$
$$=(a^2x_1^2+2abx_1y_1A+b^2y_1^2A^2)+A(a^2y_1^2+2abx_1y_1+b^2x_1^2)=$$
$$=(a^2x_1^2+a^2y_1^2A+b^2x_1^2A+b^2y_1^2A^2)+4abx_1y_1A=$$
$$=(a^2+Ab^2)\cdot(x_1^2+Ay_1^2)+4abx_1y_1A>x_1^2+Ay_1^2$$

Ou seja, $(x_2,y_2)\neq(x_1,y_1)$. Já que temos $x_2^2+Ay_2^2>x_1^2+Ay_1^2$.

4.3 A EQUAÇÃO QUADRÁTICA GERAL DIOFANTINA

A equação quadrática Diofantina geral

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

com coeficientes inteiros A,B,C,D,E e F pode se reduzir a uma equação do tipo Pell. Além disso, esta equação representa uma cônica no plano cartesiano, de modo que resolvê-la em números inteiros significa encontrar todos os pontos inteiros pertencentes a esta cônica.

Os lugares geométricos obtidos desta equação, de acordo com o indicador

$I=B^2-4AC$, são:

- Uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se $I<0$
  Neste caso a equação tem apenas um número finito de soluções.
- Uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio se $I=0$.
  Nesta situação, temos duas possibilidades de equivalência para a equação quadrática geral. Se $2AE=BD$ a equação
  $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
  multiplicada por 4A torna - se
  $$4A^2x^2+4ABxy+4ACy^2+4ADx+4AEy+4AF=0\Leftrightarrow$$
  $$4A^2x^2+4ABxy+B^2y^2+4ADx+2BDy+4AF=0\Leftrightarrow$$
  $$4A^2x^2+B^2y^2+4ABxy+4ADx+2BDy=-4AF\Leftrightarrow$$

$$4A^2x^2 + B^2y^2 + D^2 + 4ABxy + 4ADx + 2BDy = D^2 - 4AF \Leftrightarrow$$
$$(2Ax + By + D)^2 = D^2 - 4AF$$

O que não é difícil de resolver.

Caso contrário, $2AE \neq BD$, teremos:

$$4A^2x^2 + 4ABxy + 4ACy^2 + 4ADx + 4AEy + 4AF = 0 \Leftrightarrow$$
$$4A^2x^2 + 4ABxy + B^2y^2 + 4ADx + 4AEy + 4AF = 0 \Leftrightarrow$$
$$4A^2x^2 + B^2y^2 + D^2 + 4ABxy + 4ADx + 2BDy =$$
$$= 2BDy - 4AEy + D^2 - 4AF$$
$$(2Ax + By + D)^2 = (2BD - 4AE)y + D^2 - 4AF$$

realizando as substituições

$$X = (2Ax + By + D) \ e \ Y = (2BD - 4AE)y + D^2 - 4AF$$

reduz para $X^2 = Y$, o que é fácil de resolver.

- Uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes se $I > 0$

  Este é o caso mais interessante, pois usando uma sequência de substituições é possível reduzir, sempre que se tratar de uma hipérbole, a uma equação geral de Pell

$$X^2 - AY^2 = C \ ou \ Mx^2 - Ny^2 = K.$$

Ilustremos o processo considerando a seguinte equação:

$$4x^2 - 10xy + 5y^2 + 1 = 0$$

Observe que $I = 20 > 0$, ou seja, a cônica correspondente é uma hipérbole. Logo a equação pode ser escrita como

$$4x^2 - 10xy + 5y^2 = -1$$

$$-4x^2 + 10xy - 5y^2 = 1$$

$$-5x^2 + x^2 + 10xy - 5y^2 = 1$$

$$x^2 - 5(x - y)^2 = 1$$

Efetuando as substituições $X = x$ e $Y = (x - y)$, nós a reduzimos à equação de Pell

$$X^2 - 5Y^2 = 1$$

4.4 A EQUAÇÃO $MX^2 - NY^2 = 1$

A equação mais geral $MX^2 - NY^2 = 1$ onde M e N são inteiros e tem garantido a condição $I = B^2 - 4AC = 4MN > 0$, vista anteriormente, pode ser reduzida à equação de Pell $X^2 - AY^2 = 1$. No entanto, sendo MN um quadrado perfeito, i.e, $MN = K^2$, onde K é um número inteiro maior que 1 então a equação

$MX^2 - NY^2 = 1$ não possui soluções em números inteiros positivos. Vejamos;

Proposição 3.2: Se $MN = K^2; K > 1\ e\ K \in \mathbb{Z}$, então a equação $MX^2 - NY^2 = 1$ não possui soluções em números inteiros positivos.

Prova:

Suponha que exista uma solução (x, y), com $x\ e\ y$ inteiros positivos em tais condições. Assim $MX^2 - NY^2 = 1$, e obviamente M e N são primos entre si.

