



Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Samuel Francisco

Modelagem Matemática no arremesso de peso

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Santo André, 28 de março de 2013



Universidade Federal do ABC

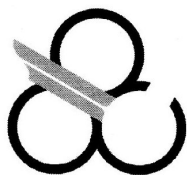
SAMUEL FRANCISCO

Modelagem Matemática no arremesso de peso

Dissertação apresentada ao curso do Profmat - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. RODNEY CARLOS BASSANEZI

Santo André, 28 de março de 2013



Universidade Federal do ABC


MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

FOLHA DE ASSINATURAS


Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Samuel Francisco**, realizada em 28 de março de 2013.



Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UFABC) – Presidente



Prof. Dr. João Carlos da Motta Ferreira (UFABC) – Membro Titular



Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello (UFMT) – Membro Titular

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi (UFABC) – Membro Suplente

Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior (UFSCAR) – Membro Suplente

à memória de meu pai e à minha querida mãe.

Agradecimentos

Ao professor Rodney, que além de ter sido meu amigo, teve a paciência em me orientar e foi o motivador pelo meu interesse em Modelagem Matemática.

Ao professor João Carlos, pela amizade, sugestões e conselhos que contribuíram neste trabalho e na minha formação.

Ao professor Moiseis, por participar da Banca Examinadora e dar opiniões neste trabalho.

À Maria Rosana E. da Silva, minha futura esposa.

Aos meus amigos e professores da UFABC.

À você, por ter lido até aqui, caso você não tenha sido citado anteriormente.

Resumo

A proposta deste trabalho é desenvolver a modelagem matemática como processo de ensino-aprendizagem. Inicialmente discutimos o conceito de sequência real e do método de Ford-Walford que nos possibilita desenvolver modelos em sequências de números reais que sejam limitadas e monótonas. Para aplicarmos estes conceitos, estudamos o atletismo na modalidade arremesso de peso. A nossa motivação para este tema é que este esporte pode ser praticado por todos os estudantes e que este assunto está ligado ao estudo de sequências, funções quadráticas e conceitos relativos à física. Encerramos nossa dissertação com uma proposta de atividades que podem ser aplicadas ao 1º ano do ensino médio relacionando os conteúdos de funções quadráticas como aplicação e motivação para a análise do arremesso de peso.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Sequências, Funções Quadráticas.

Abstract

The purpose of this work is to develop mathematical modeling as a process of teaching and learning. Initially we discussed the concept of actual sequence and Ford-Walford method that enables us to develop models for sequences of real numbers that are monotonic and limited. To apply these concepts, we study the modality athletics shot put. Our motivation for this theme is that this sport can be practiced by all students and that this issue is linked to the study of sequences, quadratic functions and concepts related to physics. We ended our thesis with a proposal for activities that can be applied to the 1^o year of high school listing the contents of quadratic functions as application and motivation for analyzing the shot put.

Keywords: Mathematical Modeling, Sequences, Quadratic Functions.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	4
2 Convergência	5
2.1 Sequências	5
2.2 Método de Ford-Walford	12
3 Atletismo - Lançamentos: Arremesso de Peso	20
3.1 Modelo exponencial assintótico	22
3.2 Ângulo de lançamento	29
3.3 Resistência do ar	36
4 Aplicação no Ensino Médio	38
4.1 Atividades	40
4.2 Parábola	42
4.3 Equação da Parábola	43
4.4 Atividades no computador	45
4.5 Função Quadrática	48
5 Considerações finais	55
Referências Bibliográficas	57

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função $f(x) = \frac{3x+1}{x}$	11
2.2	Cálculo de y^*	13
2.3	Recordes mundiais das mulheres na corrida de 100 metros rasos	15
2.4	Ajuste da curva $R_{i+1} = g(R_i)$	17
2.5	Ajuste de $R_i - R^*$	18
2.6	Modelo exponencial assintótico do recorde feminino dos 100 metros rasos	19
3.1	Atleta no lançamento de dardo	20
3.2	Atleta no lançamento de disco	21
3.3	Atleta no lançamento de martelo	21
3.4	Atleta no arremesso de peso	21
3.5	Ajuste linear de d_{i+1} com d_i	25
3.6	Ajuste da curva $d_{i+1} = g(d_i)$	26
3.7	Ajuste de $d^* - d_i$	26
3.8	Modelo e dados reais	28
3.9	Lançamento do engenho do ponto $(0, 0)$	29
3.10	A esfera é lançada de uma altura h	32
4.1	Parábola	43
4.2	Parábola com o vértice na origem e o eixo de simetria no eixo Oy	43
4.3	Parábola com o vértice $V = (x_0, y_0)$ não necessariamente na origem e o eixo de simetria paralelo ao eixo Oy	44
4.4	Verificação do melhor ângulo de lançamento	46
4.5	Verificação do melhor ângulo de lançamento sem a resistência do ar	47
4.6	Verificação do melhor ângulo de lançamento com a resistência do ar	48

Lista de Tabelas

2.1	Recordes mundiais femininos na corrida de 100 metros rasos	14
2.2	Recordes mundiais	15
2.3	R_i e R_{i+1}	16
2.4	t e $R_i - R^*$	17
2.5	Tabela completa relacionando o Modelo com os dados reais (R_i)	18
3.1	Recordes mundiais masculinos no arremesso de peso	22
3.2	Continuação: Recordes mundiais masculinos no arremesso de peso	23
3.3	Principais recordes mundiais masculinos no arremesso de peso	24
3.4	Valores dos recordes mundiais masculinos no arremesso de peso do modelo	27

Capítulo 1

Introdução

A matemática nas escolas raramente mostra para os alunos que ela serve para resolver os seus problemas. O ensino da matemática de diversos conteúdos frequentemente se apresenta como um ensino isolado das outras disciplinas que serve unicamente para resolver problemas que se contextualizam exclusivamente no ambiente da matemática.

É essencial apresentar problemas que envolvam demonstrações e contextualizações no ambiente matemático. Porém, salientamos que para isto fazer sentido aos alunos, é necessário que eles estejam aptos a este conhecimento, isto é, que os alunos sintam necessidade desta aprendizagem.

Em virtude disso, vamos nesta dissertação trabalhar com a modelagem matemática, analisando a modalidade arremesso de peso do atletismo.

Discutimos uma atividade que pode ser desenvolvida com os alunos do primeiro ano do ensino médio.

Nosso objetivo é de trabalhar conceitos relativos à matemática e outras ciências e com o objetivo principal de culminar com o estudo das funções quadráticas.

Inicialmente, iremos apresentar um breve conteúdo sobre sequências e o método de Ford-Walford. Este método, aplicado a sequências convergentes, será muito útil para podermos criar modelos exponenciais assintóticos como realizado no capítulo 3.

No capítulo 3, desenvolvemos o modelo exponencial assintótico para o estudo do arremesso de peso, e discutimos situações-problema que aparecem naturalmente. Estudamos as situações que podem ser modelados por uma matemática simples que pode ser utilizada na escola básica.

Por fim, no capítulo 4, apresentamos uma sequência de atividades que o professor de matemática poderá aplicar em sala de aula e que poderá servir como motivação para os alunos estudarem as funções quadráticas.

Capítulo 2

Convergência

No processo de modelagem a coleta de dados nos leva quase sempre à uma tabela que relaciona a variável dependente com o tempo. Esta relação de dependência é conhecida como sequência e ocupa papel de destaque na matemática.

2.1 Sequências

Definição 2.1. Uma sequência real é uma função real definida num subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que relaciona a cada $n \in A$, o número real $x_n = f(n)$:

$$\begin{cases} f : A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto x_n = f(n) \end{cases}$$

O número n é chamado de índice da sequência e x_n é chamado de termo geral ou n -ésimo termo.

A notação de uma sequência real será $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Podemos também escrever $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou apenas (x_n) .

Exemplo 1 A sequência de números quadrados perfeitos, $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Podemos escrevê-la das seguintes formas: $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$ ou apenas (n^2) .

Exemplo 2 A sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ que pode ser definida recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Na modelagem matemática, geralmente temos uma tabela de dados (x_n) , ou seja, uma sequência (x_1, x_2, \dots, x_n) , cuja lei de formação $x_n = f(n)$ da função f , ainda não é de nosso conhecimento.

O processo de modelagem consiste em buscar essa função, cujo método de obtenção, muitas vezes, não é trivial, e, conseqüentemente, fazer análises e validações deste modelo com os dados inicialmente coletados.

Para isso precisamos utilizar técnicas matemáticas como a convergência de seqüências para relacionar com a estabilidade de valores no futuro.

Vamos então neste capítulo discutir estas técnicas.

Definição 2.2. Dizemos que uma seqüência (x_n) tem limite L ou que converge para L , se para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies |x_n - L| < \epsilon$$

Escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ ou $x_n \rightarrow L$.

Se uma seqüência não possui limite, isto é, não converge, dizemos que a seqüência diverge.

Exemplo 3 Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n}{n+12} \right) = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}, \dots, \frac{n}{n+12}, \dots \right)$.

Vamos mostrar que $x_n \rightarrow 1$.

Pela definição, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural N tal que se $n > N$ então $|x_n - 1| < \epsilon$.

Deste modo, observe que

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{n+12} - 1 \right| &= \left| -\frac{12}{n+12} \right| \\ &= \frac{12}{n+12} < \epsilon \iff n > \frac{12}{\epsilon} - 12. \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, tome $N = \frac{12}{\epsilon} - 12$. Assim, se $n > N$, então $|x_n - 1| < \epsilon$.

Exemplo 4 Vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3+4} = 0$.

Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned} n^3 + 4 > n^3 &\implies \frac{n^3 + 4}{n + 3} > \frac{n^3}{n + 3} \\ &\implies \frac{n + 3}{n^3 + 4} < \frac{n + 3}{n^3} = \frac{n}{n^3} + \frac{3}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observe que $\frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon}{2} \implies n > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$ e que $\frac{3}{n^3} < \frac{\epsilon}{2} \implies n > \sqrt[3]{\frac{6}{\epsilon}}$.

Assim, sejam $n_1 = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$ e $n_2 = \sqrt[3]{\frac{6}{\epsilon}}$, para todo $\epsilon > 0$, tome $N > \max\{n_1, n_2\}$. Então,

$$\begin{aligned} \forall n, n > N \implies n > n_1 \text{ e } n > n_2 &\implies n^2 > \frac{2}{\epsilon} \text{ e } n^3 > \frac{6}{\epsilon} \\ &\implies \frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \frac{3}{n^3} < \frac{\epsilon}{2} \\ &\implies \frac{n+3}{n^3+4} < \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

como queríamos.

Exemplo 5 Vamos mostrar que a sequência definida por $x_n = (-1)^n$ não converge.

Se a sequência convergisse para um número real L , então, por definição,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \implies |x_n - L| < \epsilon &\iff -\epsilon < x_n - L < \epsilon \\ &\iff L - \epsilon < x_n < L + \epsilon \\ &\iff x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon). \end{aligned}$$

Mas, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ e L um real arbitrário, temos que o conjunto $(L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2})$ não contém 1 e -1.

Logo, $\forall N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ tal que $(-1)^n = x_n \notin (L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2})$. Portanto, a sequência é divergente.

Exemplo 6 Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left((-1)^n \frac{n}{n+1} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, (-1)^n \frac{n}{n+1}, \dots \right)$. Vamos mostrar que (x_n) diverge.

Suponha, por absurdo, que (x_n) seja convergente para um número real L .

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|x_n - L| < \epsilon$.

Em particular, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe N tal que se $n > N$, então $\left| (-1)^n \frac{n}{n+1} - L \right| < \frac{1}{2}$ e como $n+1 > n > N$, temos $\left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - L \right| < \frac{1}{2}$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - (-1)^n \frac{n}{n+1} \right| &= \left| (-1)^n \left(\frac{-n-1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) \right| \\ &= |(-1)^n| \cdot \left| -\frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2} \right| \\ &= \left| \frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2} \right| \\ &= \frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2} > 1, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Isso é verdade, pois $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + 3n + 2 > 0$, e assim, $\frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 3n + 2} > 1 \iff 2n^2 + 4n + 1 > n^2 + 3n + 2 \iff n^2 + n > 1$, o que é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, teremos que

$$\begin{aligned}
 1 < \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - (-1)^n \frac{n}{n+1} \right| &= \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - L + L - (-1)^n \frac{n}{n+1} \right| \\
 &= \left| \left((-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - L \right) + \left(- \left((-1)^n \frac{n}{n+1} - L \right) \right) \right| \\
 &\leq \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - L \right| + \left| - \left((-1)^n \frac{n}{n+1} - L \right) \right| \\
 &= \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - L \right| + \left| (-1)^n \frac{n}{n+1} - L \right| \\
 &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ o que é um absurdo.}
 \end{aligned}$$

Portanto, a sequência (x_n) é divergente.

Definição 2.3. Uma sequência (x_n) é limitada se existirem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência (x_n) é limitada superiormente se existir um número real b tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência (x_n) é limitada inferiormente se existir um número real a tal que $x_n \geq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por consequência, uma condição necessária e suficiente para que (x_n) seja limitada é que (x_n) seja limitada superiormente e inferiormente.

Caso a sequência (x_n) não for limitada, dizemos que ela é ilimitada.

Observamos também, que se (x_n) for limitada, então por definição, existem a e b reais tais que $a \leq x_n \leq b$, isto é, $x_n \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$.

Com isso, se tomarmos $c = \max\{|a|, |b|\}$, obtemos $[a, b] \subset [-c, c] \implies x_n \in [-c, c] \iff -c \leq x_n \leq c \iff |x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, podemos também dizer que se (x_n) é limitada, então existe um número real positivo c tal que $|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 7 As sequências dos Exemplos 1 e 2 são limitadas inferiormente, mas não são limitadas superiormente. Então, são ilimitadas.

As sequências dos Exemplos 3, 4, 5 e 6 são limitadas.

Pelos exemplos 5 e 6, garantimos que nem toda sequência limitada é convergente, pois $x_n = (-1)^n$ e $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ são limitadas, mas não são convergentes, isto é, (x_n) ser limitada

não é condição suficiente para ser convergente. No entanto, a recíproca é verdadeira, a sequência (x_n) ser convergente é condição necessária para ser limitada. Vamos demonstrar esse teorema.

Teorema 2.4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$. Então, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \implies |x_n - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$ mostrando que x_n é limitada para todo $n > N$.

