

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Antonio Donato Zucchi Neto

Matemática Aplicada à Topografia

Vitória ES

16 de Novembro de 2017

Antonio Donato Zucchi Neto

Matemática Aplicada à Topografia

"Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação PROFMAT do departamento de matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer

Vitória ES

16 de Novembro de 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Matemática Aplicada à Topografia"

Antonio Donato Zucchi Neto

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 16/11/2017 por:

Prof. Dr. Valmeir Antonio dos Santos Bayer
Orientador - UFES

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
Examinador Interno - UFES

Prof. Dr. Silas Fantin
Examinador Externo – UNIRIO/RJ

Dedicatória

"Dedico este trabalho as pessoas que tem grande importância na minha vida, a minha mãe Dona Dilma, minha sogra Dona Geni, minha esposa Rosiane e minha filha Sofia."

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e tranquilidade para enfrentar os momentos mais difíceis da trajetória.

Aos meus pais, irmãos e amigos, que mesmo de longe torceram para que eu atingisse os meus objetivos.

Aos professores do PROFMAT-UFES, por sua dedicação e atenção com todos, em destaque ao meu orientador Professor Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer.

Aos meus amigos do mestrado, com os quais tive a honra de compartilhar momentos inesquecíveis durante o curso, em particular ao amigo Arthur, que sempre estava disposto a ajudar a todos.

E em especial as duas pessoas que são o principal motivo por eu ter aceito esse desafio, minha esposa Rose e minha filha Sofia, que tiveram que lidar com a minha ausência e com os momentos de maior tensão que tive ao longo de todo curso.

Resumo

Este trabalho apresenta a relação entre conhecimentos básicos de Geometria e Trigonometria com a Topografia, com ênfase em Taqueometria. O trabalho é constituído de um breve histórico de alguns conceitos topográficos, e de fundamentação teórica da matemática necessária para as demonstrações de fórmulas usadas em cálculos topográficos. Exemplos de aplicação de trigonometria e geometria na obtenção de distâncias inacessíveis e os procedimentos para efetuar os cálculos de um levantamento planimétrico por poligonação. É apresentada sugestão de aulas envolvendo topografia com o objetivo de melhorar o desenvolver dos conteúdos matemáticos de forma prática, com isso despertar o interesse dos alunos.

Palavras-chave: Geometria, Trigonometria, Topografia, Taqueometria, Levantamento Planimétrico.

Abstract

This work presents the relation between basic knowledge of geometry and trigonometry with topography, with emphasis on tachometry. The work consists of a brief history and some topography concepts, of the theoretical mathematical foundation necessary for the demonstrations of formulas used in topographical calculations, examples of applying trigonometry and geometry in obtaining inaccessible distances and the procedures to perform the calculations of a survey planimetric by polygon. It is presented a suggestion of classes involving topography in order to better develop mathematical contents in a practical way and with that to asome the interest of the students.

Keywords: Geometry, Trigonometry, Topography, Tachometry, Survey Planimetric.

Lista de Figuras

Figura 1 - Erro de esfericidade	23
figura 2 - Ângulo horizontal	27
Figura 3 - Ângulos Verticais	28
Figura 4 - Azimutes	28
Figura 5 - Nortes verdadeiro e Magnético	29
Figura 6 - Rumos	30
Figura 7 - Deflexão	31
Figura 8 - Poligonal com ângulos externos	31
Figura 9 - Poligonal com ângulos internos	32
Figura 10 - Deflexões e ângulos externos da matemática	32
Figura 11 - Ângulo de inclinação	33
Figura 12 - Ângulos zênital e nadiral	33
Figura 13 - Levantamento por Triangulação	34
Figura 14 - Levantamento por Ordenadas	35
Figura 15 - Levantamento por Irradiação	35
Figura 16 - Levantamento por Interseção	36
Figura 17 - Levantamento por Poligonação ou Caminhamento	36
Figura 18 - Ângulos	38
Figura 19 - Circunferência	40
Figura 20 - Teorema de Pitágoras	42
Figura 21 - Demonstração do Teorema de Pitágoras	43

Figura 22 - Caso de congruência LAL	44
Figura 23 - Caso de congruência ALA	45
Figura 24 - Caso de congruência LLL	45
Figura 25 - Caso de congruência LAAo	45
Figura 26 - Caso de congruência de triângulos retângulos	46
Figura 27 - Teorema de Thales	46
Figura 28 - Caso de semelhança AA	47
Figura 29 - Demonstração do caso de semelhança AA	48
Figura 30 - Caso de semelhança LAL	48
Figura 31 - Demonstração do caso de semelhança LAL	49
Figura 32 - Caso de semelhança LLL	50
Figura 33 - Demonstração do caso de semelhança LLL (1)	51
Figura 34 - Demonstração do caso de semelhança LLL (2)	51
Figura 35 - Razões Trigonométricas	52
Figura 36 - Lei dos Senos	53
Figura 37 - Demonstração da Lei dos Senos (1)	54
Figura 38 - Demonstração da Lei dos Senos (2)	55
Figura 39 - Demonstração da Lei dos Cossenos (1)	56
Figura 40 - Demonstração da Lei dos Cossenos (2)	57
Figura 41 - Lei dos Cossenos	58
Figura 42 - Visada horizontal	60
Figura 43 - Visada inclinada	61
Figura 44 - Ângulo de incidência	62

Figura 45 - Mira fictícia	63
Figura 46 - Uma visada horizontal e uma inclinada	66
Figura 47 - Duas visadas inclinadas	67
Figura 48 - Polígono de três lados	68
Figura 49 - Polígono de quatro lados	69
Figura 50 - Polígono de cinco lados	69
Figura 51 - Polígono de seis lados	70
Figura 52 - Polígono de sete lados	70
Figura 53 - Polígono de n lados	71
Figura 54 - Poligonal horária de n lados	72
Figura 55 - Cálculo de deflexão à direita	73
Figura 56 - Cálculo de azimute na poligonal horária	73
Figura 57 - Poligonal anti-horária de n lados	74
Figura 58 - Cálculo de deflexão à esquerda	75
Figura 59 - Cálculo de azimute na poligonal anti-horária	76
Figura 60 - Azimute numa poligonal	77
Figura 61 - Azimute do primeiro quadrante	78
Figura 62 - Azimute do segundo quadrante	79
Figura 63 - Erro de fechamento linear absoluto	81
Figura 64 - Nivelamento geométrico	83
Figura 65 - Nivelamento Trigonométrico	84
Figura 66 - Distância vertical	85
Figura 67 - Altura do Pão de Açúcar	87

Figura 68 - Distância a um ponto inacessível	88
Figura 69 - Cálculo da distância entre pontos inacessíveis	89
Figura 70 - Cálculo do raio da Terra	91
Figura 71 - Cálculo do raio da Terra por Eratóstenes	92
Figura 72 - Cálculo da altura do cume de uma montanha	93
Figura 73 - Cálculo da distância entre duas ilhas	94
Figura 74 - Cálculo da largura de um rio	95
Figura 75 - Cálculo da altura de uma árvore	96

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Erro de Esfericidade	24
--	----

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	11
INTRODUÇÃO	15
OBJETIVOS	18
1 HISTÓRIA DA TOPOGRAFIA	19
2 INTRODUÇÃO À TOPOGRAFIA	22
3 PLANIMETRIA E ALTIMETRIA	26
3.1 MEDIÇÃO DE DISTÂNCIA	26
3.2 ÂNGULOS TOPOGRÁFICOS	27
3.2.1 Ângulos Horizontal e Vertical	27
3.2.2 Azimute	28
3.2.3 Rumo	30
3.2.4 Deflexão	30
3.2.5 Ângulos Internos e Externos	31
3.2.6 Ângulo de Inclinação	32
3.2.7 Ângulos Zenital e Nadiral	33
3.3 LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS PLANIMÉTRICOS	34
3.3.1 Levantamento por Triangulação	34
3.3.2 Levantamento por Ordenadas	34
3.3.3 Levantamento por Irradiação	35
3.3.4 Levantamento por Interseção	35
3.3.5 Levantamento por Poligonação ou Caminhamento	36
3.4 NIVELAMENTO	37

4	REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO	38
4.1	ÂNGULOS	38
4.1.1	Definição	38
4.1.2	Unidades de Medida de Ângulos	38
4.1.3	Relação Entre Grado, Radianos e Graus	40
4.2	TEOREMA DE PITÁGORAS	42
4.3	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	44
4.3.1	1º CASO: Axioma LAL (Lado-Ângulo-Lado)	44
4.3.2	2º CASO: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)	44
4.3.3	3º CASO: LLL (Lado-Lado-Lado)	45
4.3.4	4º CASO: LAAo (Lado-Ângulo-Ângulo Oposto)	45
4.3.5	5º CASO: Congruência de Triângulos Retângulos	46
4.4	TEOREMA DE THALES	46
4.5	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	47
4.5.1	1º CASO: AA (Ângulo-Ângulo)	47
4.5.2	2º CASO: LAL (Lado-Ângulo-Lado)	48
4.5.3	3º CASO: LLL (Lado-Lado-Lado)	50
4.6	RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS	52
4.7	LEI DOS SENOS	53
4.8	LEI DOS COSSENOS	55
5	MATEMÁTICA E TOPOGRAFIA	59
5.1	TAQUEOMETRIA	59
5.1.1	Visada Horizontal	59
5.1.2	Visada Inclinada	61
5.2	DISTÂNCIA INDIRETA	65
5.2.1	Uma Visada Horizontal e Uma Inclinada	65
5.2.2	Duas Visadas Inclinadas	66
5.3	VERIFICAÇÃO DO ERRO DE FECHAMENTO ANGULAR	68
5.4	CÁLCULO DOS AZIMUTES	72
5.5	CÁLCULO DAS PROJEÇÕES DAS ESTAÇÕES	76
5.5.1	Verificação e Distribuição do Erro de Fechamento Linear	80
5.6	CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS VERTICAIS	82

5.6.1	Nivelamento Geométrico	82
5.6.2	Nivelamento Trigonométrico	83
6	EXEMPLOS MATEMÁTICOS	
	ENVOLVENDO TOPOGRAFIA	87
7	PROJETO DIDÁTICO:	
	AULAS PRÁTICAS USANDO TOPOGRAFIA	98
	REFERÊNCIAS	101

INTRODUÇÃO

A ideia de fazer o trabalho final de curso relacionando Matemática e Topografia surgiu a princípio do fato de ter feito no ensino médio o curso de Agrimensura na ETFES (atual IFES), posteriormente, o curso superior de Licenciatura em Matemática na UFES. Portanto, parece-me natural escrever sobre assuntos com os quais já havia estudado e trabalhado.

Uma outra motivação seria dar resposta a perguntas que os professores de Matemática ouvem constantemente de colegas de profissão e, principalmente, de alunos: Porque nós estudamos isto? Para que serve a Matemática?

Encontrar um tema em que os conteúdos de Matemática são largamente utilizados é a melhor maneira de responder a esses questionamentos, e por meio dele motivar os alunos contextualizando o conteúdo estudado com a aplicação prática.

A presente dissertação foi organizada de maneira a proporcionar ao professor que queira realizar aulas práticas envolvendo topografia, utilizá-la como texto de referência. Os assuntos estão distribuídos por sete capítulos seguindo uma sequência lógica.

No capítulo 1, temos a história da topografia desde a sua possível origem, quando o homem foi se fixando em determinadas regiões, com isso foi surgindo a necessidade de fazer a demarcação de terras, construir casas e monumentos, confeccionar mapas entre outros, até a sua evolução a partir do avanço científico e tecnológico.

No capítulo 2, é feita uma introdução a topografia, mostrando a importância do seu uso como atividade meio, principalmente na construção civil. O limite da região em que pode ser utilizada levando-se em conta o erro de esfericidade, decorrente dos modelos simplificados da superfície terrestre e sua divisão clássica para fins didáticos.

No capítulo 3, são abordados tópicos de topografia necessários para o desenvolvimento do presente trabalho dentro dos temas Planimetria e Altimetria, tais como; classificação e

obtenção de distâncias, tipos de ângulos, levantamentos topográficos e métodos de nivelamentos. É importante salientar que outros conteúdos de topografia não foram abordados, pois não faziam parte dos objetivos da dissertação.

No capítulo 4, são mostrados os conteúdos matemáticos que são as referências teóricas para as demonstrações e cálculos que são feitos nos capítulos seguintes, dentre os quais temos; Definição e Unidades de medidas de ângulos com suas relações, Teorema de Pitágoras, Congruência de Triângulos, Teorema de Thales, Semelhança de Triângulos, Razões Trigonométricas, Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

No capítulo 5, são demonstradas as fórmulas utilizadas em topografia para o cálculo de distâncias horizontais e verticais, azimutes, projeções das estações, erros de fechamento angular e linear e suas distribuições quando o erro estiver dentro do limite. As fórmulas mostradas são usadas em Taqueometria nos teodolitos equipados com fios estadimétricos.

No capítulo 6, são utilizados exemplos que mostram como calcular distâncias inacessíveis ou de difícil acesso com dados que podem ser obtidos através de levantamentos topográficos. Esses exemplos foram retirados de livros didáticos e servem como base para aulas teóricas e práticas.

No capítulo 7, é proposto que a topografia seja usada como tema para aulas com objetivo de complementar os estudos de trigonometria e geometria com aulas práticas, oportunizando aos alunos entrarem em contato com situações aplicáveis a esses conteúdos. Gerando assim, um maior interesse e envolvimento por parte deles. Essas aulas práticas devem ser intercaladas com as aulas teóricas proporcionando um melhor entendimento dos assuntos.

Nesta década, no Brasil foram feitas grandes obras para sediar eventos esportivos de grande porte, como a Copa do Mundo de Futebol e as Olimpíadas. Para tais obras de infraestrutura, a necessidade de trabalhos topográficos como atividade meio da Engenharia Civil aumentou consideravelmente.

Utilizar a Topografia como maneira de ensinar Matemática, além de contextualizar os conteúdos estudados, pode despertar nos alunos o interesse de trabalhar com atividades

ligadas a Topografia e a Engenharia Civil.

OBJETIVOS

A trigonometria tem papel fundamental em situações que envolvem a determinação de distâncias de difícil acesso ou inacessíveis. "Os livros didáticos para o ensino médio dedicam muitas páginas ao ensino da Trigonometria. Entretanto, não fica claro nem para o aluno, nem para o professor, para que serve este abundante material"[9]. Em livros do ensino fundamental são apresentados alguns exercícios envolvendo cálculos de distâncias, mas que deixam muito a desejar sobre a gama de possibilidades de aplicação da Trigonometria.

No intuito de contribuir com essa necessidade, o presente trabalho tem como objetivo principal; propor o estudo da Topografia aliada a Trigonometria e Geometria no cálculo de distâncias inacessíveis ou de difícil acesso. Associando assim, a teoria com as aplicações, por meio de aulas expositivas e práticas. Dessa forma, despertando o interesse dos alunos e promovendo uma aprendizagem contextualizada.

Para que o objetivo principal seja atingido, alguns objetivos específicos devem ser alcançados durante o trabalho com os alunos, tais como:

- Apresentar conceitos básicos de Topografia;
- Aprender a manusear os instrumentos de medição de ângulos e distâncias;
- Realizar medições necessárias para o cálculo de distâncias;
- Fazer os cálculos das distâncias utilizando fórmulas topográficas, geometria e trigonometria;
- Realizar o levantamento topográfico de uma área;
- Fazer a representação gráfica da área levantada.

1 HISTÓRIA DA TOPOGRAFIA

Na produção desse capítulo foram usados como referência textos contidos em, [2], [4], [5] [7], [8], [14], [15], [18].

A origem da topografia não tem como ser rigorosamente determinada, acredita-se que seu uso foi acontecendo de acordo com as necessidades que o homem passou a ter a partir do momento que foi abandonando a vida nômade e se fixando em determinadas regiões.

Toda a infraestrutura necessária para a fixação demandava que fossem feitas medidas e que se determinasse o espaço físico a ser utilizado nas atividades diárias. Construções e demarcações de terras foram realizadas utilizando-se processos rudimentares de topografia, baseados em conhecimentos básicos de geometria.

Tanto a palavra topografia, que significa descrição de um lugar, como geometria, que significa medida da Terra, tem origem grega e estão relacionadas a medições de distâncias, cálculos de áreas e descrição e determinação de certas regiões. Provavelmente a construção de monumentos e a demarcação de terras estejam relacionadas a alguns dos primeiros cálculos utilizados em geometria.

São encontradas diversas referências sobre o uso da topografia em textos antigos. No Velho Testamento existem diversas citações sobre o direito de propriedade, também foram descobertos mapas de origem babilônica com cerca de 4500 anos.

A referência mais conhecida com relação ao surgimento da geometria e topografia está diretamente ligada às inundações das margens do rio Nilo e a posterior demarcação das terras após as enchentes. Essa informação é encontrada nos escritos do século V a.E.C.¹ de autoria do historiador grego Heródoto:

Sesóstris ... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes ... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem ... o rei mandava pessoas para examinar e determinar por medida a extensão exata da perda ... Por esse costume, eu

¹Atualmente, tem-se usado "antes da Era Comum" ao invés de "antes de Cristo" e "Era Comum" ao invés de "depois de Cristo", para evitar conotações religiosas.

creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia. [2]

As pessoas responsáveis pelas medições eram conhecidas como “esticadores de cordas”, pois usavam cordas para efetua-las, técnica que também era usada nas construções.

Apesar de serem os mais populares, os escritos de Heródoto, não são as informações mais antigas sobre o uso da geometria e topografia. Foram encontrados documentos que datam de aproximadamente 3100 a.E.C., mostrando que os egípcios e babilônios já efetuavam medições de terrenos e construções utilizando técnicas topográficas e geométricas.

Processos e métodos topográficos rudimentares foram utilizados por outros povos da antiguidade, tais como: os Chineses, os Árabes e os Romanos, para fins cadastrais, nas construções, na confecção de plantas e mapas para uso geográfico e militar. No século VI a.E.C., Anaximandro de Mileto foi responsável pela confecção do primeiro mapa mundi conhecido.

Os Egípcios e os Romanos desempenharam papel relevante na área de topografia. Os primeiros com seus sistemas de irrigação e construção de prédios públicos e pirâmides, os últimos com seus aquedutos e estradas muitos dos quais perduram até os dias atuais. O desenvolvimento da topografia e de seus aparelhos, foi muito pequeno durante o período que vai da época dos Romanos até a idade moderna. Esse período coincide com a Idade Média, também conhecida como a idade das trevas. Nessa época, os estudiosos europeus traduziram diversos trabalhos gregos e árabes nas áreas de geometria e trigonometria, porém pouco foi acrescentado de novo.

No ano de 1533, foi publicado o primeiro livro inteiramente dedicado à trigonometria, de autoria do matemático Johannes Müller Von Königsberg. No mesmo ano o matemático Gemma Frisius sugeriu pela primeira vez na Europa a utilização da triangulação para mapeamentos. O fato de que podemos reduzir qualquer polígono a uma certa quantidade de triângulos, torna possível trabalharmos com qualquer região que seja limitada com linhas retas. A associação desses dois acontecimentos propiciou a confecção de mapas mais precisos. É importante ressaltar que existem indícios de que versões antigas de triangulação foram usadas pelos romanos e egípcios.

Diversos aparelhos foram usados na medição de ângulos, os egípcios utilizavam a Groma, os romanos a Dioptra e na Grécia já existia uma descrição de um teodolito primitivo feita por Heron de Alexandria datada do século I E.C.. Em 1571, Leonard Digges construiu um aparelho que foi batizado de “Theodolitus”, mas faltava-lhe um telescópio. Aparelhos similares foram largamente usados a partir de então nos trabalhos topográficos.

No período que vai do século XVII ao século XIX houve avanços significativos em diversas áreas das ciências. Na Matemática e na Física as descobertas propiciaram melhorias nas técnicas utilizadas na topografia. Os aparelhos usados para medir ângulos tiveram grande desenvolvimento graças aos estudos realizados no campo da ótica e com a invenção do motor de divisão mecânico por Jesse Ramsden. O teodolito “moderno” foi inventado em 1835, mas há discordância quanto ao criador, alguns textos afirmam que foi Ignácio Porro, outros atribuem a criação a Jhonathan Sisson. O fato é que com o novo aparelho tornou-se mais rápido e mais preciso medir ângulos nos trabalhos topográficos.

Alguns melhoramentos foram implementados nos teodolitos com o passar do tempo. Em 1838, foi feita a integração de todos os dispositivos desenvolvidos para os teodolitos pelo inglês John Macquorn Rankine. No século XX, o desenvolvimento da topografia ficou cada vez mais atrelada ao avanço tecnológico dos aparelhos utilizados nos levantamentos de campo.

Nos anos setenta foram produzidos os primeiros aparelhos de medição eletrônica de distâncias, que funcionavam através da emissão de um feixe de luz infravermelha que ao refletir em um prisma retorna ao aparelho obtendo-se assim, a distância desejada. Com a fabricação de componentes eletrônicos cada vez menores, a partir da metade da década de oitenta, foram construídos teodolitos que receberam o nome de Estações Totais. Esses aparelhos, além de proporcionar maior exatidão nas medidas obtidas, podem fazer cálculos e transmitir as informações diretamente para computadores localizados nos escritórios das empresas.

2 INTRODUÇÃO À TOPOGRAFIA

Na produção desse capítulo foram usados como referência textos contidos em, [4], [5] [7], [18].

Qual a importância da Topografia na atualidade? Podemos afirmar que grande parte das atividades do setor agrícola, industrial e de infra-estrutura das cidades dependem da realização de trabalhos topográficos. A Topografia está inserida nesses setores como atividade meio, nas etapas de planejamento e projeto, na execução e acompanhamento, no monitoramento após a execução.

Nas diversas áreas da Engenharia a topografia está presente, com destaque na Engenharia Civil, na qual desempenha papel fundamental em todas as etapas de um empreendimento de construção civil. Podemos citar como exemplos as construções de estradas, pontes, túneis, barragens, grandes indústrias, linhas de transmissão de força, redes de saneamento, prédios residenciais entre outros.

A Topografia tem como objetivo principal coletar dados de regiões por meio de levantamentos topográficos, de posse dessas informações, confeccionar plantas que representam suas características, tais como relevo, limites de propriedades, construções que estão em seu interior. Segundo Espartel: "A Topografia tem por finalidade determinar o contorno, dimensão e posição relativa de uma porção limitada da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre." [7]

Como a superfície terrestre é muito irregular, são usados para sua representação modelos simplificados próximos da sua forma real, facilitando com isso os cálculos em diversos setores da atividade humana. Existem modelos que são mais adequados a cada tipo de atividade, sendo que na atualidade são usados os seguintes:

1. Modelo Plano: considera plana a região trabalhada. É a representação usada na Topografia.
2. Modelo Esférico: a Terra é representada como uma esfera e pontos na sua superfície são localizados através da sua latitude e longitude.

3. Modelo Elipsoidal: utiliza um elipsóide de revolução para representar a Terra. É o modelo usado em Geodésia.
4. Modelo Geoidal: é o prolongamento do nível médio dos mares em repouso através dos continentes. É o mais próximo da forma real da Terra.

Em topografia trabalha-se com regiões conhecidas como plano topográfico, que é um plano horizontal finito tangente à superfície da esfera terrestre com dimensões limitadas. Devido à curvatura da superfície terrestre, ao trocar-se o arco do ângulo por sua tangente comete-se um erro denominado, erro de esfericidade.

Supondo que a Terra é uma esfera (modelo esférico), vamos analisar o erro de esfericidade cometido em um levantamento topográfico feito a partir de um ponto A . Sejam um plano topográfico α tangente ao ponto A , o triângulo retângulo ABO , o ângulo Θ formado entre os raios AO e $B'O$ da Terra, B' um ponto da superfície da Terra pertencente ao lado BO do triângulo ABO , S o segmento AB e S' o arco AB' , conforme a figura 1.