Além disso, $M = K_1^2\ e\ N = K_2^2$ para alguns inteiros positivos $K_1\ e\ K_2$, pois $MN = K^2$. Logo,

$$MX^2 - NY^2 = 1 \Rightarrow k_1^2X^2 - K_2^2Y^2 \Rightarrow (k_1X + K_2Y)(K_1X - K_2Y) = 1$$

Daí, temos que $1 < K_1X + K_2Y < 1$, uma contradição. ■

Agora, vejamos que se $MX^2 - NY^2 = 1$ possui uma solução (x_0, y_0) e o produto MN é livre de quadrados, então $MX^2 - NY^2 = 1$possui infinitas soluções. Temos:

$$\left(\sqrt{M}x_0 + \sqrt{N}y_0\right)\left(\sqrt{M}x_0 - \sqrt{N}y_0\right) = 1$$

Como MN é livre de quadrados, então a equação auxiliar de Pell $X^2 - MNY^2 = 1$

possui infinitas soluções; se (r, s) é uma delas;

$$\left(r + \sqrt{MN}s\right)\left(r - \sqrt{MN}s\right) = 1$$

Multiplicando as duas equações obtidas, vem;

$$\left(\sqrt{M}x_0 + \sqrt{N}y_0\right)\left(r + \sqrt{MN}s\right)\left(\sqrt{M}x_0 - \sqrt{N}y_0\right)\left(r - \sqrt{MN}s\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left[\sqrt{M}(rx_0 + Nsy_0) + \sqrt{N}(ry_0 + Msx_0)\right] \cdot \left[\sqrt{M}(rx_0 + Nsy_0) - \sqrt{N}(ry_0 + Msx_0)\right] = 1$$

Portanto (z, w), onde $z = (rx_0 + Nsy_0)$ e $w = (ry_0 + Msx_0)$, geram uma nova solução da equação $MX^2 - NY^2 = 1$, pois $z > r$ e $w > s$.

Reciprocamente, para toda solução (a, b) da equação $MX^2 - NY^2 = 1$; obtemos $(2Ma^2 - 1\ , 2ab)$ como solução da equação auxiliar de Pell $X^2 - MNY^2 = 1$

Observe:

$$Ma^2 - Nb^2 = 1 \Leftrightarrow (Ma^2 - Nb^2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{M}a + \sqrt{N}b\right)\left(\sqrt{M}a - \sqrt{N}b\right)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{M}a + \sqrt{N}b\right)^2\left(\sqrt{M}a - \sqrt{N}b\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(Ma^2 + Nb^2 + 2\sqrt{MN}ab\right)\left(Ma^2 + Nb^2 - 2\sqrt{MN}ab\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2Ma^2 - 1 + 2\sqrt{MN}ab\right)\left(2Ma^2 - 1 - 2\sqrt{MN}ab\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2Ma^2 - 1)^2 - MN(2ab)^2 = 1$$

Assim $(2Ma^2 - 1\,, 2ab)$ é solução da equação $X^2 - MNY^2 = 1$.

Exemplo 3.5: Resolva em números inteiros positivos a equação $8x^2 - 7y^2 = 1$

Solução:

Nesta equação observe que $I = 224 > 0$, $MN = 56$ não é quadrado perfeito e sua solução mínima é $(x_0, y_0) = (1,1)$. A equação de Pell auxiliar é $u^2 - 56v^2 = 1$ que tem solução fundamental (15,2).

Logo;

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n + \left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right]$$

e

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{56}}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n - \left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right]$$

É a solução geral para a equação de Pell auxiliar e portanto:

$$x_n = (u_n x_0 + N v_n y_0) \quad e \quad y_n = (u_n y_0 + M v_n x_0)$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n + \left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right] + \frac{7}{2\sqrt{56}}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n - \left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right]$$

$$x_n = \frac{4 + \sqrt{14}}{8}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n\right] + \frac{4 - \sqrt{14}}{8}\left[\left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right]$$

e

$$y_n = \frac{1}{2}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n + \left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right] + \frac{8}{2\sqrt{56}}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n - \left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{7 + 2\sqrt{14}}{14}\left[\left(15 + 2\sqrt{56}\right)^n\right] + \frac{7 - 2\sqrt{14}}{14}\left[\left(15 - 2\sqrt{56}\right)^n\right]$$

$(x_n, y_n)_{n\geq 0}$ é a solução geral da equação $8x^2 - 7y^2 = 1$.

4.5 EQUAÇÕES DE PELL $X^2 - AY^2 = \pm 1$ E AS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Nesta seção, discutiremos como resolver equações de Pell, do tipo $X^2 - AY^2 = \pm 1$, quando possível, utilizando frações contínuas.

Teorema 3.5: Se o par (x, y) é uma solução da equação de Pell $X^2 - AY^2 = (-1)^n$, então $\frac{x}{y}$ é uma reduzida da fração contínua de $\sqrt{A}$ de mesma paridade que n.

