

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

IVAN PINHEIRO DE OLIVEIRA

**EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA: UMA ANÁLISE E PROPOSTA
PARA O ORÇAMENTO FAMILIAR**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

IVAN PINHEIRO DE OLIVEIRA

**EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA: UMA ANÁLISE E PROPOSTA
PARA O ORÇAMENTO FAMILIAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre”.

Orientadora: Dra. Michele Cristina Valentino

Co-orientadora: Dra. Débora Aparecida Francisco
Albarez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

O48 Oliveira, Ivan Pinheiro de

Equações de recorrência : uma análise e proposta para o orçamento familiar / Ivan Pinheiro de Oliveira. – 2017.
78 f. : il. color. ; 31 cm.

Orientadora: Michele Cristina Valentino.

Coorientadora: Débora Aparecida Francisco Albanez.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio, 2017.

Bibliografia: p. 75-76.

1. Orçamento familiar. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Sequências (Matemática). 4. Matemática – Dissertações. I. Valentino, Michele Cristina, orient. II. Albanez, Débora Aparecida Francisco, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio
(Bibliotecário/Documentalista: Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676)

Título da Dissertação Nº. 006

“Equações de Recorrência: Uma Análise e Proposta para o Orçamento Familiar”

por

Ivan Pinheiro de Oliveira

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio, às 14h00min do dia 05 de setembro de 2017. O trabalho foi _____ pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profª. Michele Cristina Valentino, Dra.
(Presidente - UTFPR/CP)

Prof. Joelmir André Borssoi, Dr.
(UTFPR/LD)

Prof. Wendhel Raffa Coimbra, Dr.
(UFPB/Rio Tinto)

Visto da coordenação:

Profª. Michele Cristina Valentino, Dra.
(Coordenadora do PROFMAT-CP)

Dedico este trabalho a minha esposa Janaina de Paula, que me confiou o seu amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua graça e misericórdia, da qual não sou merecedor e por ter-me capacitado de toda ferramenta necessária para que eu pudesse desenvolver todo trabalho que me foi confiado.

Agradeço aos meus professores e as minhas orientadoras pela dedicação e paciência e que se tornaram meus exemplos de vida.

Agradeço a CAPES pela bolsa, que foi indispensável para meus estudos.

Agradeço a meu pai que muito me ensinou e ainda me ensina todos os dias, e por ser uma pessoa tão especial. A minha mãe que sempre me ensinou a ser humilde, paciente e feliz acima de qualquer situação. Aos meus irmãos que me ensinaram como é viver em comunhão. Aos meus amigos que confiaram a sua amizade. A minha sogra e ao meu cunhado que são também minha família.

Agradeço a Escola Estadual Recanto dos Pássaros que amo muito e tenho o privilégio de ser professor.

Agradeço aos alunos dos terceiros anos do Ensino Médio que aceitaram fazer parte deste trabalho com muito carinho e dedicação e que sem eles não seria possível desenvolver este trabalho. Agradeço por ser o professor de vocês.

E por fim, a minha amada esposa Janaina que amo muito.

“Amigo, para mim, é só isto: é a pessoa com quem a gente gosta de conversar, do igual o igual, desarmado. O de que um tira prazer de estar próximo. Só isto, quase; e os todos sacrifícios. Ou - amigo - é que a gente seja, mas sem precisar de saber o por quê é que é.”

Guimarães Rosa (Grande Sertão: Veredas)

RESUMO

OLIVEIRA, Ivan Pinheiro de. EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA: UMA ANÁLISE E PROPOSTA PARA O ORÇAMENTO FAMILIAR. 81 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Neste trabalho são apresentados conceitos de sequências, os quais são necessários para o estudo das equações de recorrência lineares de primeira e segunda ordem e sua convergência. São analisadas também as equações de recorrência não lineares através dos gráficos de Lamerey. Por fim, é apresentada uma aplicação em sala de aula, a qual tem como objetivo geral mostrar que algumas dessas ferramentas estudadas no Ensino Médio, podem ser úteis nas questões do dia-a-dia. O objetivo específico da aplicação é explorar a teoria de equações de recorrência para modelar o orçamento familiar e motivar o aluno a buscar estratégias, como por exemplo o controle do uso de energia elétrica, para alcançar seu objetivo financeiro. O *software* GeoGebra foi utilizado para o aluno prever o orçamento de sua família em diferentes situações.

Palavras-chave: ensino médio, aplicação, GeoGebra, estabilidade

ABSTRACT

OLIVEIRA, Ivan Pinheiro de. . 81 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

In this work, sequence concepts are presented, which are necessary for the study of first and second order linear equations of recurrence and their convergence. Also, the nonlinear recurrence equations are analyzed through the Lamerey graphs. Finally, a classroom application is presented, which aims to show that some of these tools, that are studied in High School, can be useful in day-to-day issues. The specific purpose of the application is to explore the theory of recurrence equations to model the family budget and motivate students to seek strategies, such as control of the use of electric energy, to reach their financial objective. The GeoGebra software were be used for students to predict the budget of their families in different situations.

Keywords: high school, application, GeoGebra, stability

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Diferentes soluções de uma equação de recorrência de primeira ordem com coeficientes constantes	47
FIGURA 2	– Soluções da equação de recorrência de primeira ordem com diferentes valores de a e x_1	49
FIGURA 3	– Soluções da equação de recorrência de primeira ordem com diferentes valores de a e x_1	49
FIGURA 4	– (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $ k_1 > k_2 $ e $C_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $ k_1 > k_2 $ e $C_1 > 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $ k_1 > k_2 $ e $C_1 = 0$	50
FIGURA 5	– (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k = 1$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $0 \leq k_1 < 1$	51
FIGURA 6	– (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $ k_1 > k_2 $ e $-1 \leq k_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $ k_1 > k_2 $ e $k_1 = -1$	52
FIGURA 7	– (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k < -1$ e $C_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k < -1$ e $C_1 > 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k < -1$ e $C_1 = 0$	52
FIGURA 8	– (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 = C_2$ e $C_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 = C_2$ e $C_1 > 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 > C_2$ e $C_1 > 0$, (d) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 > C_2$ e $C_1 < 0$, (e) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 < C_2$ e $C_2 > 0$, (f) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 < C_2$ e $C_2 < 0$	53
FIGURA 9	– (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k < 1$ e $-C_1 > C_2$ e $C_1 > 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k < 1$ e $-C_1 < C_2$ e $C_2 > 0$	54
FIGURA 10	– (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = 1$ e $C_2 > 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = 1$ e $C_2 < 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $-1 < k < 1$	55
FIGURA 11	– (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = -1$ e $C_2 > 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = 1$ e $C_2 < 0$. .	56
FIGURA 12	– Solução com termos dados por $x_t = C\rho^t \cos(t\theta - \omega)$ com $\rho > 1$	57
FIGURA 13	– Solução com termos dados por $x_t = C\rho^t \cos(t\theta - \omega)$ com $\rho = 1$	57
FIGURA 14	– Solução com termos dados por $x_t = C\rho^t \cos(t\theta - \omega)$ com $\rho < 1$	57
FIGURA 15	– Ponto fixo $x^* = x_{t+1} = f(x_{t+1})$	59
FIGURA 16	– Comportamento de (x_t) quando $0 < \lambda < 1$ e $x_{t_0} = 0,09$	60
FIGURA 17	– Comportamento de (x_t) quando $0 < \lambda < 1$ com $x_{t_0} = 0,09$ e $x^* = 0,33$.	60
FIGURA 18	– Comportamento de (x_t) quando $-1 < \lambda < 0$ e $x_{t_0} = 0,04$	60
FIGURA 19	– Comportamento de (x_t) quando $-1 < \lambda < 0$ com $x_{t_0} = 0,04$ e $x^* = 0,55$	61

FIGURA 20	– Comportamento de (x_t) quando $\lambda > 1$ e $x_{t_0} = 1,61$	61
FIGURA 21	– Comportamento de (x_t) quando $\lambda > 1$ com $x_0 = 1,61$ e $x^* = 1,67$	61
FIGURA 22	– Comportamento de (x_t) quando $\lambda = -1$ e $x_{t_0} = 0,16$	62
FIGURA 23	– Comportamento de (x_t) quando $\lambda = -1$ com $x_{t_0} = 0,16$ e $x^* = 0,67$...	62
FIGURA 24	– Quadro do aluno	65
FIGURA 25	– Alunos calculando o valor de beta	66
FIGURA 26	– Alunos calculando o tempo para obter o valor desejado	67
FIGURA 27	– Taxas e tarifas da CPFL	70
FIGURA 28	– Quadro de consumo de energia do aluno	71
FIGURA 29	– Preenchimento do quadro de consumo de energia elétrica	72
FIGURA 30	– Preenchimento do quadro de consumo de energia elétrica	72
FIGURA 31	– Encontrando $\beta_{novo} = 0,93829$ com economia de 40KWh	73
FIGURA 32	– Encontrando $\beta_{novo} = 0,93244$ com economia de 60KWh	73
FIGURA 33	– Solução de (45) com $\beta = 0,95$ e $p_0 = 0$	74
FIGURA 34	– Solução de (45) com $\beta = 0,95$ e $p_0 = 50$	74
FIGURA 35	– Solução de (45) com $\beta = 0,95$, $p_0 = 20$ e $r_0 = 2000$	75
FIGURA 36	– Solução de (45) com $\beta = 0,92$, $p_0 = 20$ e $r_0 = 2000$	75
FIGURA 37	– Solução de (45) com $\beta_{novo} = 0,9315722$, $p_0 = 50$ e 62,948KWh economizados	75

LISTA DE QUADROS

FIGURA 3.1 – Quantidade de coelhos	43
FIGURA A.1 – Orçamento familiar	80
FIGURA B.1 – Consumo de energia elétrica por família	81

LISTA DE SÍMBOLOS

P.A.	Progressão Aritmética
P.G.	Progressão Geométrica
(x_t)	Sequência
u	Supremo
v	Cota superior
m	Ínfimo
z	Cota inferior
l	Limite da sequência
(x_{t_i})	Subsequência
I	Intervalo aberto da reta
C_1	Constante arbitrária
C_2	Constante arbitrária
$W(t)$	Casoratiano das soluções
\mathbb{S}	Conjunto de todas as soluções particulares da equação de recorrência homogênea
x_{k_t}	Solução particular da equação de recorrência não-homogênea
x_{h_t}	Solução geral da equação de recorrência homogênea associada a não-homogênea
x_{t_0}	Valor inicial da equação de recorrência
s	Razão da P.A.
q	Razão da P.G.
C	Capital
i	Taxa
M	Montante
p_n	Poupança do mês n
r_n	Renda do mês n
g_n	Gasto no mês n
α	Juros do investimento
r_0	Salário fixo mensal
β	Taxa do gasto mensal de r_0
p_0	Quantidade de dinheiro inserido inicialmente na poupança
(P)	Parcela fixa mensal
D_0	Dívida inicial
D_t	Dívida depois de t meses da compra
y_{c_t}	Solução geral da equação de recorrência homogênea com coeficientes constantes complementar a não-homogênea
y_{k_t}	Solução particular da equação de recorrência não-homogênea com coeficientes constantes
y_t	Solução geral da equação de recorrência não-homogênea com coeficientes constantes
(x_{2t})	Subsequência de índices pares
(x_{2t+1})	Subsequência de índices ímpares
$\overline{k_2}$	Raíz conjugada

x^*	Ponto de equilíbrio
λ	Coefficiente angular da reta tangente à curva $f(x_t)$ no ponto x^*
n	Tempo em meses para se obter o valor desejado
$V(q)$	Valor gasto por KWh
q	Quantidade de KWh
(β_{novo})	Valor de beta após a economia de KWh pela família

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	SEQUÊNCIAS	18
3	EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA	22
3.1	EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM	32
3.1.1	Caso com Coeficientes Constantes	34
3.2	EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM	39
4	ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA	46
4.1	EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES	46
4.2	EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES	50
4.3	EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA NÃO LINEAR E ESTABILIDADE	58
5	PROPOSTA DE ATIVIDADE EM SALA DE AULA	63
5.1	ETAPAS DA PROPOSTA	63
5.1.1	Primeira Etapa	64
5.1.2	Segunda Etapa	64
5.1.3	Terceira Etapa	65
5.1.4	Quarta Etapa	65
5.1.5	Quinta Etapa	69
5.1.6	Sexta Etapa	69
5.1.7	Sétima Etapa	71
5.1.8	Oitava Etapa	72
5.1.9	Nona Etapa	74
6	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	78
	Anexo A – ORÇAMENTO FAMILIAR	80
	Anexo B – CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA POR FAMÍLIA	81

1 INTRODUÇÃO

Muitas estratégias de ensino-aprendizagem têm surgido com o intuito de desenvolver de maneira significativa o estudo da matemática. Muitos professores buscam meios, estratégias ou ferramentas para trabalharem o currículo com seus alunos, pois percebem a necessidade constante de mudar a maneira como se ensina. Paulo Freire em Freire (2005), dizia que a educação se refaz constantemente na práxis do professor, ou seja, o professor no anseio de cumprir com seu papel da melhor maneira, busca diferentes estratégias que possam contribuir com sua prática e conforme reflete sobre os resultados dos seus alunos, repensa as suas ações, se reciclando constantemente a fim do pleno desenvolvimento da educação.

Visando contribuir com este professor, neste trabalho tem-se o objetivo de tratar, de forma contextualizada, as equações de recorrência, conteúdo abordado no ensino básico, então usá-las para resolver problemas do dia-a-dia. Essa teoria foi explorada em Eller (2015), junto ao uso da tecnologia, materiais concretos e modelagem matemática, para resolver situações problemas contextualizadas como o Triângulo de Sierpinski, Torre de Hanói e a Sequência de Fibonacci. Em Pacheco (2013) foram feitas aplicações na análise combinatória, também no método de Newton para obtenção das raízes de uma função, além da aplicação na química com o decaimento radioativo e molecular e na biologia com o crescimento populacional e proliferação de plantas sazonais. Em Winter (2013) foi explorada a conexão entre computação e equações de recorrência no estudo do tempo de execução de algoritmos recursivos, tais como algoritmos de ordenamento e busca em listas, ou seja, existe uma vasta área de aplicação para as equações de recorrências.

No estado de São Paulo as equações de recorrências são abordadas na primeira série do Ensino Médio juntamente com os conteúdos de sequências, progressão geométrica e aritmética. É possível observar em Paulo (2014) que o início da ideia de recursividade no currículo a partir da atividade 12 da página 11, onde o objetivo é criar uma nova sequência a partir de outra conhecida, tal regra atribuída ao matemático grego Hipsicles (240 a.C.-170 a.C.).

Neste trabalho, as equações de recorrência são utilizadas para descrever o orçamento

familiar do aluno como proposto em Bassanezi (2006), mas com um diferencial de agregar a obtenção de estratégias, como por exemplo a economia de energia elétrica, para atingir o objetivo financeiro de forma mais rápida. O assunto foi escolhido, devido ao aumento da inadimplência entre jovens brasileiros (CONTEÚDO, 2016; EXPERIAN, 2015), o que faz surgir a necessidade de se trabalhar a matemática no contexto do aluno, de maneira real e prática para que ele possa se apropriar deste conhecimento e mudar sua realidade para melhor. Além disto, através da proposta de aplicação em sala de aula o aluno pôde rever os conteúdos sobre sequências, P.A., P.G., logaritmo e propriedades aritméticas. Ainda, pretende-se contribuir com o racionamento de energia elétrica e o uso racional da água, pois é uma das maneiras de amenizar os impactos causados pela crise hídrica enfrentada no estado de São Paulo desde o ano de 2014, devido ao uso irracional da água, falta de investimentos, obras nos reservatórios e a falta de chuva (CALIXTO; IMERCIO, 2014).

Foi utilizado o *software* GeoGebra como ferramenta para auxiliar o aluno na compreensão dos conteúdos, uma vez que é notória a importância do uso das tecnologias no desenvolvimento do ensino da matemática (FILHO et al., 2008). O *software* é útil para analisar o comportamento das soluções das equações de recorrência com diferentes parâmetros, o que acaba facilitando a tomada de decisões.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: no capítulo 2 são abordados resultados de sequências numéricas, no capítulo 3 equações de recorrência de primeira e segunda ordem e suas soluções. No capítulo 4 serão analisadas as soluções das classes de equações de recorrência tratadas no capítulo 3 e também de equações de recorrência não lineares. Por fim, no capítulo 5 é mostrada uma atividade aplicada para o terceiro ano do Ensino Médio, que aborda o tema principal deste trabalho de forma contextualizada e o capítulo 6 aborda a conclusão.

2 SEQUÊNCIAS

Segundo Moye e Kapadia (2000), uma sequência pode ser considerada uma coleção de números reais, a qual pode possuir uma quantidade finita ou infinita de números, o que não basta para caracterizar uma sequência. Ainda, é necessário que seja possível associar cada número da sequência com os números naturais ou com um subconjunto dos números naturais, ou seja, associar primeiro termo da sequência com o número um, o segundo termo com o dois, e assim por diante, criando então uma relação de ordem. Cada termo da sequência será representado por (x_t) , com $t \in \mathbb{N}$, e a sequência que possuir um número finito de termos será denominada *sequência finita*, caso contrário, será denominada de *sequência infinita*.

Considere o conjunto de números $X = \{5, 3, 7, 18, -92, -6\}$ como uma sequência, pode-se notar que o primeiro termo x_1 é dado pelo número 5, o segundo termo é $x_2 = 3$ e assim por diante até o sexto termo $x_6 = -6$. Agora, considere $X = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$, pode-se perceber que mesmo sendo uma sequência infinita não é difícil descobrir quais são os seus termos, por exemplo, $x_{10} = 18$ e o $x_{101} = 200$, pois esta é uma sequência conhecida como progressão aritmética (P.A.), onde seus termos podem ser encontrados por uma equação ou lei matemática, conhecida como fórmula do termo geral de uma P.A. (DANTE, 2005). Uma outra forma de encontrar os termos da sequência infinita é explorar a recursividade, que consiste em encontrar os termos de uma sequência a partir dos seus termos anteriores, como por exemplo:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= a_0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ a_2 &= a_1 + 2 = 2 + 2 = 4 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

Ou seja, existe uma equação, conhecida como Equação de Recorrência, tema trabalhado no próximo capítulo, que descreve qual será o n -ésimo termo da sequência a partir do seu termo anterior, o termo $n - 1$. Toda sequência que é definida por uma equação de recorrência será

denominada de *sequência recorrente*.

A próxima definição, formaliza o conceito de sequência real e pode ser encontrada, assim como os resultados posteriores desta seção, em Lima (2012), Rudin (1971) e Figueiredo (1995).

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_t) (ou simplesmente sequência real) é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número natural t a um número real x_t , chamado o t -ésimo termo da sequência.*

Uma sequência (x_t) é *limitada superiormente (inferiormente)* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_t \leq c$ ($x_t \geq c$) para todo $t \in \mathbb{N}$. Neste caso, o número real c é denominado *cota superior* de (x_t) (*cota inferior* de (x_t)). Se a sequência for limitada superiormente e inferiormente diz-se que a sequência (x_t) é *limitada*, que é equivalente a dizer que existe real $k > 0$ tal que $|x_t| \leq k$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2. *O supremo de (x_t) é a menor das cotas superiores de (x_t) . Em outras palavras, u é supremo de (x_t) se:*

- (i) u for cota superior de (x_t) ;
- (ii) se v for cota superior de (x_t) , então $u \leq v$.

Definição 2.3. *O ínfimo de (x_t) é a maior das cotas inferiores de (x_t) . Em outras palavras, m é ínfimo de (x_t) se:*

- (i) m for cota inferior de (x_t) ;
- (ii) se z for cota inferior de (x_t) , então $m \geq z$.

Uma sequência (x_t) tem limite $l \in \mathbb{R}$ (notação: $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = l$), se à medida que t aumenta os termos x_t tornam-se cada vez mais próximos de l . Formalmente, l é limite da sequência (x_t) quando, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário, é possível obter $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_t - l| < \varepsilon$ sempre que $t > t_0$.

Definição 2.4. *Diz-se que uma sequência real (x_t) é convergente se existe um número l , tal que, $l = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t$. Caso contrário, a sequência é denominada divergente.*

O próximo resultado mostra que não existem limites diferentes para uma mesma sequência.

Teorema 2.5 (Unicidade do limite). *Uma sequência não pode convergir para limites distintos.*

Demonstração. Como feito por Lima (2012), suponha que existam l_1 e l_2 reais distintos e que a sequência (x_t) converge simultaneamente para ambos. Então, a definição garante que dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem números reais t_1 e $t_2 \in \mathbb{N}$, tais que

$$|x_t - l_1| < \varepsilon, \forall t > t_1 \quad \text{e} \quad |x_t - l_2| < \varepsilon, \forall t > t_2.$$

Utilizando a desigualdade triangular e escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2| > 0$, tem-se

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - x_t| + |x_t - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|, \forall t > \max\{t_1, t_2\},$$

o que é um absurdo. Portanto, o limite de uma sequência real (x_t) é único. \square

Definição 2.6. Dada uma sequência $x = (x_t)_{t \in \mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_i < \dots\}$ de \mathbb{N} . Escreve-se $x' = (x_t)_{t \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$. A notação $(x_{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$ mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é \mathbb{N} .

Observação 2.7. $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para $t_0 \in \mathbb{N}$ existe $t_i \in \mathbb{N}'$ com $t_i > t_0$.

Teorema 2.8. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = l$, então toda subsequência de (x_t) converge para l .

