UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ONÉSIMO RODRIGUES PEREIRA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES

ARRAIAS-TO
2017

ONÉSIMO RODRIGUES PEREIRA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Idemar Vizolli.

ARRAIAS-TO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

P436s Pereira, Onésimo Rodrigues.

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES. / Onésimo Rodrigues Pereira. – Arraias, TO, 2017.

98 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

Orientador: Idemar Vizolli

1. Sequência Didática. 2. Adição de Frações. 3. Engenharia Didática. 4. Significados de Frações e Natureza das Quantidades. I. Título

CDD 510

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

ONÉSIMO RODRIGUES PEREIRA *

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 07 / 07 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Idemar Vizolli (Orientador)
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Maria Bethânia S. dos Santos
Prof. Dr(a). Maria Bethania Sardeiro dos Santos
Universidade Federal de Goiás (UFG/IME)

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais, Raimunda e Manoel, pelo apoio e incentivo durante o mestrado.

Agradecimentos

A Deus, pela graça e infinita misericórdia.

Aos meus pais Seu Nascimento (Manoel) e Dona Dica (Raimunda), por me apoiarem sempre. Jamais esquecerei do “boa viagem” de minha mãe todas às sextas-feira!

Ao colegiado do Curso de Matemática da Universidade Federal do Tocantins - *Campus* de Arraias.

Ao meu orientador, professor Dr. Idemar Vizolli, pelo apoio e amizade, além de sua dedicação e competência durante a elaboração deste trabalho, as quais foram fundamentais para a conclusão do estudo.

Aos meus colegas da primeira turma de mestrado da Universidade Federal do Tocantins - *Campus* de Arraias, em especial aos meus amigos Oficial do Bombeiro (Euvaldo Carvalho), Mineirinho (Ailton Rodrigues) e Ex-Peçonhento (Roney Feliciano).

Ao Instituto Federal do Tocantins (IFTO) pelo apoio no deslocamento até Arraias-TO.

Aos meus irmãos (Isabel, Isaque, Oneide, Eunice e Isaías) e amigos (velhos e novos) que me incentivaram nessa empreitada.

A CAPES pelo apoio financeiro.

"Os nossos pais amam-nos porque somos seus filhos, é um fato inalterável. Nos momentos de sucesso, isso pode parecer irrelevante, mas nas ocasiões de fracasso, oferecem um consolo e uma segurança que não se encontram em qualquer outro lugar."

(Bertrand Russell)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo a proposição de uma Sequência Didática (SD) com vistas ao processo de ensino e aprendizagem de adição de frações. Considerando o conjunto dos números racionais não-negativos $\mathbb{Q}_+$, a natureza das quantidades, bem como os diferentes significados de fração, propusemos uma SD para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. A elaboração da SD tomou como base a Engenharia Didática (ED) e é composta de 3 fases: o Diagnóstico, organizado em 8 tarefas; a Experimentação, constituída de 3 Atividades, cada uma delas subdivididas em tarefas; e a Avaliação, que contém 11 tarefas. Em cada fase, as tarefas foram organizadas considerando graus de complexidades cada vez maiores. A proposição do desenvolvimento da SD precede da realização do diagnóstico, com o intuito de apresentar os objetivos, metodologia e materiais em cada uma das atividades; identificar procedimentos sobre o modo como os estudantes resolvem cada uma das tarefas e possíveis dificuldades no processo e solução. Os resultados do presente estudo mostrou-se bastante profícuo, especialmente porque coloca ao professor o desafio de elaborar atividades pensando nas diferentes perspectivas que um dado conceito contempla, e ao estudante, o papel de agente ativo no processo de aprendizagem. Assim, tem-se mais uma possibilidade metodológica para o ensino de adição de frações.

Palavras-Chave: Sequência Didática. Adição de Frações. Engenharia Didática. Significados de fração. Natureza das quantidades.

Abstract

The present work proposing a Didactic Sequence (DS) with a view to the process of teaching and learning of fractions addition. Considering the set of rational numbers non-negatives $\mathbb{Q}_+$, the nature of the quantities, as well as the different meanings of fraction, we proposed a DS for students of the 6th year of Elementary School. The elaboration of DS was based on Didactic Engineering (DE) and is composed of 3 phases: Diagnosis, organized in 8 tasks; Experimentation, consisting of 3 Activities, each subdivided into tasks; and Evaluation, which contains 11 tasks. In each phase, the tasks were organized considering degrees of increasing complexity. The DS development proposal precedes the diagnosis, with the purpose of presenting the objectives, methodology and materials in each of the activities; identify procedures about how students solve each of the tasks and possible difficulties in the process and solution. The results of the present study proved to be very fruitful, especially as it places the teacher in the challenge of elaborating activities, thinking about the different perspectives that a given concept contemplates, and the student, the role of an active agent in the learning process. Thus, there is a further methodological possibility for the teaching of addition of fractions.

Keywords: Didactic Sequence. Fractions Addition. Didactic Engineering. Fraction meanings. Nature of quantities.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Desde que iniciamos nossa prática docente, nos deparamos com a dificuldade dos estudantes em apreender conceitos matemáticos, principalmente aqueles ligados à adição de frações. O que a princípio imaginamos é que esse conteúdo não foi abordado como deveria e que a experiência e o modo que trabalharmos podemos dirimir essas dificuldades. Entretanto, nem sempre a experiência que provém dos anos de trabalho ou a conversa com outros profissionais são suficientes para entender e sanar os problemas relacionados ao ensino de frações. Percebemos então que medidas devem ser tomadas. Mas o que fazer? Como saber se a nossa prática, os modelos, a experiência adquirida, as investigações..., responderão de forma adequada aos nossos anseios? Como avaliar o trabalho desenvolvido? Todos os estudantes devem ser avaliados igualmente? Quais as influências do local onde nos encontramos e dos meios que dispomos?

Certamente nós, profissionais da educação, temos práticas que consideramos eficazes, razoáveis e outras que precisam ser melhoradas, a questão reside na relatividade do que é eficiente ou não (principalmente na prática educativa) para uma pessoa ou para outra. Na grande maioria das profissões o conhecimento utilizado para tomar uma certa atitude vai além de conhecimentos empíricos. Certamente os profissionais que lançam mão de uma ou outra estratégia têm o mínimo de conhecimento que lhes permitem atuar com certa segurança no que fazem. No que tange à assuntos educacionais são vastas as referências teóricas em relação ao ensino de matemática dos mais variados conteúdos. Entretanto, o que muitas vezes emperram as nossas ações é o emaranhado de situações que essas novas atitudes podem desencadear (o que tira professor da sua zona de conforto), bem como a grande quantidade de variáveis que interferem no processo educativo, impossibilitando o controle do mesmo diante de situações de imprevisibilidade. É importante ressaltar que o sucesso desse processo depende da interação das mais diferentes variáveis que o compõem. Sabemos ainda que, em se tratando de ensino e aprendizagem, os reflexos aos mesmos estímulos podem ser diversos dependendo a quem e ao meio onde estes são aplicados, mas os referenciais os quais dispomos apontam para a utilização de instrumentos metodológicos que coloquem os estudantes no centro do processo de ensino e aprendizagem.

Quanto às variáveis que interferem no processo educativo, essas são por si só muito amplas e complexas e não se conhece todas elas. Entretanto, queremos colocar aqui, a aula como um microssistema (como afirma (1, 1998)) do processo de ensino e aprendizagem. Ela, desde que entendida como uma prática reflexiva, não pode ser reduzida ao momento em que os conceitos são aplicados aos estudantes. O planejamento e a avaliação são processos inseparáveis dessa prática. Nessa perspectiva, propomos um trabalho diferenciado em relação à metodologia que deve ser utilizada no ensino de frações, o desenvolvimento de atividades nas quais o professor seja um mediador e não o principal responsável pelo processo de ensino e aprendizagem, alvitramos um trabalho com Sequência Didática.

De acordo com (1, 1998), Sequência Didática é um conjunto de ações ordenadas, estruturadas e articuladas, que têm um início e um fim conhecido tanto pelo professor quanto pelos estudantes, as quais visam alcançar certos objetivos educacionais. A Sequência Didática vai além de uma forma de organizar as aulas, esta propõe uma sequência de atividades com características semelhantes, as quais por meio da participação nessas atividades os estudante consigam identificar e tecer considerações, construindo assim seu próprio conhecimento.

Em conformidade, o presente trabalho apresenta uma proposta de ensino de adição de frações fazendo uso de Sequência Didática, a qual será a base teórica para proposição das atividades. Para que fique claro a nossa proposta, apresentamos todo o referencial que embasou o nosso trabalho e uma Sequência Didática que exemplifica como a mesma pode ser elaborada para desenvolvimento na sala de aula. A SD foi apresentada na sessão 4. Nas sessões anteriores, apresentamos o aporte teórico que fundamenta a metodologia em questão.

Na primeira sessão apresentamos os caminhos percorridos para a elaboração do trabalho: a delimitação do estudo, os objetivos, a justificativa e a metodologia.

Na sessão seguinte apresentamos o aporte teórico. Nela expomos os conceitos de Sequência Didática, Sequência Didática Interativa e Sequência Fedathi, bem como estas devem ser estruturadas e como podem ser utilizadas como um recurso pedagógico. Apresentamos os papéis do professor e do estudante no desenvolvimento de uma Sequência Didática e as noções de contrato didático.

Na sessão 3 contamos um pouco da história das frações, diferenciamos quantidades contínuas e discretas e de natureza intensiva e extensiva. Detalhamos os diferentes significados de frações, frações equivalentes, bem como o conceito de adição de frações tem sido tratado em livros didáticos.

1 Os Caminhos Percorridos

A grande maioria dos estudantes que concluem o ensino fundamental e até mesmo o ensino médio não dominam alguns conceitos básicos envolvendo frações, principalmente os ligados às operações. Diante disso, nós professores de matemática devemos propor alternativas para superar esse problema. Apresentar atividades que possibilitem aos estudantes a aprendizagem das operações básicas com frações.

1.1 Delimitação do trabalho

Verificaremos como o conceito de adição de frações é tratado em livros didáticos utilizados pelos professores da educação básica de Palmas-TO e proporemos uma Sequência Didática que possibilite a aprendizagem desse conceito.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Elaborar uma Sequência Didática com vistas à compreensão do conceito de adição de frações por estudantes da Educação Básica, considerando o conjunto dos números racionais não-negativos $\mathbb{Q}_+$.

1.2.2 Objetivos específicos

i) Identificar os diferentes significados de fração;

ii) Distinguir frações em quantidades contínuas e discretas, e de natureza intensiva e extensiva;

iii) Verificar como o conceito de adição de frações é tratado em livros didáticos;

iv) Propor uma Sequência Didática para o ensino de adição de frações, considerando os diferentes significados e a natureza das quantidades;

1.3 Justificativa

No dia a dia do labor docente vemos a dificuldade dos estudantes quanto à aprendizagem do conceito de frações. Além disso,

> Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...] (2, 2012, p. 36).

Da mesma forma, sabemos da dissociação entre o contexto que os estudantes veem o conceito de fração na sala de aula e como o mesmo é cobrado em avaliações de desempenho, haja vista que

> [...] quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais elas vêem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola; concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação problema (3, 1997, p. 212).

Assim, os problemas envolvendo frações são tratados de forma isolada na sala de aula. Em contrapartida, são cobrados com uma vasta gama de outros conceitos nas avaliações educacionais.

É importante atentarmos também para a formação inicial e continuada dos professores de Matemática, uma vez que,

> [...] se a concepção de ensino de Matemática estiver embasada na teoria construtivista de construção de conhecimentos matemáticos, o conhecimento de regras ou algoritmos, por parte de quem ensina, seria um item necessário, mas não seria suficiente. Neste caso, a organização do ensino é mais complexa, uma vez que não se trata de transmissão de conhecimentos em fase final de elaboração, o que demanda de quem ensina um amplo conhecimento conceitual do objeto de estudo que, obviamente, está além do conhecimento processual imposto pelas regras (4, 2007, p. 171).

Da mesma forma, a formação continuada não pode ser composta de teorias e práticas aleatórias,

> [...] é preciso estudar com os professores teorias e metodologias que fundamentem sua ação, de forma a melhorar o processo ensino e aprendizagem desta disciplina. Para tanto, o professor que atua na formação de professores deve discutir com eles, o conteúdo e os objetivos a que se destina a formação continuada, porque, ao contrário, teremos o que se pode chamar de "pacotes" de cursos, que pouco têm contribuído com a melhoria da qualidade da ação docente em sala de aula (5, 2006, p. 27-28).

Portanto, dado os problemas e dificuldades que os estudantes têm na aprendizagem do conceito de adição de fração e que por vezes essas dificuldades perduram durante toda a vida, é de suma importância desenvolvermos metodologias alternativas que possibilitem a aprendizagem desse conteúdo.

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal (6, 1998, p. 100-101).

Sem dúvida é necessário diversificar o processo de ensino e aprendizagem, buscando metodologias que possibilitem a participação do estudante na construção do próprio conhecimento. Metodologias essas que levem em conta as peculiaridades de cada um e que possibilite que eventuais dificuldades não fiquem à margem do processo. Além disso, muitos livros didáticos apresentam o mínimo de conceitos em relação a adição de frações, sem mencionar aqueles que apresentam os conceitos distorcidos, prejudicando assim a aprendizagem dos estudantes.

> Os planos de curso normalmente seguem o que apresentam os livros didáticos que estão disponíveis nas unidades escolares ou os que são mais acessíveis aos professores. Não apresentam preocupações com a realidade que cerca a comunidade, muito menos levam em consideração os conhecimentos históricos já assimilados pelo educando. Enfatizam os conteúdos programáticos pré-estabelecidos em detrimento das reais necessidades da clientela, o que torna o ensino de Matemática estático, enfadonho e dogmático (7, 2001, p. 11).

Objetivamos então, apresentar uma proposta de Sequência Didática para o estudo de adição de frações, direcionada principalmente a estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, haja vista que

> Com as frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa delas e ainda não a têm. Elas usam os termos corretos, falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às frações sem que ninguém perceba (3, 1997, p. 191).

Propomos uma sequência de ações que norteie o trabalho do professor e dê sentido ao conhecimento que se pretende construir.

No trabalho com Sequência Didática a maneira de organizar as atividades em relação às outras metodologias nos permite identificar de que forma se pretende ensinar.

Nesse sentido, a identificação das fases de uma Sequência Didática, as atividades que a compõe, a ordem em que aparecem, as relações que as atividades estabelecem entre si, a possibilidade de realizar mudanças (quando acharmos necessário), ou, até mesmo, incluir novas atividades, com o intuito de que a Sequência Didática melhore, possibilita um tratamento diferenciado em relação ao processo de ensino e aprendizagem, além de possibilitar que o conhecimento seja construído pelo estudante e que este não o receba como um emaranhado de ideias desconectadas. Ademais, as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é que a matemática estudada na sala de aula não seja embasada em coisas prontas e acabadas, mas na construção e apropriação do conhecimento pelo estudante, que se servirá dele para compreender e transformar a realidade em que vive. Além disso,

> Em todos os níveis de ensino, é comum que professores e textos resolvam algum "exercício–modelo" mostrando como se faz, pedindo em seguida que o estudante resolva dezenas de problemas semelhantes. Por "falta de tempo" preferem o "é assim que se faz" ao invés de deixar que os estudantes pensem por si próprios, experimentem as suas idéias, dêem ouvidos à sua intuição. Melhor seria se o professor fosse mais um orientador, um incentivador, um burilador das idéias e iniciativas dos estudantes (8, 1987, p. 32-33).

É importante ressaltar que professores e pesquisadores em matemática não têm medido esforços em busca de metodologias que possibilitem a aprendizagem dos conceitos matemáticos, e esta busca se torna mais evidente com o crescente número de eventos acadêmicos e publicações científicas produzidos nos últimos anos acerca da Educação Matemática. Daí, o que propomos aqui, é corroborar com uma alternativa que também venha contribuir no processo de ensino e aprendizagem, mais especificamente no que se refere à adição de frações.

1.4 A Metodologia da Engenharia Didática

Como a nossa pesquisa se dá com vistas a elaboração de uma proposta de Sequência Didática para estudantes da educação básica, adotamos como metodologia a Engenharia Didática.

De acordo (9, 2008), os conceitos iniciais de Engenharia Didática (Primeira Geração) surgiram na Didática da Matemática na década de 1980 e tinham como enfoque a didática francesa. Segundo Artigue (1988) *apud* (10, 2012), é um trabalho didático comparado ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, sujeita-se a um controle do tipo científico, mas ao mesmo tempo, é forçado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos purificados da ciência. Da mesma forma, esta metodologia tem como característica a experimentação, embasada nas realizações didáticas em sala de aula e sequências de ensino, oportunizando uma validação interna a partir da comparação das análises a priori e a posteriori.

Segundo (10, 2012), a Engenharia Didática, é constituída de 4 fases: Análises preliminares, Concepção e análise a priori das situações didáticas, Experimentação, e, Análise a posteriori e validação.

Análises preliminares: exposições iniciais sobre as teorias do assunto em questão, bem como dos conceitos os quais já foram adquiridos. Versa também sobre a análise epistemológica do ensino e de seus efeitos, das dificuldades dos estudantes, das condições e premissas para a realização didática.

Na elaboração da SD, essa etapa consiste em estudos de conhecimentos didáticos e dificuldades que surgem no processo de desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, bem como de pesquisas.

Concepção e análise a priori das situações didáticas: orientado pelas análises preliminares, o pesquisador/professor delimita os aspectos do conjunto no qual o ensino pode atuar, as chamadas variáveis microdidáticas ou macrodidáticas, a fim de:

> Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
>
> Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação;
>
> Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem (10, 2012, p. 27);

Na análise a priori descrevemos as escolhas feitas e as características de cada situação didática, analisando a importância dessas situações para o estudante, bem como predizendo procedimentos possíveis durante a realização do trabalho.

Experimentação: constitui-se do desenvolvimento da Sequência Didática, a partir dos objetivos e exigências da realização da pesquisa; instituição do contrato didático com os estudantes; e tomada de nota das observações feitas durante a experimentação.