Demonstração:

Do enunciado resulta que

$$x^2 - Ay^2 = (-1)^n \Rightarrow \left(x - \sqrt{A}y\right)\left(x + \sqrt{A}y\right) = (-1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2\left(\frac{x}{y} - \sqrt{A}\right)\left(\frac{x}{y} + \sqrt{A}\right) = (-1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} - \sqrt{A}\right) = \frac{(-1)^n}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{A}\right)} \qquad (1)$$

Perceba que para n par temos:

$$x^2 - Ay^2 = 1 \Rightarrow x^2 - Ay^2 > 0 \Rightarrow x^2 > Ay^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} > A \Rightarrow \frac{x}{y} > \sqrt{A} \Rightarrow \frac{x}{y} + \sqrt{A} > 2\sqrt{A} > 2$$

O que ocasiona a seguinte desigualdade, ao substituirmos em (1)

$$0 < \left(\frac{x}{y} - \sqrt{A}\right) < \frac{1}{2y^2} \qquad (2)$$

Já no caso em que n é ímpar, obtemos:

$$x^2 - Ay^2 = -1 \Rightarrow x^2 = Ay^2 - 1 \geq y^2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \sqrt{A} > 2$$

Nos fornecendo a desigualdade abaixo

$$\frac{-1}{2y^2} < \left(\frac{x}{y} - \sqrt{A}\right) < 0 \qquad (3)$$

Assim de (2) e (3), temos

$$\left|\sqrt{A} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2y^2}$$

Pelos **teoremas 1.11** e **1.4** juntamente com as desigualdades acimas concluímos que $\frac{x}{y}$ é uma reduzida da fração contínua de $\sqrt{A}$ de mesma paridade que n.

■

A expansão da fração contínua para $\sqrt{A}$, visto no **teorema** (**1.16**), fornece o que precisamos para resolver a equação de Pell $X^2 - AY^2 = 1$ ou $X^2 - AY^2 = -1$ desde que existam soluções para esta.

Do **teorema** (**1.16**), sabemos que:

$\sqrt{A} = [a_1; a_2, \ldots, a_n, 2a_1, a_2, a_3, \ldots, 2a_1, \ldots]$ e $\sqrt{A} + a_1 = [\overline{2a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n}]$

De onde, obtemos

$$\alpha_{n+1} = [\overline{2a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n}] = \sqrt{A} + a_1$$

Mas pelo teorema (1.7)

$$\sqrt{A} = \frac{\alpha_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

em que p_{n-1}, q_{n-1}, p_n e q_n são obtidos através dos dois convergentes imediatamente anteriores ao termo $2a_1$. Substituindo $\alpha_{n+1} = \sqrt{A} + a_1$ na expressão acima, temos:

$$\sqrt{A} = \frac{(\sqrt{A} + a_1)p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{A} + a_1)q_n + q_{n-1}} \Leftrightarrow \sqrt{A}(\sqrt{A} + a_1)q_n + q_{n-1}\sqrt{A} = (\sqrt{A} + a_1)p_n + p_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$Aq_n + (a_1 q_n + q_{n-1})\sqrt{A} = (a_1 p_n + p_{n-1}) + p_n\sqrt{A}$$

Da equação acima, sendo $q_n, (a_1 q_n + q_{n-1}), (a_1 p_n + p_{n-1}), p_n$ números inteiros e $\sqrt{A}$ é irracional, implica

$$\begin{cases} Aq_n = (a_1 p_n + p_{n-1}) \\ (a_1 q_n + q_{n-1}) = p_n \end{cases} \Rightarrow\ p_{n-1} = Aq_n - a_1 p_n\ e\ q_{n-1} = p_n - a_1 q_n$$

Porém, pelo teorema (1.3), sabemos que

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

Substituindo os valores encontrados para p_{n-1} e q_{n-1}, obtemos a equação

$$p_n(p_n - a_1 q_n) - (Aq_n - a_1 p_n)q_n = (-1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p_n^2 - a_1 q_n p_n - Aq_n^2 + a_1 q_n p_n = (-1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n^2 - Aq_n^2 = (-1)^n$$

Se n for par, a equação se torna $p_n^2 - Aq_n^2 = 1$, ou seja, (p_n, q_n) é uma solução particular da equação $X^2 - AY^2 = 1$.

Caso contrário, se n for ímpar, a equação se torna $p_n^2 - Aq_n^2 = -1$, e (p_n, q_n) será uma solução particular da equação $X^2 - AY^2 = -1$.

Perceba que se n for ímpar, ainda não teremos uma solução para a equação $p_n^2 - Aq_n^2 = 1$. Então avançamos para o segundo período na expansão de $\sqrt{A}$, isto é, para o termo a_n onde ocorre pela segunda vez. O próximo termo a_n, que ocorre novamente a igualdade é realmente o termo a_{2n} na expansão de $\sqrt{A}$, portanto:

$$p_{2n}^2 - Aq_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1$$

onde(p_{2n}, q_{2n}) é solução particular de $X^2 - AY^2 = 1$.