Temos que o erro de esfericidade e é:

$$e = S - S' \quad (1)$$

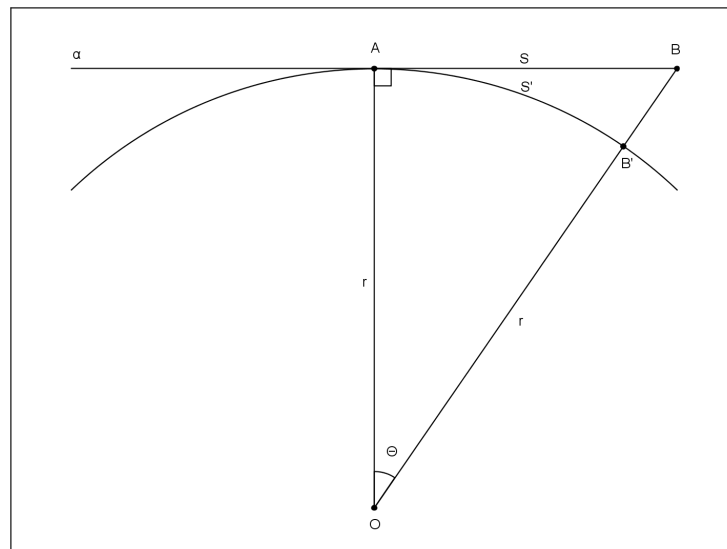


Figura 1: Erro de Esfericidade

no triângulo ABO obtemos,

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{S}{r} \Rightarrow S = r \operatorname{tg} \Theta \quad (2)$$

Calculando o comprimento de S' :

medida do arco (radianos)	comprimento do arco
2π	$2\pi r$
Θ	S'

desse modo,

$$\frac{2\pi}{\Theta} = \frac{2\pi r}{S'} \Rightarrow S' 2\pi = 2\pi r \Theta \Rightarrow S' = \frac{2\pi r \Theta}{2\pi} \Rightarrow S' = r \Theta \quad (3)$$

substituindo (2) e (3) em (1) obtemos,

$$e = S - S' \Rightarrow e = r \operatorname{tg} \Theta - r \Theta \Rightarrow e = r(\operatorname{tg} \Theta - \Theta)$$

A adoção de um Plano Topográfico como base para os levantamentos efetuados em campo, tendo como consequência o erro de esfericidade, faz-se necessário limitar a área em que os trabalhos topográficos serão realizados. Usando como base o raio médio da Terra de 6.371.000 m para calcular o erro, obtemos os valores apresentados na tabela 1.

Θ	S (m)	S' (m)	e (m)
10'	18.532,54	18.532,49	0,05
30'	55.598,87	55.597,46	1,41
1°	111.206,22	111.194,93	11,29
1,5°	166.830,51	166.792,39	38,12

Tabela 1: Erro de Esfericidade

Podemos concluir que para um arco próximo de 19 km a curvatura da Terra gera um erro de aproximadamente 5,2 cm (0,052 m), o que em termos topográficos é considerado desprezível com relação ao arco em questão. Em termos práticos recomenda-se que se trabalhe com um raio de 25 a 30 km nos levantamentos planimétricos, apesar de alguns autores recomendarem um limite de 50 km para o raio.

Quando a região a ser levantada tiver um raio superior aos limites aconselhados, trabalhamos com a Geodésia, que é uma ciência que permite determinar com precisão as coordenadas de pontos na superfície terrestre levando em consideração a curvatura da Terra. A partir desses pontos são formadas malhas triangulares que servirão de base para os levantamentos topográficos.

A Topografia, como qualquer outra ciência, também é dividida em tópicos de modo a facilitar os estudos e o desenvolvimento de cada um deles. Essa divisão varia de acordo com os autores, sofrendo influências do desenvolvimento das técnicas e instrumentos utilizados para a medição de ângulos e distâncias. A Topografia é dividida classicamente em:

1. Topologia: estuda as formas de relevo de uma região, a sua formação e modificações através dos tempos.
2. Topometria: estuda as diferentes maneiras de obter-se as medidas de ângulos e de distâncias horizontais e verticais. É subdividida em Planimetria e Altimetria.

3 PLANIMETRIA E ALTIMETRIA

Na produção desse capítulo foram usados como referência textos contidos em, [4], [5], [7], [18].

Para realizar os trabalhos Topográficos, as distâncias e os ângulos são elementos fundamentais e devem ser levantados para que se possa caracterizar uma determinada região e assim representá-la por meio de plantas e mapas.

A Planimetria tem por objetivo representar uma área com todos os detalhes que estão dentro dos seus limites como, rios, construções, estradas e qualquer outro acidente natural sem levar em consideração o seu relevo. A Altimetria tem por finalidade a representação do relevo de determinada região através do levantamento das distâncias verticais tais como, diferença de nível, cotas e altitudes. Essas informações são obtidas a partir de uma operação chamada nivelamento.

3.1 MEDIÇÃO DE DISTÂNCIA

Podemos dividir as distâncias em:

1. Distância Horizontal (DH): é a medida entre dois pontos de plano horizontal perpendicular ao eixo zênite-nadir.
2. Distância Vertical (DV): é a medida perpendicularmente em relação ao plano horizontal.
3. Distância Inclinada (DI): é a medida em linha reta entre dois pontos quando as distâncias horizontal e vertical são diferentes de zero.
4. Distância Natural: é a medida entre dois pontos seguindo o contorno da superfície do terreno.

As medidas das distâncias em Topografia podem ser obtidas através de:

1. Medição Direta: quando o instrumento usado para medir a distância é aplicado diretamente sobre o terreno percorrendo todo o alinhamento. O instrumento mais comum utilizado nesse método é a trena, que é uma fita graduada em centímetros

enrolada no interior de uma caixa circular através de uma manivela, podendo ser de lona, aço ou fibra; seus comprimentos variam de 10, 15, 20, 30 até 50 m.[4]

2. Medição Indireta: quando nos levantamentos são medidas grandezas que se relacionam matematicamente com a distância que se pretende medir. Nesse caso são realizados cálculos para se obter as distâncias que não puderam ser medidas diretamente.
3. Medição Eletrônica: quando são utilizados aparelhos que através do tempo que a onda eletromagnética gasta para percorrer a distância , de ida e volta, entre o aparelho e o prisma de reflexão. Essas distâncias também podem ser obtidas de dados emitidos por satélites.

3.2 ÂNGULOS TOPOGRÁFICOS

Em vários momentos do nosso dia a dia nos deparamos com situações nas quais a ideia de ângulo está presente, no giro dos ponteiros do relógio, na abertura de uma porta, na inclinação de uma rampa de acesso, numa direção a ser seguida, etc. Nos trabalhos realizados em topografia os ângulos são elementos fundamentais. Veremos agora alguns tipos de ângulos que fazem parte dos levantamentos topográficos.

3.2.1 Ângulos Horizontal e Vertical

Ângulo Horizontal é aquele formado entre as projeções de dois alinhamentos no Plano Topográfico (horizontal).

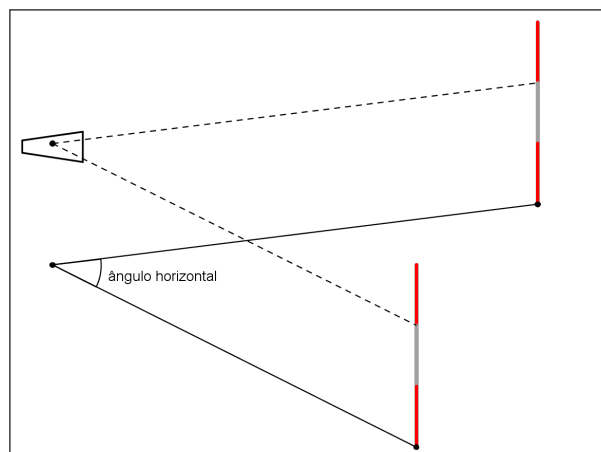


Figura 2: Ângulo horizontal

Ângulo Vertical é o ângulo medido no plano vertical que contém o ponto onde está instalado o teodolito e o ponto visado, a partir da Linha do Horizonte (LH), do Zênite² ou do Nadir³. Na figura abaixo α , β e γ são ângulos verticais medidos respectivamente a partir do Zênite, da Linha do Horizonte e do Nadir.

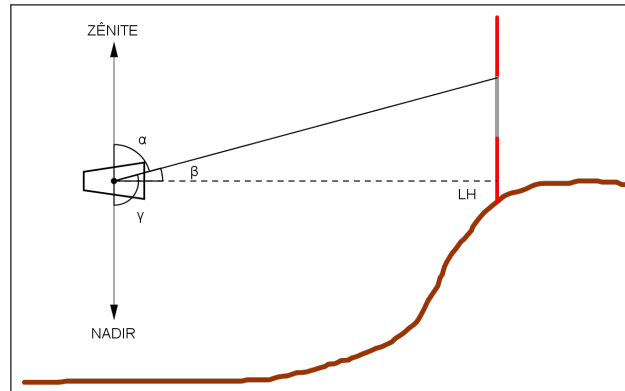


Figura 3: Ângulos verticais

3.2.2 Azimute

É o ângulo horizontal formado entre a direção Norte/Sul e a direção considerada, a partir do Norte (verdadeiro ou magnético), no sentido horário e varia de 0° e 360° .

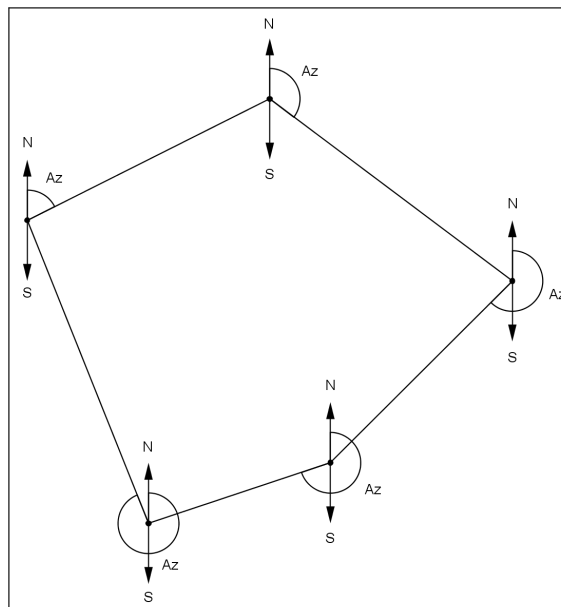


Figura 4: Azimutes

²Zênite: é o ponto da esfera celeste, imediatamente acima do observador, perpendicular ao horizonte do mesmo

³Nadir: é o ponto diametralmente oposto ao Zênite

O Norte Verdadeiro ou Geográfico aponta sempre para o Polo Norte, portanto em qualquer ponto da superfície terrestre é sempre o mesmo, ao contrário do Norte Magnético que além de depender do local onde nos encontramos, varia com o passar dos anos. É importante salientar que quando utilizamos uma bússola, a agulha imantada aponta sempre para o Norte Magnético.

O ângulo formado entre o Norte Verdadeiro e o Norte Magnético é chamado de Declinação Magnética (D), e varia de acordo com o local da superfície terrestre em que estamos. Podemos obter o valor atualizado da Declinação Magnética no site do National Geophysical Data Center.

Ao realizarmos um levantamento topográfico, medimos com o teodolito o Azimute Magnético, usando o valor da Declinação Magnética local, para calcularmos o Azimute Verdadeiro.

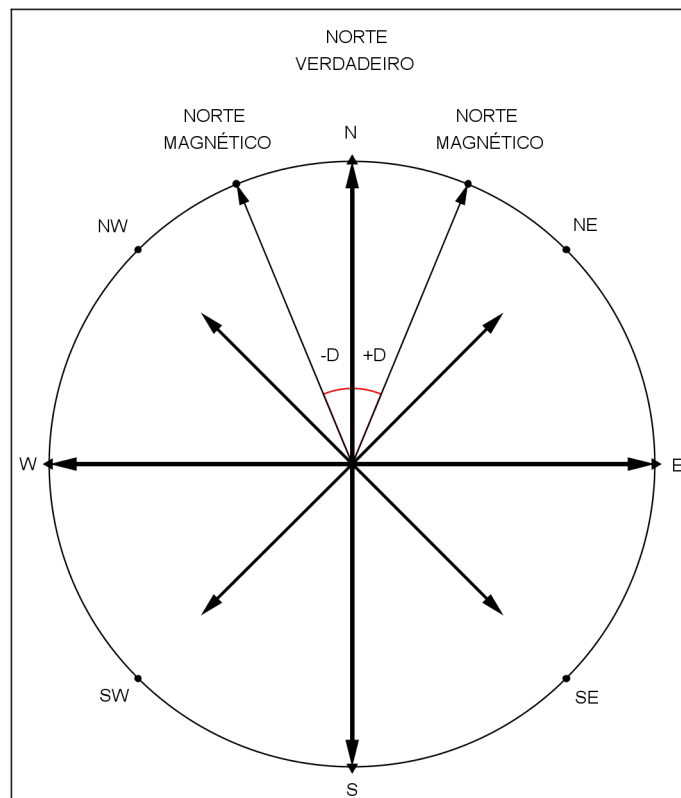


Figura 5: Nortes verdadeiro e magnético

3.2.3 Rumor

É o menor ângulo horizontal formado entre a direção Norte/Sul e a direção considerada. Pode ser medido a partir do Norte ou Sul no sentido horário ou anti-horário e varia de 0° a 90° . Além do valor numérico é acrescentada uma sigla (*NE*, *SE*, *SW*, *NW*), referente ao quadrante onde está localizado o alinhamento.

Da mesma maneira que o Azimute, o Rumor também é medido em relação ao Norte Magnético e a partir da medida da Declinação Magnética local é calculado o Rumor relativo ao Norte Verdadeiro ou Geográfico.

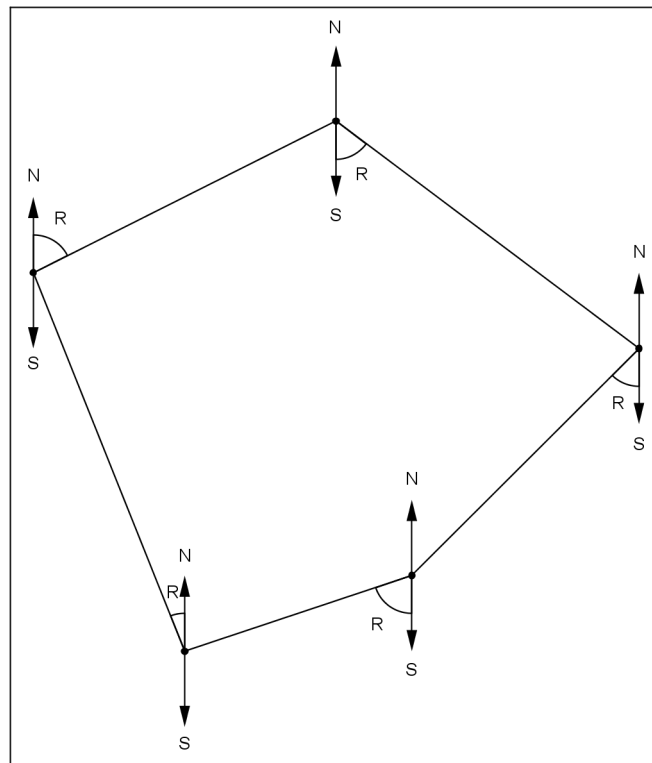


Figura 6: Rumos

3.2.4 Deflexão

É o ângulo formado entre o prolongamento do alinhamento anterior com o alinhamento seguinte. Com relação ao alinhamento anterior a deflexão pode estar à direita ou à esquerda e varia de 0° a 180° .

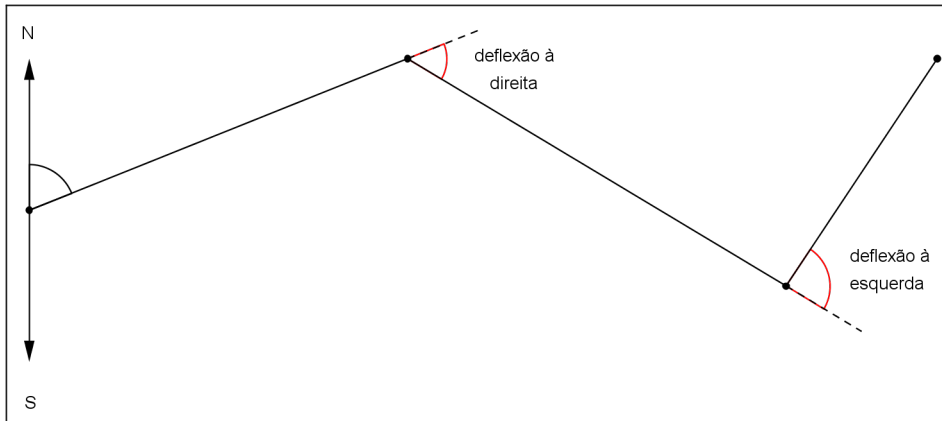


Figura 7: Deflexão

3.2.5 Ângulos Internos e Externos

Nos trabalhos topográficos de campo um dos métodos mais usados em Planimetria é Poligonação. Consiste no levantamento de uma poligonal percorrendo-se seu contorno, que é definido por uma série de pontos (vértices), medindo-se seus ângulos e lados a partir de uma orientação inicial. Quando a poligonal é percorrida no sentido anti-horário, temos ângulos internos e quando é percorrida no sentido horário, temos ângulos externos.

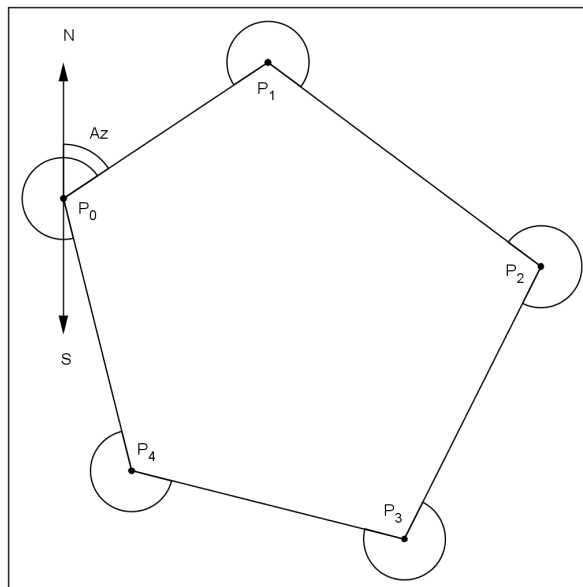


Figura 8: Poligonal com ângulos externos

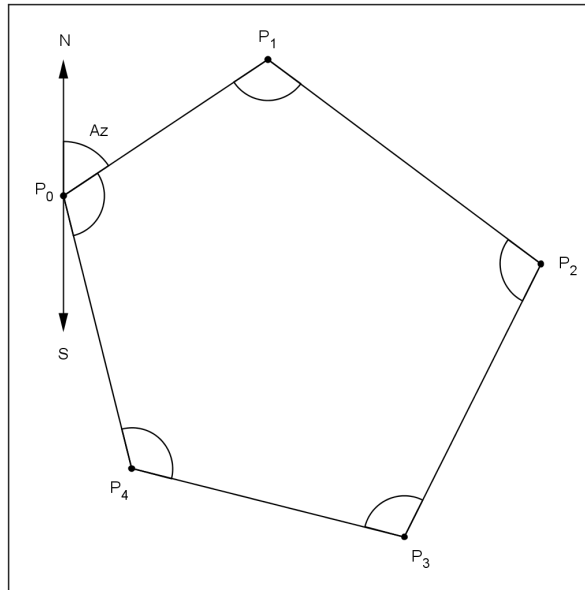


Figura 9: Poligonal com ângulos internos

Quando em Topografia falamos em ângulo externo é importante ressaltar que não se trata do mesmo ângulo externo da Matemática, apesar dos nomes serem iguais. O que é chamado de ângulo externo na Matemática, em Topografia é chamado de deflexão.

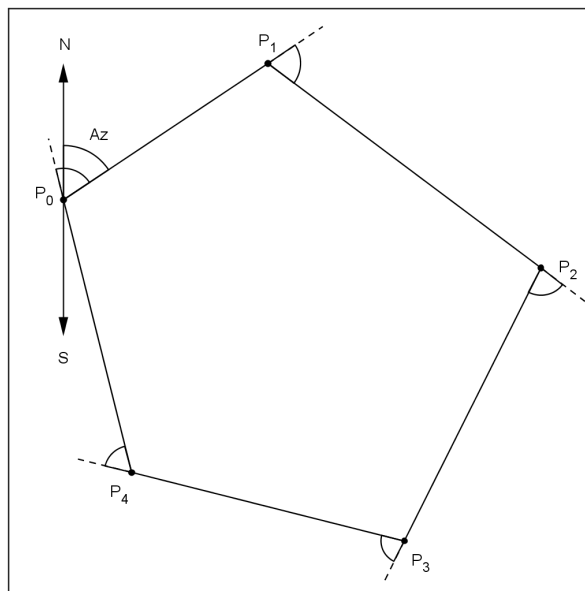


Figura 10: Deflexões e ângulos externos da Matemática

3.2.6 Ângulo de Inclinação

É um ângulo vertical formado entre a linha do horizonte (LH) e a linha de visada. Varia de 0° a $+90^\circ$ quando medido no sentido anti-horário (para cima), e de 0° a -90° quando

medido no sentido horário (para baixo). Em alguns livros também é chamado somente de ângulo vertical.

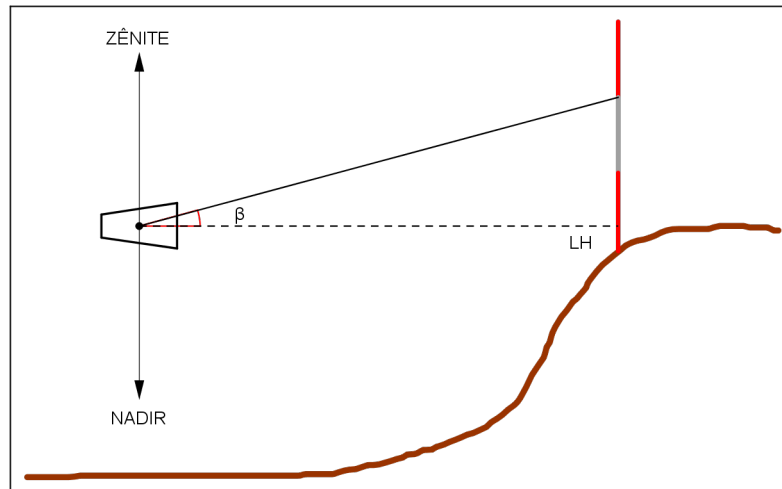


Figura 11: Ângulo de inclinação

3.2.7 Ângulos Zenital e Nadiral

Antes de definirmos Ângulo Zenital e Ângulo Nadiral é importante sabermos o que é Zênite e Nadir. Zênite é o ponto da esfera celeste, imediatamente acima do observador, perpendicular ao horizonte do mesmo. Nadir é o ponto diametralmente oposto ao Zênite.

Ângulo Zenital (Z) é o ângulo formado entre o Zênite e a linha de visada, variando de 0° a 180° . Ângulo Nadiral (N) é o ângulo formado entre o Nadir e a linha de visada e varia de 0° a 180° . O Ângulo Zenital e o Nadiral são complementares ($Z + N = 180^\circ$).

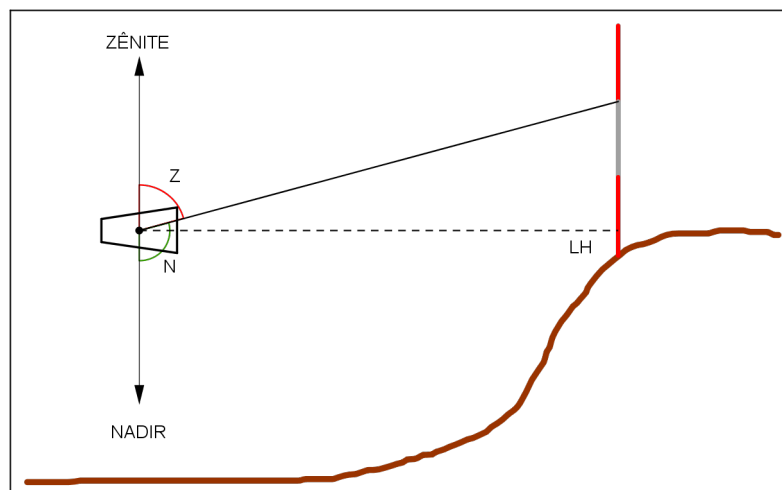


Figura 12: Ângulos zenital e nadiral

3.3 LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS PLANIMÉTRICOS

Para que se possa desenhar o mapa de uma região é necessário obter elementos que tornem possível a sua confecção. Essas informações, tais como ângulos e distâncias, são obtidas por Levantamentos Topográficos. Quando são desconsiderados os aspectos do relevo esses levantamentos são ditos Planimétricos. De acordo com a extensão da região a ser levantada, do seu relevo, da dificuldade de se efetuar as medições de ângulos e distâncias, do nível de precisão pretendida, temos tipos diferentes de levantamentos que podem ser utilizados.