Neste trabalho, a experimentação reside na elaboração da Sequência Didática, cujas tarefas obedecem graus de complexidade cada vez maiores em cada uma das fases da Engenharia Didática.

Análise a posteriori e validação: consiste na análise dos dados colhidos durante a experimentação, especialmente, os registros do que os estudantes produziram. A validação, é possível quando ao comparar as produções dos estudantes no decorrer do desenvolvimento da Sequência Didática, constata-se que houve ampliação da compreensão conceituaal do objeto de estudo.

No caso deste estudo, a validação consistiu na análise das possibilidades de ensino das atividades elaboradas na experimentação, bem como na formulação da Sequência Didática com vistas ao desenvolvimento em sala de aula.

Segundo (11, 2007), as atividades educacionais que são desenvolvidas ancoradas na Engenharia Didática, produzem significado ao conhecimento que se deseja construir, ao mesmo tempo em que trabalha a partir das dificuldades cognitivas dos estudantes, levando estes a produzirem autonomia intelectual.

Da mesma forma,

> Através da Engenharia Didática o professor tem a oportunidade de refletir e avaliar a sua ação educativa e é diante desse processo de reflexão que redireciona e resignifica o trabalho que desenvolve. Não existe ninguém melhor que o próprio professor para entender a complexidade dos fatos ocorridos em sala de aula, ninguém melhor para entender as dúvidas e dificuldades que os alunos apresentam, por isso, é ele quem deve buscar entender os motivos que impedem o aprendizado dos alunos investigando e refletindo as próprias ações educativas efetuadas em sala de aula (11, 2007, p. 08).

Segundo (12, 2005), Engenharia Didática é uma expressão de duplo sentido, uma vez que caracteriza produções para o ensino, como resultados de pesquisa, bem como uma metodologia de pesquisa a partir de experiências da sala de aula.

Ainda de acordo (9, 2008), uma Engenharia Didática (Segunda Geração), tem como objetivo principal o desenvolvimento de recursos de aprendidagem para o ensino regular, ou a formação de professores, o que, consequentemente, requer graus de complexidade distintos na elaboração das atividades de ensino. Em função da pergunta inicial de investigação, o autor distingue dois tipos de engenharias didáticas: a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD). A primeira preocupa-se em desenvolver fenômenos didáticos e estudá-los, com a intenção de produzir resultados da investigação, por meio de experimentações montadas em função da questão de pesquisa, sem preocupação em divulgar as situações utilizadas. Na segunda, o objetivo é a produção de recursos para professores ou para a formação de professores. Em ambos os casos os conhecimentos dos estudantes são controlados (teoricamente), mas é uma variável mais ou menos fixada na IDR, enquanto no caso da IDD é necessário prever adaptações e meios de condução. O papel do professor é controlado pela teoria, no caso da IDR, enquanto na IDD, uma flexibilidade nas decisões deve ser prevista. Já as exigências institucionais podem ser negligenciadas no caso da IDR, e incontornáveis no caso da IDD, consequentemente elas devem ser levadas em consideração teoricamente.

Na IDR, se o objetivo é estudar o meio para fazer evoluir os conhecimentos dos estudantes, o professor ocupa o lugar de professor e de investigador, todavia, suas ações, enquanto investigador, devem ser transparentes. Já no caso da IDD, o professor não faz parte da investigação, ele tem a inteira responsabilidade pelo ensino na classe.

1.4.1 Procedimentos metodológicos no desenvolvimento desse estudo

As origens e motivações do presente estudo fundamentam-se em nossa prática de sala de aula (que na maioria das vezes consiste no modelo engessado de reprodução dos conceitos dos livros didáticos), dos resultados de pesquisas sobre ensino frações, bem como do desempenho dos estudantes em provas oficiais. Assim, debruçamo-nos na pesquisa bibliográfica, fazendo leituras, fichamentos de textos, na busca de contribuições da utilização de Sequência Didática para construção do conhecimento. Verificamos ainda, como livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental, disponíveis nas escolas da rede municipal de Palmas-TO, tratam o conceito de adição de frações.

A partir de reflexões sobre a nossa prática e da revisão da literatura sobre frações, Engenharia Didática e SD, passamos a elaborar a Sequência Didática aqui apresentada. Ela é composta de 3 fases: o Diagnóstico organizado em 8 tarefas; a Experimentação constituída de 3 Atividades, cada uma delas subdivididas em tarefas; e a Avaliação que contém 11 tarefas. Em cada fase, as tarefas foram organizadas considerando graus de complexidades cada vez maiores. A proposição do desenvolvimento da SD precede de um diagnóstico, com o intuito de apresentar os objetivos, metodologia e materiais em cada uma das atividades; identificar procedimentos sobre o modo como os estudantes resolvem cada uma das tarefas e possíveis dificuldades no processo e solução. Por ocasião da apresentação da SD, esclareceremos melhor seu modo de organização.

Indicados os procedimentos metodológicos faz-se necessário apresentar o aporte teórico sobre Sequência Didática.

2 O Aporte Teórico

Nesta sessão apresentamos a base teórica utilizada para elaboração do nosso trabalho: Sequência Didática. Os tópicos a seguir referem-se, de acordo com as teorias utilizadas neste estudo, aos conceitos que possibilitarão a elaboração da nossa proposta. Organizamos a sessão em duas partes: (1) Sequência Didática e (2) Contrato didático e papéis do professor e do estudante no desenvolvimento de uma Sequência Didática.

2.1 Sequência Didática

Geralmente, a metodologia de ensino que utilizamos nas aulas de matemática é extremamente "tradicional": reprodução dos conceitos dos livros didáticos, exemplificação de forma expositiva e resolução de atividades. Além disso, quando um estudante tem dificuldade na resolução de um problema, a tendência natural é o professor apresentar a resposta ou ajudá-lo por meio de uma analogia, como se o conhecimento matemático fosse algo pronto e acabado. Entretanto, no ensino de matemática, o desenvolvimento de ideias e a construção do conhecimento pelo estudante é um dos pilares de aprendizagem. Assim, os conceitos matemáticos podem ser explorados sob diferentes pontos de vista (daí a necessidade de diferentes metodologias de ensino). Em contrapartida, o trabalho por meio de Sequência Didática permite ao estudante a própria construção dos conceitos matemáticos, à medida que estabelece relações entre cada etapa no desenvolvimento da mesma.

Segundo (13, 2013), o estudo por meio de Sequência Didática está associado a um trabalho sistemático com gêneros textuais desenvolvido pelo grupo de Genebra.

> Pensando, então, na importância do ensino dos gêneros na sala de aula, Dolz e Schneuwly (2004) formulam um modelo didático que tem por objetivo entender as particularidades de cada gênero baseado em estudos e teorias já desenvolvidos por pesquisadores da área, a fim de compreender a relação entre os gêneros trabalhados na escola e também os gêneros que fora dela funcionam como objeto de referência para o aprendizado do aluno, pois segundo os autores, a sequência didática possibilita aos alunos colocar em prática os aspectos da linguagem já internalizados, e aqueles que eles ainda não têm domínio, possibilitando-lhes aprender e compreender melhor o conteúdo trabalhado pelo professor (14, 2007, p. 05).

Segundo (1, 1998), Sequência Didática é um conjunto de atividades elaboradas de modo a desenvolver certas competências e habilidades. É algo intencional. Sabemos onde queremos chegar e para isso traçamos o caminho para que se chegue a tal. Consiste num conjunto organizado de materiais de ensino destinados a permitir a aprendizagem de um determinado conteúdo. Deve ser composta de recursos de ensino para os estudantes e orientações para o professor. É auto-suficiente, tal que se de algum modo chegue ao conhecimento de um professor, permita que este conduza um processo de ensino e aprendizagem de sucesso.

Da mesma forma, segundo (15, 2015),

> As Sequências Didáticas são planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, e organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar, envolvem atividades de aprendizagem e avaliação, permitindo, assim, que o professor possa intervir nas atividades elaboradas, introduzir mudanças ou novas atividades para aperfeiçoar sua aula e torná-la facilitadora no processo da aprendizagem (15, *et al* 2015, p. 1).

Ainda segundo (1, 1998), a Sequência Didática trata-se de um modelo capaz de subsidiar a análise da prática profissional. Um modelo de mediação-interação, o qual opõe-se àquele em que o professor é um aplicador de fórmulas, embasando-se no pensamento prático e na capacidade de reflexão do docente. Propõe a avaliação constante do trabalho por parte do profissional. Utiliza uma prática onde cada fase do processo deve assegurar o sucesso na construção do conhecimento que se pretende adquirir, mediante às inúmeras variáveis que caracterizam o processo de intervenção pedagógica. Objetiva elaborar um conjunto de ações que potencialize o processo de ensino e aprendizagem.

Para (1, 1998), a ordenação e articulação das atividades é o diferencial nas metodologias de ensino. O primeiro aspecto que as caracterizam é a ordem em que propomos as atividades. Segundo o autor, a prática educativa é, até certo ponto, constituída de artificialidade, dado a dificuldade de estudo de todas as variáveis que incidem no processo de ensino e aprendizagem. Diante disso, o trabalho com Sequência Didática prioriza as intenções educacionais, definindo os conteúdos de aprendizagem e o papel de cada atividade proposta. Todavia, é imprescindível fazer um levantamento dos conceitos que se pretende trabalhar, bem como dos significados que esses conceitos têm para os estudantes, de modo que tenhamos elementos e seja possível desenvolver uma SD mais específica possível, possibilitando também a articulação com outras áreas do conhecimento. Além disso, o trabalho com Sequência Didática permite um processo avaliativo contínuo, haja vista que o trabalho foi elaborado pelo professor dentro das especificidades dos estudantes.

Dado o potencial da Sequência Didática como proposta de ensino e aprendizagem, a pergunta que fazemos agora é: como se faz uma Sequência Didática? Não existe uma receita ou um número fixo de etapas que devem ser seguidas para a construção de uma Sequência Didática, tudo depende de quem se destina e qual o contexto nos quais os envolvidos estão inseridos. Entretanto, segundo (16, 2004), a estrutura base de uma Sequência Didática contém uma seção de abertura, com a apresentação detalhada da tarefa oral ou escrita que os estudantes deverão realizar, seguida de uma produção inicial ou diagnóstica, na qual o professor avalia os conhecimentos que os estudantes detêm e ajusta as atividades de acordo com as dificuldades reais da turma (Análises Preliminares). Posteriormente, o trabalho se embasa em atividades específicas e progressivas as quais permitem que os estudantes compreendam as características dos conceitos em estudo (Experimentação). O número de atividades varia de acordo com os conteúdos trabalhados e são influenciadas diretamente pelos conhecimentos prévios apresentados pelos estudantes. A produção final, permite que os estudantes ponham em prática os conhecimentos adquiridos, ao mesmo tempo em que o professor avalia se os objetivos traçados foram alcançados (Validação).

No trabalho com Sequência Didática não é definido (e nem interessante) o tempo a ser dedicado em cada uma das etapas, nem um percurso típico. Se assim o fosse, iria contrariar a proposta de trabalho que é partir dos conhecimentos prévios dos estudantes com vista a construção de conhecimentos conforme suas capacidades. Podemos fazer uma previsão do tempo necessário ao desenvolvimento de cada etapa, mas não é necessário segui-lo rigorosamente. Portanto, reiteramos que a Sequência Didática não deve ser considerada como uma receita a ser seguida fielmente. Cabe ao professor a responsabilidade de efetuar escolhas de acordo com o conhecimento que este tem dos estudantes, embasando-se no desenrolar das atividades.

Corroborando com a metodologia supracitada (Sequência Didática), (17, 2012), apresenta uma proposta didático-metodológica denominada Sequência Didática Interativa (SDI), a qual, consiste numa (nova) proposta para o contexto da sala de aula, que objetiva facilitar o processo de ensino e aprendizagem. A SDI tem como procedimento metodológico a (re)construção de conceitos nos mais diferentes níveis de ensino. Busca a realização de atividades de forma individualizada, para em seguida, desenvolver atividades em grupos, visando a formalização de um só conceito sobre o tema em estudo. Assim, a Sequência Didática Interativa é uma

> Sequência de atividades, tendo como ponto de partida a aplicação do círculo hermenêutico - dialético para identificação de conceitos e construção de definições, que subsidiam os componentes curriculares (temas), segundo seus fundamentos teóricos, que são fundamentados por teorias educacionais, propostas pedagógicas e metodologias, que facilitam o processo ensino-aprendizagem (17, 2012, p. 19).

Ainda de acordo com (17, 2012), a SDI tem como ponto de partida os conceitos ou percepções de cada estudante sobre o tema estudado, ou seja, o que eles são capazes de expressar no processo inicial das atividades didático-pedagógica. Além disso, destaca a importância da compreensão que, esses conceitos prévios, são resultados de experiências vividas ao longo da vida ou no próprio contexto escolar (por meio de atividades pedagógicas), e além de proporcionar a integração dos diferentes sujeitos do processo de ensino e aprendizagem, tem como finalidade a formalização e/ou construção de um novo conhecimento. A SDI tem a tendência de ganhar cada vez mais espaço, haja vista, que possui elementos que também são orientações dos PCN, como a problematização e valorização das experiências que os estudantes possuem.

Ainda hoje, vemos práticas pedagógicas extremamente "tradicionais", que priorizam a memorização, por meio da valorização de conhecimentos prontos e acabados, os quais são levados aos estudantes e se tornam obsoletos para eles. Em contrapartida, segundo (17, 2012), num trabalho por meio da SDI, quando o professor lança aos estudantes um tema a ser estudado, primeiramente busca compreender as informações que eles têm sobre o assunto. Nesse sentido, há um momento de reflexão individual, onde cada estudante vai formular o seu conceito. Em seguida, há discussões em grupo, onde os estudantes têm a oportunidade de reformular ou aprimorar o conceito inicial. Por fim, é escolhido um membro de cada grupo para formular uma síntese do que foi estudado. Nesse momento, é de fundamental importância o professor utilizar-se da síntese apresentada pelo estudante para formalizar o conhecimento em estudo. É no momento que o estudante reconhece a aproximação da síntese apresentada com o conhecimento científico, que ele compreende sistematicamente os conceitos. Assim, essa metodologia muito robusta, que possui um referencial teórico muito bem fundamentado, apresenta, que é de suma importância conhecer as partes para que se chegue ao todo, e vice-versa. Vemos então a SDI como uma metodologia bastante inovadora no espaço escolar, uma vez que é necessário o professor conhecer os aspectos culturais e sociais que os estudantes estão inseridos.

A SDI valoriza o estudante como ser pensante e detentor de conhecimento, bem como o que ele sabe e traz das suas experiências, ainda que esses conhecimentos sejam "senso comum". De modo geral, a SDI parte de uma noção primária de um determinado conhecimento e a partir disso, o conhecimento científico é estruturado. Ela possibilita uma abordagem dinâmica, construtiva e interessante.

Com pressupostos semelhantes aos da SDI, (18, 2013), sugere que diante de um problema novo, o estudante deve percorrer os caminhos que um pesquisador matemático faz ao tentar resolvê-lo: faz uma análise (a priori), realiza experimentos, verifica possíveis erros, busca elementos que possibilitem chegar à solução, avalia os resultados e valida-os ou não. Dessa forma, tomando como referência o trabalho desenvolvido pelo pesquisador matemático, propõe a Sequência Fedathi como proposta metodológica. Esta, é organizada em quatro etapas sequenciais independentes: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

Segundo (18, 2013), na primeira etapa, a tomada de posição, o professor deve exibir ao estudante uma situação passível de ser passada de um contexto particular para um contexto generalizável, tendo esta, estreita relação com o conhecimento que se pretende construir. A abordagem da situação pode ser oral ou escrita, bem como, individual ou em grupos. Antes de apresentar o problema, o docente deverá realizar um diagnóstico sobre os requisitos que os estudantes devem possuir. O diagnóstico determina a organização e o processamento das atividades pelo professor. Na tomada de posição é interessante que se defina as regras e os papéis que devem ser desempenhados durante a realização das atividades. Nesse trabalho, tanto o professor como os estudantes estão inseridos no grupo com a função de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses. Vale ressaltar que este tem sido um dos grandes desafios da implementação da Sequência Fedathi, pois considerando que o estudante está acostumado com aulas "tradicionais", nos quais os conceitos são repassados (na maioria das vezes) de forma pronta e acabada, estes podem julgar o trabalho do professor irrelevante, dado que ele colocou-se na posição de estudante, fazendo os mesmos questionamentos referente ao problema proposto.

A segunda etapa (de acordo (18, 2013)), a maturação, é destinada à discussão entre o professor e os estudantes a respeito do problema apresentado. Nela, busca-se compreender os possíveis caminhos que possam levar a uma solução. Os estudantes deverão identificar os dados contidos na situação apresentada, quais as relações eles estabelecem entre si e o que a atividade solicita. A maturação é de grande importância na Sequência Fedathi, pois além de promover o desenvolvimento intelectual dos estudantes, possibilita que o professor tenha respostas quanto ao desenvolvimento e apreensão dos conceitos por parte dos mesmos.

Ainda segundo (18, 2013), duarante a maturação surgem questionamentos, na maioria da vezes, propostos pelos estudantes, mas que também podem ser levantados pelo professor, incitando com isso, reflexões, hipóteses e formulações, na busca da solução do problema, servindo também como orientação e estímulo. Eles surgem naturalmente entre os estudantes, tanto em atividades individuais como em grupos. Na maturação, os estudantes, tendem a querer certificar-se que estão no caminho certo. Nesse viés, o professor deve aproveitar-se da situação para potencializar o desenvolvimento das atividades, evitando ao máximo fornecer as respostas aos estudantes, induzindo-os a buscá-las por si próprio. (18, 2013), elenca alguns questionamentos comuns feito pelos estudantes, bem como sugere as respostas que devem ser dadas pelo professor:

> (Perguntas)
>
> Professor, eu posso resolver fazendo um desenho ou preciso usar fórmula? Professor, o problema pode ser resolvido usando a propriedade do ponto médio ou o senhor quer que faça de outro jeito? Professor, o senhor nunca passou um problema igual a este. Dá para resolver uma questão parecida? Professor, qual é a operação que eu uso para resolver este problema?
>
> (Respostas)
>
> Releia o problema com atenção e veja o que ele está solicitando. O seu desenho ajuda a chegar à resposta? Veja em seu caderno se já resolvemos alguma questão parecida. Por que utilizou este conceito na resolução? É isto mesmo que o problema está procurando? (18, 2013, p. 25-26).