Demonstração. Também em Lima (2012), seja (x_{t_i}) uma subsequência de (x_t) . Dado qualquer intervalo da reta aberto I de centro l , existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_t , com $t > t_0$, pertence a I . Em particular, todos os termos x_{t_i} , com $t_i > t_0$ também pertencem a I . Portanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{t_i} = l$. \square

Teorema 2.9. Toda sequência convergente (x_t) é limitada.

Demonstração. Seja $l = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_t \in (l - 1, l + 1)$ sempre que $t > t_0$. Sejam a e b o maior e menor elementos do conjunto finito $\{x_1, \dots, x_{t_0}, l - 1, l + 1\}$, respectivamente. Então, todos os termos x_t da sequência estão contidos no intervalo $[a, b]$ e portanto, (x_t) é limitada, como provado por Lima (2012). \square

Uma sequência (x_t) é dita *crecente* se $x_t < x_{t+1}$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Agora, se $x_t > x_{t+1}$, para todo $t \in \mathbb{N}$ a sequência é dita *decrescente*. No caso em que $x_t \leq x_{t+1}$, para todo $t \in \mathbb{N}$ a sequência será denominada *não crescente* e se $x_{t+1} \geq x_t$, para todo $t \in \mathbb{N}$ ela será *não decrescente*. Ainda, a sequência que satisfaz qualquer uma dessas propriedades é chamada de *sequência monótona*.

Teorema 2.10. Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Demonstração. Como em Lima (2012), suponha que (x_t) seja uma sequência monótona não decrescente e limitada. A hipótese de ser limitada, significa que ela é limitada superiormente, ou seja, o conjunto de valores possui um supremo M . Afirmando que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = M$. Dado $\varepsilon > 0$, o número $M - \varepsilon$ não é cota superior de (x_t) . Logo existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M - \varepsilon < x_{t_0} < M$.

Assim, $M - \varepsilon < x_{t_0} \leq x_t < M + \varepsilon$, quando $t > t_0$ e então, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = M$. Para os outros casos de monotonicidade a demonstração segue analogamente. \square

Observação 2.11. Se (x_t) é uma sequência não crescente e limitada, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t$ é o ínfimo do conjunto dos valores (x_t) .

3 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Uma equação é dita de recorrência (ou recorrente) se especifica como cada termo de uma sequência é obtido a partir dos seus termos anteriores. Matematicamente, uma equação de recorrência pode ser modelada da seguinte forma:

$$x_{t+p} = f(t, x_{t+p-1}, x_{t+p-2}, x_{t+p-3}, \dots, x_t), \quad (1)$$

em que f é uma função dada, $x_t \in \mathbb{R}$ são os termos das sequência e $p \in \mathbb{N}$. Se em (1), a variável t aparece explicitamente como um argumento da função f , então (1) é denominada Equação de Recorrência Não Autônoma, e caso contrário, a equação (1) é chamada de Equação de Recorrência Autônoma.

A equação (1) é dita linear se f é linear nas variáveis $x_{t+p-1}, x_{t+p-2}, x_{t+p-3}, \dots, x_t$, ou seja:

$$x_{t+p} = f_1(t)x_{t+p-1} + f_2(t)x_{t+p-2} + f_3(t)x_{t+p-3} + \dots + f_p(t)x_t + g(t), \quad (2)$$

com $f_i, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq p$. A ordem de (2) é dada pela diferença entre o maior e o menor índice da sequência (x_t) , ou seja, $p = t + p - t$ quando $f_p(t) \neq 0$. Quando $g(t) = 0$, então (2) é uma equação homogênea e caso contrário é não-homogênea. No caso $g(t) = 0$ a equação homogênea associada é

$$x_{t+p} - f_1(t)x_{t+p-1} - f_2(t)x_{t+p-2} - f_3(t)x_{t+p-3} - \dots - f_p(t)x_t = 0. \quad (3)$$

Por exemplo, a equação $x_{t+5} - 2x_{t+2} + x_{t+1} = 0$ é linear, homogênea de ordem 4 ($(t+5) - (t+1) = 4$), a equação $x_{t+3} = 7x_t$ é linear, homogênea e tem ordem 3 ($(t+3) - t = 3$), já a equação $x_{t+1} + t^2x_t = 2^t$ é linear, não-homogênea e é de primeira ordem ($(t+1) - t = 1$).

As próximas definições e resultados podem ser encontrados em Elaydi (2005) e Luís (2006).

Definição 3.1. *Uma sequência (x_t) é solução de (1) se satisfaz (1).*

A equação $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 0$ tem como solução a sequência cujos termos são

dados por $x_t = 2^t(C_1 + C_2t)$ pois, se substituir o valor de x_t na equação, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t &= 2^{t+2}[C_1 + C_2(t+2)] - 4\{2^{t+1}[C_1 + C_2(t+1)]\} + 4[2^t(C_1 + C_2t)] \\
&= 2^{t+2}(C_1 + C_2t + 2C_2) - 2^2 2^{t+1}(C_1 + C_2t + C_2) + 2^2 2^t(C_1 + C_2t) \\
&= 2^{t+2}(C_1 + C_2t + 2C_2) - 2^{t+3}(C_1 + C_2t + C_2) + 2^{t+2}(C_1 + C_2t) \\
&= 2^{t+2}(C_1 + C_2t + 2C_2 - 2C_1 - 2C_2t - 2C_2 + C_1 + C_2t) \\
&= 2^{t+2}(0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

com C_1 e C_2 sendo constantes arbitrárias.

Teorema 3.2. *O problema (2) com as condições iniciais*

$$x_{t_0} = x_0, x_{t_0+1} = x_1, \dots, x_{t_0+p-1} = x_{p-1}, \text{ com } x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \in \mathbb{R} \quad (4)$$

tem solução única x_t .

Demonstração: Considerando $t = t_0$ em (2) tem-se:

$x_{t_0+p} = f_1(t_0)x_{t_0+p-1} + f_2(t_0)x_{t_0+p-2} + f_3(t_0)x_{t_0+p-3} + \dots + f_p(t_0)x_{t_0} + g(t_0)$, ou seja, obtem-se x_{t_0+p} em termos de $x_{t_0+p-1}, x_{t_0+p-2}, x_{t_0+p-3}, \dots, x_{t_0}$. Uma vez que x_{t_0+p} está calculado, pode-se obter x_{t_0+p+1} considerando $t = t_0 + 1$ em (2). Ou seja,

$$\begin{aligned}
x_{t_0+1+p} &= f_1(t_0+1)x_{t_0+p} + f_2(t_0+1)x_{t_0+p-1} + f_3(t_0+1)x_{t_0+p-2} + \dots + f_p(t_0+1)x_{t_0+1} + g(t_0+1) \\
&= f_1(t_0+1)[f_1(t_0)x_{t_0+p-1} + f_2(t_0)x_{t_0+p-2} + f_3(t_0)x_{t_0+p-3} + \dots + f_p(t_0)x_{t_0} + g(t_0)] \\
&\quad + f_2(t_0+1)x_{t_0+p-1} + f_3(t_0+1)x_{t_0+p-2} + \dots + f_p(t_0+1)x_{t_0+1} + g(t_0+1).
\end{aligned}$$

Repetindo o processo acima, é possível obter todos x_t para $t \geq t_0$, pois $t = p + t_0 + (t - p - t_0)$, garantindo então a existência da solução.

Agora, suponha que x_{1_t} e x_{2_t} são soluções de (2) e (4), então:

Para $t = t_0$, tem-se

$$\begin{aligned}
x_{1_{t_0+p}} &= f_1(t_0)x_{1_{t_0+p-1}} + f_2(t_0)x_{1_{t_0+p-2}} + f_3(t_0)x_{1_{t_0+p-3}} + \dots + f_p(t_0)x_{1_{t_0}} + g(t_0) \\
&= f_1(t_0)x_{p-1} + f_2(t_0)x_{p-2} + f_3(t_0)x_{p-3} + \dots + f_p(t_0)x_0 + g(t_0). \\
x_{2_{t_0+p}} &= f_1(t_0)x_{2_{t_0+p-1}} + f_2(t_0)x_{2_{t_0+p-2}} + f_3(t_0)x_{2_{t_0+p-3}} + \dots + f_p(t_0)x_{2_{t_0}} + g(t_0) \\
&= f_1(t_0)x_{p-1} + f_2(t_0)x_{p-2} + f_3(t_0)x_{p-3} + \dots + f_p(t_0)x_0 + g(t_0) = x_{1_{t_0+p}}.
\end{aligned}$$

Para $t = t_0 + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} x_{1_{t_0+1+p}} &= f_1(t_0+1)x_{1_{t_0+p}} + f_2(t_0+1)x_{1_{t_0+p-1}} + f_3(t_0+1)x_{1_{t_0+p-2}} + \dots + f_p(t_0+1)x_{1_{t_0+1}} \\ &+ g(t_0+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f_1(t_0+1)[f_1(t_0)x_{p-1} + f_2(t_0)x_{p-2} + f_3(t_0)x_{p-3} + \dots + f_p(t_0)x_0 + g(t_0)] \\ &+ f_2(t_0+1)x_{p-1} + f_3(t_0+1)x_{p-2} + \dots + f_p(t_0+1)x_1 + g(t_0+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{2_{t_0+1+p}} &= f_1(t_0+1)x_{2_{t_0+p}} + f_2(t_0+1)x_{2_{t_0+p-1}} + f_3(t_0+1)x_{2_{t_0+p-2}} + \dots + f_p(t_0+1)x_{2_{t_0+1}} \\ &+ g(t_0+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f_1(t_0+1)[f_1(t_0)x_{p-1} + f_2(t_0)x_{p-2} + f_3(t_0)x_{p-3} + \dots + f_p(t_0)x_0 + g(t_0)] \\ &+ f_2(t_0+1)x_{p-1} + f_3(t_0+1)x_{p-2} + \dots + f_p(t_0+1)x_1 + g(t_0+1) = x_{1_{t_0+1+p}}. \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} x_{1_{t_0+j+p}} &= f_1(t_0+j)x_{1_{t_0+j+p}} + f_2(t_0+j)x_{1_{t_0+j+p-1}} + f_3(t_0+j)x_{1_{t_0+j+p-2}} + \dots + f_p(t_0+j)x_{1_{t_0+j}} \\ &+ g(t_0+j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f_1(t_0+j)x_{2_{t_0+j+p}} + f_2(t_0+j)x_{2_{t_0+j+p-1}} + f_3(t_0+j)x_{2_{t_0+j+p-2}} + \dots + f_p(t_0+j)x_{2_{t_0+j}} \\ &+ g(t_0+j) = x_{2_{t_0+j+p}}. \end{aligned}$$

Portanto, x_{1_t} é igual a x_{2_t} para todo $t \geq t_0$. \square

Para a abordagem que se faz às soluções de uma equação de diferenças é importante o conceito de dependência e independência linear.

Definição 3.3. As funções $f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)$ são ditas linearmente dependente para $t \geq t_0$ se houverem constantes a_1, a_2, \dots, a_p não todas iguais a zero, de tal modo que

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_p f_p(t) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (5)$$

Se $a_j \neq 0$ pode-se dividir (5) por a_j para obter

$$\begin{aligned} f_j(t) &= -\frac{a_1}{a_j} f_1(t) - \frac{a_2}{a_j} f_2(t) - \dots - \frac{a_p}{a_j} f_p(t) \\ &= -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Diz-se que cada f_j da equação (6) com coeficiente diferente de zero é um combinação linear das outras f_i . Assim, duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são linearmente dependentes se uma é múltipla da outra, ou seja, $f_1(t) = \alpha f_2(t)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. A negação da dependência linear é a independência linear, isto é, as funções $f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)$ são ditas linearmente independentes para $t \geq t_0$

se sempre que

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_p f_p(t) = 0$$

para todo $t \geq t_0$, então deve ter $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$.

As funções 4^t , $t4^t$ e $t^2 4^t$ são linearmente independentes em $t \geq 1$, pois considerando as constantes a_1 , a_2 e a_3 , e a equação

$$a_1 4^t + a_2 t 4^t + a_3 t^2 4^t = 0, \text{ para todo } t \geq 1,$$

obtem-se ao dividi-la por $4^t \neq 0$

$$a_1 + a_2 t + a_3 t^2 = 0, \text{ para todo } t \geq 1,$$

o que é possível somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Definição 3.4. Um conjunto de p soluções linearmente independentes de (3) é chamado de um conjunto fundamental de soluções.

Muitas vezes não é fácil verificar a independência linear de um conjunto de soluções usando a definição. Portanto, existe um método simples para verificar a independência linear das soluções usando o chamado Casoratiano.

Definição 3.5. O Casoratiano $W(t)$ das soluções $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ é dado por:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_{1_t} & x_{2_t} & \cdots & x_{p_t} \\ x_{1_{t+1}} & x_{2_{t+1}} & \cdots & x_{p_{t+1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1_{t+p-1}} & x_{2_{t+p-1}} & \cdots & x_{p_{t+p-1}} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Considerando a equação de recorrência

$$x_{t+3} - 7x_{t+1} + 6x_t = 0,$$

as sequências cujos termos são dados por 1 , -3^t e 2^t são soluções da equação. De fato, a sequência cujos termos são dados por $x_t = 1$ é uma solução, pois $1 - 7 + 6 = 0$. Além disso, a sequência cujos termos são dados por $x_t = -3^t$ também é uma solução, uma vez que

$$(-3)^{t+3} - 7(-3)^{t+1} + 6(-3)^t = (-3)^t[-27 + 21 + 6] = 0.$$

Finalmente, a sequência cujos termos são dados por $x_t = 2^t$ também é solução, uma vez que

$$2^{t+3} - 7(2)^{t+1} + 6(2)^t = 2^t[8 - 14 + 6] = 0.$$

Além disso, seu Casoratiano é

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^t & 2^t \\ 1 & (-3)^{t+1} & 2^{t+1} \\ 1 & (-3)^{t+2} & 2^{t+2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (-3)^{t+1} & 2^{t+1} \\ (-3)^{t+2} & 2^{t+2} \end{vmatrix} - \\ & (-3)^t \begin{vmatrix} 1 & 2^{t+1} \\ 1 & 2^{t+2} \end{vmatrix} + (2)^t \begin{vmatrix} 1 & (-3)^{t+1} \\ 1 & (-3)^{t+2} \end{vmatrix} \\ &= (2)^{t+2}(-3)^{t+1} - (2)^{t+1} - (-3)^{t+2} - (-3)^t[(2)^{t+2} - (2)^{t+1}] + \\ & (2)^t[(-3)^{t+2} - (-3)^{t+1}] \\ &= -12(2)^t(-3)^t - 11(2)^t(-3)^t - 4(2)^t(-3)^t + 2(2)^t(-3)^t + \\ & 9(2)^t(-3)^t + 3(2)^t(-3)^t \\ &= -13(2)^t(-3)^t. \end{aligned}$$

Em seguida, tem-se uma fórmula, chamada fórmula de Abel, para calcular o Casoratiano. A importância da fórmula de Abel é a sua eficácia na verificação da independência linear das soluções.

Lema 3.6. (*Lema de Abel*). *Sejam $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ soluções de (3) e $W(t)$ seu Casoratiano. Então, para $t \geq t_0$,*

$$W(t) = (-1)^{p-1(t-1-t_0)} \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} f_p(i) \right) W(t_0). \quad (8)$$

Demonstração. Como feito por Elaydi (2005), prova-se o lema para $p = 3$, uma vez que o caso geral pode ser estabelecido de forma semelhante. Então, sejam x_{1_t} , x_{2_t} e x_{3_t} três soluções linearmente independente de (3). Então, de (7) tem-se

$$W(t+1) = \det \begin{pmatrix} x_{1_{(t+1)}} & x_{2_{(t+1)}} & x_{3_{(t+1)}} \\ x_{1_{(t+2)}} & x_{2_{(t+2)}} & x_{3_{(t+2)}} \\ x_{1_{(t+3)}} & x_{2_{(t+3)}} & x_{3_{(t+3)}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

De (3) tem-se, para $1 \leq i \leq 3$,

$$x_{i_{t+3}} = f_1(t)x_{i_{t+2}} + f_2(t)x_{i_{t+1}} + f_3(t)x_{i_t}. \quad (10)$$

Agora, substituindo (10) na última linha de (9), obtem-se

$$\begin{aligned}
W(t+1) &= \begin{vmatrix} x_{1(t+1)} & x_{2(t+1)} & x_{3(t+1)} \\ x_{1(t+2)} & x_{2(t+2)} & x_{3(t+2)} \\ f_1(t)x_{1_{i+2}} & f_1(t)x_{2_{i+2}} & f_1(t)x_{3_{i+2}} \\ +f_2(t)x_{1_{i+1}} & +f_2(t)x_{2_{i+1}} & +f_2(t)x_{3_{i+1}} \\ +f_3(t)x_{1_i} & +f_3(t)x_{2_i} & +f_3(t)x_{3_i} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_{1(t+1)} & x_{2(t+1)} & x_{3(t+1)} \\ x_{1(t+2)} & x_{2(t+2)} & x_{3(t+2)} \\ f_1(t)x_{1_{i+2}} & f_1(t)x_{2_{i+2}} & f_1(t)x_{3_{i+2}} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} x_{1(t+1)} & x_{2(t+1)} & x_{3(t+1)} \\ x_{1(t+2)} & x_{2(t+2)} & x_{3(t+2)} \\ f_2(t)x_{1_{i+1}} & f_2(t)x_{2_{i+1}} & f_2(t)x_{3_{i+1}} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} x_{1(t+1)} & x_{2(t+1)} & x_{3(t+1)} \\ x_{1(t+2)} & x_{2(t+2)} & x_{3(t+2)} \\ f_3(t)x_{1_i} & f_3(t)x_{2_i} & f_3(t)x_{3_i} \end{vmatrix} \\
&= 0 + 0 + f_3(t) \begin{vmatrix} x_{1(t+1)} & x_{2(t+1)} & x_{3(t+1)} \\ x_{1(t+2)} & x_{2(t+2)} & x_{3(t+2)} \\ x_{1_i} & x_{2_i} & x_{3_i} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 f_3(t) W(t). \tag{11}
\end{aligned}$$

Como (11) é uma equação de recorrência linear de primeira ordem homogênea, pode-se utilizar a fórmula (20), então

$$W(t) = \prod_{i=t_0}^{t-1} (-1)^2 f_3(i) W(t_0) = (-1)^{2(t-1-t_0)} \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} f_3(i) \right) W(t_0). \tag{12}$$

Isso completa a prova do lema para $p = 3$. □

Se (3) tiver coeficientes constantes f_1, f_2, \dots, f_p e para $t_0 = 0$ então tem-se

$$W(t) = (-1)^{(p-1)t-1} (f_p)^t W(0). \tag{13}$$

Então $W(t) \neq 0$ sempre que $W(0) \neq 0$. Esta ideia conduz ao seguinte resultado.

Corolário 3.7. *Suponha que $f_p(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$. Então, o Casoratiano $W(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$, se e somente se, $W(t_0) \neq 0$.*

Demonstração. A demonstração segue imediatamente de (8). □

Observação 3.8. Seja $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ soluções de (3) escrevesse $a_1x_{1_t} + a_2x_{2_t} + \dots + a_px_{p_t} = 0$, $\forall t \geq t_0$ e $a_i \in \mathbb{R}$, então, pode-se gerar as seguintes equações $p - 1$:

$$\begin{aligned} a_1x_{1_{t+1}} + a_2x_{2_{t+1}} + \dots + a_px_{p_{t+1}} &= 0, \\ &\vdots \\ a_1x_{1_{t+p-1}} + a_2x_{2_{t+p-1}} + \dots + a_px_{p_{t+p-1}} &= 0, \end{aligned}$$

que podem ser reescritas como

$$X(t)\xi = 0, \quad (14)$$

onde

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} x_{1_t} & x_{2_t} & \dots & x_{p_t} \\ x_{1_{t+1}} & x_{2_{t+1}} & \dots & x_{p_{t+1}} \\ \vdots & & & \\ x_{1_{t+p-1}} & x_{2_{t+p-1}} & \dots & x_{p_{t+p-1}} \end{pmatrix}, \\ \xi &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que $W(t) = \det X(t)$.

Portanto, as p soluções de (3) são LI se, e somente se, o $W(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$, o que leva ao seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Um conjunto de soluções $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ de (3) é um conjunto fundamental se, e somente se, para algum $t_0 \in \mathbb{N}$, o Casoratiano $W(t_0) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ um conjunto fundamental de soluções da equação (3). Então $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ são linearmente independentes e assim da Observação 3.8 tem-se que $W(t) \neq 0$, para todo $t \geq t_0$. Reciprocamente, suponha que para algum $t_0 \in \mathbb{N}$, $W(t_0) \neq 0$. Então, pelo Corolário 3.7, para todo $t \geq t_0$, tem-se $W(t) \neq 0$. Assim, novamente da Observação 3.8 tem-se que $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ são soluções linearmente independentes (ELAYDI, 2005). \square

Veja no próximo resultado o Teorema Fundamental das equações de recorrências lineares homogêneas.