Para mostrarmos que a sequência é limitada para $n \in \mathbb{N}$, consideramos o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, L - \epsilon, L + \epsilon\}$. Seja $a = \min A$ e $b = \max A$, temos que $x_n \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$ terminando a demonstração. \square

Definição 2.5. *Uma sequência (x_n) é dita crescente quando $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.6. *Uma sequência (x_n) é dita decrescente quando $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.7. *Uma sequência (x_n) é dita não-decrescente quando $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.8. *Uma sequência (x_n) é dita não-crescente quando $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.9. *Uma sequência (x_n) é monótona se ela for crescente ou decrescente ou não-decrescente ou não-crescente.*

Definição 2.10. *Dada uma sequência (x_n) . Seja $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, isto é, $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $A \subset (-\infty, b]$. Para todo b com esta propriedade chamamos de cota superior de A .*

Definição 2.11. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Pela Definição 2.9, existem números reais que são cotas superiores de A . Chama-se de supremo de A e denota-se por $\sup A$ a menor das cotas superiores de A em \mathbb{R} .*

Definição 2.12. *Seja $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = A \subset \mathbb{R}$ limitada inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A \subset [a, +\infty)$. Para todo a com esta propriedade chamamos de cota inferior de A .*

Definição 2.13. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente. Pela Definição 2.11, existem números reais que são cotas inferiores de A . Chama-se de ínfimo de A e denota-se por $\inf A$ a maior das cotas inferiores de A em \mathbb{R} .*

Uma propriedade do subconjunto dos números reais que podemos encontrar em [1], [2] e [6] é que todo subconjunto não-vazio de números reais limitado superiormente possui supremo.

Com esta propriedade, mostramos que todo subconjunto não-vazio de números reais, limitado inferiormente, tem ínfimo.

De fato, sejam $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e B o conjunto de todas as cotas inferiores de A .

Como A é limitado inferiormente, B é não-vazio e limitado superiormente para quaisquer elementos de A .

Assim, pela propriedade que mencionamos acima, B possui supremo. Seja $L = \sup B$.

Vamos mostrar que $L = \inf A$.

Para L ser o ínfimo, conforme nossa definição, precisamos mostrar que L é a maior cota inferior de A .

Como qualquer número menor do que L pertence a B , temos que $L \leq x$, para todo $x \in A$. Ou seja, L é cota inferior de A .

Para encerrarmos, vamos mostrar que L é a maior das cotas inferiores de A . Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < L + \epsilon$. Caso contrário, todo número menor do que $L + \epsilon$ pertenceria a B , o que contraria o fato de L ser o supremo de B . Logo, $L = \inf A$.

Outra forma de mostrar isso é, dado $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio limitado inferiormente, tome $B = -A = \{-x; x \in A\}$. B é não-vazio e limitado superiormente, logo, tem supremo. Seja $L = \sup B$. Daí, $-L = \inf A$. [2].

O teorema seguinte será muito útil para o processo de modelagem, pois com ele, sabermos se uma determinada sequência (x_n) converge sem saber inicialmente o seu limite.

Teorema 2.14. *Toda sequência limitada e monótona é convergente.*

Demonstração Considere, sem perda de generalidade, $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ não-decrescente. Assim, (x_n) é limitada inferiormente por $x_1 = a$ e sabemos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_n \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Logo, o conjunto dos valores da sequência $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = A \subset [a, b]$ possui supremo.

Seja $L = \sup A$. Vamos mostrar que $x_n \rightarrow L$.

Para todo $\epsilon > 0$, temos que $L - \epsilon < L$ o que acarreta que $L - \epsilon$ não é cota superior de A . Logo, existe um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que $L - \epsilon < x_N \leq L$.

Utilizando a monotonicidade da sequência, se $n > N$, então $x_N \leq x_n \leq L < L + \epsilon$. Logo, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \implies L - \epsilon < x_N \leq x_n \leq L < L + \epsilon \implies L - \epsilon < x_n < L + \epsilon \iff |x_n - L| < \epsilon$ como queríamos.

Se a sequência (x_n) fosse crescente, decrescente ou não-crescente, a demonstração seria

feita de forma análoga, entretanto, no caso da sequência ser não-crescente ou decrescente, a sequência iria ter como limite o ínfimo do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. \square

Podemos também definir limite no infinito de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ similarmente ao definido para sequências.

Definição 2.15. Dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ se, para qualquer que seja $\epsilon > 0$, podemos determinar um número real N , tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Denotamos por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Exemplo 8 Seja $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3x + 1}{x}$.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

Pela definição, devemos provar que para todo $\epsilon > 0$, conseguimos determinar N que depende de ϵ de modo que se $x > N$, então $|f(x) - L| = \left| \frac{3x + 1}{x} - 3 \right| < \epsilon$.

Como

$$\begin{aligned} \left| \frac{3x + 1}{x} - 3 \right| &= \left| \frac{3x + 1 - 3x}{x} \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon \\ \iff |x| > \frac{1}{\epsilon} = N \end{aligned}$$

temos que, $\forall \epsilon > 0$ tome $N = \frac{1}{\epsilon}$ de modo que se $x > N$, então $|f(x) - 3| < \epsilon$.

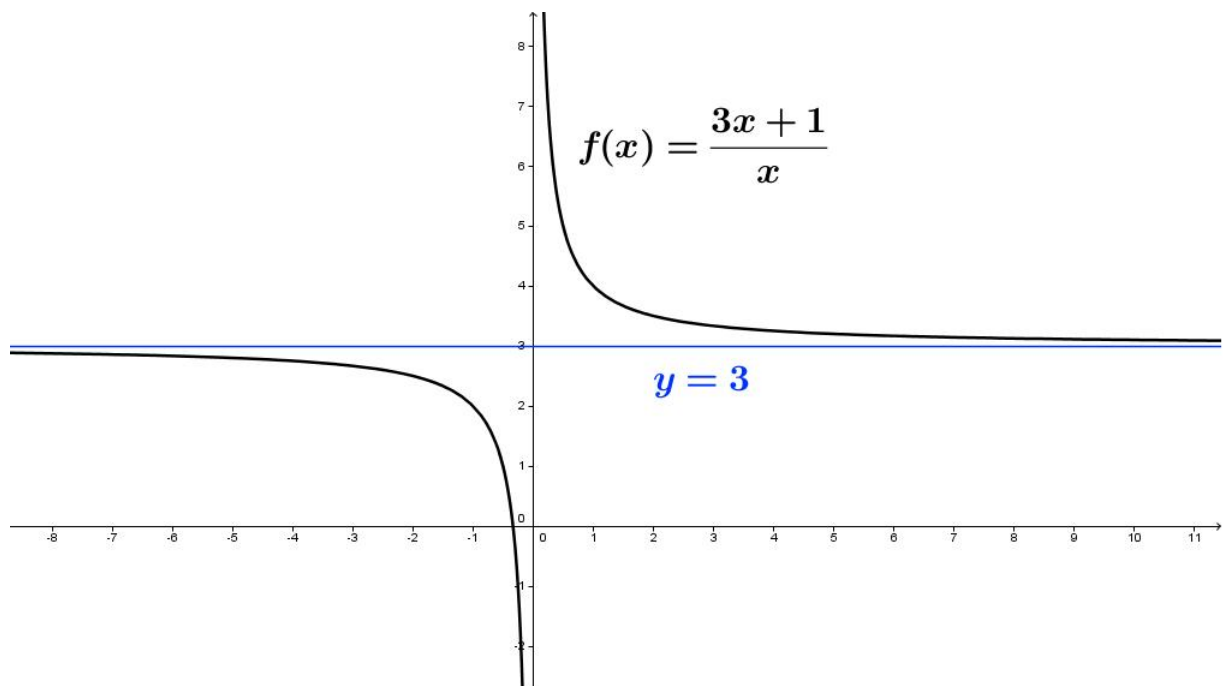


Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = \frac{3x+1}{x}$

Quando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, vemos que à medida que o valor de x é suficientemente grande, o valor de $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L . Neste caso, dizemos que a função f se “estabiliza” no ponto $y = L$. Podemos dizer também, que a reta de equação $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f .

Analogamente, podemos dizer que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical de $f(x)$, quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Observando o gráfico do exemplo 8, a reta $y = 3$ é uma assíntota horizontal da função f .

2.2 Método de Ford-Walford

Em alguns casos, no processo de modelagem, obtemos inicialmente uma quantidade de dados $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ de tal forma que a medida que $n \rightarrow \infty$, implica que $x_n \rightarrow y^*$, isto é, os dados tendem a estabilizar para um ponto que aqui representamos por y^* , ponto este que é chamado de ponto fixo ou valor de equilíbrio ou ponto de estabilidade. [3].

Nestes casos que há uma tendência de estabilidade dos dados quando $n \rightarrow \infty$, dizemos que se trata de um comportamento assintótico.

Uma curva típica para ajustar estes dados é dada por $y = y^* - C.e^{bx}$, onde $y^* > 0$ e $b < 0$. Esta curva iremos chamar de modelo exponencial assintótico.[3].

Assim, seja um conjunto de dados $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ que vamos supor que temos a informação de que a sequência (y_i) é convergente quando x_i cresce.

Suponha que $y = f(x) \rightarrow y^*$ quando $x \rightarrow \infty$. Assim, se (x_n) é uma sequência tal que $x_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então $y_n = f(x_n) \rightarrow y^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Também, $y_{n+1} = f(x_{n+1}) \rightarrow y^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Se y_{n+1} e y_n estão relacionados por uma função g , isto é, $y_{n+1} = g(y_n)$, então $y^* = g(y^*)$ e, portanto, o limite y^* é o ponto fixo de g .

O método de Ford-Walford (Ford 1933; Walford 1946) consiste em ajustar os valores observados y_i por meio de uma função g e então encontrar qual o valor do ponto fixo desta função.

Graficamente, temos a figura:

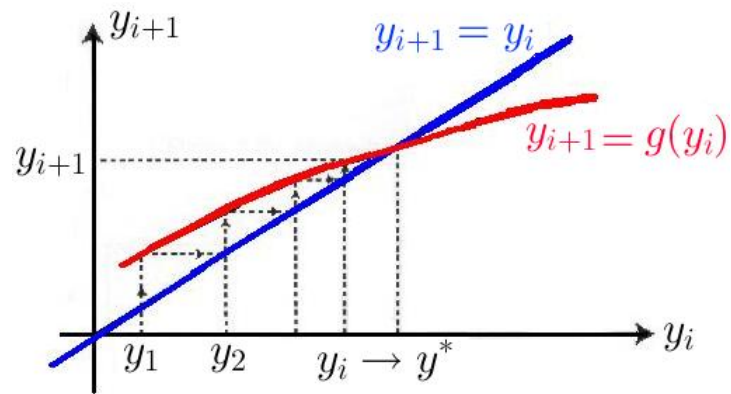


Figura 2.2: Cálculo de y^*

Fonte: [3]

Como aplicação do método, vamos considerar o problema de estimar o recorde mundial feminino das mulheres na corrida dos 100 metros rasos.

Exemplo 9 Com base nos dados apresentados na tabela abaixo [4], vamos criar um modelo exponencial assintótico $y = y^* - C.e^{bx}$, com $y^* > 0$ e $b < 0$ para prever os recordes mundiais das mulheres na corrida dos 100 metros rasos.

Tabela 2.1: Recordes mundiais femininos na corrida de 100 metros rasos

Atleta	País de origem	Local	Ano	Recorde
Elisabeth Robinson	Estados Unidos	Amsterdã	1928	12,20
Stanislava Alasiewicz	Polônia	Los Angeles	1932	11,90
Stanislava Alasiewicz	Polônia	Varsóvia	1934	11,70
Stanislava Alasiewicz	Polônia	Berlim	1937	11,60
Fanny Blankers-Koen	Holanda	Amsterdã	1948	11,50
Marjorie Jackson	Austrália	Heisinki	1952	11,40
Shirley Strickland	Austrália	Varsóvia	1955	11,30
Wilmar G. Rudolph	Estados Unidos	Stuttgart	1961	11,25
Wimia Tyus	Estados Unidos	Tóquio	1964	11,20
Irena K. Szewinska	Polônia	Praga	1965	11,10
Wimia Tyus	Estados Unidos	Colorado Springs	1968	11,08
Chi Cheng	China	Wenen	1970	11,00
Renate Stecher	Alemanha	Munique	1972	10,95
Renate Stecher	Alemanha	Ostrava	1973	10,90
Renate Stecher	Alemanha	Dresden	1973	10,80
Evelyn Ashford	Estados Unidos	Colorado Springs	1983	10,79
Evelyn Ashford	Estados Unidos	Zurique	1984	10,76
Florence Griffith	Estados Unidos	Indianápolis	1988	10,49

A tabela a seguir, resume a tabela 3 e na figura (2.2), obtemos a curva de tendência associada.

Tabela 2.2: Recordes mundiais

Ano (a)	Tempo (t)	Recorde (R_i)
1928	28	12,2
1932	32	11,9
1934	34	11,7
1937	37	11,6
1948	48	11,5
1952	52	11,4
1955	55	11,3
1961	61	11,25
1964	64	11,2
1965	65	11,1
1968	68	11,08
1970	70	11
1972	72	10,95
1973	73	10,9
1973	73	10,8
1983	83	10,79
1984	84	10,76
1988	88	10,49

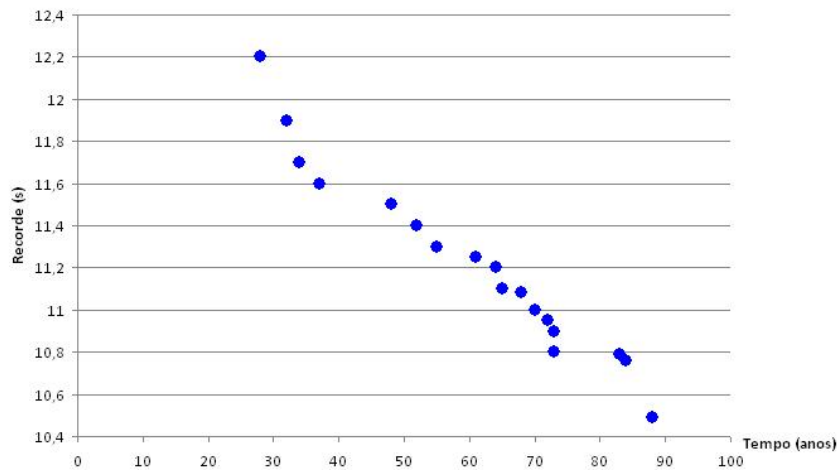


Figura 2.3: Recordes mundiais das mulheres na corrida de 100 metros rasos

Observe que fizemos uma mudança de variável para relacionar a época em que o recorde foi quebrado com um valor real mais simples, ou seja, chamando de a , a época que o recorde foi quebrado e por t , o tempo associado, obtemos a equação $t = a - 1900$.