Em conformidade, segundo (18, 2013), na terceira etapa (solução), devem ser organizados e apresentados o(s) modelo(s) que levem à solução do problema. A maneira que esses modelos são apresentados (verbalmente, escrito, desenhos, etc.) não é determinante para o sucesso da atividade, o importante é que haja troca de ideias entre os estudantes a respeito dos modelos propostos. Nessa etapa, o professor deve instigar os estudantes a explicarem seus modelos detalhadamente, bem como se os mesmos são suficientes para resolver o problema. Essa talvez, seja a etapa mais longa do processo, uma vez que os estudantes devem apresentar um bom raciocínio, e a maioria deles certamente estarão se debruçando em um trabalho relativamente novo. Durante a elaboração dos modelos, o professor tem um papel fundamental, haja vista que deve analisar junto aos estudantes qual o modelo mais adequado para responder o problema proposto. É importante destacar que serão raros os casos em que os modelos estarão completos. É natural que sejam apresentados ideias distorcidas ou iniciais, dado que, se a proposta é promover a construção de um conhecimento novo para o estudante, dificilmente fará uso do mesmo, ou pelos menos, não de forma sistematizada.

Por fim, (de acordo (18, 2013))a prova, consiste na conclusão e apresentação do modelo matemático sistematizado, que representa a solução do problema. É imprescindível uma boa didática por parte do professor para que os estudantes efetivamente possam compreender o que foi proposto. Nessa etapa, o professor deve manter o foco e a motivação do grupo, bem como, relacionar o modelo que conduz a solução do problema àqueles que foram propostos pelos estudantes, e sem esquecer o rigor matemático que os conceitos exigem. É na fase de prova que o conhecimento é construído pelos estudantes. Esta, representa também o momento de compreensão que, a partir do que foi construído, é possível deduzir tantos outros conceitos.

> É importante que o aluno perceba a importância de se trabalhar com modelos gerais, pois estes irão instrumentar-lhe para a resolução de outros problemas e situações, contribuindo também para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico-dedutivo, tipo de pensamento desejado e necessário para resolver, de maneira eficiente e lógica, problemas matemáticos do dia a dia, além de ser o tipo de raciocínio relevante para o desenvolvimento científico (18, 2013, p. 33).

Ao propor a Sequência Fedathi como alternativa de ensino e aprendizagem, ver-se-á como uma possibilidade de dar sentido ao aprendizado que se deseja construir, colocando o docente como mediador do processo, considerando as experiências trazidas pelos estudantes e os conhecimentos destes sobre o tema abordado.

Vejamos a seguir uma tabela com um resumo das estapas das sequências de ensino, na qual é possível verificar semelhanças e diferenças entre elas.

Tabela 1 – Resumo das Etapas das Sequências de Ensino

<table>
<tr><th>Sequência</th><th colspan="8">Etapas</th></tr>
<tr><td>Sequência Fedathi</td><td>Tomada de Posição: apresentação de um problema para um estudante ou um grupo de estudantes.</td><td colspan="2">Maturação: o professor propõe ao estudante que desenvolva seus raciocínios e argumentos.</td><td colspan="2">Solução: o professor propõe aos estudantes organizar, sistematizar e estruturar as suas respostas sobre os problemas em questão, tendo em vista que as ideias devem ser apresentadas ao grupo para que possam ser comparadas, rebatidas e discutidas entre eles.</td><td colspan="3">Prova: é apresentada a solução mais sistematizada, mais elaborada à resolução do problema para todos os estudantes, e é neste momento que são estabelecidas relações que envolvem o saber em questão e seu processo de validação.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sequência Didática Interativa</td><td colspan="5">Primeiro Momento</td><td colspan="3">Segundo Momento</td></tr>
<tr><td colspan="2">Uma vez definido o componente curricular a ser trabalhado, entregar para cada estudante do grupo-classe, e/ou participante de uma oficina pedagógica, uma pequena “ficha” solicitando-os que escrevam o que entendem sobre o tema.</td><td colspan="2">Depois que cada estudante/participante escrever o que entende sobre o tema em estudo (conceito), organizar o grupo-classe em pequenos grupos entre quatro e cinco pessoas. Uma vez formado estes pequenos grupos, solicitar aos estudantes que façam uma síntese dos conceitos que foram construídos por cada participante, resumindo em uma só frase (definição).</td><td>Na etapa seguinte, é solicitado que cada equipe escolha um representante, e assim é formado um novo grupo somente com o líder de cada equipe, para formulação de uma frase (conceito) a qual será a síntese de todos os pequenos grupos.</td><td colspan="2">Embasamento teórico do tema em Estudo: o professor e/ou coordenador deverá trabalhar o conteúdo teórico por meio de uma exposição oral, apoiada em livros e textos.</td><td>Após o embasamento teórico, cabe ao professor/coordenador escolher uma determinada atividade para fechamento do tema.</td></tr>
<tr><td>Sequência Didática</td><td colspan="2">Abertura, com a apresentação detalhada da tarefa oral ou escrita que os estudantes deverão realizar.</td><td colspan="2">Produção inicial ou diagnóstica, na qual o professor avalia os conhecimentos que os estudantes detêm e ajusta as atividades de acordo com as dificuldades reais da turma.</td><td colspan="2">Atividades específicas e progressivas as quais permitem que os estudantes compreendam as características dos conceitos em estudo. O número de atividades varia de acordo com os conteúdos trabalhados e são influenciados diretamente pelos conhecimentos prévios apresentados pelos estudantes.</td><td colspan="2">Produção final, a qual permite que os estudantes ponham em prática os conhecimentos adquiridos, ao mesmo tempo em que o professor avalia se os objetivos traçados foram alcançados.</td></tr>
</table>

Fonte: elaborada pelo autor - *software Word*

Da tabela, é possível verificar que, de modo geral, as sequências de ensino têm a mesma estrutura: apresentação, investigação dos conhecimentos prévios dos estudantes, análise e inferências do problema, solução/validação e avaliação. Podem diferir em relação ao número de etapas, como no caso da Sequência Didática Interativa, mas percorrem os mesmos caminhos.

Sabemos que o processo de ensino de adição de frações constitui-se uma questão a ser repensada pela instituição escolar, bem como na abordagem dos livros didáticos. Para a instituição escolar, porque se esta sabe que o domínio das operações básicas envolvendo frações é essencial aos estudantes, não pode se abster de proporcionar esse conhecimento aos mesmos. Para os livros didáticos, porque são os principais meios de pesquisas utilizados por professores e o conteúdo destes que se reproduzem nas salas de aula. Diante disso, o presente estudo voltou-se, categoricamente, para a investigação das possibilidades de utilização de Sequência Didática como recurso pedagógico para construção do conceito de adição de frações.

> Ao utilizarmos as sequências didáticas como recurso pedagógico da formação, buscamos uma forma de desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo na perspectiva de reflexão e mediação, na expectativa de construirmos o conhecimento compartilhado, coletiva e colaborativamente (15, 2015, *et al* p. 2).

Segundo (15, 2015), a melhor orientação para professores, tanto quem está iniciando na profissão como os mais experientes, é, sem dúvida, refletir a própria prática, produzindo assim novas metodologias de ensino. Afinal, o grande problema, é a falta de troca de experiências entres os profissionais da educação, uma vez que, a formação inicial e continuada dos professores não tem sido ministradas pelos colegas de profissão e as grandes experiências de sala de aula tem se perdido com o tempo. Isso dificulta a análise das produções do ponto de vista de outros colegas, tornando assim a prática docente um processo individualizado e o conhecimento não sistematizado.

Ainda segundo a autora, as Sequências Didáticas utilizadas com recurso pedagógico contribuem de maneira direta com as ações de negociações entre os professores, pesquisadores e professores-pesquisadores. Com isso, os professores têm a possibilidade de serem autores das suas atividades, e não apenas reprodutores de conceitos e atividades dos livros didáticos. Nesse sentido, a aceitação coletiva dos desafios da construção de uma Sequência Didática permitem que os processos de mediação e interação se desenvolvam na busca de compreendermos situações cotidianas do trabalho do professor, relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem.

Além disso,

> [...] o uso da sequência didática, como recurso pedagógico, permite um novo olhar sobre a organização curricular, com ênfase no ensino pautado em investigação, por meio de condições reais do cotidiano, partindo de problematizações que levem o aluno a conferir o seu conhecimento prévio com o conhecimento apresentado no espaço de aprendizagem, levando-o a se apropriar de novos significados, novos métodos de investigação e a produzir novos produtos e processos (15, 2015, *et al* p. 2-3).

2.2 Contrato Didático e papéis do professor e do estudante no desenvolvimento de uma Sequência Didática

Diferente do “modelo tradicional”, onde o professor é o detentor de todo o conhecimento, o trabalho com Sequência Didática exige uma abordagem distinta pelo professor, a qual desencadeará atitudes distintas pelos estudantes. Essas relações que se estabelecem através de uma negociação implícita entre professor e estudante na sala de aula denomina-se Contrato Didático.

Segundo Brosseau (1986) *apud* (19, 2008), Contrato Didático é o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos estudantes e o conjunto de comportamentos dos estudantes que são esperados pelo professor. Em outras palavras, são regras que implicitamente cada participante do processo de ensino e aprendizagem devem respeitar, as quais dizem do que cada um deverá prestar conta perante o outro.

Ainda de acordo (19, 2008), esse contrato define as regras de funcionamento da relação como, por exemplo, o direito de falar e de ouvir de cada uma das partes, a forma de relacionamento dos estudantes dentro da sala de aula, a forma de relação desses com o professor, a distribuição das responsabilidades, a determinação de prazos, a proibição ou permissão do uso de determinados recursos, dentre outros.

Para (20, 1999), a relação professor-estudantes depende de regras preestabelecidas e nem todas as regras relacionam-se com o terceiro elemento desta relação didática - o conhecimento. Mesmo assim, a aquisição deste é a motivação principal do contrato didático, o qual, a cada nova etapa de conhecimento, é renovado e renegociado. Porém, na maioria das vezes, essa negociação é implícita e passa desapercebida pelas partes envolvidas.

Segundo o mesmo autor, até alguns anos atrás, as relações entre iguais, na aula, eram consideradas um fator indesejável e incômodo, com prováveis influências negativas sobre o rendimento escolar, devendo, portanto, ser evitadas ou até mesmo eliminadas. Assim, há cerca de duas décadas atrás, o tipo de interação valorizado era apenas a interação adulto-criança, onde o adulto (detentor do saber) transmitia-o para a criança e esta (que era vista como incapaz de construir seu conhecimento) assimilava-o. Vemos entretanto que, com o desenvolvimento dos estudos em educação e psicologia, há uma grande discussão em favor da importância da construção do conhecimento pelo estudante e da importância do compartilhamento de significados entre eles, ou seja, da interação estudante-estudante; da influência educativa que um colega pode exercer sobre o outro.

No dia a dia do labor docente vemos que

> a prática pedagógica mais comum utilizada em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos [...] O aluno por sua vez, cumpre seu contrato se ele bem ou mal compreendeu a aula dada e consegue resolver corretamente ou não os exercícios [...] (19, 2008, p. 52).

Ainda segundo (19, 2008), nessa prática, é comum:

i) o professor resolver a questão no lugar do estudante (quando este encontra alguma dificuldade);

ii) acreditar-se que o estudante encontrará a resposta (esperada) de forma natural;

iii) o professor oferecer ajuda por meio de analogias;

iv) comportamentos aleatórios dos estudantee serem tratados como saber extraordinário;

v) priorizar-se do uso de técnicas para a resolução de problemas, em detrimento do verdadeiro saber matemático;

dentre outros.

Segundo (1, 1998), as relações que se estabelecem entre os professores, os estudantes e os conteúdos no processo de ensino e aprendizagem se sobrepõem às Sequências Didáticas, haja vista que o professor e os estudantes possuem alto grau de participação nesse processo. Dessa forma, o autor afirma que o professor precisa diversificar as estratégias, propor desafios, comparar, dirigir e estar atento à diversidade dos estudantes, o que significa estabelecer uma interação direta com eles.

Num trabalho voltado para o desenvolvimento de uma Sequência Didática, o professor possui uma série de funções, dentre elas, (1, 1998), destaca:

i) autonomia no planejamento e na aplicação do plano, o que permite uma adaptação de acordo com as necessidades dos estudantes;

ii) levar em conta as contribuições dos estudantes do início ao fim das atividades;

iii) auxiliar os estudantes a encontrarem sentido no que fazem, enfatizando os objetivos, levando-os a compreender o que se espera deles;

iv) estabelecer metas palpáveis;

v) oferecer ajuda adequada instigando o processo de construção do conhecimento pelos estudantes;

vi) estabelecer relações com o novo conteúdo apresentado e com as mais diversas áreas do conhecimento;

vii) exigir dos estudantes análise crítica, registros e avaliação do trabalho;

viii) favorecer a autoestima e o auto-conceito;

ix) estimular a comunicação entre professor-estudante e estudante-estudante;

x) avaliar conforme a capacidade e esforço de cada um.

(1, 1998) destaca ainda a importância dos conteúdos procedimentais e atitudinais no desenvolvimento da Sequência Didática. Nos procedimentais, o professor deverá criar condições adequadas às necessidades específicas de cada estudante; nos atitudinais, é preciso articular ações, não se atendo somente a debates, reflexões sobre comportamento colaborativo, tolerância, justiça, respeito mútuo, etc., é preciso vivenciar um clima de solidariedade, tolerância... O autor enfatiza a estreita relação do estudante com o saber, porém o professor intervém nessa relação, considerando a aprendizagem nas dimensões individual e coletiva, mas não assume o papel de único detentor do saber. Vale ressaltar que, o professor não se exime de sua docência e acompanha as etapas da aprendizagem. Para isso, considera os referenciais extra-curriculares, planejando a situação didática com o cuidado de propor problemas desafiadores, de acordo com o nível cognitivo dos estudantes e exige que os mesmos portem-se ativamente na construção do conhecimento.

Quanto ao que se espera dos estudantes, (1, 1998) destaca que, no desenvolvimento das atividades, estes sejam capazes de aplicar, analisar, sintetizar e avaliar o trabalho realizado por eles mesmos. E além disso,

i) promovam a reflexão conjunta do processo, ajudando uns aos outros a pensarem, de modo que sejam participantes da própria aprendizagem;

ii) sejam capazes de tomar decisões quanto às aprendizagens que devem ser realizadas, levando em conta o ponto pessoal de partida;

iii) lancem mão das habilidades necessárias;

iv) orientem seus pensamentos por meio de interrogações e formulação de hipóteses;

v) expliquem seus conhecimentos por meio de uma linguagem que possibilite generalização e reconceitualização das experiências vividas;

vi) verbalizem adequadamente em situações de atividades compartilhada, de modo que possibilite o confronto de ideias, a resolução dos problemas, bem como o uso destes em outras ocasiões;

No que se refere a relação entre professor e estudante na Sequência Fedathi, (18, 2013), destaca que o ensino é iniciado pelo professor. Este, deverá selecionar um problema relacionado ao conhecimento que pretende construir (a situação também pode partir dos estudantes). Posteriormente, deverá apresentar o problema de forma clara e objetiva (e com linguagem adequada) ao estudantes. Após a apresentação do problema, os estudantes irão explorá-lo na busca de uma solução, a qual será analisada pelo professor com o auxílio dos mesmos. Essas etapas correspondem ao debate em busca da solução do problema, visando a construção do conhecimento pelo estudante. Em outras palavras, correspondem à interação professor-saber-estudante.

Na Sequência Didática Interativa, segundo (17, 2012), a função do professor em sala de aula assume outro patamar – a de orientador. Atuando apenas na mediação do pensamento dos estudantes, quando propõe situações em que eles possam, de modo gradativo e significativo, construir o conceito necessário para evolução pessoal na ciência em estudo. Já o estudante, é responsável por investigar e solucionar as situções propostas, de modo que seja ator e autor no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, a SDI contribui na medida que proporciona aos estudantes a aprendizagem, por meio de uma metodologia utilizada por pesquisadores para analisar resultados.

3 Frações

Nesta sessão iremos tecer considerações a respeito de frações. A princípio, faremos uma explanação sobre os principais significados de frações e em seguida apresentaremos como o conceito de adição de frações têm sido tratados em livros didáticos. Organizamos a sessão em: (1) Frações: um pouco da história (2) Frações e seus diferentes significados; (3) Frações Equivalentes; (4) Adição de frações; e (5) Considerações sobre as abordagens de adição de frações nos livros didáticos;

3.1 Frações: um pouco da história

Com o passar dos anos, os números apareceram com uma velocidade incrível. Segundo (21, 1996), os estudiosos da matemática do século vinte cumpriram uma atividade intelectual altamente inovadora, que não é fácil de definir, mas boa parte do que hoje se chama matemática, deriva de ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma.

> Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida e podem datar de milhões de anos da humanidade. A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podem estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças - a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dessemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido da massa de experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e uma árvore tem algo em comum - sua unicidade (21, 1996, p. 31).

Ainda segundo (21, 1996), por épocas pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que os nossos sentidos percebem e foi somente no século dezenove que esta ciência pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza. Além disso, é evidente que a matemática surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio da “lei de sobrevivência”, a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos. O conceito de número é um exemplo disso.

> A ideia de números finalmente tornou-se suficientemente ampla e vivida para que se sentisse a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, (presumivelmente) a princípio comum na linguagem de sinais.

> Os dedos de uma mão podem facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos, não sendo o número 1 reconhecido inicialmente como um verdadeiro número. Usando os dedos das duas mãos podem ser representadas coleções de até dez elementos. Combinando dedos das mãos e pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, po- diam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com elementos de outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele frequentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação das mãos e dos pés. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje que difundiu do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés. Um estudo de várias centenas de tribos entre os índios americanos, por exemplo, mostrou que quase um terço usava quinário ou quinário-decimal, menos de um terço tinha um esquema binário, e os que usavam um sistema ternário formam menos de um por cento do grupo. O sistema vigesimal, com base vinte, ocorria em cerca de 10 por cento das tribos (21, 1996, p. 34).

