Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Triângulo: Formas, Medidas e Aplicações.

Manoel Bernardes de Jesus

Goiânia

2016

Manoel Bernardes de Jesus

Triângulo: Formas, Medidas e Aplicações.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profª Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima

Goiânia

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Jesus, Manoel Bernardes de
Triângulo: Formas, Medidas e Aplicações. [manuscrito] / Manoel Bernardes de Jesus. - 2016.
73 f.: il.

Orientador: Prof. Drª Lidiane dos Santos Monteiro Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2016.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Triângulos. 2. Trigonometria. 3. Áreas. 4. Construções Geométricas. 5. Teorema de Pitágoras. I. Lima, Drª Lidiane dos Santos Monteiro, orient. II. Título.

Dedicatória

A minha esposa Leila e aos meus filhos Lucas e Sofia pelo apoio e compreensão dos sacrifícios necessários.

A minha professora e orientadora Lidiane dos Santos Monteiro Lima pelos preciosos conhecimentos que contribuiram para o término deste trabalho.

Agradecimentos

Por tudo, agradeço a Deus, pelas suas infinitas graças, bençãos e misericódia para comigo.

Agradeço à minha esposa, Leila Cunha Gobo, pela compreensão dos sacrifícios necessários, pelo apoio e motivação, os quais me impeliram por todo esse período. Agradeço também por acreditar no meu potencial e na minha capacidade, contribuindo para que tudo isso tornasse realidade.

Agradeço aos meus filhos, Lucas Cunha Bernardes e Sofia Henrique Bernardes, objetivos da minha vida, pelas horas sacrificadas de lazer em prol dos meus estudos.

Agradeço a minha sogra Sônia Divina Gobo por sua preciosa ajuda em tudo, com sua presença em nosso lar.

Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por idealizar e implantar o PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), pela bolsa e pela oportunidade impar de fazer este curso. Agradeço também à SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e a UFG (Universidade Federal de Goiás) pela parceria com a CAPES contribuindo para a realização deste curso.

A cada um dos meus professores que contribuiram de forma grandiosa para o meu conhecimento, em especial, ao professor Dr. José Yunier Bello Cruz, que me ensinou como se estuda Matemática.

A minha orientadora, Professora Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima, por sua infinita paciência, pela contribuição e por todas as orientações tão preciosas para a confecção deste trabalho.

A meus colegas de curso por todos os momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos, em especial, as amigas Sílvia Cristina Dorneles de Morais e Gracielly da Silva Santana, pela amizade, pela companhia em nossos almoços e pelo apoio mútuo em momentos turbulentos durante o curso.

Por fim, a todos que colaboraram com esse momento tão importante da minha carreira e tão edificante da minha vida.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre Triângulos, seus conceitos e suas propriedades, as relações entre suas formas, medidas e áreas. Além da relação do Triângulo com a Trigonometria e as Construções Geométricas. Apresentamos o Teorema de Pitágoras com várias demonstrações relacionadas aos Triângulos.

Palavras-chave Triângulos, Trigonometria, Áreas, Construções Geométricas, Teorema de Pitágoras

Abstract

The aim of this paper is to present a study about Triangles, to study their concepts and their properties, the relations between their forms, mesures and areas, relation of Triangle with the Trigonometric and the Geometrics Builds. Besides to present Pythagoras' Theorem with many proof relates to Triangles.

Keywords Triangles, Trigonometric, Areas, Geometric Builds, Pythagoras' Theorem.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Euclides de Alexandria nos deixou um legado de suma importância ao organizar todo o conhecimento de geometria plana em sua época num tratado que ficou conhecido como *Elementos*. Todos os conceitos geométricos são de alguma forma direta ou indireta oriundos dos conceitos primitivos como ponto, reta e plano, assim como dos axiomas. Etimologicamente a palavra geometria significa medida da terra. Segundo Heródoto, historiador grego (sec. V a.C.) a justificativa para isto é que no Egito antigo os povos que habitavam as margens do rio Nilo sofriam com as suas periódicas enchentes, os impostos sobre a terra tinham que ser recalculados periodicamente, sendo estes proporcionais ao tamanho de cada lote do colono. Desta forma naturalmente foi necessário criar formas de se medir estas áreas, ou seja, medir a terra. Os estudos sobre geometria são milenares, não só dos povos egípcios como também dos povos babilônicos. Diversos povos que habitaram a região conhecida como Mesopotâmia por cerca de três milênios. Estudos históricos revelam que o conhecimento matemático destes povos superavam o conhecimento egípcio [9].

A geometria sintética foi então construída passo a passo a partir de conceitos primitivos e axiomas, chegando então aos inúmeros conceitos, teoremas, proposições, corolários e lemas, todos demonstrados de forma lógica e sistemática como se espera que deva ser na Matemática. Algumas destas demonstrações são elementares outras elaboradas, mas o relevante é que qualquer que seja o teorema, lema, proposição ou corolário, sua demonstração seja desprovida de falhas ou furos. Não importando qual o método de demonstração, seja direta, indireta, dedutiva, indutiva, absurdo, etc.

Esta obra se propõe a um estudo do elemento geométrico conhecido como triângulo. Diversos conceitos e definições relativos a triângulo são abordados, assim como diversos teoremas, proposições, lemas e corolários tanto quanto suas demonstrações, sendo algumas delas por mais de uma forma, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. Este em particular foi demonstrado pelo professor americano Elisha Scott Loomis (1852-1940) em 370 demonstrações [5], o mesmo classificou as demonstrações do Teorema de Pitágoras em dois tipos básicos, demonstrações algébricas, que se baseiam nas relações métricas nos triângulos retângulos e as demonstrações geométricas que são baseadas na comparação entre áreas.

No Capítulo 1, abordamos a forma triangular e suas propriedades inerentes, por se tratar de uma forma plana, esta parte é a mais densa, pois muitos dos elementos relativos ao triângulo são principalmente tratados nesta primeira parte. Nos capítulos seguintes abordamos o triângulo com suas medidas procurando relacionar suas propriedades com as medidas inerentes aos triângulos, como ângulos, lados e suas relações com áreas por exemplo. No entanto, não há uma rigidez entre o Capítulo 1 e os outros. Em muitos casos permeamos a análise da forma com a análise das medidas de um triângulo. Sem desmerecimento de um ou de outro, principalmente nas aplicações, nas quais sempre que necessário, recorremos aos teoremas, proposições, lemas e corolários que foram apresentados e são cruciais nas justificativas das aplicações. As aplicações por sua vez aparecem na forma de exercícios resolvidos.

Um questionamento natural a respeito desta obra é: Qual a relevância deste assunto? Por ser o polígono mais elementar, o triângulo já garante sua importância, pois qualquer outro polígono dentro da geometria euclidiana, pode ser decomposto em triângulos, ou seja, muitas das propriedades relativas a um triângulo podem ser estendidas a outros polígonos, como é o caso da soma dos ângulos internos de um polígono, a qual pode ser demonstrada pelo método indutivo tendo por caso base o triângulo, cujo soma dos ângulos internos pode ser demonstrado e uma de suas demonstrações é apresentada nesta obra. No estudo da geometria o triângulo ocupa um papel primordial, pois o polígono triângulo e suas propriedades são pilares em inúmeras demonstrações matemáticas principalmente na geometria.

A área do paralelogramo é tratada como um teorema, o qual não é demonstrado, pois foge ao escopo desta obra. O teorema da área do paralelogramo é base para demonstrar a área de um triângulo, assim como ocorre com o volume de um prisma, pois o volume da pirâmide é uma conseqüência do volume de um prisma de mesma base e altura, para mais detalhes a respeito do volume de sólidos geométricos o leitor poderá conhecer o princípio de Cavalieri na obra [9].

No Capítulo 2 e seguintes abordamos os triângulos e suas medidas, suas relações e suas propriedades. Nestes também aplicamos conhecimentos da Geometria Analítica por meio dos exercícios resolvidos, e outras questões relacionadas aos triângulos, como as relações trigonométricas. Mais uma vez o Teorema de Pitágoras é analisado nesta parte, pois o mesmo possui inúmeras demonstrações, tanto geométricas como algébricas.

Segundo [8], o ensino da Matemática deve constituir-se de três componentes básicas, chamadas por Conceituação, Manipulação e Aplicações. Seguimos esta vertente nesta obra, apresentamos todas as definições necessárias para exprimir os conceitos relativos a triângulos, demonstramos teoremas, lemas, proposições e corolários diretamente relacionados a triângulos e exibimos exemplos na forma de exercícios resolvidos, nos quais, aplicamos sempre que necessário, os teoremas, lemas, proposições e corolários apresentados.

A matemática é um saber por excelência abstrato, que por tantas vezes é vista como difícil de entender e aprender por nossos alunos. Um dos grandes desafios nosso enquanto professores de Matemática, é tornar possível uma abordagem concreta dos conteúdos matemáticos, entretanto, sem tratar de forma muito simplista os conceitos e definições. O rigor matemático e sua abstração são propulsores do desenvolvimento do raciocínio e do pensamento lógico. Segundo [12], um dos fatores que contribuem para que a Matemática seja considerada difícil vem da forma como é ensinada. Logo surge a pergunta natural, qual a forma correta de se ensinar Matemática? Talvez esta pergunta possua inúmeras respostas, mas acredito que o processo no qual se tenha a sequência: Definições, Teoremas, Demonstrações e Aplicações, seja eficiente no ensino da Matemática. Apresentamos nos capítulos esta vertente. Conceitos sempre que necessários, teoremas e proposições com suas demonstrações e aplicações por meio de exercícios resolvidos.

A presente obra finaliza com o Capítulo 6 dedicado às construções geométricas com triângulos. Segundo [13], as construções geométricas com régua e compasso já aparecem no século V a.C., ou seja na época dos pitagóricos, e foram importantes no desenvolvimento da Matemática grega. Nesta época resolver era sinônimo de construir, ou seja, muitos problemas algébricos eram resolvidos por meio de construções geométricas nas quais se usava basicamente régua e compasso. Por exemplo, resolver a equação $ax = bc$ significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulos de dimensões b e c.

Ainda segundo [13], as construções geométricas permanecem imunes ao tempo, sendo tão útil hoje como em qualquer outra época para a educação do jovem estudante de Matemática. Não há um método fácil para se aprender Matemática ou qualquer outra ciência. A segurança que se pode adquirir em um assunto é resultado da prática, ou seja, da experiência, da repetição onde o insucesso tem tanto valor quanto o sucesso.

As construções geométricas permitem visualizar processos algébricos muitas vezes difíceis de serem assimilados por nossos estudantes. Representar números irracionais na reta dos números reais, por exemplo $\sqrt{2}$, se torna mais concreto quando representado por meio de construções geométricas com régua e compasso.

Muitas destas construções geométricas são justificadas usando-se conhecimentos das propriedades dos triângulos. Portanto, construções geométricas bem trabalhadas reforçam os conceitos relativos à geometria plana e nesta proposta, visa reforçar importantes conceitos relacionados aos triângulos.

Capítulo 1

Primeiras Definições

Começamos este capítulo apresentando algumas importantes definições relativas a triângulos e seus elementos. No entanto, outras definições aparecem em outros capítulos sempre que forem necessárias para esclarecer qualquer afirmação referindo-se a algum elemento que não fora citado. Todas as ideias apresentadas neste capítulo foram baseadas em [7], [9] e [10].

Admitimos neste, os conhecimentos dos axiomas da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, por exemplo, os seguintes:

i. Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta (axioma de incidência);

ii. Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existe uma e somente uma reta paralela à reta r que passa por P (axioma das paralelas);

iii. Por três pontos do espaço não situados numa mesma reta passa um e somente um plano (axioma de incidência).

Observação 1.1. *Três pontos não colineares, determinam um único triângulo.*

Como mencionado anteriormente, temos que três pontos não colineares determinam um único plano. Logo qualquer triângulo sempre está contido num plano. Aqui ângulos são denotados por letras gregas minúsculas ou por um ponto conhecido do seu vértice. Polígonos são denotados pelos seus vértices, por exemplo, dados os pontos A, B e C não colineares temos então o triângulo ABC.

Definição 1.1. *Dado um triângulo determinado pelos pontos não colineares A, B e C, os segmentos de reta AB, BC e AC são seus lados.*

Muitas vezes nos referimos aos lados de um triângulo através de suas medidas, por exemplo, dado um triângulo de lados AB, BC e AC podemos ter lado AB de medida c, lado BC de medida a e lado AC de medida b.

Definição 1.2. *Dado um triângulo determinado por três pontos não colineares A, B e C, estes pontos são chamados de vértices do triângulo.*

Estes nada mais são que os pontos de intersecção das retas que contém seus lados, ou seja, a reta por AB e a reta por AC se interceptam no ponto A ou vértice A do triângulo ABC.

Definição 1.3. *Chamamos de ângulo as regiões ou aberturas formadas por duas semirretas de mesma origem.*

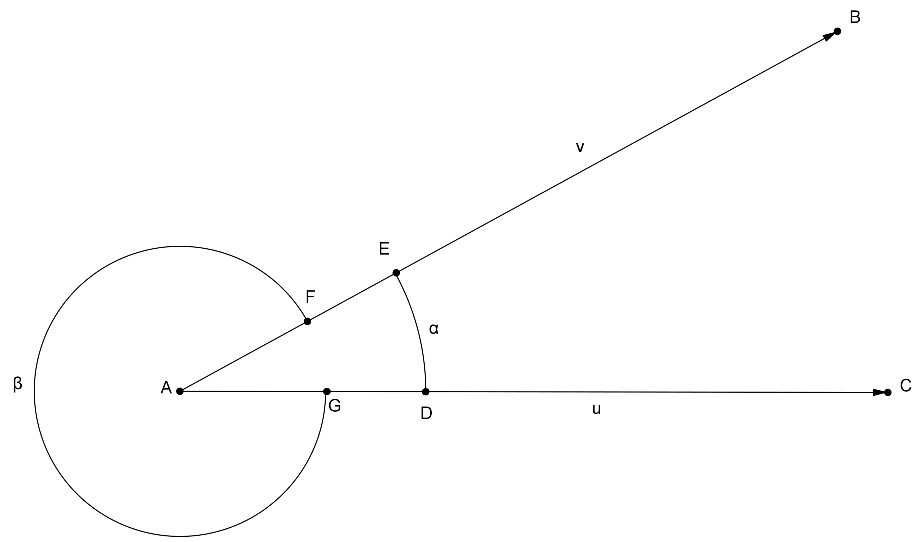

Figura 1.1: Referente à Definição 1.3.

Consideramos em muitos contextos apenas a região convexa, Figura 1.1, representada pela região α. Ainda na Figura 1.1 temos ângulo α ou ângulo $C\hat{A}B$ ou simplesmente ângulo $\hat{A}$, ficando implícito que é o ângulo formado no vértice A pelas semirretas AC e AB.

Definição 1.4. *Ângulos internos e externos de um triângulo:*

a) *Chamamos de ângulos internos de um triângulo as aberturas formadas pelas semirretas de mesma origem que contem dois de seus lados;*

b) Chamamos de ângulos externos de um triângulo os ângulos suplementares de seus ângulos internos.

Na Figura 1.2, α, β e γ são os ângulos internos do triângulo ABC enquanto θ é um dos seus ângulos externos. Portanto, todo triângulo é constituído por três lados e três ângulos internos.

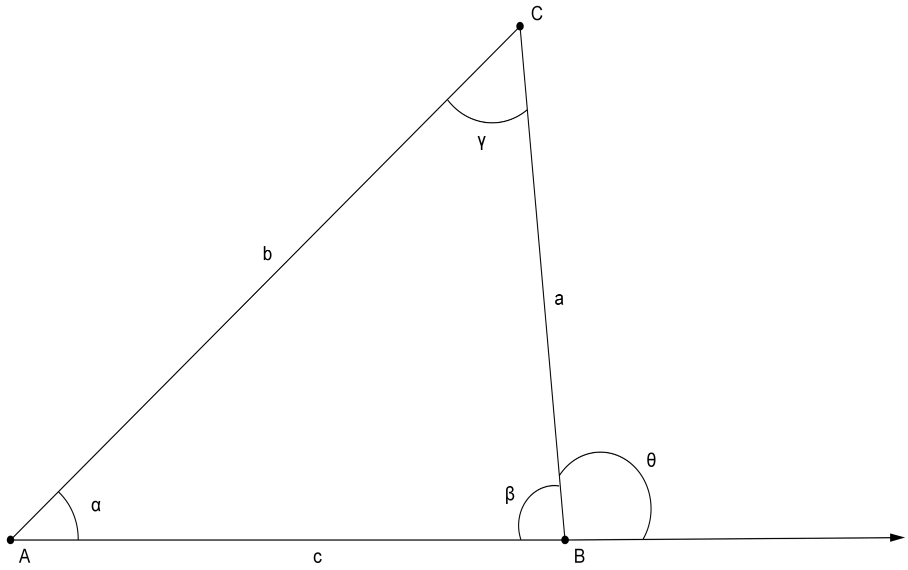

Figura 1.2: Referente à Definição 1.4.

Definição 1.5. *Chamamos de perímetro de um triângulo a soma das medidas de seus lados.*

Denotamos a medida do perímetro de um triângulo por $2p$ assim sendo, p é a medida do semiperímetro. Desta forma dado um triângulo de lados cujas medidas são a, b e c, seu perímetro será dado por $2p = a + b + c$ e seu semiperímetro por

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Definição 1.6. *Dado um triângulo de lados AB, BC e AC este é denominado:*

i. Equilátero, se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$;

ii. Isósceles, se ao menos dois dentre os lados AB, BC, AC forem iguais;

iii. Escaleno, se $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$.

Observemos que na definição do triângulo quanto aos lados podemos afirmar que todo triângulo eqüilátero é isósceles, mas a recíproca não é verdadeira.

Definição 1.7. *Dado um triângulo de ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, este é denominado:*

i. Triângulo Acutângulo, se $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ forem menores que $90°$;

ii. Triângulo Retângulo, se um dos seus ângulos internos for igual a $90°$;

iii. Triângulo Obtusângulo, se um dos seus ângulos internos for maior que $90°$.

O Axioma das Paralelas motiva o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo mede $180°$.*

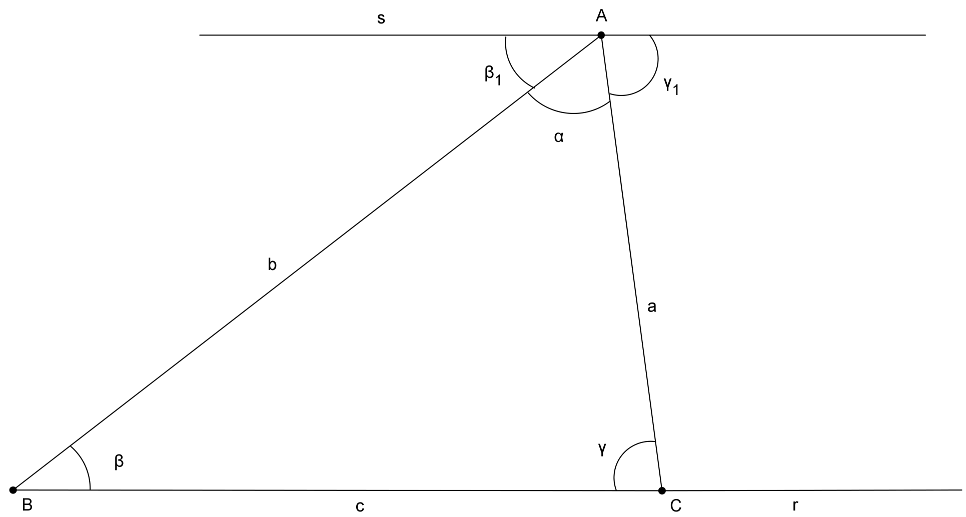

Figura 1.3: Referente ao Teorema 1.1.

Demonstração: De fato, seja ABC um triângulo de base BC e ângulos internos α, β e γ. Considere uma reta r que contém o lado BC e seja s uma reta paralela a reta r passando pelo vértice A. Pelo axioma das paralelas, s existe e é única. Os ângulos β

e β_1 são alternos internos e portanto são iguais. Assim como os ângulos γ e γ_1. Como $\beta_1 + \alpha + \gamma_1 = 180°$, temos que $\alpha + \gamma + \beta = 180°$. □

Dados uma reta r e um ponto A fora desta reta há uma única reta s perpendicular a r passando por A, uma demonstração sobre este fato pode ser encontrada em [1]. Dizemos que o ponto A', intersecção de r e s, é a *projeção ortogonal* de A sobre r. A seguir definimos a altura de um triângulo.

Definição 1.8. *Dado um triângulo de vértices A, B e C, chamamos de altura do triângulo relativamente ao lado BC, o segmento que une o vértice A à sua projeção ortogonal na reta determinada por B e C.*

Observe que em todo triângulo temos três alturas, uma relativa a cada lado. Outro fato importante é que a projeção do vértice A por exemplo, sobre a reta BC pode está entre B e C, após B na semirreta CB ou após C na semi-reta BC, ou inclusive ser coincidente com B ou C. Veja Figuras 1.4, 1.5 e 1.6.

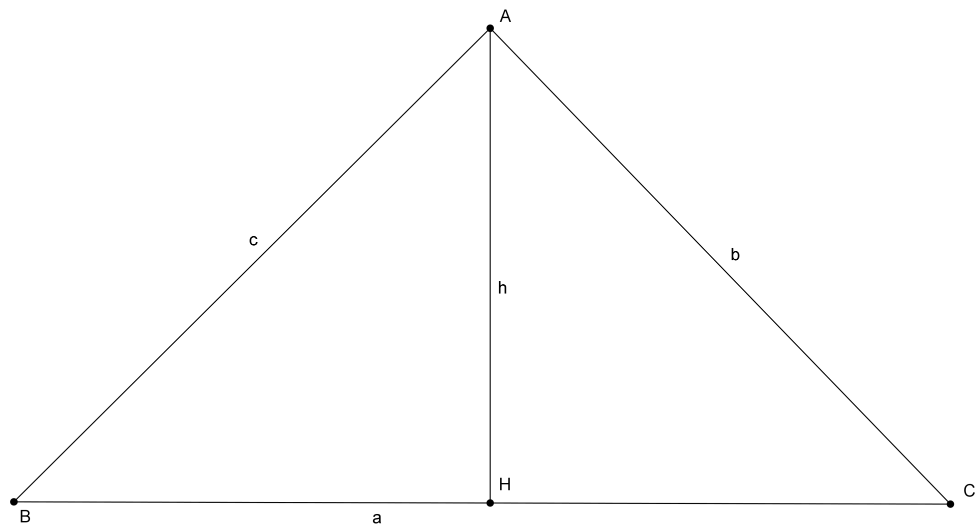

Figura 1.4: Referente à Definição 1.8.