Teorema 3.6: Nas notações acima $\sqrt{A} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n, \overline{2a_1, a_2, \dots, a_n}]$

i) Se n é par, (p_n, q_n) é a solução mínima de $X^2 - AY^2 = 1$ e $X^2 - AY^2 = -1$ não possui solução.

ii) Se n é ímpar, (p_n, q_n) é a solução mínima de $X^2 - AY^2 = -1$ e (p_{2n}, q_{2n}) é a solução mínima de $X^2 - AY^2 = 1$.

Demonstração:

Se (x, y) é solução da equação $X^2 - AY^2 = (-1)^s$ então

$(x, y) = (p_m, q_m)$ com $(-1)^m = (-1)^s$. Logo,

$$\sqrt{A} = \frac{\alpha_{m+1} p_m + p_{m-1}}{\alpha_{m+1} q_m + q_{m-1}} \implies \alpha_{m+1}\left(p_m - \sqrt{A} q_m\right) = \sqrt{A} q_{m-1} - p_{m-1}$$

Multiplicando-se pelo conjugado de $\left(p_m - \sqrt{A} q_m\right)$, obtemos

$$\alpha_{m+1}(-1)^s = \left(\sqrt{A} q_{m-1} - p_{m-1}\right)\left(p_m + \sqrt{A} q_m\right)$$
$$= (Aq_m q_{m-1} - p_{m-1} p_m) + (p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m)\sqrt{A} \implies$$

$$\implies \alpha_{m+1}(-1)^s = (Aq_m q_{m-1} - p_{m-1} p_m) + (-1)^m \sqrt{A} \implies$$

$$\implies \alpha_{m+1} = d + \sqrt{A},$$

com $d = (-1)^s (Aq_m q_{m-1} - p_{m-1} p_m) \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$d + \sqrt{A} = [d + a_1; a_2, \dots, a_n, \overline{2a_1, a_2, \dots, a_n}] = [a_{m+1}; \dots, a_{m+k}, \overline{2a_1, a_2, \dots, a_n}] = \alpha_{m+1}$$

$$\implies m + k = rn \ e \ k = n \implies m = (r-1)n \implies n | m.$$

Como (p_n, q_n) é solução de $X^2 - AY^2 = (-1)^n$, concluímos que:

i) Se n é par, (p_n, q_n) é a solução mínima de $X^2 - AY^2 = 1$, mas a equação $X^2 - AY^2 = -1$ não possui solução. Pois, caso contrário, se existisse (p_m, q_m) solução mínima de $X^2 - AY^2 = -1$ teríamos:

$$p_n + \sqrt{A}q_n = \left(p_m + \sqrt{A}q_m\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} p_n = p_m^2 + Aq_m^2 \\ q_n = 2p_m q_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_m < p_n \\ q_m < q_n \end{cases}$$

Mas pelo exposto acima, $n|m \Rightarrow p_m \geq p_n \; e \; q_m \geq q_n$, contradição.

ii) Se n é ímpar, (p_n, q_n) é a solução mínima de $X^2 - AY^2 = -1$ e (p_{2n}, q_{2n}) é a solução mínima da equação $X^2 - AY^2 = 1$. Vejamos:

Seja (p_r, q_r) solução da equação $X^2 - AY^2 = 1$. Logo,

$$n|r \; e \; r \neq n \;\Rightarrow r \geq 2n \;\Rightarrow \begin{cases} p_r \geq p_{2n} \\ q_r \geq q_{2n} \end{cases}$$

sendo portanto (p_{2n}, q_{2n}) a solução mínima da equação $X^2 - AY^2 = 1$.

■

Exemplo 3.5: Encontre uma solução particular para a equação $x^2 - 7y^2 = 1$.

Solução:

Nessa questão o valor de A é 7, vamos então fazer a expansão da fração contínua de $\sqrt{7}$.

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = [2; \overline{1,1,1,4}]$$

O que nos mostra que a solução será obtida em $c_4 = \frac{p_4}{q_4}$, além disso n é par e $c_4 = \frac{8}{3}$ logo; $x = p_4 = 8$ e $y = q_4 = 3$. veja:

$$8^2 - 7(3)^2 = 64 - 63 = 1$$

Exemplo 3.6: Encontre uma solução particular para a equação $x^2 - 13y^2 = -1$ e qual seria a solução no caso $x^2 - 13y^2 = 1$?

Solução:

Examinemos a expansão de $\sqrt{13}$ em frações contínuas.

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$$

O que nos mostra que a solução será obtida em $c_5 = \frac{p_5}{q_5}$, além disso, n é ímpar e $c_5 = \frac{18}{5}$, logo; $x = p_5 = 18$ e $y = q_5 = 5$. Veja que por n ser ímpar, essa é realmente a solução para $x^2 - 13y^2 = -1$.

$$(18)^2 - 13(5)^2 = 324 - 325 = -1$$

Porém não será a solução de $x^2 - 13y^2 = 1$. Portanto, a solução desta equação estará no convergente anterior ao último termo, do próximo período e será $c_{10} = \frac{p_{10}}{q_{10}}$. Sabemos que $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ e $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, ou seja, precisamos de dois convergentes anteriores para encontrar o próximo.