3.3.1 Levantamento por Triangulação

Esse tipo de levantamento é utilizado quando se deseja representar numa planta divisas de uma propriedade de pequeno porte. Consiste em decompor toda a região em triângulos e efetuar a medição dos seus lados. O cálculo da área é feito usando a fórmula de Heron⁴, assim chamada devido ao matemático grego Heron de Alexandria.

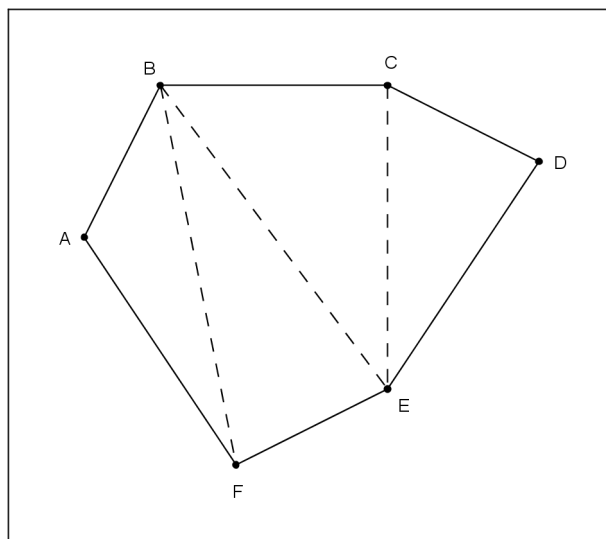


Figura 13: Levantamento por Triangulação

3.3.2 Levantamento por Ordenadas

É o método usado quando é necessário fazer o levantamento de um alinhamento curvo. Consiste em usar um alinhamento como base, a partir dele medir tantas ordenadas quantas forem necessárias. Cada ponto da curva será representado por duas medidas, a ordenada

⁴Se ABC é um triângulo de lados a, b, c e semiperímetro p, então: $A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

e uma medida da base (abscissa). Esse tipo de levantamento é utilizado como auxiliar do método do Caminhamento.

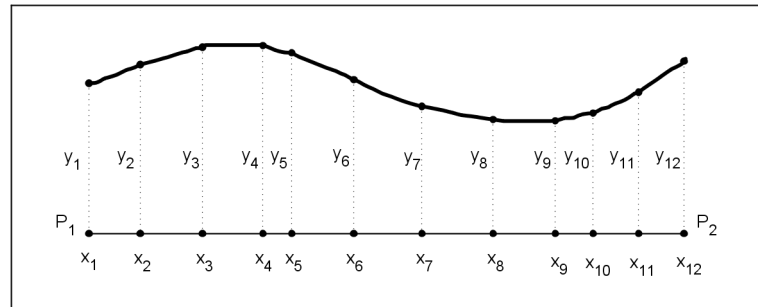


Figura 14: Levantamento por Ordenadas

3.3.3 Levantamento por Irradiação

Nesse método são efetuadas medições de ângulos e distâncias, de um vértice até pontos que detalham objetos da área levantada. É utilizado para trabalhos topográficos em pequenas áreas, e como método auxiliar do levantamento por Caminhamento.

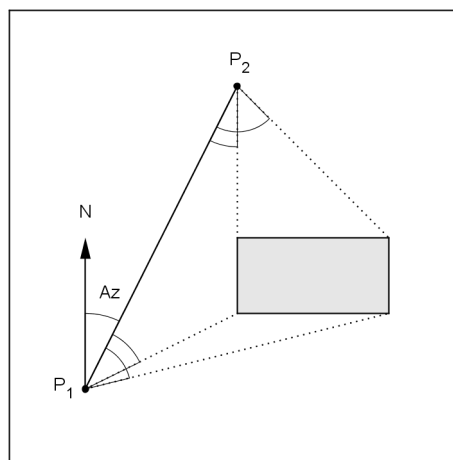


Figura 15: Levantamento por Irradiação

3.3.4 Levantamento por Interseção

A utilização desse método se dá quando é necessário obter a localização de um ponto inacessível. A partir de uma linha base entre dois pontos de distância conhecida, são medidos os ângulos entre as extremidades da base e o ponto desejado. Utilizando esses dados, calcula-se a distância dos pontos da base ao ponto a ser levantado usando a Lei

dos Senos. Essa base pode ser um dos lados da poligonal usada no levantamento por Caminhamento.

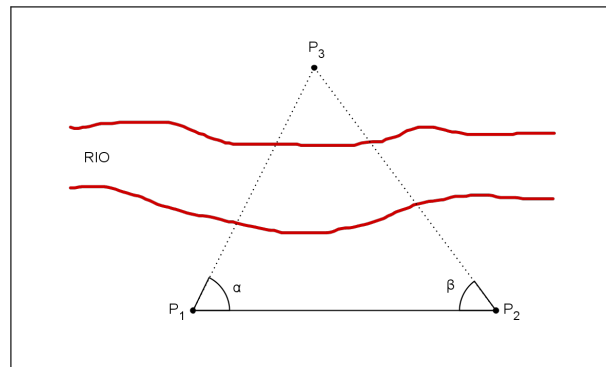


Figura 16: Levantamento por Interseção

3.3.5 Levantamento por Poligonação ou Caminhamento

É o método que consiste em percorrer toda a linha poligonal efetuando-se a medição das distâncias entre os vértices e dos ângulos entre os alinhamentos dos vértices. Esse método permite, na maioria das vezes, que se calcule o erro cometido e pode ser utilizado para levantamentos de áreas de todos os tamanhos, por isso é o mais usado. Os métodos vistos anteriormente podem ser associados ao Caminhamento permitindo que sejam levantados todos os detalhes e características de uma região. Pode ser feito com uma:

1. Poligonal Aberta: começa em um ponto e termina em outro.
2. Poligonal Fechada: começa e termina no mesmo ponto.

As poligonais, tanto abertas como fechadas, podem ter vértices com coordenadas conhecidas, permitindo a verificação erro de fechamento angular e linear.

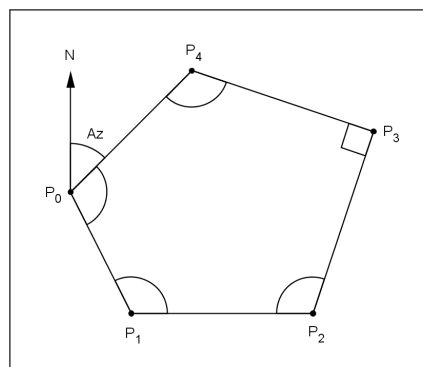


Figura 17: Levantamento por Poligonação ou Caminhamento

3.4 NIVELAMENTO

Os nivelamentos podem ser realizados usando vários métodos de acordo com os equipamentos utilizados, entre eles podemos citar:

1. Nivelamento Geométrico: é o nivelamento feito com um nível através de leituras realizadas na mira falante à partir de visadas horizontais.
2. Nivelamento Trigonométrico: é o nivelamento em que as distâncias verticais são calculadas, usando-se trigonometria e os dados obtidos com teodolitos.
3. Nivelamento Barométrico: é aquele em que as distâncias verticais são obtidas em função da pressão atmosférica medida com aparelhos chamados Barômetros.

Quando realizamos o nivelamento, as distâncias verticais que são determinadas são classificadas em:

1. Altitude: é a distância vertical medida do nível médio dos mares e um ponto da superfície da Terra.
2. Cota: é a distância entre um plano de referência a um ponto da superfície terrestre.
3. Diferença de Nível: é a diferença entre cotas ou altitudes de pontos da superfície da Terra.

Nos nivelamentos podemos trabalhar com valores de cotas arbitrários, quando o objetivo é caracterizar uma determinada região isoladamente, ou pontos fixos no terreno com cotas ou altitudes determinadas anteriormente, chamados de Referência de Nível.

4 REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO

Na produção desse capítulo, foram usados como referências textos contidos em, [1], [3], [6], [11], [12].

4.1 ÂNGULOS

4.1.1 Definição

Nos livros didáticos dos ensinos fundamental e médio encontramos várias definições de ângulos, como a encontrada em [6]: "ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem".

Outra definição é mostrada no livro Geometria da coleção PROFMAT de autoria de Antônio Caminha Muniz Neto: "dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} ".[11]

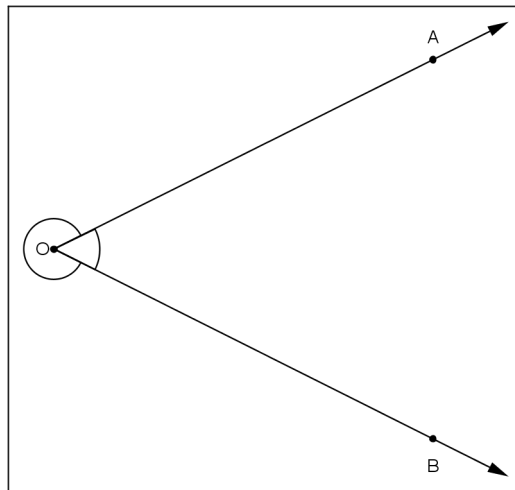


Figura 18: Ângulos

4.1.2 Unidades de Medida de Ângulos

Medir um ângulo é associar a ele um valor numérico. Para isso contamos atualmente com três unidades de medida: o grau, o radiano e o grau e seus submúltiplos.

Grado:

O Grado é uma unidade de medida de ângulos associada ao Sistema Métrico, portanto tem a sua definição relacionada à definição original do metro: “A distância de 100 Km percorrida sobre o meridiano determina um ângulo central de *1grado*, cuja notação é 1 gon”, que é equivalente a $\frac{1}{400}$ de uma volta.

Apesar de terem sido feitas tentativas para a introdução do grado como unidade padrão, apenas alguns países o adotaram em algumas áreas como Artilharia e Topografia.

Radiano:

A medida em radianos de um ângulo central em uma circunferência é a razão entre o comprimento de um arco e o seu raio. Conseqüentemente quando tivermos a medida do arco igual à medida do raio da circunferência, teremos um ângulo central de um radiano (1 rad).

Quando da criação do sistema métrico a unidade proposta para medida de ângulos era o grado, mas devido ao uso reduzido, atualmente a unidade oficial é o radiano.

Graus e Seus Submúltiplos:

Ao dividirmos uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma das partes corresponde à medida de um ângulo central de um grau (1°), ou seja, $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Acredita-se que a convenção de dividir a circunferência em 360 partes, deve-se ao fato de as observações astronômicas dos Babilônios os levaram a concluir que o Sol gastava aproximadamente 360 dias para completar um giro em torno da Terra. Assim 1° corresponderia ao ângulo central percorrido pelo Sol em um dia.

No século II E.C. Ptolomeu usou o sistema sexagesimal ao dividir um grau em sessenta minutos ($1^\circ = 60'$) e um minuto em sessenta segundos ($1' = 60''$), mas aparentemente essa divisão já era usada por Hiparco de Bitínia no século II a.E.C..

O sistema sexagesimal já era usado pelos Babilônios por volta do ano 1700 a.E.C., provavelmente devido ao fato do número sessenta ter muitos divisores, incluindo os cinco

primeiros números naturais, e com isso reduzir os cálculos com frações. "É, contudo, permitido pensar que é em particular graças as suas propriedades aritméticas, geométricas e astronômicas que a base sessenta foi mantida até os nossos dias para medir o tempo, os arcos e os ângulos."[8]

4.1.3 Relação Entre Grado, Radianos e Graus

Dada uma circunferência qualquer, o número π é a constante obtida ao se fazer a razão entre o comprimento e o diâmetro da referida circunferência. Chamando de C o comprimento, r o raio e d o diâmetro, conforme mostra a figura 19, temos

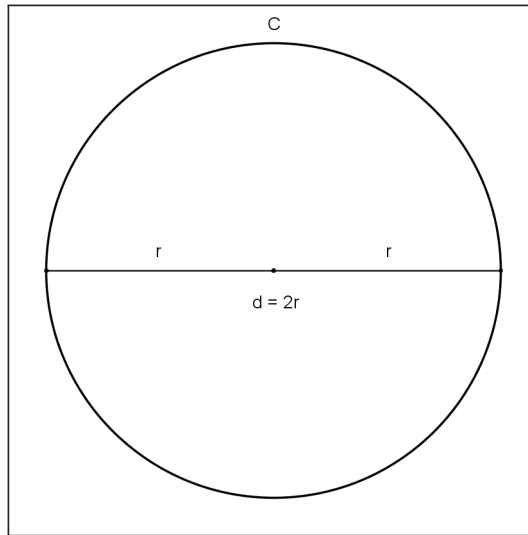


Figura 19: Circunferência

$$\pi = \frac{C}{d} \Rightarrow \pi = \frac{C}{2r} \Rightarrow C = 2\pi r$$

Anteriormente vimos que um arco tem medida igual a 1 radiano quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência onde está contido e juntamente com o fato de que o comprimento da circunferência é $2\pi r$, podemos então calcular a medida do arco de uma volta em radianos.

MEDIDA DO ARCO	COMPRIMENTO DO ARCO
$1rad$	r
α	$2\pi r$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{r}{2\pi r} \Rightarrow \alpha r = 2\pi r \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi r}{r} \Rightarrow \alpha = 2\pi rad$$

Vamos mostrar como transformar uma medida de radianos para graus e vice-versa,

medida do arco (graus)	medida do arco (radianos)
360°	2π
α	x

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 2\pi\alpha = 360^\circ x \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ x}{2\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ x}{\pi}$$

podemos também escrever que,

$$x = \frac{2\pi\alpha}{360} \Rightarrow x = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ rad}$$

Transformando de grau para grado e vice-versa

medida do arco (graus)	medida do arco (grados)
360°	400
α	y

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{400}{y} \Rightarrow 360^\circ y = 400\alpha \Rightarrow y = \frac{400\alpha}{360} \Rightarrow y = \frac{10\alpha}{9}$$

temos também que

$$\alpha = \frac{360y}{400} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{9y}{10}\right)^\circ$$

Transformando de grado para radiano e vice-versa

medida do arco (radianos)	medida do arco (grados)
2π	400
x	y

$$\frac{2\pi}{x} = \frac{400}{y} \Rightarrow 400x = 2\pi y \Rightarrow x = \frac{2\pi y}{400} \Rightarrow x = \frac{\pi y}{200} \text{ rad}$$

temos também que

$$y = \frac{400x}{2\pi} \Rightarrow y = \frac{200x}{\pi}$$

Portanto, podemos escrever as seguintes relações:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{10}{9} \text{ gon}$$
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \frac{200}{\pi} \text{ gon}$$
$$1 \text{ gon} = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$$

4.2 TEOREMA DE PITÁGORAS

Seja ABC um triângulo retângulo qualquer de lados AB , AC e BC como mostra a figura 20,

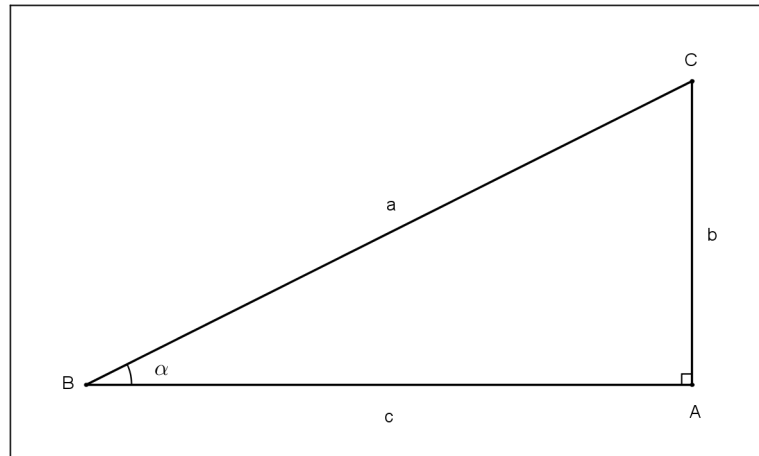


Figura 20: Teorema de Pitágoras

esses lados são assim nomeados:

BC : é a hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto).

AC : é o cateto oposto ao ângulo α .

AB : é o cateto adjacente ao ângulo α .

Vamos mostrar agora uma demonstração do Teorema de Pitágoras que é atribuída a James Garfield (1831-1881), que foi o 20º presidente dos Estados Unidos. Sejam A a área do trapézio $EFGH$, e A_1 , A_2 , A_3 , as áreas respectivamente dos triângulos retângulos EHI , EFI e FGI , como mostra a figura 21.

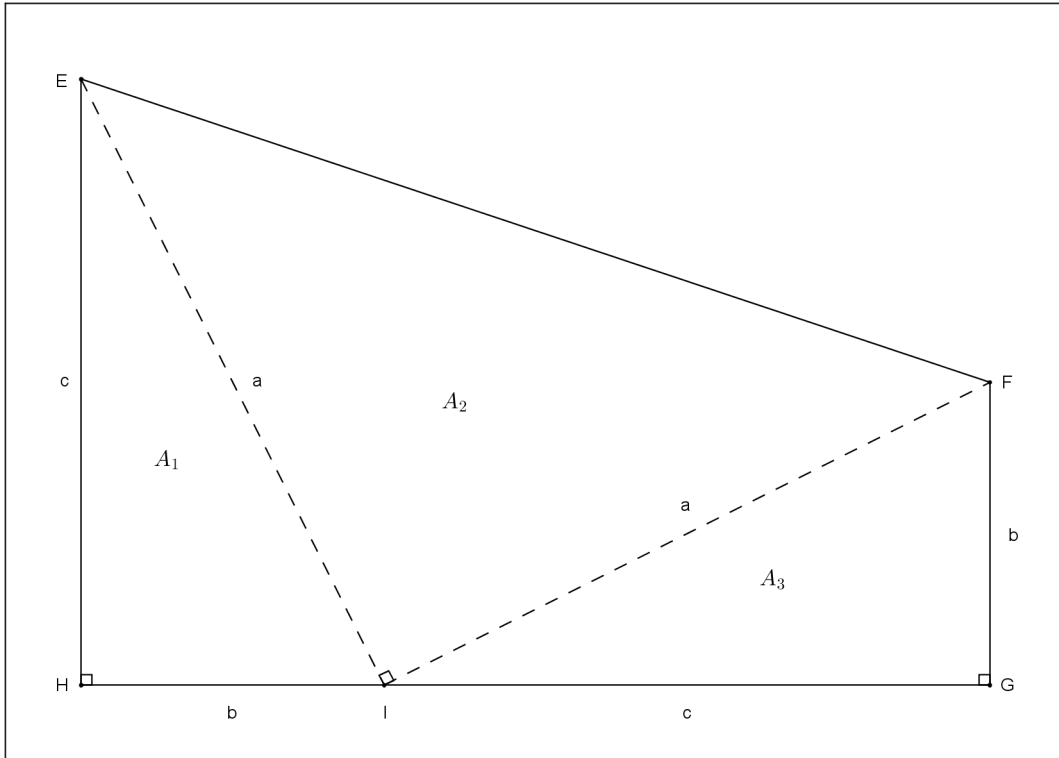


Figura 21: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Analisando a figura acima e utilizando a fórmula para o cálculo da área do trapézio, podemos escrever que,

$$A = \frac{(c + b) \cdot (b + c)}{2} \Rightarrow A = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \quad (4)$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot a}{2} + \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2 + 2bc}{2} \quad (5)$$

como $A = A_1 + A_2 + A_3$, temos que (4) = (5), e podemos escrever,

$$\frac{a^2 + 2bc}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}$$

multiplicando ambos os lados da igualdade por 2 temos,

$$2 \cdot \frac{a^2 + 2bc}{2} = 2 \cdot \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \Rightarrow a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$$

$$a^2 + 2bc - 2bc = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

4.3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção apresentaremos as condições necessárias e suficientes para verificarmos se dois triângulos são congruentes. Os casos de congruência que serão apresentados têm o intuito de servir como base para as demonstrações dos casos de semelhança, portanto não mostraremos as suas demonstrações. Sugerimos aos interessados os textos utilizados na pesquisa para elaborar esse material que são encontrados em, [3], [11].

Segundo a definição de congruência apresentada em [3], temos que: "Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes." Para estabelecermos essa correspondência não será necessário conhecermos todos os elementos dos triângulos, medidas dos lados e ângulos, como veremos a seguir.

4.3.1 1º CASO: Axioma LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes. [11]

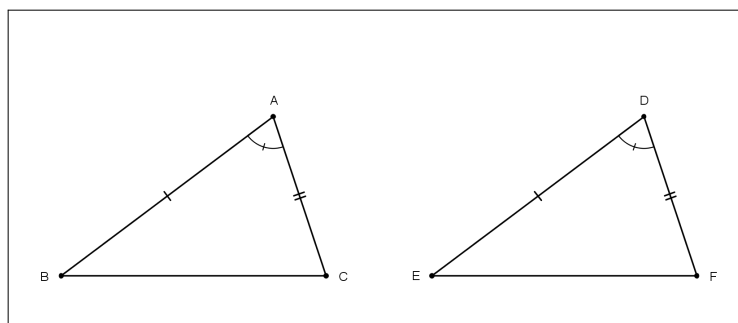


Figura 22: Caso de congruência LAL

4.3.2 2º CASO: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes. [11]

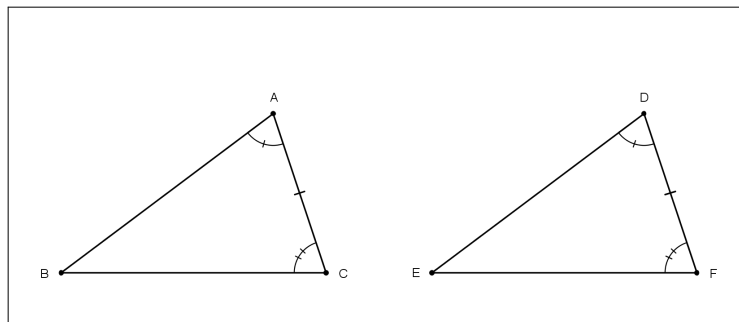


Figura 23: Caso de congruência ALA

4.3.3 3º CASO: LLL (Lado-Lado-Lado)

Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. [11]

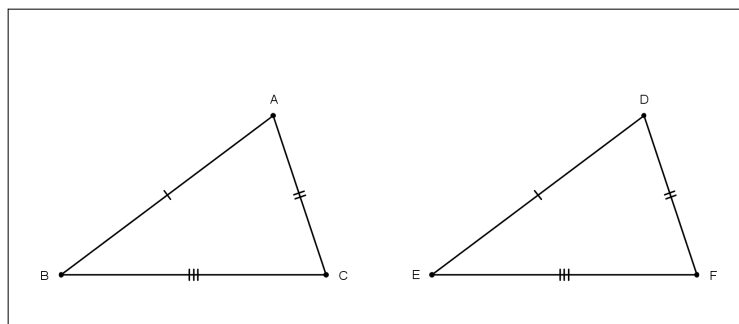


Figura 24: Caso de congruência LLL

4.3.4 4º CASO: LAAo (Lado-Ângulo-Ângulo Oposto)

Se dois ângulos de um Triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. [11]

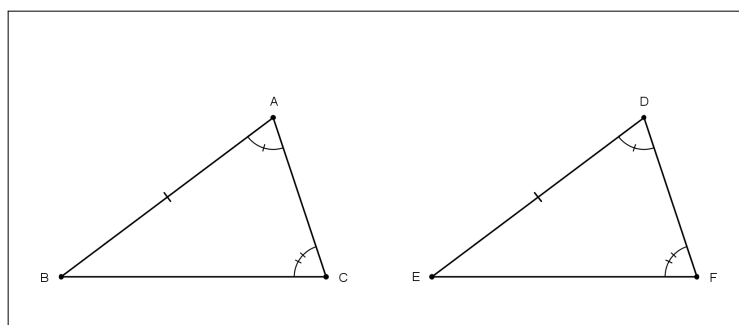


Figura 25: Caso de congruência LAAo

4.3.5 5º CASO: Congruência de Triângulos Retângulos

Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, então os dois triângulos retângulos são congruentes. [11]

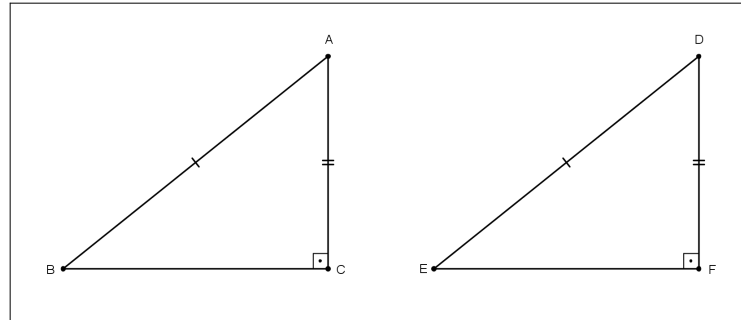


Figura 26: Caso de Congruência de triângulos retângulos

4.4 TEOREMA DE THALES

Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, D \in r$; $B, E \in s$ e $C, F \in t$, de modo que A, B, C e D, E, F sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

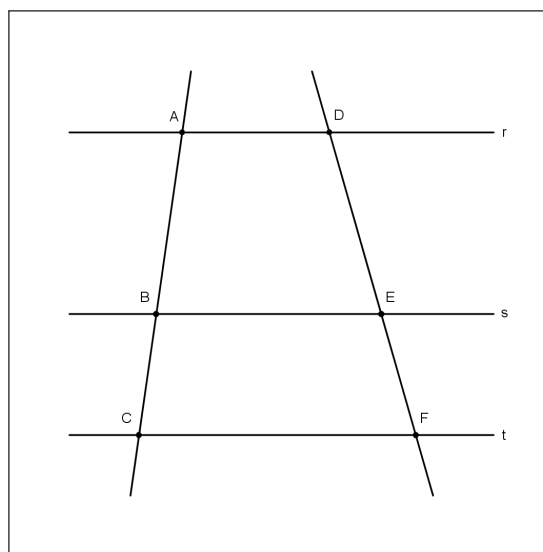


Figura 27: Teorema de Thales

4.5 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Ao analisarmos dois polígonos dizemos que eles são semelhantes se, os seus ângulos correspondentes tem medidas iguais e se forem proporcionais as medidas de seus lados correspondentes. No caso particular dos triângulos não é necessário fazer a verificação de todas as medidas dos ângulos e lados correspondentes. As formas de verificar se os triângulos são semelhantes são chamados de casos de semelhança de triângulos e serão mostrados a seguir.