Com relação aos números fracionários, Boyer afirma que:

> O conceito de número inteiro é o mais antigo da matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estavam relacionados de perto como os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto, as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática e não do período primitivo (21, 1996, p. 42).

Segundo (22, 2005), os egípcios que habitavam às margens do Rio Nilo, tinham a necessidade de medir as perdas causadas pelas enchentes do rio, e para tanto, usavam cordas com medições precisas. Entretanto, embora essas medidas fossem adaptadas constantemente, dificilmente cabia um número inteiro de vezes nos lados dos terrenos. Perceberam então a necessidade de criação de um novo tipo de número: os números fracionários, os quais eram representados por frações.

De acordo (21, 1996), os egípcios tinham familiaridade com a fração $\frac{2}{3}$ e tinha para esta um sinal especial, bem como para as frações da forma $\frac{n}{n+1}$, as quais eram chamadas de complemento de frações unitárias (frações de numerador igual a 1). A fração $\frac{2}{3}$ tinha uma papel especial nos processos aritméticos, tanto que para achar um terço de um número, primeiro tomavam dois terço, para em seguida dividir o valor encontrado ao meio. Além disso,

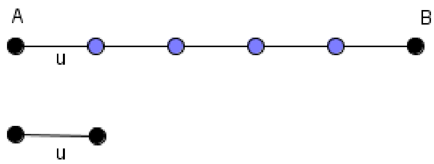
> é interessante verificar o modo como os egípcios encaravam frações de forma geral m/n. Não como uma "coisa" elementar, mas como parte de um processo incompleto. Por exemplo, a fração 3/5, para nós irredutível, era pensada como soma de três frações unitárias 1/3 + 1/5 + 1/15 (22, 2005, p. 11).

Ainda segundo esse autor, o porque do uso de frações unitárias ou a preferência de uma ou outra combinação das mesmas não são claramente explicados nos registros, entretanto, é evidente que os egípcios conheciam métodos eficazes na decomposição de fração como a adição de frações unitárias, embora tais métodos também não sejam identificados nos registros.

Em conformidade com (21, 1996), o conceito de número natural está relacionado a ideia de contagem. Número é um conceito abstrato e representa um conjunto de elementos com as mesmas características. Mais tarde, a necessidade de medição de grandezas conduz a noção de número real. Assim, dado por exemplo um segmento de reta (doravante AB), para medi-lo é necessário fixar uma unidade u, a qual por definição é igual a 1, e verificarmos quantas unidades iguais a u cabem em AB. Se u cabe um número n de vezes em AB dizemos que AB é igual a n.

Vejamos, por exemplo, a figura a seguir, a qual é composta por AB e u. Nesta, vemos claramente que $AB = 5u$.

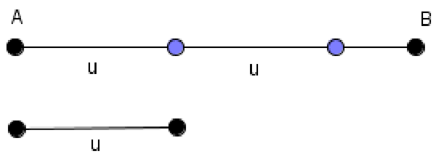
Figura 1 – $AB = 5u$



Fonte: elaborada pelo autor - software *GeoGebra*

Entretanto, pode acontecer de u não caber um número exato de vezes em AB, como na figura a seguir.

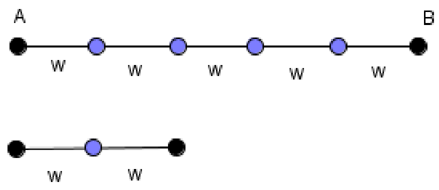
Figura 2 – $AB = \frac{5}{2}u$ (a)



Fonte: elaborada pelo autor - software *GeoGebra*

Esse tipo de situação nos leva a ideia de *fração* apresentada por (23, 2014). Assim, se AB não pode ser dividida em partes congruentes a u, procuramos um segmento w que caiba q vezes em u e p vezes em AB. Dessa forma, $u = q \cdot w$ e $AB = p \cdot w$. Consequentemente $w = \frac{1}{q} \cdot u$ e $AB = \frac{p}{q} \cdot u$, o que nos leva a concluir que os números naturais não são suficientes para o registro. Portanto, definimos w como a fração $\frac{1}{q}$ e AB será a fração $\frac{p}{q}$. Na Figura 3, por exemplo, $AB = 5w$ e $u = 2w$. Daí, $AB = \frac{5}{2}u$

Figura 3 – $AB = \frac{5}{2}u$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor - software *GeoGebra*

Formalmente definimos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q}=\{\tfrac{a}{b}, \text{ com } a,b \in \mathbb{Z}^1 \text{ e } b \neq 0\}$$

Vale ressaltar que, os casos nos quais for possível encontrar um segmento de reta que caiba um número inteiro de vezes em u e AB, dizemos que os segmentos são *comensuráveis*. Se isso não for possível, dizemos que u e AB são *incomensuráveis* e recairemos em um novo conjunto numérico: os números irracionais. Entretanto, o estudo desse conjunto foge o interesse desse trabalho.

3.2 Frações e seus diferentes significados

A compreensão de um conceito matemático exige a análise deste sob diferentes pontos de vista, assim, consideramos pertinente descrever os principais significados de frações.

Segundo Nunes (2003) *apud* (24, 2011), o conceito de fração pode ser facilmente compreendido se embasado em cinco significados: número, relação parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Vejamos a seguir, como a autora caracteriza cada um desses significados.

Número: Uma fração pode assumir o significado de número, não havendo assim a necessidade de um contexto para ser compreendida. Dessa forma, as frações podem, por exemplo, ser posicionadas na reta numérica. Geralmente os livros didáticos abordam esse significado como uma propriedade das frações, o que prejudica a construção do conceito pelos estudantes. Entretanto, é importante que este significado seja trabalhado adequadamente, bem como a representação de frações em números decimais. É necessário ir além de exercícios do tipo: “represente $\frac{2}{3}$ na reta numérica” ou “represente 0,75 na reta numérica”.

[1] Conjunto dos números inteiros.

Relação Parte-Todo: Esta, representa a divisão do todo em “p” partes iguais, sendo que, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{p}$ do inteiro. A Relação Parte-Todo resume-se em um significado onde a fração é dividida em Numerador e Denominador. O Denominador representa em quantas partes o todo foi dividido e o Numerador, quantas partes do todo foram consideradas. Por exemplo: de uma pizza de 12 pedaços, João comeu 3. Que fração representa a parte da pizza que João comeu? E a que representa a parte que restou? Este significado é muito utilizado nas abordagens dos autores em livros didáticos.

Medida: Neste caso, a ideia é de comparação entre duas grandezas, como por exemplo, utilizar uma parte para analisar quantas destas cabem em outra. Veja: uma garrafa térmica tem capacidade de 5 litros. Quantos copos de 200 mililitros são necessário para enchê-la completamente?

Quociente: Este significado é utilizado quando em determinada situação a divisão é o recurso empregado para solucionar o problema. Neste conceito, o numerador e o denominador geralmente representam variáveis distintas e é pouco explorado pelos livros didáticos. Por exemplo: duas barras de chocolate foram divididas entres 3 pessoas. Que parte coube a cada uma delas?

Operador Multiplicativo: Neste significado, as frações são tratados como um fator multiplicativo, no qual, um número deve ser multiplicado pelo numerador e em seguida dividido pelo denominador. Este significado é bastante explorado em livros didáticos, principalmente em problemas do tipo: “quanto é $\frac{p}{q}$ de x?”.

É comum (talvez pela maior predominância nos materiais didáticos) o conceito de fração ser relacionado à ideia de parte-todo, no qual as áreas de figuras são divididas em partes iguais e a fração é conceituada como o número de partes pintadas “sobre” o número total de partes. Nesse viés, as crianças são levadas a construir ideias com base somente na percepção visual, ao invés de serem incentivadas a estabelecer relações nas mais diversas possibilidades de exploração do conceito. Entretanto, a valorização de alguns significados de frações em detrimento de outros não garante a construção do conhecimento por parte do estudante, sugerindo assim, a necessidade de outras abordagens por parte do professor.

Segundo (3, 1997), em se tratando de frações, podemos caracterizá-las de acordo à natureza das quantidades que a envolve. Assim, as quantidades podem ser:

Contínuas: são aquelas que não perdem suas características, mesmo se divididas indefinidamente. Por exemplo, uma barra de chocolate pode ser dividida inúmeras vezes e não deixará de ser barra de chocolate.

ou

Discretas: dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, os quais representam o todo, e a divisão do mesmo deve produzir subconjuntos de elementos com as mesmas características. É o que encontramos por exemplo, ao dividir 10 balas entre 5 crianças.

Em ambos os casos, segundo (25, 2009), as quantidades podem ser ainda:

Extensivas: baseia-se na comparação entre duas quantidades de mesma natureza e na lógica parte-todo.

ou

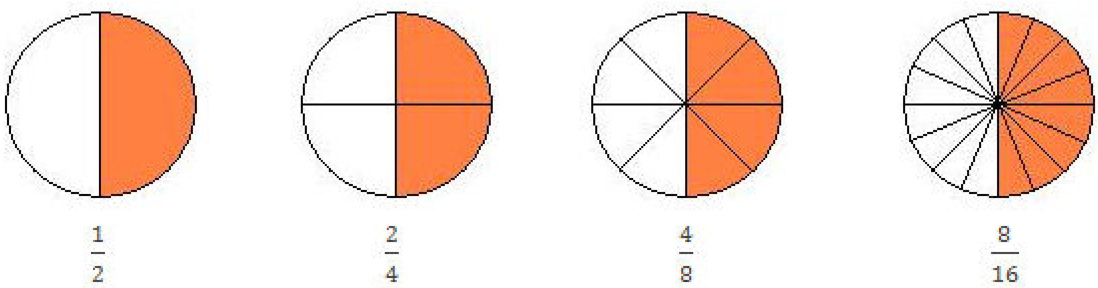
Intensivas: baseia-se na comparação entre duas quantidades de naturezas diferentes.

3.3 Frações Equivalentes

Definimos Frações Equivalentes como aquelas que representam a mesma parte de um inteiro.

Na figura a seguir, vemos que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$, representam a mesma parte do inteiro e portanto são equivalentes.

Figura 4 – Frações Equivalentes



Fonte: elaborada pelo autor - software *GeoGebra*

Logo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$.

É fácil ver que podemos obter as frações partindo de uma para as outras:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$

Daí, uma propriedade importante das frações equivalentes é que podemos obtê-las multiplicado ou dividindo o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero.

3.4 Adição de frações

É comum estudantes de todas as idades cometerem erros quando se trata de adição de frações, principalmente daquelas com denominadores diferentes. A maioria dos erros são quase que padrões. Quem nunca viu, por exemplo, estudantes adicionarem numeradores e denominadores de frações ao desenvolver essa operação?

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{2+3}{5+8}$$

Erros nas operações com frações podem ser causados pelo uso excessivo de fórmulas que são adotadas no ensino de matemática. Além disso,

> cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$,... são diferentes representações de um mesmo número;
>
> a comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
>
> se o tamanho da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 83$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
>
> se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
>
> se a seqüência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87 (6, 1998, p. 101);

Além disso, o estudante pode estar confundindo adição de frações com o método de adição de números naturais, devido à semelhança das notações. Uma alternativa para aproveitamento desse tipo de erro, é explorar situações em que este algoritmo seja válido, considerando por exemplo, a razão $\frac{a}{b}$ como a relação $\frac{gols}{jogos}$, em etapas distintas de uma competição de futebol.

O que os PCN sugerem é que

> O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos ("divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima", "inverte a segunda e multiplica") e os, procedimentos mecânicos que limitam de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo (6, 1998, p. 67).

Além disso, é aconselhável que a intuição desempenhe o papel mais importante no ensino de frações. Que este, sobreponha-se ao domínio de fórmulas que atrofiam o desenvolvimento do raciocínio do estudante. Faz-se necessário um trabalho voltado para situações do cotidiano, uma vez que problemas envolvendo frações que estão presente no dia a dia são mais simples de serem resolvidos (intuitivamente) e proporcionam o desenvolvimento do raciocínio lógico, agilidade e compreensão dos conceitos, evitando assim respostas absurdas.

3.4.1 Adição de frações em livros didáticos

Nesta seção objetivamos verificar como o conceito de adição de frações tem sido abordado em livros didáticos. Para tanto, selecionamos 6 livros do 6° ano do ensino fundamental adotados pelas escolas púbicas municipais de Palmas-TO do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2017.

Vejamos a seguir a tabela que descreve cada um dos livros:

Tabela 2 – Livros Didáticos

Identificação	**Coleção**	**Autores**	**Editora**	**Ano de Pub.**
A	Matemática, Teoria e Contexto	Marília Centurion e José Jakubovic	Saraiva	2012
B	Matemática na Medida Certa	Marília Centurion e José Jakubovic	Leya	2015
C	Matemática, Compreensão e Prática	Ênio Silveira	Moderna	2015
D	Matemática: Projeto Teláris	Luiz Roberto Dante	Ática	2016
E	Vontade de Saber Matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	FTD	2015
F	Matemática: Projeto Araribá	Obra Coletiva Produzida pela editora Moderna	Moderna	2014

Após a escolha dos livros didáticos, dar-se início ao processo de verificação, o qual foi desenvolvido por meio das seguintes estratégias:

1ª) seleção do capítulo ou unidade destinado à operação de adição de frações;

2ª) cópia do material selecionado para possíveis marcações e anotações durante as leituras;

3ª) identificação da metodologia utilizada: abordagem, definições, exemplos, sistematização, atividades, etc.;

4ª) identificação de possíveis contribuições mediante o uso de Sequência Didática.

5ª) análise da contextualização do conceito de frações equivalentes e sua relação com adição de frações de denominadores diferentes;

6ª) verificação do processo utilizado para adição de frações: frações equivalentes, MMC, etc.;

7ª) investigação do uso abusivo (ou não) de fórmulas e operações desnecessárias;

8ª) identificação da apresentação ou não de mais de um processo de adição de frações e das relações que os mesmos estabelecem entre si.

De acordo as orientações dos PCN e pelo que podemos constatar em livros didáticos, os primeiros contatos dos estudantes com os números fracionários ocorrem no quarto ou quinto ano do ensino fundamental. A princípio, esse contato se restringe às noções de números racionais e operações com números decimais.

No sexto ano, esses conceitos são formalizados como um conjunto numérico e inicia-se o processo de operacionalização, inclusive potenciação e raiz quadrada. Nesse momento as operações são restritas ao conjunto dos números racionais não negativos.

No sétimo ano o conjunto é ampliado, acrescentando-se os números racionais negativos, passando assim a ser chamado exclusivamente de números racionais.

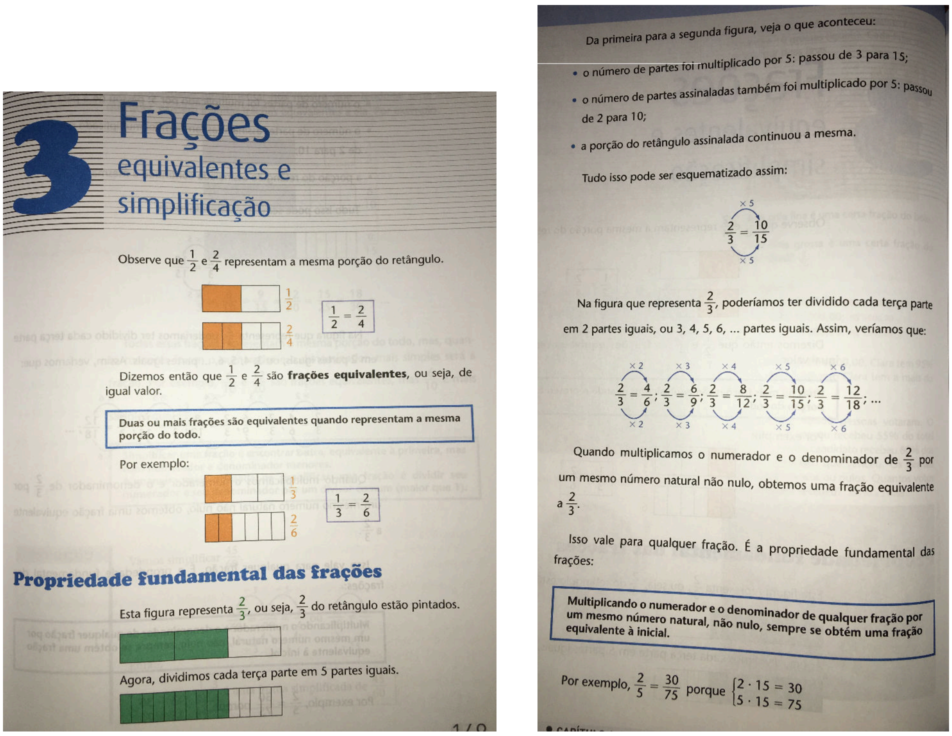
Como o livro didático é o guia de grande parte dos professores de matemática e os que o vêm com essa características utilizam apenas as orientações contidas nos mesmos, os estudantes acabam desenvolvendo seus conhecimentos simplesmente pela prática dos exercícios contidos neles. Nesse sentido, analisamos e levantamos questionamentos sobre como o conceito de adição de frações é tratado nos livros didáticos escolhidos.

3.4.1.1 Obra A

Na primeira obra que analisamos, vimos que os autores abordam o conceito de adição de frações no quinto capítulo. Nos capítulos iniciais são tratados os conceitos de operações com números naturais (incluindo potência e raízes), alguns conceitos de geometria (incluindo ângulos, polígonos e alguns sólidos) e conceitos de múltiplos e divisores. Como objetivos e forma de abordagem os autores apresentam justificativas para as formas operatórias, as quais embora sejam parciais são importantes de serem discutidas, e alertam para a verificação se os estudantes conseguem expor verbalmente os conceitos. Em se tratando das operações (especificamente) os autores optam por contextualizar, entretanto com ênfase no tratamento aritmético.

Quanto à abordagem dos conceitos introdutórios às operações, os autores tratam de frações equivalentes e simplificação. No que se refere à frações equivalentes é dado um tratamento geométrico para em seguida expor o aritmético. Além disso, utilizam as ideias geométricas para justificativa do conceito, como podemos verificar nas figuras a seguir.