$$c_4 = \frac{11}{3}, c_5 = \frac{18}{5}, c_6 = \frac{119}{33}, c_7 = \frac{137}{38}, c_8 = \frac{256}{71}, c_9 = \frac{393}{109}, c_{10} = \frac{649}{180}$$

Logo; $x = p_{10} = 649$ e $y = q_{10} = 180$

$$(649)^2 - 13(180)^2 = 421201 - 13(32400) = 421201 - 421200 = 1$$

4.6 ALGUMAS APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE PELL

1) $(OIbM$ 1987) Demonstrar que existe uma infinidade de pares (x, y) de números naturais tais que

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0$$

Solução:

Iniciaremos, completando os quadrados perfeitos, a fim de tornar a equação parecida com uma equação de Pell.

$$2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) - 3(y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}) + 1 = \frac{9}{8} - \frac{3}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{8} - \frac{1}{12} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{(4x-3)^2}{16} - 3\frac{(6y+1)^2}{36} = \frac{1}{24} \Rightarrow$$

Multiplicando por 24 a equação, temos:

$$3(4x-3)^2 - 2(6y+1)^2 = 1$$

Substituindo $u = 4x - 3$ e $v = 6y + 1$, o problema inicial se transforma em encontrar infinitas soluções da equação

$$3u^2 - 2v^2 = 1 \text{ com } u \equiv 1(mod 4) \text{ e } v \equiv 1(mod\ 6)$$

Fatorando $3u^2 - 2v^2 = 1$,

$$\left(u\sqrt{3} + v\sqrt{2}\right)\left(u\sqrt{3} - v\sqrt{2}\right) = 1$$

Considere a equação auxiliar de Pell $a^2 - 6b^2 = 1$ que possui solução mínima $(5{,}2)$. Observe que podemos substituir $\left(u\sqrt{3} - v\sqrt{2}\right)$ por $a + b\sqrt{6}$, uma vez que, $\left(u\sqrt{3} - v\sqrt{2}\right)$ = 1 = $a + b\sqrt{6}$. Daí:

$$\left(u\sqrt{3} + v\sqrt{2}\right)\left(a + b\sqrt{6}\right) = (au + 2bv)\sqrt{3} + (av + 3bu)\sqrt{2}$$

Sendo sua norma

$$3(au + 2bv)^2 - 2(av + 3bu)^2 =$$

$$= 3(a^2u^2 + 4abuv + 4b^2v^2) - 2(a^2v^2 + 6abuv + 9b^2u^2) =$$

$$= 3(a^2u^2 + 4b^2v^2) - 2(a^2v^2 + 9b^2u^2) =$$

$$= a^2(3u^2 - 2v^2) - 6b^2(3u^2 - 2v^2) =$$

$$= (3u^2 - 2v^2)(a^2 - 6b^2) = (3u^2 - 2v^2)$$

A ideia que mostramos aqui, é que conseguimos infinitas soluções para $3u^2 - 2v^2 = 1$, multiplicando esta pela equação auxiliar de Pell $a^2 - 6b^2 = 1$, que possui infinitas soluções.

No entanto, devemos encontrar infinitas soluções para a equação $3u^2 - 2v^2 = 1$, de modo que as congruências $u \equiv 1(mod\ 4)$ e $v \equiv 1(mod\ 6)$ sejam mantidas. Encontramos então, uma solução para a equação $a^2 - 6b^2 = 1$, de modo que $a \equiv 1(mod\ 4)$ e b seja par, dessa maneira:

$$au + 2bv \equiv u(mod\ 4) \text{ e } av + 3bu \equiv v(mod\ 6)$$

Lembrando que a equação $a^2 - 6b^2 = 1$ tem solução mínima $(5{,}2)$, então todas as suas soluções são dadas por $a_n + b_n\sqrt{6} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n$.

Falta mostrarmos que existem infinitos pares (a_n, b_n) tais que

$a_n \equiv 1(mod\ 4)$e $b_n \equiv 1(mod\ 6)$. Veja que:

- Na sequência $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ onde $a_0 = 1$ e $a_1 = 5$, segue-se que para n par $a_n \equiv 1(mod\ 4)$ e $a_n \equiv 1(mod\ 3)$ o que implica $a_n \equiv 1(mod\ 12)$.
- Na sequência $b_{n+2} = b_{n+1} - b_n$ onde $b_0 = 0$ e $b_1 = 2$,segue-se que b_n sempre é par, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Portanto, concluímos que $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n$ vai ser uma solução da equação $3u^2-2v^2=1$ e fica provado que existem infinitos pares (x,y) de números naturais com $2x^2-3x-3y^2-y+1=0$.

2) Encontre todos os inteiros positivos n, de modo que $2n+1$ e $3n+1$ sejam quadrados perfeitos.

(American Mathematical Monthly)

Solução:

Sejam $2n+1=x^2$ e $3n+1=y^2$.