Definição 1.9. *Dado um triângulo de vértices A, B e C, chamamos de mediana relativamente ao lado BC o segmento que une o vértice A ao ponto médio do lado BC.*

Portanto todo triângulo possui três medianas. Mediana por A relativamente ao lado BC, mediana por B relativamente ao lado AC e mediana por C relativamente ao lado AB.

Definição 1.10. *Chamamos de bissetriz de um ângulo de origem A formado pela semirretas AB e AC a semirreta AP que divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois ângulos iguais, ou seja, $B\hat{A}P = C\hat{A}P$.*

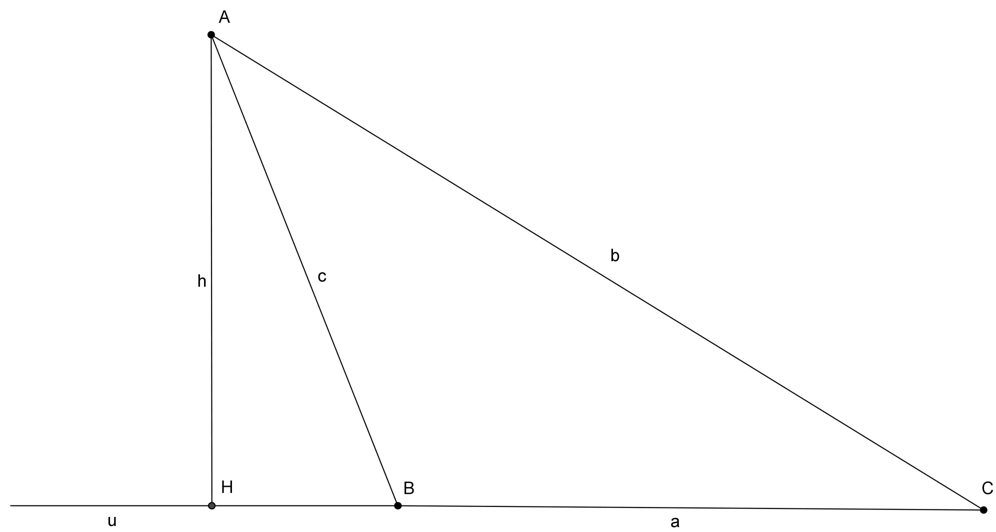

Figura 1.5: Referente à Definição 1.8.

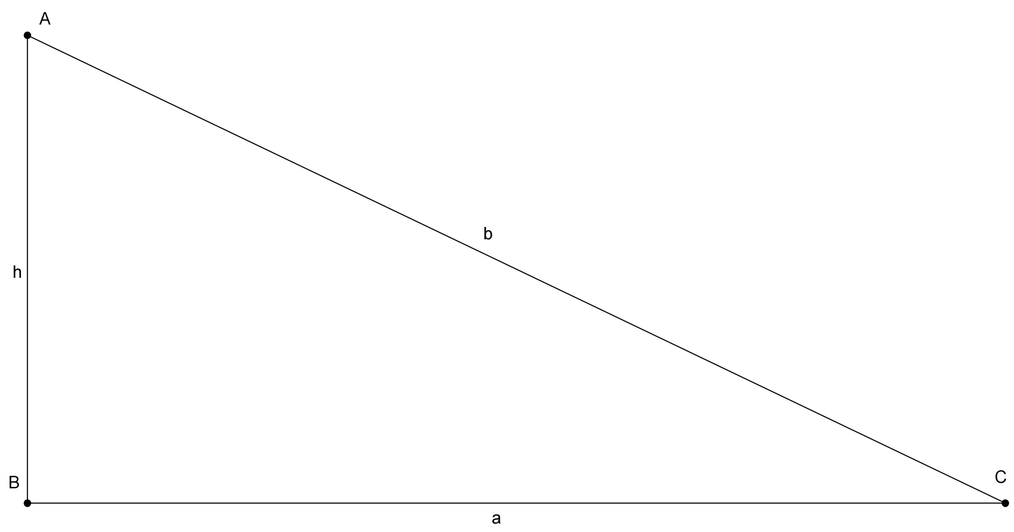

Figura 1.6: Referente à Definição 1.8.

Definição 1.11. *Dado um triângulo de vértices A, B e C, chamamos de bissetriz relativamente ao lado BC, o segmento AP tal que a semirreta AP divide o ângulo interno $B\hat{A}C$ em dois ângulos iguais e o ponto P está sobre o lado AB.*

Temos então que em todo triângulo existem três bissetrizes por seus ângulos internos.

Definição 1.12. *Dado um triângulo de vértices A, B e C, chamamos de triângulo medial do triângulo ABC o triângulo MNP onde M, N e P são os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente.*

Definição 1.13. *Dado um triângulo de vértices A, B e C chamamos de uma base média do triângulo ABC o segmento que une dois dos pontos médios de seus lados.*

Da definição anterior, temos que, em um triângulo qualquer podemos considerar três bases médias.

Definição 1.14. *Dado um triângulo não retângulo, dizemos que o triângulo formado pelos pés de suas alturas é o triângulo órtico de ABC.*

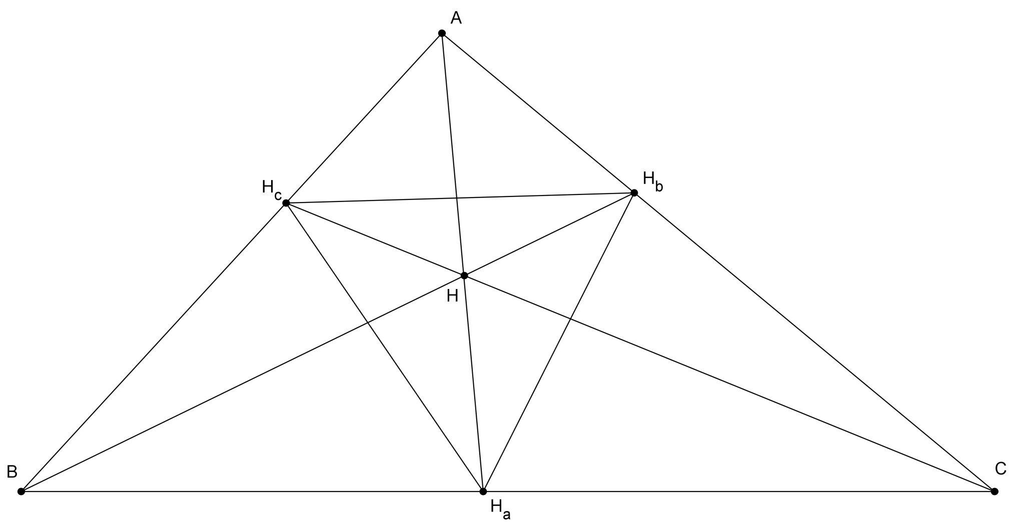

Figura 1.7: O Triângulo Órtico $H_aH_bH_c$ de ABC

Circuncentro, ortocentro, incentro, ex-incentro e baricentro são chamados pontos notáveis de um triângulo, essas designação têm haver com importantes propriedades relacionadas a eles. Vejamos a seguir o conceito de cada um deles.

Definição 1.15. *Chamamos de baricentro de um triângulo o ponto de intersecção de suas medianas.*

Definição 1.16. *Chamamos de circuncentro de um triângulo o ponto de intersecção das mediatrizes por seus lados.*

Neste ponto cabe destacar que mediatriz de um segmento é a reta perpendicular no ponto médio deste segmento. *Mediatriz de um triângulo* é a reta perpendicular a um de seus lados no ponto médio. Portanto por um triângulo dado podemos traçar três mediatrizes.

Definição 1.17. *Chamamos de incentro de um triângulo o ponto da intersecção das bissetrizes de seus ângulos internos. Chamamos de ex-incentro de um triângulo o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos externos por um de seus lados.*

Definição 1.18. *Chamamos de ortocentro de um triângulo o ponto de intersecção de suas alturas.*

Na Figura 1.7 o ponto H representa o ortocentro do triângulo ABC.

Capítulo 2

Congruência de Triângulos

No estudo da geometria plana muitas vezes deparamos com situações nas quais comparamos dois ou mais triângulos, algumas vezes eles podem ser semelhantes e outras parecem iguais. A partir de um número mínimo de informações sobre estes seria muito importante poder estabelecer a relação de semelhança ou congruência entre eles. Isto é possível e são conhecidos como casos de congruência e casos de semelhança entre triângulos. As ideias apresentadas neste capítulo se baseiam em [1], [9], [10] e [11].

O conjunto de transformações geométricas que preservam a forma, ângulos, paralelismo e a distância, são chamadas de isometrias. As translações, rotações e reflexões são base para os casos de congruência. De fato, duas formas planas, são congruentes, se por um número finito de transformações geométricas isométricas usando rotações, translações e ou reflexões pudermos sobrepor uma a outra. Para mais detalhes sobre transformações geométricas isométricas, veja [6].

Definição 2.1. *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.[1].*

Vamos referir a congruência entre triângulo usando o símbolo $\equiv$ e para referir a congruência entre lados e entre ângulos simplificamos usando o símbolo $=$. Sendo que nestes casos a congruência representa uma igualdade de suas medidas, ou seja, dois lados congruentes, significa dois lados com a mesma medida, da mesma forma para ângulos e outras medidas relacionadas aos triângulos.

Axioma 2.1. *Considere os triângulos ABC e EFG. Se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e*

$\hat{A} = \hat{E}$*, então,* $ABC \equiv EFG$*.*

Este axioma é conhecido como o primeiro caso de congruência de triângulos (caso LAL). A seguir usamos o Axioma 2.1 para deduzir outros casos de congruências de triângulos.

Teorema 2.1. *Dados dois triângulos* ABC *e* EFG*, se* $\overline{AB} = \overline{EF}$*,* $\hat{A} = \hat{E}$ *e* $\hat{B} = \hat{F}$*, então,* $ABC \equiv EFG$*. (Caso ALA)*

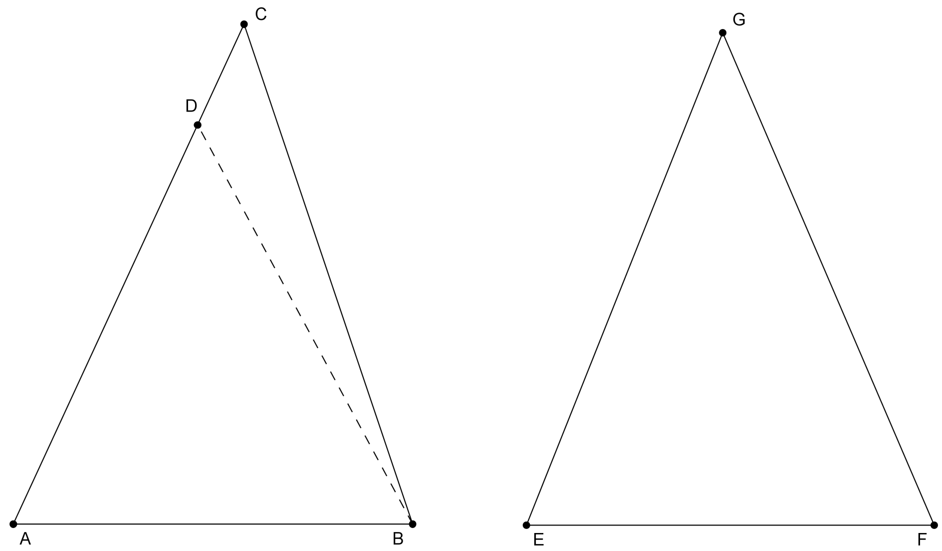

Figura 2.1: Referente ao Teorema 2.1.

Demonstração. De fato, sejam ABC e EFG dois triângulos, tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja D um ponto da semi-reta AC, tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$. Comparando os triângulos ABD e EFG temos que, $\overline{AD} = \overline{EG}$, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, concluímos, pelo Axioma 2.1, que $ABD \equiv EFG$. Como conseqüência, tem-se que $A\hat{B}D = \hat{F}$. Mas, por hipóstese, $\hat{F} = A\hat{B}C$. Logo, $A\hat{B}D = A\hat{B}C$. Portanto as semirretas BD e BC coincidem. Logo o ponto D coincide com o ponto C , ou seja, coincidem os triângulos ABD e ABC. Como já provamos que $ABD \equiv EFG$, então $ABC \equiv EFG$. $\square$

Corolário 2.1. *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao* *ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Este caso de congruência é conhecido como LAAo. Isto é, lado, ângulo e ângulo oposto ao lado.*

Demonstração. De fato sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$. Da condição que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, temos que

$$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - \hat{A}' - \hat{B}' = \hat{C}'.$$

Portanto, para os triângulos em questão, temos que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Pelo Teorema 2.1, tais triângulos são congruentes.

□

Proposição 2.1. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Vamos comparar o triângulo ABC com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira: $A \to A$, $B \to C$ e $C \to B$. Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\hat{A} = \hat{A}$, segue pelo Axioma 2.1 que esta correspondência define uma congruência. Como conseqüência temos que $\hat{B} = \hat{C}$.

□

Corolário 2.2. *Os ângulos internos de um triângulo eqüilátero são todos iguais.*

Demonstração. Para tal, basta observamos que todos os lados de um triângulo eqüilátero podem ser vistos como bases do mesmo, considerado como triângulos isósceles, logo pela Proposição 2.1 podemos concluir então que no triângulo eqüilátero de vértices A, B e C que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

□

A proposição a seguir é a recíproca da anterior, vejamos.

Proposição 2.2. *Se, em um triângulo ABC, tem-se dois ângulos congruentes, então, o triângulo é isósceles.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $\hat{B} = \hat{C}$. Novamente vamos comparar o triângulo ABC com ele próprio, fazendo corresponder os vértices como na prova da proposição anterior, isto é: $A \to A$, $B \to C$ e $C \to B$. Como $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ por hipótese, e $\overline{BC} = \overline{CB}$, segue pelo Teorema 2.1 que esta correspondência define uma congruência. Como conseqüência $\overline{AB} = \overline{BC}$. □

Observação 2.1. *Chamamos de base de um triângulo o lado ao qual consideramos a altura relativa a este.*

Proposição 2.3. *Em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.*

Demonstração. Lembrando que neste caso estamos considerando como base o lado diferente. Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB. Seja CD sua mediana relativa à base e considere os triângulos ADC e BDC. Observe que $\overline{AD} = \overline{BD}$, pois CD é mediana, $AC = BC$ por hipótese, o triângulo é isósceles com base AB e $\hat{A} = \hat{B}$ pela Proposição 2.1. Logo, pelo Axioma 2.1, temos $ADC \equiv BCD$. Segue daí, que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A = B\hat{D}C$. A primeira congruência nos diz que CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}D$. Como $A\hat{D}B$ é um ângulo raso, isto é mede 180°, e $C\hat{D}A + B\hat{D}C = A\hat{D}B$, concluimos que $C\hat{D}A + B\hat{D}C = 180°$. Como já sabemos que $C\hat{D}A = B\hat{D}C$, então, concluímos que $C\hat{D}A = B\hat{D}C = 90°$, o que significa que CD é a altura relativa a base AB.

□

Observação 2.2. *Em relação a Proposição 2.3, a mesma poderia se apresentar de duas outras formas, as quais são:*

(1) Em um triângulo isósceles a altura relativa à base é também bissetriz e mediana;

(2) Em um triângulo isósceles a bissetriz relativa ao vértice oposto a base é também mediana e altura.

Vamos então as demonstrações destas outras proposições.

Demonstração

(1). Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB. Seja CD sua altura relativa à base, considere o triângulos ADC e BDC. Como $C\hat{D}A$ é igual a $C\hat{D}B$ pois CD é perpendicular a AB e por hipótese $C\hat{A}D$ é igual a $C\hat{B}D$ e CD é lado comum dos triângulos ADC e BDC temos que estes são congruentes pelo Corolário 2.1, logo $B\hat{C}D$

é igual $A\hat{C}D$ portanto CD é bissetriz de $A\hat{C}B$, assim como $\overline{AD} = \overline{BD}$ portanto CD é mediana de AB.
(2). Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB. Seja CD sua bissetriz pelo vértice oposto à base, considere os triângulos ADC e BDC. Temos então que $A\hat{C}D$ é igual $B\hat{C}D$ pois CD é bissetriz pelo vértice C, $C\hat{A}D$ é igual a $C\hat{B}D$ por hipótese e $\overline{AC} = \overline{BC}$ também por hipótese, logo pelo Teorema 2.1 os triângulos ADC e BDC são congruentes, ou seja $\overline{AD} = \overline{BD}$ portanto CD é mediana relativa a AB. Como $A\hat{D}C = B\hat{D}C$ e $A\hat{D}C + B\hat{D}C = 180°$ temos que $A\hat{D}C = B\hat{D}C = 90°$, portanto CD é altura de ABC relativa a base AB.

□

Teorema 2.2. *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Demonstração. De fato, seja ABC um triângulo. Na semirreta CA marque um ponto D, tal que A esteja entre C e D.

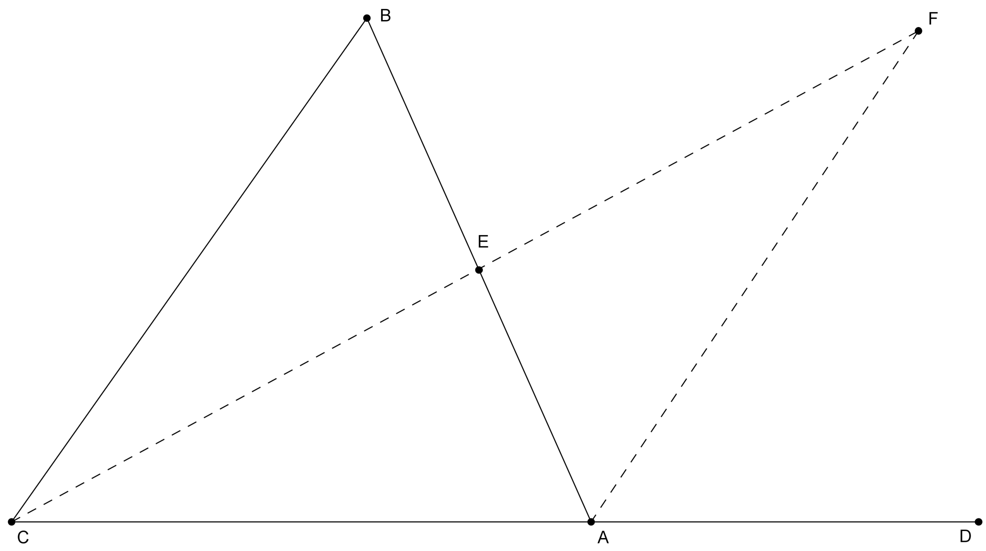

Figura 2.2: Referente ao Teorema 2.2.

Temos que mostrar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Considere o ponto médio E do segmento AB. Na semirreta CE, marque um ponto F, tal que $CE = EF$. Trace o segmento AF. Os triângulos BEC e AEF são congruentes pelo caso LAL, pois

$\overline{BE} = \overline{AE}$, pois E é ponto médio de AB, $\overline{CE} = \overline{EF}$ por construção e $C\hat{E}B = F\hat{E}A$ pois são opostos pelo vértice. Logo $\hat{B} = E\hat{A}F$, como a semirreta AF divide o ângulo $B\hat{A}D$, então, $E\hat{A}F < B\hat{A}D$, ou seja $\hat{B} < B\hat{A}D$. De forma semelhante considere agora o ponto médio E do segmento CA. Na semirreta BE marque o ponto F tal que BE seja igual a EF. Trace a semirreta FA e marque o ponto F' tal que A esteja entre F e F'. Os triângulos CEB e FEA são congruentes pelo caso LAL pois $\overline{CE} = \overline{EA}$ pois E é ponto médio de CA, $\overline{BE} = \overline{EF'}$ por construção e $B\hat{E}C = F'\hat{E}A$ pois são opostos pelo vértice. Logo $\hat{C} = F'\hat{A}E$, como $F\hat{A}E = D\hat{A}F'$ pois são opostos pelo vértice, temos que $\hat{C} = D\hat{A}F'$, mas a semirreta AF' divide $D\hat{A}B$ ou seja $D\hat{A}F' < D\hat{A}B$ portanto $\hat{C} < D\hat{A}B$.

□

O teorema a seguir é conhecido como Congruência de Triângulos Retângulos. Através do mesmo podemos decidir se dois triângulos retângulos são congruentes ou não a partir de um número mínimo de informações sobre estes. Vejamos.

Teorema 2.3. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são em $\hat{C}$ e $\hat{C}'$. Se alguma das condições a seguir ocorrer, então, os dois triângulos são congruentes:*

(1) $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ *e* $\hat{A} = \hat{A}'$, *(cateto e ângulo oposto);*

(2) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ *e* $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, *(hipotenusa e cateto);*

(3) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ *e* $\hat{A} = \hat{A}'$ *(hipotenusa e ângulo agudo).*

Demonstração

(1). Nossas hipóteses são as seguintes: $\hat{C} = \hat{C}'$ (reto), $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\hat{A} = \hat{A}'$. Para provarmos que ABC e $A'B'C'$ são congruentes, marquemos um ponto D sobre a semirreta CA de modo que $\overline{CD} = \overline{C'A'}$. Os triângulos (CDB) e $(C'A'B')$ são congruentes, pelo caso LAL. (Figura 2.2).

Logo $C\hat{D}B = \hat{A}'$, mas por hipótese temos que $C\hat{A}B = \hat{A}'$, assim $C\hat{D}B = C\hat{A}B$. Portanto, os pontos A e D são coincidentes. De fato, se tal não ocorresse, A, D e B forma um triângulo em que os ângulos $C\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são ângulo externo e interno não adjacente. Portanto, a igualdade anterior não ocorre de acordo como o Teorema 2.2. Então, A e D coincidem e logo $CAB \equiv CDB$. Como $CDB \equiv C'A'B'$, temos que $CAB \equiv C'A'B'$.