Analisando a tabela e/ou a curva de tendência, verificamos que à medida que se passam os anos, os recordes mundiais decrescem, obviamente, temos uma sequência monótona.

Sabemos também que essa sequência é limitada e, portanto, pelo teorema 2.14, do capí-

tulo 1, a sequência é convergente.

Para encontrar esse valor de equilíbrio, vamos utilizar o método de Ford-Walford.

Criamos a tabela 5 e, neste caso, tomamos para a função g que melhor ajusta os pares (R_i, R_{i+1}) a reta de equação $R_{i+1} = 0,8953R_i + 1,0786$ (figura 4).

Tabela 2.3: R_i e R_{i+1}

Recorde (R_i)	R_{i+1}
12,2	11,9
11,9	11,7
11,7	11,6
11,6	11,5
11,5	11,4
11,4	11,3
11,3	11,25
11,25	11,2
11,2	11,1
11,1	11,08
11,08	11
11	10,95
10,95	10,9
10,9	10,8
10,8	10,79
10,79	10,76
10,76	10,49
10,49	

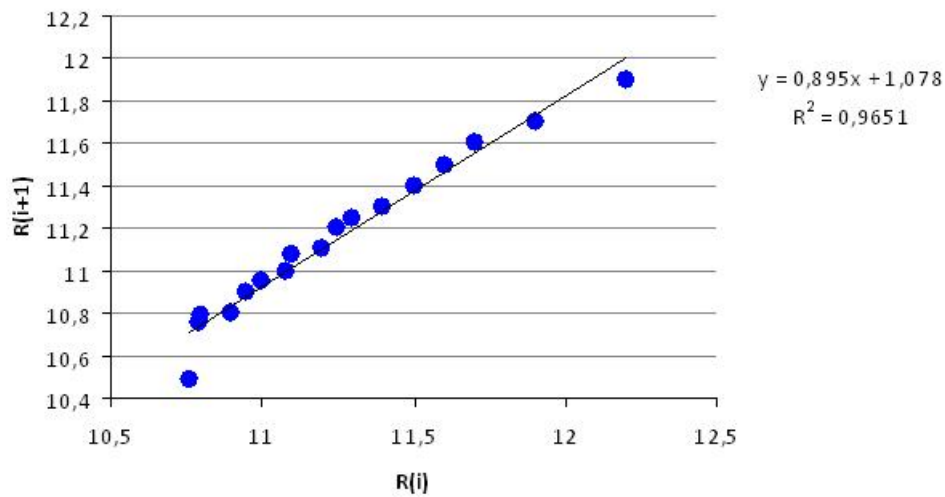


Figura 2.4: Ajuste da curva $R_{i+1} = g(R_i)$

O valor de R^* é obtido fazendo $R^* = R_{i+1} = R_i$, ou seja, $R^* = 0,8953R^* + 1,0786$ se, e somente se, $R^* \approx 10,26$.

Agora, calculando a diferença $R_i - R^*$, obtemos um ajuste exponencial entre t e $(R_i - R^*)$ dada por $R_i - R^* = 3,4456 \cdot e^{-0,0225t}$.

Tabela 2.4: t e $R_i - R^*$

Tempo (t)	$R_i - R^*$
28	1,93333
32	1,63333
34	1,43333
37	1,33333
48	1,23333
52	1,13333
55	1,03333
61	0,98333
64	0,93333
65	0,83333
68	0,81333
70	0,73333
72	0,68333
73	0,63333
73	0,53333
83	0,52333
84	0,49333
88	

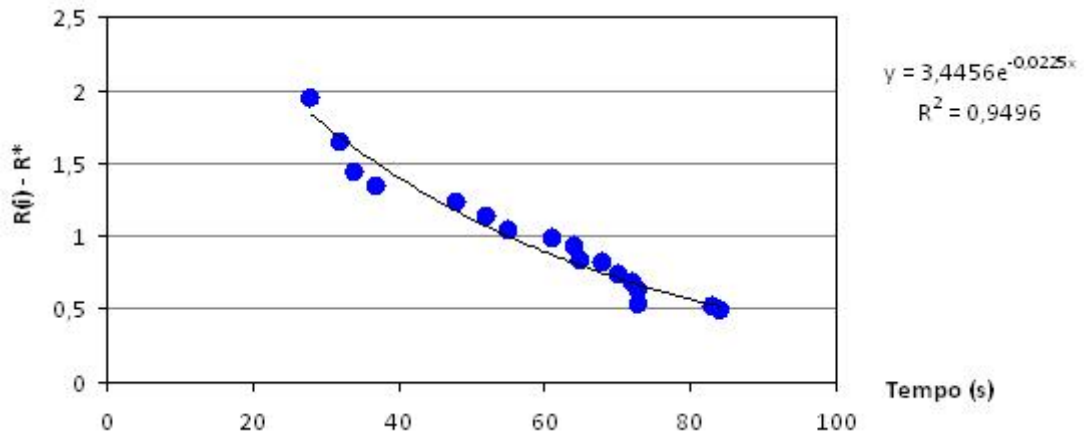


Figura 2.5: Ajuste de $R_i - R^*$

Portanto, a função que ajusta t e R_i no nosso modelo exponencial assintótico é dada por $R(t) = 10,26 + 3,4456 \cdot e^{-0,0225t}$.

Para finalizarmos, observe a curva de tendência do nosso modelo na figura 6 e os dados reais.

Tabela 2.5: Tabela completa relacionando o Modelo com os dados reais (R_i)

Ano (a)	Tempo (t)	Recorde R_i	R_{i+1}	$R_i - R^*$	Modelo
1928	28	12,2	11,9	1,93333	12,23448189
1932	32	11,9	11,7	1,63333	12,08318907
1934	34	11,7	11,6	1,43333	12,01196221
1937	37	11,6	11,5	1,33333	11,91032411
1948	48	11,5	11,4	1,23333	11,58573266
1952	52	11,4	11,3	1,13333	11,48431805
1955	55	11,3	11,25	1,03333	11,41340755
1961	61	11,25	11,2	0,98333	11,28373459
1964	64	11,2	11,1	0,93333	11,22450517
1965	65	11,1	11,08	0,83333	11,20553869
1968	68	11,08	11	0,81333	11,15086304
1970	70	11	10,95	0,73333	11,11619321
1972	72	10,95	10,9	0,68333	11,0828828
1973	73	10,9	10,8	0,63333	11,06672063
1973	73	10,8	10,79	0,53333	11,06672063
1983	83	10,79	10,76	0,52333	10,92169545
1984	84	10,76	10,49	0,49333	10,90872501
1988	88	10,49			10,85936122

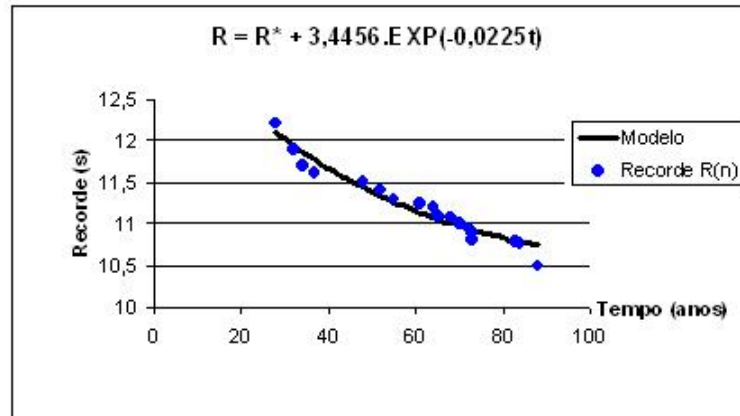


Figura 2.6: Modelo exponencial assintótico do recorde feminino dos 100 metros rasos

Para o cálculo do $R^* = 10,26$ utilizamos todos os dados da tabela 4 e com isto R^* fica muito atrelado ao passado.

O desenvolvimento de pesquisas e das novas tecnologias possui muito mais influencia no desenvolvimento do atleta do que o passado.

Ao tratarmos de recorde, do ponto de vista da modelagem matemática o importante não é ficar direcionado ao passado, ou seja, o passado não tem muita influência no futuro.

Por causa disso, o modelo poderia ser melhorado se para o cálculo do ponto limite tivéssemos usado apenas os 4 últimos resultados.

Capítulo 3

Atletismo - Lançamentos: Arremesso de Peso

O atletismo, muito conhecido nos jogos olímpicos, é um conjunto de esportes envolvendo as modalidades de corridas, saltos e lançamentos.

As corridas mais praticadas são as de curta distância (corrida de 100, 200 e 400 metros rasos), média distância (800 e 1500 metros) e longa distância (3000 metros ou mais).

Os saltos mais praticados são os saltos em distância, triplo, em altura e com vara, cujo objetivo destes jogos é saltar a maior distância possível na horizontal (salto em distância e salto triplo) ou vertical (salto em altura e salto com vara).

O lançamento, é a modalidade do atletismo que consiste em lançar objetos o mais longe possível. Estes objetos são chamados de implementos. Existem nos jogos olímpicos 4 provas de lançamentos: lançamento do dardo, lançamento do disco, lançamento do martelo e arremesso de peso.

O lançamento do dardo consiste em lançar uma haste em forma de lança de metal ou material similar. O atleta corre em uma pista de 34,9 metros para tomar impulso e lança o dardo para que ele percorra a maior distância possível.



Figura 3.1: Atleta no lançamento de dardo

Fonte: <http://atletismo.esporte.esp.br/modalidades-do-atletismo-arremessos-decalto-e-heptatlo/>

O lançamento do disco consiste em lançar um disco de madeira e/ou metal e, da mesma forma que o lançamento de disco, o lançamento do martelo, consiste em lançar uma bola de ferro ou bronze presa por um cabo.



Figura 3.2: Atleta no lançamento de disco

Fonte: <http://networkservicemarketing.com.br/turmadoesporte/site/atletismo/arremesso-e-lancamentos/lancamento-de-disco/>

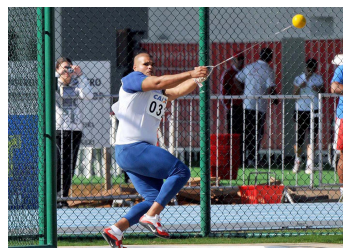


Figura 3.3: Atleta no lançamento de martelo

Fonte: <http://www.esportesite.com.br/2009/11/16/vladimir-kevo-ministra-clinica-do-lancamento-do-martelo-no-brasil/>

O arremesso de peso, que é o principal objeto de estudo deste trabalho, também consiste em arremessar o engenho o mais longe possível. Este engenho é uma esfera de bronze ou ferro de 7,260 kg para os homens e 4,0 kg para as mulheres.



Figura 3.4: Atleta no arremesso de peso

Fonte: <http://caurosa.blogspot.com.br/2011/05/atletismo-lancamentos-e-arremesso-dardo.html>

O arremesso de peso existe há séculos, onde os praticantes arremessavam pedras. No século XVII, os soldados ingleses organizavam competições de arremessos de balas de canhão.

Estas, posteriormente, foram substituídas por esferas. A primeira vez que o arremesso de peso participou nos jogos olímpicos foi em 1986, em Atenas, capital da Grécia.

3.1 Modelo exponencial assintótico

As tabelas 8 e 9 abaixo, apresentam desde 1909, os recordes mundiais masculinos do arremesso de peso.

Tabela 3.1: Recordes mundiais masculinos no arremesso de peso

Atleta	País de origem	Ano	Recorde
Ralph Rose	Estados Unidos	1909	15,54
Emil Hirschfeld	Alemanha	1928	15,79
John Kuck	Estados Unidos	1928	15,87
Emil Hirschfeld	Alemanha	1931	16,04
Zygmunt Heljasz	Polónia	1932	16,05
Leo Sexton	Estados Unidos	1932	16,16
Frantiek Douda	Tchecoslováquia	1932	16,20
John Lyman	Estados Unidos	1934	16,48
Jack Torrance	Estados Unidos	1934	16,89
Jack Torrance	Estados Unidos	1934	17,40
Charles Fonville	Estados Unidos	1948	17,68
James Fuchs	Estados Unidos	1949	17,79
James Fuchs	Estados Unidos	1950	17,82
James Fuchs	Estados Unidos	1950	17,95
Parry O'Brien	Estados Unidos	1953	18,00
Parry O'Brien	Estados Unidos	1953	18,04
Parry O'Brien	Estados Unidos	1954	18,43

Tabela 3.2: Continuação: Recordes mundiais masculinos no arremesso de peso

Atleta	País de origem	Ano	Recorde
Parry O'Brien	Estados Unidos	1954	18,54
Parry O'Brien	Estados Unidos	1956	18,69
Parry O'Brien	Estados Unidos	1956	19,06
Parry O'Brien	Estados Unidos	1956	19,25
Parry O'Brien	Estados Unidos	1959	19,30
Dallas Long	Estados Unidos	1960	19,38
Bill Nieder	Estados Unidos	1960	19,45
Dallas Long	Estados Unidos	1960	19,67
Bill Nieder	Estados Unidos	1960	19,99
Bill Nieder	Estados Unidos	1960	20,06
Dallas Long	Estados Unidos	1962	20,08
Dallas Long	Estados Unidos	1964	20,20
Dallas Long	Estados Unidos	1964	20,68
Randy Matson	Estados Unidos	1965	21,52
Randy Matson	Estados Unidos	1967	21,78
Al Feuerbach	Estados Unidos	1973	21,82
Terry Albritton	Estados Unidos	1976	21,85
Aleksandr Baryshnikov	URSS	1976	22,00
Udo Beyer	Alemanha Oriental	1978	22,15
Udo Beyer	Alemanha Oriental	1983	22,22
Ulf Timmermann	Alemanha Oriental	1985	22,62
Udo Beyer	Alemanha Oriental	1986	22,64
Alessandro Andrei	Itália	1987	22,72
Alessandro Andrei	Itália	1987	22,84
Alessandro Andrei	Itália	1987	22,91
Ulf Timmermann	Alemanha Oriental	1988	23,06
Randy Barnes	Estados Unidos	1990	23,12

Fonte: http://www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/2012/08/120815_recordes_quadro.shtml

Os valores da tabela representam os primeiros termos de uma sequência monótona e limitada. Portanto, pelo teorema 2.14, a sequência é convergente. Assim, vai existir uma distância d^* que será o limite, isto é, mantendo-se as regras oficiais do arremesso de peso,

como exemplo, o volume e a massa do engenho, a distância máxima que um atleta irá conseguir arremessar o engenho, será o valor assintótico d^* que será calculado pelo método de Ford-Walford.