4.5.1 1º CASO: AA (Ângulo-Ângulo)

Sejam os triângulos ABC e DEF , de forma que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, como mostra a figura 28,

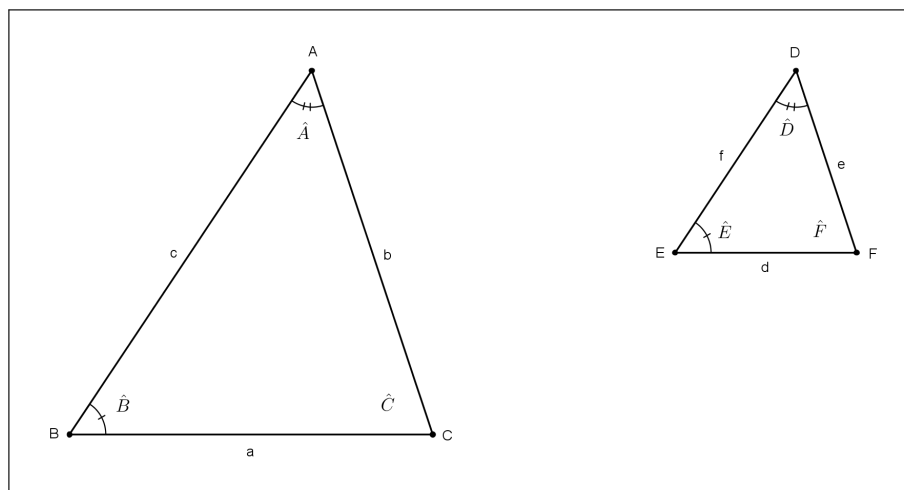


Figura 28: Caso de semelhança AA

como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$ temos,

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \quad \text{e} \quad \hat{F} = 180^\circ - (\hat{D} + \hat{E})$$

como $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $\hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{E}$ e podemos escrever que,

$$\hat{F} = 180^\circ - (\hat{D} + \hat{E}) = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \hat{F}$$

Depois de mostrar que os ângulos correspondentes tem medidas iguais, vamos demonstrar que os lados correspondentes são proporcionais. Para isso, sejam B' e C' pontos dos lados AB e AC respectivamente, tais que $\overline{AB'} = f$ e $\overline{AC'} = e$, como mostra a figura 29.

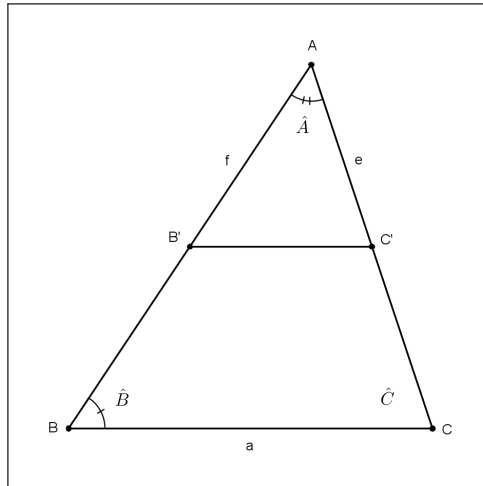


Figura 29: Demonstração do caso de semelhança AA

Como $\hat{A} = \hat{D}$, $\overline{AB'} = f$ e $\overline{AC'} = e$ temos pelo caso *LAL* de congruência que os triângulos $AB'C' \cong DEF$. Portanto temos que $\hat{A}B'C' = \hat{E}$, e como $\hat{B} = \hat{E}$, então $\hat{A}B'C' = \hat{B}$, e $BC \parallel B'C'$. Logo pelo Teorema de Thales podemos escrever,

$$\frac{f}{AB} = \frac{e}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{d}{BC} = \frac{e}{AC},$$

ou seja,

$$\frac{f}{AB} = \frac{e}{AC} = \frac{d}{BC}$$

e concluímos que $ABC \sim DEF$

4.5.2 2º CASO: LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Dados os triângulos ABC e DEF , conforme mostra a figura 30

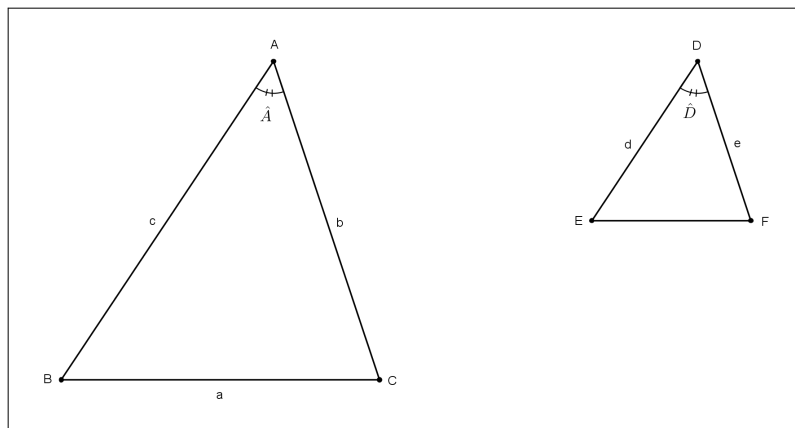


Figura 30: Caso de semelhança LAL

com $\hat{A} = \hat{D}$ e $k > 0$, tal que

$$k = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{e}$$

Vamos mostrar que os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Para isso, seja E' um ponto de AB , tal que $\overline{AE'} = d$, e r a reta paralela ao lado BC que passa por E' e intersecta AC no ponto F' .

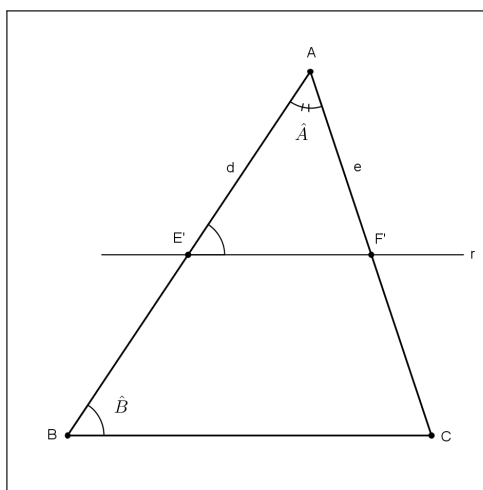


Figura 31: Demonstração do caso de semelhança LAL

Como r é paralela ao lado BC , então

$$\widehat{AE'F'} = \widehat{B}$$

e como o ângulo $\angle A$ é comum aos triângulos $AE'F'$ e ABC , temos pelo caso AA que

$$AE'F' \sim ABC$$

portanto, temos que

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{\overline{AF'}} = \frac{a}{\overline{E'F'}}$$

e como,

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{e}$$

temos

$$\frac{b}{\overline{AF'}} = \frac{b}{e} \Rightarrow \overline{AF'} \cdot b = e \cdot b \Rightarrow \overline{AF'} = e$$

como $\hat{A} = \hat{D}$, $\overline{AE'} = d$ e $\overline{AF'} = e$, temos pelo caso LAL de congruência que os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes, e como

$$AE'F' \sim ABC$$

concluimos que

$$ABC \sim DEF$$

como queríamos mostrar.

4.5.3 3º CASO: LLL (Lado-Lado-Lado)

Sejam dados os triângulos ABC e DEF conforme mostra a figura 32

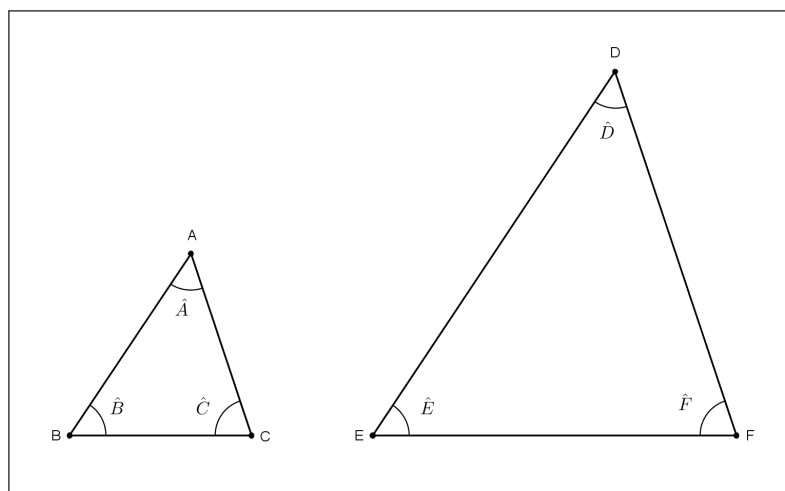


Figura 32: Caso de semelhança LLL

de forma que

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = k$$

então temos

$$\overline{DE} = k \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{EF} = k \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{DF} = k \cdot \overline{AC}$$

Vamos analisar, sem perda de generalidade, o caso em que $k > 1$. Marque o ponto $E' \in DE$ tal que $\overline{DE'} = \overline{AB}$ e trace uma reta paralela ao lado EF , passando por E' interceptando o lado DF em um ponto que chamaremos de F' , conforme mostra a figura

33

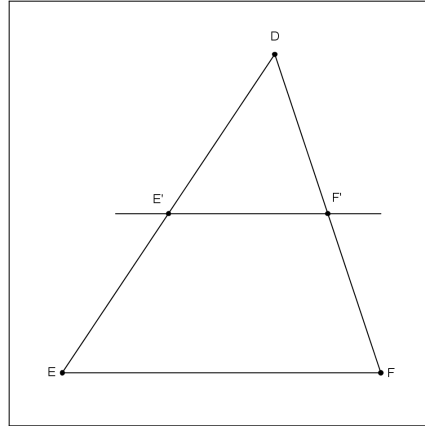


Figura 33: Demonstração do caso de semelhança LLL (1)

pelo teorema de Thales, temos que

$$\frac{\overline{DF'}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DE'}}{\overline{DE}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{DF'} = \overline{DF} \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{DF'} = k \cdot \overline{AC} \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{DF'} = \overline{AC}$$

Vamos agora traçar uma paralela ao lado DE passando por F' , interceptando o lado EF no ponto que chamaremos de D' . Então o quadrilátero $E'F'D'E$ é um paralelogramo, como mostra a figura 34,

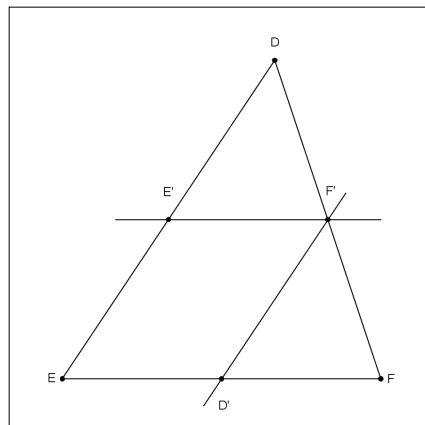


Figura 34: Demonstração do caso de semelhança LLL (2)

novamente pelo teorema de Thales temos

$$\frac{\overline{E'F'}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ED'}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DF'}}{\overline{DF}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{E'F'} = \overline{EF} \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{E'F'} = k \cdot \overline{BC} \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{E'F'} = \overline{BC}$$

Temos então que $\overline{DE'} = \overline{AB}$, $\overline{DF'} = \overline{AC}$ e $\overline{E'F'} = \overline{BC}$, portanto os triângulos $DE'F'$ e ABC são congruentes pelo caso LLL de congruência. Temos também que

$$\hat{E} = \hat{D\hat{E}F} = \hat{D\hat{E}'F'} = \hat{A\hat{B}C} = \hat{B} \Rightarrow \hat{E} = \hat{B}$$

$$\hat{D} = \hat{E\hat{D}F} = \hat{E'\hat{D}F'} = \hat{B\hat{A}C} = \hat{A} \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}$$

$$\hat{F} = \hat{D\hat{F}E} = \hat{D\hat{F}'E'} = \hat{A\hat{C}B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{F} = \hat{C}$$

como nos triângulos ABC e DEF , os ângulos correspondentes tem medidas iguais e razão entre as medidas dos lados correspondentes também são iguais, concluimos que $ABC \sim DEF$.

4.6 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam duas semirretas de mesma origem, que formam entre si um ângulo agudo α . Vamos traçar perpendiculares a uma semirreta até encontrar a outra, como mostra a figura 35.

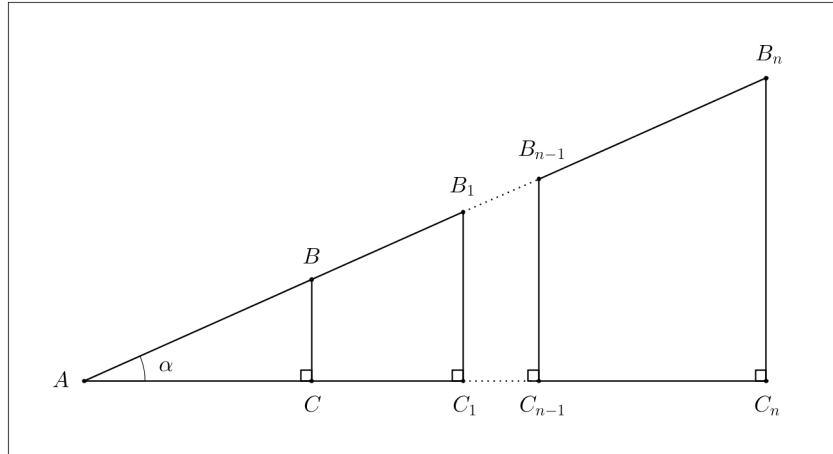


Figura 35: Razões Trigonométricas

Na figura 35 temos que os triângulos ABC , $AB_1C_1, \dots, AB_{n-1}C_{n-1}$ e AB_nC_n são semelhantes por AA pois, todos os triângulos são retângulos e tem o ângulo α em comum. Desta forma, podemos escrever:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1}C_{n-1}}}{\overline{AB_{n-1}}} = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AB_n}}$$

e

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \dots = \frac{\overline{AC_{n-1}}}{\overline{AB_{n-1}}} = \frac{\overline{AC_n}}{\overline{AB_n}}$$

e

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1}C_{n-1}}}{\overline{AC_{n-1}}} = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AC_n}}$$

Em qualquer triângulo retângulo essas razões não dependem das medidas dos seus lados, apenas do ângulo agudo considerado. Essas razões foram nomeadas da seguinte maneira:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dots = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AB_n}}$$

e

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dots = \frac{\overline{AC_n}}{\overline{AB_n}}$$

e

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dots = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AC_n}}$$

ou seja, em um triângulo retângulo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{C.O.}{hip}, \text{ cos } \alpha = \frac{C.A.}{hip} \quad \text{e} \quad \text{tg } \alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$$

4.7 LEI DOS SENOS

Seja ABC um triângulo acutângulo qualquer, como mostra a figura 36

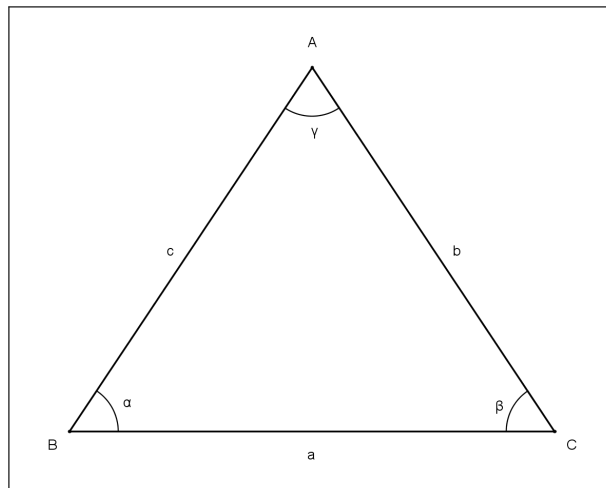


Figura 36: Lei dos Senos

Ao traçarmos a altura h_1 relativa ao lado BC obtemos dois triângulos retângulos ABH_1 e ACH_1 .

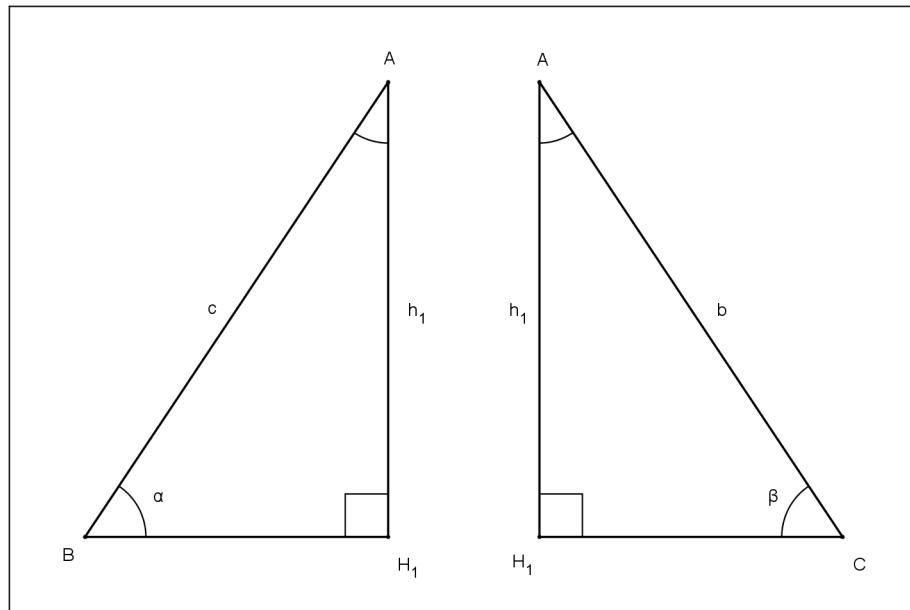


Figura 37: Demonstração da Lei dos Senos (1)

Nos triângulos retângulos temos que,

$$\text{sen } \alpha = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen } \alpha, \quad \text{e} \quad (6)$$

$$\text{sen } \beta = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen } \beta \quad (7)$$

de (6) e (7) escrevemos

$$b \cdot \text{sen } \beta = c \cdot \text{sen } \alpha \quad (8)$$

dividindo (8) por $\text{sen } \beta \cdot \text{sen } \alpha$, temos

$$\frac{b \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } \alpha} = \frac{c \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } \alpha} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \beta}$$

No mesmo triângulo ABC , traçando a altura h_2 relativa ao lado AB obtemos os triângulos retângulos ACH_2 e BCH_2 .

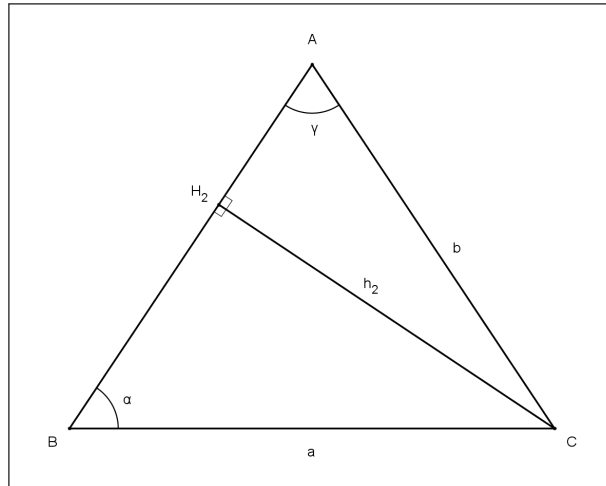


Figura 38: Demonstração da Lei dos Senos (2)

Nos triângulos ACH_2 e BCH_2 temos:

$$\text{sen } \gamma = \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot \text{sen } \gamma, \quad \text{e} \quad (9)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen } \alpha \quad (10)$$

de (9) e (10) escrevemos

$$a \cdot \text{sen } \alpha = b \cdot \text{sen } \gamma \quad (11)$$

dividindo (11) por $\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma$, temos

$$\frac{a \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma} = \frac{b \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \gamma} = \frac{b}{\text{sen } \alpha}$$

concluimos que,

$$\frac{a}{\text{sen } \gamma} = \frac{b}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \beta}$$

Podemos então enunciar a Lei dos Senos: “Em todo triângulo, a medida de um lado é proporcional ao seno do ângulo oposto”.

4.8 LEI DOS COSSENOS

Seja ABC um triângulo qualquer. Vamos traçar a altura h relativa ao lado BC , com isso obtemos dois triângulos retângulos, ABH e ACH , conforme a figura 39.

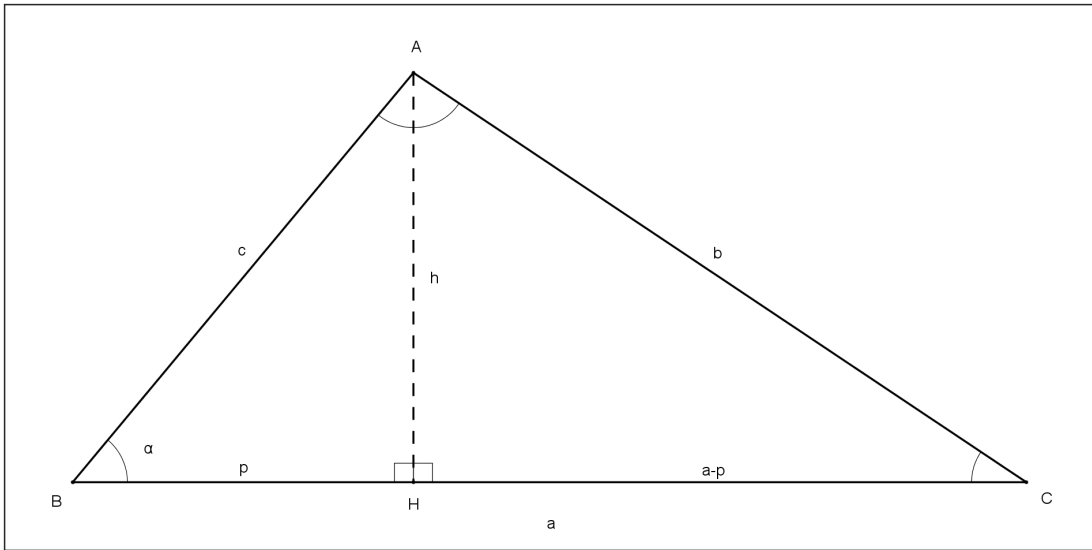


Figura 39: Demonstração da Lei dos Cossenos (1)

No triângulo ABH pelo Teorema de Pitágoras e a definição de cosseno temos

$$c^2 = p^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - p^2, \quad e \quad (12)$$

$$\cos \alpha = \frac{p}{c} \Rightarrow p = c \cdot \cos \alpha \quad (13)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACH obtemos

$$b^2 = h^2 + (a - p)^2 \quad (14)$$

substituindo (12) em (14) obtemos

$$b^2 = c^2 - p^2 + (a - p)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - p^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot p + p^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot p \quad (15)$$

substituindo (13) em (15) obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha$$

A demonstração com relação aos outros ângulos do triângulo ABC é análoga. Faremos agora a demonstração para o caso em que o ângulo α é obtuso.