(2). Semelhante ao caso anterior marque um ponto D na semirreta CA de modo que $C\hat{B}D = C'\hat{B}'A'$. Logo os triângulos CBD e $C'A'B'$ são congruentes pelo caso ALA (Teorema 2.1). Então $C'\hat{A}'B' = C\hat{D}B$, $\overline{A'B'} = \overline{BD}$, $\overline{C'A'} = \overline{CD}$. O triângulo DBA é isósceles de base AD, logo $C\hat{D}B = C\hat{A}B$. Mas $C\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são ângulo interno e externo não adjacente portanto a igualdade anterior ocorre se, e somente se o ponto D coincide com o ponto A. Portanto $CAB \equiv C'A'B'$.
(3). Por hipóstese temos $\hat{A} = \hat{A}'$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\hat{C} = \hat{C}' = 90°$. Como

$$\hat{A} + \hat{C} + \hat{B} = 180° = \hat{A}' + \hat{C}' + \hat{B}',$$

temos que $\hat{B} = \hat{B}'$. Pelo caso ALA de congruência de triângulos, pois $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, temos que $ABC \equiv A'B'C'$.

□

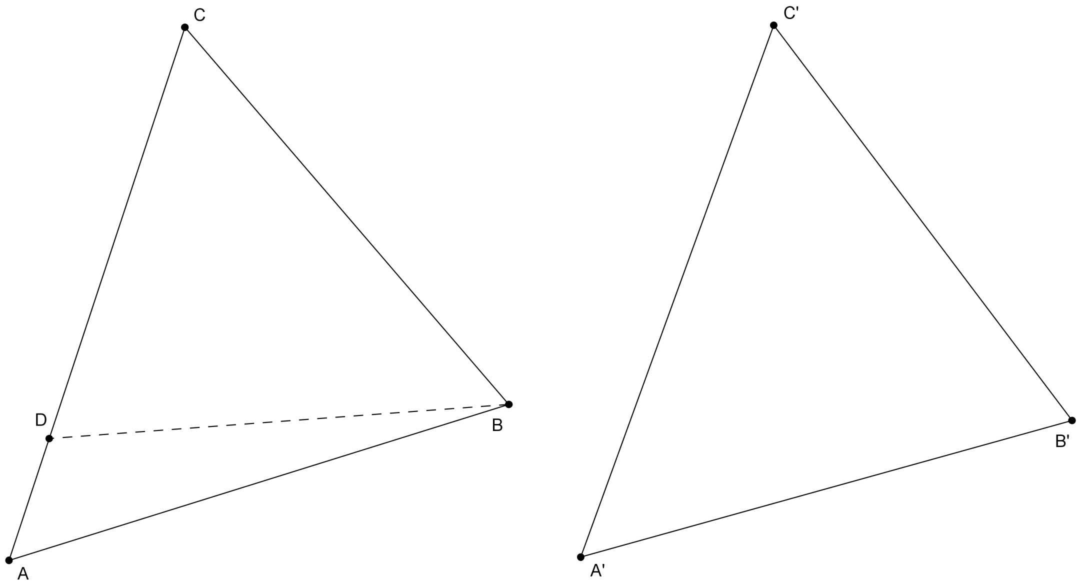

Figura 2.3: Referente ao Teorema 2.3.

Teorema 2.4. *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então, os triângulos são congruentes. (Caso LLL).*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos, tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$.

Construamos a partir da semirreta AB e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo $\hat{E}$. No lado deste ângulo que não contém o ponto B, marquemos um pondo D, tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$, liguemos D a B. Como $\overline{AB} = \overline{EF}$, por hipótese e $\overline{AD} = \overline{EG}$, e $D\hat{A}B = \hat{E}$, por construção, então, $(ABD) \equiv (EFG)$. Tracemos o segmento CD. Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG} = \overline{BC}$, então, os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$ e, logo, que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$.
Mas então, pelo Axioma 2.1, concluímos que $ABD \equiv ABC$. Como já tínhamos provado que $ABD \equiv EFG$, podemos concluir que $ABC \equiv EFG$.

□

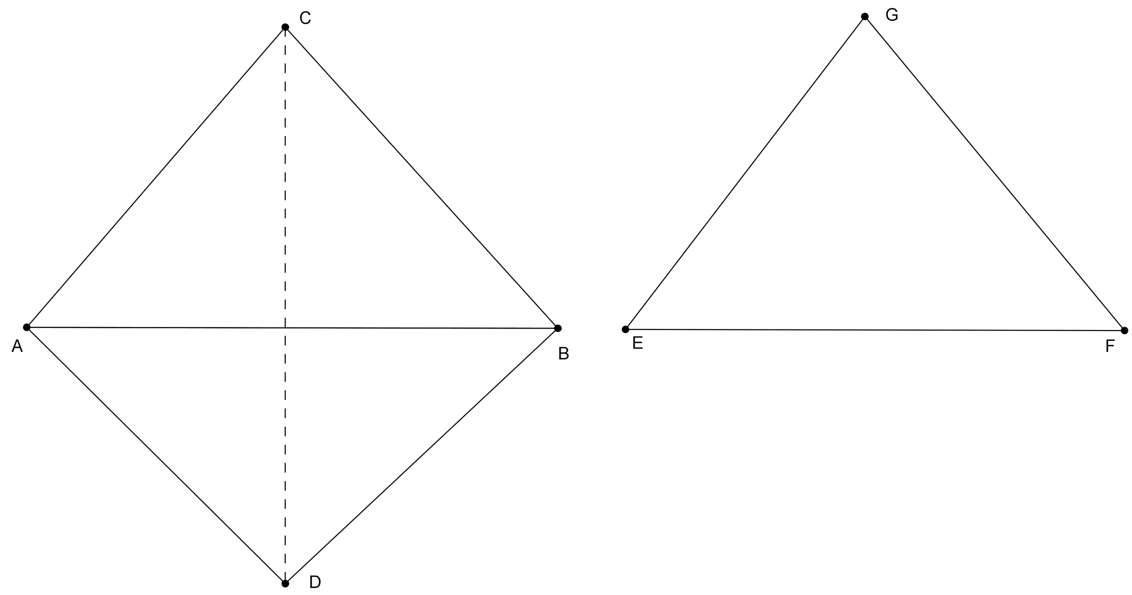

Figura 2.4: Referente ao Teorema 2.3.

Proposição 2.4. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que* $180°$.

Demonstração. Podemos provar esta proposição usando o teorema anterior, seja ABC um triângulo e seja θ o ângulo externo deste triângulo com vértice em C. Pelo teorema anterior temos que $\theta > \hat{B}$. Como θ e $\hat{C}$ são suplementares, ou seja $\theta + \hat{C} = 180°$, temos que $\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} = 180°$.

□

Corolário 2.3. *Todo triângulo possui, pelo menos, dois ângulos internos agudos.*

Demonstração. De fato, se um triângulo possuísse, pelo menos, dois ângulos internos não agudos, sua soma seria maior ou igual a $180°$, o que contradiz a proposição anterior.

Proposição 2.5. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então, seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração. A primeira parte da proposição é uma conseqüência imediata das Proposições 2.1 e 2.2. De acordo com estas, se em um triângulo há dois lados congruentes, também há dois ângulos congruentes e vice-versa. A contrapositiva desta seria se em um triângulo há dois ângulos diferentes há dois lados não congruentes e vice-versa. Para a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $BC < AC$, marquemos na semirreta AC um ponto D tal que $\overline{CD} = \overline{BC}$. Como por hipótese $BC < AC$, então o ponto D pertence ao segmento AC, como conseqüência a semirreta BD divide o ângulo $C\hat{B}A$. Logo temos que $C\hat{B}A > C\hat{B}D$, mas $C\hat{B}D = C\hat{D}B$ pois o triângulo CBD é isósceles por construção. E $C\hat{D}B > C\hat{A}B$, pois $C\hat{D}B$ é ângulo externo do triângulo BDA, portanto $C\hat{B}A > C\hat{D}B > C\hat{A}B$ ou seja $C\hat{B}A > C\hat{A}B$.

□

Um resultado que podemos considerar como recíproca da proposição anterior é a proposição a seguir.

Proposição 2.6. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então, os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Demonstração. A primeira parte da proposição é uma conseqüência imediata das Proposições 2.1 e 2.2. Para a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$. Observe que existem três possibilidades: $\overline{BC} < \overline{AC}$, $\overline{BC} > \overline{AC}$ e $\overline{BC} = \overline{AC}$. Se $\overline{BC} > \overline{AC}$, então, pela proposição anterior, deveríamos ter $C\hat{A}B > C\hat{B}A$, o que não é possível pois contraria nossa hipótese. Do mesmo modo, se ocorresse $\overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo seria isósceles e $C\hat{A}B = C\hat{B}A$, que também contraria nossa hipótese. Logo, deve ocorrer $\overline{BC} < \overline{AC}$.

□

Teorema 2.5. *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC, marquemos um ponto D na semirreta AB, de modo que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. (Figura 2.5)

Segue-se que $\overline{BD} = \overline{CB}$ e, portanto, o triângulo BCD é isósceles com base CD. Logo, temos $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Como B está entre A e D por construção, então $B\hat{C}D < A\hat{C}D$. Portanto no triângulo ACD tem-se $A\hat{D}C < A\hat{C}D$. Logo, pela Proposição 2.5, $\overline{AC} < \overline{AD}$, ou seja, $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Os casos $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$ e $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$ são demonstrados de forma semelhante.

□

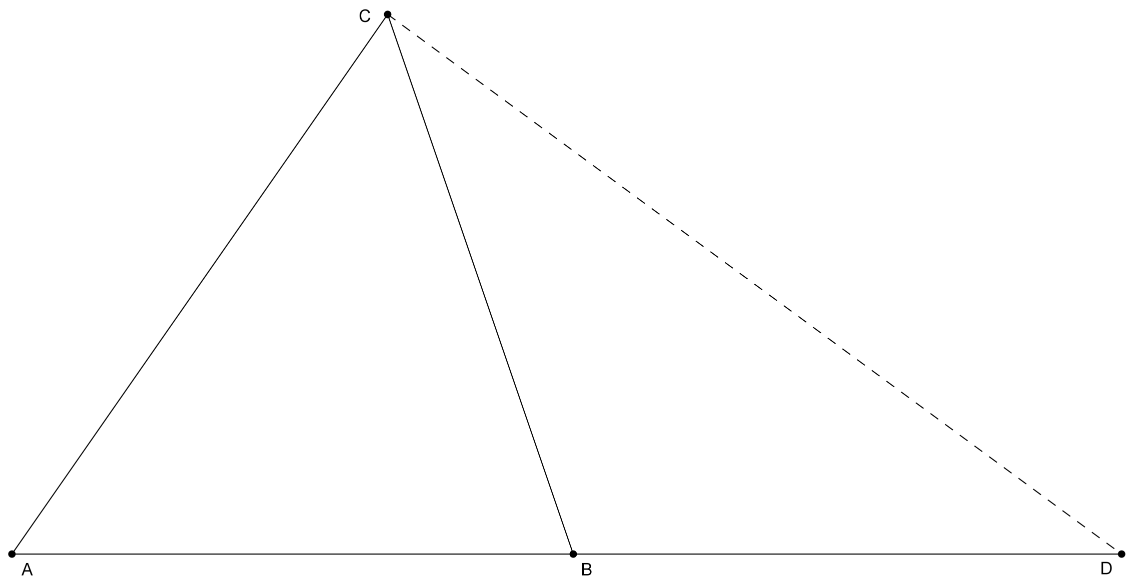

Figura 2.5: Referente ao Teorema 2.5.

O teorema anterior também é conhecido como Desigualdade Triangular, segundo [1], esta desigualdade é a única restrição para que se possa construir um triângulo com comprimentos dos lados pré-determinados.

Proposição 2.7. *Seja ABC um triângulo qualquer. Se MN é a base média de ABC relativa a BC, então $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB traçarmos a paralela ao lado BC, então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N. Além disso, em qualquer um dos casos acima, temos*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Demonstração. Seja M' sobre a semirreta MN tal que $\overline{MN} = \overline{NM'}$. (Figura 2.6)

Como N é o ponto médio de AC e $A\hat{N}M = C\hat{N}M'$ pois são ângulos opostos pelo vértice, os triângulos AMN e $CM'N$ são congruentes por LAL. Portanto, $\overline{M'C} = \overline{MA}$ e $M'\hat{C}N = M\hat{A}N$, segue que $\overleftrightarrow{M'C} \parallel \overleftrightarrow{AM}$. Assim, $\overline{BM} = \overline{AM} = \overline{M'C}$ e $\overleftrightarrow{BM} = \overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{M'C}$. Tendo dois lados opostos iguais e paralelos o quadrilátero $MBCM'$ é um paralelogramo. Como em todo paralelogramo os lados opostos são iguais e paralelos, e portanto temos $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MM'}$ e $\overline{BC} = \overline{MM'} = 2\overline{MN}$.

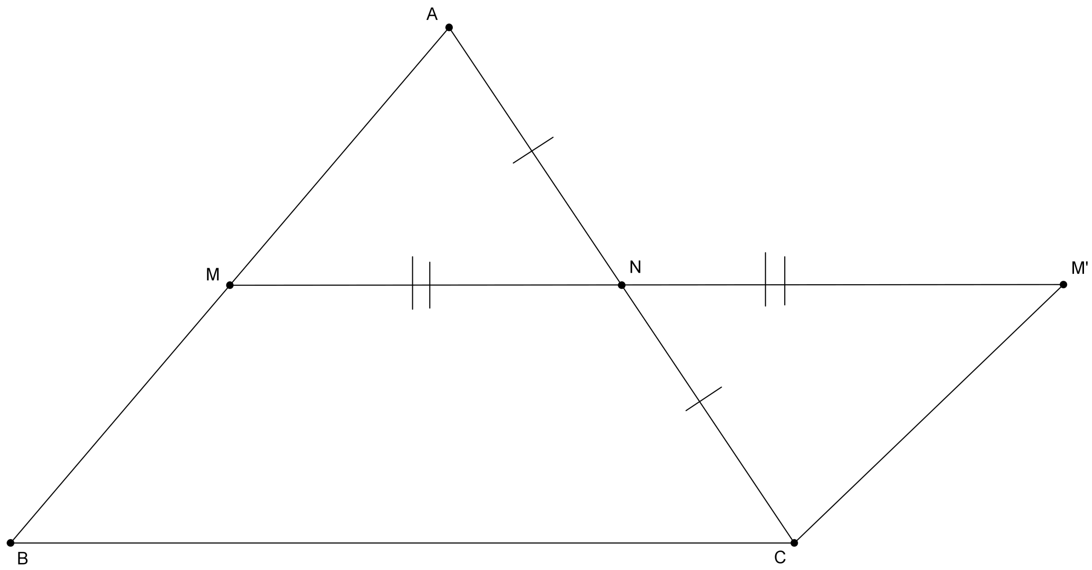

Figura 2.6: Referente à Proposição 2.6.

Reciprocamente, seja r a reta que passa pelo ponto médio M do lado AB e é paralela ao lado BC. Como $\overleftrightarrow{MN}$ também passa por M e é paralela a BC, segue do axioma das paralelas que r coincide com $\overleftrightarrow{MN}$, em particular, $N \in r$.

$\square$

A congruência de triângulos é uma importante ferramenta nas demonstrações em outras importantes áreas da geometria. Vejamos algumas aplicações deste conhecimento na Geometria Analítica.

Exercício 2.1. *Mostre que a elipse ε de focos F_1 e F_2 é simétrica em relação à reta focal l, à reta não foca l_1 e ao centro O.*

Solução. Sem perda de generalidade, considere a elipse ε com centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo OX e eixo não focal coincidente com o eixo OY. (Figura 2.7)

Seja P um ponto pertencente a ε e P' o simétrico de P em relação à reta focal. Seja ainda Q o ponto médio de PP'. Observe que os triângulos F_1PQ e $F_1P'Q$ são congruentes pelo caso LAL (F_1Q é lado comum, $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$ e $F_1\hat{Q}P = F_1\hat{Q}P'$). Logo podemos concluir que $\overline{F_1P} = \overline{F_1P'}$. Com argumentos semelhantes podemos concluir que os triângulos PQF_2 e $P'QF_2$ são congruentes, logo $\overline{PF_2} = \overline{P'F_2}$. Desta forma $2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2)$ e portanto $P' \in \varepsilon$, onde a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal. Com argumentos semelhantes se mostra a simetria de ε em relação a reta não focal e ao centro. Estas são omitidas e são deixadas para o leitor se exercitar demonstrando-as.

$\odot$

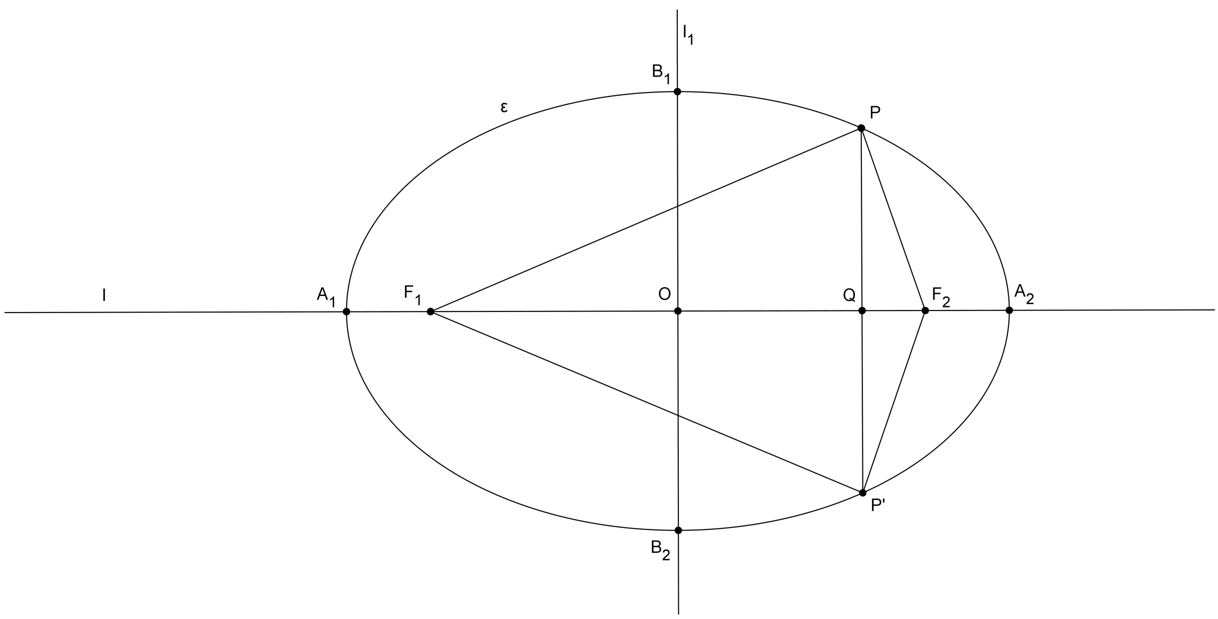

Figura 2.7: Simetria da Elipse em Relação à Reta Focal l.

Exercício 2.2. *Mostre que a hipérbole H é simétrica em relação à reta focal l, à reta não focal l_1 e ao centro O. (Figura 2.8).*

Solução. Sem perda de generalidade, considere a hipérbole de centro na origem do sistema XOY e eixo focal coincidente com o eixo OX e o eixo não focal coincidente com o eixo OY. Se $P \in H$ e P' é o simétrico de P em relação ao eixo focal, então com argumentos semelhantes aos do Exercício 2.1 mostra-se que os triângulos F_1PQ e $F_1P'Q$ são congruentes pelo caso LAL assim como os triângulos PQF_2 e $P'QF_2$.

Logo $\overline{F_1P} = \overline{F_1P'}$ e $\overline{F_2P} = \overline{F_2P'}$ portanto $|d(P', F_1) - d(P', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ ou seja P' pertence a H. A demonstração da simetria ao eixo não focal e a origem são semelhantes e são deixadas para o leitor se exercitar demonstrando-as.

$\odot$

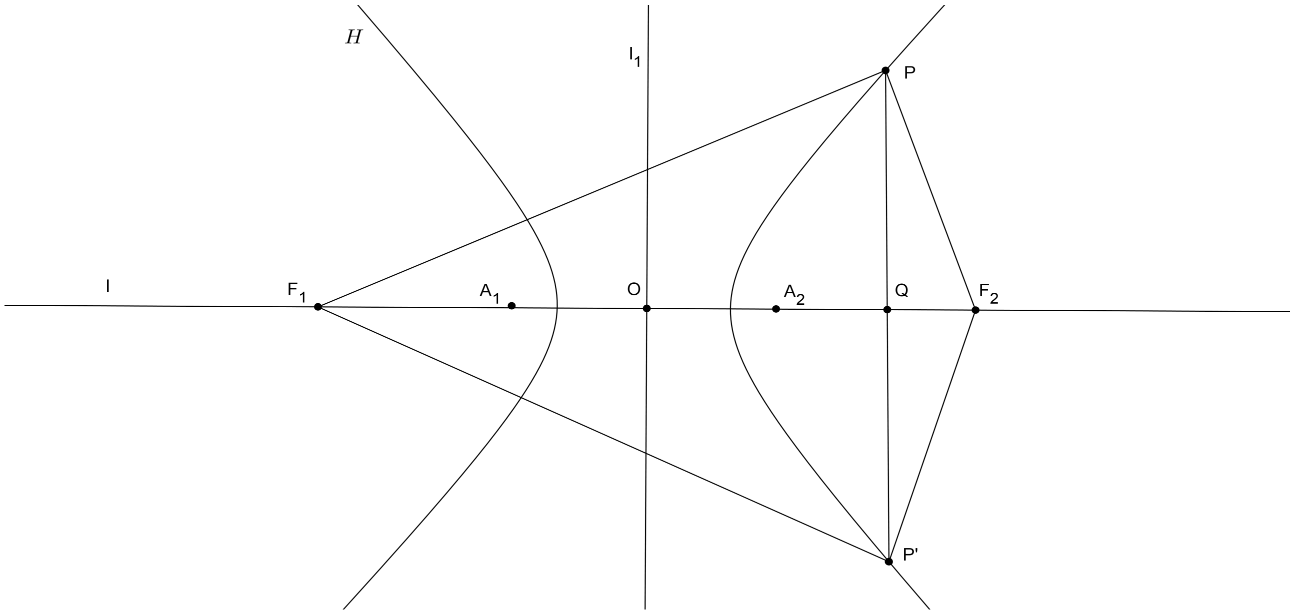

Figura 2.8: Simetria da Hipérbole em Relação à Reta Focal.

Exercício 2.3. *Na Figura 2.9, tem-se* $\overline{AD} = \overline{DE}$, $\hat{A} = D\hat{E}C$ *e* $A\hat{D}E = B\hat{D}C$. *Mostre que os triângulos* ADB *e* EDC *são congruentes.*

Solução. Por hipótese, temos $D\hat{A}E = D\hat{E}C$, mas $D\hat{A}E = D\hat{A}B$, logo $D\hat{A}B = D\hat{E}C$. Também por hipótese temos $\overline{DA} = \overline{DE}$.