Teorema 3.10 (Teorema Fundamental). *Se $f_p(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$, então (3) tem um conjunto fundamental de soluções para $t \geq t_0$.*

Demonstração. Sejam $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$, soluções de (3) com condições iniciais tais que $x_{i_{(t_0+i-1)}} = 1$ e $x_{i_{(t_0)}} = x_{i_{(t_0+1)}} = \dots = x_{i_{(t_0+p-1)}} = 0$, com $1 \leq i \leq p$. Segue-se que $W(t_0) = \det I = 1$. Isto implica, pelo Teorema 3.9, que o conjunto $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ é um conjunto fundamental de soluções de (3) (ELAYDI, 2005). \square

Considere \mathbb{S} o conjunto de todas as soluções particulares da equação (3). O conjunto \mathbb{S} tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se as soluções são reais e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se as soluções são complexas), de dimensão p . Para se provar esta afirmação é necessário introduzir os lemas seguintes.

Lema 3.11. *Qualquer combinação linear de elementos de \mathbb{S} pertence a \mathbb{S} .*

Demonstração. Sejam $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{j_t} \in \mathbb{S}$ e $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{K}$ e $j \in \mathbb{N}$. Tem-se que

$$\begin{aligned} x_{1_{t+p}} - f_1(t)x_{1_{t+p-1}} - f_2(t)x_{1_{t+p-2}} - f_3(t)x_{1_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{1_t} &= 0, \\ x_{2_{t+p}} - f_1(t)x_{2_{t+p-1}} - f_2(t)x_{2_{t+p-2}} - f_3(t)x_{2_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{2_t} &= 0, \\ x_{3_{t+p}} - f_1(t)x_{3_{t+p-1}} - f_2(t)x_{3_{t+p-2}} - f_3(t)x_{3_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{3_t} &= 0, \\ x_{4_{t+p}} - f_1(t)x_{4_{t+p-1}} - f_2(t)x_{4_{t+p-2}} - f_3(t)x_{4_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{4_t} &= 0, \\ &\vdots \\ x_{j_{t+p}} - f_1(t)x_{j_{t+p-1}} - f_2(t)x_{j_{t+p-2}} - f_3(t)x_{j_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{j_t} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por k_1 , a segunda por k_2 e assim sucessivamente e somando essas equações, tem-se que

$$\begin{aligned} (k_1x_{1_{t+p}} + k_2x_{2_{t+p}} + k_3x_{3_{t+p}} + \dots + k_jx_{j_{t+p}}) - f_1(t)(k_1x_{1_{t+p-1}} + k_2x_{2_{t+p-1}} + k_3x_{3_{t+p-1}} + \dots + \\ k_jx_{j_{t+p-1}}) - f_2(t)(k_1x_{1_{t+p-2}} + k_2x_{2_{t+p-2}} + k_3x_{3_{t+p-2}} + \dots + k_jx_{j_{t+p-2}}) - f_3(t)(k_1x_{1_{t+p-3}} + \\ k_2x_{2_{t+p-3}} + k_3x_{3_{t+p-3}} + \dots + k_jx_{j_{t+p-3}}) - \dots - f_p(t)(k_1x_{1_t} + k_2x_{2_t} + k_3x_{3_t} + \dots + k_jx_{j_t}) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $k_1x_{1_t} + k_2x_{2_t} + k_3x_{3_t} + \dots + k_jx_{j_t} \in \mathbb{S}$ (LUÍS, 2006). \square

Segue diretamente do lema anterior (tomando $p = 2$) que se x_{1_t} e x_{2_t} são duas soluções particulares de (3) então, $k_1x_{1_t} + k_2x_{2_t}$ também é, onde k_1 e $k_2 \in \mathbb{K}$.

Lema 3.12. *Se $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ são p soluções linearmente independentes da equação (3), então qualquer outra solução $x_{(p+1)_t}$ é linearmente dependente das soluções anteriores.*

Demonstração. Seja $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ p soluções linearmente independentes da equação (3) e suponham-se por absurdo, que o conjunto $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}, x_{(p+1)_t}$ é ainda linearmente independente, com

$x_{(p+1)_t}$ uma outra solução de (3). Considere o Casoratiano destas soluções

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{1_t} & x_{2_t} & \cdots & x_{p_t} & x_{p+1_t} \\ x_{1_{t+1}} & x_{2_{t+1}} & \cdots & x_{p_{t+1}} & x_{p+1_{t+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1_{t+p-1}} & x_{2_{t+p-1}} & \cdots & x_{p_{t+p-1}} & x_{p+1_{t+p-1}} \\ x_{1_{t+p}} & x_{2_{t+p}} & \cdots & x_{p_{t+p}} & x_{p+1_{t+p}} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Como para cada $1 \leq i \leq p+1$ tem-se

$$x_{i_{t+p}} = f_p(t)x_{i_t} + f_{p-1}(t)x_{i_{t+1}} + \cdots + f_1(t)x_{i_{t+p-1}}, \quad (16)$$

então substituindo na última linha de $W(t)$ cada valor de $x_{i_{t+p}}$ e aplicando as propriedades dos determinantes sai que $W(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Então não existe nenhum $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $W(t_0) \neq 0$, logo pelo Teorema 3.9 o conjunto $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}, x_{p+1_t}$ não é linearmente dependente, o que contraria a hipótese (LUÍS, 2006). \square

Teorema 3.13. *O conjunto \mathbb{S} de todas as soluções da equação (3) é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} , de dimensão p .*

Demonstração. Usando o Lema 3.11 prova-se que as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas. Pelo Teorema 3.10, a equação (3) possui um sistema fundamental de soluções para $t \geq t_0$, ou seja, possui p soluções linearmente independentes. O Lema 3.12 garante que qualquer outra solução da equação pode ser expressa como combinações lineares das sequências do sistema fundamental de soluções, pelo que $\dim(\mathbb{S}) = k$ (LUÍS, 2006). \square

Definição 3.14. *Se $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ for um conjunto fundamental de soluções da equação (3), então*

$$x_t = \sum_{i=1}^p k_i x_{i_t},$$

são os termos da sequência que é solução geral de (3), para constantes arbitrárias $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq p$.

Se escolhido k_i adequadamente da equação geral, é possível encontrar qualquer solução da equação (3). E mais, a estrutura de espaço vetorial de \mathbb{S} garante que existem infinitos conjuntos fundamentais que são soluções de (3). A solução geral da equação linear homogênea de ordem p , depende de p constantes arbitrárias e a unicidade da solução é obtida impondo p condições iniciais, obtendo-se, assim, uma solução particular.

Teorema 3.15. *Se x_{1_t} e x_{2_t} são soluções da equação (2), então $x_{1_t} - x_{2_t}$ é uma solução da equação (3).*

Demonstração. Por hipótese, tem-se que

$$\begin{aligned}x_{1_{t+p}} - f_1(t)x_{1_{t+p-1}} - f_2(t)x_{1_{t+p-2}} - f_3(t)x_{1_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{1_t} &= g(t), \\x_{2_{t+p}} - f_1(t)x_{2_{t+p-1}} - f_2(t)x_{2_{t+p-2}} - f_3(t)x_{2_{t+p-3}} - \dots - f_p(t)x_{2_t} &= g(t).\end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações acima tem-se

$$\begin{aligned}(x_{1_{t+p}} - x_{2_{t+p}}) - f_1(t)(x_{1_{t+p-1}} - x_{2_{t+p-1}}) - f_2(t)(x_{1_{t+p-2}} - x_{2_{t+p-2}}) - \\f_3(t)(x_{1_{t+p-3}} - x_{2_{t+p-3}}) - \dots - f_p(t)(x_{1_t} - x_{2_t}) = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $x_{1_t} - x_{2_t}$ é uma solução da equação (3) (LUÍS, 2006). \square

O próximo teorema diz respeito a dependência da solução da equação não-homogênea (2) em relação as soluções da equação homogênea (3).

Teorema 3.16. *Se $x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{p_t}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (3) e x_{k_t} é uma solução particular da equação (2), então a solução geral da equação (2) é a sequência cujos termos são dados por*

$$x_t = x_{k_t} + \sum_{i=1}^p k_i x_{i_t},$$

com $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq p$.

Demonstração. Representa-se por x_t uma solução da equação (2). Pelo Teorema 3.15, $x_t - x_{k_t}$ é solução da equação (3), logo $x_t - x_{k_t} \in \mathbb{S}$. Pelo Lema 3.12, $x_t - x_{k_t}$ pode ser expressa como combinação linear de x_{1_t}, \dots, x_{p_t} , ou seja,

$$x_t - x_{k_t} = \sum_{i=1}^p k_i x_{i_t},$$

para $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq p$ (LUÍS, 2006). \square

Observação 3.17. O Teorema 3.16 diz que a solução geral da equação não-homogênea (2) é $x_t = x_{h_t} + x_{k_t}$, onde x_{h_t} é a solução geral da equação homogênea associada e x_{k_t} uma solução particular da equação (2).

Nas próximas seções são apresentadas as soluções das equações de recorrência lineares de primeira e segunda ordem.

3.1 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Considere inicialmente a equação de recorrência não-homogênea de primeira ordem:

$$x_{t+1} = f(t)x_t + g(t), \quad (17)$$

com $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$, com $t_0 \in \mathbb{N}$. Dada uma condição inicial x_{t_0} , todos os valores subsequentes podem ser calculados iterativamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{t_0+1} &= f(t_0)x_{t_0} + g(t_0) \\ x_{t_0+2} &= f(t_0+1)x_{t_0+1} + g(t_0+1) \\ &= f(t_0+1)[f(t_0)x_{t_0} + g(t_0)] + g(t_0+1) \\ &= f(t_0+1)f(t_0)x_{t_0} + f(t_0+1)g(t_0) + g(t_0+1) \\ x_{t_0+3} &= f(t_0+2)x_{t_0+2} + g(t_0+2) \\ &= f(t_0+2)[f(t_0+1)f(t_0)x_{t_0} + f(t_0+1)g(t_0) + g(t_0+1)] + g(t_0+2) \\ &= f(t_0+2)f(t_0+1)f(t_0)x_{t_0} + f(t_0+2)f(t_0+1)g(t_0) \\ &\quad + f(t_0+2)g(t_0+1) + g(t_0+2) \\ &\quad \vdots \\ x_t &= f(t-1)x_{t-1} + g(t-1) \\ &= f(t-1)f(t-2)\dots f(t_0+1)f(t_0)x_{t_0} + f(t-1)f(t-2)\dots f(t_0+1)g(t_0) \\ &\quad + f(t-1)f(t-2)\dots f(t_0+2)g(t_0+1) + f(t-1)f(t-2)\dots f(t_0+3)g(t_0+2) \\ &\quad + f(t-1)f(t-2)\dots f(t_0+4)g(t_0+3) + \dots + f(t-1)f(t-2)g(t-3) \\ &\quad + f(t-1)g(t-2) + g(t-1). \end{aligned}$$

Desta forma, é deduzido que

$$\begin{aligned} x_t &= \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} f(i) \right) x_{t_0} + \left(\prod_{i=t_0+1}^{t-1} f(i) \right) g(t_0) + \left(\prod_{i=t_0+2}^{t-1} f(i) \right) g(t_0+1) \\ &\quad + \dots + \left(\prod_{i=t-2}^{t-1} f(i) \right) g(t-3) + \left(\prod_{i=t-1}^{t-1} f(i) \right) g(t-2) + g(t-1) \\ &= \prod_{i=t_0}^{t-1} f(i) x_{t_0} + \sum_{r=t_0}^{t-1} \left(\prod_{i=r+1}^{t-1} f(i) \right) g(r), \end{aligned} \quad (18)$$

é a única solução da equação não-homogênea linear de primeira ordem (17). A demonstração será feita por indução matemática em t . Note que substituindo $t = t_0$ em (17) tem-se

$$\begin{aligned} x_{t_0+1} &= f(t_0)x_{t_0} + g(t_0) \\ &= \prod_{i=t_0+1}^{(t_0+1)-1} f(i)x_{t_0+1} + \sum_{r=t_0+1}^{(t_0+1)-1} \left(\prod_{i=r+1}^{(t_0+1)-1} f(i) \right) g(r), \end{aligned}$$

com $\prod_{i=t+1}^t f(i) = 1$ e $\sum_{i=t+1}^t f(i) = 0$.

Agora, suponha que (18) valha para t . Então, para $t + 1$ tem-se

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(t)x_t + g(t) \\ &= f(t) \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} f(i)x_{t_0} + \sum_{r=t_0}^{t-1} \left(\prod_{i=r+1}^{t-1} f(i) \right) g(r) \right] + g(t) \\ &= \prod_{i=t_0}^t f(i)x_{t_0} + f(t) \sum_{r=t_0}^{t-1} \left(\prod_{i=r+1}^{t-1} f(i) \right) g(r) + g(t) \\ &= \prod_{i=t_0}^t f(i)x_{t_0} + \sum_{r=t_0}^{t-1} \left(\prod_{i=r+1}^t f(i) \right) g(r) + \left(\prod_{i=t+1}^t f(i) \right) g(t) \\ &= \prod_{i=t_0}^t f(i)x_{t_0} + \sum_{r=t_0}^t \left(\prod_{i=r+1}^t f(i) \right) g(r), \end{aligned}$$

provando que a fórmula (18) é a solução particular da equação (17). Não sendo conhecido o valor inicial x_{t_0} , pode-se sempre supor x_{t_0} é uma constante arbitrária e a solução (18) passa a ser a solução geral.

Considerando $g(t) = 0$ para todo $0 \leq t_0 \leq t$, pode-se obter a solução geral da equação homogênea associada a (17)

$$x_{t+1} = f(t)x_t, \quad (19)$$

a qual será da forma:

$$x_t = \prod_{i=t_0}^{t-1} f(i)x_{t_0}. \quad (20)$$

Na próxima seção são apresentadas as soluções de casos particulares de equação de recorrência de primeira ordem e alguns exemplos de aplicações.

3.1.1 CASO COM COEFICIENTES CONSTANTES

Considerando $t_0 = 1$, $f(t) = a$ e $g(t) = b$ para todo $t \geq 1$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ em (17), tem-se a equação de recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$x_{t+1} = ax_t + b. \quad (21)$$

Dada a condição inicial x_1 , a única solução de (21) é obtida substituindo $f(t) = a$ e $g(t) = b$ em (18), ou seja:

$$\begin{aligned} x_t &= \left(\prod_{i=1}^{t-1} a \right) x_1 + \sum_{r=1}^{t-1} \left(\prod_{i=r+1}^{t-1} a \right) b \\ &= a^t x_1 + b \left(\sum_{r=0}^{t-1} a^{t-r-1} \right) \\ &= a^{t-1} x_1 + ba^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} a^{-r}. \end{aligned} \quad (22)$$

Agora, serão apresentados alguns exemplos de equações de recorrência lineares com coeficientes constantes homogêneas e não-homogêneas.

Progressão Aritmética

Uma progressão aritmética (P.A.) é definida como uma sucessão de números reais obtida somando o número anterior por uma razão s , com exceção do primeiro termo (DANTE, 2005), ou seja:

$$x_{t+1} = x_t + s. \quad (23)$$

A equação (23) é uma equação de recorrência não-homogênea linear de primeira ordem e então, dado o primeiro termo x_1 , seu t -ésimo termo pode ser obtido de (22) com $a = 1$ e $b = s$, isto é:

$$x_t = 1^{t-1} x_1 + s 1^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} 1^{-r} = x_1 + s(t-1).$$

A soma dos termos de uma P.A. finita $\{x_1, x_2, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t\}$ de razão s pode ser obtida da seguinte forma:

$$S_t = x_1 + x_2 + \dots + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t, \quad (24)$$

ou

$$S_t = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_2 + x_1. \quad (25)$$

Somando (25) de (24) tem-se:

$$\begin{aligned}
 2S_t &= (x_1 + x_t) + (x_2 + x_{t-1}) + \dots + (x_{t-1} + x_2) + (x_t + x_1) \\
 &= (x_1 + x_t) + (x_1 + s + x_t - s) + \dots + (x_t - s + x_1 + s) + (x_t + x_1) \\
 &= (x_1 + x_t)t \\
 S_t &= \frac{(x_1 + x_t)t}{2}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica (P.G.) é definida como uma sucessão de números reais obtida multiplicando o número anterior por uma razão q , com exceção do primeiro termo (DANTE, 2005), ou seja:

$$x_{t+1} = x_t q. \tag{27}$$

A equação (27) é uma equação de recorrência homogênea linear de primeira ordem e dado o primeiro termo x_1 , seu t -ésimo termo pode ser obtido de (22) com $a = q$ e $b = 0$, isto é:

$$x_t = q^{t-1}x_1 + 0 \cdot q^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} q^{-r} = q^{t-1}x_1.$$

A soma dos termos de uma P.G. finita $\{x_1, x_2, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t\}$ de razão q , pode ser obtida da seguinte forma:

$$S_t = x_1 + x_2 + \dots + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t, \tag{28}$$

ou

$$qS_t = qx_1 + qx_2 + \dots + qx_{t-2} + qx_{t-1} + qx_t = x_2 + x_3 + \dots + x_{t-1} + x_t + qx_t. \tag{29}$$

Subtraindo (29) de (28) tem-se:

$$S_t - qS_t = x_1 - qx_t = x_1 - q(q^{t-1}x_1) \text{ então, } S_t = \frac{x_1(1 - q^t)}{1 - q}, q \neq 1. \tag{30}$$

Juros Simples e Compostos

São dois os regimes de juros trabalhados no Ensino Médio, os juros simples e o composto. No regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo capital, não havendo capitalização de juros (PINTO, 2015). Veja a representação por

recursividade, sendo C o capital inicial aplicado a uma taxa i e M o montante final.

$$M_1 = C + Ci \quad (31)$$

$$M_2 = M_1 + Ci$$

$$M_3 = M_2 + Ci$$

$$\vdots$$

$$M_{t+1} = M_t + Ci. \quad (32)$$

A equação (32) é uma equação de recorrência não-homogênea linear de primeira ordem e então, dado o primeiro termo M_1 , seu t -ésimo termo pode ser obtido de (22) com $a = 1$ e $b = Ci$, isto é:

$$M_t = 1^{t-1}M_1 + Ci \cdot 1^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} 1^{-r} = M_1 + Ci(t-1), \quad (33)$$

além disto, conhecendo o capital C e substituindo (31) em (33), temos:

$$M_t = C + Cit.$$

Já no regime de juros composto, há capitalização do juros, ou seja o juros gerado a cada período é incorporado ao capital para o cálculo do juros no período seguinte. Veja a representação por recursividade, sendo C o capital inicial aplicado a uma taxa i e M o montante final:

$$M_1 = C + Ci = C(1+i) \quad (34)$$

$$M_2 = M_1 + M_1i = M_1(1+i)$$

$$M_3 = M_2 + M_2i = M_2(1+i)$$

$$\vdots$$

$$M_{t+1} = M_t + M_tCi = M_t(1+i). \quad (35)$$

A equação (35) é uma equação de recorrência homogênea linear de primeira ordem e dado o primeiro termo M_1 , seu t -ésimo termo pode ser obtido de (22) com $a = (1+i)$ e $b = 0$, isto é:

$$M_t = (1+i)^{t-1}M_1 + 0 \cdot (1+i)^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} (1+i)^{-r} = (1+i)^{t-1}M_1, \quad (36)$$

além disto, conhecendo o capital C e substituindo (34) em (36), temos:

$$M_t = (1+i)^t C.$$

Montante Simples e Composto

Montante simples é a soma total dos montantes de cada período do sistema de juros simples, perceba que esta sucessão de montantes é uma P.A., pois, no regime de juros simples ao final cada período é acrescido apenas o juros sobre o capital inicial, ou seja, a razão é a parcela $C \cdot i$. Portanto, para se obter o montante simples, basta utilizar (26), logo

$$S_t = \frac{(M_1 + M_t)t}{2}, \quad (37)$$

substituindo (31) e (34), em (37), obtem-se

$$S_t = \frac{[(C + Ci) + (C + Ci(t))]}{2} = C + \frac{Ci(1+t)}{2}. \quad (38)$$

Já o montante composto é a soma total dos montantes de cada período do sistema de juros composto, sendo esta sucessão de montantes uma P.G. de razão $(1 + i)$. Portanto, para se obter o montante composto, basta utilizar (3.1.1), logo

$$S_t = \frac{M_1(1 - (1+i)^t)}{1 - (1+i)} = \frac{M_1(1 - (1+i)^t)}{-i}, \quad (39)$$

substituindo (34) e (37), tem-se

$$S_t = \frac{C(1+i)[1 - (1+i)^t]}{-i}. \quad (40)$$

Orçamento Familiar

Denotando p_n , r_n e g_n a poupança, renda e gasto de uma família no mês n respectivamente, temos as seguintes equações de recorrência que estabelecem as relações entre essas três variáveis (BASSANEZI, 2006):

$$p_n = p_{n-1} + (r_n - g_n), \quad (41)$$

$$r_n = r_0 + \alpha p_{n-1}, \quad (42)$$

$$g_n = \beta r_n \quad (0 < \beta < 1), \quad (43)$$

em que α é o juros da poupança, r_0 é o salário fixo mensal e β é a taxa do gasto mensal do salário fixo r_0 . Note que a renda da família r_n depende claramente do salário fixo mais rendimentos da poupança. Além disso, $\beta \neq 0$ pois o gasto familiar nunca é nulo, devido as contas fixas, e $\beta \neq 1$ pois caso contrário $g_n = r_n$, ou seja, não existiria valores para se aplicar na poupança.