Seja ABC um triângulo obtusângulo, como na figura 40.

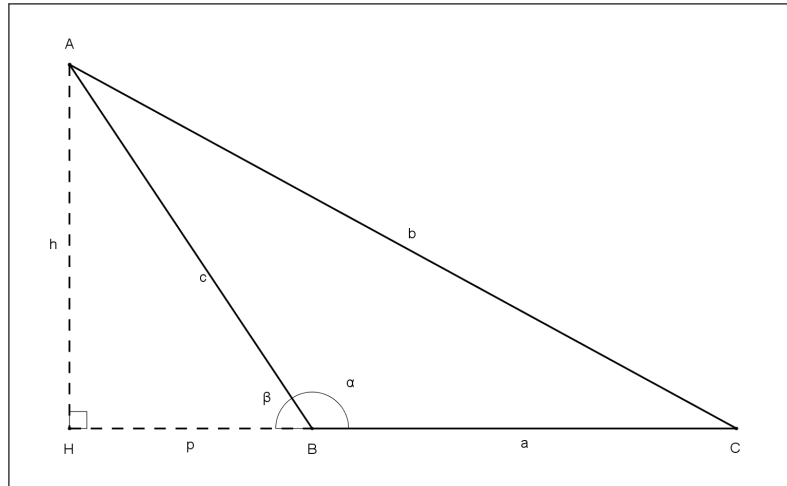


Figura 40: Demonstração da Lei dos Cossenos (2)

Traçamos a altura h relativa ao lado BC , obtendo assim os triângulos AHB e AHC . Aplicando o Teorema de Pitágoras e a definição de cosseno no triângulo AHB obtemos

$$c^2 = h^2 + p^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - p^2, \quad \text{e} \quad (16)$$

$$\cos \beta = \frac{p}{c} \Rightarrow p = c \cdot \cos \beta \quad (17)$$

No triângulo AHC pelo Teorema de Pitágoras temos

$$b^2 = h^2 + (p + a)^2 \quad (18)$$

substituindo (16) em (18)

$$b^2 = c^2 - p^2 + (p + a)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - p^2 + p^2 + 2 \cdot a \cdot p + a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot p \quad (19)$$

substituindo (17) em (19) temos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad (20)$$

como

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

então

$$\cos \beta = -\cos \alpha \quad (21)$$

substituindo (21) em (20) obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha$$

A demonstração com relação aos outros ângulos do triângulo ABC é análoga.

Podemos então enunciar a Lei dos Cossenos: “Em qualquer triângulo ABC , o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam”, ou seja:

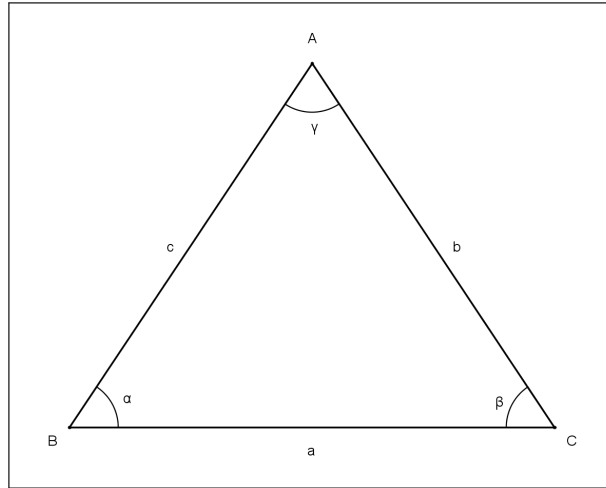


Figura 41: Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta$$

5 MATEMÁTICA E TOPOGRAFIA

Na produção desse capítulo foram usados como referências textos contidos em, [1], [4], [5] [7], [18].

5.1 TAQUEOMETRIA

Desde épocas remotas o homem tem a necessidade de realizar medições de distâncias. Em algumas situações ou é muito demorado efetuar as medições ou tratam-se de distâncias inacessíveis, nesses casos é necessário fazê-las de maneira indireta.

A parte da Topografia que trata da obtenção de medidas indiretas é a Taqueometria, do grego “takhys” (rápido) e “metren” (medição ou medida), ou seja, é um processo rápido para obtenção de distâncias. É aplicada principalmente em casos de distâncias inacessíveis ou em terrenos muito acidentados.

Os aparelhos utilizados em Taqueometria são denominados Taqueômetros (teodolitos estadiométricos, nível de luneta), que associados a mira falante, permitem que sejam feitas as leituras dos fios estadiométricos (superior, médio e inferior), dos ângulos de inclinação e zenital.

Utilizando conhecimentos de trigonometria e geometria, associados às leituras dos fios estadiométricos, dos valores constantes do instrumento utilizado, e dos ângulos verticais é possível determinar indiretamente as distâncias horizontais e verticais.

5.1.1 Visada Horizontal

Analisaremos primeiramente a situação em que a distância horizontal é obtida a partir da leitura dos fios estadiométricos numa visada horizontal.

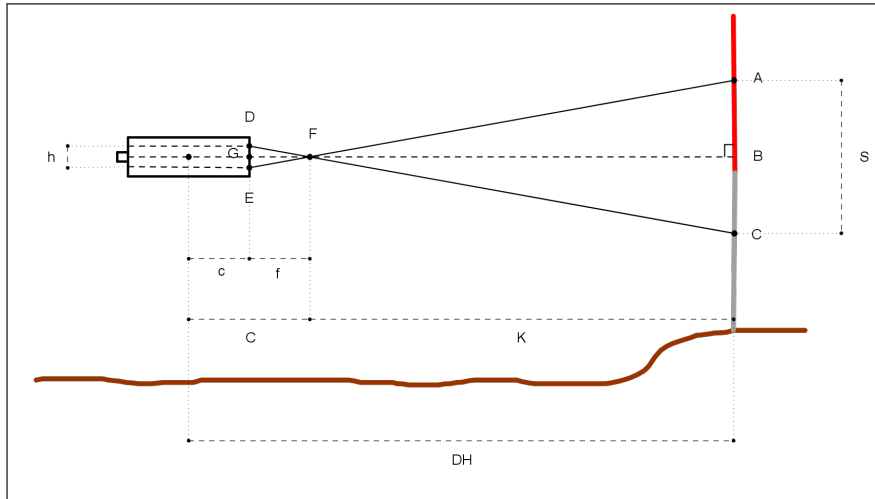


Figura 42: Visada horizontal

Na figura 42 temos que:

DH : é a distância horizontal do aparelho ao ponto visado.

C : é a constante de Reichembach.

f : é a distância focal da objetiva.

F : é o foco exterior à objetiva.

c : é a distância do centro óptico do aparelho a objetiva.

K : é a distância do foco à régua graduada (mira falante).

S : é a diferença entre as leituras dos fios estadiométricos superior e inferior.

Nos triângulos isósceles ACF e DEF , os ângulos $\angle AFC$ e $\angle DFE$ são congruentes pois são opostos pelo vértice, e como os lados DE e AC são paralelos, os ângulos $\angle DEF$ e $\angle FAC$ são congruentes, da mesma forma os ângulos $\angle EDF$ e $\angle FCA$ também. Concluímos que os triângulos ACF e DEF são semelhantes por AA e escrevemos:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{FB}} \Rightarrow \overline{DE} \cdot \overline{FB} = \overline{AC} \cdot \overline{GF} \Rightarrow \overline{FB} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{GF}}{\overline{DE}},$$

que pode ser escrita como,

$$K = S \cdot \frac{f}{h}$$

A razão $\frac{f}{h}$ é chamada de constante multiplicativa e o seu valor na maioria dos teodolitos é 100. Com isso temos que o valor de K pode ser expresso como,

$$K = S \cdot 100$$

Podemos então, escrever que a distância horizontal pode ser calculada usando,

$$DH = C + S \cdot 100$$

A Constante de Reichembach assume valor zero para teodolitos com lunetas analáticas e valor que varia de 25cm à 50cm para aparelhos com lunetas aláticas. Desta forma, a distância horizontal pode ser calculada, para aparelhos com lunetas analáticas, usando a fórmula;

$$DH = S \cdot 100$$

5.1.2 Visada Inclinada

Existem situações em que para se obter a leitura dos fios estadimétricos, devemos fazer uma visada inclinada, desta maneira não é possível calcular a distância horizontal da mesma forma como é feita para o caso da visada horizontal, pois o ângulo de incidência da projeção do fio médio na mira falante é diferente de noventa graus, como mostram as figuras 43 e 44.

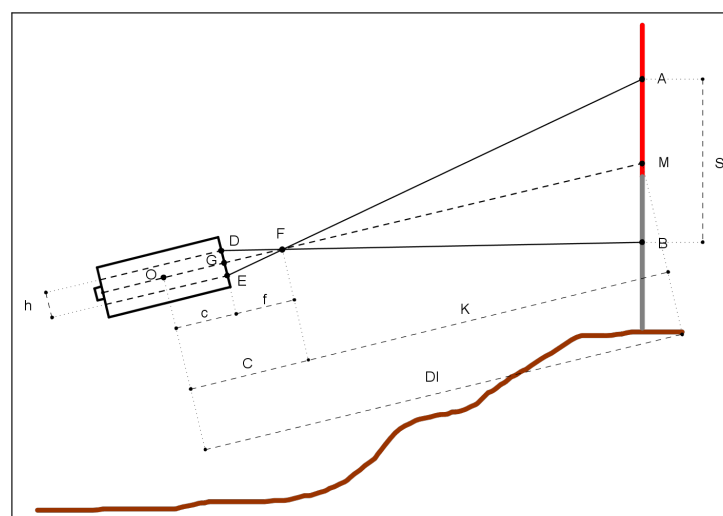


Figura 43: Visada inclinada

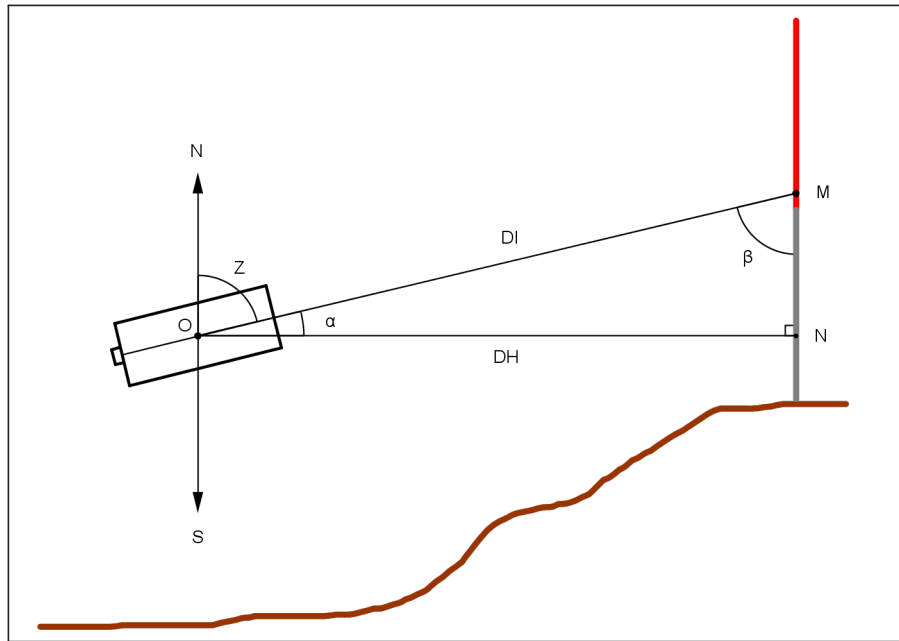


Figura 44: Ângulo de incidência

Na figura 44 temos que:

Z : é o ângulo zenital.

α : é o ângulo de inclinação.

β : é o ângulo de incidência da projeção do fio médio.

DI : é a distância inclinada.

DH : é a distância horizontal.

De acordo com a figura 44, OMN é um triângulo retângulo e temos a seguinte relação:

$$\cos \alpha = \frac{DH}{DI} \Rightarrow DH = DI \cdot \cos \alpha$$

Nessa situação é necessário calcularmos a distância inclinada para depois obtermos a distância horizontal, mas como a visada é inclinada, logo não é possível utilizarmos a fórmula mostrada no item anterior, vamos supor que existe uma mira que seja perpendicular a linha de visada do fio médio como mostra a figura 45.

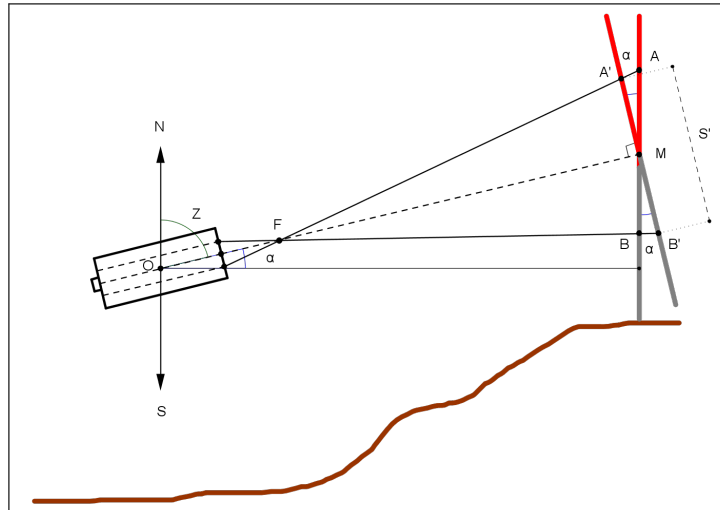


Figura 45: Mira fictícia

Na figura 45 temos que:

A' : é a visada do fio superior fictício.

B' : é a visada do fio inferior fictício.

S' : é a diferença entre as leituras dos fios superior e inferior fictícios.

Analisando a figura 45, observamos que o alinhamento N/S é paralelo a mira falante, então os ângulos $\angle Z$ e $\angle FMB$ são alternos internos, conseqüentemente são congruentes, e como:

$$Z + \alpha = 90^\circ \quad \text{e} \quad FMB + BMB' = 90^\circ \Rightarrow BMB' = \alpha,$$

e como os ângulos $\angle AMA'$ e $\angle BMB'$ são opostos pelo vértice então temos:

$$\angle AMA' = \angle BMB' = \alpha.$$

Agora é necessário que se estabeleça uma relação entre as medidas S e S' . Analisando os triângulos $\triangle AMA'$ e $\triangle BMB'$ chega-se a conclusão de que eles não são semelhantes, nem que são triângulos retângulos. Nesse ponto os livros de Topografia estabelecem por aproximação que os ângulos $\angle MA'A$ e $\angle MB'B$ são retos, pois não há erro prejudicial devido ao fato de as medidas $\overline{MA'}$ e $\overline{MB'}$ serem muito pequenas em relação às distâncias $\overline{FA'}$ e $\overline{FB'}$.

Supondo que os triângulos AMA' e BMB' são retângulos em A' e B' respectivamente, podemos escrever:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} \Rightarrow \overline{MB'} = \overline{MB} \cdot \cos \alpha, \quad e$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{MA'}}{\overline{MA}} \Rightarrow \overline{MA'} = \overline{MA} \cdot \cos \alpha,$$

fazendo $\overline{MA'} + \overline{MB'}$ obtemos,

$$\overline{MA'} + \overline{MB'} = \overline{MA} \cdot \cos \alpha + \overline{MB} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \overline{MA'} + \overline{MB'} = (\overline{MA} + \overline{MB}) \cdot \cos \alpha,$$

como

$$S = \overline{MA} + \overline{MB}, \quad e \quad S' = \overline{MA'} + \overline{MB'} \Rightarrow S' = S \cdot \cos \alpha$$

Agora que estabelecemos uma relação entre S e S' podemos calcular DH e DI com o uso da mira perpendicular a linha de visada do fio médio,

$$DI = C + \frac{f}{h} \cdot S',$$

como

$$DH = DI \cdot \cos \alpha, \quad e \quad S' = S \cdot \cos \alpha$$

temos

$$DH = (C + \frac{f}{h} \cdot S') \cdot \cos \alpha$$

$$DH = (C + \frac{f}{h} \cdot S \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$DH = C \cdot \cos \alpha + \frac{f}{h} \cdot S \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$DH = C \cdot \cos \alpha + \frac{f}{h} \cdot S \cdot \cos^2 \alpha,$$

como na maioria dos aparelhos $\frac{f}{h} = 100$, para os aparelhos com luneta analítica ($C = 0$) podemos escrever,

$$DH = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha,$$

para os aparelhos com luneta alática (C entre 25 cm e 50 cm) temos,

$$DH = C \cdot \cos \alpha + 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha.$$

Em grande parte dos levantamentos topográficos o ângulo de inclinação α é pequeno, conseqüentemente o seu cosseno é muito próximo de 1. Nesses casos podemos, sem erro que prejudique os cálculos, descartar o $\cos \alpha$ em $C \cdot \cos \alpha$ desta maneira a fórmula para calcular DH pode ser escrita como:

$$DH = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha + C,$$

para os aparelhos com luneta alática, e

$$DH = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha, \quad (22)$$

para os aparelhos com luneta analática.

5.2 DISTÂNCIA INDIRETA

Atualmente praticamente todos os aparelhos em uso não possuem os fios estadimétricos, mas é possível fazer o cálculo da distância horizontal sem usar os recursos tecnológicos que esses aparelhos possuem. O que torna importante vermos esse tópico é o fato de mesmo com recursos improvisados é relativamente simples, obtermos as distâncias pretendidas.

Do ponto de vista didático, podemos desenvolver o estudo de trigonometria e geometria usando como exemplo prático a determinação de distâncias de difícil acesso, dispondo de materiais e técnicas simples de serem confeccionados e aplicadas.

5.2.1 Uma Visada Horizontal e Uma Inclinada

Para obtermos os dados necessários para calcular as distâncias horizontais desejadas, sem o uso de aparelhos que possuem fios estadimétricos, devemos efetuar duas visadas para o mesmo ponto. Analisaremos primeiro, o caso em que uma das visadas é horizontal e a outra inclinada, conforme mostra a figura 46.

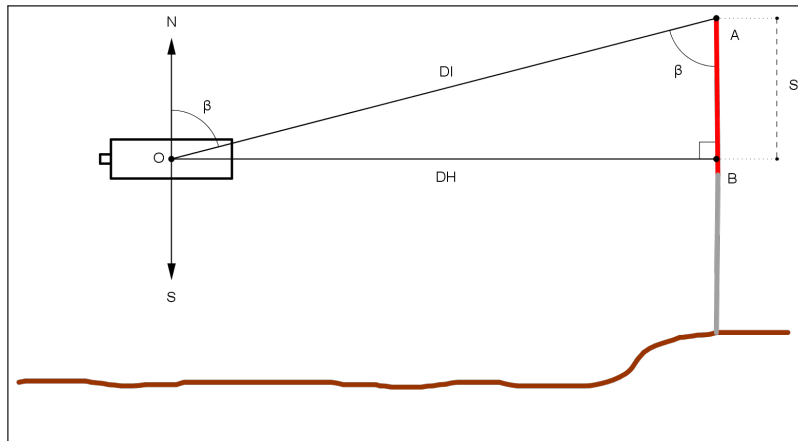


Figura 46: Uma visada horizontal e uma inclinada

Na figura 46 temos:

β : é o ângulo zenital.

S : é a diferença entre as leituras das visadas inclinada e horizontal.

DI : é a distância inclinada.

DH : é distância horizontal.

Na figura 46 o ângulo $\angle \beta$ e o ângulo $\angle OAB$ são alternos internos e portanto são congruentes. No triângulo ABO temos a seguinte relação:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{DH}{S}$$

$$DH = S \cdot \operatorname{tg} \beta$$

5.2.2 Duas Visadas Inclinadas

Quando não for possível efetuar uma visada horizontal podemos trabalhar com duas visadas inclinadas, como mostra a figura 47.

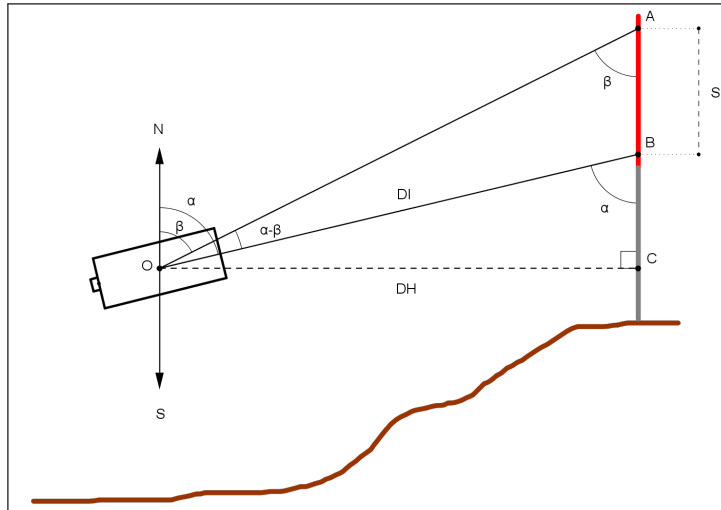


Figura 47: Duas visadas inclinadas

Na figura 47 temos:

α : é um ângulo zenital.

β : é outro ângulo zenital.

DI : é uma das distâncias inclinadas.

DH : é a distância horizontal.

S : é a diferença entre as leituras das duas visadas inclinadas.

Os ângulos $\angle\beta$ e $\angle OAB$ da figura 47 são alternos internos, e portanto congruentes, o mesmo acontece com os ângulos $\angle\alpha$ e $\angle OBC$. Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABO obtemos:

$$\frac{DI}{\text{sen } \beta} = \frac{S}{\text{sen}(\alpha - \beta)} \Rightarrow DI = \frac{S \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)},$$

e no triângulo BCO podemos escrever a seguinte relação,

$$\text{sen } \alpha = \frac{DH}{DI} \Rightarrow DH = DI \cdot \text{sen } \alpha,$$

como;

$$DI = \frac{S \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)} \Rightarrow DH = \frac{S \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

5.3 VERIFICAÇÃO DO ERRO DE FECHAMENTO ANGULAR

Quando os levantamentos por Poligonação ou Caminhamento forem feitos utilizando poligonais fechadas é necessário e possível fazer a verificação se houve erro angular. Como as poligonais fechadas formam polígonos, podemos calcular qual a soma dos ângulos internos ou dos ângulos externos. Faremos as análises dos erros angulares das poligonais com base na soma dos ângulos dos polígonos.

Começaremos analisando a soma dos ângulos internos de um triângulo. Dado um triângulo ABC qualquer, vamos traçar uma reta r paralela ao lado BC passando por A , e uma reta s que contém BC .

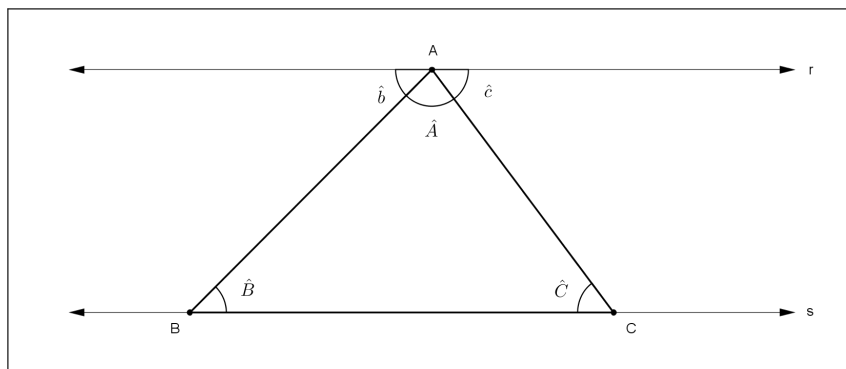


Figura 48: Polígono de três lados

De acordo com a figura 48 temos:

$$\hat{A} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ,$$

como r é paralela ao lado $BC \subset s$ os ângulos \hat{b} e \hat{B} , e \hat{c} e \hat{C} são alternos internos, temos,

$$\hat{b} = \hat{B}, \quad \text{e} \quad \hat{c} = \hat{C} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Concluimos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° .