Observe que nas tabelas 8 e 9 acima, temos em alguns anos, vários recordes. Por exemplo, no ano de 1987, foram obtidos 3 recordes: 22,91 m, 22,84 m e 22,72 m. Com isso, vamos considerar no ano de 1987, o recorde maior, isto é, o último recorde obtido em cada ano e montar a tabela 10 abaixo.

Tabela 3.3: Principais recordes mundiais masculinos no arremesso de peso

Atleta	País de origem	Ano	Tempo (t)	Recorde (d_i)
Ralph Rose	Estados Unidos	1909	9	15,54
John Kuck	Estados Unidos	1928	28	15,87
Emil Hirschfeld	Alemanha	1931	31	16,04
Frantiek Douda	Tchecoslováquia	1932	32	16,20
Jack Torrance	Estados Unidos	1934	34	17,40
Charles Fonville	Estados Unidos	1948	48	17,68
James Fuchs	Estados Unidos	1949	49	17,79
James Fuchs	Estados Unidos	1950	50	17,95
Parry O'Brien	Estados Unidos	1953	53	18,04
Parry O'Brien	Estados Unidos	1954	54	18,54
Parry O'Brien	Estados Unidos	1956	56	19,25
Parry O'Brien	Estados Unidos	1959	59	19,30
Bill Nieder	Estados Unidos	1960	60	20,06
Dallas Long	Estados Unidos	1962	62	20,08
Dallas Long	Estados Unidos	1964	64	20,68
Randy Matson	Estados Unidos	1965	65	21,52
Randy Matson	Estados Unidos	1967	67	21,78
Al Feuerbach	Estados Unidos	1973	73	21,82
Aleksandr Baryshnikov	URSS	1976	76	22,00
Udo Beyer	Alemanha Oriental	1978	78	22,15
Udo Beyer	Alemanha Oriental	1983	83	22,22
Ulf Timmermann	Alemanha Oriental	1985	85	22,62
Udo Beyer	Alemanha Oriental	1986	86	22,64
Alessandro Andrei	Itália	1987	87	22,91
Ulf Timmermann	Alemanha Oriental	1988	88	23,06
Randy Barnes	Estados Unidos	1990	90	23,12

A curva de tendência é dada pela figura 11:

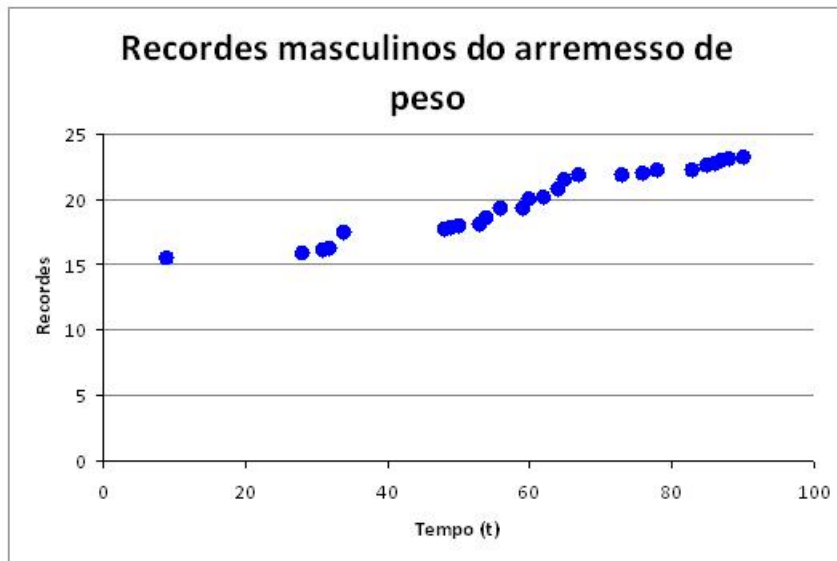


Figura 3.5: Ajuste linear de d_{i+1} com d_i

Para o ajuste da curva $d_{i+1} = g(d_i)$ vamos tomar a reta de equação (fig. 12)

$$d_{i+1} = 0,9645 \cdot d_i + 1,0042.$$

O valor assintótico d^* é obtido resolvendo o sistema $\begin{cases} d_{i+1} = g(d_i) \\ d_{i+1} = d_i = d^* \end{cases}$ o que implica

em resolver a equação $d^* = 0,9645 \cdot d^* + 1,0042$.

Logo,

$$d^* \approx 28,28732 \text{ m}$$

O ajuste exponencial entre t e $d^* - d_i$ fica

$$d^* - d_i = 18,115 \cdot e^{-0,0143 \cdot t}$$

Por fim, obtemos o **modelo exponencial assintótico** (contínuo)

$$d(t) = 28,28732 - 18,115 \cdot e^{-0,0143 \cdot t}$$

Observe as curvas ajustadas e a tabela completa com os valores do modelo encontrado.

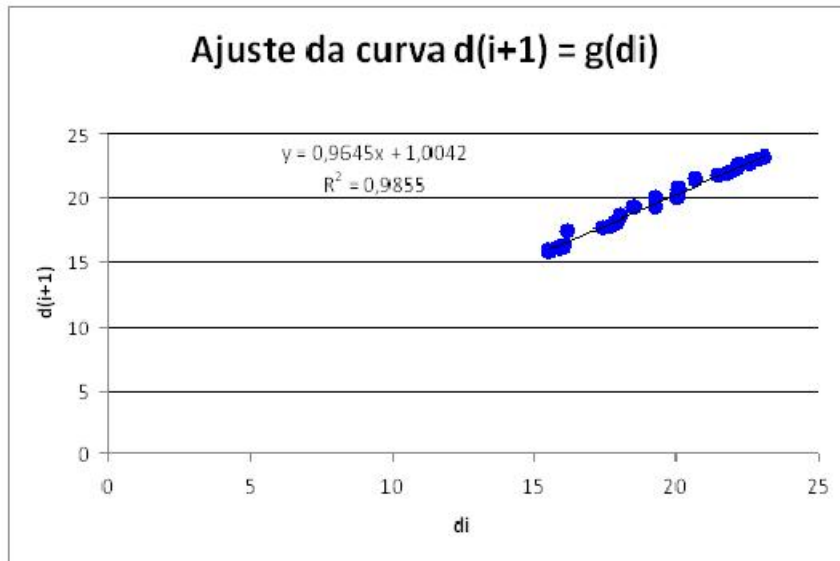


Figura 3.6: Ajuste da curva $d_{i+1} = g(d_i)$

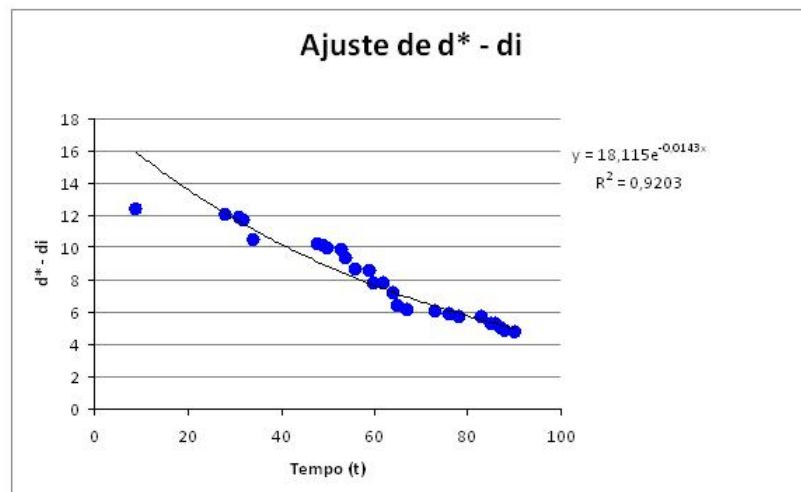


Figura 3.7: Ajuste de $d^* - d_i$

Tabela 3.4: Valores dos recordes mundiais masculinos no arremesso de peso do modelo

Ano	Tempo (t)	Recorde (d_i)	d_{i+1}	$d_{i+1} = g(d_i)$	$d^* - d_i$	Modelo (M_i)	$M_i - d_i$	$(M_i - d_i)/d_i$
1909	9	15,54	15,87	15,99253	12,74732	12,35992911	-3,18007	-0,20463
1928	28	15,87	16,04	16,310815	12,41732	16,14932853	0,27932	0,01760
1931	31	16,04	16,2	16,47478	12,24732	16,65903695	0,61903	0,03859
1932	32	16,2	17,4	16,6291	12,08732	16,82413811	0,62413	0,03852
1934	34	17,4	17,68	17,7865	10,88732	17,14734128	-0,25266	-0,01452
1948	48	17,68	17,79	18,05656	10,60732	19,16850078	1,48850	0,08419
1949	49	17,79	17,95	18,162655	10,49732	19,29797197	1,50797	0,08476
1950	50	17,95	18,04	18,316975	10,33732	19,42560489	1,47560	0,08220
1953	53	18,04	18,54	18,40378	10,24732	19,79773325	1,75773	0,09743
1954	54	18,54	19,25	18,88603	9,74732	19,91827044	1,37827	0,07434
1956	56	19,25	19,3	19,570825	9,03732	20,15423489	0,90423	0,04697
1959	59	19,3	20,06	19,61905	8,98732	20,49576602	1,19576	0,06195
1960	60	20,06	20,08	20,35207	8,22732	20,60639238	0,54639	0,02723
1962	62	20,08	20,68	20,37136	8,20732	20,82295529	0,74295	0,03699
1964	64	20,68	21,52	20,95006	7,60732	21,03341225	0,35341	0,01708
1965	65	21,52	21,78	21,76024	6,76732	21,13640497	-0,3836	-0,01782
1967	67	21,78	21,82	22,01101	6,50732	21,33802424	-0,44198	-0,02029
1973	73	21,82	22	22,04959	6,46732	21,90941085	0,08941	0,00409
1976	76	22	22,15	22,2232	6,28732	22,1772372	0,17723	0,00805
1978	78	22,15	22,22	22,367875	6,13732	22,34951032	0,19951	0,00900
1983	83	22,22	22,62	22,43539	6,06732	22,75924129	0,53924	0,02426
1985	85	22,62	22,64	22,82119	5,66732	22,91510487	0,29510	0,01304
1986	86	22,64	22,91	22,84048	5,64732	22,99138087	0,35138	0,01552
1987	87	22,91	23,06	23,100895	5,37732	23,06657389	0,15657	0,00683
1988	88	23,06	23,12	23,24557	5,22732	23,1406993	0,08069	0,00349
1990	90	23,12		23,30344	5,16732	23,28580771	0,16580	0,00717

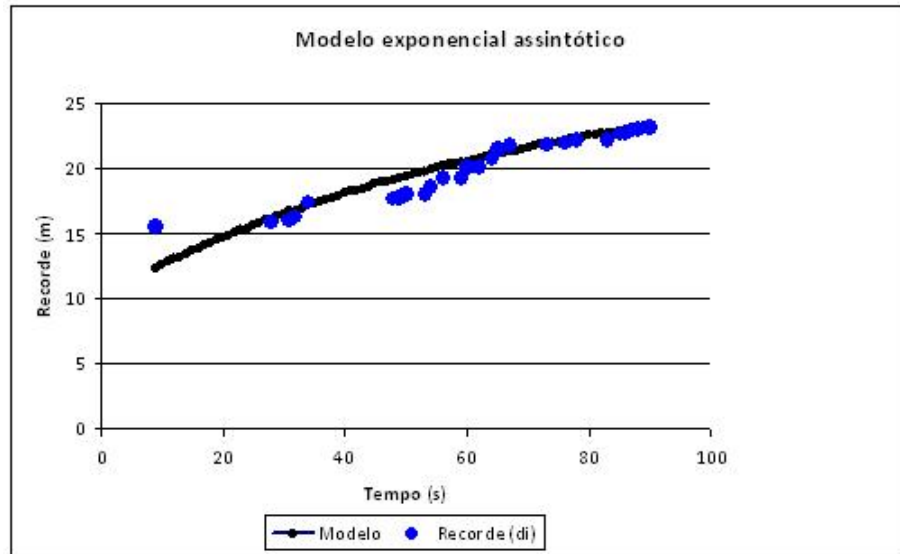


Figura 3.8: Modelo e dados reais

Pode-se observar neste modelo que à medida que o tempo aumenta o valor $(-18, 115 \cdot e^{-0,0143t})$ diminui, ou seja, o valor do arremesso (distância que o atleta consegue lançar o engenho) mais se aproxima do recorde limite.

Observe que isso pode ser verificado ao calcular o $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t)$, onde obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (28, 28732 - 18, 115 \cdot e^{-0,0143t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} 28, 28732 - 18, 115 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{0,0143t}} = 28, 28732 = d^*.$$

Uma outra forma de expressar este resultado é dizer que a "variação da distância obtida num arremesso é proporcional ao que falta para se atingir o valor limite" que pode ser traduzido em linguagem matemática pelo modelo D da EDO (equação diferencial ordinária) com condição inicial D_0

$$\begin{cases} D'(t) = k(D^* - D) \\ D(0) = D_0 \end{cases}.$$

A solução desta equação é dada por:

$$\int \frac{1}{D^* - D} dD = \int k dt$$

Fazendo $u = D^* - D$, temos $dD = -du$ e, assim, ficamos com

$$-\int \frac{1}{u} du = \int k dt$$

que nos dá

$$\begin{aligned} -\ln(D^* - D) = kt + A_1 &\iff \ln(D^* - D) = -kt + A_2 \\ &\iff D^* - D = e^{-kt+A_2} = e^{A_2} e^{-kt} = C e^{-kt} \end{aligned}$$

donde

$$D(t) = D^* - Ce^{-kt}$$

Para $t = 0 \implies D(0) = D_0 \iff D^* - C = D_0 \iff C = D^* - D_0$. Daí, obtemos o nosso modelo

$$D(t) = D^* - (D^* - D_0)e^{-kt}.$$

Comparando com nosso modelo exponencial assintótico temos $D = d, D^* = 28,28732$ e $k = 0,0143$.