Substituindo (42) e (43) em (41), tem-se:

$$\begin{aligned}
 p_n &= p_{n-1} + (r_n - g_n) \\
 &= p_{n-1} + (r_0 + \alpha p_{n-1}) - (\beta r_n) \\
 &= p_{n-1} + (r_0 + \alpha p_{n-1}) - [\beta(r_0 + \alpha p_{n-1})] \\
 &= p_{n-1} + (1 - \beta)(r_0 + \alpha p_{n-1}) \\
 &= [(1 - \beta)\alpha + 1]p_{n-1} + (1 - \beta)r_0.
 \end{aligned} \tag{44}$$

A equação (44) é uma equação de recorrência linear não-homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes $a = (1 - \beta)\alpha + 1$ e $b = (1 - \beta)r_0$ e então, dado o primeiro termo p_0 , seu t -ésimo termo pode ser obtido de (22):

$$\begin{aligned}
 p_n &= p_0 a^n + b \frac{1 - a^n}{1 - a} \\
 &= [(1 - \beta)\alpha + 1]^n p_0 + (1 - \beta)r_0 \frac{1 - [(1 - \beta)\alpha + 1]^n}{1 - [(1 - \beta)\alpha + 1]},
 \end{aligned} \tag{45}$$

em que p_0 é a quantidade de dinheiro inserido inicialmente na poupança.

Financiamento

Baseado em Gomes (2014), considere um carro no valor de R\$38.000,00 que deve ser pago em 4 anos, com taxa de juros de 0,66% por mês. Calcula-se quanto se deve pagar de parcela fixa (P) por mês para quitar a dívida em 4 anos.

Considere que D_0 seja a dívida inicial. Assim, a dívida D_t , depois de t meses da compra, é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela fixa paga no mês, ou seja,

$$D_t = D_{t-1} + iD_{t-1} - P = D_{t-1}(1 + i) - P. \tag{46}$$

A equação (46) é uma equação de recorrência não-homogênea linear de primeira ordem e dado o primeiro termo D_0 , seu t -ésimo termo pode ser obtido de (22) com $a = 1 + i$ e $b = -P$, isto é:

$$D_t = (1 + i)^{t-1} D_0 - P(1 + i)^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} (1 + i)^{-r} = (1 + i)^{t-1} D_0 - P \frac{(1 + i)^{-t} - (1 + i)^{-1}}{(1 + i)^{-1} - 1}. \tag{47}$$

Agora, basta considerar $i = 0,66$, o período do financiamento de 48 meses, a dívida inicial $D_0 = 38000$, substituir os valores na equação (47) e isolarmos o valor de P , lembrando que $D_{48} = 0$.

$$D_{48} = (1 + 0,0066)^{47} 38000 - P \frac{(1 + 0,0066)^{-47} - (1 + 0,0066)^{-1}}{(1 + 0,0066)^{-1} - 1}.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} P \cdot \frac{0,2593952484}{0,0065567256} &= (1,3623086835) \cdot 38000 \\ P \cdot 39,5617 &= 51767,7299 \\ P &= \frac{51767,7299}{39,5617} = 1308,53. \end{aligned}$$

Portanto, o valor da prestação fixa no financiamento será de R\$1308,53.

Na próxima seção são apresentadas as soluções de equações de recorrência de segunda ordem com coeficientes constantes.

3.2 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM

Nesta seção será encontrada a solução geral da equação de recorrência linear de segunda ordem:

$$x_{t+1} = ax_t + bx_{t-1} + c, \quad (48)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Para isso, inicialmente será considerada a sua equação homogênea ($c = 0$):

$$x_{t+1} = ax_t + bx_{t-1}. \quad (49)$$

Será suposto que a solução x_t de (49) é o número complexo k^t . Substituindo essa solução em (49) tem-se:

$$k^2 - ak^1 - bk^0 = 0. \quad (50)$$

A equação (50) é conhecida como polinômio característico de (49) e suas raízes k são chamadas de raízes características. Como $b \neq 0$, as raízes da equação característica são não-nulas. Além disto, como a equação é de segundo grau, ela fica condicionada ao discriminante $\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b)$, logo tem-se três tipos de soluções para as equações de recorrência lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, as quais serão enunciadas e demonstradas abaixo.

Teorema 3.18. *Se as raízes de (50) são k_1 e k_2 , com $k_1 \neq k_2$, então $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ é solução geral da recorrência (49), para quaisquer valores constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração. Substituindo $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ na recorrência (49), tem-se

$$\begin{aligned} x_{t+1} - ax_t - bx_{t-1} &= (C_1 k_1^{t+1} + C_2 k_2^{t+1}) - a(C_1 k_1^t + C_2 k_2^t) - b(C_1 k_1^{t-1} + C_2 k_2^{t-1}) \\ &= C_1 k_1^{t+1} + C_2 k_2^{t+1} - aC_1 k_1^t - aC_2 k_2^t - bC_1 k_1^{t-1} - bC_2 k_2^{t-1} \\ &= C_1 k_1^{t-1} (k_1^2 - ak_1 - b) + C_2 k_2^{t-1} (k_2^2 - ak_2 - b) = 0, \end{aligned}$$

pois k_1 e k_2 são raízes de (50). Além disto, k_1^t e k_2^t é um conjunto fundamental da equação (49). Pois, calculando seu Casoratiano tem-se:

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} k_1^t & k_2^t \\ k_1^{t+1} & k_2^{t+1} \end{pmatrix} \\ &= k_1^t k_2^{t+1} - (k_1^{t+1} k_2^t) \\ &= k_1^t k_2 k_2^t - (k_1 k_1^t k_2^t) \\ &= k_1^t k_2^t (k_2 - k_1). \end{aligned}$$

Substituindo $t = 1$ na equação anterior, tem-se

$$k_1 k_2 (k_2 - k_1) \neq 0,$$

pois $k_1 \neq k_2$. Portanto, pelo Teorema 3.9, se para algum $t_0 \in \mathbb{N}$, o Casoratiano $W(t) \neq 0$, então k_1^t e k_2^t é um conjunto fundamental (MORGADO; CARVALHO, 2013). \square

Teorema 3.19. *Quando as raízes $k_1 \neq k_2$ do polinômio característico (50) forem complexas, a solução geral de (49) poderá ser escrita da forma $x_t = \rho^t [C_1 \cos(t\theta) + C_2 \sin(t\theta)]$, com C_1 e C_2 sendo constantes.*

Demonstração. Se k_1 e k_2 são raízes complexas de (50), então podem ser escritas da forma:

$$k_1 = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ e } k_2 = \rho(\cos \theta - i \sin \theta),$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Pela fórmula de De Moivre (PACHECO, 2013):

$$k_1^t = \rho^t [\cos(t\theta) + i \sin(t\theta)], \text{ e } k_2^t = \rho^t [\cos(t\theta) - i \sin(t\theta)]. \quad (51)$$

Além disto, se substituir (51) na solução apresentada no Teorema 3.18, tem-se que k_1^t e k_2^t também é um conjunto fundamental. Agora, substituindo (51) na solução $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_t &= C_1 k_1^t + C_2 k_2^t = C_1 \rho^t [\cos(t\theta) + i \sin(t\theta)] + C_2 \rho^t [\cos(t\theta) - i \sin(t\theta)] \\ &= \rho^t [C_1 \cos(t\theta) + C_1 i \sin(t\theta) + C_2 \cos(t\theta) - C_2 i \sin(t\theta)] \\ &= \rho^t [(C_1 + C_2) \cos(t\theta) + i(C_1 - C_2) \sin(t\theta)], \\ &= \rho^t [C'_1 \cos(t\theta) + C'_2 \sin(t\theta)], \end{aligned}$$

com $C'_1 = C_1 + C_2$ e $C'_2 = i(C_1 - C_2)$ (MORGADO; CARVALHO, 2013). \square

Teorema 3.20. *Se as raízes do polinômio característico (50) são iguais, $k_1 = k_2 = k$, então,*

$x_t = C_1 k^t + C_2 t k^t$ será a solução geral da recorrência (49), para quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Demonstração. Para que as raízes sejam iguais, o discriminante $\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b)$ deve ser igual a zero, ou seja, $k = \frac{a}{2}$. Agora substituindo $x_t = C_1 k^t + C_2 t k^t$ na recorrência (49), tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_{t+1} - ax_t - bx_{t-1} &= (C_1 k^{t+1} + C_2 (t+1) k^{t+1}) - a(C_1 k^t + C_2 t k^t) - b(C_1 k^{t-1} + C_2 (t-1) k^{t-1}) \\
 &= C_1 k^{t+1} + C_2 (t+1) k^{t+1} - aC_1 k^t - aC_2 t k^t - bC_1 k^{t-1} - bC_2 (t-1) k^{t-1} \\
 &= C_1 k^{t+1} - aC_1 k^t - bC_1 k^{t-1} + C_2 t k^{t+1} - aC_2 t k^t - bC_2 t k^{t-1} \\
 &\quad + C_2 k^{t+1} + bC_2 k^{t-1} \\
 &= C_1 k^{t-1} (k^2 - ak - b) + C_2 (t) k^{t-1} (k^2 - ak - b) - C_2 k^t (-k - bk^{-1}) \\
 &= C_1 k^{t-1} (0) + C_2 (t) k^{t-1} (0) - C_2 k^t \left(\frac{a^2 + 4b}{-2a} \right) \\
 &= C_1 k^{t-1} (0) + C_2 (t) k^{t-1} (0) - C_2 k^t \left(\frac{\Delta}{-2a} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Além disto, k^t e tk^t é um conjunto fundamental da equação (49). Calculando seu Casoratiano tem-se:

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \det \begin{pmatrix} k^t & tk^t \\ k^{t+1} & (t+1)k^{t+1} \end{pmatrix} \\
 &= k^t (t+1)k^{t+1} - (k^{t+1} tk^t) \\
 &= (t+1)k^{t+2} - (k^{t+2} t) \\
 &= k^{t+2},
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.9, se para algum $t_0 \in \mathbb{N}$, o Casoratiano $W(t) \neq 0$, então k^t e tk^t é um conjunto fundamental (MORGADO; CARVALHO, 2013). \square

Agora, será considerada a equação de recorrência não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes (48) e os próximos resultados caracterizam sua solução geral.

Teorema 3.21. Se y_{1t} e y_{2t} são soluções de (48), então $x_t = y_{1t} - y_{2t}$ é solução da equação homogênea (49).

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 3.15 para $p = 2$ e $g(t) = c, \forall t \geq t_0$. \square

A solução geral da equação homogênea (49) é chamada de solução complementar da equação não-homogênea (48) e é denotada por y_{ct} . A solução de (48) é chamada de solução

particular e é denotada por y_{k_t} . O próximo resultado caracteriza a solução geral de (48).

Teorema 3.22. *Qualquer solução y_t de (48) pode ser escrita como*

$$y_t = y_{k_t} + \sum_{i=1}^2 a_i x_{i_t},$$

onde $\{x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_{k_t}\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (49).

Demonstração. Veja a demonstração do Teorema 3.16 para $p = 2$. □

O Teorema 3.22 leva à definição da *solução geral* da equação não-homogênea (2) como

$$y_t = y_{k_t} + y_{c_t}, \quad (52)$$

onde y_{c_t} é a solução geral da equação homogênea associada e y_{k_t} uma solução particular da equação completa.

Agora, volta-se a atenção para encontrar uma solução particular y_{k_t} das equações não-homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, será considerada a equação (2) com $f_i(t) = a_i$, para todo $t \geq t_0$ e $i \in \{1, \dots, p\}$. Por sua simplicidade, usa-se o método de *coeficientes indeterminados* para calcular y_{k_t} . Basicamente, segundo Elaydi (2005) o método consiste em fazer uma estimativa inteligente sobre a forma da solução particular e, em seguida, substituir essa função na equação de recorrência. Para um termo não-homogêneo completamente arbitrário $g(t)$, este método não é eficaz. No entanto, regras definidas podem ser estabelecidas para determinar a solução particular por este método se $g(t)$ for uma combinação linear de termos, cada um com uma das formas

$$a^t, \sin(bt), \cos(bt), \text{ ou } t^k, \quad (53)$$

ou produtos dessas formas, como

$$a^t \sin(bt), a^t t^k, a^t t^k \cos(bt), \dots \quad (54)$$

Considere a equação $y_{t+2} = 7y_{t+1} - 12y_t + 3^t$, em que o polinômio característico da parte homogênea é $k^2 - 7k - 12$, com raízes $k_1 = 3$ e $k_2 = 4$, logo pelo Teorema 3.18, sua solução é $y_{c_t} = C_1 3^t + C_2 4^t$, com C_1 e C_2 constantes arbitrárias. Agora para encontrar uma solução particular y_{k_t} , poderia parecer natural buscar uma solução da forma $y_{k_t} = a 3^t$. Mas, isto não funciona, pois soluções deste tipo satisfazem a parte homogênea, então, usa-se $y_{k_t} = a t 3^t$. Substituindo na equação de recorrência, obtem-se $a(t+2)3^{t+2} = 7a(t+1)3^{t+1} - 12at3^t + 3^t$, o que leva a $a = -\frac{1}{3}$. Logo, por (52) a solução geral da recorrência é $y_t = C_1 3^t + C_2 4^t - \frac{1}{3} t 3^t$. Os

valores de C_1 e C_2 permanecem indeterminados pois, não foram dadas as condições iniciais da recorrência.

A seguir apresenta-se um exemplo de uma equação de recorrência homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, dando fechamento aos conteúdos abordados neste capítulo.

Sequência de Fibonacci

Os coelhos de Fibonacci é um problema clássico da matemática, formulado por Leonardo de Pisa (Fibonacci) (SILVA, 2015), que trata de quantos casais de coelhos surgirão em um ano a partir de um único casal, com as seguintes condições:

- A cada mês um casal origina um novo casal.
- Este novo casal se torna fértil a partir do segundo mês.
- Não ocorrem mortes.

Pode-se solucionar este problema construindo um quadro e respeitando as regras, veja o Quadro 3.2.

Quadro 3.1: Quantidade de Coelhos

Mês	Número de casal do mês anterior	Número de casais recém-nascidos	Total
1°	0	1	1
2°	1	0	1
3°	1	1	2
4°	2	1	3
5°	3	2	5
6°	5	3	8
7°	8	5	13
8°	13	8	21
9°	21	13	34
10°	34	21	55
11°	55	34	79
12°	79	55	144

Ou seja, dentro de um ano terão 144 casais de coelhos. Agora formulando uma estratégia para que se possa descobrir quantos casais de coelhos terão dentro de 24 meses, 60 meses, ou quantos meses queira. Para isso, perceba que o total de casais de um mês é a soma do total de casais dos dois meses anteriores, logo pode-se escrever uma equação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes da forma

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-2}, \quad (55)$$

com $x_1 = x_2 = 1$. Como visto, pode-se associar uma equação característica a esta equação, que será

$$k^2 = k + 1,$$

isto é,

$$k^2 - k - 1 = 0. \quad (56)$$

Resolvendo a equação (56) pelo método de *Bháskara* com $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$, tem-se

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5,$$

encontrando as raízes,

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ou seja, a equação característica possui duas raízes reais distintas, logo, segundo o Teorema 3.18, pode-se utilizar a solução

$$x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t. \quad (57)$$

Substituindo k_1 e k_2 , tem-se

$$x_t = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t. \quad (58)$$

Para encontrar C_1 e C_2 , em vez de usar $x_1 = x_2 = 1$, usa-se sem perda de generalidade $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, então

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1, \end{cases} \quad (59)$$

isolando C_1 na primeira equação, tem-se

$$C_1 = -C_2. \quad (60)$$

Substituindo (60) na segunda equação do sistema (59), tem-se

$$C_2 \left[- \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right] = 1,$$

isto é, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Agora substituindo C_1 e C_2 em (58), tem-se

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t. \quad (61)$$

Segundo Pereira (2014) esta fórmula é conhecida como *fórmula de Binet* e descreve quantos casais de coelhos terão, conforme a quantidade t de meses que se passarem. Veja a solução para $t = 12$ meses como propõe o problema:

$$\begin{aligned}
 x_{12} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{12} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{589824\sqrt{5}}{4096} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{144\sqrt{5}}{1} \right) \\
 &= 144,
 \end{aligned}$$

ou seja, mesmo resultado encontrado na Quadro 3.1, mas com um diferencial, agora pode-se calcular para qualquer quantidade de meses.

4 ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Neste capítulo, será analisada a convergência da solução das equações de recorrência de primeira e segunda ordens encontradas no Capítulo 3 com os resultados de sequência apresentados no Capítulo 2. Ainda, será apresentado um método, o qual é capaz de analisar a solução das equações de recorrência não lineares sem conhecer sua solução.

4.1 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Veja primeiramente, a análise da solução da equação de recorrência de primeira ordem com coeficientes constantes (21), encontrada no capítulo anterior:

$$x_t = a^{t-1}x_1 + ba^{t-1} \sum_{r=1}^{t-1} a^{-r}, \quad a \neq 0, \quad (62)$$

com o auxílio dos resultados de sequência apresentados no Capítulo 2.

Se $a = 1$ em (62), a solução x_t é a sequência (x_t) com termos dados por:

$$x_t = x_1 + b \sum_{r=1}^{t-1} 1 = x_1 + b(t-1),$$

e sua estabilidade dependerá do valor da constante b , ou seja:

- se $b > 0$, tem-se que a solução x_t é divergente, pois é uma sequência monótona crescente e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1 + b(t-1)] = +\infty.$$

- se $b < 0$, tem-se que a solução x_t é divergente, pois é uma sequência monótona decrescente e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1 + b(t-1)] = -\infty.$$

- se $b = 0$, tem-se que a solução x_t é convergente, pois é uma sequência constante e então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1 + b(t-1)] = x_1.$$

A Figura 1 mostra a solução da equação de recorrência de primeira ordem com coeficientes contantes nos três casos citados acima.

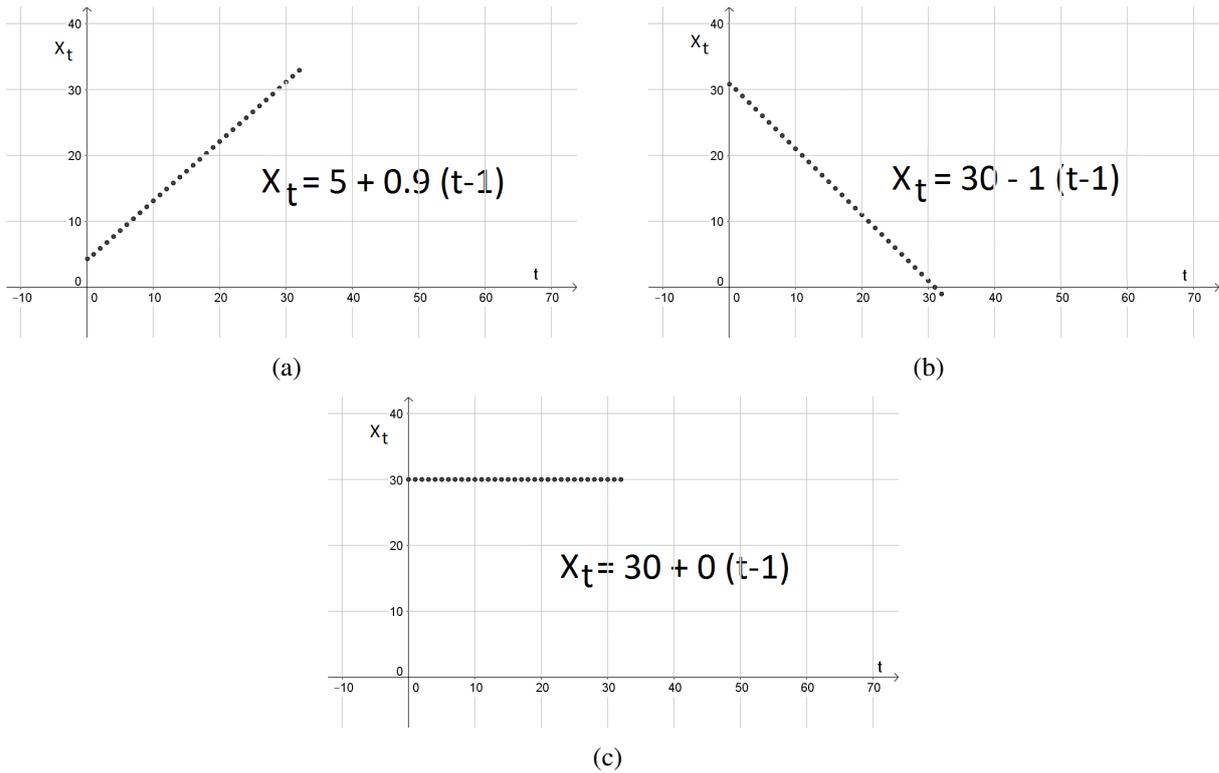


Figura 1: (a) Solução de (21) com $a = 1$ e $b > 0$, (b) Solução de (21) com $a = 1$ e $b < 0$, (c) Solução de (21) com $a = 1$ e $b = 0$.