Figura 5 – Obra A: Frações Equivalentes


3 Frações equivalentes e simplificação

Observe que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma porção do retângulo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Dizemos então que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **frações equivalentes**, ou seja, de igual valor.

Duas ou mais frações são equivalentes quando representam a mesma porção do todo.

Por exemplo:

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Propriedade fundamental das frações

Esta figura representa $\frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{2}{3}$ do retângulo estão pintados.

Agora, dividimos cada terça parte em 5 partes iguais.

Da primeira para a segunda figura, veja o que aconteceu:

- o número de partes foi multiplicado por 5: passou de 3 para 15;
- o número de partes assinaladas também foi multiplicado por 5: passou de 2 para 10;
- a porção do retângulo assinalada continuou a mesma.

Tudo isso pode ser esquematizado assim:

$$\frac{2}{3} \overset{\times 5}{=} \frac{10}{15}$$

Na figura que representa $\frac{2}{3}$, poderíamos ter dividido cada terça parte em 2 partes iguais, ou 3, 4, 5, 6, ... partes iguais. Assim, veríamos que:

$$\frac{2}{3} \overset{\times 2}{=} \frac{4}{6};\ \frac{2}{3} \overset{\times 3}{=} \frac{6}{9};\ \frac{2}{3} \overset{\times 4}{=} \frac{8}{12};\ \frac{2}{3} \overset{\times 5}{=} \frac{10}{15};\ \frac{2}{3} \overset{\times 6}{=} \frac{12}{18};\ \dots$$

Quando multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{2}{3}$ por um mesmo número natural não nulo, obtemos uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$.

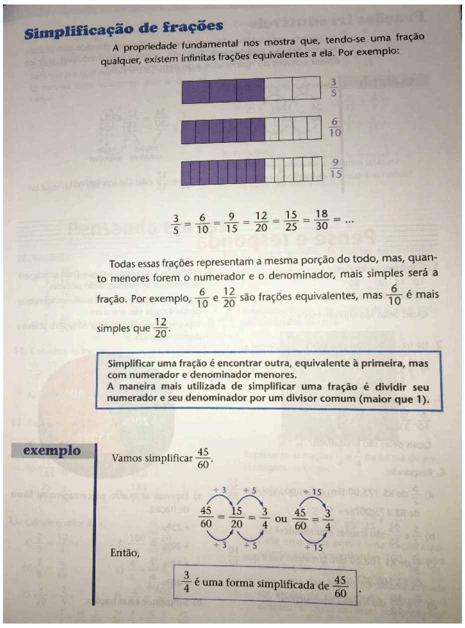
Isso vale para qualquer fração. É a propriedade fundamental das frações:

Multiplicando o numerador e o denominador de qualquer fração por um mesmo número natural, não nulo, sempre se obtém uma fração equivalente à inicial.

Por exemplo, $\frac{2}{5} = \frac{30}{75}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot 15 = 30 \\ 5 \cdot 15 = 75 \end{cases}$

Fonte: (26, 2012, p. 149-150)

Figura 6 – Obra A: Simplificação de Frações



Simplificação de frações

A propriedade fundamental nos mostra que, tendo-se uma fração qualquer, existem infinitas frações equivalentes a ela. Por exemplo:

$\frac{3}{5}$

$\frac{6}{10}$

$\frac{9}{15}$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \ldots$$

Todas essas frações representam a mesma porção do todo, mas, quanto menores forem o numerador e o denominador, mais simples será a fração. Por exemplo, $\frac{6}{10}$ e $\frac{12}{20}$ são frações equivalentes, mas $\frac{6}{10}$ é mais simples que $\frac{12}{20}$.

Simplificar uma fração é encontrar outra, equivalente à primeira, mas com numerador e denominador menores.
A maneira mais utilizada de simplificar uma fração é dividir seu numerador e seu denominador por um divisor comum (maior que 1).

exemplo

Vamos simplificar $\frac{45}{60}$.

$$\frac{45}{60} \overset{\div 3}{=} \frac{15}{20} \overset{\div 5}{=} \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{45}{60} \overset{\div 15}{=} \frac{3}{4}$$

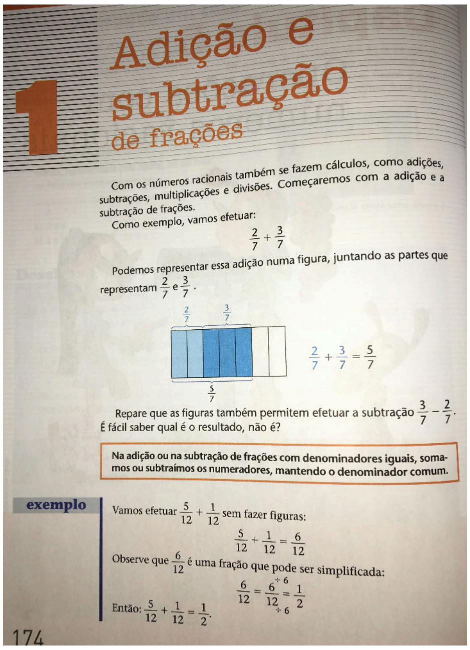
Então,

$\boxed{\frac{3}{4} \text{ é uma forma simplificada de } \frac{45}{60}}$.

Fonte: (26, 2012, p. 151)

Posteriormente os autores apresentam as ideias de frações como números racionais, números decimais, comparação de números decimais, uso dos números decimais, dízima periódica..., e só após, enfatizam o conceito de adição na página 174. Nesse momento, apresentam o conceito de adição de frações com mesmo denominador, por meio de abordagens geométricas e aritméticas. Em seguida, exibem as ideias de adição de frações com denominadores diferentes, fazendo a redução ao mesmo denominador por meio do Mínimo Múltiplo Comum. Vejamos as imagens a seguir:

Figura 7 – Obra A: Adição de Frações



1

Adição e subtração de frações

Com os números racionais também se fazem cálculos, como adições, subtrações, multiplicações e divisões. Começaremos com a adição e a subtração de frações.

Como exemplo, vamos efetuar:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$$

Podemos representar essa adição numa figura, juntando as partes que representam $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{7}$.

$\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Repare que as figuras também permitem efetuar a subtração $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}$. É fácil saber qual é o resultado, não é?

Na adição ou na subtração de frações com denominadores iguais, somamos ou subtraímos os numeradores, mantendo o denominador comum.

exemplo

Vamos efetuar $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}$ sem fazer figuras:

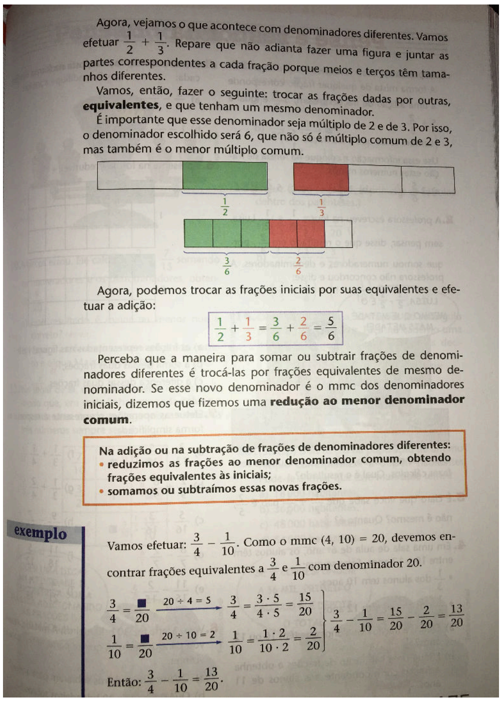
$$\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}$$

Observe que $\frac{6}{12}$ é uma fração que pode ser simplificada:

$$\frac{6}{12}=\frac{6^{\div 6}}{12_{\div 6}}=\frac{1}{2}$$

Então: $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

174



Agora, vejamos o que acontece com denominadores diferentes. Vamos efetuar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Repare que não adianta fazer uma figura e juntar as partes correspondentes a cada fração porque meios e terços têm tamanhos diferentes.

Vamos, então, fazer o seguinte: trocar as frações dadas por outras, **equivalentes**, e que tenham um mesmo denominador.

É importante que esse denominador seja múltiplo de 2 e de 3. Por isso, o denominador escolhido será 6, que não só é múltiplo comum de 2 e 3, mas também é o menor múltiplo comum.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$

Agora, podemos trocar as frações iniciais por suas equivalentes e efetuar a adição:

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}}$$

Perceba que a maneira para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes é trocá-las por frações equivalentes de mesmo denominador. Se esse novo denominador é o mmc dos denominadores iniciais, dizemos que fizemos uma **redução ao menor denominador comum**.

Na adição ou na subtração de frações de denominadores diferentes:
- **reduzimos as frações ao menor denominador comum, obtendo frações equivalentes às iniciais;**
- **somamos ou subtraímos essas novas frações.**

exemplo

Vamos efetuar: $\frac{3}{4}-\frac{1}{10}$. Como o mmc (4, 10) = 20, devemos encontrar frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}$ com denominador 20.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{4}=\frac{\blacksquare}{20}\xrightarrow{20\div 4=5}\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}\\ \frac{1}{10}=\frac{\blacksquare}{20}\xrightarrow{20\div 10=2}\frac{1}{10}=\frac{1\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{2}{20}\end{array}\right\}\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{15}{20}-\frac{2}{20}=\frac{13}{20}$$

Então: $\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$.

Fonte: (26, 2012, p. 174-175)

3.4.1.2 Obra B

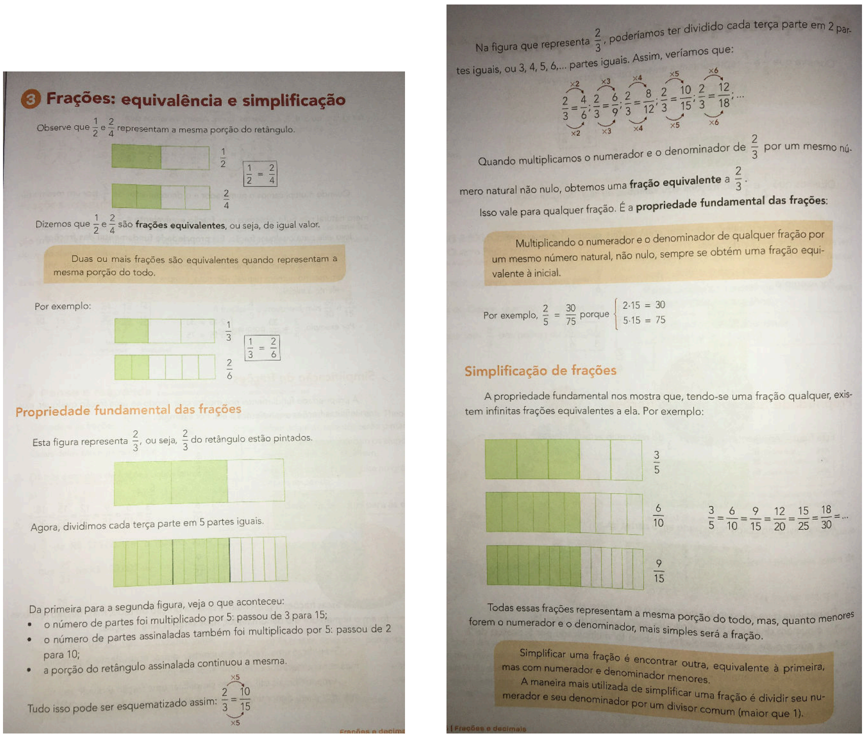
A obra B, dedica o capítulo 6 ao estudo de adição de frações. Nos capítulos anteriores, o livro é organizado da seguinte forma: números naturais e suas operações, conceitos iniciais de geometria, padrões e regularidades, múltiplos e divisores, e conceito de fração e números decimais. Dentre os objetivos traçados em relação à adição de frações os autores destacam:

1) Efetuar adição de frações;

2) Reconhecer problemas relacionados a essa operação.

Como conceitos anteriores ao de adição de frações, os autores aplicam métodos geométricos e aritméticos (os últimos, semelhantes aos que abordaremos na Sequência Didática) no conceito de frações equivalentes e simplificação. Vejamos as figuras a seguir.

Figura 8 – Obra B: Frações Equivalentes e Simplificação



3 Frações: equivalência e simplificação

Observe que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma porção do retângulo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\boxed{\frac{1}{2} = \frac{2}{4}}$

Dizemos que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **frações equivalentes**, ou seja, de igual valor.

Duas ou mais frações são equivalentes quando representam a mesma porção do todo.

Por exemplo:

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\boxed{\frac{1}{3} = \frac{2}{6}}$

Propriedade fundamental das frações

Esta figura representa $\frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{2}{3}$ do retângulo estão pintados.

Agora, dividimos cada terça parte em 5 partes iguais.

Da primeira para a segunda figura, veja o que aconteceu:

- o número de partes foi multiplicado por 5: passou de 3 para 15;
- o número de partes assinaladas também foi multiplicado por 5: passou de 2 para 10;
- a porção do retângulo assinalada continuou a mesma.

Tudo isso pode ser esquematizado assim: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ($\times 5$)

Na figura que representa $\frac{2}{3}$, poderíamos ter dividido cada terça parte em 2 partes iguais, ou 3, 4, 5, 6,... partes iguais. Assim, veríamos que:

$$\frac{2}{3} \overset{\times 2}{=} \frac{4}{6};\ \frac{2}{3} \overset{\times 3}{=} \frac{6}{9};\ \frac{2}{3} \overset{\times 4}{=} \frac{8}{12};\ \frac{2}{3} \overset{\times 5}{=} \frac{10}{15};\ \frac{2}{3} \overset{\times 6}{=} \frac{12}{18};\ \ldots$$

Quando multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{2}{3}$ por um mesmo número natural não nulo, obtemos uma **fração equivalente** a $\frac{2}{3}$.

Isso vale para qualquer fração. É a **propriedade fundamental das frações**:

Multiplicando o numerador e o denominador de qualquer fração por um mesmo número natural, não nulo, sempre se obtém uma fração equivalente à inicial.

Por exemplo, $\frac{2}{5} = \frac{30}{75}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot 15 = 30 \\ 5 \cdot 15 = 75 \end{cases}$

Simplificação de frações

A propriedade fundamental nos mostra que, tendo-se uma fração qualquer, existem infinitas frações equivalentes a ela. Por exemplo:

$\frac{3}{5}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{9}{15}$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \ldots$$

Todas essas frações representam a mesma porção do todo, mas, quanto menores forem o numerador e o denominador, mais simples será a fração.

Simplificar uma fração é encontrar outra, equivalente à primeira, mas com numerador e denominador menores.

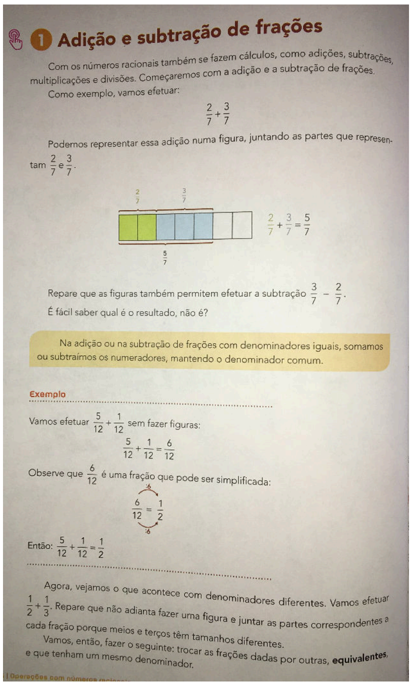
A maneira mais utilizada de simplificar uma fração é dividir seu numerador e seu denominador por um divisor comum (maior que 1).

Fonte: (27, 2015, p. 151-152)

Nelas, observamos que os autores têm uma preocupação de justificar o método utilizado para encontrar frações equivalentes.

No método de adição de frações com denominadores iguais, os autores fazem uso de formas geométricas para explicar o cálculo aritmético.

Figura 9 – Obra B: Adição de Frações



1 Adição e subtração de frações

Com os números racionais também se fazem cálculos, como adições, subtrações, multiplicações e divisões. Começaremos com a adição e a subtração de frações.

Como exemplo, vamos efetuar:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$$

Podemos representar essa adição numa figura, juntando as partes que representam $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{7}$.

$\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Repare que as figuras também permitem efetuar a subtração $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}$.

É fácil saber qual é o resultado, não é?

Na adição ou na subtração de frações com denominadores iguais, somamos ou subtraímos os numeradores, mantendo o denominador comum.

Exemplo

Vamos efetuar $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}$ sem fazer figuras:

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}$$

Observe que $\frac{6}{12}$ é uma fração que pode ser simplificada:

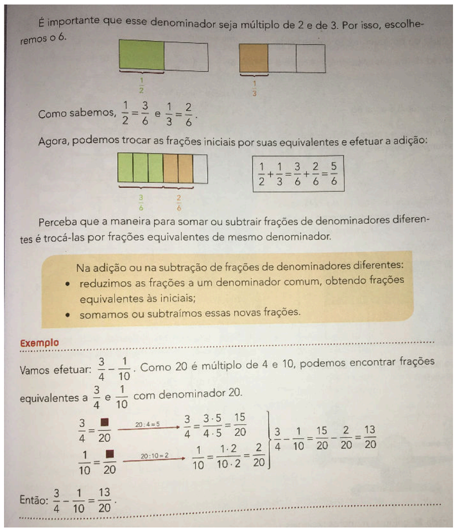
$$\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \quad (:6)$$

Então: $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

Agora, vejamos o que acontece com denominadores diferentes. Vamos efetuar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Repare que não adianta fazer uma figura e juntar as partes correspondentes a cada fração porque meios e terços têm tamanhos diferentes.

Vamos, então, fazer o seguinte: trocar as frações dadas por outras, **equivalentes**, e que tenham um mesmo denominador.

| Operações com números racionais



É importante que esse denominador seja múltiplo de 2 e de 3. Por isso, escolheremos o 6.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

Como sabemos, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.

Agora, podemos trocar as frações iniciais por suas equivalentes e efetuar a adição:

$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}}$$

Perceba que a maneira para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes é trocá-las por frações equivalentes de mesmo denominador.