3.2 Ângulo de lançamento

Uma pergunta natural sobre a modalidade do arremesso de peso é saber qual será a distância máxima (alcance máximo) que um atleta consegue arremessar. Isso já foi respondido, essa distância é de aproximadamente 28,29 metros. Por outro lado, se um atleta fizer lançamentos e aplicar no engenho forças distintas ao arremessar, o alcance do engenho pode variar. Ainda mais, o atleta pode arremessar a esfera de vários ângulos em relação ao nível do solo, o que também influencia no resultado final. Em virtude destas variáveis, podem-se estudar quais são os fatores que condicionam a distância máxima dos engenhos.

Segundo [15], os fatores que condicionam a distância do lançamento são: a força aplicada, tempo de aplicação da força, velocidade imposta ao implemento (v_0), ângulo de lançamento (θ), altura de liberação (h), a técnica empregada e fatores aerodinâmicos.

Para modelar o movimento do implemento nos arremessos de peso, vamos inicialmente considerar o engenho como um ponto material que se move no plano e que a única força que atua nesse corpo quando este é lançado até chegar ao solo é a força gravitacional suposta constante apontando sempre para baixo e que a esfera saia do solo, conforme a figura 15.

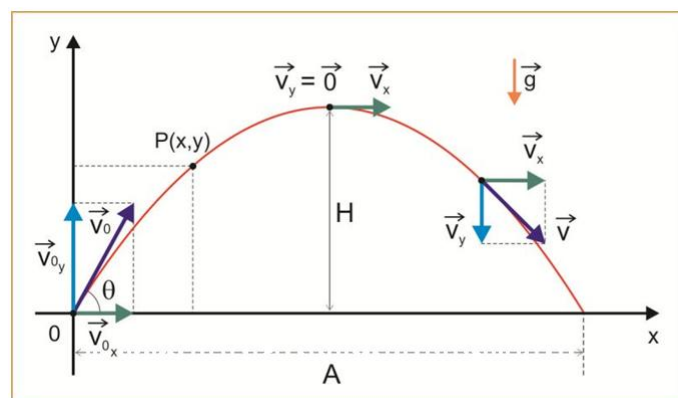


Figura 3.9: Lançamento do engenho do ponto $(0,0)$

Sejam $P(x, y)$ as coordenadas cartesianas do implemento, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ o seu vetor posição, \vec{v}_0 a velocidade que a esfera sai da mão do atleta e θ o ângulo que \vec{v}_0 faz com o eixo x positivo.

Por hipótese, no instante $t = 0$ s, temos $\vec{r} = \vec{0}$ e $\vec{v} = \vec{v}_0$. A velocidade inicial \vec{v}_0 , pode ser escrita como $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$, onde $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$.

Quando o engenho sai da mão do atleta, a única força que atua sobre ele é a força gravitacional

$$\vec{F} = -mg\vec{j} \quad (3.1)$$

e pela 2ª lei de Newton,

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (3.2)$$

Igualando (3.1) e (3.2), temos que

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\vec{j}$$

Como $m > 0$, podemos dividir os dois membros da equação por m , ficando

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\vec{j}$$

Tomando a integral dos dois membros, temos

$$\int \frac{d^2\vec{r}}{dt} dt = \int -g\vec{j} dt$$

que resulta em

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = K - gt\vec{j}$$

Para $t = 0$ s, temos $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = K = \vec{v}_0$.

Assim, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 - gt\vec{j}$ que tomando a integral dos dois membros desta nova equação, temos

$$\int \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int \vec{v}_0 dt - g \left(\int t dt \right) \vec{j}$$

que resulta em

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\vec{j} + C$$

Para $t = 0$ s, $\vec{r} = \vec{r}_0 = C$. Logo,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

Como $\vec{r}_0 = \vec{0}$ e $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$, obtemos a equação vetorial para o movimento do engenho

$$\vec{r} = v_{0x}t\vec{i} + \left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\sin\theta \end{cases}. \quad (3.3)$$

As componentes do vetor posição \vec{r} , nos dá a distância percorrida na horizontal ($x = v_{0x}t$) e na vertical $\left(y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)$, para $t \geq 0$.

O tempo que a esfera fica no ar é obtido fazendo $y = 0$.

$$\text{Assim, } v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\sin\theta}{g}.$$

Substituindo na componente x , obtemos o alcance que a esfera irá fazer. Deste modo,

$$x = v_{0x}t = v_0\cos\theta \cdot \frac{2v_0\sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$$

Outra maneira de encontrar o modelo da posição no plano do engenho em função do tempo para os alunos do ensino médio, que será abordado no capítulo 4, é desenvolver as equações horárias do movimento uniforme (MU) e movimento uniformemente variado (MUV) aprendidas na cinemática.

Após o lançamento, o implemento está sujeito somente a aceleração da gravidade suposta contante, o que implica que a sua componente y está em MUV, ou seja, $y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$. Como não existe aceleração na direção horizontal, a velocidade da componente em $x(v_x)$ é constante, ou seja, este movimento é uniforme podendo escrever $x = x_0 + v_{0x} \cdot t$.

Fazendo $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $v_{0x} = v_0\cos\theta$ e $v_{0y} = v_0\sin\theta$ obtemos, de forma análoga a anterior, que o alcance da esfera na horizontal é $A = x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$.

Ainda mais, as equações horárias $x = (v_0\cos\theta)t$ e $y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, mostram que o trajeto da esfera é parabólico. Para isso, isolamos a variável t na equação horária $x = (v_0\cos\theta)t$ ficando $t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$, e, em seguida, substituímos na equação $y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, obtendo $y = \frac{v_0\sin\theta}{v_0\cos\theta}x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$ que simplificando nos dá $y = \text{tg}\theta x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$, mostrando que y em função de x é uma função quadrática e, portanto, uma parábola (veja capítulo 4).

Com o modelo para o alcance do engenho, é fácil dizer que quando o ângulo de inclinação θ for igual a 45° , a distância percorrida x será máxima.

De fato, queremos θ , tal que $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos 2\theta}{g} = 0 &\iff \cos 2\theta = 0 \\ &\iff 2\theta = 90^\circ \\ &\iff \theta = 45^\circ. \end{aligned}$$

Entretanto, segundo [11], o valor de 45° está acima dos valores medidos dos atletas que participam de competições profissionais.

Em nosso modelo inicial, consideramos que o engenho saia do ponto $(0, 0)$, o que na realidade, não é verdade. O atleta arremessa o implemento de uma altura h , que é aproximadamente, a sua própria altura. Esta altura (h) que a esfera é lançada pode ser um dos fatores para que o ângulo não seja 45° .

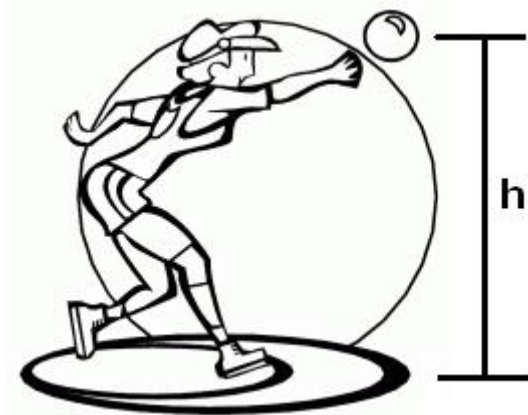


Figura 3.10: A esfera é lançada de uma altura h

Fonte: http://www.colorirgratis.com/desenhos-de-atletismo-para-colorir_2.html

Para verificarmos isso, vamos calcular em nosso modelo o ângulo de inclinação que o atleta precisa fazer para que a esfera percorra a maior distância considerando que a esfera saia do ponto $(0, h)$.

Desta forma, as equações horárias do movimento do engenho ficam sendo

$$x = (v_0 \cos \theta) t \quad (3.4)$$

e

$$y = h + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3.5)$$

Isolando t em (3.4) e substituindo em (3.5), obtemos a função

$$y = h + \operatorname{tg} \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2.$$

O alcance máximo x , com $x > 0$, será encontrado quando $y = 0$. Assim, basta resolver a equação do 2º grau $\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 - \operatorname{tg} \theta x - h = 0$.

O cálculo do discriminante fica

$$\Delta = (\operatorname{tg} \theta)^2 - 4 \cdot \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot (-h) = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{2gh}{v_0^2 \cos^2 \theta} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2gh}{v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Calculando as raízes da equação, temos

$$x = \frac{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2gh}{v_0^2 \cos^2 \theta}}}{\frac{2g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \pm \frac{1}{v_0 \cos \theta} \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2gh} \right)$$

Como queremos $x > 0$, vem que

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{v_0 \cos \theta} \sqrt{v_0^2 \left(\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2} \right)} \right) \\ &= \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \\ &= \frac{v_0^2 \cos \theta}{g} \left(\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Segundo [11], derivando x em relação a θ e igualando a zero em (3.6), obtemos a expressão

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{hg}{v_0^2}}} \quad (3.7)$$

Com essa relação, verifica-se que o melhor ângulo de lançamento é menor que 45° . Ainda mais, à medida que a altura h aumenta o melhor ângulo θ de lançamento vai se tornando menor. Por exemplo, para uma altura h de aproximadamente 2 metros, o ângulo ideal de lançamento é de aproximadamente 42° .

Segundo [14], o atleta Christian Cantwell, fez um arremesso de peso com um alcance de 22,54 m e seu ângulo de inclinação foi de aproximadamente 37° . Também, verifica-se em [11] que o melhor ângulo possível para o desempenho dos atletas é em torno de $37 - 38^\circ$.

Para analisar isso, considere a expressão (3.7) $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{hg}{v_0^2}}}$, que pode ser escrita,

equivalentemente, a $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Vamos considerar $h = 2$ m, $g = 9,81$ m/s² e $v_0 \geq 13$ m/s, o que implica, em $\frac{hg}{v_0^2} \leq 0,1161$.

Fazendo $x = \frac{hg}{v_0^2}$, o fator $\left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ pode ser expandido pela série de Maclaurin, mas, como $|x| \leq 0,1161 < 1$, a série será mais facilmente calculada como uma série binomial com $k = -1/2$ [8].

Assim

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots$$

que para $k = -\frac{1}{2}$ é

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

que resulta em

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

e, assim, obtemos

$$\left(1 + \frac{hg}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{hg}{v_0^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^3 + \dots$$

o que implica em

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{hg}{v_0^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^3 + \dots\right)$$

Como $\left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^n < \left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^{n-1} < \dots < \left(\frac{hg}{v_0^2}\right)^2 \leq (0,1161)^2 < 0,1161$, isto é, à medida que $n \rightarrow \infty$ na expansão binomial, $(hg)^n$ é muito menor do que v_0^{2n} , o que implica que todos os termos depois do primeiro são muito menores quando comparados ao primeiro termo.

Podemos assim, omiti-los, ficando apenas com

$$\text{sen } \theta \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{gh}{v_0^2}\right)$$

Sejam E_{pg} a energia potencial gravitacional e E_c a energia cinética do engenho de massa m , temos que

$$-\frac{1}{2}\frac{gh}{v_0^2} = -\frac{1}{2}\frac{mgh}{mv_0^2} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{mgh}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{E_{pg}}{E_c} = -\frac{1}{4}\frac{E_{pg}}{E_c}$$

o que resulta em

$$\text{sen } \theta \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4}\frac{E_{pg}}{E_c}\right) \quad (3.8)$$

A equação (3.8) acima nos dá um indício que o melhor ângulo possível também está relacionado com a energia mecânica ($E_m = E_c + E_{pg}$) que o atleta oferece ao peso.

Para analisar isso, considere (3.6) e (3.7). De (3.7), sabemos que

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2hg}$$

e pela relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$, temos

$$\text{cos}^2 \theta = 1 - \frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2hg} = \frac{v_0^2 + 2hg}{2v_0^2 + 2hg}$$

e como sabemos que $0 < \theta < 45^\circ$, vem que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2hg}{2v_0^2 + 2hg}}$$

Substituindo estas relações em (3.6), fica

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{v_0^2 + 2hg}{2v_0^2 + 2hg}} \left(\sqrt{\frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2hg}} + \sqrt{\frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2hg} + \frac{2gh}{v_0^2}} \right)$$

com isso, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0^2}{g} \left(\sqrt{\frac{v_0^2(v_0^2 + 2gh)}{(2v_0^2 + 2gh)^2}} + \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gh}{2v_0^2 + 2gh} \left(\frac{v_0^4 + 2gh(2v_0^2 + 2gh)}{v_0^2(2v_0^2 + 2gh)} \right)} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0}{2v_0^2 + 2gh} \sqrt{v_0^2 + 2gh} + \frac{\sqrt{(v_0^2 + 2gh)(v_0^4 + 4ghv_0^2 + 4g^2h^2)}}{v_0(2v_0^2 + 2gh)} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2 \sqrt{v_0^2 + 2gh} + \sqrt{(v_0^2 + 2gh)(v_0^4 + 4ghv_0^2 + 4g^2h^2)}}{v_0(2v_0^2 + 2gh)} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2 \sqrt{v_0^2 + 2gh} + \sqrt{(v_0^2 + 2gh)(v_0^2 + 2gh)^2}}{v_0(2v_0^2 + 2gh)} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}(2v_0^2 + 2gh)}{v_0(2v_0^2 + 2gh)} \right) \\ &= \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \\ &= \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2} \right)} \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Esta equação nos dá o alcance máximo do peso em termos da altura e velocidade inicial [12].

De (3.9), temos

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g} \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2} \right)^{1/2}$$

Expandindo pela série binomial com $k = 1/2$, vem

$$x = \frac{v_0^2}{g} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2hg}{v_0^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2hg}{v_0^2} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{2hg}{v_0^2} \right)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{2gh}{v_0^2} \right)^n \right)$$

e como v_0^2 é estritamente maior que gh , os termos depois do primeiro são muito menores comparados com o do primeiro, podendo assim, ignorá-los, ficando com

$$x = \frac{v_0^2}{g} \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right) = \frac{v_0^2}{g} + h = \frac{v_0^2 + hg}{g} = \frac{mv_0^2 + mgh}{mg} = \frac{2E_c + E_{pg}}{mg}.$$

Assim, como em [11] e [12], concluímos que a energia cinética é 2 vezes mais importante que sua energia potencial gravitacional. Isto quer dizer, que se um atleta obtém uma energia E à sua disposição, é mais vantajoso ele transferir esta energia E em energia cinética do que em energia potencial gravitacional.