Se $a \neq 1$, a solução x_t é a sequência (x_t) com os termos dados por:

$$x_t = a^{t-1}x_1 + ba^{t-1}\frac{1-a^{1-t}}{a-1} \quad (63)$$

$$= a^{t-1}x_1 + \frac{b}{a-1}(a^{t-1}-1) \quad (64)$$

$$= a^{t-1}\left(x_1 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}, \quad (65)$$

pois a^{-r} é uma P.G. de razão $q = a^{-1}$ e, de (30), tem-se que sua soma é dada por $\sum_{r=1}^{t-1} a^{-r} = \frac{1-a^{1-t}}{a-1}$. Portanto,

- Se $a > 1$, a solução x_t diverge, pois

1. Se $x_1 > \frac{-b}{a-1}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{t-1} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = +\infty.$$

2. Se $x_1 < \frac{-b}{a-1}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{t-1} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = -\infty.$$

3. Se $x_1 = -\frac{b}{a-1}$, então x_t converge, pois:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{b}{a-1} = -\frac{b}{a-1}.$$

• Se $-1 < a < 1$, então x_t converge, pois:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{t-1} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = -\frac{b}{a-1}.$$

• Se $a = -1$, então x_t diverge pelo Teorema 2.5, pois, dadas as subsequências (x_{2t}) e (x_{2t+1}) , tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[(-1)^{2t-1} \left(x_1 - \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-x_1 + b) = -x_1 + b,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[(-1)^{2t} \left(x_1 - \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} -x_1 = -x_1.$$

• Se $a < -1$, então x_t diverge pelo Teorema 2.5, pois novamente as subsequências (x_{2t}) e (x_{2t+1}) têm limites distintos. De fato se $x_1 > -\frac{b}{a-1}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{2t-1} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = -\infty,$$

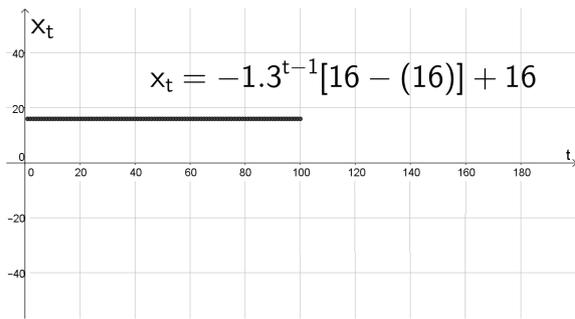
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{2t} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = +\infty,$$

se $x_1 < -\frac{b}{a-1}$:

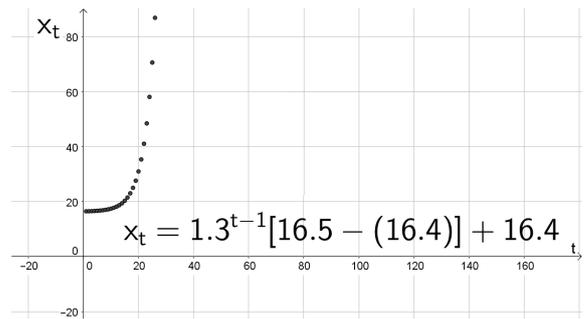
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{2t-1} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a^{2t} \left(x_1 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \right] = -\infty.$$

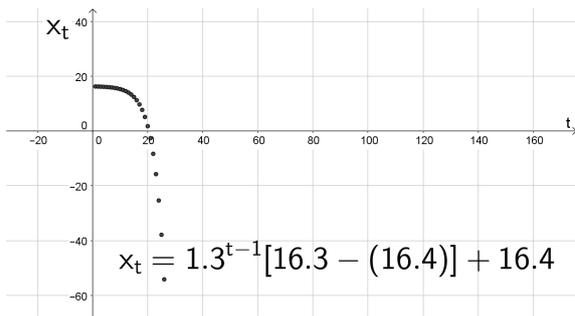
As Figuras 2 e 3 mostram as soluções para os casos citados acima.



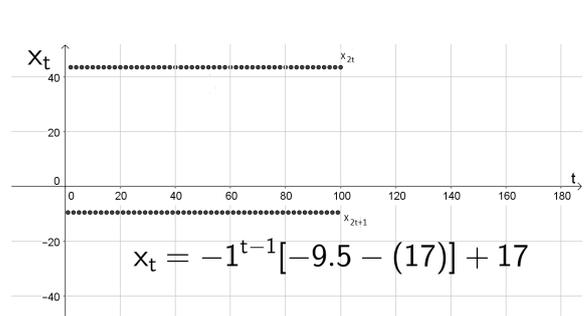
(a)



(b)

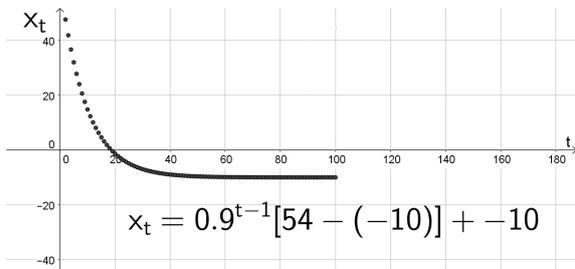


(c)

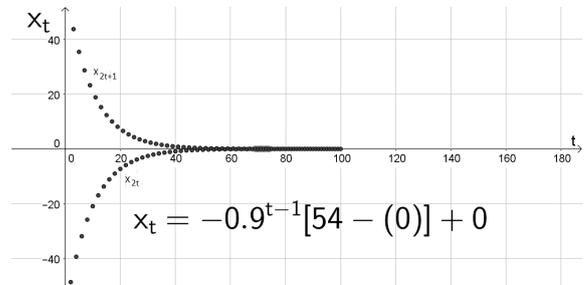


(d)

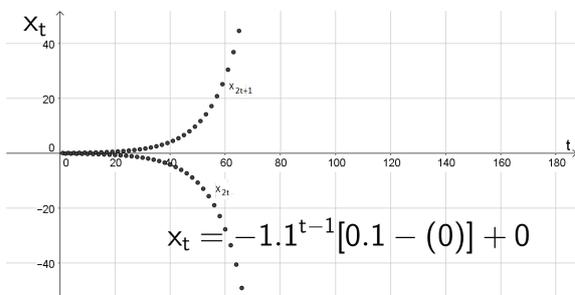
Figura 2: (a) Solução de (21) com $x_1 = -\frac{b}{a-1}$ e $b = 36,8$, (b) Solução de (21) com $a > 1$ e $x_1 > -\frac{b}{a-1}$ e $b = -4,92$, (c) Solução de (21) com $a > 1$ e $x_1 < -\frac{b}{a-1}$ e $b = -4,92$, (d) Solução de (21) com $a = -1$ e $b = 34$.



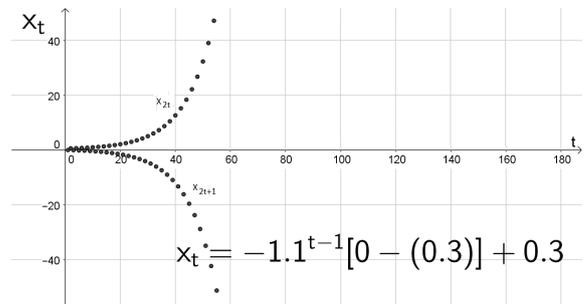
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3: (a) Solução de (21) com $0 < a < 1$ e $b = -1$, (b) Solução de (21) com $-1 < a < 0$ e $b = 0$, (c) Solução de (21) com $a < -1$ e $x_1 > -\frac{b}{a-1}$ e $b = 0$, (d) Solução de (21) com $a < -1$ e $x_1 < -\frac{b}{a-1}$ e $b = 0,63$.

4.2 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES

Agora serão analisadas as soluções encontradas no Capítulo 3 para equações de recorrência linear de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes (49).

Considere que k_1 e k_2 são as raízes da equação característica de (49). Então:

1. Se k_1 e k_2 são raízes reais distintas, a solução geral da equação (49) é

$$x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t. \quad (66)$$

Suponha que $|k_1| > |k_2|$, ou seja, k_1 é a raiz dominante (o caso em que $|k_1| < |k_2|$ é análogo). Segundo Luís (2006) o comportamento do limite da solução está condicionado a raiz dominante, pois

$$x_t = k_1^t \left[C_1 + C_2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^t \right]. \quad (67)$$

Como $\left| \frac{k_1}{k_2} \right| < 1$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^t = 0$, e então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 k_1^t$. Portanto, a solução dependerá das situações abaixo:

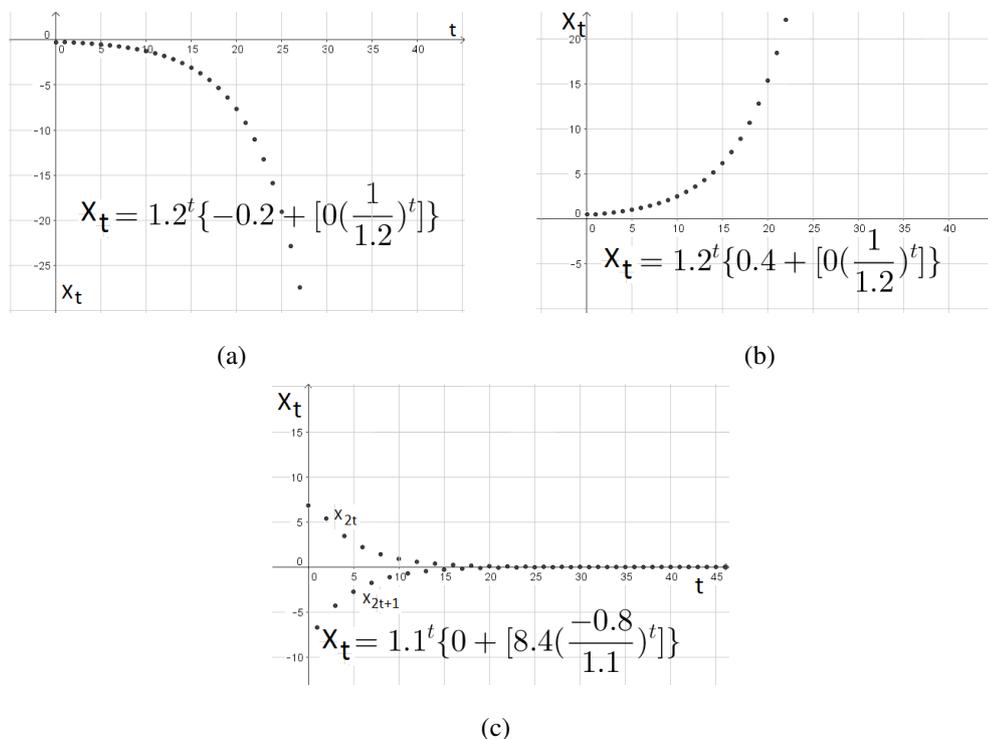


Figura 4: (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $|k_1| > |k_2|$ e $C_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $|k_1| > |k_2|$ e $C_1 > 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $|k_1| > |k_2|$ e $C_1 = 0$.

- (a) Se $k_1 > 1$, então x_t é divergente quando $C_1 < 0$ a $C_1 > 0$ e x_t é convergente se $C_1 = 0$, como pode ser visto na Figura 4, pois

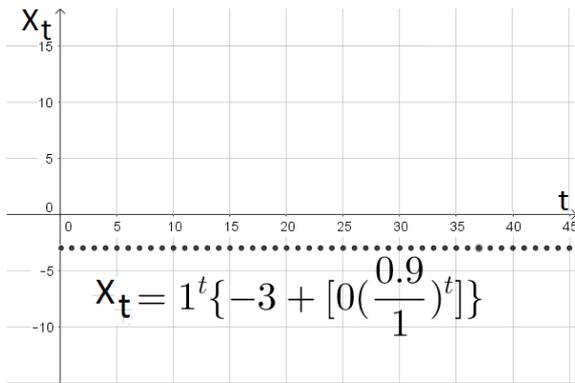
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 k_1^t = \begin{cases} -\infty, & \text{se } C_1 < 0 \\ +\infty, & \text{se } C_1 > 0 \\ 0, & \text{se } C_1 = 0. \end{cases}$$

- (b) Se $k_1 = 1$, a solução x_t converge, como pode ser visto na Figura 5(a), pois

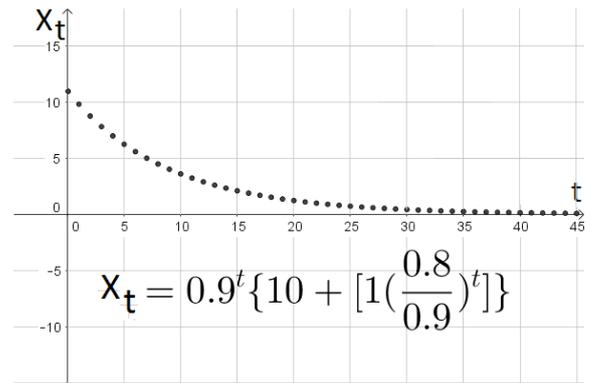
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 = C_1.$$

- (c) Se $0 \leq k_1 < 1$, então x_t converge, como pode ser visto na Figura 5(b), pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 k_1^t = 0.$$



(a)



(b)

Figura 5: (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k = 1$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $0 \leq k_1 < 1$.

- (d) Se $-1 \leq k_1 < 0$, a solução x_t converge, como pode ser visto na Figura 6(a), pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} k^t C_1 = 0.$$

- (e) Se $k_1 = -1$, a solução x_t diverge pelo Teorema 2.5, como pode ser visto na Figura 6(b), pois considerando as subsequências (x_{2t}) e (x_{2t+1}) , tem-se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = C_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = -C_1$.

- (f) Se $k_1 < -1$, a solução x_t diverge pelo Teorema 2.5, como pode ser visto na Figura 7, pois dadas as subsequências (x_{2t}) e (x_{2t+1}) , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } C_1 < 0 \\ +\infty, & \text{se } C_1 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } C_1 < 0 \\ -\infty, & \text{se } C_1 > 0. \end{cases}$$

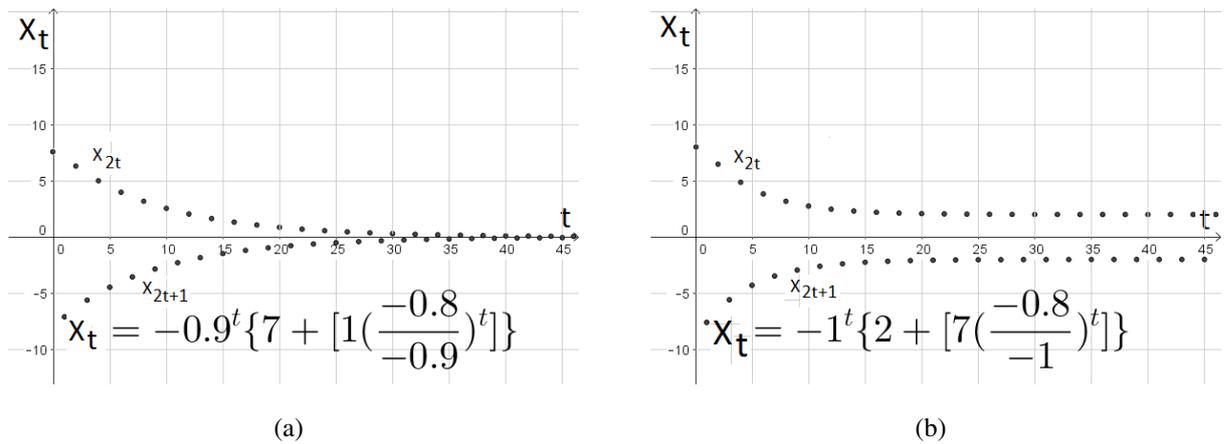
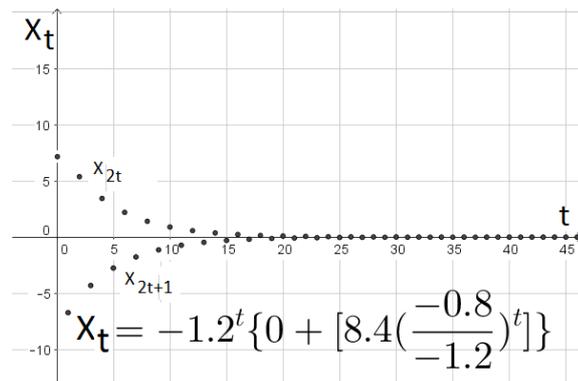
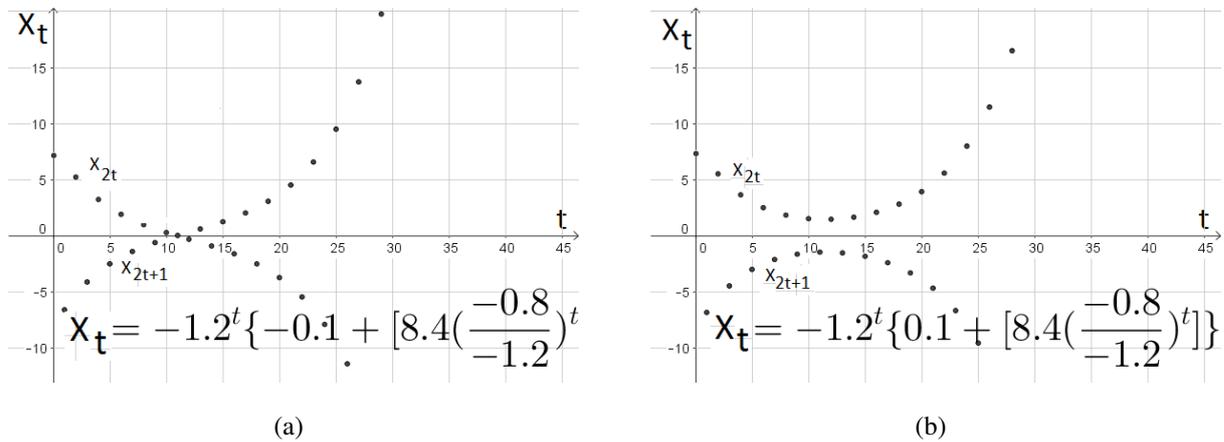


Figura 6: (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $|k_1| > |k_2|$ e $-1 \leq k_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $|k_1| > |k_2|$ e $k_1 = -1$.

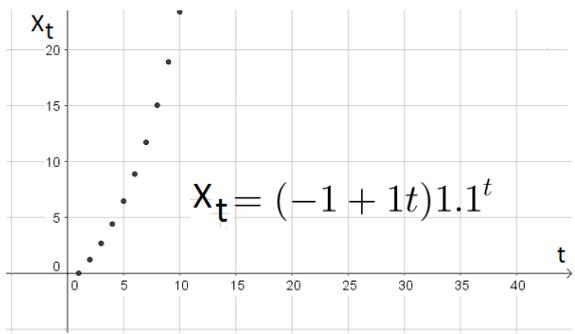


(c)

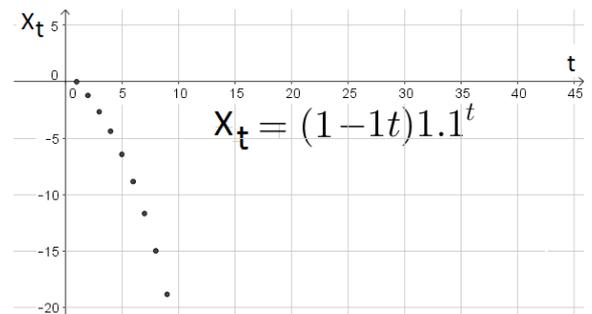
Figura 7: (a) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k < -1$ e $C_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k < -1$ e $C_1 > 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$ com $k < -1$ e $C_1 = 0$.

2. Se $k_1 = k_2 = k$, a solução geral tem termos dados por

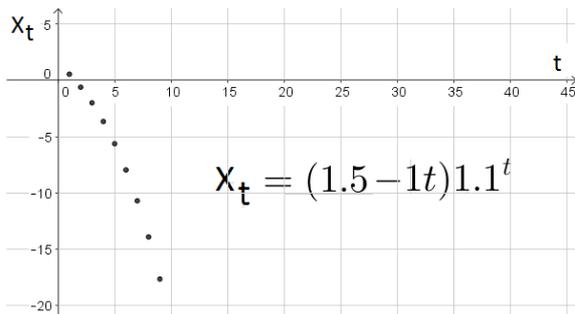
$$x_t = (C_1 + C_2 t) k^t.$$



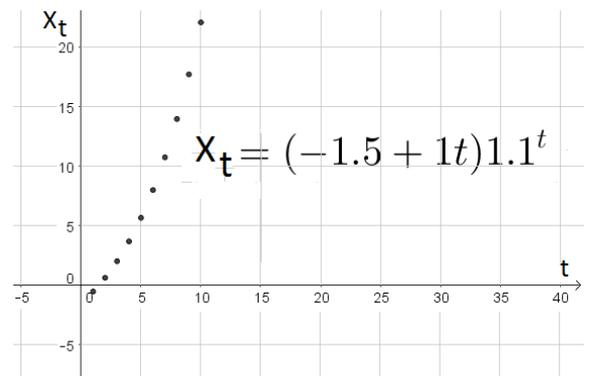
(a)



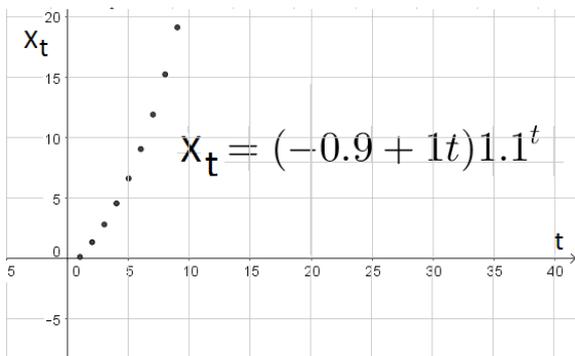
(b)



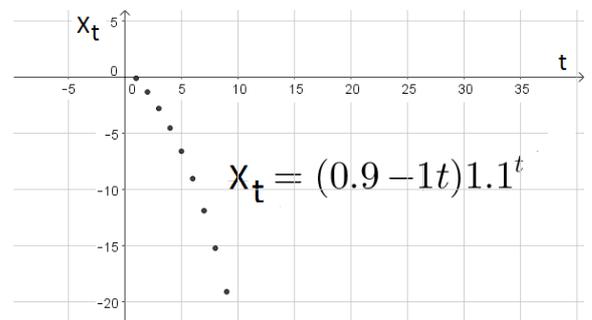
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 8: (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 = C_2$ e $C_1 < 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 = C_2$ e $C_1 > 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 > C_2$ e $C_1 > 0$, (d) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 > C_2$ e $C_1 < 0$, (e) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 < C_2$ e $C_2 > 0$, (f) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k > 1$ e $-C_1 < C_2$ e $C_2 < 0$.