Na adição ou na subtração de frações de denominadores diferentes:

- reduzimos as frações a um denominador comum, obtendo frações equivalentes às iniciais;
- somamos ou subtraímos essas novas frações.

Exemplo

Vamos efetuar: $\frac{3}{4}-\frac{1}{10}$. Como 20 é múltiplo de 4 e 10, podemos encontrar frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}$ com denominador 20.

$$\frac{3}{4}=\frac{\blacksquare}{20} \xrightarrow{20:4=5} \frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}$$

$$\frac{1}{10}=\frac{\blacksquare}{20} \xrightarrow{20:10=2} \frac{1}{10}=\frac{1\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{2}{20}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{15}{20}-\frac{2}{20}=\frac{13}{20}$$

Então: $\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$.

Fonte: (27, 2015, p. 178-179)

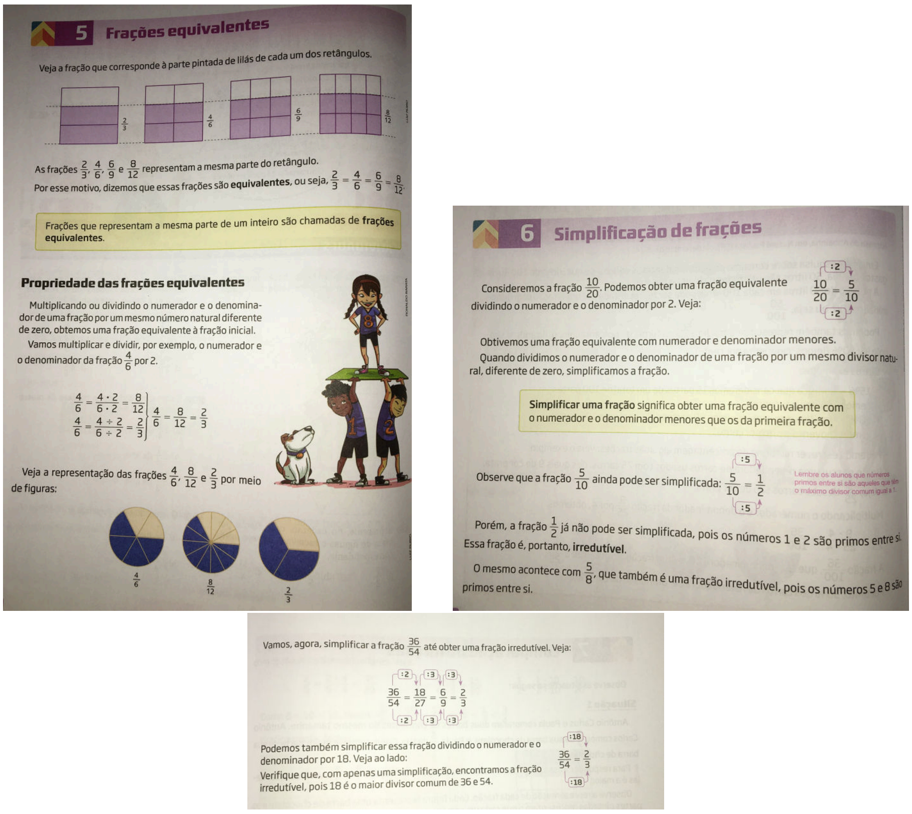
Na adição de frações com denominadores diferentes (ver Figura 9) os autores procuram utilizar o conceito de frações equivalentes, inclusive com aplicações geométricas, embora essas sejam um pouco superficiais e restritas. Diferente da maioria das obras, nesta não foi apresentada a ideia de adição utilizando o MMC.

3.4.1.3 Obra C

Na obra C, o capítulo destinado ao estudo das operações com frações é o sexto. Como pré-requisitos, o autor apresenta em capítulos anteriores as operações com números naturais (incluindo potenciação e radiciação), alguns conceitos de geometria, e múltiplos e divisores. Aborda o conceito de maneira contextualizada, na forma algébrica e geométrica. Quanto aos objetivos traçados, destacamos: compreender as noções de frações equivalentes e de fração irredutível e aplicá-las na realização de operações com frações e na resolução de problemas.

O autor inicia o conceito operatório com a ideia de frações equivalentes e simplificação, para tanto, expõe-as geometricamente e na sequência, exibe um método aritmético de obtê-las.

Figura 10 – Obra C: Frações Equivalentes e Simplificação



5 Frações equivalentes

Veja a fração que corresponde à parte pintada de lilás de cada um dos retângulos.

As frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ representam a mesma parte do retângulo.
Por esse motivo, dizemos que essas frações são **equivalentes**, ou seja, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$.

Frações que representam a mesma parte de um inteiro são chamadas de **frações equivalentes**.

Propriedade das frações equivalentes

Multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial.

Vamos multiplicar e dividir, por exemplo, o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{6}$ por 2.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{8}{12} \\ \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Veja a representação das frações $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{2}{3}$ por meio de figuras:

6 Simplificação de frações

Consideremos a fração $\frac{10}{20}$. Podemos obter uma fração equivalente dividindo o numerador e o denominador por 2. Veja:

$$\frac{10}{20} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{5}{10}$$

Obtivemos uma fração equivalente com numerador e denominador menores.

Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo divisor natural, diferente de zero, simplificamos a fração.

Simplificar uma fração significa obter uma fração equivalente com o numerador e o denominador menores que os da primeira fração.

Observe que a fração $\frac{5}{10}$ ainda pode ser simplificada: $\frac{5}{10} \underset{:5}{\overset{:5}{=}} \frac{1}{2}$

Lembre os alunos que números primos entre si são aqueles que têm o máximo divisor comum igual a 1.

Porém, a fração $\frac{1}{2}$ já não pode ser simplificada, pois os números 1 e 2 são primos entre si. Essa fração é, portanto, **irredutível**.

O mesmo acontece com $\frac{5}{8}$, que também é uma fração irredutível, pois os números 5 e 8 são primos entre si.

Vamos, agora, simplificar a fração $\frac{36}{54}$ até obter uma fração irredutível. Veja:

$$\frac{36}{54} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{18}{27} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{6}{9} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{2}{3}$$

Podemos também simplificar essa fração dividindo o numerador e o denominador por 18. Veja ao lado:

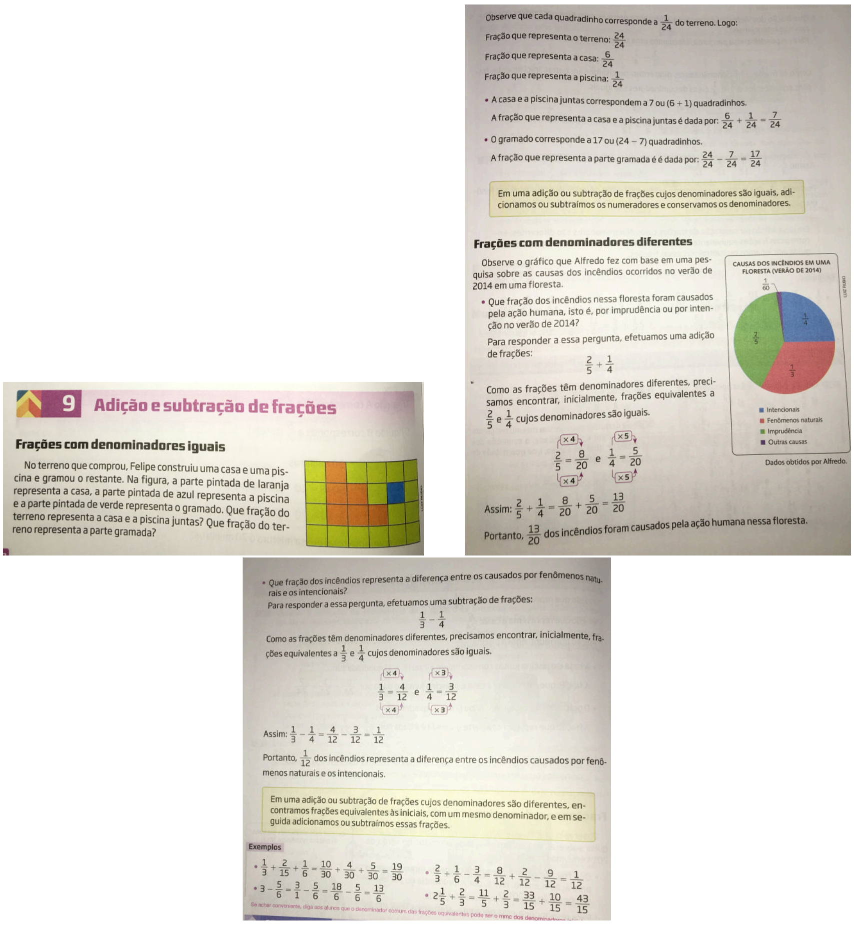
$$\frac{36}{54} \underset{:18}{\overset{:18}{=}} \frac{2}{3}$$

Verifique que, com apenas uma simplificação, encontramos a fração irredutível, pois 18 é o maior divisor comum de 36 e 54.

Fonte: (28, 2015, p. 134-137)

Posteriormente aplica de forma aritmética os métodos de simplificação de frações. Em se tratando de adição de frações, apresenta uma situação-problema e explana o conceito de adição com denominadores iguais de forma aritmética e geométrica. Quanto a adição de frações com denominadores diferentes, o método utilizado faz uso de frações equivalentes. Estas, por sua vez, são encontradas (aparentemente) por meio da multiplicação do numerador e denominador de cada fração pelo denominador da outra (não podemos afirmar se esse era o método que o autor queria repassar, haja vista que, em nenhum momento do texto ele deixa isso claro, menos ainda, no momento em que generaliza as ideias de adição). Vejamos como o autor expõe o método nas figuras a seguir:

Figura 11 – Obra C: Adição de Frações


9 Adição e subtração de frações

Frações com denominadores iguais

No terreno que comprou, Felipe construiu uma casa e uma piscina e gramou o restante. Na figura, a parte pintada de laranja representa a casa, a parte pintada de azul representa a piscina e a parte pintada de verde representa o gramado. Que fração do terreno representa a casa e a piscina juntas? Que fração do terreno representa a parte gramada?

Observe que cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{24}$ do terreno. Logo:

Fração que representa o terreno: $\frac{24}{24}$

Fração que representa a casa: $\frac{6}{24}$

Fração que representa a piscina: $\frac{1}{24}$

- A casa e a piscina juntas correspondem a 7 ou (6 + 1) quadradinhos.
  A fração que representa a casa e a piscina juntas é dada por: $\frac{6}{24} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$
- O gramado corresponde a 17 ou (24 − 7) quadradinhos.
  A fração que representa a parte gramada é dada por: $\frac{24}{24} - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$

Em uma adição ou subtração de frações cujos denominadores são iguais, adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos os denominadores.

Frações com denominadores diferentes

Observe o gráfico que Alfredo fez com base em uma pesquisa sobre as causas dos incêndios ocorridos no verão de 2014 em uma floresta.

- Que fração dos incêndios nessa floresta foram causados pela ação humana, isto é, por imprudência ou por intenção no verão de 2014?

Para responder a essa pergunta, efetuamos uma adição de frações:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$$

Como as frações têm denominadores diferentes, precisamos encontrar, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$

Assim: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

Portanto, $\frac{13}{20}$ dos incêndios foram causados pela ação humana nessa floresta.

- Que fração dos incêndios representa a diferença entre os causados por fenômenos naturais e os intencionais?

Para responder a essa pergunta, efetuamos uma subtração de frações:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Como as frações têm denominadores diferentes, precisamos encontrar, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Assim: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$

Portanto, $\frac{1}{12}$ dos incêndios representa a diferença entre os incêndios causados por fenômenos naturais e os intencionais.

Em uma adição ou subtração de frações cujos denominadores são diferentes, encontramos frações equivalentes às iniciais, com um mesmo denominador, e em seguida adicionamos ou subtraímos essas frações.

Exemplos

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6} = \frac{10}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{19}{30}$
- $3 - \frac{5}{6} = \frac{3}{1} - \frac{5}{6} = \frac{18}{6} - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$
- $2\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{11}{5} + \frac{2}{3} = \frac{33}{15} + \frac{10}{15} = \frac{43}{15}$

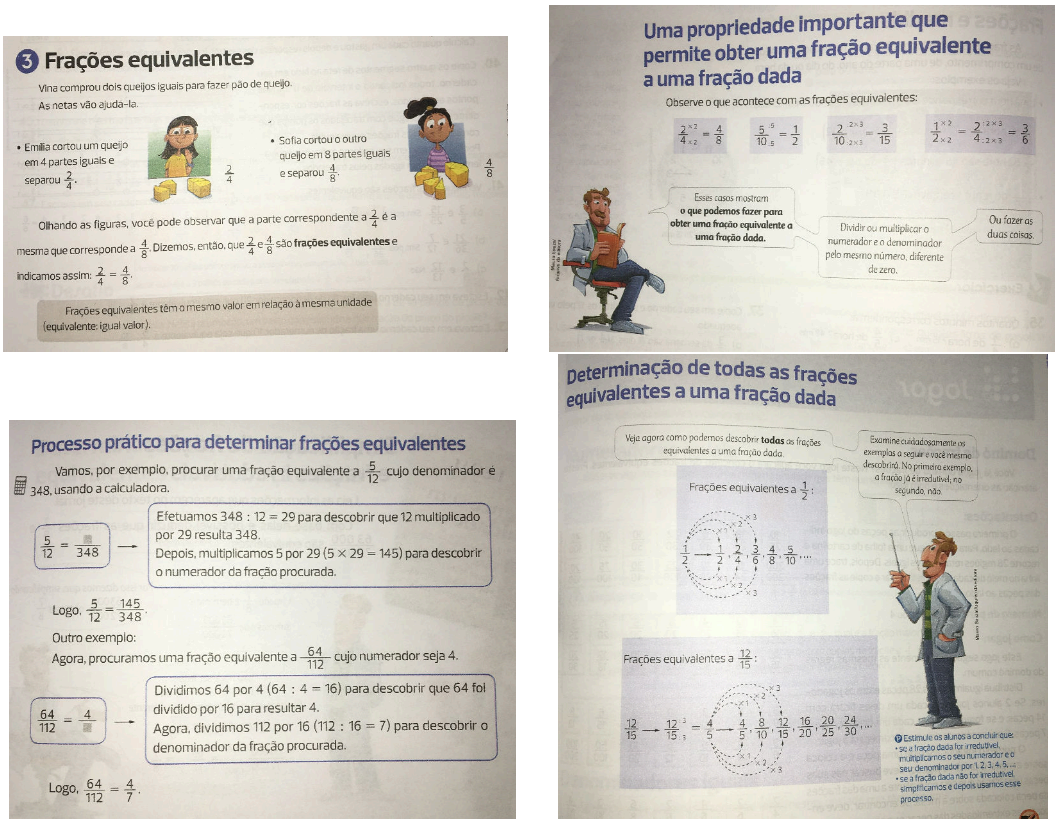
Fonte: (28, 2015, p. 142-144)

3.4.1.4 Obra D

Na obra D, o autor expõe o conceito de adição de frações no capítulo 6, depois de já terem sido esmiuçados as operações com números naturais, alguns conceitos de geometria, potenciação e raiz quadrada, e múltiplos e divisores. Aborda o conceito por meio de uma situação contextualizada, incentivando o estudante à generalizações. Não especifica (inclusive no livro do mestre), quais os objetivos traçados para o estudo de adição de frações.

O autor não só explora o conceito de frações equivalentes na adição de frações, como também mostra a possibilidade do uso do MMC. Não verificamos o uso abusivo de fórmulas, pelo contrário, ver-se um processo claro de construção de conceitos. A linha de desenvolvimento é a seguinte: inicia-se o estudo apresentando o conceito de frações equivalentes, com exemplos aritméticos e geométricos, seguido do conceito de simplificação de frações.

Figura 12 – Obra D: Frações Equivalentes



3 Frações equivalentes

Vina comprou dois queijos iguais para fazer pão de queijo.
As netas vão ajudá-la.

- Emília cortou um queijo em 4 partes iguais e separou $\frac{2}{4}$.

$\frac{2}{4}$

- Sofia cortou o outro queijo em 8 partes iguais e separou $\frac{4}{8}$.

$\frac{4}{8}$

Olhando as figuras, você pode observar que a parte correspondente a $\frac{2}{4}$ é a mesma que corresponde a $\frac{4}{8}$. Dizemos, então, que $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são **frações equivalentes** e indicamos assim: $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

Frações equivalentes têm o mesmo valor em relação à mesma unidade (equivalente: igual valor).

Uma propriedade importante que permite obter uma fração equivalente a uma fração dada

Observe o que acontece com as frações equivalentes:

$\frac{2}{4}\,{}^{\times 2}_{\times 2} = \frac{4}{8}$ $\quad \frac{5}{10}\,{}^{:5}_{:5} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{10}\,{}^{:2\times 3}_{:2\times 3} = \frac{3}{15}$ $\quad \frac{1}{2}\,{}^{\times 2}_{\times 2} = \frac{2}{4}\,{}^{:2\times 3}_{:2\times 3} = \frac{3}{6}$

Esses casos mostram **o que podemos fazer para obter uma fração equivalente a uma fração dada.**

Dividir ou multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número, diferente de zero.

Ou fazer as duas coisas.

Mauro Souza/ Arquivo da editora

Processo prático para determinar frações equivalentes

Vamos, por exemplo, procurar uma fração equivalente a $\frac{5}{12}$ cujo denominador é 348, usando a calculadora.

$\frac{5}{12} = \frac{\square}{348}$ → Efetuamos 348 : 12 = 29 para descobrir que 12 multiplicado por 29 resulta 348. Depois, multiplicamos 5 por 29 ($5 \times 29 = 145$) para descobrir o numerador da fração procurada.

Logo, $\frac{5}{12} = \frac{145}{348}$.

Outro exemplo:
Agora, procuramos uma fração equivalente a $\frac{64}{112}$ cujo numerador seja 4.

$\frac{64}{112} = \frac{4}{\square}$ → Dividimos 64 por 4 (64 : 4 = 16) para descobrir que 64 foi dividido por 16 para resultar 4. Agora, dividimos 112 por 16 (112 : 16 = 7) para descobrir o denominador da fração procurada.

Logo, $\frac{64}{112} = \frac{4}{7}$.