Dessa maneira temos que:

$$(3x^2=6n+3;\ 2y^2=6n+2) \Rightarrow 3x^2-2y^2=1$$

Tal equação possui solução mínima $(x_1,y_1)=(1,1)$ e tem como equação de Pell auxiliar $u^2-6v^2=1$ com solução fundamental $(u_1,v_1)=(5,2)$, cuja solução geral é dada por:

$$u_n=\frac{1}{2}\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^n\right]$$

e

$$v_n=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^n-\left(5-2\sqrt{6}\right)^n\right]$$

Logo, $x_n=u_nx_1+Nv_ny_1=u_n+2v_n$

e

$$y_n=u_ny_1+Mv_nx_1=u_n+3v_n$$

Para obtermos o valor de n não é necessário termos a solução geral $(x_n,y_n)_{n\geq 0}$ da equação $3x^2-2y^2=1$. Observe:

$$2n+1=x_n^2 \text{e} 3n+1=y_n^2$$

Subtraindo a primeira da segunda, vem

$$n=y_n^2-x_n^2=(u_n+3v_n)^2-(u_n+2v_n)^2=2u_nv_n+5v_n^2=v_n(2u_n+5v_n)\ n\geq 0.$$

3) Encontre todos os pares (x,y) de inteiros positivos que satisfazem a equação

$$x^2-6xy+y^2-1=0$$

(Titu Andreescu).

Solução: Perceba que $I = B^2 - 4AC = 32 > 0$. Daí a cônica correspondente é uma hipérbole. Assim, completando os quadrados perfeitos, obtemos a seguinte equação equivalente

$$x^2 - 6xy + y^2 = 1$$
$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 8y^2 = 1$$
$$(x - 3y)^2 - 8y^2 = 1$$

Efetuando as substituições $X = (x - 3y)\ e\ Y = y$ reduzimos à equação de Pell

$$X^2 - 8Y^2 = 1$$

Esta equação de Pell tem solução mínima $(3,1)$e portanto tem solução geral $(X_n, Y_n)_{n \geq o}$, onde

$$X_n = \frac{1}{2}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

e

$$Y_n = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

4) Encontre todos os inteiros positivos n tal que $\frac{\mathrm{n(n+1)}}{3}$ é um quadrado perfeito.

Solução: A equação $t_n = \frac{\mathrm{n(n+1)}}{3} = y^2$ é equivalente à equação

$$n(n+1) = 3y^2 \Leftrightarrow n^2 + n = 3y^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n = 12y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 12y^2 + 1 \Leftrightarrow (2n+1)^2 - 12y^2 = 1.$$

Executando as substituições $X = (2n + 1)\ e\ Y = y$ reduzimos à equação de Pell.

$$X^2 - 12Y^2 = 1$$

Esta equação de Pell tem solução mínima $(7,2)$ portanto tem solução geral $(X_m, Y_m)_{m \geq 0}$, onde

$$X_m = \frac{1}{2}\left[\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^m + \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^m\right]$$

e

$$Y_m = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^m - \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^m\right]\ m \geq 1$$

Segue que:

$$2n_m + 1 = X_m = \frac{1}{2}\left[\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^m + \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^m\right]$$

Daí

$$2n_m + 1 = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2m} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2m}\right]$$

$$2n_m = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2m} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2m}\right] - 1$$

$$2n_m = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2m} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2m}\right] - \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$n_m = \left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{m} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{m}}{2}\right]^2$$

Todos os pares n satisfazendo $t_n = y^2$ são em si um quadrado perfeito.

05) Denominamos números triangulares, os números que são da forma $\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$ $n \geq 1$. Encontre todos os números triangulares que são quadrados perfeitos

Solução: A equação $t_n = \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2} = y^2$ é equivalente à equação

$$n(n+1) = 2y^2 \Leftrightarrow n^2 + n = 2y^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n = 8y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 8y^2 + 1 \Leftrightarrow (2n+1)^2 - 8y^2 = 1.$$

Executando as substituições $X = (2n+1)\ e\ Y = y$ reduzimos à equação de Pell.

$$X^2 - 8Y^2 = 1$$

Esta equação de Pell tem solução mínima $(3,1)$e portanto tem solução geral $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$, onde

$$X_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+\sqrt{8}\right)^{n} + \left(3-\sqrt{8}\right)^{n}\right]$$

e

$$Y_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\left(3+\sqrt{8}\right)^{n} - \left(3-\sqrt{8}\right)^{n}\right]\ n \geq 1$$

Segue que:

$$2n + 1 = X_n = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right]$$

Daí:

$$2n = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] - 1$$

$$2n = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] - \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$$

$$n = \left[\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{n}}{2}\right]^2$$

Todos os pares n satisfazendo $t_n = y^2$ são em si um quadrado perfeito

06) Prove que existem uma infinidade de triplas de inteiros consecutivos, cada um dos quais é uma soma de dois quadrados.