Vamos analisar a soma das medidas dos ângulos internos de polígonos com quaisquer números de lados a partir da soma dos ângulos de um triângulo qualquer. Para isso, usaremos o recurso de dividir os polígonos em triângulos traçando todas as diagonais que partem de um vértice.

Seja um quadrilátero $ABCD$, traçando a diagonal que parte do vértice A

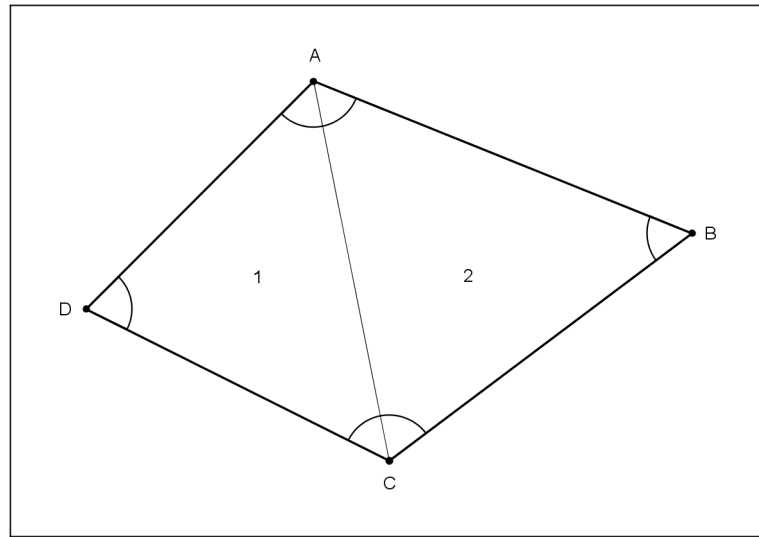


Figura 49: Polígono de quatro lados

obtemos dois triângulos e portanto a soma dos ângulos internos de $ABCD$ é

$$S_4 = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

analogamente para um pentágono, hexágono, heptágono temos:

$$S_5 = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

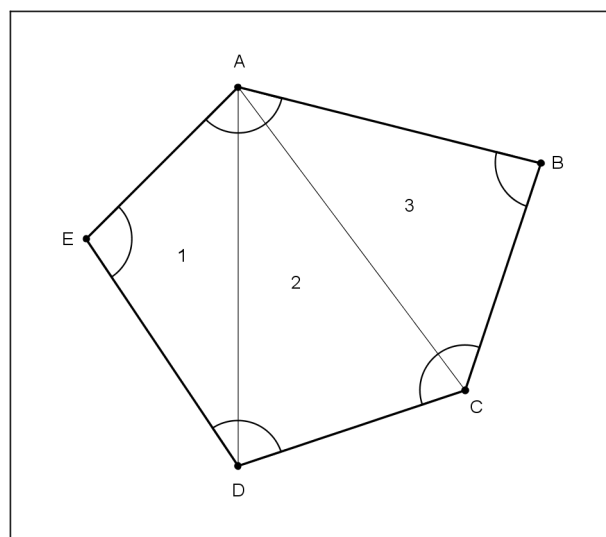


Figura 50: Polígono de cinco lados

$$S_6 = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

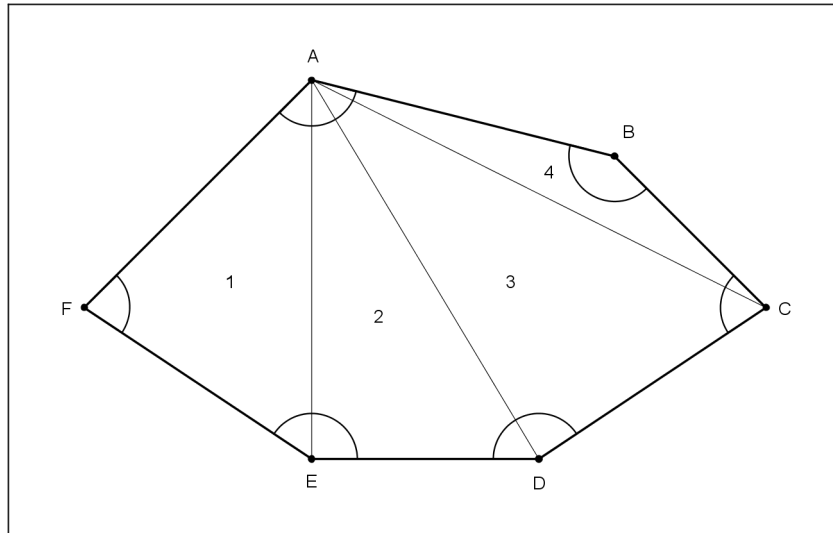


Figura 51: Polígono de seis lados

$$S_7 = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

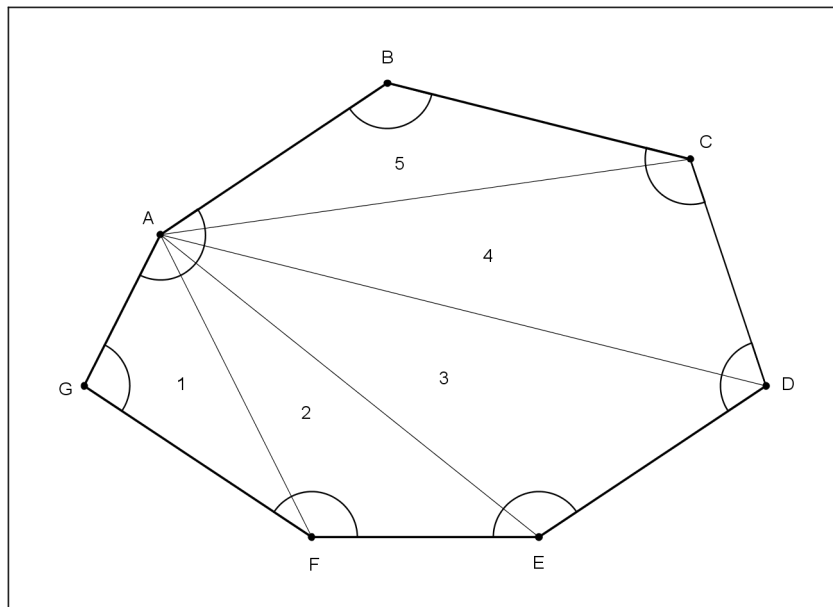


Figura 52: Polígono de sete lados

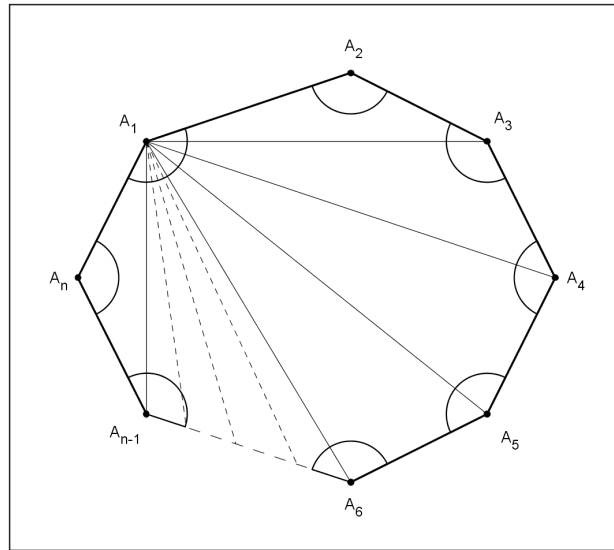


Figura 53: Polígono de n lados

Quando traçamos as diagonais que partem de um mesmo vértice num polígono de n lados, dos triângulos formados, dois deles $A_1A_2A_3$ e $A_1A_nA_{n-1}$ tem dois lados cada um coincidentes com os lados do polígono e os outros apenas um lado coincidente. Temos então $n - 4$ triângulos com um lado coincidente com o polígono e dois triângulos com dois lados coincidentes com o polígono. No total temos

$$n - 4 + 2 = n - 2$$

triângulos. Concluimos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Quando a poligonal é percorrida no sentido horário os seus ângulos serão externos. Como foi visto anteriormente o ângulo externo que temos na Topografia difere do ângulo externo da Matemática. Nas poligonais utilizadas nos levantamentos topográficos a soma dos ângulos externo e interno em um mesmo vértice é igual a 360° .

Tomemos uma poligonal de n lados; como em cada vértice a soma dos ângulos externo e internos é 360° , para n vértices teremos uma soma igual a $360^\circ \cdot n$, então a soma dos ângulos externos (S_e) da poligonal será

$$S_e = 360^\circ \cdot n - (n - 2) \cdot 180^\circ \Rightarrow S_e = 360^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ \Rightarrow$$

$$S_e = 180^\circ n + 360^\circ \Rightarrow S_e = (n + 2) \cdot 180^\circ$$

O próximo passo para determinar o erro de fechamento angular da poligonal é calcular a soma dos ângulos internos ou externos levantados no campo. O erro é determinado fazendo a subtração entre a soma dos ângulos que a poligonal deve ter e a soma dos ângulos medidos da poligonal. Analisando o erro cometido verifica-se se ele está dentro do nível de precisão exigido para o levantamento, caso esteja, o erro é distribuído entre os vértices, caso contrário deve-se voltar ao local do levantamento e refazer as medições dos ângulos da poligonal.

5.4 CÁLCULO DOS AZIMUTES

Depois de fazermos a correção do erro angular de fechamento da poligonal, calculamos os azimutes referentes a cada estação (vértice da poligonal). Analisaremos primeiro as poligonais que são percorridas no sentido horário e que portanto os ângulos são externos. Seja uma poligonal de n lados, conforme a figura 54.

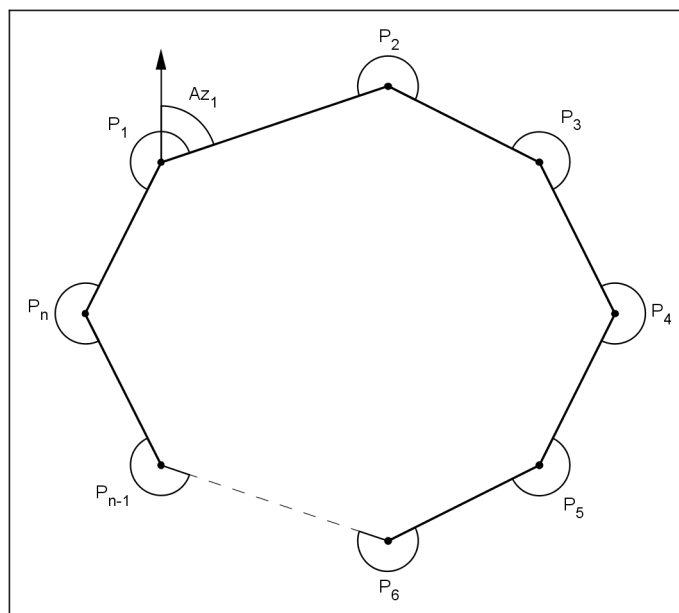


Figura 54: Poligonal horária de n lados

O azimute Az_1 é medido da primeira estação para a segunda, e à partir da segunda estação os azimutes são calculados de acordo com os valores do azimute anterior, do ângulo externo e da deflexão. Na poligonal representada na figura 54 todas as deflexões são para a direita. Mostraremos como calcular a deflexão de P_2 para P_3 , conforme a figura 55.

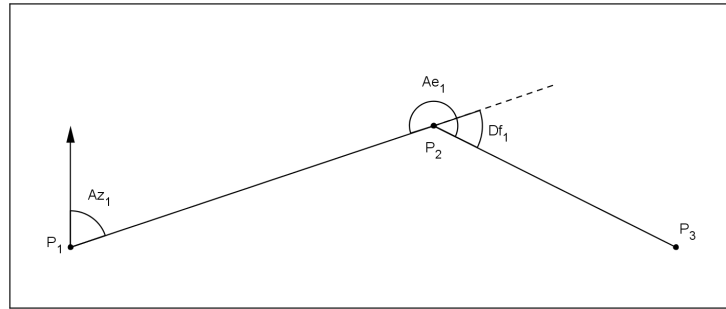


Figura 55: Cálculo de deflexão à direita

Na figura 55 temos:

Az_1 : é o azimute lido na estação P_1

Ae_1 : é o ângulo externo lido na estação P_2

Df_1 : é a deflexão da estação P_2 para P_3

podemos escrever que:

$$Df_1 = Ae_1 - 180^\circ \quad (23)$$

podemos concluir que para qualquer poligonal percorrida no sentido horário a deflexão à direita de uma estação n pode ser calculada usando a relação:

$$Df_{n-1} = Ae_{n-1} - 180^\circ$$

Depois de calculados os valores das deflexões podemos calcular os azimutes que não foram medidos no levantamento topográfico. Usando as deflexões à direita, conforme a figura 56, temos que:

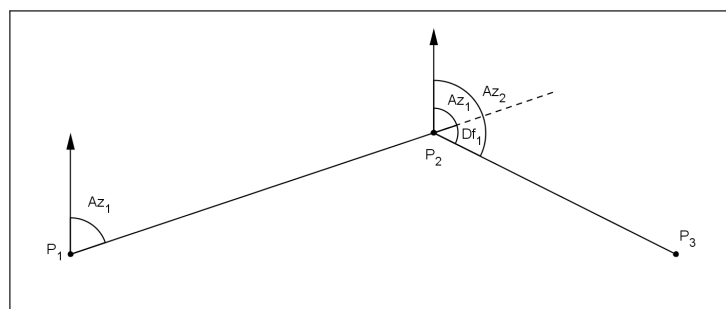


Figura 56: Cálculo de azimute na poligonal horária

$$Az_2 = Az_1 + Df_1 \quad (24)$$

substituindo (23) em (24) calculamos o azimute em função do ângulo externo e do azimute anterior

$$Az_2 = Az_1 + Ae_1 - 180^\circ$$

podemos concluir que para qualquer poligonal percorrida no sentido horário o azimute de uma estação n pode ser calculado por meio da relação:

$$Az_n = Az_{n-1} + Ae_{n-1} - 180^\circ$$

Quando em alguma estação o valor do azimute for superior a 360° devemos subtrair 360° do azimute obtido.

Analisaremos agora o cálculo de azimutes nas poligonais percorridas no sentido anti-horário e portanto com ângulos internos. Seja uma poligonal de n lados percorrida no sentido anti-horário conforme mostra a figura 57.

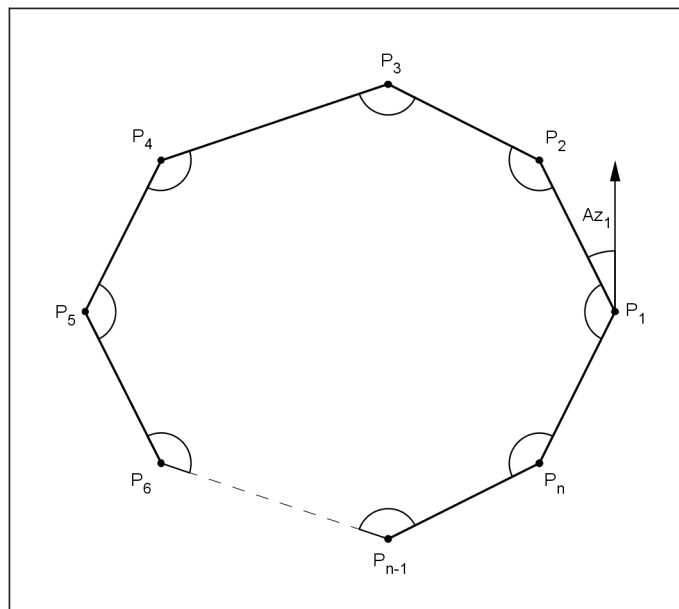


Figura 57: Poligonal anti-horária de n lados

Como no caso anterior o Az_1 também é medido na primeira estação e os demais são calculados utilizando-se os valores do azimute anterior, do ângulo interno e da deflexão

da estação correspondente. Na poligonal representada na figura 57 as deflexões são todas para à esquerda. Mostraremos como calcular as deflexões nesse caso.

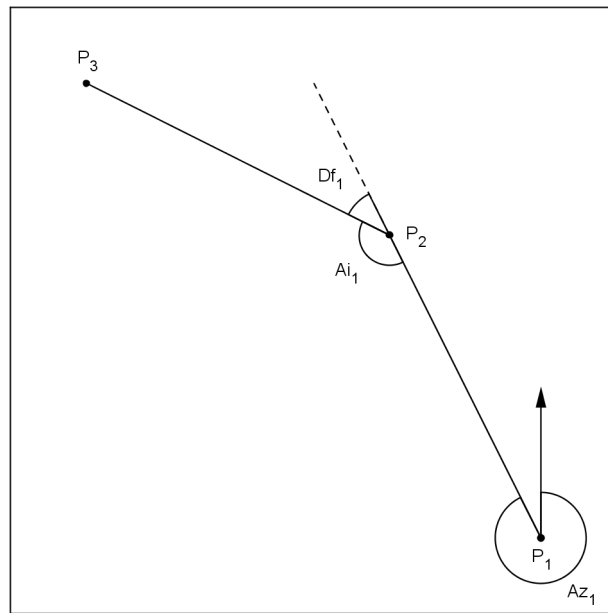


Figura 58: Cálculo de deflexão à esquerda

Na figura 58 temos:

Az_1 : é o azimute lido na estação P_1

Ai_1 : é o ângulo interno lido na estação P_2

Df_1 : é a deflexão da estação P_2 para P_3

podemos escrever que:

$$Df_1 = 180^\circ - Ai_1 \quad (25)$$

podemos concluir que para qualquer poligonal percorrida no sentido anti-horário a deflexão à esquerda de uma estação n pode ser calculada usando a relação:

$$Df_{n-1} = 180^\circ - Ai_{n-1}$$

Podemos agora calcular os azimutes que não foram medidos utilizando os valores das deflexões à esquerda. Conforme a figura 59 temos:

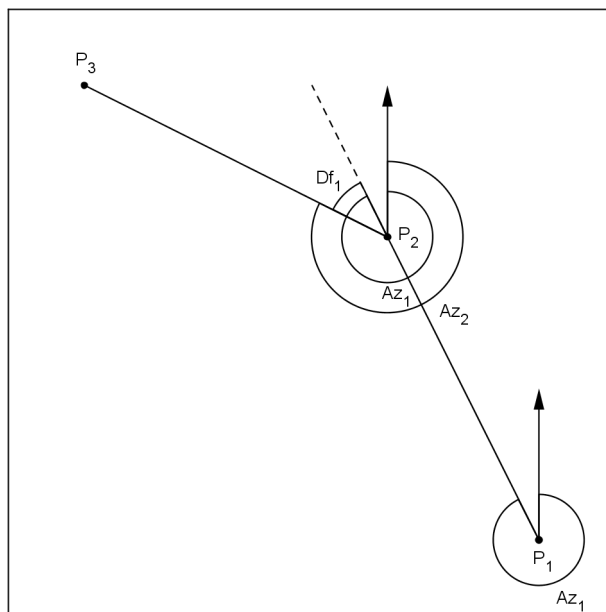


Figura 59: Cálculo de azimute na poligonal anti-horária

$$Az_2 = Az_1 - Df_1 \quad (26)$$

substituindo (25) em (26) calculamos o azimute em função do ângulo interno e do azimute anterior.

$$Az_2 = Az_1 - (180^\circ - Ai_1) \Rightarrow Az_2 = Az_1 + Ai_1 - 180^\circ$$

podemos concluir que para qualquer poligonal percorrida no sentido anti-horário o azimute de uma estação n pode ser calculado utilizando a relação:

$$Az_n = Az_{n-1} + Ai_{n-1} - 180^\circ$$

Quando em alguma estação o valor do azimute calculado for negativo, devemos adicionar 360° a esse valor.

5.5 CÁLCULO DAS PROJEÇÕES DAS ESTAÇÕES

O próximo passo para termos uma representação correta da região levantada é verificar o erro linear da poligonal, para isso é necessário calcular as projeções nos eixos X e Y dos alinhamentos entre as estações. Utilizando as medidas das distâncias entre as estações, o seno e o cosseno dos azimutes as projeções podem ser calculadas.

No cálculo das projeções a origem dos eixos ortogonais é transladada de estação em estação da poligonal. De acordo com o quadrante em que a extremidade do azimuth está localizado, essas projeções poderão ter sinais positivos ou negativos.

Seja uma poligonal de quatro lados com azimuths com extremidades em cada um dos quadrantes conforme a figura 60.

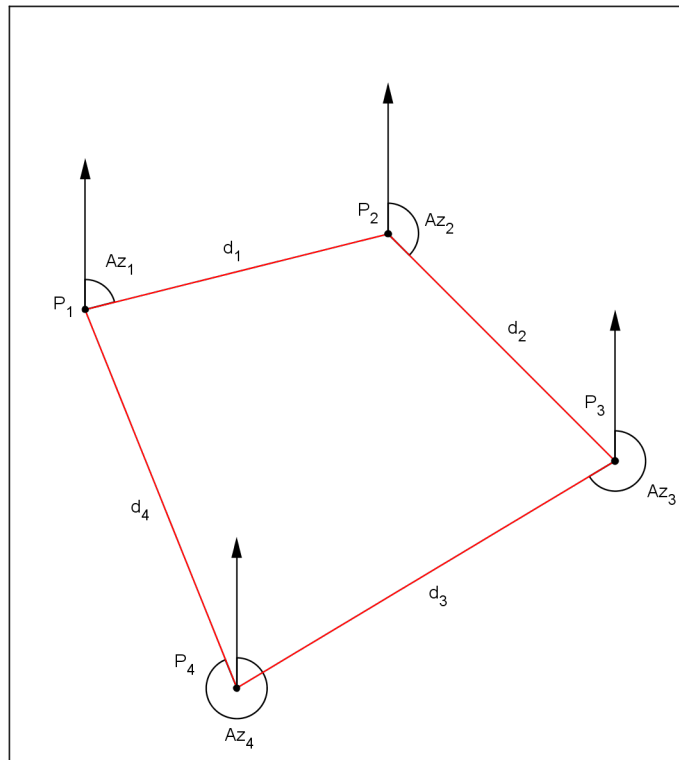


Figura 60: Azimutes numa poligonal

Os valores do seno e cosseno de ângulos que são simétricos em relação aos eixos X ou Y, ou a origem dos eixos tem mesmo módulo, podendo ter sinais diferentes de acordo com o quadrante onde está localizada a sua extremidade. Em trigonometria é feita a redução ao primeiro quadrante para determinar as razões trigonométricas de ângulos maiores que 90° , portanto a simetria é analisada entre o quadrante da extremidade do azimuth e o primeiro quadrante.

Vamos mostrar primeiro como calcular as projeções da estação P_2 em X e Y tendo a estação P_1 como origem dos eixos cartesianos, ou seja, $P_1 = (x_1, y_1) = (0, 0)$, conforme a figura 61.