O ângulo $A\hat{D}B = A\hat{D}E + E\hat{D}B$ e $E\hat{D}C = E\hat{D}B + B\hat{D}C$, mas por hipótese $A\hat{D}E = B\hat{D}C$, logo $A\hat{D}B = E\hat{D}C$. Em relação aos triâgulos ADB e EDC temos $D\hat{A}B = D\hat{E}C$, $\overline{AD} = \overline{DE}$ e $A\hat{D}B = E\hat{D}C$. Portanto eles são congruentes pelo caso ALA.

$\odot$

Exercício 2.4. *Seja Γ um círculo de centro O e raio r e seja AB uma corda de Γ. Se M é um ponto sobre AB, prove que OM é perpendicular a AB se, e somente se, $\overline{AM} = \overline{BM}$. (Chamamos corda em um círculo o segmento que une dois pontos no perímetro deste). (Figura 2.10).*

Solução. Suponha que $OM \perp AB$ e seja AOB o triângulo cujos vértices são O, A e B. Como $\overline{AO} = \overline{OB} = r$. Temos que o triângulo AOB é isósceles de base AB. Pela Proposição 2.3 temos que OM é altura, mediana e bissetriz do triângulo AOB em relação ao lado AB, logo $\overline{AM} = \overline{BM}$.

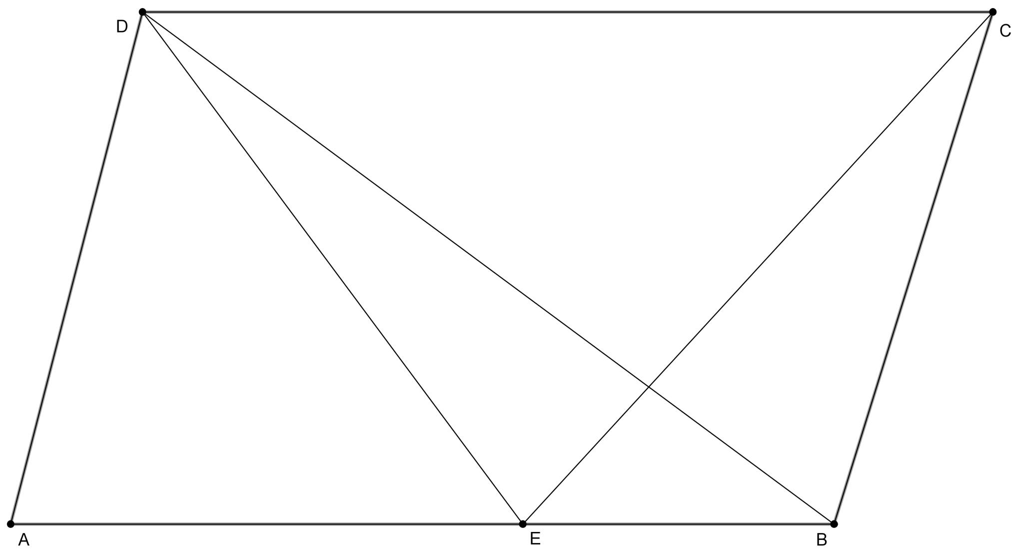

Figura 2.9: Referente ao Exercício 2.3.

Suponha agora que $\overline{AM} = \overline{BM}$, e considere os triângulos OMB e OMA. Observe que OMB e OMA são congruentes. Com efeito por hipótese temos $\overline{AM} = \overline{MB}$, OM é lado comum e $\overline{AO} = \overline{OB} = r$. Assim, $O\hat{M}B = O\hat{M}A$ e como $O\hat{M}B + O\hat{M}A = 180°$, temos que $O\hat{M}B = O\hat{M}A = 90°$. Logo $OM \perp AB$.

$\odot$

Exercício 2.5. *Sejam ABC um triângulo e P, M e H respectivamente os pés da bissetriz, mediana e altura relativas ao lado AB. Se P e H ou M e H coincidirem, mostre que ABC é isósceles de base AB.*

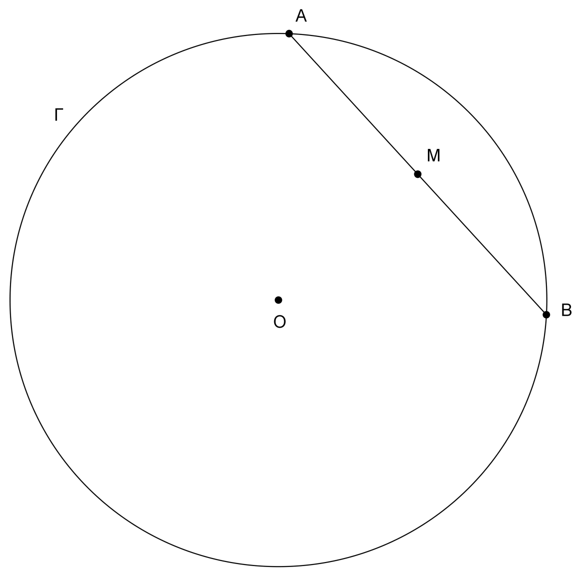

Figura 2.10: Referente ao Exercício 2.4.

Solução. Suponha que P e H são coincidentes. Neste caso, temos que $H\hat{C}A = H\hat{C}B$ e $C\hat{H}A = C\hat{H}B = 90^\circ$ por hipótese. Logo $H\hat{A}C = H\hat{B}C$ e portanto o triângulo ABC possui dois ângulos iguais. Pela Proposição 2.2 temos que ABC é isósceles de base AB.

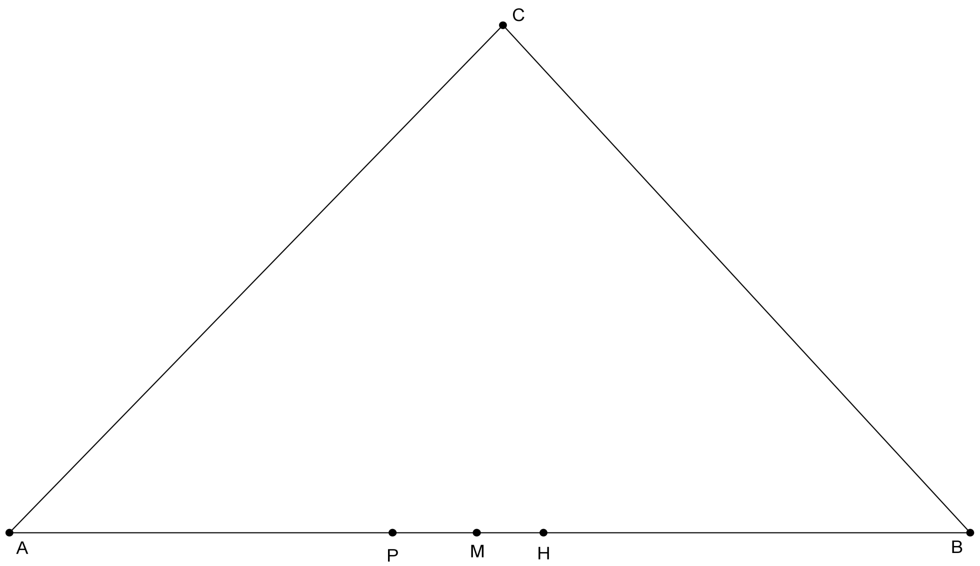

Figura 2.11: Referente ao Exercício 2.5.

Suponha agora que M e H são coincidentes. Temos que $B\hat{H}C = C\hat{H}A = 90°$ e $\overline{BH} = \overline{HA}$ por hipótese. Logo os triângulos BHC e CHA são congruentes pelo caso LAL, (CH é lado comum e $\overline{BH} = \overline{AH}$ por hipótese). Portanto $C\hat{B}H = C\hat{A}H$ e pela Proposição 2.2 ABC é isósceles de base AB.

$\odot$

Capítulo 3

Semelhança de Triângulos

A noção natural de semelhança corresponde à ideia de mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções. No rigor matemático, o conjunto de transformações geométricas que mantém a forma, mas alteram o tamanho são chamadas de homotetias, estas podem ser compostas com rotações e translações. Neste caso, também ângulos e paralelismo são preservados. No estudo da Geometria, o conceito de semelhança de triângulos, ocupa um lugar bem destacado. As ideias deste capítulos são baseadas em [1], [5], [7] e [9].

Definição 3.1. *Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Ou seja, dados os triângulos ABC e EFG, se estes forem semelhantes com as correspondências $A \to E$, $B \to F$ e $C \to G$ então valem simultaneamente as seguintes relações: $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$, $\hat{C} = \hat{G}$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

O quociente comum entre as medidas de seus lados, é comumente conhecido como *razão de proporcionalidade* entre os triângulos. Observe que, se dois triângulos são congruentes então também são semelhantes na razão de proporcionalidade 1. Ou seja, podemos sempre afirmar que dois triângulos congruentes são também semelhantes, já a recíproca não é verdadeira.

É interessante poder estabelecer uma relação de semelhança entre dois triângulos com um número mínimo de informações, assim como nos casos de congruência. Isto é possível e são conhecidos como casos de semelhança entre triângulos. Vejamos estes casos nos teoremas a seguir e suas consequentes implicações.

Este teorema é conhecido como caso AA de semelhança de triângulos.

Teorema 3.1. *Se em dois triângulos ABC e EFG, temos $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então a congruência dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{F}$ acarreta na congruência dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{G}$. Considere na semirreta EF o ponto H, de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$. Pelo ponto H trace, uma reta paralela a FG. Esta corta a semirreta EG num ponto J, formando um triângulo (EHJ). Este triângulo é congruente ao triângulo (ABC) pelo caso ALA, já que $\hat{A} = \hat{E}$ por hipótese, $\overline{AB} = \overline{EH}$ por construção e $\hat{B} = \hat{F} = E\hat{H}J$ devido ao paralelismo de JH e GF. Segue do Teorema de Talles que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{JH}}{\overline{FG}}.$$

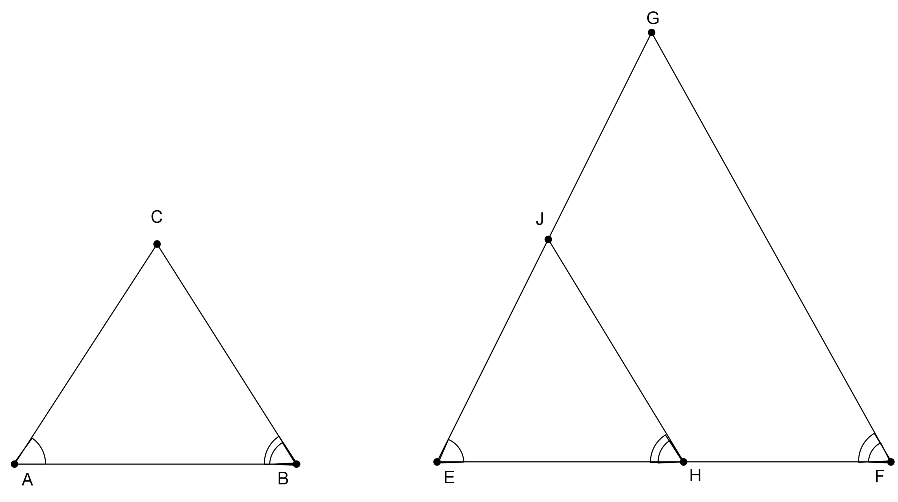

Figura 3.1: Referente ao Teorema 3.1.

Como $\overline{EH} = \overline{AB}$, $\overline{EJ} = \overline{AC}$ e $\overline{JH} = \overline{CB}$, então, da igualdade anterior obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}},$$

o que vai de acordo com a Definição 3.1, portanto ABC e EFG são semelhantes.

$\square$

Para mais detalhes sobre o Teorema de Talles o leitor poderá consultar em [9].

O próximo teorema é conhecido como caso LAL de semelhança de triângulos.

Teorema 3.2. *Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Construamos o triângulo HIJ que tenha $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$. Logo $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$ pelo Teorema 3.1. Como $\overline{HI} = \overline{EF}$, a hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e a igualdade anterior implicam que $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Além disso, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$ e podemos concluir, pelo caso LAL de congruência de triângulos, que os triângulos EFG e HIJ são congruentes. Como já concluímos que ABC e HIJ são semelhantes, podemos finalmente concluir que ABC e EFG são semelhantes. $\square$

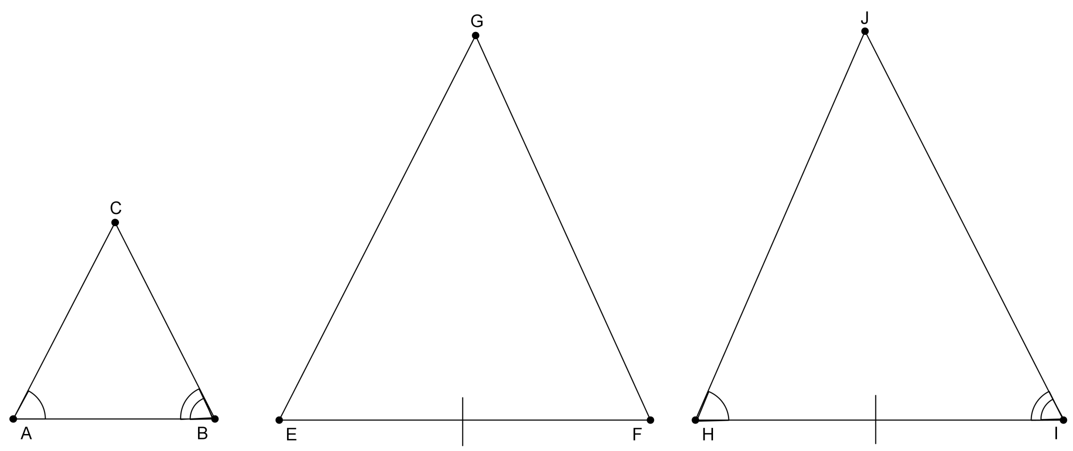

Figura 3.2: Referente ao Teorema 3.2.

O próximo caso de semelhança é conhecido como LLL.

Teorema 3.3. *Se, em dois triângulos ABC e EFG, tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então, os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração. Construamos um triângulo HIJ que tenha $\hat{H} = \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Segue-se, então, da hipótese que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Portanto pelo Teorema 3.2, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.

Decorre daí que, além da igualdade anterior, também temos $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$. Logo desta igualdade e pela hipótese do teorema, segue $\overline{IJ} = \overline{FG}$.

Como já temos que $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$ pela construção, então pelo caso LLL de congruência de triângulos EFG e HIJ são congruentes. Como já havíamos concluído que ABC e HIJ são semelhantes, podemos concluir também que ABC e EFG são semelhantes. $\square$

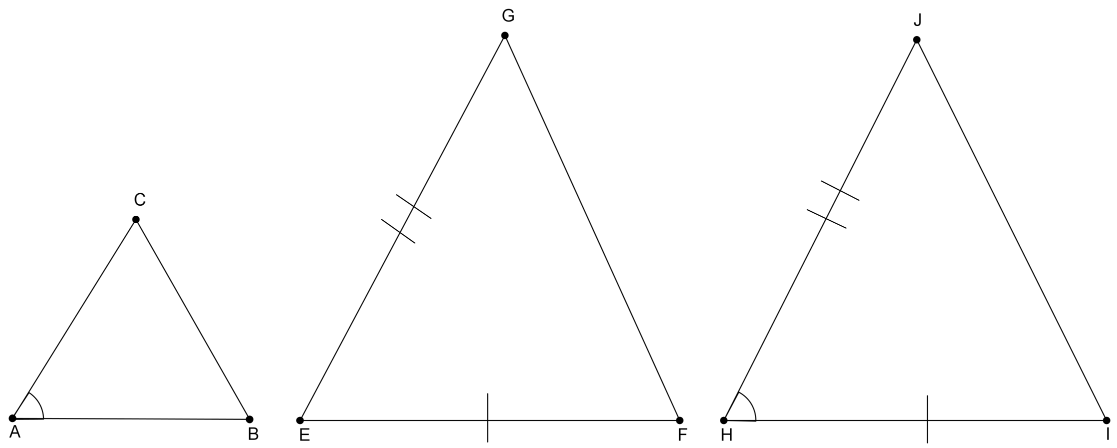

Figura 3.3: Referente ao Teorema 3.3.

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Tracemos a altura AD pelo vértice A relativa ao lado BC. Vamos fazer uso das seguintes notações

$a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$.

Como AD é perpendicular à BC, os triângulos ADB e ADC também são retângulos. Logo $\hat{B}+\hat{C} = 90°$ e $\hat{B}+B\hat{A}D = 90°$, então, $B\hat{A}D = \hat{C}$. Também $D\hat{A}C+\hat{C} = 90°$, portanto, $D\hat{A}C = \hat{B}$. Logo os triângulos ADB e CDA são semelhantes ao triângulo ABC pelo caso AA de semelhança de triângulos. Destas semelhanças podemos deduzir várias relações entre as medidas a, b, c, h, m e n. Vejamos algumas a seguir.

Proposição 3.1. *Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração. Da semelhança entre os triângulos ADB e CDA, temos que

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

. Da última igualdade temos $h^2 = mn$.

□

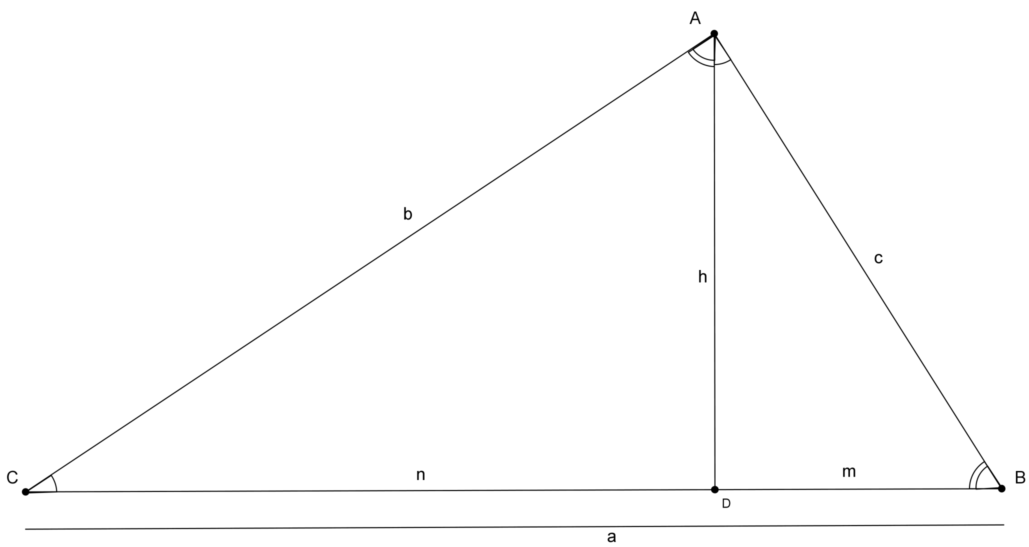

Figura 3.4: Referente à Proposição 3.1 e ao Teorema 3.4.

Teorema 3.4. *(Pitágoras). Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração. Da semelhança dos triângulo ADB, CDA e ABC podemos concluir que $\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$ e $\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$.

Logo $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto $am + an = b^2 + c^2$, ou seja, $a(m+n) = b^2 + c^2$, mas $a = m + n$, logo $a^2 = b^2 + c^2$. □

Proposição 3.2. *Considere um triângulo com lados medindo a, b e c. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então, o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a.*

Demonstração. Construamos um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente b e c. Neste novo triângulo, de acordo com o Teorema de Pitágoras (Teorema 3.4), a hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2} = a$. Portanto, este novo triângulo que é retângulo tem lados medindo a, b e c. Pelo caso LLL de congruência de triângulos, ele é, portanto congruente ao triângulo original. Ou seja, o triângulo original é retângulo e sua hipotenusa mede a.

□

Um importante objeto da Geometria Analítica é a distância entre dois pontos quaisquer no plano. O cálculo desta medida pode ser obtida aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo construído a partir das coordenados dos pontos. Veja o próximo exercício.

Exercício 3.1. *Dados no plano os pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$, mostre que*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}.$$

Solução. Vamos desconsiderar os casos em que P e Q estão sobre o eixo OX ou sobre o eixo OY ou então sobre retas paralelas a um dos eixos do sistema XOY. Sem perda de generalidade, vamos considerar que P e Q estão no primeiro quadrante e $x_p < x_q$ e $y_p < y_q$.

Construamos o triângulo retângulo no vértice S da seguinte forma: pela ordenada y_p traçamos uma reta paralela ao eixo OX e pela abcissa x_q traçamos uma reta paralela ao eixo OY, sendo S o ponto de intersecção entre estas duas paralelas aos eixos. Como XOY são ortogonais temos que o ângulo em S é reto e portanto o triângulo PSQ é retângulo. Temos que seu cateto na horizontal mede $x_q - x_p$, seu cateto na vertical mede $y_q - y_p$ e sua hipotenusa mede $d(P,Q)$.

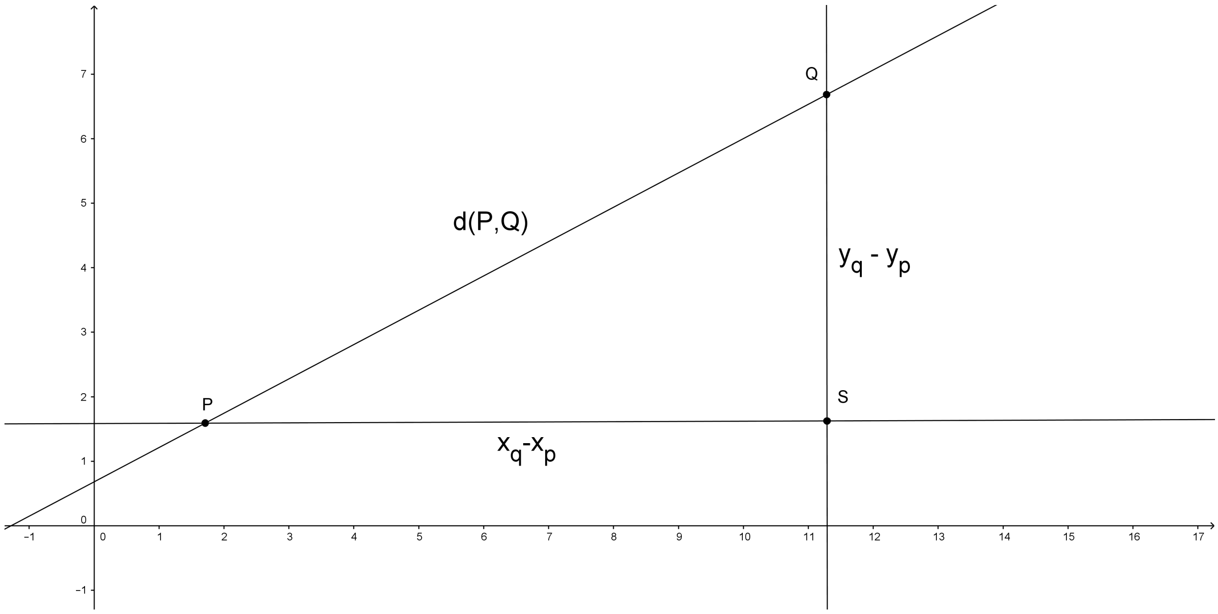

Figura 3.5: Referente ao Exercício 3.1.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo PSQ temos $d(P,Q)^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2$ ou seja $d(P,Q) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$.