(Putnam Mathematical Competition)

Solução: A primeira tripla, de números inteiros consecutivos, com essas características é $(8, 9{,}10)$, observe;

$$8 = 2^2{+}2^2, 9 = 3^2{+}0^2 \; e \; 10 = 3^2 + 1^2$$

Sugestão: Considere as triplas $x^2 - 1,\ x^2, x^2 + 1$ satisfazendo tal condição. Dessa maneira, $x^2 - 1,\ x^2, x^2 + 1$ são soma de dois quadrados. Digamos que:

$$x^2 - 1 = y^2 + y^2 \Rightarrow x^2 {-} 2y^2 = 1$$

A equação de Pell$x^2 - 2y^2 = 1$, tem solução fundamental $(3{,}2)$ e solução geral.

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

$$e$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right] \quad n \geq 1$$

Logo os triplos $(x_n^2 - 1,\ x_n^2,\ x_n^2 + 1)$ satisfazem a propriedade

$$x_n^2 - 1 = y_n^2{+}y_n^2 \;\; ; \; x_n^2 = x_n^2 + 0^2 \;\; e \;\; x_n^2 = x_n^2 + 1^2 \;\; n \geq 1$$

Generalizando, podemos ter o seguinte problema

07) Mostre que para qualquer inteiro positivo, $m \geq 2$, livre de quadrados existem uma infinidade de $(m+1)$ n–uplas de números inteiros positivos consecutivos, cada um dos quais sendo uma soma de m quadrados.

De fato, a equação de Pell $x^2 - my^2 = 1$ possui soluções $(x_n, y_n)\ ; n \geq 0$
Assim $(x_n^2 - 1, x_n^2\ , x_n^2 + 1, \cdots\cdots\cdots, x_n^2 + m - 1)$
$x_n^2 - 1 = my_n^2\ ;\ x_n^2 = x_n^2 + (m-1)0^2;\ \cdots\cdots, x_n^2 + m - 1 = x_n^2 + (m-1)1^2$

satisfazem a propriedade desejada para todo $n \geq 0$.

08) Encontre os números positivos n tal que $(n+1)^3 - n^3 = y^2\ y \in \mathbb{Z}$, ou seja, a diferença de dois cubos consecutivos é um quadrado perfeito e mostre que $2y - 1$ é um quadrado.

Solução: A equação $(n+1)^3 - n^3 = y^2$ é equivalente a seguinte equação de Pell.

$$(n+1)^3 - n^3 = y^2 \Leftrightarrow (n+1)^2 + n(n+1) + n^2 = y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 3n + 1 = y^2 \Leftrightarrow 12n^2 + 12n + 4 = 4y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12n^2 + 12n + 3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow 3(2n+1)^2 + 1 = (2y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2y)^2 - 3(2n+1)^2 = 1$$

Substituindo $X = 2y$ e $Y = 2n + 1$; vem:

$$X^2 - 3Y^2 = 1$$

Esta equação de Pell tem solução mínima $(2,1)$ portanto tem solução geral $(X_z, Y_z)_{z\geq 0}$, onde

$$X_Z = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \left(2-\sqrt{3}\right)^m\right]$$

$$e$$

$$Y_z = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^m - \left(2-\sqrt{3}\right)^m\right] \quad m \geq 1$$

Sabe-se que

$$2y = X_z = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \left(2-\sqrt{3}\right)^m\right]$$

Daí:

$$4y = \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \left(2-\sqrt{3}\right)^m\right]$$

No entanto, para que y seja um inteiro é necessário que m seja ímpar, ou seja, $m = 2k + 1\ k \in \mathbb{N}$. Então:

$$y = \frac{\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right]}{4}$$

De onde, obtemos:

$$2y - 1 = \frac{2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right]}{4} - 1 =$$

$$= \frac{2(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{2k} + 2(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{2k} - 4}{4} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^{2k} + (1-\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^{2k} - 4}{4} =$$

$$= \left[\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k}{2}\right]^2$$

Já para o valor de n, lembrando que $m = 2k + 1\ k \in \mathbb{N}$, encontramos:

$$2n + 1 = Y_z = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m\right] \Rightarrow$$

$$2n + 1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^{2k+1} - (2-\sqrt{3})^{2k+1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n = \frac{(2+\sqrt{3})^{2k+1} - (2-\sqrt{3})^{2k+1} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^{2k+1} - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{2k+1} - 6}{12}$$

09) Existem infinitos números triangulares cuja soma e a diferença ainda são números triangulares.

Solução: Obtemos então o seguinte sistema

$$\begin{cases} T_n + T_{2m} = T_{3m} \\ T_n - T_{2m} = T_{m-1} \end{cases} \text{com } T_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Somando as equações acima temos:

$$2T_n = T_{3m} + T_{m-1}$$

Logo:

$$2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3m(3m+1)}{2} + \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n(n+1) = 3m(3m+1) + m(m-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 2n = 10m^2 + 2m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20n^2 + 20n = 100m^2 + 20m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20n^2 + 20n + 1 = 100m^2 + 20m + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20n^2 + 20n + 5 - 4 = (10m+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20n^2 + 20n + 5 - 4 = (10m + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(4n^2 + 4n + 1) - 4 = (10m + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(2n + 1)^2 - 4 = (10m + 1)^2$$