Com isso, os atletas diminuem o ângulo para o alcance máximo de 42° para aproximadamente 37 a 38 graus [11], variando de atleta para atleta. Com esta inclinação, os atletas conseguirão o melhor desempenho, pois terão conseguido transferir ao peso a maior energia cinética, isto é, o engenho será lançado com a maior velocidade possível.

3.3 Resistência do ar

A resistência do ar é uma força de restrição ao movimento de um corpo, ou seja, quando o peso é lançado, este fica sujeito a uma força que é contrária ao módulo de sua velocidade devido ao efeito de atrito quando o objeto se interage com o ar.

Segundo [25], um avião quando se desloca no ar, possui uma força de tração que faz com que a aeronave se desloca para frente. Entretanto, este também fica sujeito a uma força de arrasto, que é uma força aerodinâmica de resistência do ar oposta ao sentido do avião à medida que ele se desloca.

Ainda, segundo [25], existem muitos fatores que influenciam na intensidade da força de arrasto, tais como o formato do corpo, a velocidade e a densidade do ar, podendo ser calculada da seguinte forma:

$$F_W = \frac{1}{2} \cdot C_W \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \quad (3.10)$$

onde C_W é o coeficiente de resistência aerodinâmica, ρ é a densidade do ar, S é a área da superfície do objeto e v a velocidade.

Em nossa situação, a superfície da esfera S é calculada por $S = \pi r^2$, com r o raio da esfera. Substituindo na equação (3.10), temos

$$F_W = \frac{1}{2} \underbrace{\rho \pi C_W r^2}_{K = \text{constante}} v^2 = K v^2 \quad (3.11)$$

Esta expressão é dada também em [11], onde o coeficiente de arrasto (C_W) da esfera é considerado por volta de 1/2.

Ainda de [11], verificamos que ao considerar para o peso uma velocidade inicial máxima de 16 m/s e fazendo os cálculos em um computador, resultamos em pequenas acelerações para a força de arrasto.

Portanto, concluimos que o efeito da resistência do ar é muito pequeno podendo ser desprezado. [11] e [12].

Capítulo 4

Aplicação no Ensino Médio

Neste capítulo, apresentamos uma maneira de discutir os assuntos tratados para o 1º ano do ensino médio.

Como fizemos anteriormente, podemos criar com os discentes modelos matemáticos que nos dão à distância máxima que o peso será lançado por um atleta.

Um modelo discreto poderia ser interessante num curso básico de matemática, isto é,

$$d_{n+\Delta n} - d_n = k(d^* - d_n)$$

Agora, se considerarmos n como sendo o período de obtenção do recorde, podemos escrever a fórmula de recorrência

$$d_{n+1} - d_n = k(d^* - d_n)$$

ou

$$d_{n+1} = kd^* + d_n - kd_n = kd^* + d_n(1 - k)$$

Fazendo $kd^* = b$ e $1 - k = a$, temos a equação de recorrência $d_{n+1} = ad_n + b$ (26).

Se $(d_0, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ é solução da equação com valor inicial d_0 , então temos sucessivamente:

$$d_1 = ad_0 + b$$

$$d_2 = a(ad_0 + b) + b = a^2d_0 + ab + b = a^2d_0 + (1 + a)b$$

$$d_3 = a(a^2d_0 + (1 + a)b) + b = a^3d_0 + b(a + a^2) + b = a^3d_0 + (1 + a + a^2)b$$

\vdots

$$d_n = ad_{n-1} + b = a^n d_0 + (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1})b$$

De (27), uma sequência de números reais (d_n) tal que d_0 é dado e para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $d_{n+1} = ad_n + b$, com a e b números reais, chama-se de progressão aritmético-geométrica e que pode-se mostrar por indução sobre n que $d_n = a^n d_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) b$ como já vimos anteriormente.

Vamos então mostrar por indução.

Para $n = 0$, temos que $d_1 = ad_0 + b$ que é verdade.

Suponhamos que seja verdade para algum n natural, ou seja, $d_n = a^n d_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) b$ e vamos provar que seja válido para $n + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= ad_n + b \\ &= a \left(a^n d_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) b \right) + b \\ &= a^{n+1} d_0 + b \left(\sum_{k=1}^n a^k \right) + b \\ &= a^{n+1} d_0 + \left(\sum_{k=0}^n a^k \right) b \end{aligned}$$

como queríamos.

Observamos que $\sum_{k=0}^{n-1} a^k$ é uma soma de n termos de progressão geométrica de razão a .

Assim, se $a \neq 1$, temos que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ e, se $a = 1$, então $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$.

Portanto, a solução geral da equação $d_{n+1} = ad_n + b$ é

$$\begin{cases} d_n = a^n d_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b, & \text{se } a \neq 1 \\ d_n = a^n d_0 + nb, & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

Daí, voltando a nossa fórmula de recorrência $d_{n+1} = ad_n + b$, com $a = 1 - k$ e $b = kd^*$, temos que sua solução é

$$\begin{aligned} d_n &= d_0 (1 - k)^n + kd^* \frac{1 - (1 - k)^n}{1 - (1 - k)} \\ &= d_0 (1 - k)^n + kd^* \frac{1 - (1 - k)^n}{k} \\ &= (1 - k)^n [d_0 - d^*] + d^* \end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever a solução acima na forma $\frac{d^* - d_n}{d^* - d_0} = (1 - k)^n$ em que pode ser ajustada com os alunos no Excel por uma função potência onde podemos determinar o valor de k .

4.1 Atividades

Vamos agora, apresentar atividades, nas quais, os alunos poderão resolver em grupos e/ou individual com a mediação do professor.

Ao discutir qual é o melhor ângulo de lançamento podemos aplicar conteúdos relativos à Física e Matemática para analisar tais fenômenos.

Uma sugestão é iniciar os conceitos de balística com a situação do arremesso de peso. Para isso os alunos precisam ter conhecimento de cinemática e vetores.

Desprezando-se a resistência do ar e com base na figura 15, o engenho fica sujeito a uma única força (força peso) e, portanto, fica sujeito apenas à aceleração da gravidade.

Observamos que esse movimento pode ser considerado como o resultado da composição de dois movimentos simultâneos e independentes: um vertical e outro horizontal [22].

Vamos analisar inicialmente os dois movimentos separadamente.

O movimento na vertical é uniformemente variado, isto porque o engenho está sendo submetido a uma aceleração constante $a = -g$ (aceleração da gravidade).

Com isso, podemos aplicar as funções horárias do MUV.

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \quad (y \text{ em função do tempo}) \quad (4.1)$$

$$v_y = v_{0y} + at \quad (v_y \text{ em função do tempo}) \quad (4.2)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2ay \quad (\text{equação de Torricelli}) \quad (4.3)$$

Atividade 4.1.1. Qual é o módulo da velocidade inicial vertical (v_{0y}) e horizontal (v_{0x})?

Solução Podemos aqui fazer uma revisão com os alunos sobre o conceito de vetor e, consequentemente, de trigonometria no triângulo retângulo. Fazendo a projeção no eixo Ox e Oy obtemos, respectivamente, $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin \theta$.

Atividade 4.1.2. Qual seria a altura máxima (H) do engenho?

Solução A altura máxima (H) será obtida quando $v_y = 0$ porque o engenho está sendo submetido a uma aceleração $a = -g$, ou seja, a medida que o tempo passa, o módulo da v_y diminui enquanto o corpo sobe. No entanto, quando v_y é zero, o corpo terá alcançado sua altura máxima, pois, a partir daí, ele começa a descer e v_y começa, em módulo, a aumentar.

No ponto que $v_y = 0$, temos $y = H$ (altura máxima) e substituindo na equação (4.3), temos:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2ay \iff 0^2 = v_0^2 \sin^2 \theta - 2gH$$

que isolando H fica:

$$H = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2g} \quad (4.4)$$

Outra forma de encontrar (4.4), é substituir $v_y = 0$ em (4.2), e isolar t obtendo

$$0 = v_0 \text{sen} \theta - gt \iff t = \frac{v_0 \text{sen} \theta}{g}.$$

Daí, substitui em (4.1), ficando com

$$H = 0 + v_0 \text{sen} \theta \cdot \frac{v_0 \text{sen} \theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta}{g^2} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2g}$$

como queríamos.

Atividade 4.1.3. *Qual é a função horária do movimento horizontal?*

Solução Agora, analisemos o movimento na horizontal.

Como na horizontal não há aceleração, o módulo da velocidade v_x é constante, ou seja, o movimento é uniforme podendo ser descrito pela função horária

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (x \text{ em função do tempo}) \quad (4.5)$$

Atividade 4.1.4. *Qual é o alcance máximo (A) do engenho?*

Solução Quando o peso retorna ao nível de lançamento, temos que $v_y = -v_{0y}$. Substituindo em (4.2), temos:

$$-v_{0y} = v_{0y} - gt \iff t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \text{sen} \theta}{g}.$$

Assim, substituindo em (4.5), vem:

$$A = x = x_0 + v_{0x}t = 0 + v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \text{sen} \theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \text{sen} \theta \cos \theta}{g}$$

e utilizando o fato de que $2 \text{sen} \theta \cos \theta = \text{sen} 2\theta$ chegamos a

$$x = A = \frac{v_0^2 \text{sen} 2\theta}{g} \quad (4.6)$$

que é o alcance A do lançamento.

Podemos aqui, demonstrar com os alunos que $2 \text{sen} \theta \cos \theta = \text{sen} 2\theta$ pelo método que o professor achar conveniente [16] e [17].

Atividade 4.1.5. *Mostre que neste caso o alcance máximo (A) será obtido quando $\theta = 45^\circ$.*

Solução Mostramos isso no capítulo anterior com o uso de derivadas, no entanto, não é conveniente utilizar esta ferramenta para os alunos do 1º ano do ensino médio.

Neste caso, como estamos admitindo que o engenho em $t = 0$ s está saindo do ponto $(0, 0)$, o argumento é bastante simples.

Por (4.6), verifica-se que a constante $\frac{v_0^2}{g}$ é positiva e, assim, o maior valor que (4.6) pode assumir, é quando $0 < \sin 2\theta$ for máximo, ou seja, quando $\sin 2\theta = 1$, o que implica em $\theta = 45^\circ$.

Atividade 4.1.6. *Mostre que se $\theta = 45^\circ$, então $A = 4H$.*

Solução Os alunos não devem ter dificuldades em resolver este problema, em vista de que é uma aplicação de (4.4) e (4.6), como segue.

De (4.4), vem

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 45^\circ}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{g}$$

De (4.6), segue

$$A = \frac{v_0^2 \sin (2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

Assim, dividindo as duas expressões acima, temos

$$\frac{A}{H} = \frac{\frac{v_0^2}{g}}{\frac{1}{4} \frac{v_0^2}{g}} = 4 \iff A = 4H$$

como queríamos.

4.2 Parábola

Sejam F um ponto e d uma reta num plano π , com $F \notin d$.

O conjunto de pontos $P = (x, y)$ de π que estão a mesma distância de F e d chama-se de parábola. Assim,

$$\text{parábola} = \{P \in \pi; d(P, F) = d(P, d)\}.$$

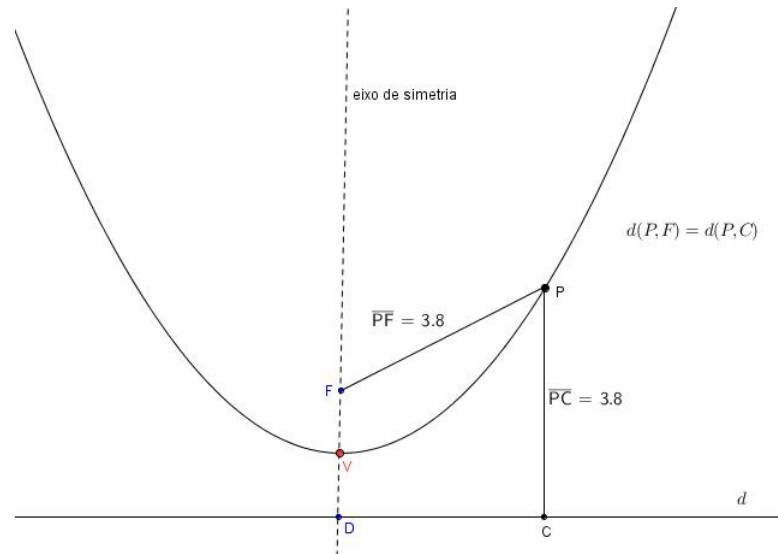


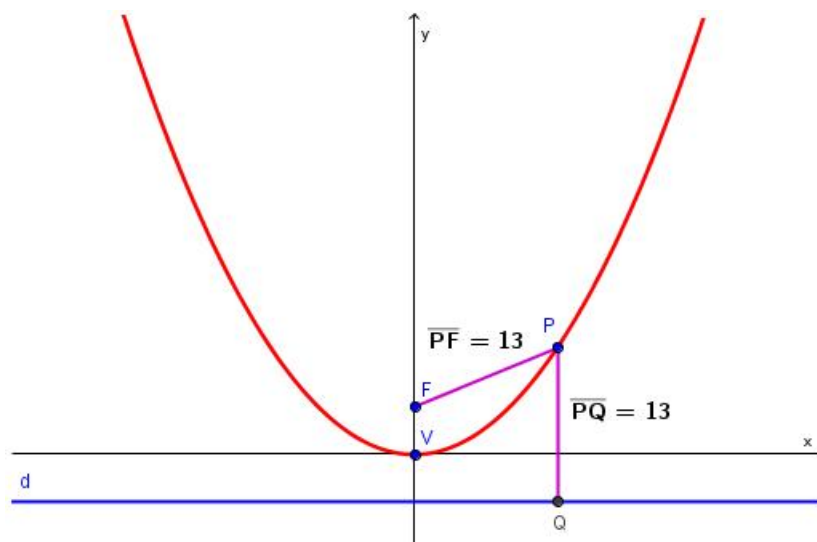
Figura 4.1: Parábola

O ponto F é chamado de foco da parábola e a reta d de reta diretriz.

Na figura 17, temos V que é o ponto da parábola mais próximo de d e é chamado de vértice da parábola. A reta \overleftrightarrow{VF} que é perpendicular à reta diretriz e que contém o foco é chamada de eixo de simetria ou apenas por eixo da parábola. Por último, $p = d(V, F) = d(V, D)$ chama-se de parâmetro da parábola.

4.3 Equação da Parábola

Vamos considerar a parábola com eixo de simetria \overleftrightarrow{VF} sobre o eixo Oy e o vértice V da parábola na origem.