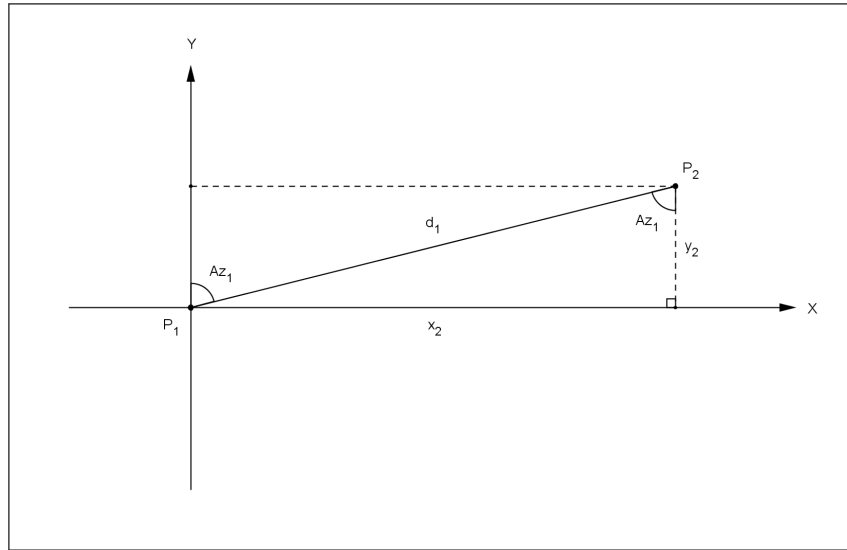


Figura 61: Azimute do primeiro quadrante

Az_1 : é o azimute de P_1 para P_2

d_1 : é a distância entre as estações P_1 e P_2

x_2 : é a abscissa de P_2

y_2 : é a ordenada de P_2

$$\text{sen } Az_1 = \frac{x_2}{d_1} \Rightarrow x_2 = d_1 \cdot \text{sen } Az_1$$

$$\text{cos } Az_1 = \frac{y_2}{d_1} \Rightarrow y_2 = d_1 \cdot \text{cos } Az_1$$

No cálculo das projeções da estação P_3 temos que o azimute de P_2 para P_3 tem extremidade no segundo quadrante e é simétrico em relação ao eixo X ao seu ângulo suplementar α no primeiro quadrante, e que portanto temos:

$$\text{sen } Az_2 = \text{sen } \alpha, \quad \text{e} \quad (27)$$

$$\text{cos } Az_2 = -\text{cos } \alpha \quad (28)$$

como o cosseno no segundo quadrante é negativo então a ordenada de P_3 é negativa. Conforme a figura 62,

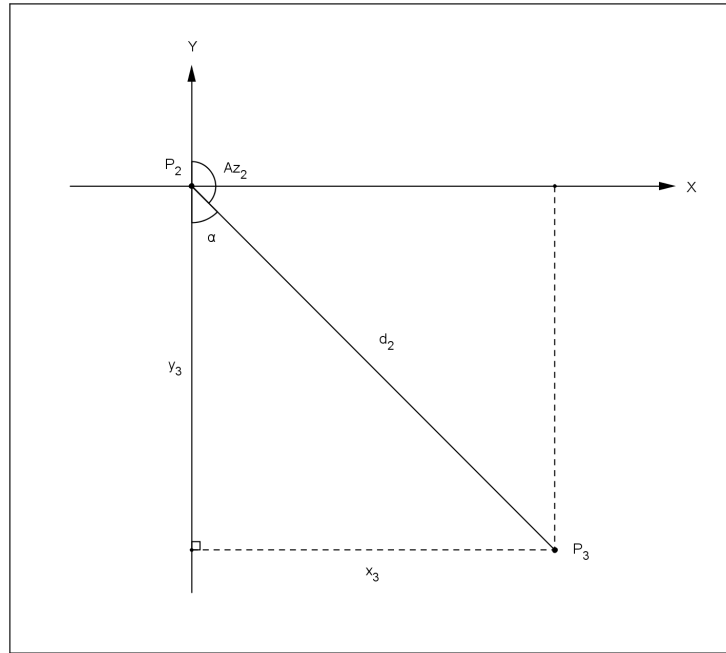


Figura 62: Azimute do segundo quadrante

temos:

Az_2 : é o azimute de P_2 para P_3

d_2 : é a distância entre as estações P_2 e P_3

x_3 : é a abscissa de P_3

y_3 : é a ordenada de P_3

α : é o ângulo suplementar de Az_2

$$\text{sen } \alpha = \frac{x_3}{d_2} \Rightarrow x_3 = d_2 \cdot \text{sen } \alpha \quad (29)$$

substituindo (27) em (29) encontramos,

$$x_3 = d_2 \cdot \text{sen } Az_2$$

podemos escrever também que,

$$\cos \alpha = \frac{-y_3}{d_2} \Rightarrow -y_3 = d_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow y_3 = -d_2 \cdot \cos \alpha \quad (30)$$

substituindo (28) em (30) encontramos,

$$y_3 = d_2 \cdot \cos Az_2.$$

Os Cálculos das projeções das outras estações seguem o mesmo raciocínio, sendo que, para o azimute com extremidade no terceiro quadrante teremos,

$$\text{sen } Az_3 = -\text{sen}(Az_3 - 180^\circ) \quad \text{e} \quad \cos Az_3 = -\cos(Az_3 - 180^\circ),$$

e para o azimute com extremidade no quarto quadrante teremos,

$$\text{sen } Az_4 = -\text{sen}(360^\circ - Az_4) \quad \text{e} \quad \cos Az_4 = \cos(360^\circ - Az_4).$$

Concluimos que para calcular as projeções nos eixos X e Y das estações de uma poligonal qualquer podemos utilizar as seguintes fórmulas:

$$x_n = d_{n-1} \cdot \text{sen } Az_{n-1}$$

$$y_n = d_{n-1} \cdot \cos Az_{n-1}.$$

5.5.1 Verificação e Distribuição do Erro de Fechamento Linear

Tendo calculado as projeções das estações, é possível verificar o erro linear cometido no levantamento topográfico. Primeiro somamos todas as abscissas calculadas:

$$e_x = \Sigma x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n,$$

se a soma for igual a zero não houve erro, caso contrário ocorreu um erro nas projeções no eixo X. Em seguida procedemos da mesma forma para as projeções no eixo Y:

$$e_y = \Sigma y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n,$$

e de maneira similar ao eixo X verificamos se houve erro nas projeções no eixo Y.

Calcularemos agora o erro de fechamento linear absoluto, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura 63, temos:

e_x : é o erro linear nas projeções no eixo X

e_y : é o erro linear nas projeções no eixo Y

Ef : é o erro de fechamento linear absoluto

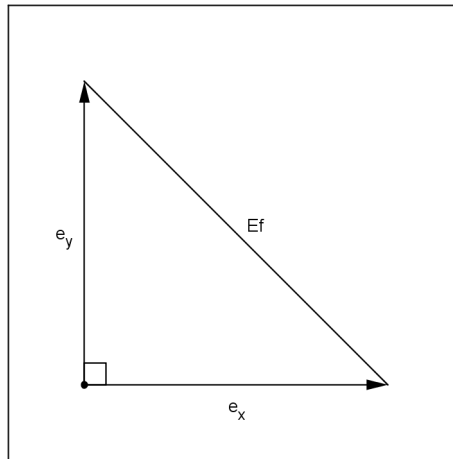


Figura 63: Erro de fechamento linear absoluto

$$Ef^2 = e_x^2 + e_y^2$$

$$Ef = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

Devemos verificar se o erro cometido está dentro do nível de precisão exigido no trabalho, para isso fazemos a razão entre o erro absoluto e o perímetro da poligonal. Seja:

Ef : é o erro de fechamento linear absoluto

Σd : é o perímetro da poligonal

M : é o erro de fechamento linear relativo

$$M = \frac{Ef}{\Sigma d}$$

simplificando a razão por Ef obtemos,

$$M = \frac{1}{\frac{\Sigma d}{Ef}}$$

Estando o erro de fechamento linear absoluto acima do erro permitido, deve-se realizar novamente o levantamento da poligonal, caso contrário o erro deve ser distribuído entre os valores das projeções. Podemos fazer as correções, ou em função dos somatórios das projeções em cada eixo, ou levando em consideração o perímetro da poligonal. No presente texto faremos a distribuição considerando o perímetro da poligonal.

Quando consideramos o perímetro da poligonal na distribuição do erro linear, fazemos proporcionalmente a razão entre a distância de cada lado e o perímetro da poligonal. Seja:

Cx_n : é a correção da projeção no eixo X

Cy_n : é a correção da projeção no eixo Y

e_x : é o erro linear nas projeções no eixo X

e_y : é o erro linear nas projeções no eixo Y

d_n : é a distância entre os pontos da poligonal

Σd : é o perímetro da poligonal

$$Cx_n = e_x \cdot \frac{d_n}{\Sigma d}$$

$$Cy_n = e_y \cdot \frac{d_n}{\Sigma d}$$

Concluimos que as coordenadas corrigidas de um ponto P_n são:

$$P_n = (d_{n-1} \cdot \text{sen } Az_{n-1} + Cx_n, d_{n-1} \cdot \text{cos } Az_{n-1} + Cy_n)$$

5.6 CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS VERTICAIS

A segunda etapa, após ter sido feito o nivelamento de uma região, é realizar os cálculos para determinar as cotas, altitudes, diferenças de nível e posteriormente, fazer a representação gráfica da área levantada. Mostraremos no presente trabalho os cálculos para Nivelamentos Geométrico e Trigonométrico.

5.6.1 Nivelamento Geométrico

No Nivelamento Geométrico o nível é instalado em um local onde é feita uma visada na mira colocada sobre um ponto de altitude ou cota conhecida, visada de ré, depois são feitas visadas sobre pontos onde se deseja determinar as altitudes, chamados pontos de vante, como mostra a figura 64.

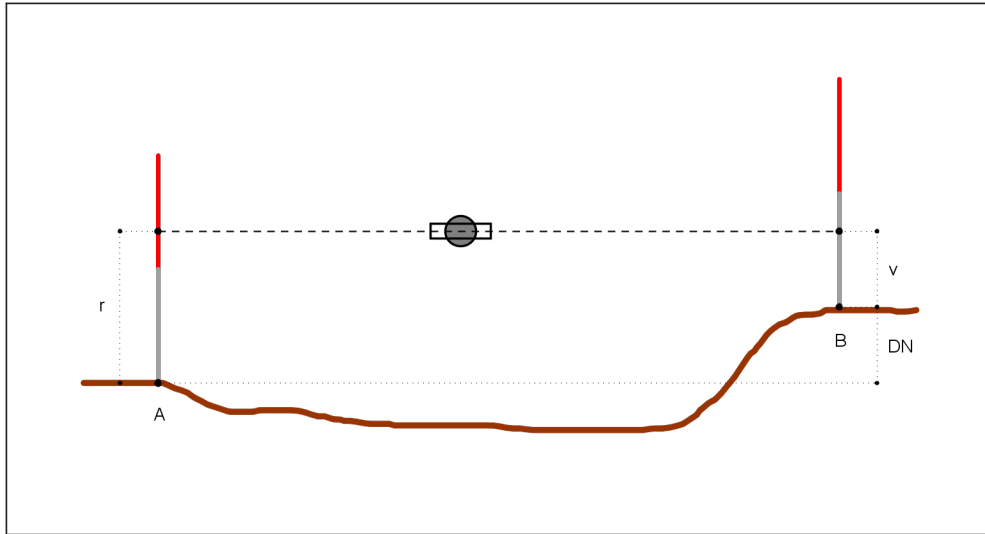


Figura 64: Nivelamento Geométrico

Para calcular as altitudes ou cotas dos pontos de vante, soma-se a altitude do primeiro ponto a leitura de ré, ou seja, a primeira leitura feita na mira, em um ponto de cota conhecida (ponto A), descobrindo assim a altura do nível, de posse deste valor basta subtraí-lo do valor da leitura da mira nos pontos de vante (ponto B). Chamando de:

r : é a leitura do ponto de ré

v : é a leitura do ponto de vante

RN : é a altitude do ponto de referência de nível (cota conhecida)

H : é a altitude do ponto de vante (a ser calculada)

DN : é a diferença de nível entre os pontos A e B

temos,

$$DN = r - v$$

$$H = RN + DN$$

5.6.2 Nivelamento Trigonométrico

O Nivelamento trigonométrico é feito usando o Teodolito para realizar a medição dos ângulos zenital e de inclinação, com essas medidas, e conceitos básicos de trigonometria são calculadas as altitudes e as cotas dos pontos levantados.

Nos casos em que a distância horizontal é obtida de maneira direta, a diferença de nível pode ser calculada à partir da leitura da mira falante no ponto de cota desconhecida, como mostra a figura 65.

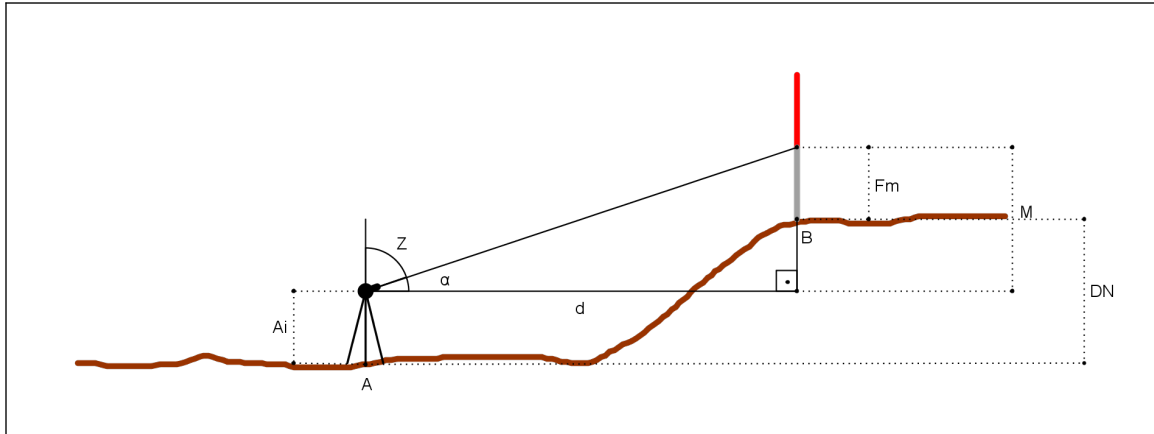


Figura 65: Nivelamento Trigonométrico

Na figura 64 temos:

M : é a distância vertical entre o ponto de visada do fio médio e o ponto da altura do aparelho

DN : é a diferença de nível entre os pontos A e B

Fm : é a leitura do fio medio na mira falante

Ai : é a altura do instrumento (teodolito)

Z : é o ângulo zenital

α : é o ângulo de inclinação

d : é a distância horizontal

Usando trigonometria no triângulo retângulo da figura podemos escrever,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{d} \Rightarrow M = d \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (31)$$

podemos escrever também que,

$$M + Ai = DN + Fm \Rightarrow DN = M + Ai - Fm \quad (32)$$

substituindo (31) em (32) obtemos

$$DN = d \cdot \operatorname{tg} \alpha + Ai - Fm$$

No caso em que a distância horizontal for obtida indiretamente podemos calcular a distância horizontal e a diferença de nível usando taqueometria. Conforme a figura 66 temos:

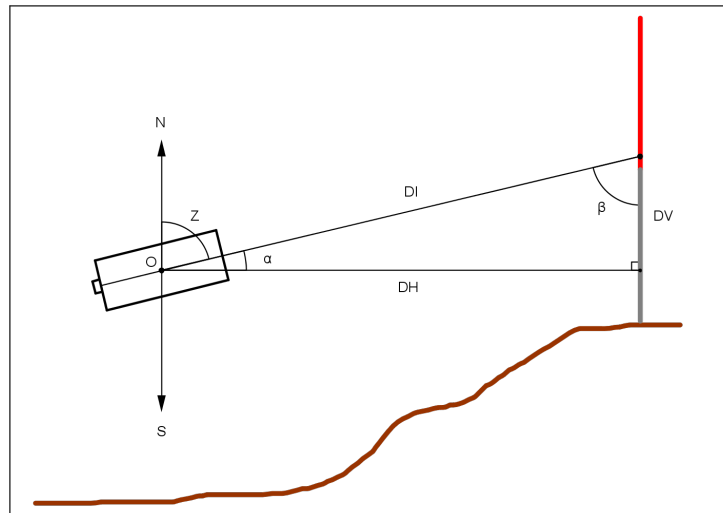


Figura 66: Distância vertical

α : é o ângulo de inclinação

DI : é a distância inclinada

DH : é a distância horizontal

DV : é a distância vertical

de acordo com o triângulo retângulo da figura 66 podemos escrever:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DV}{DH} \Rightarrow DV = DH \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (33)$$

substituindo (22) em (33) obtemos,

$$DV = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$ então

$$DV = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \Rightarrow DV = 100 \cdot S \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha \quad (34)$$

mas da trigonometria tem-se que

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

se $a = b = \alpha$ temos

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \quad (35)$$

substituindo (35) em (34) obtemos

$$DV = 100 \cdot S \cdot \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \Rightarrow DV = 50 \cdot S \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

Depois de ter calculado o valor de DV podemos obter a cota do ponto B a partir da cota do ponto A através da relação:

$$C_B - C_A = Ai + DV - Fm \Rightarrow C_B = C_A + Ai + DV - Fm,$$

onde:

C_B : é a cota do ponto B

C_A : é a cota do ponto A

Ai : é a altura do aparelho

Fm : é a leitura do fio médio

6 EXEMPLOS MATEMÁTICOS

ENVOLVENDO TOPOGRAFIA

Na produção desse capítulo, foram usados como referências textos contidos em, [1], [9], [10], [11], [16], [17].

Os problemas a seguir foram retirados dos livros "Temas e Problemas" e "Temas e Problemas Elementares" de autoria de: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado.

Exemplo 1. Calcular a altura do Pão de Açúcar.

Um observador está em um ponto A do Aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (medido com teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14° . Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

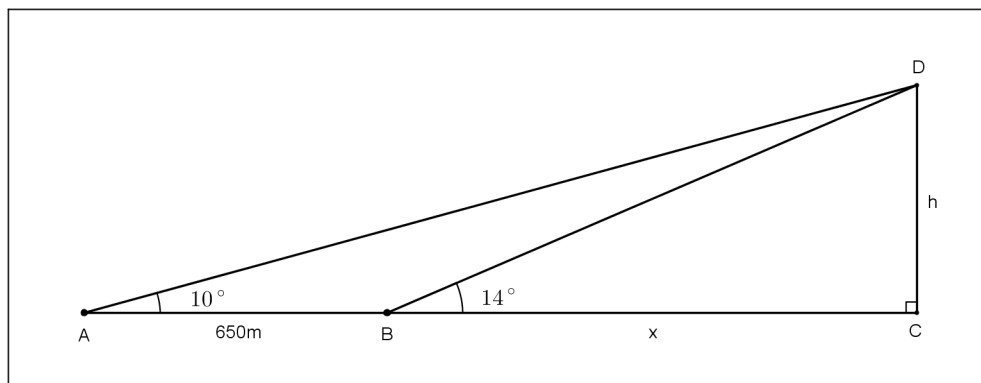


Figura 67: Cálculo da altura do Pão de Açúcar

No triângulo retângulo ACD podemos escrever a seguinte razão trigonométrica:

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{h}{(650 + x)} \Rightarrow h = (650 + x) \cdot \operatorname{tg} 10^\circ \quad (36)$$

e no triângulo BCD temos,

$$\operatorname{tg} 14^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\operatorname{tg} 14^\circ}, \quad (37)$$

substituindo (37) em (36) obtemos,

$$h = 650 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ + \frac{h}{\operatorname{tg} 14^\circ} \cdot \operatorname{tg} 10^\circ \Rightarrow h = 650 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ + h \cdot \frac{\operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 14^\circ},$$

como $\operatorname{tg} 10^\circ = 0,1763$ e $\operatorname{tg} 14^\circ = 0,2493$, temos:

$$h = 650 \cdot 0,1763 + h \cdot \frac{0,1763}{0,2493} \Rightarrow h = 114,595 + 0,7072h \Rightarrow$$

$$0,2928h = 114,595 \Rightarrow h = \frac{114,595}{0,2928} \Rightarrow h = 391,38 \text{ m}$$

Concluimos então que a altura aproximada do Pão de Açúcar em relação ao plano horizontal de medição é de 391,38 m.

Exemplo 2. Medir a distância de um ponto do Rio de Janeiro a um ponto visível de Niterói.

De um ponto A na praia do Flamengo no Rio de Janeiro, avista-se um ponto P na praia de Icaraí em Niterói (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B na Praia do Flamengo, distante 1 km de A também se avista o ponto P. Um observador no Rio de Janeiro mediu os ângulos $\hat{BAP} = 119^\circ$ e $\hat{ABP} = 52^\circ$. Qual é a distância entre A e P?

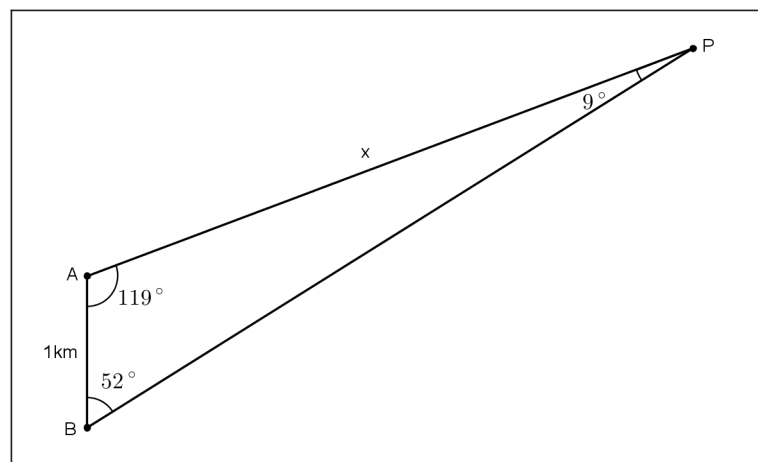


Figura 68: Cálculo da distância a um ponto inacessível

No triângulo ABP obtemos a medida do terceiro ângulo fazendo,

$$180^\circ - (119^\circ + 52^\circ) = 9^\circ,$$

aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABP obtemos,

$$\frac{x}{\text{sen } 52^\circ} = \frac{1}{\text{sen } 9^\circ} \Rightarrow x \cdot \text{sen } 9^\circ = 1 \cdot \text{sen } 52^\circ \Rightarrow x = \frac{\text{sen } 52^\circ}{\text{sen } 9^\circ}$$

como $\text{sen } 9^\circ = 0,1564$ e $\text{sen } 52^\circ = 0,7880$ temos,

$$x = \frac{0,7880}{0,1564} \Rightarrow x = 5,04 \text{ km}$$

concluimos que a distância entre os pontos A e P é de 5,04 km.

Exemplo 3. Calcular a distância entre dois pontos, ambos inacessíveis.

De uma praia é possível ver duas ilhas X e Y. Um observador assinala nesta praia dois pontos A e B distantes 1 Km entre si, com seu instrumento mede os seguintes ângulos: $\angle XAY = 62^\circ$, $\angle YAB = 54^\circ$, $\angle ABX = 46^\circ$ e $\angle XBY = 74^\circ$. Qual é a distância entre X e Y?

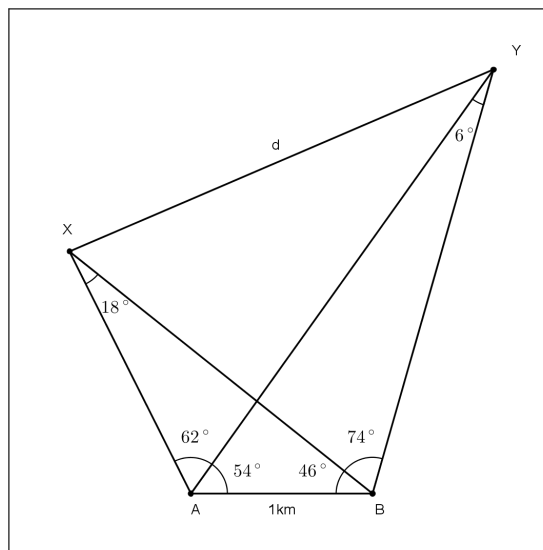


Figura 69: Cálculo da distância entre pontos inacessíveis

No triângulo ABX calculamos o ângulo $\angle AXB$ da seguinte maneira,

$$\widehat{AXB} = 180^\circ - (62^\circ + 54^\circ + 46^\circ) = 18^\circ,$$

da mesma forma no triângulo ABY , calculamos o ângulo $\angle AYB$,

$$\widehat{AYB} = 180^\circ - (54^\circ + 46^\circ + 74^\circ) = 6^\circ$$

No triângulo ABX aplicando a Lei dos Senos obtemos,

$$\frac{\overline{AX}}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 18^\circ} \Rightarrow \overline{AX} \cdot \operatorname{sen} 18^\circ = 1 \cdot \operatorname{sen} 46^\circ \Rightarrow \overline{AX} = \frac{\operatorname{sen} 46^\circ}{\operatorname{sen} 18^\circ},$$

como $\operatorname{sen} 46^\circ = 0,7193$ e $\operatorname{sen} 18^\circ = 0,3090$, temos:

$$\overline{AX} = \frac{0,7193}{0,3090} \Rightarrow \overline{AX} = 2,328 \text{ km}$$

No triângulo ABY temos que,

$$\widehat{ABY} = 46^\circ + 74^\circ = 120^\circ,$$

e aplicando a Lei dos Senos em ABY obtemos,

$$\frac{\overline{AY}}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 6^\circ} \Rightarrow \overline{AY} \cdot \operatorname{sen} 6^\circ = 1 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ \Rightarrow \overline{AY} = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{\operatorname{sen} 6^\circ}$$

como $\operatorname{sen} 120^\circ = 0,8660$ e $\operatorname{sen} 6^\circ = 0,1045$, temos:

$$\overline{AY} = \frac{0,8660}{0,1045} \Rightarrow \overline{AY} = 8,285 \text{ km}$$

Sabendo as medidas de \overline{AX} , \overline{AY} e a medida do ângulo $\angle ABY$, aplicamos a Lei dos Cossenos no triângulo AXY e calculamos a distância d entre os pontos X e Y ,

$$d^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 - 2 \cdot \overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot \cos 62^\circ$$

$$d^2 = (2,328)^2 + (8,285)^2 - 2 \cdot 2,328 \cdot 8,285 \cdot 0,4695$$

$$d^2 = 5,419584 + 68,641225 - 18,10984676$$

$$d^2 = 55,9509414$$

$$d = \sqrt{55,9509414}$$

$$d = 7,48 \text{ km}$$

Concluimos que a distância entre os pontos X e Y é de 7,48 km.