Determinação de todas as frações equivalentes a uma fração dada

Veja agora como podemos descobrir **todas** as frações equivalentes a uma fração dada.

Examine cuidadosamente os exemplos a seguir e você mesmo descobrirá. No primeiro exemplo, a fração já é irredutível; no segundo, não.

Frações equivalentes a $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots$

Frações equivalentes a $\frac{12}{15}$:

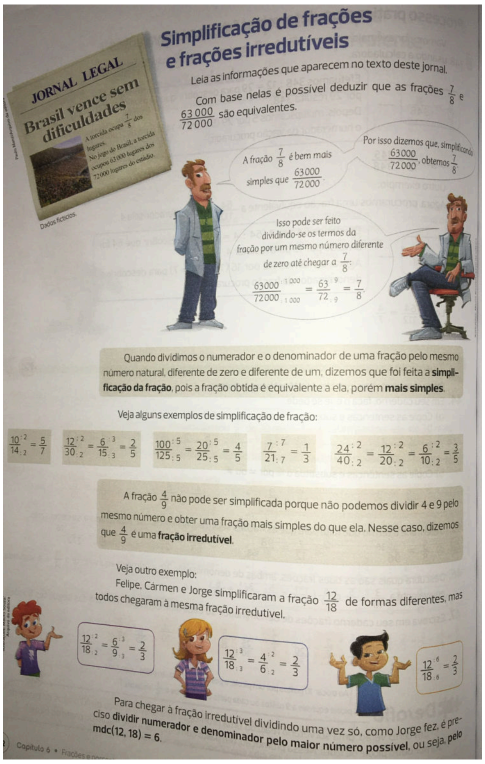
$\frac{12}{15} \longrightarrow \frac{12}{15}\,{}^{:3}_{:3} = \frac{4}{5} \longrightarrow \frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{20}{25}, \frac{24}{30}, \ldots$

Mauro Souza/Arquivo da editora

Estimule os alunos a concluir que:
- se a fração dada for irredutível, multiplicamos o seu numerador e o seu denominador por 1, 2, 3, 4, 5, ...;
- se a fração dada não for irredutível, simplificamos e depois usamos esse processo.

Fonte: (29, 2016, p. 169-173)

Figura 13 – Obra D: Simplificação de Frações



JORNAL LEGAL

Brasil vence sem dificuldades

A torcida ocupa $\frac{7}{8}$ dos lugares.

No jogo do Brasil, a torcida ocupou 63 000 lugares dos 72 000 lugares do estádio.

Dados fictícios.

Simplificação de frações e frações irredutíveis

Leia as informações que aparecem no texto deste jornal.

Com base nelas é possível deduzir que as frações $\frac{7}{8}$ e $\frac{63\,000}{72\,000}$ são equivalentes.

A fração $\frac{7}{8}$ é bem mais simples que $\frac{63000}{72000}$.

Por isso dizemos que, simplificando $\frac{63000}{72000}$, obtemos $\frac{7}{8}$.

Isso pode ser feito dividindo-se os termos da fração por um mesmo número diferente de zero até chegar a $\frac{7}{8}$:

$$\frac{63000^{:1\,000}}{72000_{:1\,000}} = \frac{63^{:9}}{72_{:9}} = \frac{7}{8}$$

Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número natural, diferente de zero e diferente de um, dizemos que foi feita a **simplificação da fração**, pois a fração obtida é equivalente a ela, porém **mais simples**.

Veja alguns exemplos de simplificação de fração:

$\frac{10^{:2}}{14_{:2}} = \frac{5}{7}$ $\frac{12^{:2}}{30_{:2}} = \frac{6^{:3}}{15_{:3}} = \frac{2}{5}$ $\frac{100^{:5}}{125_{:5}} = \frac{20^{:5}}{25_{:5}} = \frac{4}{5}$ $\frac{7^{:7}}{21_{:7}} = \frac{1}{3}$ $\frac{24^{:2}}{40_{:2}} = \frac{12^{:2}}{20_{:2}} = \frac{6^{:2}}{10_{:2}} = \frac{3}{5}$

A fração $\frac{4}{9}$ não pode ser simplificada porque não podemos dividir 4 e 9 pelo mesmo número e obter uma fração mais simples do que ela. Nesse caso, dizemos que $\frac{4}{9}$ é uma **fração irredutível**.

Veja outro exemplo:

Felipe, Cármen e Jorge simplificaram a fração $\frac{12}{18}$ de formas diferentes, mas todos chegaram à mesma fração irredutível.

$\frac{12^{:2}}{18_{:2}} = \frac{6^{:3}}{9_{:3}} = \frac{2}{3}$ $\frac{12^{:3}}{18_{:3}} = \frac{4^{:2}}{6_{:2}} = \frac{2}{3}$ $\frac{12^{:6}}{18_{:6}} = \frac{2}{3}$

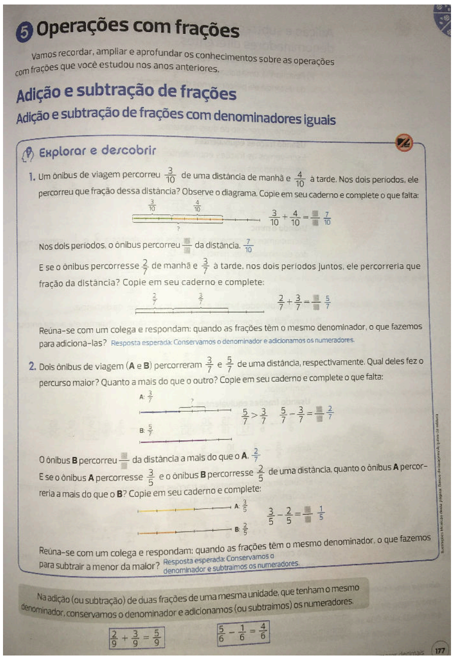
Para chegar à fração irredutível dividindo uma vez só, como Jorge fez, é preciso **dividir numerador e denominador pelo maior número possível**, ou seja, pelo **mdc(12, 18) = 6**.

Capítulo 6 • Frações e porc...

Fonte: (29, 2016, p. 172)

Posteriormente, apresenta o conceito de comparação de frações, por meio de frações equivalentes e MMC, e por fim, trata da adição de frações. Esta, é explorada inicialmente com frações de denominadores iguais, inclusive com abordagens geométricas, finalizando com adição envolvendo frações de denominadores diferentes, sempre alternando o uso de frações equivalentes e MMC (Vejamos as imagens a seguir). Além disso, o autor explica que o uso do MMC trata-se de um método eficaz para encontrar frações equivalentes.

Figura 14 – Obra D: Adição de Frações



5 Operações com frações

Vamos recordar, ampliar e aprofundar os conhecimentos sobre as operações com frações que você estudou nos anos anteriores.

Adição e subtração de frações

Adição e subtração de frações com denominadores iguais

Explorar e descobrir

1. Um ônibus de viagem percorreu $\frac{3}{10}$ de uma distância de manhã e $\frac{4}{10}$ à tarde. Nos dois períodos, ele percorreu que fração dessa distância? Observe o diagrama. Copie em seu caderno e complete o que falta:

$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ $\frac{7}{10}$

Nos dois períodos, o ônibus percorreu $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ da distância. $\frac{7}{10}$

E se o ônibus percorresse $\frac{2}{7}$ de manhã e $\frac{3}{7}$ à tarde, nos dois períodos juntos, ele percorreria que fração da distância? Copie em seu caderno e complete:

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ $\frac{5}{7}$

Reúna-se com um colega e respondam: quando as frações têm o mesmo denominador, o que fazemos para adicioná-las? Resposta esperada: Conservamos o denominador e adicionamos os numeradores.

2. Dois ônibus de viagem (**A** e **B**) percorreram $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{7}$ de uma distância, respectivamente. Qual deles fez o percurso maior? Quanto a mais do que o outro? Copie em seu caderno e complete o que falta:

$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ $\frac{2}{7}$

O ônibus **B** percorreu $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ da distância a mais do que o **A**. $\frac{2}{7}$

E se o ônibus **A** percorresse $\frac{3}{5}$ e o ônibus **B** percorresse $\frac{2}{5}$ de uma distância, quanto o ônibus **A** percorreria a mais do que o **B**? Copie em seu caderno e complete:

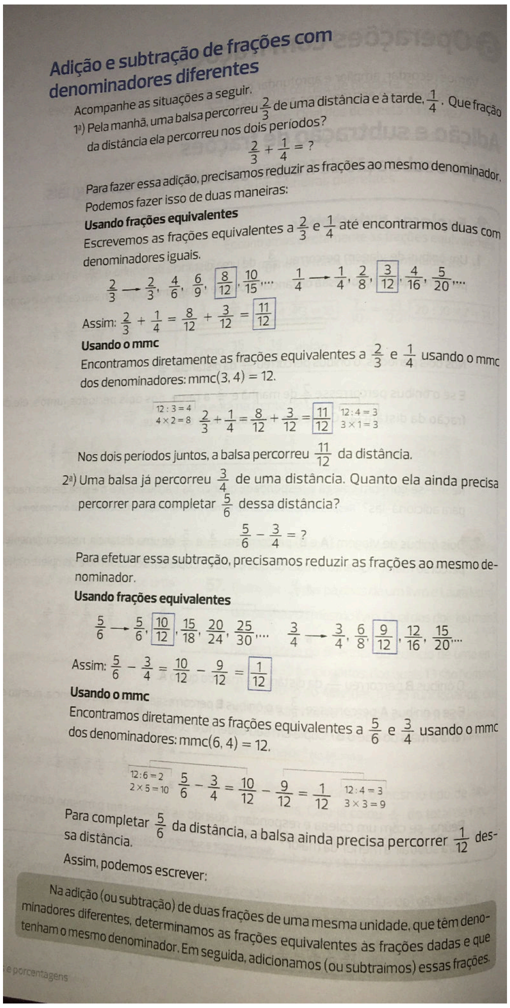
$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ $\frac{1}{5}$

Reúna-se com um colega e respondam: quando as frações têm o mesmo denominador, o que fazemos para subtrair a menor da maior? Resposta esperada: Conservamos o denominador e subtraímos os numeradores.

Na adição (ou subtração) de duas frações de uma mesma unidade, que tenham o mesmo denominador, conservamos o denominador e adicionamos (ou subtraímos) os numeradores.

$\boxed{\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}}$ $\boxed{\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}}$

177



Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Acompanhe as situações a seguir.

1ª) Pela manhã, uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos?

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = ?$$

Para fazer essa adição, precisamos reduzir as frações ao mesmo denominador. Podemos fazer isso de duas maneiras:

Usando frações equivalentes

Escrevemos as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ até encontrarmos duas com denominadores iguais.

$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \boxed{\frac{8}{12}}, \frac{10}{15}, \ldots$ $\frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \boxed{\frac{3}{12}}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \ldots$

Assim: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$

Usando o mmc

Encontramos diretamente as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ usando o mmc dos denominadores: mmc(3, 4) = 12.

$\underset{4 \times 2 = 8}{12 : 3 = 4}$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$ $\underset{3 \times 1 = 3}{12 : 4 = 3}$

Nos dois períodos juntos, a balsa percorreu $\frac{11}{12}$ da distância.

2ª) Uma balsa já percorreu $\frac{3}{4}$ de uma distância. Quanto ela ainda precisa percorrer para completar $\frac{5}{6}$ dessa distância?

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = ?$$

Para efetuar essa subtração, precisamos reduzir as frações ao mesmo denominador.

Usando frações equivalentes

$\frac{5}{6} \longrightarrow \frac{5}{6}, \boxed{\frac{10}{12}}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \ldots$ $\frac{3}{4} \longrightarrow \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \boxed{\frac{9}{12}}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \ldots$

Assim: $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$

Usando o mmc

Encontramos diretamente as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$ usando o mmc dos denominadores: mmc(6, 4) = 12.

$\underset{2 \times 5 = 10}{12 : 6 = 2}$ $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$ $\underset{3 \times 3 = 9}{12 : 4 = 3}$

Para completar $\frac{5}{6}$ da distância, a balsa ainda precisa percorrer $\frac{1}{12}$ dessa distância.

Assim, podemos escrever:

Na adição (ou subtração) de duas frações de uma mesma unidade, que têm denominadores diferentes, determinamos as frações equivalentes às frações dadas e que tenham o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos (ou subtraímos) essas frações.

Fonte: (29, 2016, p. 177-178)

3.4.1.5 Obra E

Na obra E, os autores abordam o conceito de adição de frações no capítulo 6, após terem sido esmiuçados as operações com números naturais, alguns conceitos de geometria, potenciação e raiz quadrada, e múltiplos e divisores. Também apresentam o conceito de forma contextualizada. Quanto a formalização, os autores fazem-na em sequência a apresentação dos exemplos. Os objetivos traçados para o estudo de adição de frações são:

1) Compreender o conceito de frações equivalentes;

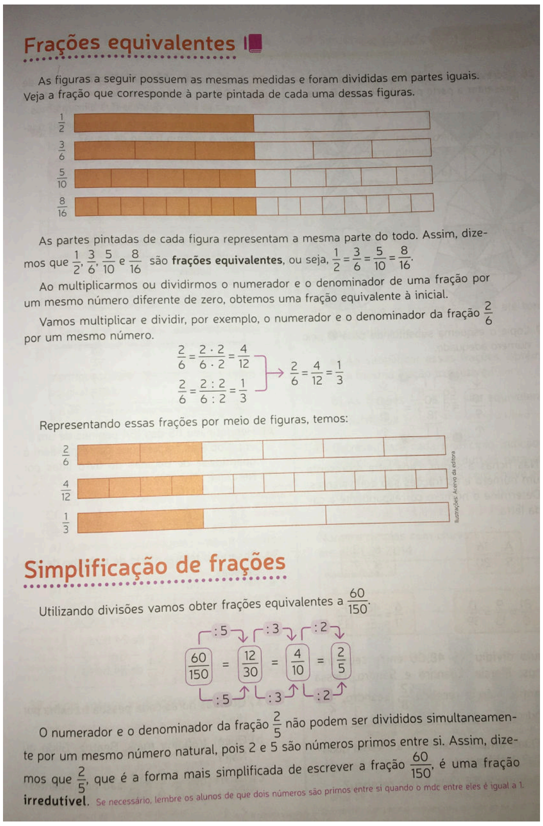
2) Simplificar frações;

3) Comparar frações com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes;

4) Efetuar adições de frações.

Os autores também optam por utilizar o conceito de frações equivalentes na adição de frações, e apresentam o uso do MMC como uma outra forma de realização das operações, ou como um método mais eficiente para a resolução dos exercícios. Quanto a abordagem de ensino, iniciam com o conceito de frações equivalentes, explicando-o por meio de abordagens geométrica e aritmética, e em seguida tratam da simplificação em uma abordagem aritmética.

Figura 15 – Obra E: Frações Equivalentes e Simplificação



Frações equivalentes

As figuras a seguir possuem as mesmas medidas e foram divididas em partes iguais. Veja a fração que corresponde à parte pintada de cada uma dessas figuras.

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{6}$

$\frac{5}{10}$

$\frac{8}{16}$

As partes pintadas de cada figura representam a mesma parte do todo. Assim, dizemos que $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}$ e $\frac{8}{16}$ são **frações equivalentes**, ou seja, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16}$.

Ao multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à inicial.

Vamos multiplicar e dividir, por exemplo, o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{6}$ por um mesmo número.

$$\frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12}$$
$$\frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Representando essas frações por meio de figuras, temos:

$\frac{2}{6}$

$\frac{4}{12}$

$\frac{1}{3}$

Ilustrações: Acervo da editora

Simplificação de frações

Utilizando divisões vamos obter frações equivalentes a $\frac{60}{150}$.

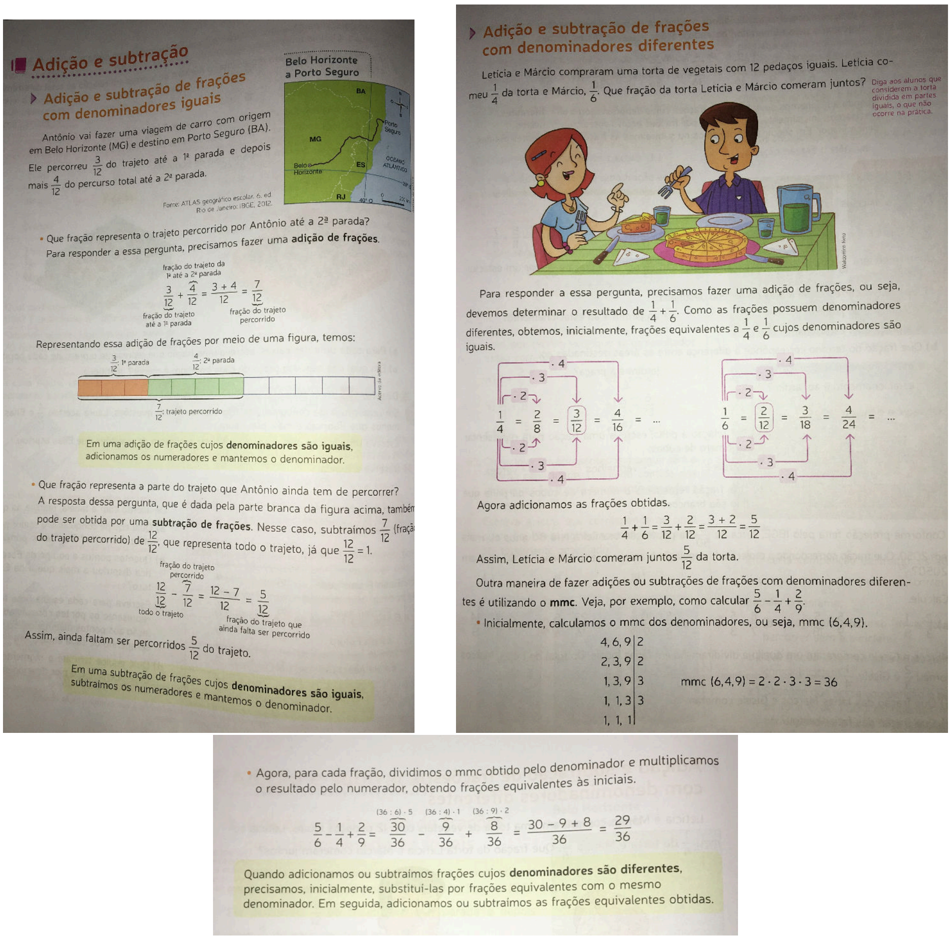
$$\boxed{\frac{60}{150}} \xrightarrow{:5} \; = \boxed{\frac{12}{30}} \xrightarrow{:3} \; = \boxed{\frac{4}{10}} \xrightarrow{:2} \; = \boxed{\frac{2}{5}}$$

O numerador e o denominador da fração $\frac{2}{5}$ não podem ser divididos simultaneamente por um mesmo número natural, pois 2 e 5 são números primos entre si. Assim, dizemos que $\frac{2}{5}$, que é a forma mais simplificada de escrever a fração $\frac{60}{150}$, é uma fração **irredutível**. Se necessário, lembre os alunos de que dois números são primos entre si quando o mdc entre eles é igual a 1.