$\odot$

O exercício a seguir mostra que ideias semelhantes podem ser utilizadas para determinar a distância entre dois pontos quaisquer no espaço.

Exercício 3.2. *Dados no espaço os pontos* $P(x_p, y_p, z_q)$ *e* $Q(x_q, y_q, z_q)$, *mostre que*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}.$$

Solução. Sejam $P(x_p, y_p, z_p)$ e $Q(x_q, y_q, z_q)$ pontos do espaço tais que a reta PQ não seja paralela ou coincidente a qualquer dos eixo OX, OY ou OZ. Seja P_o e Q_o suas projeções no plano XOY. Traçando por P reta paralela a P_oQ_o, esta corta o segmento QQ_o no ponto S, assim obtemos o triângulo retângulo PSQ. Pelo Teorema de Pitágoras a hipotenusa $\overline{PQ}$ deste triângulo é dada por $\sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{SP}^2}$. Como $\overline{SQ}^2 = (z_q - z_p)^2$ e o quadrilátero SQ_oP_oP é um retângulo, temos que $\overline{SP}^2 = \overline{Q_oP_o}^2$. No plano XOY, P_oQ_o é a hipotenusa do triângulo retângulo P_oQ_oH, construído tal qual o Exercício 3.1 donde sabemos que mede $\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$ substituindo estas expressões em

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{SP}^2}$ temos que

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}.$$

$\odot$

Exercício 3.3. *Considere um triângulo ABC de base $\overline{BC} = a$ e altura h relativa ao lado BC. Determine a medida do lado de um quadrado $MNPQ$ inscrito em ABC com lado MN sobre BC em função do lado a e altura h de ABC.*

Solução. Seja x a medida do lado do quadrado $MNPQ$.

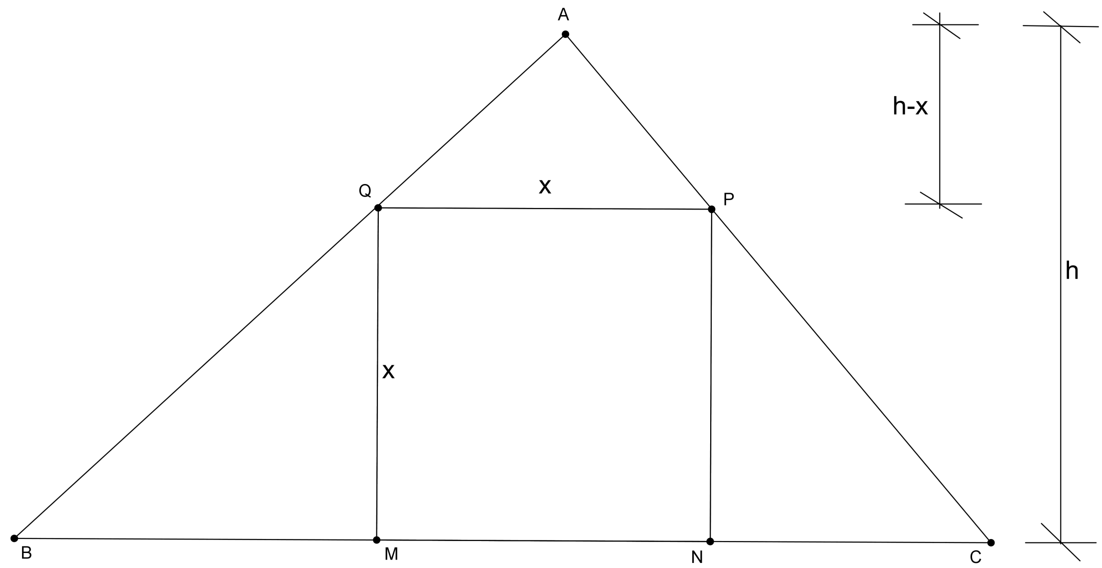

Figura 3.6: Referente ao Exercício 3.3.

Veja que os triângulos APQ e ABC são semelhantes pelo caso AA, como o triângulo APQ tem base $PQ = x$ e altura $h - x$ temos que $\dfrac{x}{a} = \dfrac{h-x}{h}$ ou seja $xh = ah - ax$, logo $x = \dfrac{ah}{a+h}$.

$\odot$

Exercício 3.4. *Na Figura 3.7 a seguir, D é o ponto médio de AB e E é o ponto médio de AC. Mostre que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.*

Solução. O segmento DE é base média do triângulo ABC. Logo $DE \parallel BC$ portanto $D\hat{E}A = A\hat{C}B$ e $A\hat{D}E = A\hat{B}C$, portanto pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

$\odot$

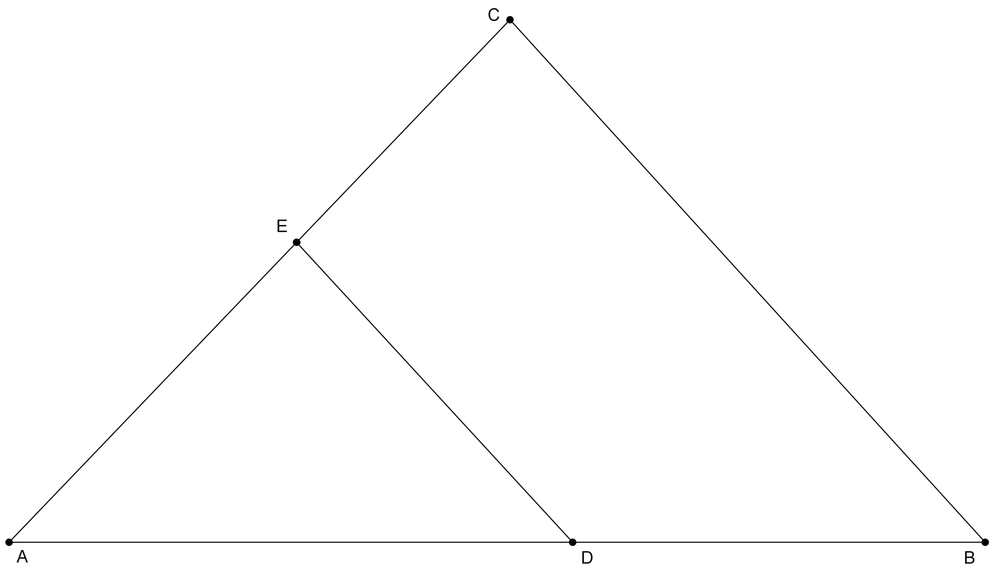

Figura 3.7: Referente ao Exercício 3.4.

Capítulo 4

Área de Triângulos

Consideramos área de um triângulo como a porção do plano delimitado por este triângulo. Assim sendo a área de um triângulo é um número real sempre positivo associado ao triângulo dado. Desta forma todo número real positivo pode ser associado a área de um triângulo e dado qualquer triângulo podemos relacionar sua área a um número real positivo. Não é difícil perceber que esta relação entre a área do triângulo e um número real positivo é uma função. No entanto esta função não é injetiva, pois podemos facilmente apresentar dois triângulos diferentes cujas áreas são iguais. Nesta obra nos referimos à área de um triângulo ABC por $A(ABC)$. As ideias deste capítulo baseiam-se em [1], [5], [7] e [12].

O teorema apresentado a seguir cuja demonstração não é apresentada, pois foge ao seu escopo, trata da área do paralelogramo. Um paralelogramo é um quadrilátero no qual lados opostos são paralelos.

Teorema 4.1. *A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de qualquer uma de suas bases pela medida da altura correspondente.*

A demonstração do Teorema 4.1 pode ser encontrada em [7].

Teorema 4.2. *A área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer um de seus lados pela medida de sua altura correspondente.*

Demonstração. Considere um triângulo de lados AB, BC e AC e seja AD a altura relativa ao lado BC, onde D é a projeção ortogonal do vértice A sobre a reta BC.

Trace uma reta r paralela ao segmento BC pelo ponto A e uma reta s paralela ao segmento BA pelo ponto C. Seja E o ponto de intersecção entre as retas r e s. Observe que $ABCE$ forma um paralelogramo de base BC e altura AD.

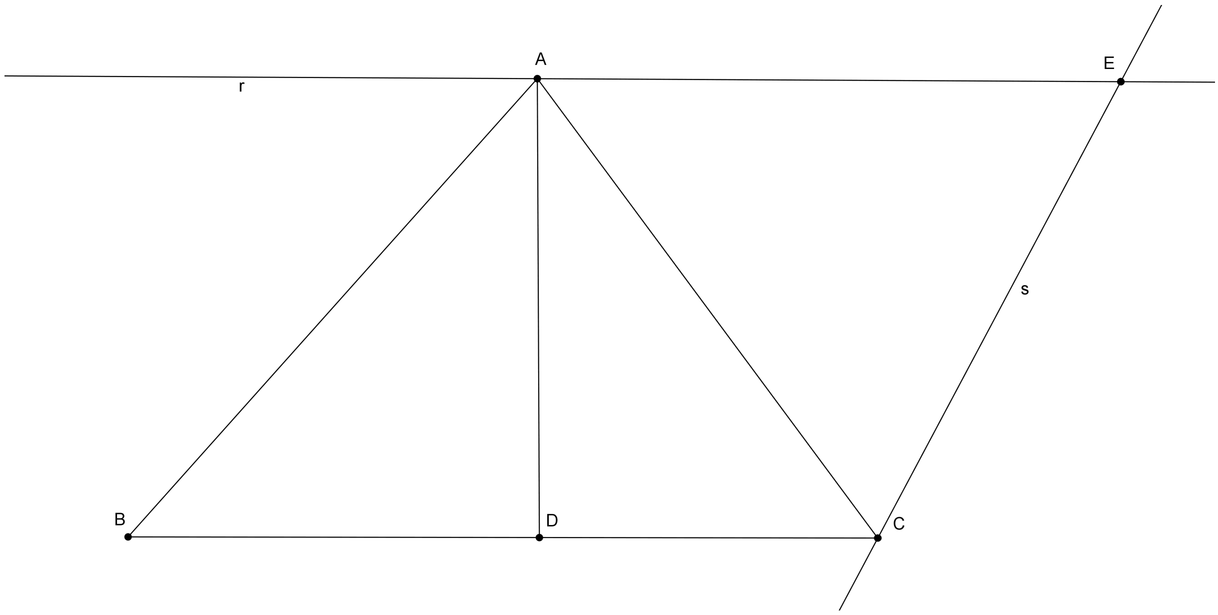

Figura 4.1: Referente ao Teorema 4.2

Temos que os triângulos ABC e ACE são congruentes pelo caso LLL, logo $A(ABC)$ é metade da área do paralelogramo $ABCE$ cuja área é o produto $\overline{BC}.\overline{AD}$, portanto $A(ABC) = \dfrac{\overline{BC}.\overline{AD}}{2}$.

$\square$

Observe que independe de qual lado escolhamos para ser chamado de base do triângulo a conclusão não muda, basta observar que a construção usada na demonstração pode ser feita partindo da referência de qualquer lado como sendo a base e a altura correspondente. Desta forma, dado um triangulo de lados AB, BC e AC e alturas AD, BE e CF respectivamente relativas aos seus lados, temos que

$$A(ABC) = \frac{\overline{BC}.\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{AC}.\overline{BE}}{2} = \frac{\overline{AB}.\overline{CF}}{2}.$$

Em particular temos $\overline{BC}.\overline{AD} = \overline{AC}.\overline{BE} = \overline{AB}.\overline{CF}$.

Proposição 4.1. *Sejam ABC e $A'BC$ triângulos tais que $AA' \parallel BC$. Então $A(ABC) = A(A'BC)$.*

Demonstração. Seja d a distância entre as retas AA' e BC. Temos que d é a medida da altura dos triângulos ABC e $A'BC$ relativas ao lado BC. Portanto área de $A(ABC) = \dfrac{\overline{BC}.d}{2} = A(A'BC)$.

$\square$

Proposição 4.2. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhante. Sendo r a razão de semelhança de ABC para $A'B'C'$, temos*

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = r^2.$$

Demonstração. Sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{B'C'} = a'$ e h e h' as alturas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente relativas a BC e $B'C'$. Como $a = ra'$ e $h = rh'$, segue que

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ra'.rh'}{a'h'} = r^2.$$

$\square$

Na proposição a seguir demonstramos as relações métricas no triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras através de áreas de triângulos.

Proposição 4.3. *Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$. Então:*

(1) $ah = bc$;

(2) $c^2 = na$ e $b^2 = am$;

(3) $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração.

(1) Temos que $A(ABC) = \dfrac{\overline{BC}.\overline{AH}}{2} = \dfrac{ah}{2}$ e também $A(ABC) = \dfrac{\overline{AC}.\overline{AB}}{2} = \dfrac{bc}{2}$, ou seja, ah e bc ambos medem o dobro da área de ABC.

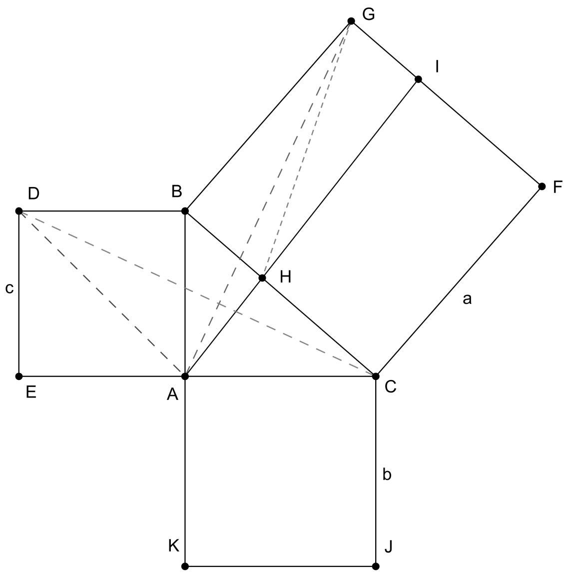

Figura 4.2: Referente à Proposição 4.3

(2) Construamos, exteriormente a ABC, os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACJK$ e seja I o ponto de interseção da semirreta AH com FG. Como $AI \parallel BG$, segue pela Proposição 4.1 que $A(BGA) = A(BGH) = \dfrac{\overline{BG}.\overline{BH}}{2} = \dfrac{na}{2}$. Por outro lado, como $\overline{BD} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{BG}$ e $D\hat{B}C = 90° + \hat{B} = A\hat{B}G$, os triângulos BCD e BGA são congruentes pelo caso LAL. Portanto, $A(BCD) = A(BGA) = \dfrac{an}{2}$. Mas, uma vez que $AC \parallel BD$ temos que $A(BCD) = A(ABD) = \dfrac{c^2}{2}$. Portanto $c^2 = na$. De forma análoga temos que $A(FHC) = A(FAC) = \dfrac{am}{2}$ e também temos que triângulo FAC é congruente ao triângulo CBJ pelo caso LAL, pois $\overline{FC} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{CJ}$ e $F\hat{C}A = 90° + \hat{C} = B\hat{C}J$. Como $BA \parallel CJ$ temos que $A(CBJ) = A(ACJ) = \dfrac{b^2}{2}$, segue então que $b^2 = am$.

(3) Com os argumentos do item (2) temos que $c^2 = A(ABDE) = 2A(ABD) = 2A(BGH) = A(BGHI)$, analogamente temos que $b^2 = A(ACJK) = 2A(ACJ) = 2A(BCJ) = 2A(FCA) = 2A(FCH) = A(FCHI)$, ou seja $b^2 + c^2 = A(BGIH) + A(FCHI) = A(BCFG) = a^2$.

□

Definição 4.1. *Chamamos de círculo inscrito a um triângulo aquele que tangencia todos os seus lados internamente. Chamamos de círculo ex-inscrito a um triângulo* *aquele que tangência externamente tanto um de seus lados como o prolongamento dos seus dois outros lados.(Figura 4.3)*

Proposição 4.4. *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e semiperímetro p. Se r e r_a denotam, respectivamente, os raios dos círculos inscrito em ABC e ex-inscrito a BC, então $A(ABC) = pr = (p - a)r_a$.*

Demonstração. Seja I o incentro e I_a o ex-incentro de (ABC) relativamente a BC (Veja Figura 4.3). Uma vez que as alturas dos triângulos AIB, AIC e BIC, respectivamente, relativas aos lados AB, AC e BC, são todas iguais a r, temos

$$A(ABC) = A(AIB) + A(AIC) + A(BIC) = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{(a+b+c)}{2}r = pr. \quad (4.1)$$

Por outro lado, uma vez que as alturas dos triângulos AI_aB, AI_aC e BI_aC, respectivamente, relativas aos lados AB, AC e BC, são todas iguais a r_a, temos

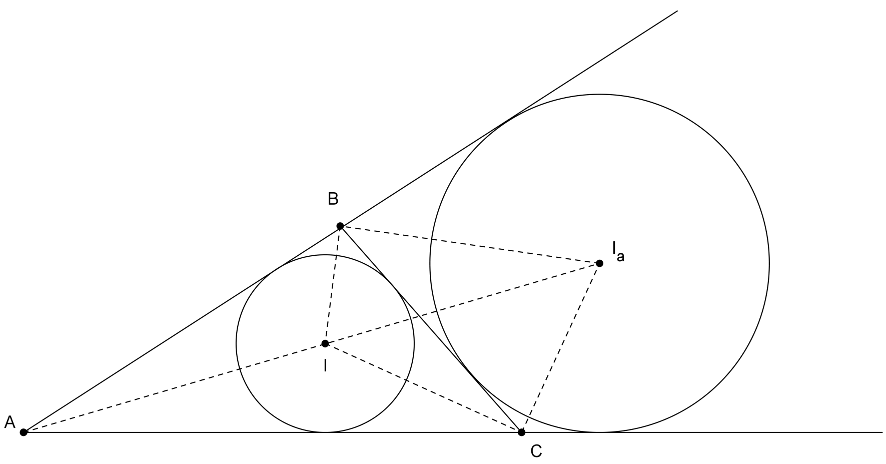

Figura 4.3: Referente à Proposição 4.4

$$A(ABC) = A(AI_aB) + A(AI_aC) - A(BI_aC) = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = (p - a)r_a. \square \quad (4.2)$$

Definição 4.2. *Chamamos de círculo circunscrito a um triângulo ABC aquele que passa por seus vértices A, B e C.*

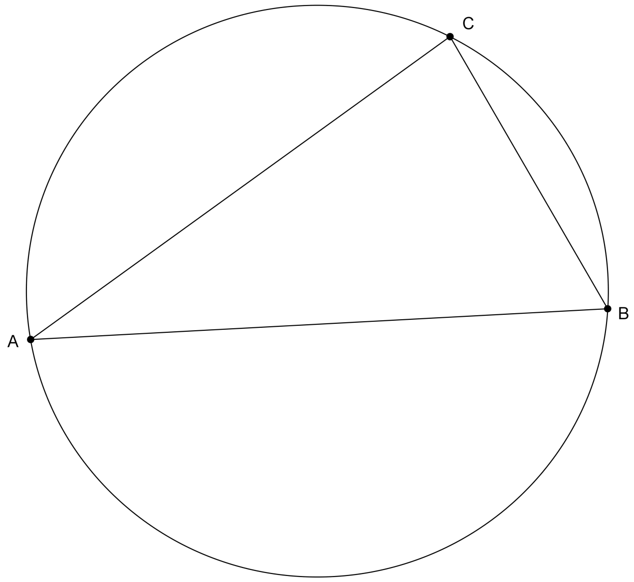

Figura 4.4: Referente à Definição 4.2

Teorema 4.3. *(Carnot [1]). Se ABC é um triângulo acutângulo de circuncentro O, e x, y e z denotam as distâncias de O aos lados BC, AC e AB, respectivamente, então $x+y+z = R+r$, onde r e R denotam, também respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a ABC.(Figura 4.5).*

Demonstração. Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB. Assim, $OM \perp BC$, $ON \perp CA$ e $OP \perp AB$.

Os quadriláteros $BMOP$, $CNOM$ e $APON$, tendo, cada um, dois ângulos opostos retos, são todos inscritíveis, isto é existe um círculo que o circunscreve passando por cada um dos seus vértices . Denotando $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e observando que $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$ e $\overline{OP} = z$, obtemos, pelo Teorema de Ptolomeu [9], as igualdades

$$\begin{aligned} \frac{xc}{2} + \frac{za}{2} &= \frac{b}{2}R, \\ \frac{xb}{2} + \frac{ya}{2} &= \frac{c}{2}R, \\ \frac{yc}{2} + \frac{zb}{2} &= \frac{a}{2}R. \end{aligned} \tag{4.3}$$

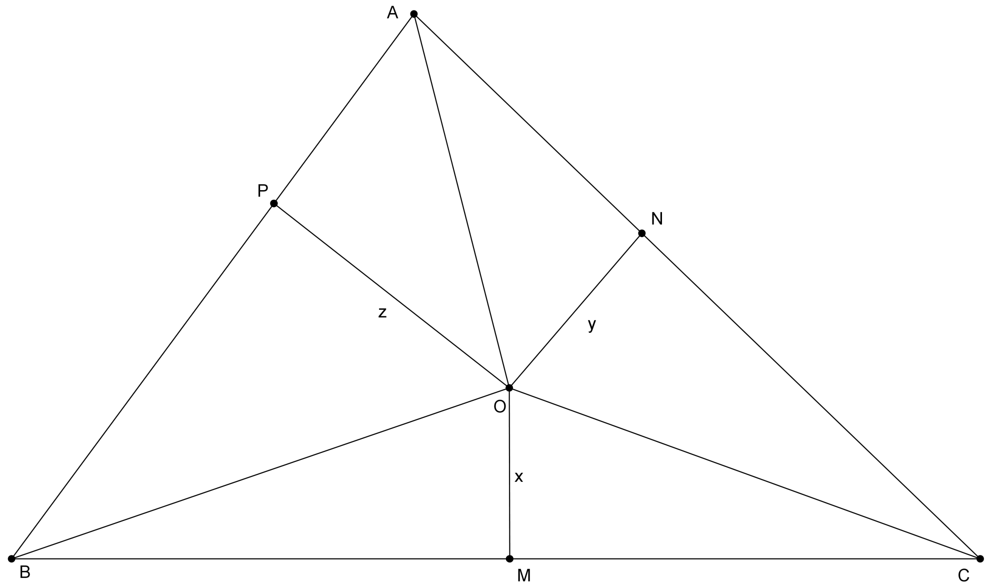

Figura 4.5: Referente ao Teorema 4.3

Por outro lado, como os triângulos OBC, OCA e OAB particionam o triângulo ABC, temos

$$A(ABC) = \frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2}. \tag{4.4}$$

Pela Proposição 4.4 temos que $A(ABC) = pr$, por sua vez, subtituindo tal relação na última igualdade, obtemos

$$\frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2} = pr.$$

Por fim, somando membro a membro as Equações (4.3) obtemos

$$(x + y + z)p = (R + r)p,$$

e portanto $x + y + z = R + r$.