Exemplo 4. Calcular o raio da Terra.

A montanha onde está o Cristo Redentor no Rio de Janeiro está a 703 m de altura em relação ao nível do mar. Lá de cima, um observador vê o horizonte (no mar) segundo um ângulo de $0,85^\circ$ com o plano horizontal. Encontre uma medida aproximada para o raio da Terra.

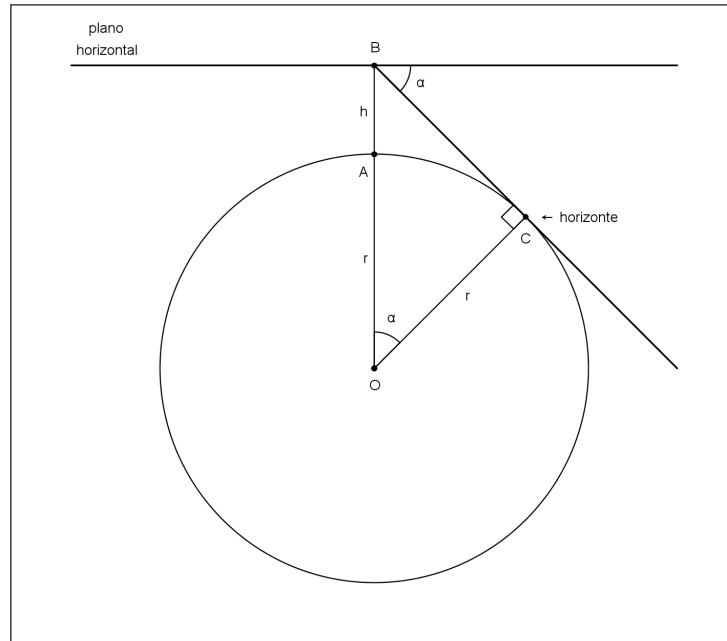


Figura 70: Cálculo do raio da Terra

Analisando a figura 70 podemos escrever,

$$\alpha + \widehat{O\hat{B}C} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \widehat{O\hat{B}C} \quad (38)$$

e no triângulo retângulo OBC temos:

$$\widehat{O\hat{B}C} + \widehat{C\hat{O}B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C\hat{O}B} = 90^\circ - \widehat{O\hat{B}C}, \quad (39)$$

substituindo (38) em (39) obtemos,

$$\widehat{C\hat{O}B} = \alpha$$

Podemos analisando ainda o triângulo OBC escrever que,

$$\cos \alpha = \frac{r}{h+r} \Rightarrow r = \cos \alpha \cdot (h+r) \Rightarrow r = h \cdot \cos \alpha + r \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$r - r \cdot \cos \alpha = h \cdot \cos \alpha \Rightarrow r \cdot (1 - \cos \alpha) = h \cdot \cos \alpha \Rightarrow r = \frac{h \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

como $h = 0,703$ km e $\cos 0,85^\circ = 0,999888$ temos

$$r = \frac{0,703 \cdot 0,99988}{1 - 0,99988} \Rightarrow r = \frac{0,70292}{0,00011} \Rightarrow r = 6387,82 \text{ km}$$

Portanto o raio encontrado é de aproximadamente 6387,82 km, valor bem próximo do raio médio da Terra que é de cerca de 6370 km.

Exemplo 5. Cálculo do raio da Terra por Eratóstenes.

No dia do solstício de verão, Eratóstenes verificou que, ao meio dia, o Sol brilhava diretamente dentro de um poço profundo em Assuã e, em Alexandria, a 5000 estádios ao norte de Assuã, alguém mediu o ângulo que os raios solares faziam com a vertical, encontrando $\frac{1}{50}$ do círculo. Com base nestes dados, calcule o raio da Terra.

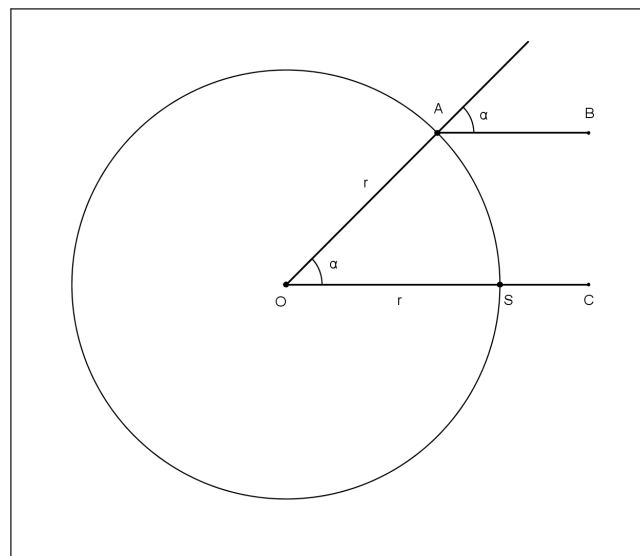


Figura 71: Cálculo do raio da Terra por Eratóstenes

O fato em que o exemplo 5 retrata ocorreu no século III a.E.C., quando da tentativa de Eratóstenes medir o raio da Terra. Por essa época, o estádio era uma unidade de medida utilizada para medir distâncias grandes, equivalia ao comprimento de uma pista de corrida usada nos Jogos Olímpicos da antiguidade, que era de cerca de 161 m.

Na figura 71, os raios solares, representados pelos segmentos AB e SC são paralelos então, os ângulos α e $\angle AOS$ são correspondentes, portanto congruentes, ou seja,

$$\widehat{AOS} = \alpha.$$

Podemos escrever a relação do arco AS com a circunferência da seguinte forma:

medida do arco (radianos)	comprimento do arco (estádios)
2π	$2\pi r$
$\frac{2\pi}{50}$	5000

$$\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{50}} = \frac{2\pi r}{5000} \Rightarrow 2\pi r \cdot \frac{2\pi}{50} = 2\pi \cdot 5000 \Rightarrow 2\pi r = \frac{2\pi \cdot 5000}{\frac{2\pi}{50}} \Rightarrow$$

$$2\pi r = 2\pi \cdot 5000 \cdot \frac{50}{2\pi} \Rightarrow 2\pi r = 5000 \cdot 50 \Rightarrow r = \frac{250000}{2\pi},$$

mas como 1 estádio é equivalente a 161m, temos

$$r = \frac{250000 \cdot 161}{2 \cdot 3,14159} \Rightarrow r = \frac{40250000}{6,28318} \Rightarrow r = 6405986,46 \text{ m} = 6405,98646 \text{ km}$$

Portanto o valor do raio da Terra encontrado por Eratóstenes foi de aproximadamente 6405,99 km, o que levando-se em consideração os recursos da época é um resultado muito bom.

Vamos agora ver dois exemplos retirados do livro Matemática por Assunto de autoria de Fernando do Coltro Antunes. Nas duas situações apresentadas as medidas são obtidas fazendo uso de recursos topográficos e as medidas desejadas são calculadas usando Trigonometria.

Exemplo 6. Cálculo da altura do cume de uma montanha

Imagine que você precise calcular a altura do cume de uma montanha, para isso mede-se com um teodolito e uma trena, os ângulos α , β , γ e a distância entre os pontos A e B .

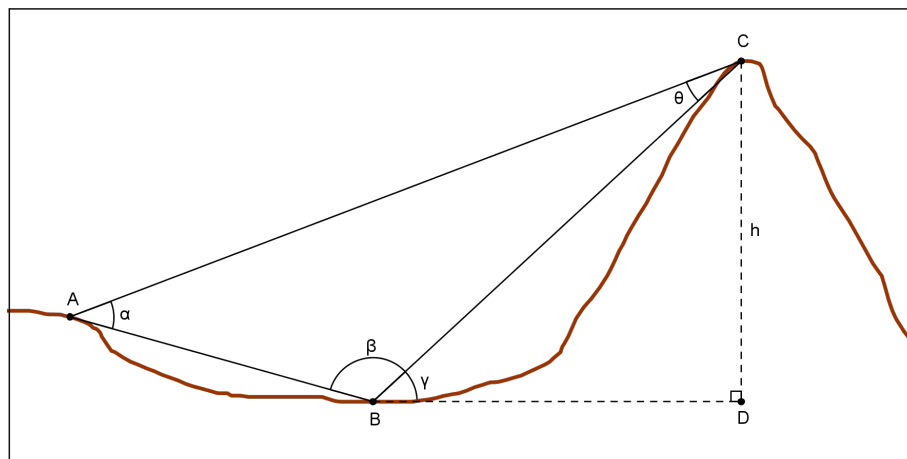


Figura 72: Cálculo da altura do cume de uma montanha

No triângulo ABC mostrado na figura 72 temos que,

$$\Theta = \widehat{ACB} = 180^\circ - (\beta + \alpha),$$

e no triângulo retângulo BCD podemos escrever,

$$\text{sen } \gamma = \frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow h = \overline{BC} \cdot \text{sen } \gamma, \quad (40)$$

como conhecemos a medida do ângulo α , precisamos calcular medida de \overline{BC} , para isso usaremos a Lei dos Senos no triângulo ABC ,

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \Theta} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \Theta} \quad (41)$$

substituindo (41) em (40) obtemos,

$$h = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \Theta}$$

Desta maneira calculamos a altura do cume de uma montanha a partir das medidas dos ângulos α, β, γ e da distância \overline{AB} medidos utilizando técnicas topográficas.

Exemplo 7. Cálculo da distância entre duas ilhas

Imagine que você está em uma praia de frente para o mar e avista duas ilhas. Como calcular a distância que separa essas duas ilhas, se não é possível fazer a medição direta?

Para solucionar essa situação devemos definir quais são as medidas que podemos fazer no local para calcularmos a distância entre as ilhas.

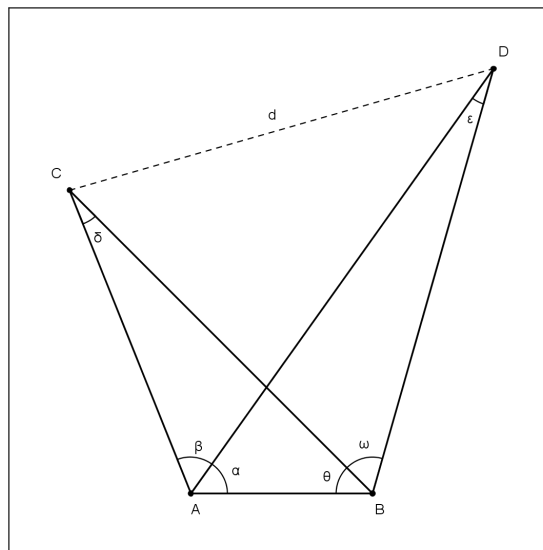


Figura 73: Cálculo da distância entre duas ilhas

Na figura 73, temos um esquema simplificado da situação na praia. Os pontos A e B são marcados na praia e os pontos C e D estão localizados nas margens da ilha.

Aplicando a Lei dos Senos nos triângulos ABC e ABD obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } \delta} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \delta},$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\text{sen}(\theta + \omega)} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \varepsilon} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen}(\theta + \omega)}{\text{sen } \varepsilon}$$

Dessa maneira, calculamos as medidas dos lados AC e AD , utilizando a Lei dos Cossenos no triângulo ACD , calculamos a distância d entre as ilhas,

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen } \beta \Rightarrow d = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen } \beta}$$

Concluimos que para calcular a distância entre as ilhas, precisamos obter através de métodos topográficos as medidas dos ângulos α , β , θ , ω , e da distância entre os pontos A e B .

Para finalizar mostraremos dois exemplos que são muito comuns em livros didáticos de Matemática, no capítulo que trata sobre Trigonometria. O primeiro exemplo é retirado do livro Matemática: Compreensão e Prática, da autoria de Ênio Silveira.

Exemplo 8. Cálculo da largura de um rio

Para saber a largura de um rio, mediu-se a distância $\overline{AB} = 10$ m e o ângulo $\angle ABC$, cuja medida é de 75° . Qual é a medida da largura do rio?

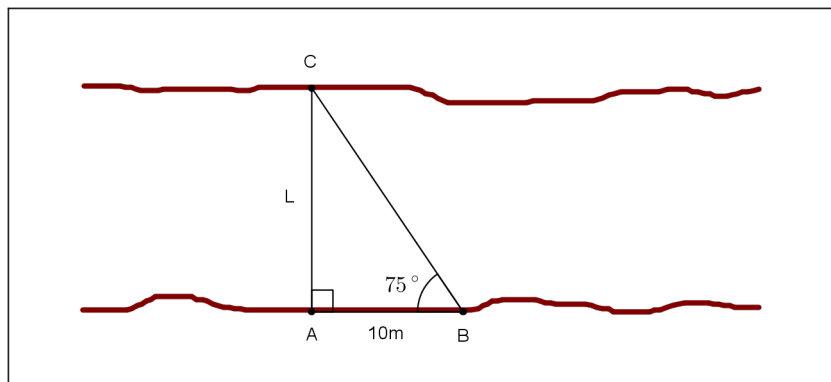


Figura 74: Cálculo da largura de um rio

Analisando o triângulo retângulo ABC da figura 74, podemos escrever que,

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{L}{10} \Rightarrow L = 10 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$$

como $\operatorname{tg} 75^\circ = 3,732$ temos

$$L = 10 \cdot 3,732 = 37,32 \text{ m.}$$

Portanto a largura do rio é de aproximadamente 37,32 m.

O próximo exemplo foi retirado do livro Vontade de Saber: Matemática, da autoria de Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro.

Exemplo 9. Cálculo da altura de uma árvore

Para calcular a altura de uma árvore, Marcelo construiu o esquema a seguir com o auxílio de um teodolito. Qual é a altura aproximada dessa árvore?

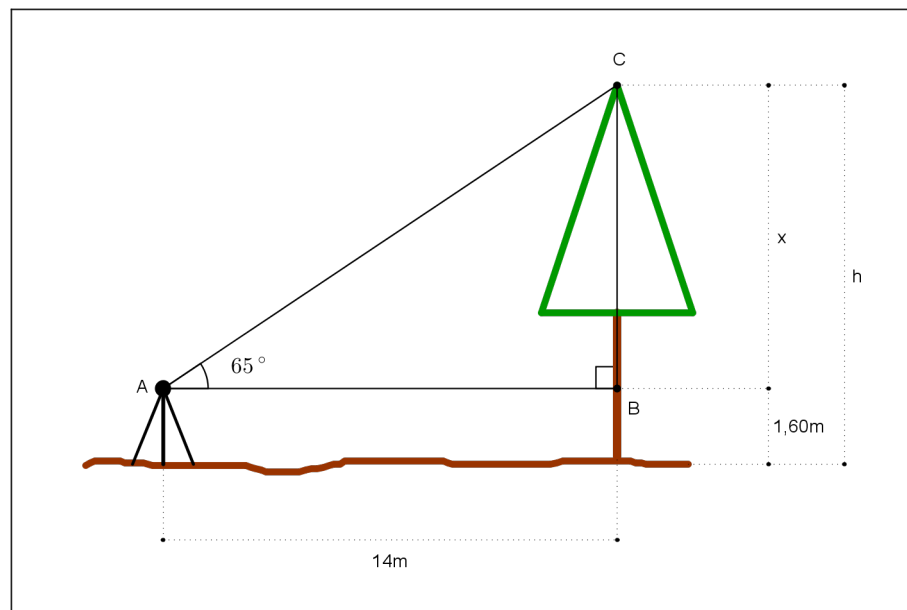


Figura 75: Cálculo da altura de uma árvore

Na figura 75, o triângulo ABC é retângulo e podemos escrever,

$$\operatorname{tg} 65^\circ = \frac{x}{14}$$

$$x = 14 \cdot \operatorname{tg} 65^\circ$$

mas como $\operatorname{tg} 65^\circ = 2,145$, temos:

$$x = 14 \cdot 2,145$$

$$x = 30,02 \text{ m} \tag{42}$$

Analisando a figura 75, temos que,

$$h = x + 1,60 \tag{43}$$

agora substituindo (24) em (25) obtemos,

$$h = 30,02 + 1,60$$

$$h = 31,62 \text{ m}$$

Portanto a altura da árvore é de aproximadamente 31,62 m.

7 PROJETO DIDÁTICO:

AULAS PRÁTICAS USANDO TOPOGRAFIA

Na produção desse capítulo foram usados como referência textos contidos em, [13], [17].

Neste capítulo serão apresentadas sugestões para trabalhar assuntos da Matemática com o auxílio da Topografia na obtenção e no cálculo de medidas, mostrando aos alunos como podemos aplicar os conhecimentos teóricos estudados em sala de aula, especificamente Geometria e Trigonometria, em aulas práticas levando-os assim, a compreender e assimilar de maneira contextualizada os conteúdos estudados.

Essas sugestões tem como público alvo alunos do 9º ano do ensino fundamental e do 1º ou 2º anos do ensino médio. Como nos livros do ensino fundamental não são estudadas as Leis dos Senos e dos Cossenos, existem exemplos que são específicos para os alunos do ensino médio.

A história da Matemática pode ser usada como forma de introdução do assunto a ser estudado e como uma maneira de despertar o interesse dos alunos:

"Conhecendo a história da Matemática, o aluno perceberá que as teorias, atualmente apresentadas prontas e acabadas, são o resultado de desafios que os matemáticos da época enfrentaram e desenvolveram com grande esforço, em geral, ordenados de maneira diferente do que são apresentados depois de todo processo de formalização." [17]

Dessa forma, é possível os alunos perceberem que também eles enfrentarão desafios para aprender os conteúdos matemáticos.

As aulas práticas acontecerão no momento que for mais adequado a cada caso, dando liberdade ao professor de verificar quando os alunos estarão aptos a desenvolvê-las, podendo ser realizadas antes, durante ou depois das aulas teóricas, dentro das escolas, no seu entorno ou no local que for mais adequado.

"A aula prática é aquela em que a principal característica é o uso de equipamentos e materiais, com os quais os alunos farão algum tipo de experiência,

quer seja sobre uma lei científica ou os efeitos destas, relacionando seus aspectos teóricos e práticos." [13]

De maneira geral se pressupõe que os discentes tenham algum conhecimento do conteúdo, para desenvolver da melhor forma as atividades práticas.

Nos trabalhos desenvolvidos usando conhecimentos topográficos é necessário saber quais medidas podem ser obtidas diretamente e quais precisam ser calculadas, com isso podemos propor situações aos alunos em que eles analisem e definam o que pode e deve ser medido diretamente para que se possa calcular as distâncias desejadas.

Nas aulas práticas destinadas as turmas do 9º ano do ensino fundamental os conteúdos abordados podem ser: Teorema de Thales, Relações Métricas e Trigonometria nos Triângulos retângulos. Pode ser proposto o cálculo de distâncias inacessíveis ou de difícil acesso, e as alturas de postes de iluminação, de árvores e da cesta de basquete etc. Como referência são indicados os exemplos 1, 4, 8 e 9 mostrados no capítulo 6, além de exercícios que são encontrados em livros do ensino fundamental. Esses exercícios podem ser usados sem os dados numéricos para que os alunos possam obtê-los, fazendo as medições nas aulas práticas. É interessante que os alunos sejam levados a descobrir a forma de fazer os cálculos a partir do que foi visto em sala de aula, sem que sejam mostradas maneiras já prontas.

Para as aulas práticas dos alunos do 2º ano do ensino médio, os exemplos usados no ensino fundamental podem ser utilizados na revisão da Trigonometria no Triângulo Retângulo e introdução para as Leis do Seno e cosseno no Triângulo Qualquer. O trabalho será principalmente o de calcular distâncias e alturas de difícil acesso e inacessíveis a partir dos dados levantados. Os exemplos 2, 3, 5, 6 e 7 do capítulo 6 são os indicados como referência para essas atividades, sem deixar de seguir o princípio de colocar para os alunos as situações como problemas a serem resolvidos por eles.

O papel da Topografia nesse processo é o de apresentar as formas como as medidas de ângulos e distâncias são feitas nos levantamentos, além dos cálculos utilizando as fórmulas topográficas e a posterior representação gráfica. Para o levantamento é necessário utilizar instrumentos de medidas de distâncias, a trena por exemplo, de medidas de ângulos, tais

como: Teodolitos e instrumentos caseiros feitos com transferidor, Softwares disponíveis na internet (Dioptra por exemplo), se possível alugar Teodolitos e Miras Falantes.

Como sugestão final, pode ser proposto aos alunos, tanto do ensino fundamental como do ensino médio, fazer o levantamento topográfico de uma determinada região, por exemplo da área da própria escola, utilizando os instrumentos produzidos por eles mesmos, alugados ou os softwares para medir ângulos. Depois do levantamento efetuar os cálculos das distâncias e fazer a representação gráfica da área levantada. Na confecção dos instrumentos e no desenho da representação gráfica, professores de outras disciplinas, tais como Artes e Geografia, podem estar envolvidos. Como referência é mostrado no capítulo 8 um levantamento, cálculo de distâncias, correção de erros de uma determinada área.

Referências

- [1] ANTUNES, Fernando do Coltro; **Matemática por Assunto: Trigonometria**, 2ª edição: São Paulo, Editora Scipione, 1989.
- [2] B. BOYER, Carl; **História da Matemática**, 3ª edição: São Paulo, Blucher, 2012.
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques; **Geometria Euclidiana Plana**, 1ª edição: Rio de Janeiro, SBM, 1995.
- [4] BORGES, Alberto de Campos; **Topografia: Aplicada à Engenharia Civil**, 3ª edição: São Paulo, Blucher, 2013.
- [5] COELHO JÚNIOR, José Machado, ROLIM NETO, Fernando Cartaxo, C. O. ANDRADE, Júlio da Silva; **Topografia Geral**: Recife, EDUFRPE, 2014.
- [6] DANTE, Luiz Roberto; **Projeto Telaris; Matemática**, 2ª edição: São Paulo, Editora Ática, 2016.
- [7] ESPARTEL, Lélis; **Curso de Topografia**, 9ª edição: Rio de Janeiro, Editora Globo, 1987.
- [8] IFRAH, Georges; **História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contadas pelos números e pelo cálculo**, volume 1: Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira, 1997.
- [9] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César; **Temas e Problemas**, 3ª edição: Rio de Janeiro, SBM, 2003.
- [10] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César; **Temas e Problemas Elementares**, 2ª edição: Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [11] MUNIZ Neto, Antonio Caminha; **Geometria**, 1ª edição: Rio de Janeiro, SBM, 2013.
- [12] OTTONI, Andréa Ribeiro de Souza; **Geometria Dinâmica no Estudo de Congruência e Semelhança de Triângulos na Geometria Euclidiana**, Universidade Federal do ABC (Dissertação de Mestrado - PROFMAT): Santo André - SP, 2013.

- [13] PIRES, Carlos Eduardo Moraes; **Ensino da Trigonometria por Meio de Aulas Práticas**, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (Dissertação de Mestrado - PROFMAT): Campos dos Goytacazes - RJ, 2016.
- [14] ROONEY, Anne; **A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**: São Paulo, M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.
- [15] ROQUE, Tatiana; **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**: Rio de Janeiro, Editora Zahar, 2012.
- [16] SILVEIRA, Ênio; **Matemática: Compreensão e Prática**, 3ª edição: São Paulo, Editora Moderna, 2015.
- [17] SOUZA, Joamir, PATARO, Patrícia Moreno; **Vontade de Saber: Matemática**, 3ª edição: São Paulo, Editora FTD, 2015.
- [18] VEIGA, Luiz Augusto Koenig, ZANETTI, Maria Aparecida Zehnpfennig, FAGGION, Pedro Luis; **Fundamentos de Topografia**: Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2012.