Fazendo as seguintes substituições $X = 2n + 1\ e\ Y = 10m + 1$, temos como equação equivalente, a seguinte equação de Pell

$$5X^2 - Y^2 = 4$$

Portanto devemos encontrar infinitas soluções para tal equação, de modo que as congruências $X \equiv 1\ mod 2$ e $Y \equiv 1\ mod 10$ sejam mantidas

Perceba que o par $(1,1)$ é a sua solução mínima e que todos os pares (X_k, Y_k) tais que:

$$X_k = u_k + v_k \text{ e } Y_k = u_k + 5v_k k \geq 1$$

onde (u_k, v_k) é a solução geral para a equação auxiliar de Pell $u^2 - 5v^2 = 1$, também são soluções. Veja;

$$5X_k^2 - Y_k^2 = 5(u_k + v_k)^2 - (u_k + 5v_k)^2 =$$

$$= 5(u_k^2 + 2u_k v_k + v_k^2) - (u_k^2 + 10u_k v_k + 25v_k^2) =$$

$$= (4u_k^2 - 20v_k^2) = 4(u_k^2 - 5v_k^2) = 4 \cdot 1 = 4$$

para todo $k \geq 0$.

Assim, sendo $(9,4)$ a solução mínima da equação $u^2 - 5v^2 = 1$, obtemos

$$u_k = \frac{\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^k + \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^k}{2}$$

e

$$v_k = \frac{\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^k - \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^k}{2\sqrt{5}}, \qquad k > 0$$

No entanto para que a solução satisfaça nosso problema inicial é necessário que $u_k \equiv 1\ mod 10$ e v_k seja par, uma vez que precisamos de

$X \equiv 1\ mod 2$ e $Y \equiv 1\ mod 10$.

Observe que:

$$k = 1 \Longrightarrow u_1 = 9\,, v_1 = 4$$

$$k = 2 \Longrightarrow u_2 = 161\,, v_2 = 72$$

$$k = 3 \Longrightarrow u_3 = 2889\,, v_3 = 1292$$

$$k = 4 \Longrightarrow u_4 = 51841\,, v_4 = 23184$$

ou seja, cada v_k é par e temos $u_k \equiv 1 mod 10$ se k for par,

de onde vem:

$$n = \frac{u_k + v_k - 1}{2}$$

e

$$m = \frac{u_k + 5v_k - 1}{10} com\ k\ par$$

soluções do sistema em questão.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, vimos o porquê do interesse de grandes matemáticos durante os últimos 2000 anos, no que diz respeito a frações contínuas e a equação de Pell.

As frações contínuas têm uma vasta aplicação em diferentes ramos científicos. Também ficaram perceptíveis que estas sempre nos fornecem algoritmos confiáveis e sempre com o intuito de fazer aproximações de números irracionais por meio de números racionais.

Além disso, mostra-se como seria de suma importância a discussão deste assunto no ensino básico. A equação de Pell, também tem um papel fundamental em soluções de problemas matemáticos que tem como equivalência tal equação diofantina quadrática.

E o mais interessante de se ver é que existe uma conexão em tais assuntos que a princípio parecem ser tão distantes. Espero que este trabalho sirva de estímulo para professores e alunos de matemática, resgatando o interesse que grandes matemáticos tiveram por Frações Contínuas e Equação de Pell.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, TITU; ANDRICA, Dorion; CUCUREZEANU, Ion. **An Introduction to Diophantine Equations.** [S.l.]: Birkhäuser, 2008.

ÀVILA, G. **Introdução a Análise Matemática.** [S.l.]: Edgard Blücher LTDA, 2010.

AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. **Geometria Plana.** [S.l.:s.n.], 2001.

BESKIN, N. **Frações Contínuas:** Iniciação à Matemática: [S.l.]: Mir, 2006.

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar.** [S.l.]: Teoria dos Numeros, 2013.

DELFIM, Dias Bonfim, NOVAES, Gilmar Pires. **Frações Contínuas, Determinantes e Equações Diofantinas Lineares**. [S.l.,]: Ciências e Natura, 2015.

LANDAU, E. **Teoria Elementar dos Números.** [S.l.]: Ciência Moderna, 2002.

MARTINEZ, Fabio Brochero et al. **Teoria dos Números:** um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, [S.l.]: IMPA, 2007.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática na escola do 2° grau.** [S.l.]: Atual, 1996.

OLDS, C.D. **Continued Fractions:** New Mathematical Library. [S.l.]: Random House, 2005.

ROCKETT, A. M.; SZÜSZ, P. **Continued Fractions.** [S.l.]: World Scientific, 1992.

SANTOS, J.P. de O. **Introdução à Teoria dos Números.** [S.l.]: IMPAR, 2015.

SILVA, Sebastião Alves da. **Introdução às Frações Contínuas.** 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.

SOUZA, Romario Sidrone de. **Equações Diofantinas Lineares, Quadráticas e Aplicações.** 2010. 156f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

USANDO Frações Contínuas em Eletricidade. **Física na Escola,** v. 7,n 1, 2006.