$\square$

Observação 4.1. *O Teorema de Ptolomeu diz: Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AC}.\overline{BD}$. Mais detalhes sobre este teorema poderão ser encontrados em [9].*

Vejamos outras demonstrações do Teorema de Pitágoras nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercício 4.1. *Dado um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, mostre que $c^2 = a^2 + b^2$.*

Solução. Construamos o quadrado de lado $a+b$ (Figura 4.6a). Veja que o quadrilátero de lado c é um quadrado pois α, β e γ são suplementares, mas α e β são complementares, logo $\gamma = 90°$. Logo a área do quadrado maior é dada pela soma das áreas dos quatro triângulos retângulos com a área do quadrado de lado c, ou seja $c^2 + 2ab$.

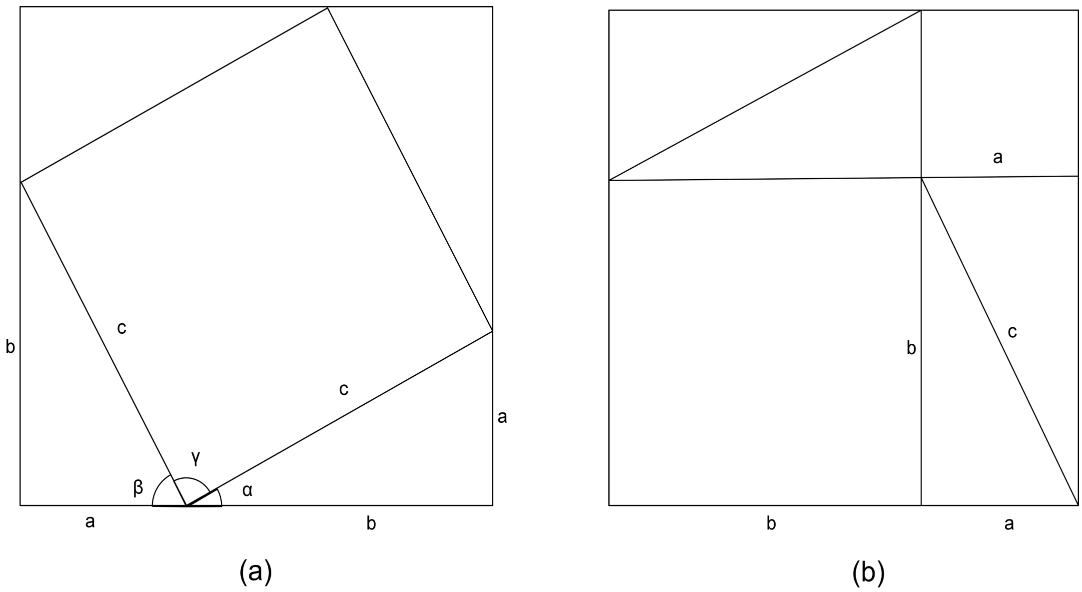

Figura 4.6: Referente ao Exercício 4.1

Construamos também o quadrado de lado $a + b$ (Figura 4.6b), logo sua área é igual a soma das áreas dos quadrados de lados a e b com as áreas dos quatro triângulos retângulos, isto é, $a^2 + b^2 + 2ab$. Desta forma podemos concluir que $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

$\odot$

Exercício 4.2. *Dado um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, mostre que $c^2 = a^2 + b^2$.*

Solução. Construamos o trapézio reto como da Figura 4.7. A área do trapézio de bases a, b e altura $a+b$ é igual a semissoma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é igual a soma das áreas dos três triângulos retângulos. Veja que o triângulo isósceles de lado c também é retângulo pois, α, β e γ são suplementares, como α e β são complementares temos que $\gamma = 90°$.

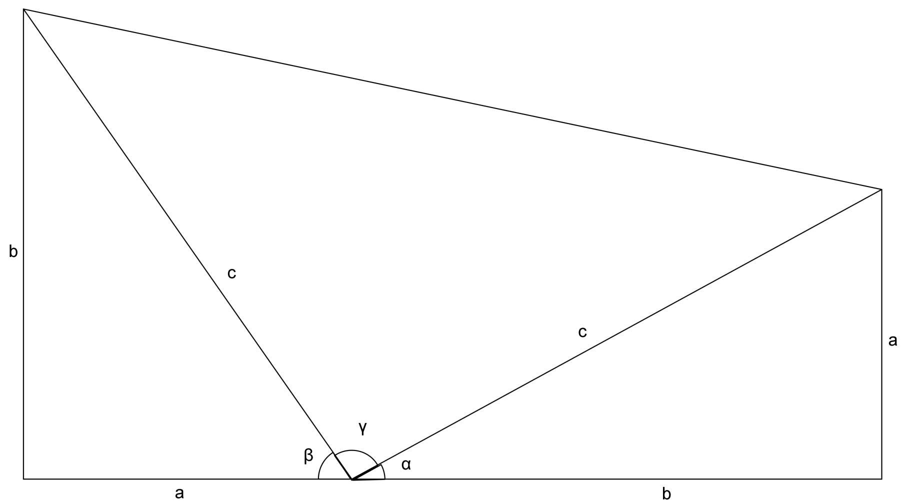

Figura 4.7: Referente ao Exercício 4.2

Logo,

$$\frac{a+b}{2}.(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

ou seja

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{2} = \frac{2ab+c^2}{2}.$$

Portanto, $c^2 = a^2 + b^2$.

$\odot$

Capítulo 5

Trigonometria e Triângulos

Neste capítulo, relacionamos alguns conceitos da trigonometria com triângulos. As ideias deste capítulo baseiam-se em [2], [9] e [10]. Trigonometria foi uma criação da Matemática grega que recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas, como hindus, mulçumanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades da Astronomia, da Navegação e da Geografia. O seu uso na Topografia é algo bem mais recente.

Destacamos aqui algumas famosas leis que relacionam Razões Trigonométrica com triângulos como a *Lei do Seno* e a *Lei do Cosseno*. A seguir vamos relacionar a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para ângulos agudos.

Consideremos então o ângulo $\theta = A\hat{O}B$ formado pelas semirretas OA e OB tal que $0 < \theta < 90°$.

Tracemos então a partir dos ponto A_1, A_2,..., A_n na semirreta OA, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2,...,A_nB_n à semirreta OB. Logo os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2,..., OA_nB_n são retângulos e semelhantes, pois θ é ângulo comum a todos e os ângulos $O\hat{B}_1A_1 = O\hat{B}_2A_2 = ... = O\hat{B}_nA_n = 90°$ por construção, portanto os triângulos OA_1B, OA_2B_2,...,OA_nB_n são semelhantes. Desta forma, temos que

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = ... = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = K \tag{5.1}$$

onde K é uma constante que independe dos comprimentos envolvidos, depende apenas da abertura θ. Chamamos esta constante K de seno do ângulo θ e denotamos por $sen\,\theta$. Veja que esta medida independe do tamanho do triângulo.

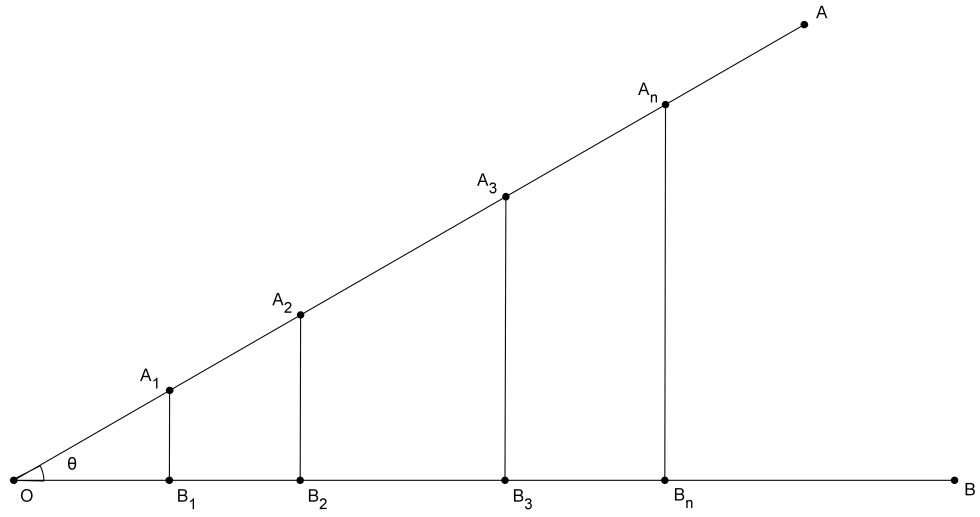

Figura 5.1: Construção das Razões Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente.

De forma semelhante, temos que

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = ... = \frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}} = K_1, \tag{5.2}$$

depende apenas de θ e chamamos K_1 de cosseno do ângulo θ e denotamos de $\cos\theta$, temos também que

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = ... = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = K_2 \tag{5.3}$$

depende apenas de θ, chamamos K_2 de tangente do ângulo θ e denotamos por $tg\theta$. Neste caso podemos simplesmente relacionar os elementos catetos e hipotenusa do triângulo retângulo com as funções trigonométricas de um de seus ângulos agudos. Ou seja,

$$sen\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}},$$

e

$$tg\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}.$$

As funções seno e cosseno se relacionam através de uma expressão chamada *Relação Fundamental da Trigonometria*, que diz $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para todo θ.

De fato, seja ABC um triângulo retângulo em C e θ um de seus ângulos agudos no vértice A.

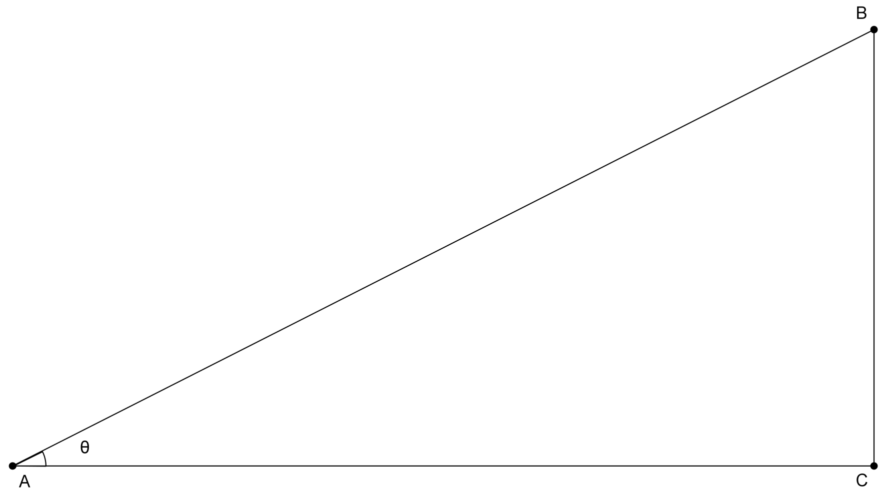

Figura 5.2: Triângulo Retângulo no Vértice C.

Pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$, dividindo ambos os lados da igualdade por $\overline{AB}^2$, temos

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 = 1.$$

Como

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\theta$$

e

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = sen\,\theta$$

temos que $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Podemos relacionar também as Razões Trigonométricas de θ com seu complementar

$90° - \theta$. Veja que

$$sen\,(90° - \theta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\theta$$

e

$$\cos\,(90° - \theta) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = sen\,\theta.$$

Temos também que

$$tg\,(90° - \theta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{tg\,\theta}.$$

Chamamos de ângulos notáveis, os ângulos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ que medem em radianos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ que são equivalentes em graus a 30°, 45° e 60° respectivamente.

Proposição 5.1. *Seja* $\theta = \frac{\pi}{4}$*, então* $sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $tg\,\theta = 1$.

Demonstração . Seja $ABCD$ um quadrado de lado l, neste tracemos a diagonal AC. Temos então o triângulo retângulo ABC retângulo em B.

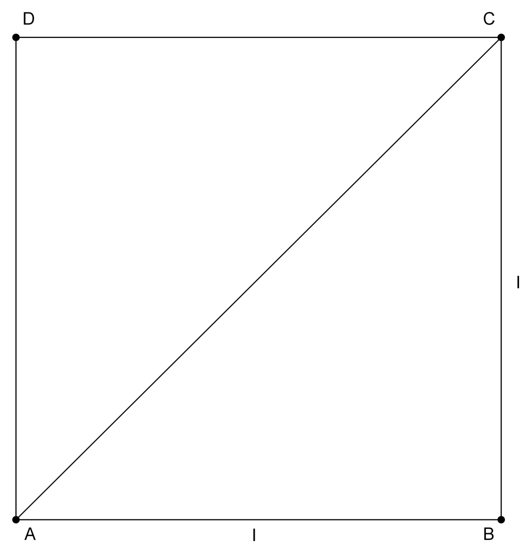

Figura 5.3: Referente à Proposição 5.1.

Como a diagonal de um quadrado divide este em dois triângulos congruentes e isósceles temos que $C\hat{A}B = A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$. Pelo Teorema de Pitágoras temos que a hipotenusa AC mede $l\sqrt{2}$. Pelas definições das funções seno, cosseno e tangente temos que $sen\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ e $\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{l}{l} = 1$.

$\square$

Proposição 5.2. *Seja* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ *e* $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, *então* $sen\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ *e* $tg\,\theta = \sqrt{3}$, $sen\,\beta = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $tg\,\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Demonstração. Seja ABC um triângulo equilátero de lado l, tracemos a altura de ABC pelo vértice C em relação ao lado AB. Seja D o ponto médio de AB, logo CD é altura de ABC e CDB é um triângulo retângulo em D como CD é bissetriz de $A\hat{C}B$ temos que $D\hat{C}B = \dfrac{\pi}{6}$ e $D\hat{B}C = \dfrac{\pi}{3}$, temos também que $DB = \dfrac{l}{2}$ e pelo Teorema de Pitágoras que $CD = l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto $sen\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ e $tg\,\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e ainda que $sen\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $tg\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\square$

Outras relações trigonométricas importantes relacionam arcos duplos ou arcos metades. Vejamos uma destas relações na proposição a seguir.

Proposição 5.3. *Se* $\theta \in (0, \dfrac{\pi}{4})$ *então:*

(1) $sen\,2\theta = 2sen\,\theta\cos\theta$;

(2) $sen\,\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$.

Demonstração.

(1) Sejam OAB e OAC triângulos retângulo em A e congruentes tais que $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ e $A\hat{O}B = A\hat{O}C = \theta$.(Veja Figura 5.4). Temos que $\overline{AB} = \overline{AC} = sen\theta$ e $\overline{AO} = \cos\theta$. Tracemos BD perpendicular a OC temos ainda que $\overline{BD} = sen\,2\theta$. Como o dobro da área do triângulo OBA é igual a $BC.OA$ e também é igual $OC.BD$ temos que $2sen\,\theta\cos\theta = 1sen\,2\theta$. (Figura 5.4).

(2) Observe que $\overline{OD}+\overline{DC} = 1$, ou seja, $1\cos 2\theta + BC\cos\beta = 1$. Como $BC = 2sen\,\theta$ e $\cos\beta = sen\,\theta$, pois θ e β são complementares, temos que $\cos 2\theta + 2sen^2\theta = 1$, ou seja, $sen\,\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$, substituindo 2θ por θ e θ por $\dfrac{\theta}{2}$ temos o resultado desejado.

$\square$

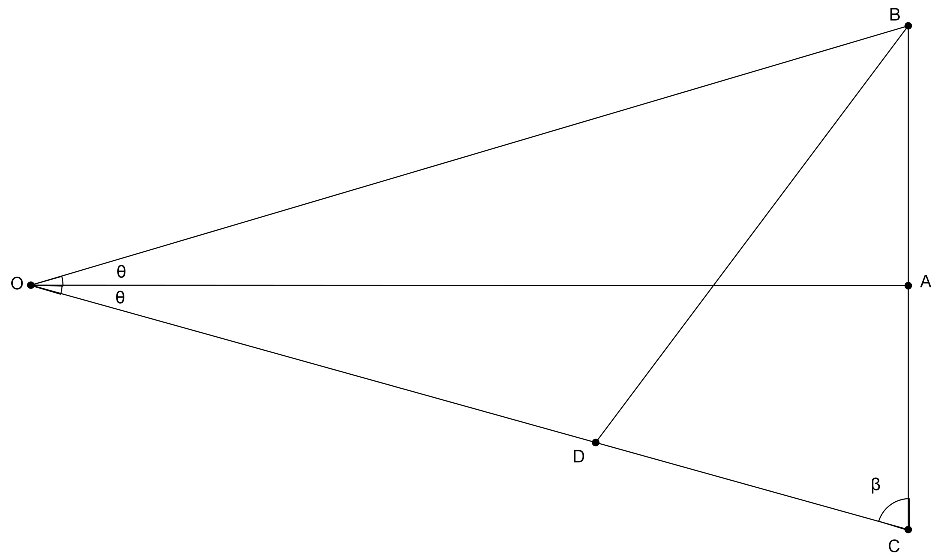

Figura 5.4: Referente à Proposição 5.3.

A proposição a seguir nos permitirá obter por argumentos geométricos os valores das relações trigonométricas das medidas $\frac{\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{20}$.

Proposição 5.4. *Se* $\theta = \frac{\pi}{10}$, *então* $sen\,\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Demonstração. Considere o triângulo ABC com $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $B\hat{A}C = \frac{\pi}{5}$.(Figura 5.5).

Traçamos a bissetriz CD de $A\hat{C}B$. Como os triângulos BCD e CDA são isósceles e seja $x = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Como os triângulos CDB e ABC são semelhantes, logo $\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$, ou seja, $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$. Portanto, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

No triângulo ABC (Figura 5.6) traçando a altura AH, temos que $sen\,\frac{\pi}{10} = \frac{HB}{AB} = \frac{x}{2}$ portanto $sen\,\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

□

Com o resultado da proposição anterior, da Proposição 5.3 e da Relação Fundamental da Trigonometria podemos deduzir os resultados de seno e cosseno quando θ igual a $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{20}$. Os mesmos são omitidos, ficando como treino para o leitor.

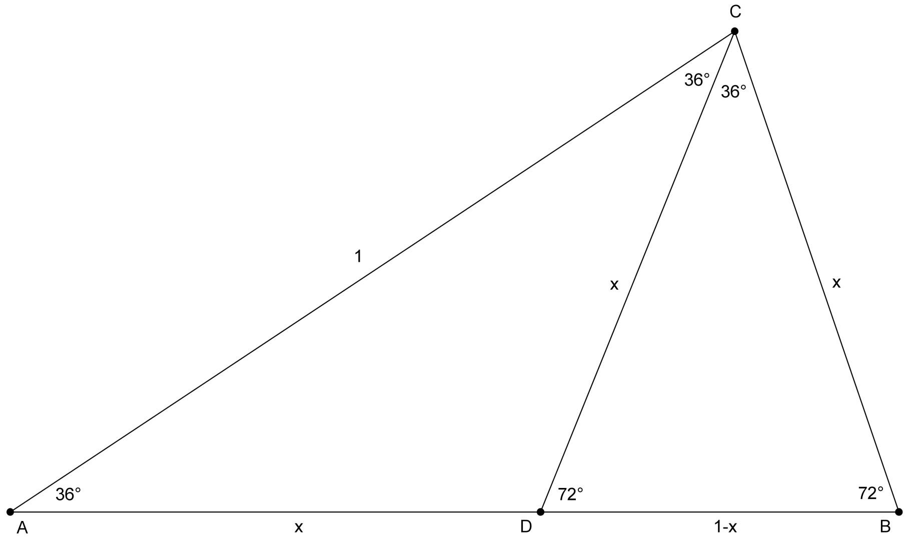

Figura 5.5: Referente à Proposição 5.4.

Proposição 5.5. *(Lei do Cosseno). Seja ABC um triângulo qualquer com lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Então $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$, onde a é o lado oposto ao vértice A, ou seja, a é o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$.*

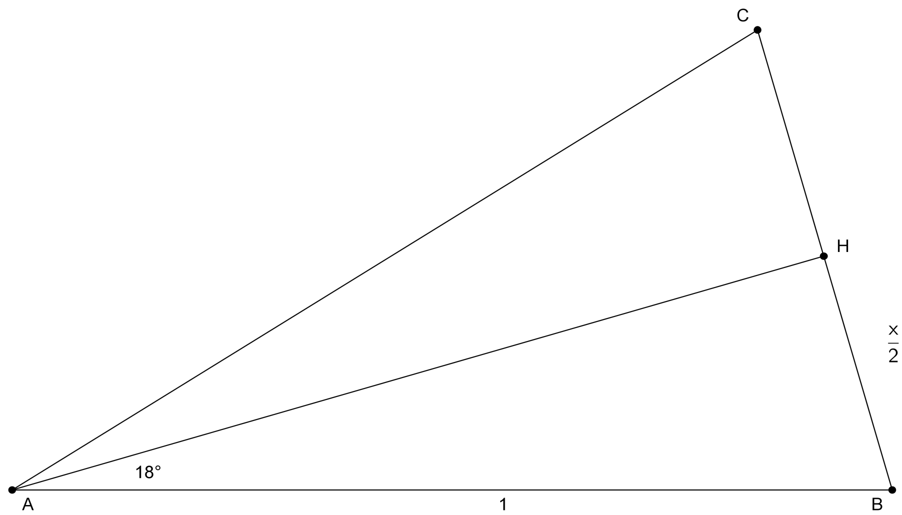

Figura 5.6: Referente à Proposição 5.4.