Neste caso:

(a) Para $k > 1$, tem-se que x_t é divergente, como pode ser visto na Figura 8, pois

- Se $-C_1 = C_2$, então $(C_1 + C_2t)k^t = C_1(1-t)k^t$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2t)k^t = \begin{cases} +\infty, & \text{se } C_1 < 0 \\ -\infty, & \text{se } C_1 > 0. \end{cases}$$

- Se $-C_1 > C_2$, então

$$(C_1 + C_2t)k^t < C_1(1-t)k^t, \text{ ou}$$

$$(C_1 + C_2t)k^t > -C_1(t-1)k^t.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2t)k^t = \begin{cases} -\infty, & \text{se } C_1 > 0 \\ +\infty, & \text{se } C_1 < 0. \end{cases}$$

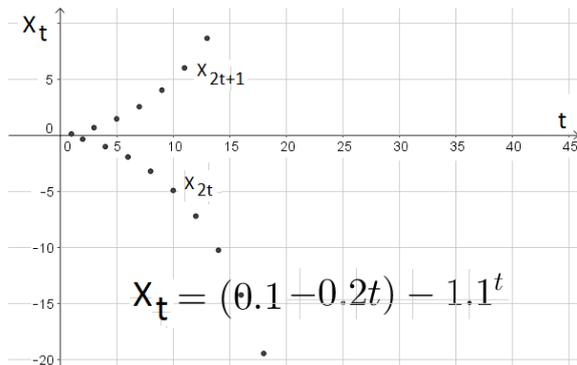
- Se $-C_1 < C_2$, então

$$(C_1 + C_2t)k^t < C_2(t-1)k^t, \text{ ou}$$

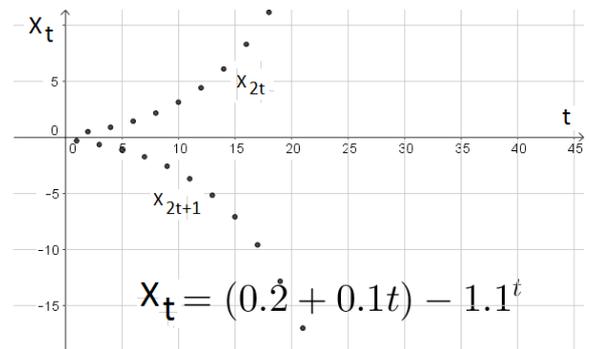
$$(C_1 + C_2t)k^t > -C_2(1-t)k^t.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2t)k^t = \begin{cases} +\infty, & \text{se } C_2 > 0 \\ -\infty, & \text{se } C_2 < 0. \end{cases}$$



(a)



(b)

Figura 9: (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2t)k^t$ com $k < 1$ e $-C_1 > C_2$ e $C_1 > 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2t)k^t$ com $k < 1$ e $-C_1 < C_2$ e $C_2 > 0$.

(b) Para $k < -1$, tem-se que x_t é divergente pelo Teorema 2.5, como pode ser visto na

Figura 9, pois dadas as subsequências (x_{2t}) e (x_{2t+1}) , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } -C_1 > C_2 \text{ e } C_1 > 0 \\ +\infty, & \text{se } -C_1 < C_2 \text{ e } C_2 > 0 \end{cases} \text{ e}$$

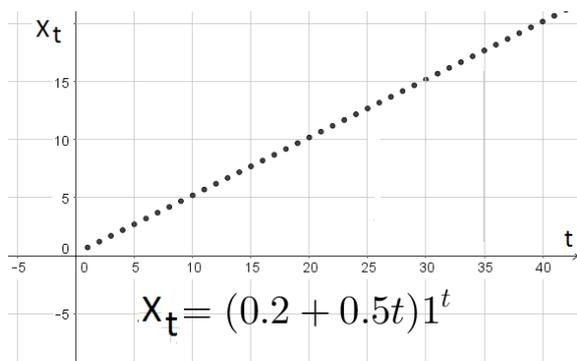
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } -C_1 > C_2 \text{ e } C_1 > 0 \\ -\infty, & \text{se } -C_1 < C_2 \text{ e } C_2 > 0. \end{cases}$$

(c) Para $k = 1$, a solução x_t é divergente, como pode ser visto na Figura 10(a) e 10(b), pois

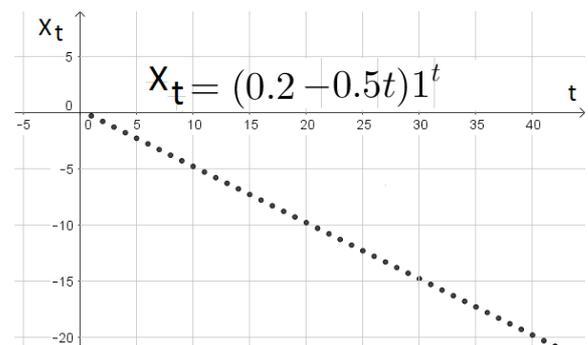
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2 t) 1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2 t) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } C_2 > 0 \\ -\infty, & \text{se } C_2 < 0. \end{cases}$$

(d) Para $-1 < k < 1$, a solução x_t é convergente, como pode ser visto na Figura 10(c), pois

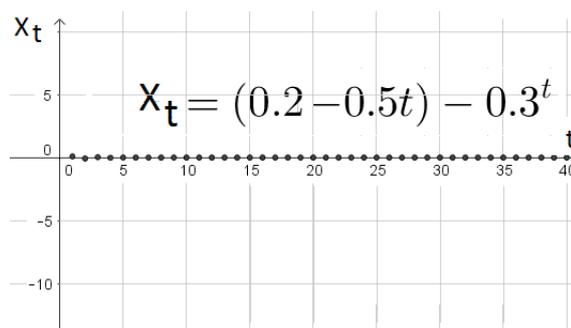
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2 t) k^t = 0.$$



(a)



(b)



(c)

Figura 10: (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = 1$ e $C_2 > 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = 1$ e $C_2 < 0$, (c) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $-1 < k < 1$.

(e) Se $k = -1$, a solução x_t diverge pelo Teorema 2.5, como pode ser visto na Figura 11,

pois dadas as subsequências (x_{2t}) e (x_{2t+1}) , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } C_2 < 0 \\ +\infty, & \text{se } C_2 > 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{2t+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } C_2 < 0 \\ -\infty, & \text{se } C_2 > 0. \end{cases}$$

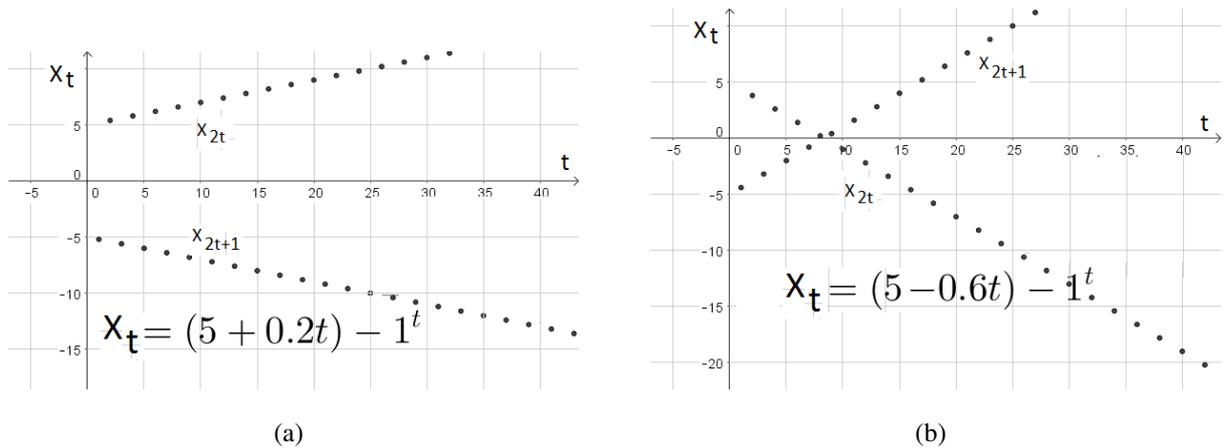


Figura 11: (a) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = -1$ e $C_2 > 0$, (b) Solução com termos dados por $x_t = (C_1 + C_2 t)k^t$ com $k = 1$ e $C_2 < 0$.

3. Se k_1 e k_2 são um par de raízes conjugadas da forma $a \pm ib$, a solução da equação é $x_t = \rho^t [C_1 \cos(t\theta) + iC_2 \sin(t\theta)]$, onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\omega = \tan^{-1}(\frac{C_2}{C_1})$, ou seja, $\cos \omega = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ e $\sin \omega = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, tem-se que

$$\begin{aligned} x_t &= \rho^n \sqrt{C_1^2 + C_2^2} [\cos(\omega) \cos(t\theta) + \sin(\omega) \sin(t\theta)] \\ &= C\rho^t \cos(t\theta - \omega). \end{aligned} \quad (68)$$

Neste caso, tem-se as seguintes situações:

- (a) $\rho > 1$, as raízes k_1 e $k_1 = \overline{k_2}$ estão no exterior do círculo unitário, $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, então os termos da solução x_t oscila aumentando de magnitude.
- (b) $\rho = 1$, as raízes k_1 e $k_1 = \overline{k_2}$ estão sobre o círculo unitário, então x_t oscila de forma constante mantendo a magnitude.
- (c) $\rho < 1$, as raízes k_1 e $k_1 = \overline{k_2}$ estão no interior do círculo unitário, sendo que x_t oscila e converge para zero.

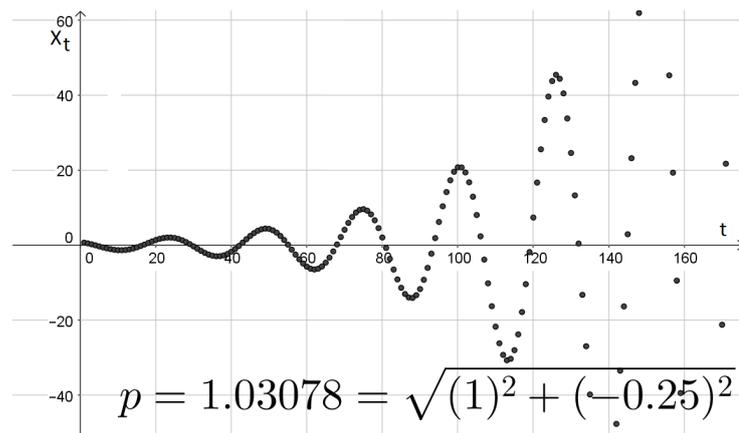


Figura 12: Solução com termos dados por $x_t = C\rho^t \cos(t\theta - \omega)$ com $\rho > 1$

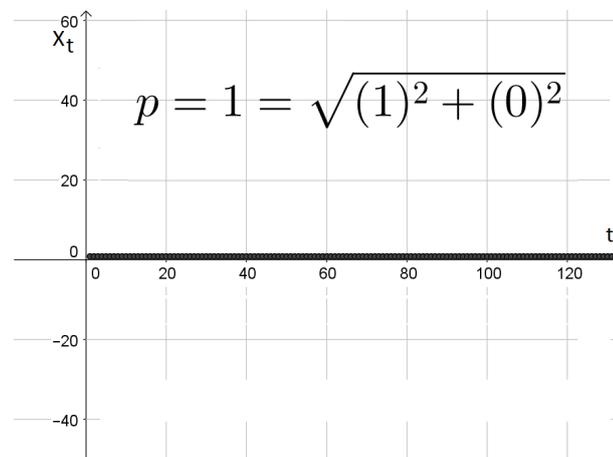


Figura 13: Solução com termos dados por $x_t = C\rho^t \cos(t\theta - \omega)$ com $\rho = 1$

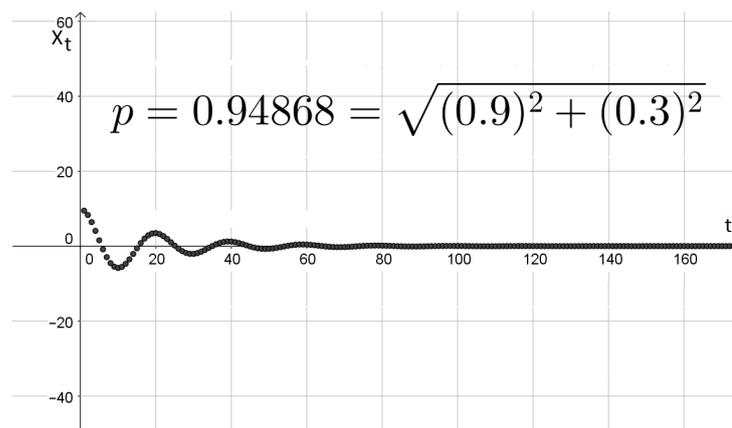


Figura 14: Solução com termos dados por $x_t = C\rho^t \cos(t\theta - \omega)$ com $\rho < 1$

Observação 4.1. No estudo da convergência da solução da equação (49) não foi considerada a dependência de condições iniciais. As soluções particulares podem ter comportamentos diferentes, dependendo das condições impostas.

Na próxima seção será apresentada a técnica do ponto de equilíbrio para analisar a equação de recorrência não linear de primeira ordem homogênea.

4.3 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA NÃO LINEAR E ESTABILIDADE

Na maioria dos casos, não é possível encontrar a solução da equação de recorrência não linear homogênea de primeira ordem:

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (69)$$

Assim, seu comportamento é analisado através de seu ponto de equilíbrio, o qual é definido abaixo como em Elaydi (2005).

Definição 4.2. Um ponto x^* no domínio de f é dito *Ponto de Equilíbrio* de (69) se é ponto fixo de f , ou seja, $f(x^*) = x^*$.

Pode-se notar que o ponto de equilíbrio x^* é uma solução constante de (69) se o dado inicial é esse ponto, pois se $x_{t_0} = x^*$, $x_{t_0+1} = f(x_{t_0}) = f(x^*) = x^*$ e $x_{t_0+2} = f(x_{t_0+1}) = f(x^*) = x^*$ e assim por diante. Graficamente, um ponto de equilíbrio é a x -coordenada do ponto onde o gráfico de f intercepta a equação $y = x$. Considerando x_{t_0} um valor inicial, temos as seguintes definições:

Definição 4.3. Um ponto de equilíbrio x^* é *estável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|x_{t_0} - x^*| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x_t - x^*| < \varepsilon \quad \text{para todo } t > t_0. \quad (70)$$

Se x^* não é estável, é chamado de *instável*.

Definição 4.4. Um ponto de equilíbrio x^* é chamado *atrator* se existe $\eta > 0$, tal que

$$|x_{t_0} - x^*| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x^*. \quad (71)$$

Ainda, o ponto x^* é dito *assintoticamente estável* se é estável e atrator. Se $\eta = \infty$, x^* é chamado *globalmente assintoticamente estável*.

Segundo Bassanezi (2006), outra maneira de determinar os pontos de equilíbrios de uma equação não linear é através dos *gráficos de Lamerey*, a qual consiste em um sistema cartesiano, onde o eixo das abscissas são os valores de x_t e o eixo das ordenadas x_{t+1} , então, dada a equação $x_{t+1} = f(x_t)$ toma-se um valor inicial x_{t_0} no eixo das abscissas, traça-se uma linha vertical a partir de x_{t_0} até se encontrar o gráfico de f e lê-se esse valor no eixo das ordenadas. Marca-se o valor de $f(x_{t_0})$ encontrado no eixo das abscissas, $x_{t_0+1} = f(x_{t_0})$, para o qual se

determina novamente o valor de f , e assim sucessivamente. Graficamente este ciclo pode ser feito traçando uma linha horizontal desde o ponto do gráfico $(x_{t_0}, f(x_{t_0}))$ até a função identidade $f(x) = x$ (a bissetriz do primeiro quadrante), e daí novamente uma linha vertical até ao gráfico de f . Continuando este processo pode-se determinar a órbita $x_{t_0}, f(x_{t_0}), f^2(x_{t_0}), \dots, f^t(x_{t_0}), \dots$

Os pontos de equilíbrios são dados pela intersecção do gráfico de f com a bissetriz $x_{t+1} = x_t$. Este é um processo análogo ao método de Ford-Walford, diferenciando apenas, por apresentar segmentos de retas que ligam os pontos $P_0 = (x_{t_0}, x_{t_0})$, $P_1 = (x_{t_0}, x_{t_0+1})$, $P_2(x_{t_0+1}, x_{t_0+1})$, $P_3 = (x_{t_0+1}, x_{t_0+2}) \dots$, ou seja, os segmentos $P_i P_{i+1}$, mostrando o caminho dos termos aos termos seguintes da equação de recorrência, sendo que no método Ford-Walford esses segmentos não existem.

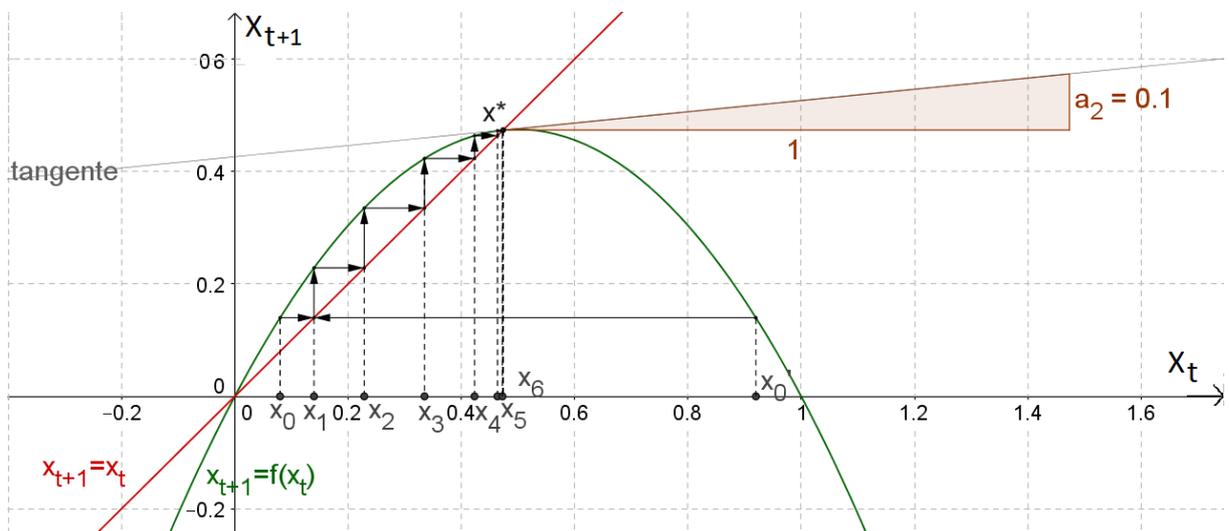


Figura 15: Ponto fixo $x^* = x_{t+1} = f(x_{t+1})$

Observe na Figura 15 que 0 e x^* são pontos fixos de f . Através destes pontos estuda-se o comportamento dos termos da equação de recorrência não linear. Dada a condição inicial x_{t_0} , a sequência de valores obtida através da equação afasta-se do ponto 0 e se aproxima do ponto x^* , logo diz-se que 0 é um ponto de equilíbrio *instável* e x^* é *assintoticamente estável*.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio x^* pode ser analisada através do valor:

$$\lambda = \left[\frac{df(x_t)}{dx_t} \right]_{x_t=x^*}, \quad (72)$$

em que λ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x_t)$ no ponto x^* .

As demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em Elaydi (2005).

1. Se $0 < |\lambda| < 1$, x^* é *assintoticamente estável*, logo $x_t \rightarrow x^*$.

As Figuras 16 e 18 mostram x^* quando $0 < \lambda < 1$ e $-1 < \lambda < 0$, respectivamente. As Figuras 17 e 19 mostram o comportamento dos valores x_t encontrados nos gráficos de Lamerey nos dois casos citados acima.