Figura 4.2: Parábola com o vértice na origem e o eixo de simetria no eixo Oy

Atividade 4.3.1. Nessas condições, determine as coordenadas de F e a equação da reta diretriz.

Solução Por definição, $d = (F, V) = p$. Então, $F = (0, p)$, com $p > 0$. Logo, a reta diretriz é dada por $d : y = -p$.

Atividade 4.3.2. Determine a equação reduzida da parábola, isto é, a equação que verifica as condições do foco pertencer ao eixo Oy e o vértice ser a origem do plano cartesiano.

Solução Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola. Então,

$$d(P, F) = d(P, d) \iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y - (-p)|$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 &= |y+p|^2 &\iff x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ &&\iff x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ &&\iff x^2 &= 4py \end{aligned} \tag{4.7}$$

que é a equação reduzida da parábola.

Analogamente, a parábola com vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo Ox tem equação reduzida $y^2 = 4px$.

Se uma parábola tem vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e seu eixo de simetria $\overleftrightarrow{VF} \parallel Oy$, conforme a figura 19 abaixo, sua equação é dada por

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \tag{4.8}$$

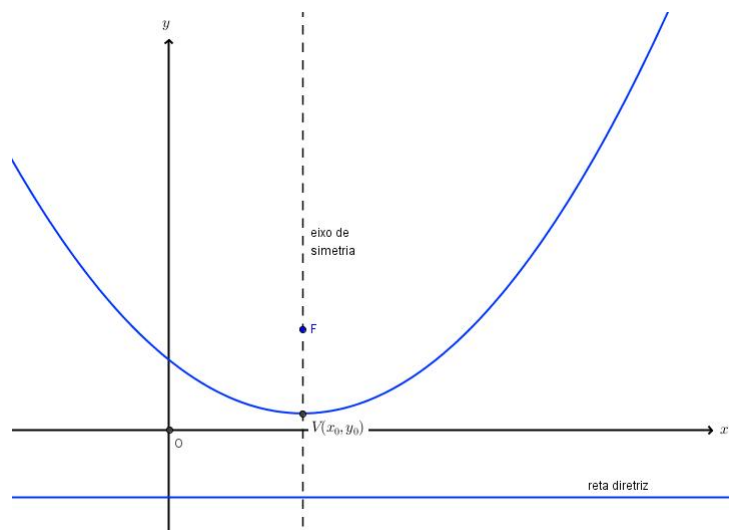


Figura 4.3: Parábola com o vértice $V = (x_0, y_0)$ não necessariamente na origem e o eixo de simetria paralelo ao eixo Oy

Desenvolvendo a equação (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}
 (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) &\iff x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = 4py - 4py_0 \\
 &\iff 4py = x^2 - 2x_0x + x_0^2 + 4py_0 \\
 &\iff y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{(x_0^2 + 4py_0)}{4p}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Assim, uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ representa uma parábola com $a = \frac{1}{4p}$, $b = -\frac{x_0}{2p}$ e $c = \frac{(x_0^2 + 4py_0)}{4p}$, sendo (x_0, y_0) o vértice da parábola.

Atividade 4.3.3. *Mostre que a trajetória do engenho é uma parábola.*

Solução De (4.5), temos que $x = v_0 \cos \theta t \iff t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$. Substituindo em (4.1), vem

$$\begin{aligned}
 y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 &= v_0 \sin \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \\
 &= \operatorname{tg} \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \\
 &= ax^2 + bx, \text{ com } a = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \text{ e } b = \operatorname{tg} \theta.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Isso mostra que a trajetória do peso é uma parábola.

4.4 Atividades no computador

Os modelos aplicados para calcular a maior distância que o engenho poderá alcançar foram realizados no Microsoft Office Excel. Entretanto, podemos utilizar para estes cálculos qualquer planilha eletrônica. Garantimos de forma empírica, que quase todas as escolas do ensino médio possuem uma sala de computadores com planilha eletrônica.

Em virtude disso, além de realizar as atividades propostas no capítulo anterior envolvendo o método de Ford-Walford, podemos discutir com os alunos o ângulo de lançamento do arremesso de peso de uma altura h , com $h \neq 0$.

Continuemos assim, com as atividades:

Atividade 4.4.1. *No arremesso de peso, o atleta lança o engenho de uma altura h , ou seja, considere que o implemento saia do ponto $(0, h)$, com $h > 0$. Determine as equações que descrevem seu movimento na horizontal e na vertical.*

Depois, encontre uma função quadrática que relaciona a altura vertical y em função do movimento na horizontal x como na atividade (4.3.3).

Solução Desprezando-se a resistência do ar, os discentes poderão perceber que nada de novo é realizado aqui. Assim, ao substituir $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ em (4.1), chegamos a $y = h + \operatorname{tg} \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$.

Atividade 4.4.2. Descubra a expressão que determina o alcance máximo (A) do peso utilizando a função que encontramos na atividade (4.4).

Solução Já vimos no capítulo anterior, que o alcance máximo (A) é o valor de x , para $y = 0$. Deste modo, resolvendo a equação $h + \operatorname{tg} \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 = 0$, temos que $x = A = \frac{v_0^2 \cos \theta}{g} \left(\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right)$.

Atividade 4.4.3. Com uso de um software, analise pela equação (3.6) o ângulo θ que o peso terá alcance máximo.

Com os alunos, podemos utilizar os softwares que vamos apresentar abaixo.

O primeiro é o Microsoft Office Excel, que pode ser substituído em sua ausência por qualquer outra planilha eletrônica similar.

Aqui, consideramos $v_0 = 13,5 \text{ m/s}$, $h = 2,1 \text{ m}$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Os valores do ângulo de lançamento serão analisados com uma variação de $0,5^\circ$.

	A	B	C	D
1	Ângulo	Cosseno	Senos	Alcance
2	30	0,866025404	0,5	19,16245899
3	30,5	0,86162916	0,507538363	19,27384089
4	31	0,857167301	0,515038075	19,3811496
5	31,5	0,852640164	0,522498565	19,48431362
6	32	0,848048096	0,529919264	19,58326365
7	32,5	0,843391446	0,537299608	19,67793259
8	33	0,838670568	0,544639036	19,76825557
9	33,5	0,833885822	0,551936985	19,8541699
10	34	0,829037573	0,559192903	19,93561511
11	34,5	0,824126189	0,566406237	20,01253291
12	35	0,819152044	0,573576436	20,08486723
13	35,5	0,814115518	0,580702956	20,15256415
14	36	0,809016994	0,587785252	20,21557197
15	36,5	0,803856861	0,594822787	20,27384115
16	37	0,79863551	0,601815023	20,32732432
17	37,5	0,79335334	0,608761429	20,37597629
18	38	0,788010754	0,615661475	20,419754
19	38,5	0,782608157	0,622514637	20,45861659
20	39	0,777145961	0,629320391	20,49252529
21	39,5	0,771624583	0,63607822	20,52144352
22	40	0,766044443	0,64278761	20,5453368
23	40,5	0,760405966	0,649448048	20,56417278
24	41	0,75470958	0,656059029	20,57792123
25	41,5	0,748955721	0,662620048	20,58655403
26	42	0,743144825	0,669130606	20,59004515
27	42,5	0,737277337	0,675590208	20,58837067
28	43	0,731353702	0,68199836	20,58150872
29	43,5	0,725374371	0,688354576	20,56943954
30	44	0,7193398	0,69465837	20,55214542
31	44,5	0,713250449	0,700909264	20,52961069
32	45	0,707106781	0,707106781	20,50182176

Figura 4.4: Verificação do melhor ângulo de lançamento

Observe que colocamos na primeira coluna os valores dos ângulos de lançamento, em graus, e na segunda e terceira coluna os valores do cosseno e seno, respectivamente, de tais ângulos.

Por fim, na quarta e última coluna, temos os valores do alcance máximo (A) calculado pela expressão (3.6).

Observamos que neste caso o melhor ângulo de lançamento é de 42° . Podemos também, mudar as variáveis da altura de lançamento e a velocidade inicial do engenho e discutir que o melhor lançamento sempre está em torno de 42° quando h é próximo de 2 metros, como já vimos na capítulo anterior e em [11], [12] e [13].

O outro programa que podemos trabalhar com os alunos, chama-se *Shot put* [27], que simula o arremesso de peso, onde nós determinamos como valores iniciais a altura h que o peso é lançado, a velocidade inicial v_0 , a aceleração da gravidade g e que se pode considerar ou não a resistência do ar.

Fixando a altura h e a velocidade inicial v_0 e variando o ângulo de lançamento, também verificamos que o maior alcance se dá quando $\theta \approx 42^\circ$.

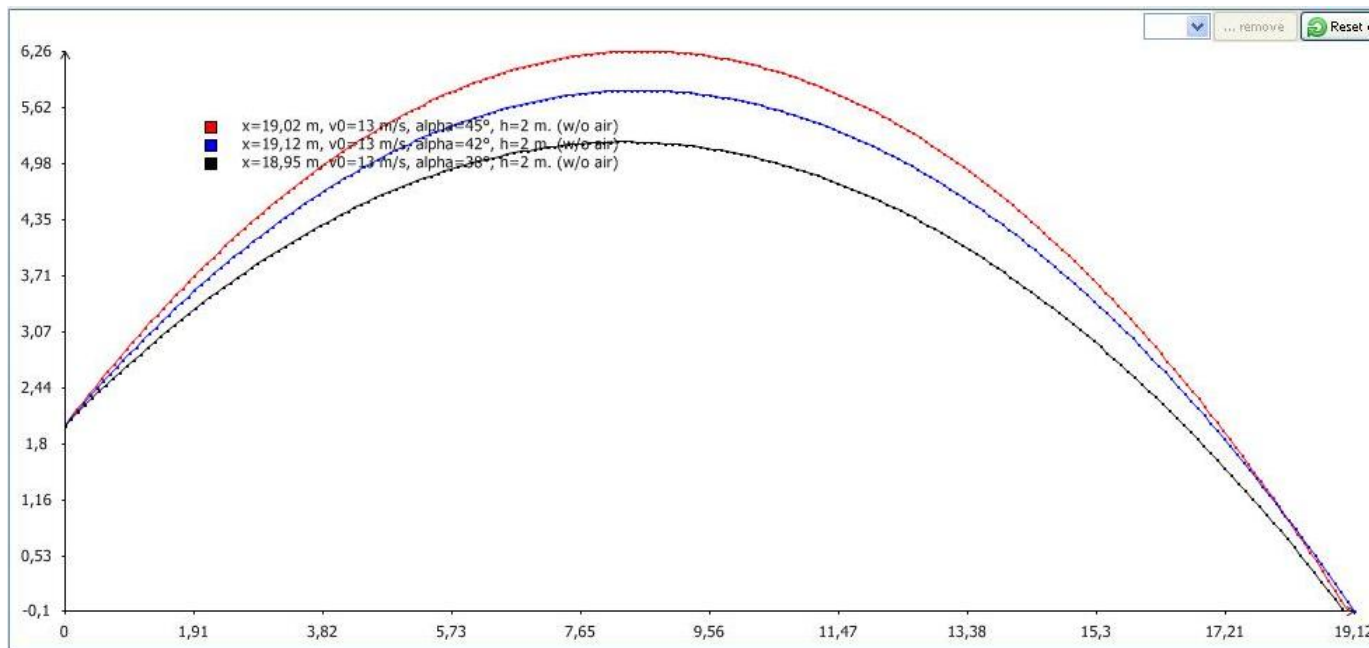


Figura 4.5: Verificação do melhor ângulo de lançamento sem a resistência do ar

Observa-se também, que a resistência do ar, pouco influencia no lançamento e que o ângulo que maximiza o alcance continua sendo 42° .

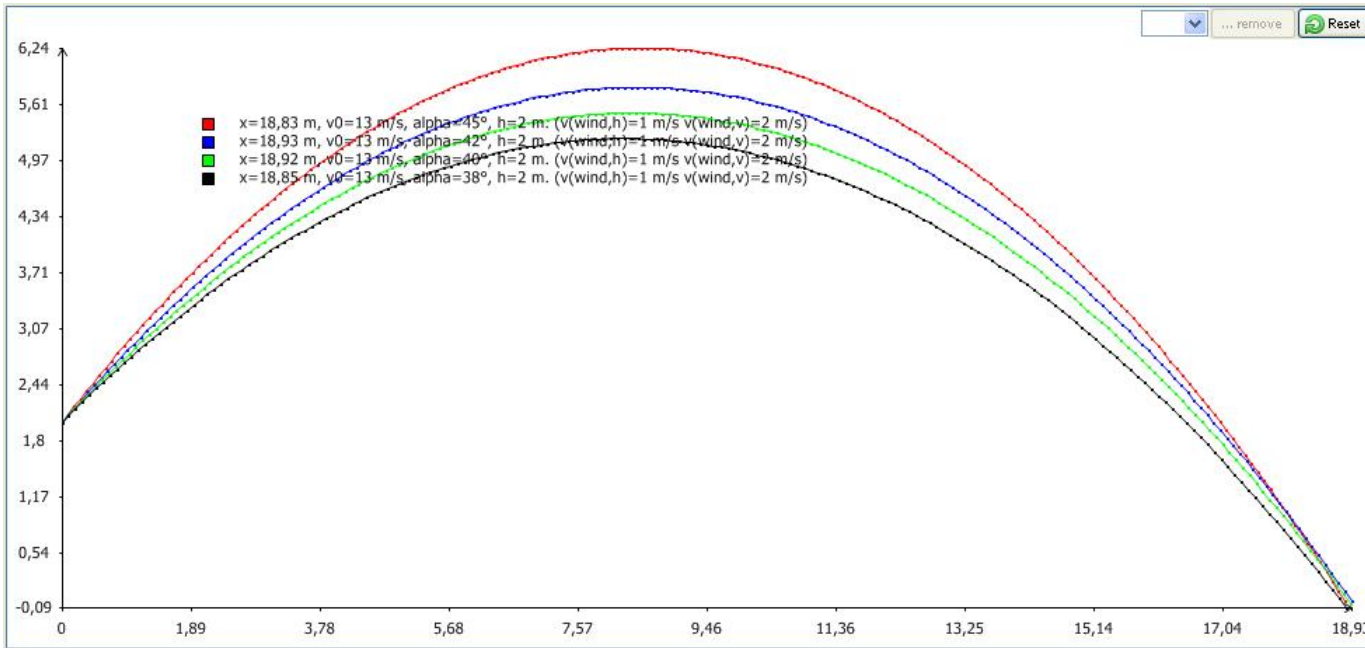


Figura 4.6: Verificação do melhor ângulo de lançamento com a resistência do ar

4.5 Função Quadrática

Verificamos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$ que é chamada de função quadrática, possui o gráfico em forma de parábola. Discutimos também, que a trajetória do engenho, no vácuo, é regida por uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ o que implica que sua trajetória é parabólica.