Demonstração. Temos três casos a considerar:

(1) $\hat{A}$ é agudo.

Seja $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$, onde H é a projeção ortogonal do vértice B sobre a reta por AC . Temos que o triângulo BHC é retângulo em H. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = h^2 + (b - x)^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$. Como $x = c\cos\hat{A}$, segue-se que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$.

(2) $\hat{A}$ é obtuso.

Fazendo de forma análoga ao caso (1), sejam $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$. Temos que o triângulo BHC é retângulo em H, logo, pelo Teorema de Pitágoras temos $a^2 = h^2 + (b+x)^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$. Como $x = c\cos(B\hat{A}H) = c(-\cos\hat{A})$, segue-se que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$. (Figura 5.8)

(3) $\hat{A}$ é reto.

Logo ABC é um triângulo retângulo em A e pelo Teorema de Pitágoras temos que $a^2 = b^2 + c^2$, como $\cos 90° = 0 = \cos\hat{A}$ temos que $a^2 = b^2 + c^2 - bc.\cos\hat{A}$.

□

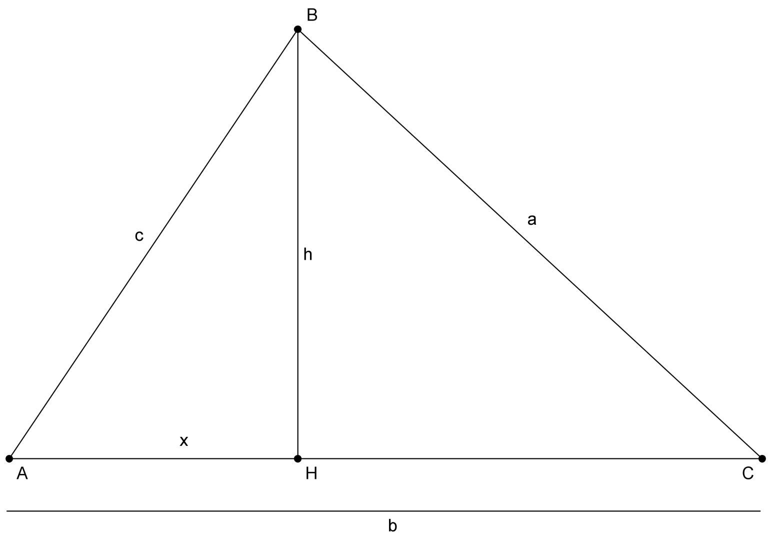

Figura 5.7: Referente à Proposição 5.5 (1).

Proposição 5.6. *(Lei do Seno) Em qualquer triângulo ABC de lados a, b e c opostos,* *respectivamente, aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ vale a relação: (Figura 5.9)*

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

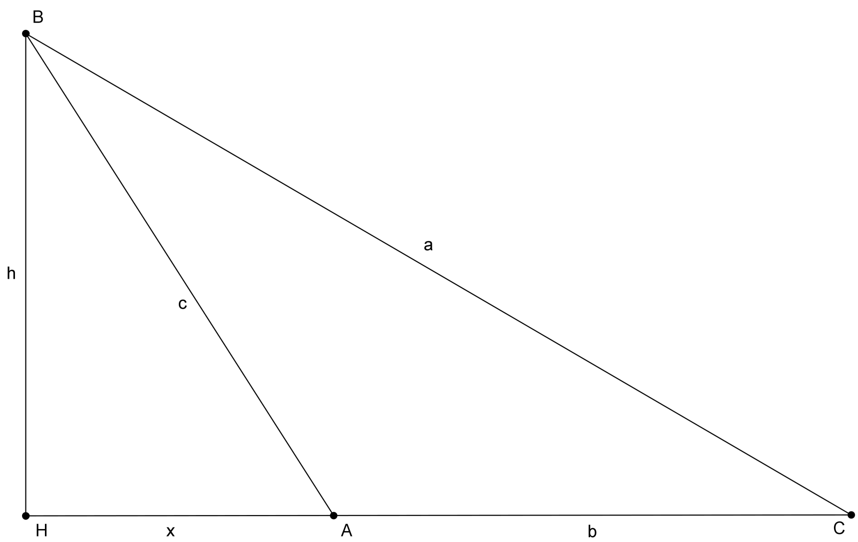

Figura 5.8: Referente à Proposição 5.5(2).

Demonstração. Temos que a área do triângulo ABC é dada por

$$A(ABC) = \frac{base.altura}{2}.$$

Observe que se ABC tem base b e altura h relativa ao lado AC temos que h é dado por $csen\,\hat{A}$, se $\hat{A}$ é agudo e por $csen\,(\pi - \hat{A})$ se $\hat{A}$ é obtuso e caso $\hat{A}$ seja reto temos $h = csen\,90°$ ou seja, $h = csen\,\hat{A}$ (Veja Figuras 5.9 e 5.10). Logo, sendo S a área do triângulo ABC temos que $S = \frac{1}{2}bcsen\,\hat{A}$, $S = \frac{1}{2}acsen\,\hat{B}$ e $S = \frac{1}{2}absen\,\hat{C}$, multiplicando a área S por a, depois por b e depois por c obtemos $aS = \frac{1}{2}abcsen\,\hat{A}$, $bS = \frac{1}{2}abcsen\,\hat{B}$ e $cS = \frac{1}{2}abcsen\,\hat{C}$, reescrevendo estas expressões temos $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{abc}{2S}$,

$\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{abc}{2S}$ e $\dfrac{c}{sen\,\hat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$. Logo,

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

$\square$

Proposição 5.7. *Dados os ângulos α e β, temos que:*

(1) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sen\,\alpha sen\,\beta$;

(2) $sen\,(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\cos\beta \pm sen\,\beta\cos\alpha$.

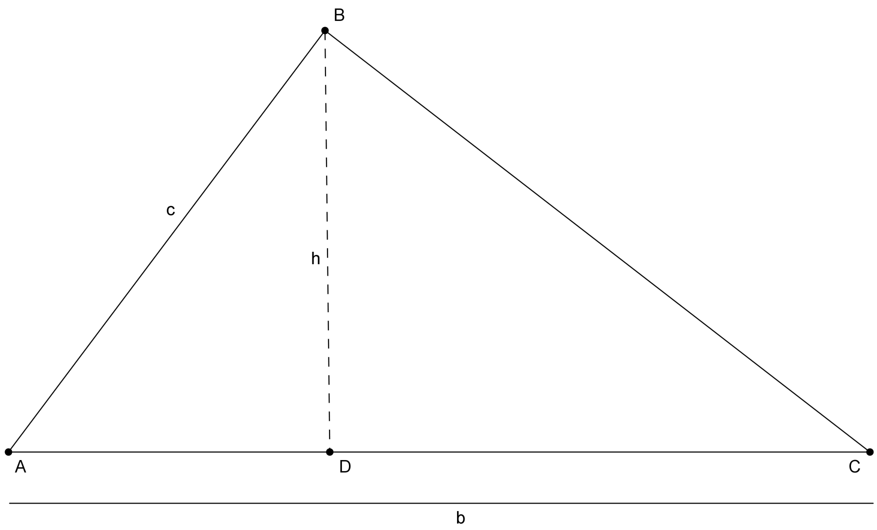

Figura 5.9: Referente à Proposição 5.6.

Demonstração. Existem vários modos de demonstrar as famosas fórmulas da adição e subtração de arcos trigonométricos. Daremos aqui uma demonstração que envolve triângulos retângulos. Nela admitimos tacitamente que α, β e $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$ são positivos e menores que $\dfrac{\pi}{2}$, isto sem perda de generalidade pois o caso geral pode ser reduzido a este [2].

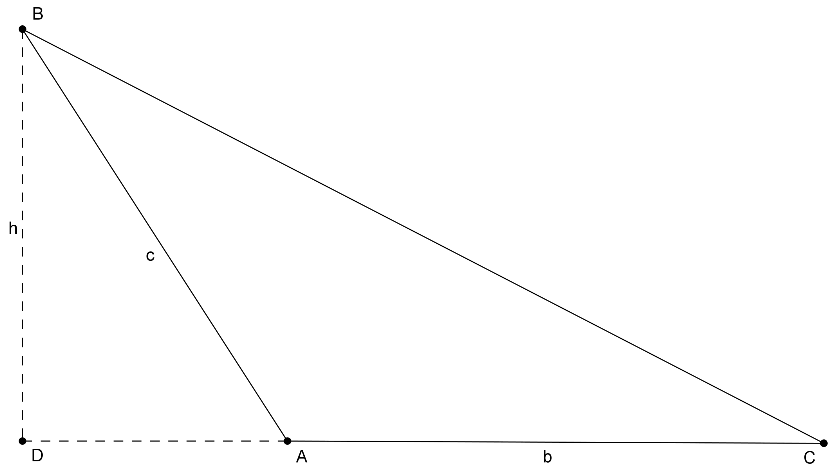

Figura 5.10: Referente à Proposição 5.6.

Seja uma circunferência de raio unitário e centro O, o qual coincide com a origem do sistema cartesiano XOY.

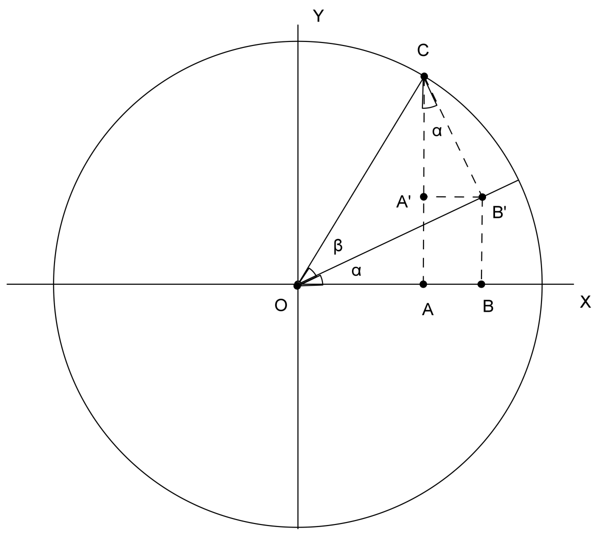

Figura 5.11: Referente à Proposição 5.7.

De acordo com Figura 5.11 temos, $CB' \perp OB'$, logo $\overline{AO} = \cos(\alpha+\beta)$, $\overline{OB'} = \cos\beta$,

$\overline{B'C} = sen\,\beta$, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = sen\,\alpha sen\,\beta$ e $\overline{OB} = \cos\alpha\cos\beta$. Logo $\overline{AO} = \overline{OB} - \overline{AB} = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha sen\,\beta$. Ou seja, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha sen\,\beta$. Tomando $-\beta$ em vez de β na fórmula acima, e observando que $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $sen\,(-\beta) = -sen\,\beta$, obtemos: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\,\alpha sen\,\beta$.

Para mostrar a segunda parte observe que $sen\,(\frac{\pi}{2}+t) = \cos t$ e $\cos(\frac{\pi}{2}+t) = -sen\,t$. Portanto, a fórmula de $\cos(\alpha+\beta)$ nos dá:

$$sen\,(\alpha+\beta) = -\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta) = -\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos\beta + sen\,(\frac{\pi}{2}+\alpha)sen\,\beta$$

ou seja

$$sen\,(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha$$

e

$$sen\,(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cos\beta - sen\,\beta\cos\alpha.$$

□

É uma consequência das fórmulas anteriores, as fórmulas para tangente da soma e diferença de dois arcos, assim como seno e cosseno de arcos duplos, a demonstração desta é deixada para o leitor práticá-las.

Uma das mais importantes aplicações da trigonometria se refere a topologia [2], principalmente no cálculo de distâncias. Vejamos alguns exemplos nos exercícios a seguir.

Exercício 5.1. *O topo B de uma torre vertical AB é visto de um ponto C do solo sob um ângulo de $30°$. A distância C à base da torre é $100m$. Calcular a altura da torre.*

Solução. Veja que este problema é uma mera aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo, pois o triângulo ABC é retângulo em A. (Figura 5.12).

Desta forma $tg\,30° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, ou seja, $tg\,30° = \frac{H}{100}$, onde $H = \overline{AB}$ é a altura da torre. Logo $H = 100\,tg\,30°$, ou seja, $H = 100\frac{\sqrt{3}}{3}m$.

⊙

Exercício 5.2. *Para medir a largura de um rio de margens paralelas sem atravessá-lo, um observador no ponto A visa um ponto fixo B na margem oposta (suponha que AB é perpendicular às margens). De A, ele traça uma perpendicular à linha AB e marca* *sobre ela um ponto C, visa os pontos B e A, e mede o ângulo $B\hat{C}A = 60°$. Sabendo que a distância sobre AB de A à margem M do rio é de $3\,m$ e que $\overline{AC} = 30\,m$, calcular a largura do rio.*

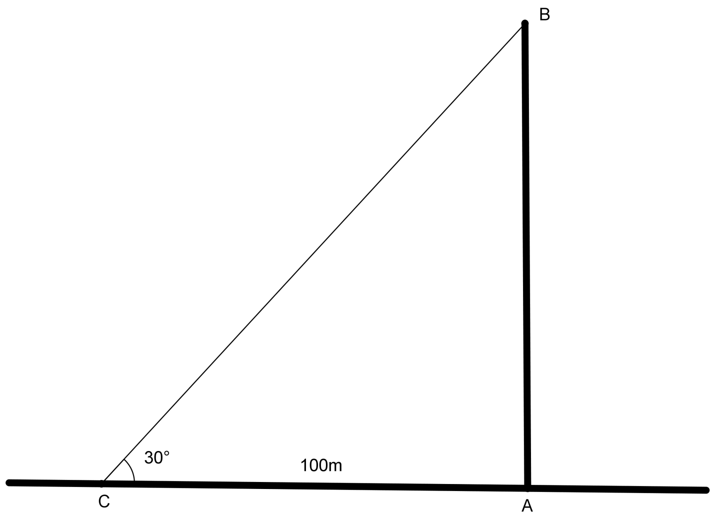

Figura 5.12: Referente ao Exercício 5.1.

Solução. Veja que por construção o triângulo ABC é retângulo em A (Figura 5.13).

O cateto $\overline{AB} = 3 + x$ onde x é a largura desejada do rio, logo aplicando razão trigonométrica tangente no triângulo ABC temos, $tg\,\hat{C} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Ou seja, $tg\,60° = \dfrac{3+x}{30}$. Logo $30\sqrt{3} = 3 + x$. Logo, a largura x do rio é dada por $x = (30\sqrt{3} - 3)\,m$.

⊙

Exercício 5.3. *Dois observadores A e B estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver uma pedra num ponto P na outra margem. Com seus teodolitos (instrumentos para medir ângulos) eles medem os ângulos $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = \beta$. Sabendo que $\overline{AB} = 120\,m$, $tg\,\alpha = 2$ e $tg\,\beta = 3$, determine a largura do rio.*

Solução. No triângulo PAC (Figura 5.14), temos que x é a altura pelo vértice P em relação a base AC, e portanto x é também a largura do rio. Seja P' o ponto no lado AC, tal que $\overline{PP'} = x$, podemos concluir que P' pertence a AC pois tangentes de α e de β são positivos logo os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos. Sejam $m = \overline{P'C}$ e $n = \overline{P'A}$. (Figura 5.14).

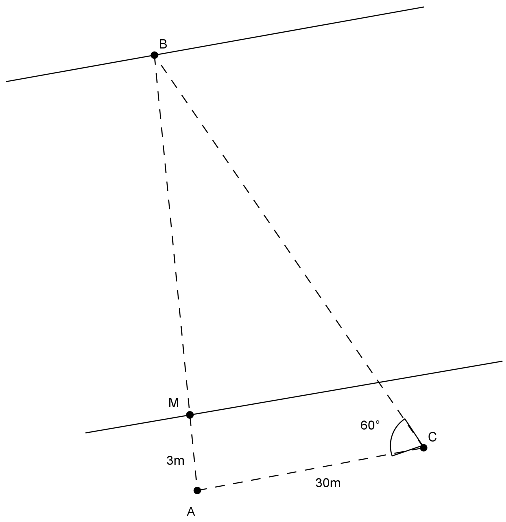

Figura 5.13: Referente ao Exercício 5.2.

Veja que os triângulos APP' e CPP' são retângulos em P' pois PP' é a altura do triângulo APC. Pela razão trigonométrica tangente temos, $tg\,\alpha = \dfrac{x}{n}$, logo $n = \dfrac{x}{2}$ e $tg\,\beta = \dfrac{x}{m}$, logo $m = \dfrac{x}{3}$. Portanto, $m + n = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3}$. Logo $120 = \dfrac{5x}{6}$, ou seja, $5x = 720$. Isto é $x = 144\,m$.

$\odot$

Exercício 5.4. *Sejam α, β e γ os ângulos que a diagonal de um paralelepípedo reto retângulo faz com as suas arestas adjacentes. Mostre que:* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Solução. Sem perda de generalidade podemos fazer coincidir um dos vértices do paralelepípedo com a origem do sistema XYZ e suas arestas com os eixos OX, OY e OZ. Desta forma, sendo D a diagonal do paralelepípedo em questão, esta faz ângulos α, β e γ com os eixos OX, OY e OZ, respectivamente. (Figura 5.15).

Observe que $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, onde a, b e c são as medidas das arestas do paralelepípedo. Além disso, observe que a face $HBCG$ está contida num plano ortogonal ao plano XOZ logo o triângulo ABG é retângulo em B, ou seja, $\cos\alpha = \dfrac{a}{D}$.

De forma análoga $\cos\beta = \dfrac{b}{D}$ e $\cos\gamma = \dfrac{c}{D}$.

Portanto $\cos^2\alpha = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\cos^2\beta = \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$ e $\cos^2\gamma = \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$. Logo,

$$\cos^2\alpha + cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1.$$

$\odot$

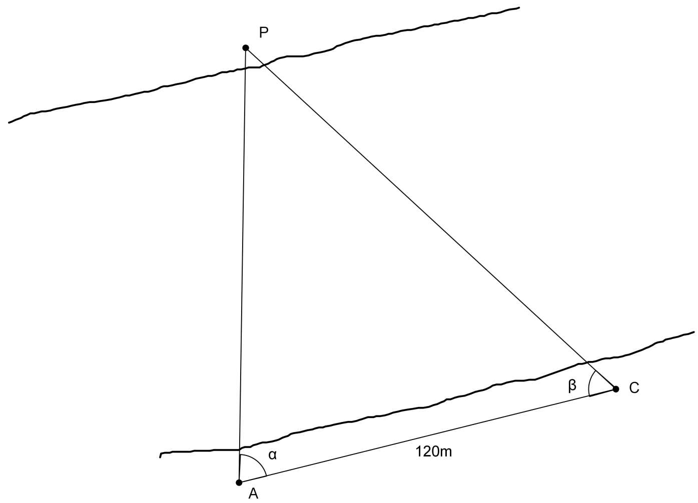

Figura 5.14: Referente ao Exercício 5.3.

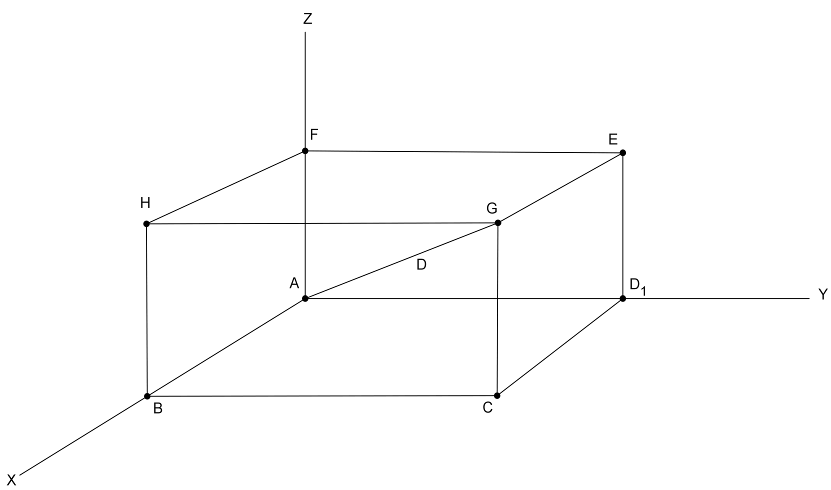

Figura 5.15: Referente ao Exercício 5.4.

Capítulo 6

Construções Geométricas com Triângulos

Segundo [13], os problemas de construção geométricas são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos, pois é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução da construção, e posterior conclusão, onde se verifica números de soluções distintas e também a compatibilidade dos dados.

Muitas vezes em construções geométricas, principalmente nas mais elaboradas é preciso fazer um esboço do que se quer, ou seja, onde se quer chegar com a construção, para então identificando os elementos dados se construir o que é necessário. Infelizmente as construções geométricas estão cada vez mais ausentes dos currículos escolares, este capítulo pretende ressaltar a importância das construções geométricas como instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria.

Proposição 6.1. *Sejam a, b e c três números positivos. Suponha que $|a-b| < c < a+b$. Então, pode-se construir um triângulo cujos lados medem a, b e c.*

Demonstração. Trace uma reta e sobre ela marque dois pontos A e B, tais que $\overline{AB} = c$. Com um compasso descreva, um círculo C_1 de centro A e raio b, e um círculo C_2 de centro B e raio a.

Como $|a-b| < c < a+b$, os dois círculo se interceptam. Chame quaisquer dos pontos da intersecção de C. O triângulo ABC tem lados medindo a, b e c. $\square$

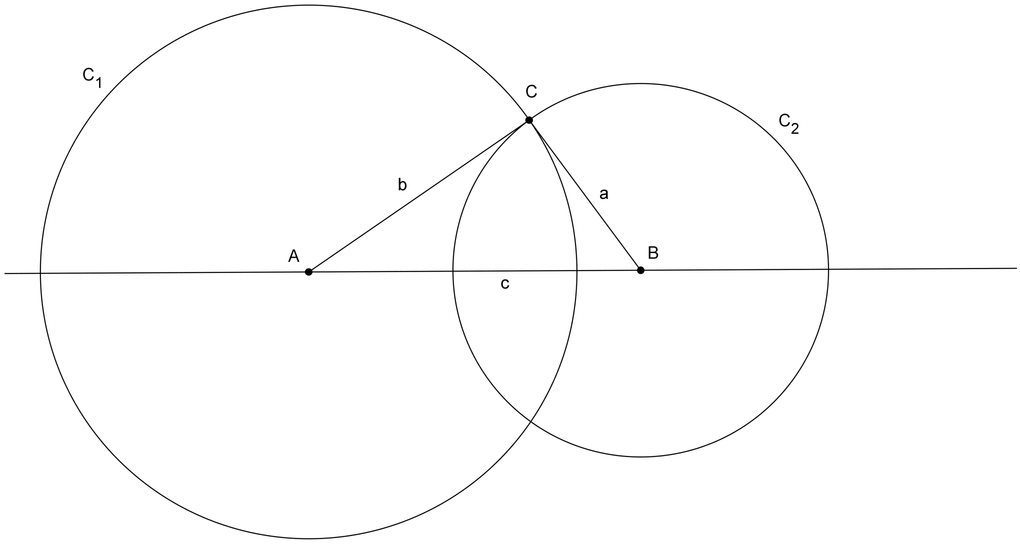

Figura 6.1: Referente à Proposição 6.1.