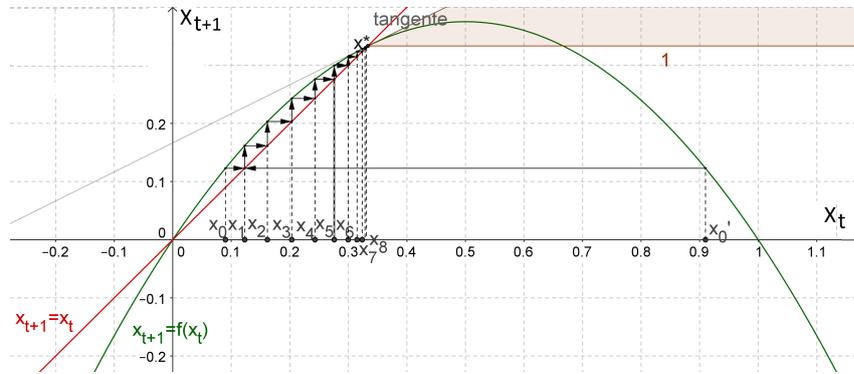


Figura 16: Comportamento de (x_t) quando $0 < \lambda < 1$ e $x_{t_0} = 0.09$

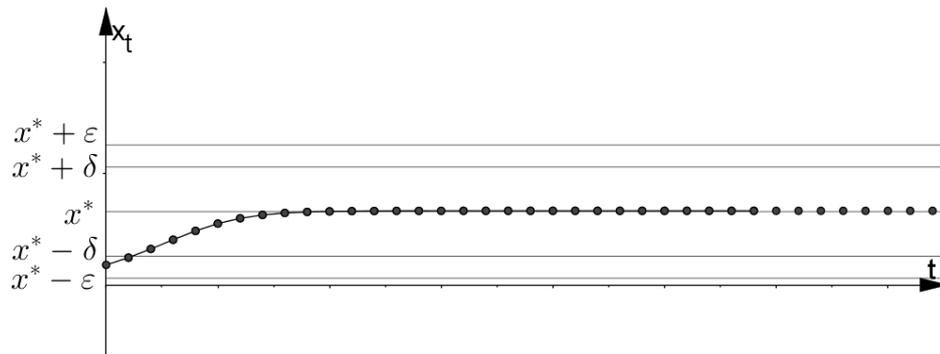


Figura 17: Comportamento de (x_t) quando $0 < \lambda < 1$ com $x_{t_0} = 0,09$ e $x^* = 0,33$

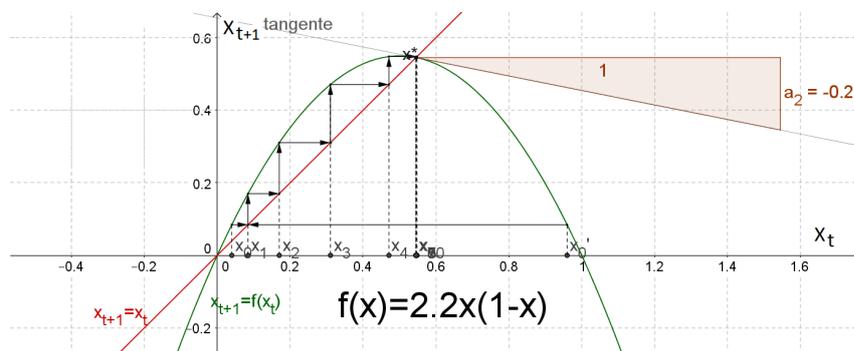


Figura 18: Comportamento de (x_t) quando $-1 < \lambda < 0$ e $x_{t_0} = 0.04$

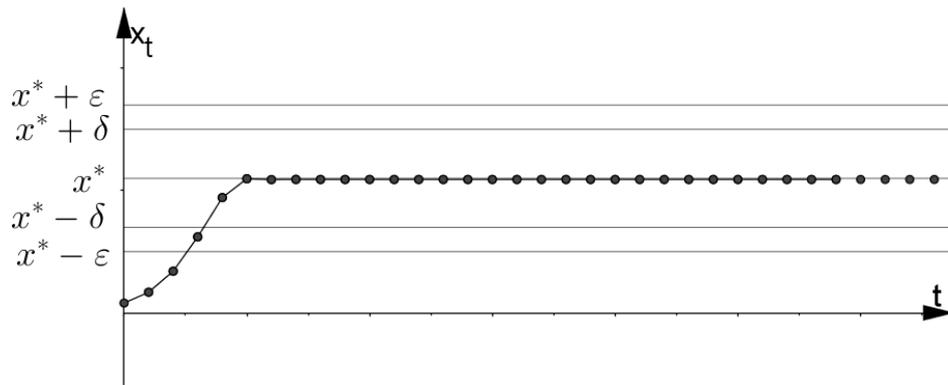


Figura 19: Comportamento de (x_t) quando $-1 < \lambda < 0$ com $x_{t_0} = 0,04$ e $x^* = 0,55$

2. Se $|\lambda| > 1$, o ponto de equilíbrio x^* é *instável*. As Figuras 20 e 21 mostram o ponto de equilíbrio quando $|\lambda| > 1$ e o comportamento de (x_t) , respectivamente.

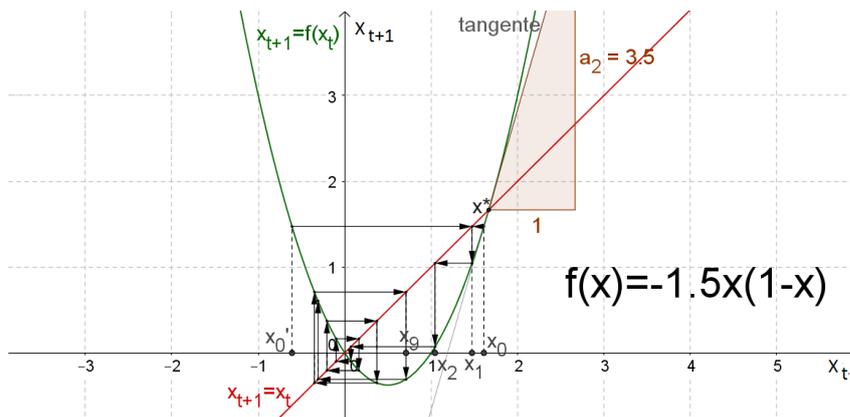


Figura 20: Comportamento de (x_t) quando $\lambda > 1$ e $x_{t_0} = 1,61$

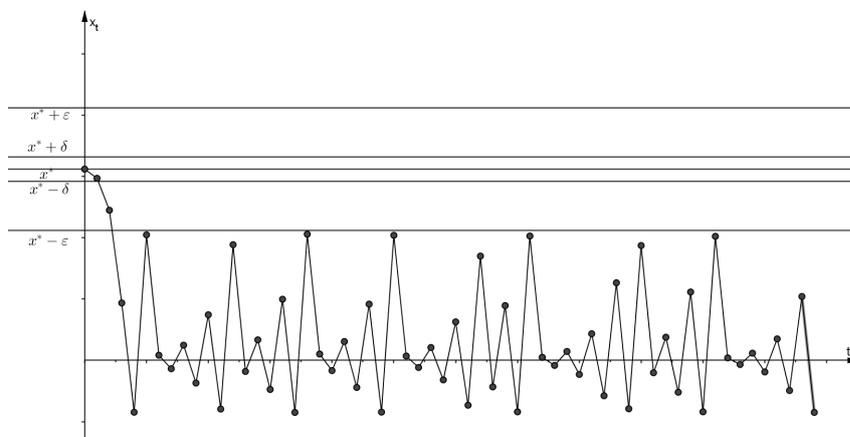


Figura 21: Comportamento de (x_t) quando $\lambda > 1$ com $x_0 = 1,61$ e $x^* = 1,67$

3. Se $|\lambda| = 1$, o ponto de equilíbrio x^* é *estável*. Neste caso, a seqüência (x_t) , a partir de

algum t , oscila em torno do ponto x^* (Figura 22).

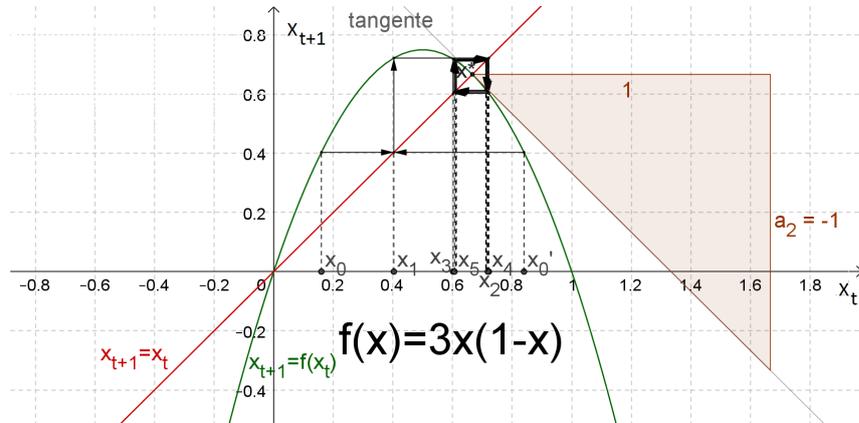


Figura 22: Comportamento de (x_t) quando $\lambda = -1$ e $x_{t_0} = 0,16$

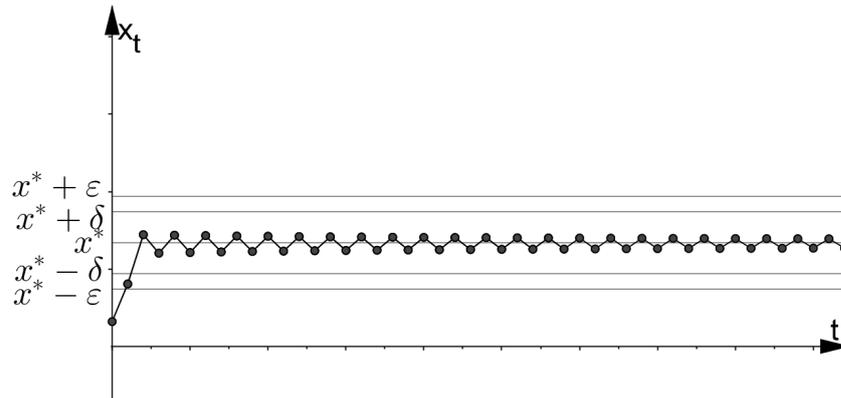


Figura 23: Comportamento de (x_t) quando $\lambda = -1$ com $x_{t_0} = 0,16$ e $x^* = 0,67$

5 PROPOSTA DE ATIVIDADE EM SALA DE AULA

Com a tendência de aumento do desemprego no Brasil, a Associação Nacional dos Birôs de Crédito (ANBC) prevê que os índices de inadimplência irão se recuperar somente a partir de 2018 (CONTEÚDO, 2016). Além disto, segundo estudos da Experian (2015) e a Classificação Mosaic Brasil, 16,8% da população brasileira são de jovens adultos da periferia e estes representam 23% dos inadimplentes do Brasil.

Um outro problema enfrentado pela população brasileira, principalmente na região Sudeste do país, é a falta de água, a qual também prejudica o abastecimento de energia elétrica nas residências, pois sua geração no Brasil vem principalmente das usinas hidrelétricas (TECNOGERA, 2015). Com a diminuição das chuvas e a falta de investimento para aumentar as capacidades dos reservatórios, a geração de energia se torna insuficiente, causando desconfortos, como por exemplo, apagões constantes e racionamento de energia para a população que está acostumada com tal comodidade.

Devido aos fatos apresentados, neste trabalho foi proposta e aplicada uma atividade em sala de aula para os alunos do 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Recanto dos Pássaros, localizada em Ourinhos-SP, a qual explorou a teoria de equação de recorrência e a economia doméstica para traçar um planejamento familiar que pode auxiliar o aluno no alcance de seus objetivos financeiros, como, por exemplo, compra de objetos, viagens ou até mesmo quitação de dívidas. Ainda, foi utilizado o *software* GeoGebra para fazer previsões do orçamento familiar com parâmetros diferentes daqueles encontrados pelos alunos.

5.1 ETAPAS DA PROPOSTA

A proposta de atividade foi realizada em 9 etapas, as quais estão descritas nas subseções seguintes.

5.1.1 PRIMEIRA ETAPA

Neste momento foi feita uma discussão em sala de aula sobre a importância de um planejamento familiar para organização do orçamento da família. Também foi planejado para que assistissem e lessem os seguintes vídeos e reportagens:

- ANIMAÇÃO - HOMEM CONSUMISTA
link: https://www.youtube.com/watch?v=5XqfNmML_V4
- A HISTÓRIA DAS COISAS COMPLETO DUBLADO EM PORTUGUES (capitalismo, consumismo e meio ambiente)
link: <https://www.youtube.com/watch?v=Q3YqeDSfdk>
- Os impactos do consumismo no mundo atual - #68
link: https://www.youtube.com/watch?v=_3Pr98eISU8
- Economia Sem Fronteiras - O Orçamento Familiar
link: <https://www.youtube.com/watch?v=EM4nUhUDhAE>
- Como organizar o orçamento doméstico em quatro passos (REPORTAGEM)
link: <https://economia.uol.com.br/financas-pessoais/noticias/redacao/2015/06/09/como-organizar-o-orcamento-domestico-em-newline-quatro-passos.htm>

Entretanto, como a escola não possuía estrutura, foi efetuada uma visita a UTFPR-CP na nona etapa da aplicação com os alunos para que pudessem utilizar o *software* GeoGebra, assistissem e lessem os vídeos e reportagens propostos.

5.1.2 SEGUNDA ETAPA

Nesta etapa, o aluno foi estimulado a pensar em sua meta financeira, pois ao final do projeto ele deveria responder em quantos meses alcançaria seu objetivo com o planejamento financeiro. Para isso, foram apresentadas as equações de recorrência que descrevem a P.A. e a P.G., e para encontrar suas soluções foram feitas as iterações. Além disto, foi mostrado com outros exemplos que as soluções das equações de recorrência lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes possuem a mesma estrutura, assim como as não-homogêneas.

Depois disto, foram apresentadas as equações de recorrência que descrevem o orçamento familiar e para apresentar a solução (45) foi feito um comparativo com a solução da P.G., que

também é uma equação de recorrência linear não-homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes e, portanto, terá a mesma estrutura em sua solução.

5.1.3 TERCEIRA ETAPA

Foi entregue aos alunos o quadro do Anexo A, para que preenchessem junto aos moradores de sua residência. Nesta etapa o aluno passou a compreender a situação financeira de sua família.

5.1.4 QUARTA ETAPA

A partir do quadro entregue na etapa anterior preenchida (veja Figura 24), o aluno pôde calcular qual a porcentagem do salário total de sua família é utilizado da seguinte forma, por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{R\$} & \% & 1800x = 100 \cdot (1710) \\
 1800 \longrightarrow & 100 & 1800x = 171000 \\
 1710 \longrightarrow & x & x = \frac{171000}{1800} \\
 & & x = 95\%.
 \end{array}$$

Tabela 2: Orçamento familiar

Saídas	(R\$)	Entradas	(R\$)
Saúde		Salário	1800,00
Escola			
Internet	70,00		
Água	100,00		
Casa	60,00		
Luz	130,00		
Cartão	400,00		
Animais	50,00		
Carro			
mercado	700,00		
Gasolina	200,00		
Outros		Outros	
Total	1710,00	Total	1800,00

Figura 24: Quadro do Aluno

Nesta etapa não houve grandes dificuldades por parte dos alunos. Desta forma pode-se encontrar o coeficiente $\beta = 0.95$. Em seguida, calculou-se a quantidade de meses necessários



Figura 25: Alunos calculando o valor de beta

para alcançar seu objetivo, da seguinte forma:

Primeiramente, considerando o caso do aluno não investir na poupança, ou seja, $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}
 p_n &= (1 - \beta)r_0n \\
 1600 &= (1 - 0,95)1800n \\
 1600 &= (0,05)1800n \\
 1600 &= 90n \\
 \frac{1600}{90} &= n \\
 n &\cong 17,77.
 \end{aligned}$$

Agora, fazendo o cálculo para o investimento na poupança, ou seja, $\alpha = 0,0066$, e considerando $p_n = 1600$, $r_0 = 1800$ e $p_0 = 50$, em (45):

$$\begin{aligned}
 1600 &= [(1 - 0,95)0,0066 + 1]^n 50 + (1 - 0,95)1800 \frac{1 - [(1 - 0,95)0,0066 + 1]^n}{1 - [(1 - 0,95)0,0066 + 1]} \\
 &= [(0,05)0,0066 + 1]^n 50 + (0,05)1800 \frac{1 - [(0,05)0,0066 + 1]^n}{1 - [(0,05)0,0066 + 1]} \\
 &= (1,00033)^n 50 + 90 \frac{1 - (1,00033)^n}{1 - (1,00033)} \\
 &= (1,00033)^n 50 + 90 \frac{1 - (1,00033)^n}{-0,00033} \\
 &= (1,00033)^n 50 - 272727,27 [1 - (1,00033)^n] \\
 &= (1,00033)^n 50 - 272727,27 + 272727,27 (1,00033)^n.
 \end{aligned}$$

Nesta etapa, foi explicado aos alunos como resolver a equação acima, com o uso do logaritmo

e suas propriedades, pois tiveram grandes dificuldades nestes cálculos:

$$\begin{aligned}
 1600 + 272727,27 &= (1,00033)^n(50 + 272727,27) \\
 \frac{274327,27}{272777,27} &= (1,00033)^n \\
 \frac{274327,27}{272777,27} &= (1,00033)^n \\
 1,0056822916 &= (1,00033)^n \\
 \log 1,0056822916 &= \log(1,00033)^n \\
 0,002460803 &= n(0,0001432935) \\
 \frac{0,002460803}{0,0001432935} &= n.
 \end{aligned}$$

E assim foi encontrado o valor

$$n = 17,1731655658.$$

Que representa 18 dias a menos que o caso sem investimento. Nesta etapa, os alunos acharam a redução dos dias muito pequena e questionaram se não haveria como diminuir ainda mais.

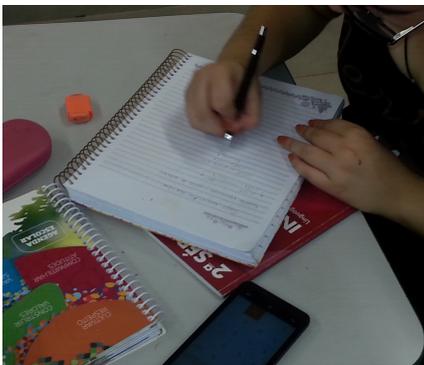


Figura 26: Alunos calculando o tempo para obter o valor desejado

Foi então, apresentado aos alunos outro tipo de investimento: o Banco Sofisa S.A., que é o primeiro banco online do Brasil e parte de uma instituição com 55 anos de história, sendo um dos mais capitalizados e com melhor avaliação no Brasil (DIRETO, 2017).

Após esta apresentação, foi feito o cálculo para um investimento no bando Sofisa Direto, com rentabilidade diária durante o prazo de 7 meses, onde $\alpha = 0,0093$. Substituindo em (45) e considerando ainda $p_n = 1600$, $r_0 = 1800$ e $p_0 = 50$, calculou-se o tempo n de meses

para este investimento:

$$\begin{aligned}
 1600 &= [(1 - 0,95)0,0093 + 1]^n 50 + (1 - 0,95)1800 \frac{1 - [(1 - 0,95)0,0093 + 1]^n}{1 - [(1 - 0,95)0,0093 + 1]} \\
 &= [(0,05)0,0093 + 1]^n 50 + (0,05)1800 \frac{1 - [(0,05)0,0093 + 1]^n}{1 - [(0,05)0,0093 + 1]} \\
 &= (1,000465)^n 50 + 90 \frac{1 - (1,000465)^n}{1 - (1,000465)} \\
 &= (1,000465)^n 50 + 90 \frac{1 - (1,000465)^n}{-0,000465} \\
 &= (1,000465)^n 50 - 193548,39[1 - (1,000465)^n] \\
 &= (1,000465)^n 50 - 193548,39 + 193548,39(1,000465)^n.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 1600 + 193548,39 &= (1,000465)^n (50 + 193548,39) \\
 195148,39 &= (1,000465)^n (193598,39) \\
 \frac{195148,39}{193598,39} &= (1,000465)^n \\
 1,0080062649 &= (1,000465)^n \\
 \log 1,0080062649 &= \log(1,000465)^n \\
 0,0034632313 &= n(0,0002018999) \\
 \frac{0,0034632313}{0,0002018999} &= n.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$n = 17,1532095855. \quad (73)$$

Diminuindo um pouco mais o tempo que levaria para juntar o valor desejado, ou seja, entre não investir, investir na poupança ou investir no Banco Sofisa a melhor opção é investir no Banco Sofisa, pois foi o investimento que trouxe mais rentabilidade e menor tempo.

Ao final desta etapa, o aluno percebeu a importância de escolher um bom investimento, pois com uma boa escolha de investimento pode-se diminuir ainda mais o tempo para alcançar seu objetivo financeiro. Mas, que apenas investir não seria suficiente para ter uma diminuição de tempo significativa. Então, foi proposto uma de economia de energia elétrica como estratégia para a diminuição do tempo.

5.1.5 QUINTA ETAPA

Foi entregue ao aluno o quadro do Anexo B, para que ele preenchesse junto a sua família a primeira, a segunda, a terceira e a sexta colunas. O aluno destacou os aparelhos eletrônicos que poderiam ter seu consumo de energia elétrica reduzidos, por exemplo, a chuveiro elétrico. Se a família é composta por três pessoas e se cada pessoa reduzir 5 minutos no seu banho diário, então será economizado 15 minutos ao dia e no mês (15min·30dias) 450min minutos do consumo de energia desse aparelho, o que resultará em uma economia em reais na conta mensal de sua residência.

Na próxima etapa com o quadro preenchido, foram discutidas estratégias para a redução de β .

5.1.6 SEXTA ETAPA

Foi apresentado aos alunos o método usado pela Companhia de Energia CPFL (veja Figura 27) para o cálculo do gasto em reais por KWh (Quilowatt-hora) gasto de energia elétrica.

Considere $V(q)$ o valor por q em KWh gasto de energia elétrica, **TUSD** a constante que representa o valor da Tarifa de Uso do Sistema de Distribuição e **A** a constante que representa o valor do KWh utilizado conforme a bandeira vigente, no caso a bandeira Amarela, tem-se:

$$V(q) = (\mathbf{TUSD} + \mathbf{A})q = (0,25423 + 0,2821)q = 0,53633q,$$

onde os valores atribuídos são os preços do uso do TUSD e da Bandeira Amarela encontrados na Figura 27. Não foi acrescentado R\$1,50 à conta a cada 100KWh como se orienta quando a bandeira é Amarela, pois tem-se interesse apenas no gasto de energia elétrica. O cálculo para as Bandeiras Verde e Vermelha são feitos de forma análoga.