Esta situação de modelagem matemática do levantamento de peso, pode também possibilitar uma motivação para o estudo das funções quadráticas.

Apoiando-se nesta hipótese, vamos propor as atividades abaixo, baseando-se em [20], [18] e [17].

Atividade 4.5.1. Considere o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, b e c são reais dados.

Demonstre que $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solução Basta colocar a em evidência e, depois, completar quadrado, como segue

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac \tag{4.11}
\end{aligned}$$

como queríamos.

A expressão (4.11) é chamada de forma canônica.

Atividade 4.5.2. Utilizando (4.5.1), demonstre que, se $\Delta \geq 0$, então as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{4.12}$$

Solução

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\
&\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
&\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

Atividade 4.5.3. Mostre que se $\Delta > 0$, então as raízes reais da equação $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ são distintas.

Solução Esta atividade é um bom exemplo para mostrar aos alunos algumas formas de demonstração, podendo-se demonstrar de forma direta, utilizando a contrapositiva ou por redução ao absurdo.

Vamos demonstrar pelo método de redução ao absurdo, ou seja, suponha que $\Delta > 0$ e admitamos, por absurdo, que $x_1 = x_2$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\iff \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff -b + \sqrt{\Delta} = -b - \sqrt{\Delta} \\ &\iff \sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta} \\ &\iff 2\sqrt{\Delta} = 0 \\ &\iff \sqrt{\Delta} = 0 \\ &\iff \Delta = 0 \text{ o que é absurdo.} \end{aligned}$$

Logo, x_1 e x_2 são distintos.

É fácil verificar que se $\Delta = 0$, então $\pm\sqrt{\Delta} = 0$, o que implica que $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Neste caso, dizemos que a equação possui raiz dupla igual a $-\frac{b}{2a}$ [17] ou que $-\frac{b}{2a}$ é raiz de multiplicidade 2 [19].

Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, e assim, diremos que a equação não possui raízes reais.

Atividade 4.5.4. *Sejam $\Delta \geq 0$ e x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Mostre que*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (4.13)$$

e

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (4.14)$$

Solução Sejam $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, então

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = -\frac{(\sqrt{\Delta} + b)(\sqrt{\Delta} - b)}{4a^2} \\ &= -\frac{(\sqrt{\Delta}^2 - b^2)}{4a^2} = -\frac{(\Delta - b^2)}{4a^2} \end{aligned}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, vem

$$x_1 x_2 = -\frac{(b^2 - 4ac - b^2)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

como queríamos.

Atividade 4.5.5. *Sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$. Demonstre que*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (4.15)$$

Solução Para demonstrar (4.15), vamos colocar a em evidência e, em seguida, utilizar (4.5.4). Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}x \right) + \frac{c}{a} \right] \\ &= a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ &= a (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= a (x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) \\ &= a [x(x - x_2) - x_1(x - x_2)] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

como queríamos.

Atividade 4.5.6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática.*

Mostre que

$$a) \text{ Se } a > 0, \text{ então } f \text{ admite o valor mínimo } y = -\frac{\Delta}{4a} \text{ em } x = -\frac{b}{2a}.$$

$$b) \text{ Se } a < 0, \text{ então } f \text{ admite o valor máximo } y = -\frac{\Delta}{4a} \text{ em } x = -\frac{b}{2a}.$$

Solução Vamos demonstrar o item a). O item b) é feito de forma análoga e pode ser visto em [18].

Da equação canônica $f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ obtida em (4.5.1), e por hipótese que $a > 0$, implica que o menor valor de $f(x)$ se dá quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ for mínimo. Mas, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante, pois não depende de x . Assim, o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ será mínimo quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ for o menor valor possível.

Entretanto, esta parcela é o quadrado de uma soma, ou seja, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, o seu menor valor será quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$ que acontece se, e somente se, $x = -\frac{b}{2a}$.

Substituindo em (4.11), vem:

$$\begin{aligned} f(-b/2a) &= a \left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left(-\frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

como queríamos.

Atividade 4.5.7. *Mostre que o vértice da parábola da função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado por $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$.*

Solução Segue da definição da parábola. O vértice é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz. Logo, é o ponto mínimo ou máximo da função e como vimos em (4.5.7), esse ponto se dá em $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

Poderíamos também utilizar (4.9), isto é, vimos que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a = \frac{1}{4p}$, $b = -\frac{x_0}{2p}$ e $c = \frac{(x_0^2 + 4py_0)}{4p}$ representa uma parábola de vértice (x_0, y_0) . Assim, substituindo estas relações em $x = -\frac{b}{2a}$, temos

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-\frac{x_0}{2p})}{2(\frac{1}{4p})} = x_0$$

e

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\left(\frac{x_0^2}{4p^2} - 4 \cdot \frac{1}{4p} \cdot \frac{(x_0^2 + 4py_0)}{4p}\right)}{4 \cdot \frac{1}{4p}} \\ &= \frac{-\left(\frac{x_0^2}{4p^2} - \frac{1}{p} \cdot \frac{(x_0^2 + 4py_0)}{4p}\right)}{\frac{1}{p}} \\ &= -p \left(\frac{x_0^2}{4p^2} - \frac{x_0^2 + 4py_0}{4p^2} \right) \\ &= -p \left(\frac{-4py_0}{4p^2} \right) \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Atividade 4.5.8. *Mostre que a reta $x = -\frac{b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola cujo gráfico é dado pela lei de uma função quadrática.*

Solução Já vimos que a função quadrática tem como seu gráfico uma parábola e que seu eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy . Por definição, o eixo de simetria é perpendicular à reta diretriz e, conseqüentemente, para este caso, perpendicular ao eixo Ox . Como o eixo de simetria contém o vértice da parábola, então fica fácil mostrar que a parábola possui a equação $x = -\frac{b}{2a}$ como

seu eixo de simetria.

Uma outra maneira de provar isso, é mostrar que dado um ponto A que pertence a parábola, definida pela função quadrática, tal que $A = \left(\frac{-b}{2a} - M, y\right)$, com $M \in \mathbb{R}$, existe $B = \left(\frac{-b}{2a} + M, y\right) \in$ parábola, com $y = f\left(-\frac{b}{2a} - M\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + M\right)$.

Assim, e considerando que $A = \left(\frac{-b}{2a} - M, y\right)$ pertença à parábola definida por (4.11), temos

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a} - M\right) &= a \left[\left(-\frac{b}{2a} - M + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left[(-M)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left(M^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ &= a \left[\left(-\frac{b}{2a} + M + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = f\left(-\frac{b}{2a} + M\right) \end{aligned}$$

como queríamos.

Encerraremos este trabalho aplicando estes conhecimentos sobre funções quadráticas para resolver problemas de aplicação. Para este propósito, podemos aplicar as atividades abaixo e, também, utilizar [17] e [21].

Atividade 4.5.9. *Mostre pela eq. (4.10) que para $x = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}$ o engenho estará com altura máxima (H).*

Solução O ponto de altura máxima (H) é quando $y = f(-b/2a) = f(x_v)$. Assim,

$$\begin{aligned} x_v = -\frac{b}{2a} &= \frac{-\operatorname{tg} \theta}{\frac{-2g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{2g} \\ &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g} \end{aligned}$$

Atividade 4.5.10. *Mostre pela eq. (4.10) que a altura máxima (H) é $H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$.*

Solução A altura máxima é o valor de $f(x_v) = f(-b/2a) = y_v = H = -\frac{\Delta}{4a}$. Logo,

$$\begin{aligned} H &= -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\operatorname{tg}^2 \theta}{\frac{-4g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{4g} \\ &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \end{aligned}$$

Atividade 4.5.11. Mostre pela eq. (4.10) que o engenho terá alcance (A) máximo em $x = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$.

Solução O valor de A é a raiz x_2 da função definida por (4.10), tal que $0 = x_1 < x_2 = A$. Logo, colocando x em evidência, temos

$$\begin{aligned} x \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + \operatorname{tg} \theta \right) &= 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{\operatorname{tg} \theta \cdot 2 \cdot v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \end{aligned}$$

como queríamos. □

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho fizemos um estudo de sequências reais culminando com o teorema que se uma sequência é limitada e monótona, então é convergente.

Com este teorema e com o método de Ford-Walford, discutimos como determinar o ponto de estabilidade de sequências convergentes.

Discutimos com um exemplo o processo de modelagem matemática de um modelo exponencial assintótico para a corrida dos recordes mundiais femininos de 100 metros rasos.

Após a realização do exemplo, fizemos o modelo exponencial assintótico dos recordes mundiais masculinos no arremesso de peso.

Discutimos quais são as variáveis que interferem no melhor lançamento de um arremesso de peso. Analisamos a resistência do ar e o ângulo de lançamento.

Mostramos que o melhor ângulo de lançamento varia com a altura e para esta única variável o ângulo fica otimizado com o valor de 42° .

Discutimos que a energia cinética e a energia potencial gravitacional estão relacionadas com o desempenho dos atletas.

Com isso, relatamos que é melhor para que o atleta transmita ao engenho maior energia cinética do que energia potencial gravitacional, fazendo com que o melhor ângulo de lançamento para os atletas de alto nível se torne entre 40° e 42° [12].

Encerramos, sugerindo algumas atividades que podem ser aplicadas à primeira série do ensino médio.

Inicialmente, podemos discutir os modelos exponenciais obtidos por uma equação de diferenças de 1ª ordem e desenvolver modelos matemáticos em planilhas eletrônicas.

Depois, podemos discutir que o trajeto do engenho é uma parábola se não considerarmos a resistência do ar.

Com isso, discutimos a definição de parábola e relacionamos o seu gráfico com a função

quadrática.

Assim, sugerimos algumas atividades envolvendo a função polinomial do 2º grau e também relacionamos com o estudo da balística do arremesso de peso.

Acreditamos que esta é mais uma forma de tentar mobilizar os alunos para o assunto de função quadrática e discutir algumas soluções de forma computacional, mostrando que a matemática serve para fazer inferências, desenvolver teoria, testar hipóteses e solucionar problemas.

Encerramos aqui, discutindo que os modelos matemáticos foram criados com uma matemática simples, acessível para os alunos do ensino médio.

Entretanto, tais modelos podem ser melhorados e que outras variáveis podem influenciar o modelo que não foram aqui discutidas, como exemplo, a latitude e altitude que os atletas estão ao participar da competição.

Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, ELON LAGES. *Análise real*. Coleção Matemática Universitária. Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [2] LIMA, ELON LAGES. *Curso de análise*. Projeto Euclides. Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [3] BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3a. ed. São Paulo: Contexto, 2009.
- [4] BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Temas e Modelos*. 1a. ed. Santo André: UFABC, 2012.
- [5] BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Uma introdução à Biomatemática*. E-book. Santo André: UFABC.
- [6] ÁVILA, GERALDO S. DE S.. *Introdução à análise matemática*. 2a. ed. São Paulo: Blucher, 1999.
- [7] BIEMBEBGUT, MARIA SALETT; HEIN, NELSON. *Modelagem matemática no ensino* São Paulo: Contexto, 2000.
- [8] STEWART, JAMES. *Cálculo*. Tradução de Antonio Carlos Moretti e Antonios Carlos Gilli Martins. Volume 2, 5a. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- [9] THOMAS, GEORGE B.. *Cálculo*. Tradução de Claudio Hirofume Asano. Volume 2, 10a. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.
- [10] PAULY, DANIEL. *Fish Population Dynamics in Tropical Waters: a Manual for use with Programmable Calculators*. ICLARM Studies and Reviews 8. International Center for Living Aquatic Resources Management, Manila, Philippines, 1984.
- [11] LENZ, ALEXANDER; RAPPL, FLORIAN. *The optimal angle of Release in Shot Put* Physics.pop-ph, arXiv:1007.3689v2, 2010.

- [12] LICHTENBERG, D.B.; WILLS, J.G.. *Maximizing the range of the shot put* Am.J.Phys.46(5), 546, 1978.
- [13] OSWALD, URS; SCHNEEBELI, HANS RUDOLF *Mathematische Modelle zum Kugelstossen* vsmp Bulletin 94, 2004.
- [14] SANTOS, D.F DOS; CARVALHO, H.H DE; AFONSO, J.. *O recorde para o lançamento do peso não é batido há vinte anos. Estará isso relacionado com a Física?* Sala dos Professores, volume 33, no.1.
- [15] VIDIGAL, JOSÉ M.S.. *Provas de Campo: Saltos e Lançamentos - Fundamentos teóricos básicos*. Minas Gerais: PUC-MG, 2012. (Apostila para o curso de Educação Física)
- [16] WAGNER, EDUARDO; MORGADO, A.C. DE O.; CARMO, M. P. DO. *Trigonometria e Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [17] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, EDUARDO; MORGADO, A.C. DE O.. *A Matemática do Ensino Médio* Coleção do Professor de Matemática. Volume 1, 9a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [18] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.. *Fundamentos de Matemática Elementar* Volume 1, 8a. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- [19] IEZZI, GELSON. *Fundamentos de Matemática Elementar* Volume 7, 5a. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [20] GUIDORIZZI, HAMILTON LUIZ. *Um curso de Cálculo* Volume 1, 5a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [21] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, EDUARDO; MORGADO, A.C. DE O.. *Temas e Problemas* Coleção do Professor de Matemática. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [22] JUNIOR, F.R.; FERRARO, N.G.; SOARES, P.A. DE T.. *Os Fundamentos da Física* Volume 1, 6a. ed. São Paulo: Moderna, 1993.
- [23] TIPLER, PAUL A.; MOSCA, G.. *Física para cientistas e engenheiros* Volume 1, 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [24] HALLIDAY, D.; RESNICK, R; WALKER, J.. *Fundamentos de Física - Mecânica* Volume 1, 9a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

- [25] ANDERSON, JOHN D. *Aircraft Performance and design* New York: McGraw-Hill, 1999.
- [26] HEFEZ, ABRAMO. *Elementos de aritmética*. Textos Universitários. 2a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [27] UNIVERSITY OF REGENSBURG. *Software Shot put*. Disponível em: <<http://shotput.florian-rappl.de>>. Acesso em: 15 de janeiro de 2013.