Por construção geométrica podemos obter a bissetriz de um ângulo.

Proposição 6.2. *Dado um ângulo $A\hat{O}B$, obtenha uma bissetriz deste ângulo.*

Demonstração. Seja o ângulo $A\hat{O}B$, de origem O formado pela abertura das semirretas OA e OB. Para construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ dado, trace um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo. Em seguida, traçamos dois círculos de mesmo raio $c > \dfrac{\overline{XY}}{2}$ com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. (Figura 6.2).

De fato, pela construção realizada os triângulos OXC e OYC são congruentes pelo caso LLL, portanto $X\hat{O}C = C\hat{O}Y$.

□

Nos exercícios resolvidos a seguir, temos algumas aplicações de Construções Geométricas envolvendo triângulos.

Exercício 6.1. *São dados dois pontos A e B fora de uma reta m. Determinar um ponto P sobre a reta m, tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja o menor possível.*

Solução.Temos dois casos a considerar. O primeiro é que os pontos A e B estejam em semiplanos distintos determinados pela reta m. Neste caso o segmento AB intercepta a reta m num ponto P, ou seja, este ponto P é o ponto solução do problema. De fato, se P' é qualquer outro ponto de m, então, pela desigualdade triangular, temos: $\overline{AP'} + \overline{P'B} \geq \overline{AB}$, ocorrendo igualdade se, e somente se, $P = P'$. (Figuras 6.3 e 6.4).

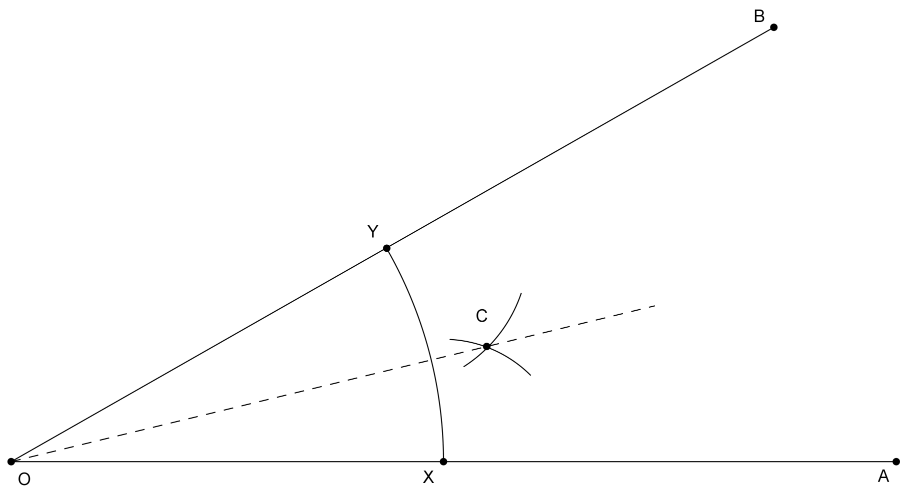

Figura 6.2: Referente à Proposição 6.2.

O segundo caso em que A e B estão em um mesmo semiplano. Neste caso, seja B' o simétrico do ponto B relativamente à reta m e seja P o ponto da intersecção do segmento AB' com a reta m.

Este ponto P é a solução do problema. De fato pois a reta m é mediatriz do segmento BB', por construção, logo $\overline{PB'} = \overline{PB}$, mas pela primeira parte vimos que o ponto P é único tal que $\overline{AP} + \overline{PB'}$ seja o menor possível, logo $\overline{AP} + \overline{PB}$ é a menor possível.

$\odot$

Exercício 6.2. *Construir o triângulo ABC sendo dados os lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e o ângulo $\hat{A} = \theta$.*

Solução. Escolhamos um dos lados dados, por exemplo c, e traçamos este em qualquer posição. A seguir construímos a semirreta AX tal que $B\hat{A}X = \theta$. O vértice C é então um dos pontos de interseção da semirreta AX com o círculo de centro B e raio a. (Figura 6.5).

Percebemos neste ponto, que o problema apresenta duas soluções, pois o círculo traçado intercepta a semirreta AX nos pontos C_1 e C_2. Assim, os triângulos ABC_1 e ABC_2 são solução do problema.

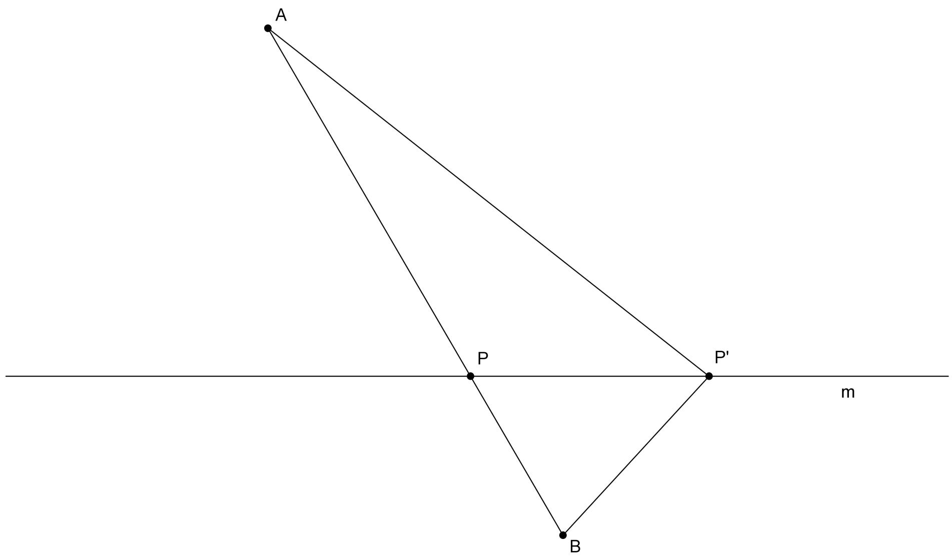

Figura 6.3: Referente ao Exercício 6.1.

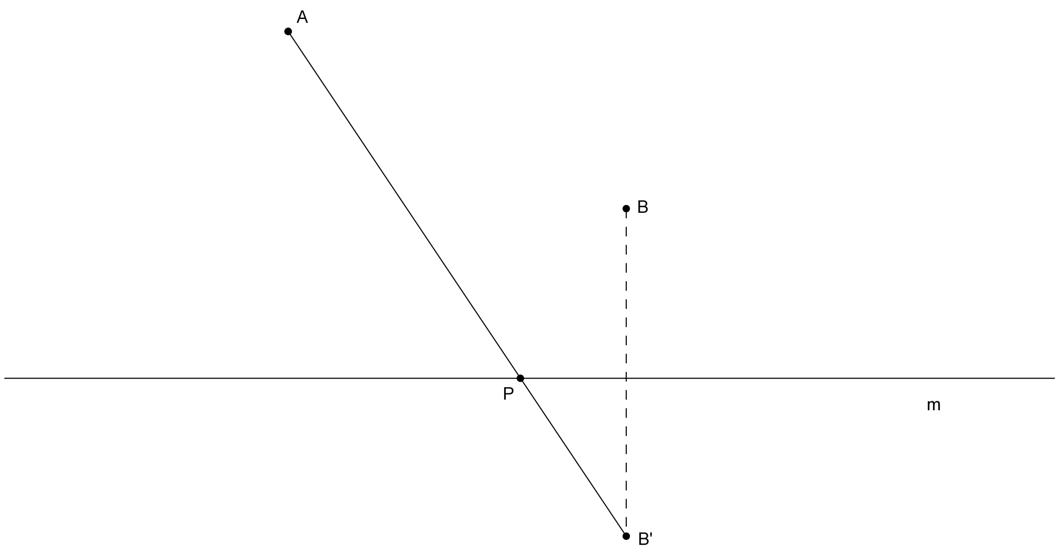

Figura 6.4: Referente ao Exercício 6.1.

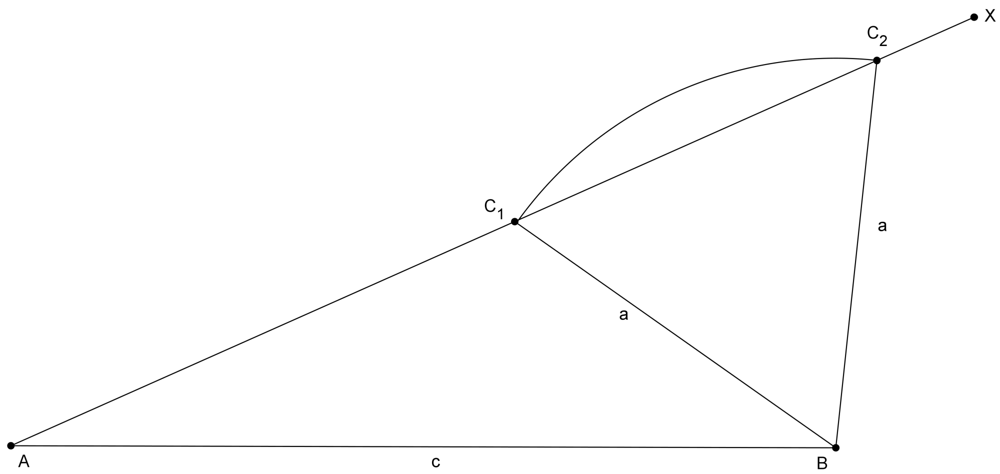

Figura 6.5: Referente ao Exercício 6.2.

Cabe aqui uma importante observação: o problema poderia não ter solução se $\overline{BC} = a$ fosse pequeno demais, ou seja, se $a < csen\theta$, pois neste caso o círculo de centro B e raio a não interceptaria a semirreta AX e teria uma única solução se $a = csen\theta$, neste caso o triângulo seria retângulo em C.

$\odot$

Exercício 6.3. *Construir o triângulo ABC sendo dados o lado $\overline{BC} = a$ e os ângulos α e β agudos.*

Solução. Tracemos o lado $\overline{BC} = a$ em qualquer posição. (Figura 6.6)

Tracemos a semirreta BX tal que $X\hat{B}C = \alpha$. Tracemos a semirreta CY tal que $Y\hat{C}B = \beta$. Marquemos o vértice A como o ponto de intersecção das semirretas BX e CY. O triângulo ABC obtido é a solução do problema.

$\odot$

Exercício 6.4. *É dado um ponto P sobre o lado AB do triângulo ABC. Traçar por P uma reta que divida esse triângulo em duas partes equivalentes, isto é, em duas partes com a mesma área.*

Solução. Transformemos o triângulo ABC no triângulo equivalente PBA' traçando por A a reta AA' paralela a PC onde A' é o ponto da intersecção desta com a reta BC. De fato, a área de ABC é igual a área de BPC mais a área de PCA, também temos que a área de PBA' é igual a área de BPC mais a área de PCA', por sua vez as áreas de PCA e PCA' são iguais, pois possuem a mesma base, o lado PC e mesma altura, a distância entre as paralelas PC e AA'. (Figura 6.7).

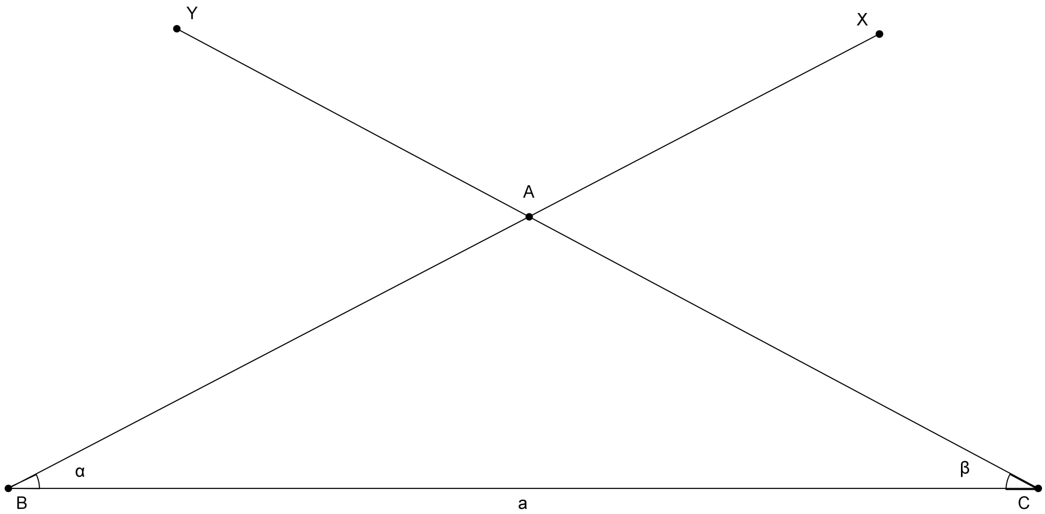

Figura 6.6: Referente ao Exercício 6.3.

Seja M o ponto médio de BA'. A mediana PM do triângulo PBA' divide esse triângulo em duas partes equivalentes e consequentemente divide ABC em duas partes também equivalentes.

$\odot$

Exercício 6.5. *Construir um triângulo conhecendo os pontos médios dos três lados.*

Solução. Unindo os três pontos médios A_m, B_m e C_m, temos as três bases médias do triângulo que desejamos, e estas determinam as direções dos lados do triângulo.

Após traçar os segmentos A_mB_m, A_mC_m e B_mC_m, trace retas paralelas, r_1 a A_mB_m por C_m, r_2 a A_mC_m por B_m e r_3 a B_mC_m por A_m. Sejam A, B e C as interseções das retas r_1 e r_2, r_1 e r_3 e r_2 e r_3, respectivamente. O triângulo de vértices A, B e C é o triângulo desejado. $\odot$

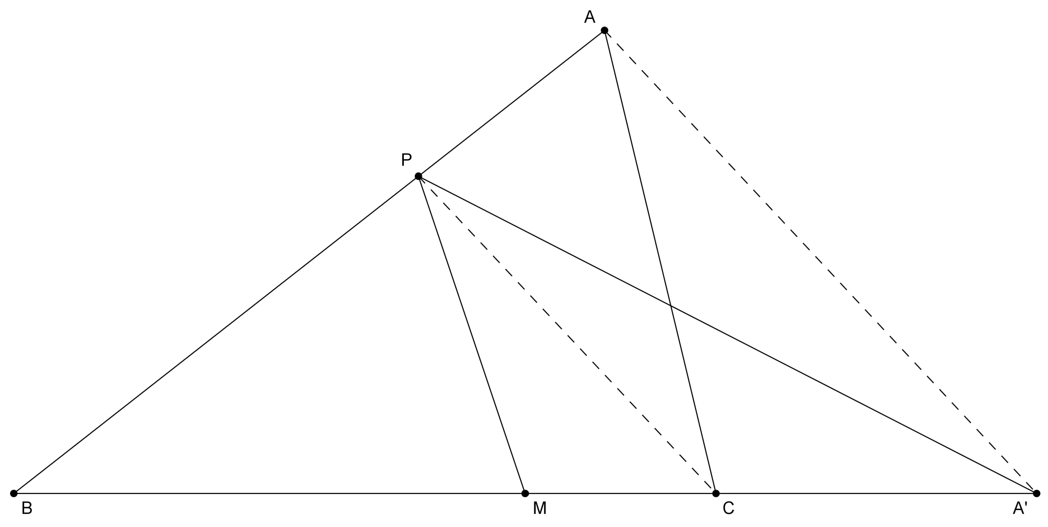

Figura 6.7: Referente ao Exercício 6.4.

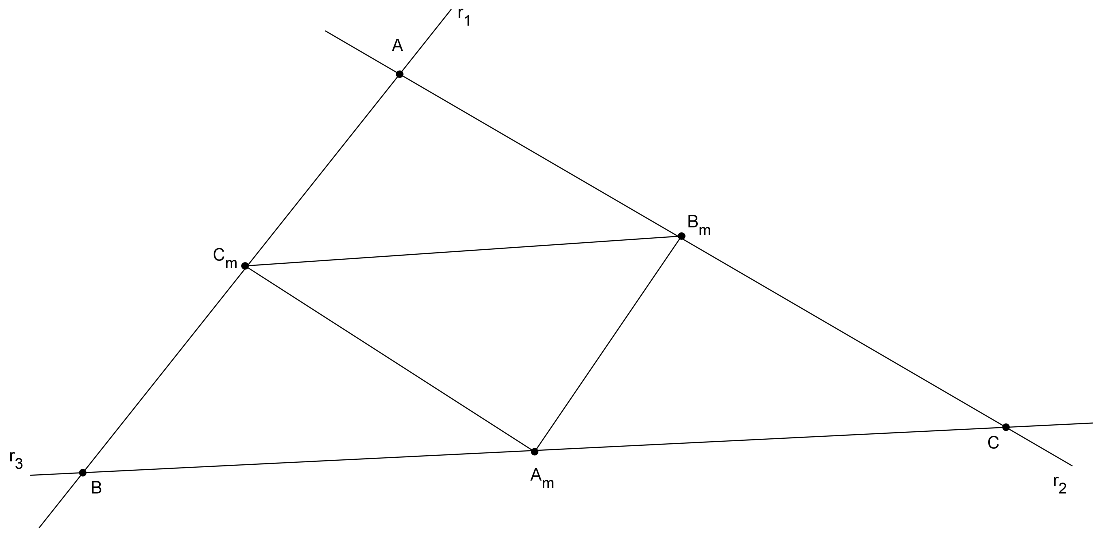

Figura 6.8: Referente ao Exercício 6.5.

Capítulo 7

Considerações finais

O ensino da Matemática passa por um período em que muito se discute como ensiná-la. Segundo [8] o principal problema está na formação dos professores, principalmente daqueles das séries inciais. Ainda segundo este, o ensino da Matemática em praticamente todo o ensino fundamental se dá apenas por uma apresentação de conceitos e por reprodução de exemplos e exercícios. Deixando de construir aquilo que é realmente relevante. A construção dos significados. Muitas vezes as demonstrações são deixadas de lado, teoremas e proposições são apresentados de forma dogmática, sem fazer sentido.

O que dizer então do ensino da Geometria, mais do que apresentar definições e desenhar figuras é necessário que a Geometria seja realmente construída a partir dos elementos básico, ponto, reta e plano, seguindo a vertente do rigor matemático. Segundo [8] a sequência Conceituação, Manipulação e Aplicação é uma receita simples no ensino da Matemática em todas as suas áreas.

Esta obra mostrou um exemplo muito particular. O estudo do triângulo, sua forma, suas medidas e algumas aplicações, de forma bem pontual, no sentido que não expandiu a outras formas, apresentado com o rigor necessário tanto na escrita como nos esboços gráficos, procurando apresentar com máxima clareza as idéias propostas, ainda em relação as figuras, estas tiveram o papel ilustrativo em todos os momentos que apareceram, não se faz uma demonstração matemática com figuras, mas podemos dispor delas para deixar claro as ideias argumentadas.

No processo de se construir Geometria, as construções geométricas são importantes ferramentas. Segundo [13] as construções geométricas tem sido relevadas a segundo plano no ensino da Geometria, o que segundo este, é uma infelicidade pois os problemas de construção geométrica são motivadores, ás vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades.

Não há um grande método ou uma receita infalível para o ensino da Matemática, mas há um consenso de que o ensino da Matemática tem como pré-requisito a boa formação do professor de Matemática. Não dá pra ensinar aquilo que não se sabe. A grosso modo para ensinar Geometria tem que saber Geometria, para ensinar sobre Triângulos tem que saber sobre Triângulos.

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana/João Lucas Marques Barbosa-11a edição. Rio de Janeiro*, SBM,259p. Coleção do Professor de Matemática. 2012.

[2] Carmo, Manfredo Perdigão do. *Trigonometria/Números complexos/ Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado e Eduardo Wagner - 3a edição. Rio de Janeiro*, SBM, 171p. Coleção do Professor de Matemática. 2005.

[3] Delgado, Jorge. *Geometria analítica / Jorge Delgado, Katia Frensel, Lhaylla Crissaff - Rio de Janeiro*, SBM, 369 p. Coleção Profmat. 2013.

[4] Hohenwarter, Markus. *GeoGebra, versão 5.0 2015. General Public License (GLP).*, Disponível em : HTTP://www.geogebra.org/. Acesso 04/01/2016.

[5] Lima, Elon Lages. *Meu professor de Matemática e outras histórias/ Elon Lages Lima - 6a edição. Rio de Janeiro*, SBM, 241p. Coleção do Professor de Matemática. 2012.

[6] Lima, Elon Lages. *Isometrias/ Elon Lages Lima - Rio de Janeiro*, SBM, 94p. Coleção do Professor de Matemática. 1996.

[7] Lima, Elon Lages. *Medida e forma em geometria/ Elon Lages Lima - 4a edição. Rio de Janeiro*, SBM, 136p. Coleção do Professor de Matemática. 2006.

[8] Lima, Elon Lages. *Matemática e Ensino/ Elon Lages Lima - 3a edição. Rio de Janeiro*, SBM, 250p. Coleção do Professor de Matemática. 2007.

[9] Neto, Antonio Caminha Muniz. *Geometria/ Antonio Caminha Muniz Neto - Rio de Janeiro*, SBM, 471 p. Coleção Profmat. 2013.

[10] Neto, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana/ Antonio Caminha Muniz Neto - 2a edição. Volume 2. Rio de Janeiro*, SBM, 464 p. Coleção Professor de Matemática. 2013.

[11] Reis, Genésio Lima. *Geometria Analítica/ Genésio Lima Reis* e *Valdir Vilmar da Silva - 2a edição. Rio de Janeiro*, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 242 p. 1996

[12] Roque, Tatiana. *Tópicos de Histórias da Matemática/ Tatiana Roque* e *João Bosco Pitombeira Carvalho - Rio de Janeiro*, SBM, 467 p. Coleção Profmat. 2012.

[13] Wagner, Eduardo. *Construções geométricas/ Eduardo Wagner com a colaboração de José Paulo Quinhões Carneiro - 6a edição. Rio de Janeiro*, SBM, 145p. Coleção do Professor de Matemática. 2007.