Quando a renda da família é considerada baixa, o cálculo de $V(q)$ na Bandeira Amarela é da seguinte forma:

Se $0 \leq q \leq 30$, então:

$$V(q) = (\mathbf{TUSD} + \mathbf{A})q = (0,08567 + 0,09874)q = (0,18441)q.$$

Se $30 < q \leq 100$, então:

$$V(q) = (\mathbf{TUSD} + \mathbf{A})q = (0,14687 + 0,16926)q = (0,31613)q.$$

Bandeira Tarifária

Período de Vigência: 11/2016

Visualizar Histórico

Bandeira amarela
Usinas térmicas ativadas.
(geração térmica de R\$ 211,28/MWh a R\$ 422,56/MWh)
Acresce na sua conta R\$ 1,50 a cada 100kWh.

Verde ?
Amarelo ?
Vermelho ?

Taxas e Tarifas

PREÇOS DE TARIFAS DE ENERGIA ELÉTRICA PRATICADAS NA CPFL SANTA CRUZ

Tarifas Grupo B	TUSD	TE			Desconto
	R\$/MWh	Bandeira Verde	Bandeira Amarela	Bandeira Vermelha	%/kW
Residencial - Normal	254,23	267,10	282,10	297,10	
Baixa Renda					
0 a 30 kWh	85,67	93,49	98,74	103,99	65%
31 a 100 kWh	146,87	160,26	169,26	178,26	40%
101 a 220 kWh	220,30	240,39	253,89	267,39	10%
> 220 kWh	244,78	267,10	282,10	297,10	
Rural	177,96	186,97	201,97	216,97	
Coop Eletrificação Rural	177,96	186,97	201,97	216,97	
Serviço Público de Irrigação	152,54	160,26	175,26	190,26	
Demais Classes	254,23	267,10	282,10	297,10	
Iluminação Pública					
B4a - Rede de Distribuição	139,83	146,91	161,91	176,91	
B4b - Bulbo da Lâmpada	152,54	160,26	175,26	190,26	

Figura 27: Taxas e tarifas da CPFL

Fonte: <http://servicosonline.cpf.com.br/servicosonline/taxasetarifas/taxasetarifas.aspx>

Se $100 < q \leq 220$, então:

$$V(q) = (\mathbf{TUSD} + \mathbf{A})q = (0,22030 + 0,25389)q = (0,47419)q.$$

Se $q > 220$, então:

$$V(q) = (\mathbf{TUSD} + \mathbf{A})q = (0,24478 + 0,28210)q = (0,52688)q.$$

Assim, a função que representa o cálculo de $V(q)$ para as Famílias de Baixa Renda é

dada por:

$$V(q) = \begin{cases} 0,18441q, & \text{se } 0 \leq q \leq 30 \\ 0,31613q, & \text{se } 30 < q \leq 100 \\ 0,47419q, & \text{se } 100 < q \leq 220 \\ 0,52688q, & \text{se } 220 < q. \end{cases} \quad (74)$$

Ao final dessa explicação, o aluno calculou o valor a ser pago pelo consumo de energia elétrica de sua família. Foi dado de exemplo a eles uma família que esteja cadastrada nas **famílias de baixa renda**, e seu consumo é de 301,225KWh pagará em reais:

$$V(301,225) = 0,52688(301,225) = 158,71.$$

5.1.7 SÉTIMA ETAPA

Com o conteúdo apresentado na Primeira Etapa e com o auxílio do professor, o aluno completou o quadro do Anexo B (veja quadro do aluno na Figura 28), e então verificou-se que, com uma certa economia de energia elétrica era capaz de reduzir o valor de β .

Tabela 1: Consumo de energia elétrica

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Aparelho eletrônico	tempo de uso (dia)	dias de uso no mês	tempo de uso no mês	tempo de uso no mês em horas	potência do aparelho(W)	gasto (Wh)	gasto (KWh)
Chuveiro	45 min	30	1350 min	22,5h	3500	78750	78,75
Chuveiro	30 min	30	900 min	15h	150	2250	2,25
Comp.	9h	30	270h	270h	180	48600	48,60
TV	10h	30	300h	300h	90	27000	27,00
apladeir	24h	30	720h	720h	130	93600	93,60
Ventilador	15h	25	375h	375h	65	24375	24,375
Lâmpadas	45h	30	1350h	1350h	15	20250	20,25
Ferro	1h	4	4h	4h	1000	4000	4,00
Secador	1h	4	4h	4h	600	2400	2,40
TOTAL							301,225

Figura 28: Quadro de consumo de energia do aluno

Para preencher o quadro do Anexo B, o aluno procedeu da seguinte maneira: para obter os valores da quarta coluna multiplicou os valores da segunda coluna pelos valores encontrados na terceira. A quinta coluna foi obtida convertendo os valores da quarta coluna de minutos para horas. Os valores da sétima coluna foram obtidos multiplicando os valores da quinta coluna com os da sexta. E por fim, a oitava coluna foi obtida dividindo os valores da sétima coluna por

pois, $301,225 - 68,948 = 238,277$. Logo, de (75) e (76), foi concluído que a família irá economizar R\$33,17. Desta forma, o aluno pôde calcular um novo valor de beta (β_{novo}):

R\$	%	$1800x = 100 \cdot (1676,83)$
1800	$\longrightarrow 100$	$1800x = 167683$
$1710 - 33,17$		$x = \frac{167683}{1800}$
1676,83	$\longrightarrow x$	$x \cong 93,15722\%$,

ou seja $\beta_{novo} = 0,9315722$. Foi ainda utilizado o GeoGebra para simular outras relações entre KWh economizados e o valor do β_{novo} . Com isso, o aluno percebeu que quanto maior a economia em KWh, menor será o valor de beta. As Figuras 31 e 32 mostram o valor de β_{novo} considerando uma economia de 40KWh e 60KWh, respectivamente.

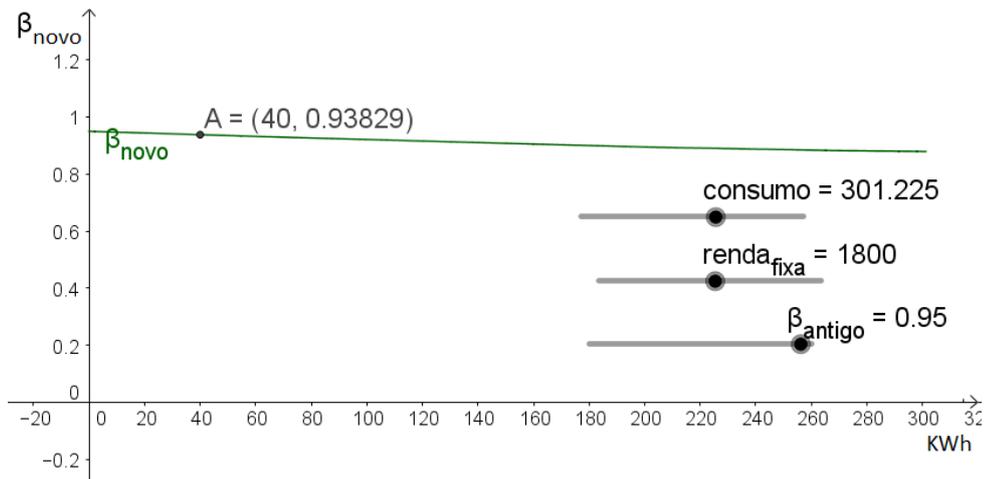


Figura 31: Encontrando $\beta_{novo} = 0,93829$ com economia de 40KWh.

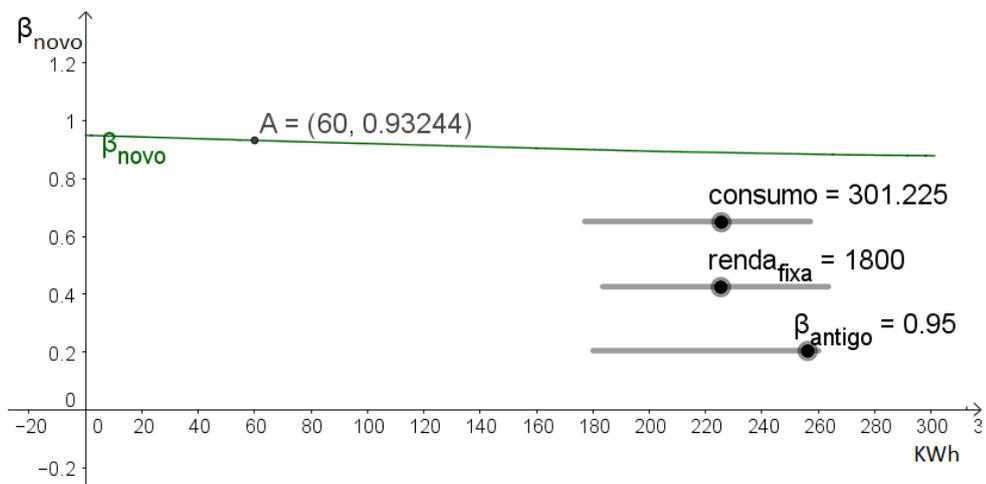


Figura 32: Encontrando $\beta_{novo} = 0,93244$ com economia de 60KWh.

Tendo o conhecimento do β_{novo} , na próxima etapa foi feita a simulação de quanto tempo será necessário para o aluno atingir seu objetivo financeiro.

5.1.9 NONA ETAPA

Nesta etapa não foram feitos cálculos, apenas as simulações no *software* GeoGebra no laboratório da UTFPR-CP, considerando alguns valores diferentes para α , p_0 e r_0 , com a finalidade de encontrar o número de meses n necessários para obter a quantidade de dinheiro desejada pelo aluno.

As Figuras 33, 34, 35 e 36 permitem que o aluno identifique o valor de n para diferentes parâmetros da equação (45).

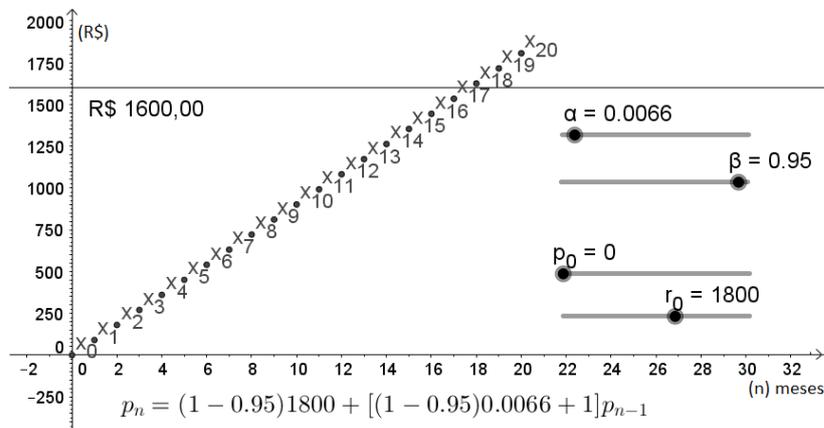


Figura 33: Solução de (45) com $\beta = 0,95$ e $p_0 = 0$

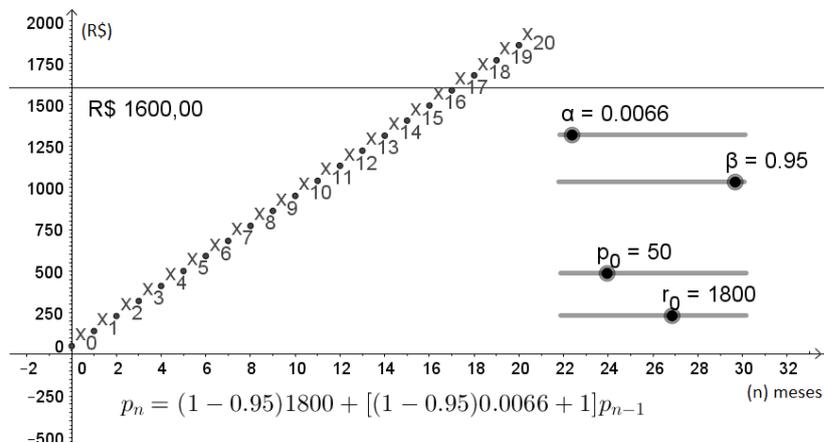


Figura 34: Solução de (45) com $\beta = 0,95$ e $p_0 = 50$

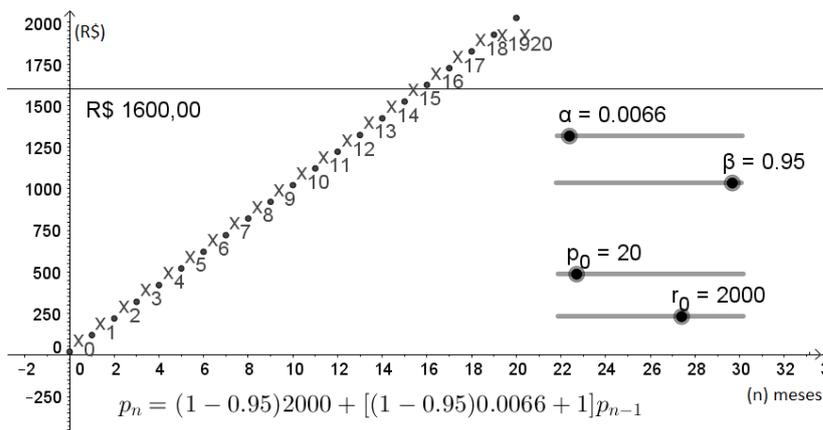


Figura 35: Solução de (45) com $\beta = 0,95$, $p_0 = 20$ e $r_0 = 2000$

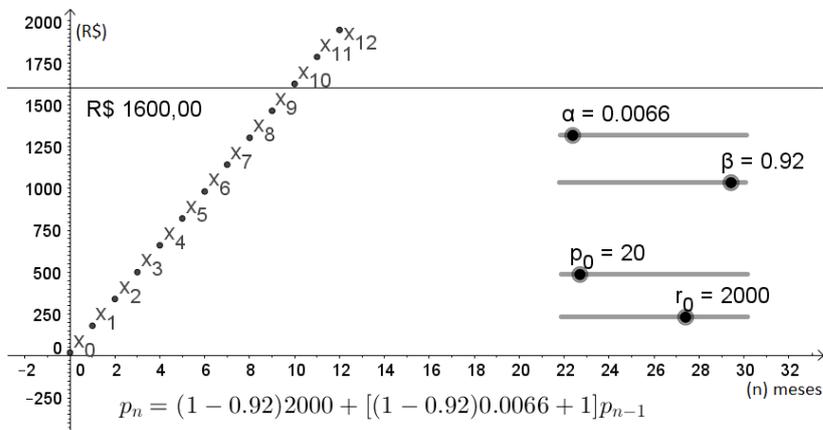


Figura 36: Solução de (45) com $\beta = 0,92$, $p_0 = 20$ e $r_0 = 2000$

Como foi possível observar, conforme diminui-se o valor de β o tempo para atingir objetivo financeiro também diminui. Veja a simulação do exemplo da oitava etapa, onde havia-se descoberto um $\beta_{novo} = 0,9315722$ na 37.

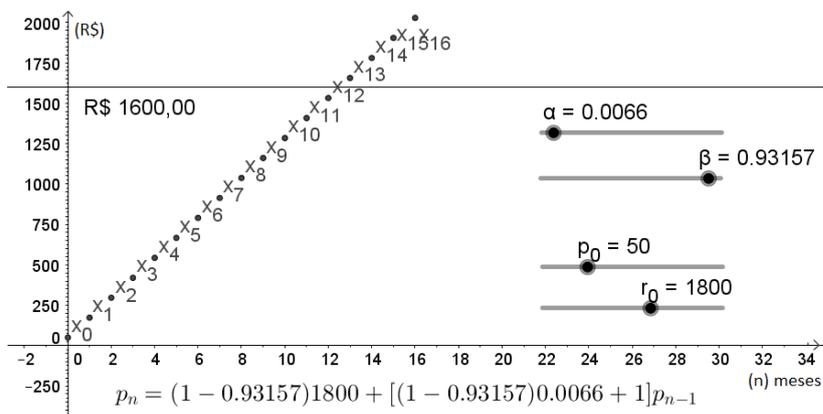


Figura 37: Solução de (45) com $\beta_{novo} = 0,9315722$, $p_0 = 50$ e 62,948KWh economizados

Logo, serão necessários aproximadamente 12,5 meses para se obter R\$1600,00, que são aproximadamente 5 meses a menos, comparado aos 17,77 meses com o $\beta_{antigo} = 0,95$ sem investimento.

Portanto, o aluno percebeu que é possível com uma economia simples de energia elétrica, diminuir beta e então alcançar seu objetivo antes do esperado. Além disto, é possível que o aluno faça outras economias para diminuir ainda mais o seu beta, percebendo assim que quanto mais poupar, menos tempo levará para alcançar seu objetivo.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho o aluno pôde perceber que a matemática pode ser aplicada em problemas do seu dia-a-dia e ainda teve oportunidade de adquirir interesse pela economia doméstica e perceber que mesmo não possuindo renda alguma é possível junto com seus familiares, desenvolver uma estratégia de economia para realizar seus desejos. Ainda, foi sempre tratado nas aulas que economizar energia elétrica no banho também resulta na economia de água, fato que contribui para poupar o orçamento familiar. Além disto, por meio desta experiência os alunos puderam rever os conteúdos sobre sequências, P.A., P.G., logaritmo e propriedades aritméticas que foram abordados nas séries anteriores do Ensino Médio por meio das equações de recorrência. Assim, despertou-se um novo olhar sobre estes assuntos, fazendo com que o aluno compreenda que muitos conteúdos podem ser abordados de diferentes maneiras.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- CALIXTO, B.; IMERCIO, A. **Crise da água em São Paulo: Quanto falta para o desastre?** 2014. Disponível em: <<http://epoca.globo.com/colunas-e-blogs/blog-do-planeta/noticia/2014/06/crise-da-agua-em-sao-paulo-quanto-falta-para-bo-desastreb.html>>. Acesso em: 10 dezembro 2016.
- CONTEÚDO, E. **Situação real da inadimplência no País é pior do que mostram os indicadores**. 2016. Disponível em: <<http://economia.ig.com.br/2016-06-05/situacao-real-da-inadimplencia-no-pais-e-pior-do-que-mostram-os-indicadores.html>>. Acesso em: 10 dezembro 2016.
- DANTE, L. R. **Matemática: Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo, SP: Ática, 2005.
- DIRETO, S. 2017. Disponível em: <<http://www.sofisadireto.com.br/quem-somos/>>. Acesso em: 10 dezembro 2016.
- ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equations**. 3. ed. USA: Springer, 2005.
- ELLER, E. S. **Equações de recorrências. Aplicação no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, SP, 2015.
- EXPERIAN, S. **Estudo inédito da Serasa Experian traça o Mapa da Inadimplência no Brasil em 2014**. 2015. Disponível em: <<https://www.serasaexperian.com.br/estudo-inadimplencia/r>>. Acesso em: 10 dezembro 2016.
- FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: L.T.C., 1995.
- FILHO, M. A. S. de M. et al. **O uso do computador no ensino de matemática : implicações nas teorias pedagógicas e a infra-estrutura escolar**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Paraná, 2008.
- FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.
- GOMES, D. F. **Equações de Diferenças e Alguns Modelos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, PI, 2014.
- LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma Variável**. 11. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.
- LUÍS, R. D. G. **Equações de diferenças e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Madeira, Funchal, POR, 2006.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013.

- MOYE, L. A.; KAPADIA, A. S. **Difference equations with public health applications**. 6. ed. New York, USA: Marcel Dekker, Inc., 2000.
- PACHECO, A. M. **Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 2013.
- PAULO, G. do Estado de São. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo Caderno do Aluno. Matemática. Ensino Médio. 1ª série**. Vol. 1. São Paulo, SP: SE, 2014.
- PEREIRA, M. V. **Recorrências - Problemas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2014.
- PINTO, F. L. **Uso das Recorrências e do Raciocínio Recursivo no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia UFBA. Instituto de Matemática - IM, Salvador, BA, 2015.
- RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro, RJ: UnB e Ao Livro Técnico, 1971.
- SILVA, I. C. da. **Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2015.
- TECNOGERA. **Como o problema de falta de água pode interferir na falta de luz?** 2015. Disponível em: <<http://www.tecnogera.com.br/blog/como-o-problema-de-falta-de-agua-pode-interferir-na-falta-de-luz/>>. Acesso em: 10 dezembro 2016.
- WINTER, O. C. **Relações de Recorrência: Para Além de P.A. e P.G.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, 2013.

ANEXO A – ORÇAMENTO FAMILIAR

Quadro A.1: Orçamento familiar

Saídas	(R\$)	Entradas	(R\$)
Saúde		Salário fixo	
Escola		Outros	
Internet			
Água			
Casa			
Luz			
Cartão			
Animais			
Carro			
Outros			
Total		Total	

ANEXO B – CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA POR FAMÍLIA

Quadro B.1: Consumo de energia elétrica por família

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Aparelho eletrônico	tempo de uso (dia)	dias de uso no mês	tempo de uso no mês	tempo de uso no mês em horas	potência do aparelho (W)	gasto (Wh)	gasto (KWh)
computador							
chuveiro							
chapinha							
secador							
ferro							
TOTAL							