Fonte: (30, 2015, p. 135)

Posteriormente comparam frações usando o conceito de equivalência e MMC. Por fim, abordam adição de frações. Estas, por sua vez, é iniciada com frações de denominadores iguais (incluindo uma abordagem geométrica), seguida da adição de frações com denominadores diferentes (por meio de frações equivalentes), e finalizam o tópico explicando o mesmo conceito utilizando MMC.

Figura 16 – Obra E: Adição de Frações



Adição e subtração

Adição e subtração de frações com denominadores iguais

Antônio vai fazer uma viagem de carro com origem em Belo Horizonte (MG) e destino em Porto Seguro (BA). Ele percorreu $\frac{3}{12}$ do trajeto até a 1ª parada e depois mais $\frac{4}{12}$ do percurso total até a 2ª parada.

Belo Horizonte a Porto Seguro

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

- Que fração representa o trajeto percorrido por Antônio até a 2ª parada?

Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma **adição de frações**.

$$\underbrace{\frac{3}{12}}_{\text{fração do trajeto até a 1ª parada}} + \overbrace{\frac{4}{12}}^{\text{fração do trajeto da 1ª até a 2ª parada}} = \frac{3+4}{12} = \underbrace{\frac{7}{12}}_{\text{fração do trajeto percorrido}}$$

Representando essa adição de frações por meio de uma figura, temos:

$\frac{3}{12}$: 1ª parada $\frac{4}{12}$: 2ª parada

$\frac{7}{12}$: trajeto percorrido

Em uma adição de frações cujos **denominadores são iguais**, adicionamos os numeradores e mantemos o denominador.

- Que fração representa a parte do trajeto que Antônio ainda tem de percorrer?

A resposta dessa pergunta, que é dada pela parte branca da figura acima, também pode ser obtida por uma **subtração de frações**. Nesse caso, subtraímos $\frac{7}{12}$ (fração do trajeto percorrido) de $\frac{12}{12}$, que representa todo o trajeto, já que $\frac{12}{12} = 1$.

$$\underbrace{\frac{12}{12}}_{\text{todo o trajeto}} - \overbrace{\frac{7}{12}}^{\text{fração do trajeto percorrido}} = \frac{12-7}{12} = \underbrace{\frac{5}{12}}_{\text{fração do trajeto que ainda falta ser percorrido}}$$

Assim, ainda faltam ser percorridos $\frac{5}{12}$ do trajeto.

Em uma subtração de frações cujos **denominadores são iguais**, subtraímos os numeradores e mantemos o denominador.

Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Letícia e Márcio compraram uma torta de vegetais com 12 pedaços iguais. Letícia comeu $\frac{1}{4}$ da torta e Márcio, $\frac{1}{6}$. Que fração da torta Letícia e Márcio comeram juntos? Diga aos alunos que considerem a torta dividida em partes iguais, o que não ocorre na prática.

Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma adição de frações, ou seja, devemos determinar o resultado de $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Como as frações possuem denominadores diferentes, obtemos, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{3}{12}} = \frac{4}{16} = \ldots \qquad \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{12}} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \ldots$$

$\cdot 2$ $\cdot 3$ $\cdot 4$

Agora adicionamos as frações obtidas.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Assim, Letícia e Márcio comeram juntos $\frac{5}{12}$ da torta.

Outra maneira de fazer adições ou subtrações de frações com denominadores diferentes é utilizando o **mmc**. Veja, por exemplo, como calcular $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9}$.

- Inicialmente, calculamos o mmc dos denominadores, ou seja, mmc (6,4,9).

$$\begin{array}{r|l} 4, 6, 9 & 2 \\ 2, 3, 9 & 2 \\ 1, 3, 9 & 3 \\ 1, 1, 3 & 3 \\ 1, 1, 1 & \end{array} \qquad \text{mmc } (6,4,9) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

- Agora, para cada fração, dividimos o mmc obtido pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador, obtendo frações equivalentes às iniciais.

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \overbrace{\frac{30}{36}}^{(36:6)\cdot 5} - \overbrace{\frac{9}{36}}^{(36:4)\cdot 1} + \overbrace{\frac{8}{36}}^{(36:9)\cdot 2} = \frac{30-9+8}{36} = \frac{29}{36}$$

Quando adicionamos ou subtraímos frações cujos **denominadores são diferentes**, precisamos, inicialmente, substituí-las por frações equivalentes com o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos ou subtraímos as frações equivalentes obtidas.

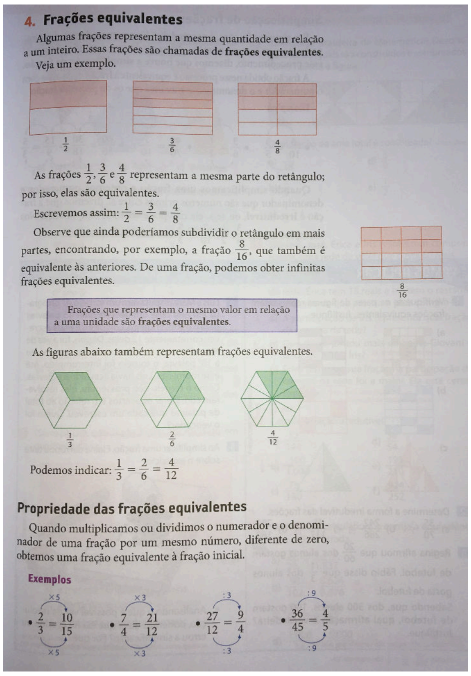
Fonte: (30, 2015, p. 143-145)

3.4.1.6 Obra F

Na obra F, os autores expõem os conceitos de números naturais e suas operações, algumas sequências (números quadrados e triangulares), noções de geometria, divisibilidade, mínimo múltiplo comum (MMC) e máximo divisor comum (MDC), como pré-requisitos ao estudo de frações. Nela, o conceito operatório é iniciado na unidade 10, o qual é exposto de forma contextualizada, com aplicações geométricas e algébricas, e sem o uso excessivo de algoritmos.

Os autores apresentam o conceito de frações equivalentes, inclusive apoiando-se em figuras geométricas para justificativa do método aritmético, como podemos verificar a seguir.

Figura 17 – Obra F: Frações Equivalentes



4. Frações equivalentes

Algumas frações representam a mesma quantidade em relação a um inteiro. Essas frações são chamadas de **frações equivalentes**.

Veja um exemplo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$

As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ representam a mesma parte do retângulo; por isso, elas são equivalentes.

Escrevemos assim: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

Observe que ainda poderíamos subdividir o retângulo em mais partes, encontrando, por exemplo, a fração $\frac{8}{16}$, que também é equivalente às anteriores. De uma fração, podemos obter infinitas frações equivalentes.

$\frac{8}{16}$

Frações que representam o mesmo valor em relação a uma unidade são **frações equivalentes**.

As figuras abaixo também representam frações equivalentes.

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{12}$

Podemos indicar: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

Propriedade das frações equivalentes

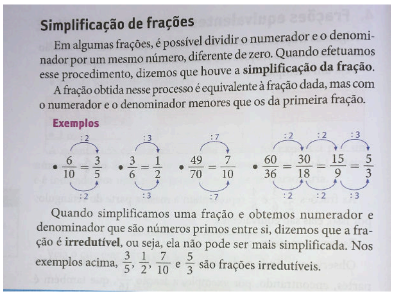
Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial.

Exemplos

- $\frac{2}{3} \overset{\times 5}{=} \frac{10}{15}$
- $\frac{7}{4} \overset{\times 3}{=} \frac{21}{12}$
- $\frac{27}{12} \overset{:3}{=} \frac{9}{4}$
- $\frac{36}{45} \overset{:9}{=} \frac{4}{5}$

Fonte: (31, 2014, p. 153)

Figura 18 – Obra F: Simplificação de Frações



Simplificação de frações

Em algumas frações, é possível dividir o numerador e o denominador por um mesmo número, diferente de zero. Quando efetuamos esse procedimento, dizemos que houve a **simplificação da fração**.

A fração obtida nesse processo é equivalente à fração dada, mas com o numerador e o denominador menores que os da primeira fração.

Exemplos

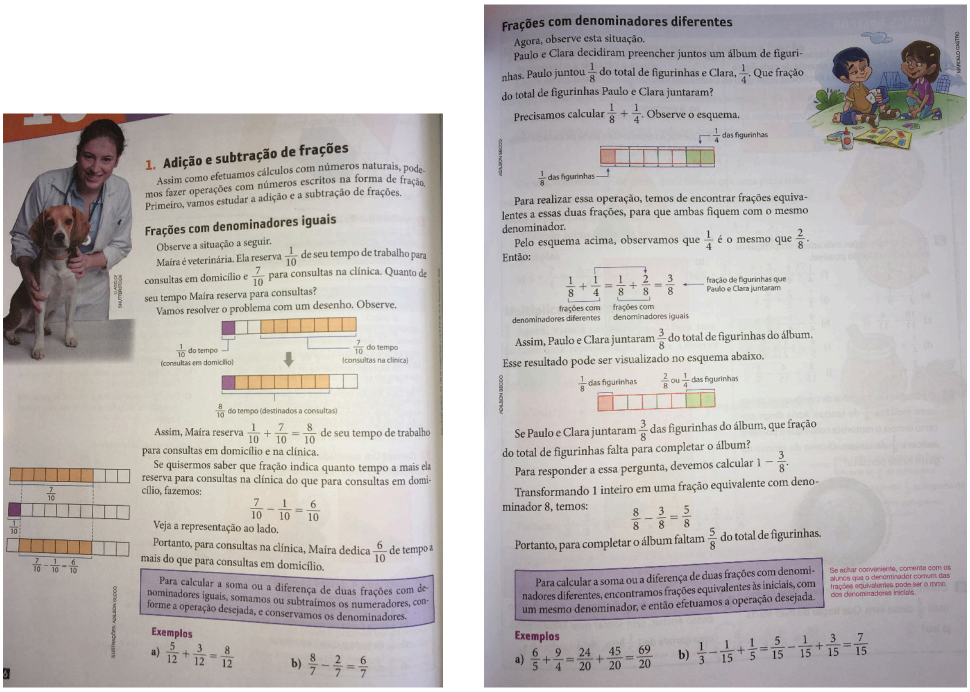
- $\frac{6}{10} \overset{:2}{=} \frac{3}{5}$
- $\frac{3}{6} \overset{:3}{=} \frac{1}{2}$
- $\frac{49}{70} \overset{:7}{=} \frac{7}{10}$
- $\frac{60}{36} \overset{:2}{=} \frac{30}{18} \overset{:2}{=} \frac{15}{9} \overset{:3}{=} \frac{5}{3}$

Quando simplificamos uma fração e obtemos numerador e denominador que são números primos entre si, dizemos que a fração é **irredutível**, ou seja, ela não pode ser mais simplificada. Nos exemplos acima, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$ e $\frac{5}{3}$ são frações irredutíveis.

Fonte: (31, 2014, p. 154)

Na adição de frações com denominadores iguais, os autores apresentam uma situação-problema e utilizam conceitos geométricos. Em seguida, na adição de frações com denominadores diferentes, utilizam o conceito de frações equivalentes, apoiando-se em ideias geométricas (embora restritas). Ao final, são resolvidos alguns exemplos, sem muitos detalhes sobre os métodos empregados na resolução. Vejamos a figura a seguir.

Figura 19 – Obra F: Adição de Frações



1. **Adição e subtração de frações**

Assim como efetuamos cálculos com números naturais, podemos fazer operações com números escritos na forma de fração. Primeiro, vamos estudar a adição e a subtração de frações.

Frações com denominadores iguais

Observe a situação a seguir.

Maíra é veterinária. Ela reserva $\frac{1}{10}$ de seu tempo de trabalho para consultas em domicílio e $\frac{7}{10}$ para consultas na clínica. Quanto de seu tempo Maíra reserva para consultas?

Vamos resolver o problema com um desenho. Observe.

Assim, Maíra reserva $\frac{1}{10} + \frac{7}{10} = \frac{8}{10}$ de seu tempo de trabalho para consultas em domicílio e na clínica.

Se quisermos saber que fração indica quanto tempo a mais ela reserva para consultas na clínica do que para consultas em domicílio, fazemos:

$$\frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

Veja a representação ao lado.

Portanto, para consultas na clínica, Maíra dedica $\frac{6}{10}$ de tempo a mais do que para consultas em domicílio.

Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores iguais, somamos ou subtraímos os numeradores, conforme a operação desejada, e conservamos os denominadores.

Exemplos

a) $\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$ b) $\frac{8}{7} - \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

Frações com denominadores diferentes

Agora, observe esta situação.

Paulo e Clara decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Paulo juntou $\frac{1}{8}$ do total de figurinhas e Clara, $\frac{1}{4}$. Que fração do total de figurinhas Paulo e Clara juntaram?

Precisamos calcular $\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$. Observe o esquema.

Para realizar essa operação, temos de encontrar frações equivalentes a essas duas frações, para que ambas fiquem com o mesmo denominador.

Pelo esquema acima, observamos que $\frac{1}{4}$ é o mesmo que $\frac{2}{8}$.

Então:

$$\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{2}{8}}_{\text{frações com denominadores iguais}} = \frac{3}{8} \longleftarrow \text{fração de figurinhas que Paulo e Clara juntaram}$$

Assim, Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ do total de figurinhas do álbum.

Esse resultado pode ser visualizado no esquema abaixo.

Se Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ das figurinhas do álbum, que fração do total de figurinhas falta para completar o álbum?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular $1 - \frac{3}{8}$.

Transformando 1 inteiro em uma fração equivalente com denominador 8, temos:

$$\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Portanto, para completar o álbum faltam $\frac{5}{8}$ do total de figurinhas.

Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores diferentes, encontramos frações equivalentes às iniciais, com um mesmo denominador, e então efetuamos a operação desejada.

Se achar conveniente, comente com os alunos que o denominador comum das frações equivalentes pode ser o mmc dos denominadores iniciais.

Exemplos

a) $\frac{6}{5} + \frac{9}{4} = \frac{24}{20} + \frac{45}{20} = \frac{69}{20}$ b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{1}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

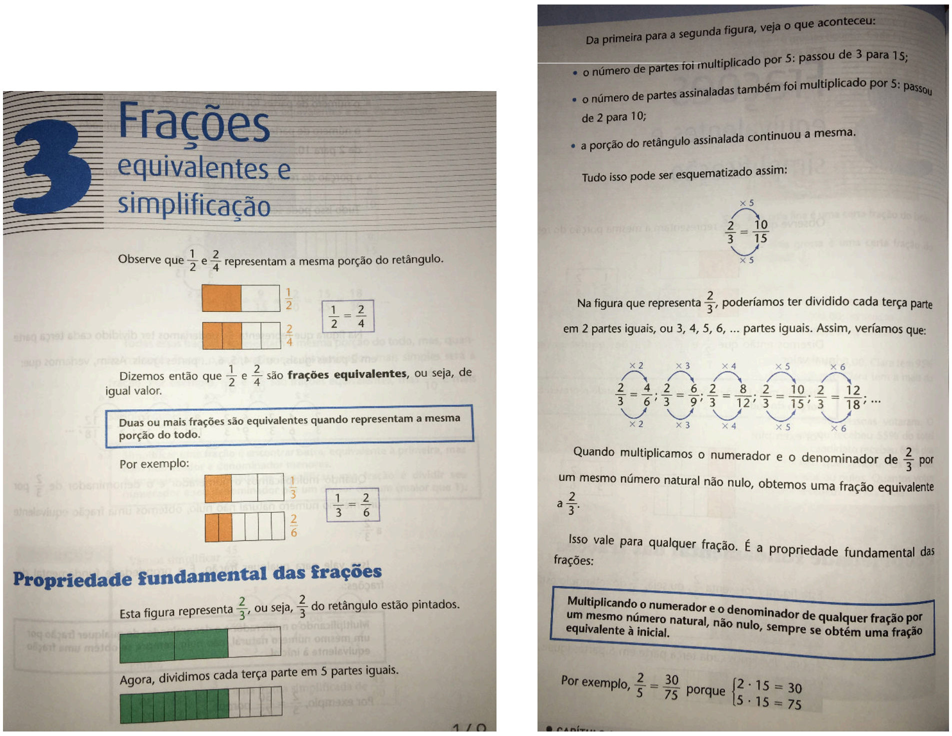
Fonte: (31, 2014, p. 156-157)

3.4.2 Considerações sobre as abordagens de adição de frações nos livros didáticos

Num contexto geral, notamos que, em todas as obras, os autores têm como premissa, a necessidade de uma série de pré-requisitos (os quais se mostraram comuns) para o estudo de adição de frações. Observamos que na maioria das obras, o capítulo destinado ao estudo do conceito de fração é o mesmo (o sexto). Anteriormente, os autores exibem as operações com números naturais, conceitos de geometria, potências e raízes, dentre outros. Talvez isso seja consequência do que se estabeleceu como conteúdos mínimos para o estudo de matemática no sexto ano do ensino fundamental e da ordem que os conceitos são propostos pelos PCN.

Foi possível verificar que todas as obras procuram apresentar uma situação problema como introdução ao conceito de adição de frações, e além disso, os autores têm a preocupação de expor as ideias de frações equivalentes e simplificação, inclusive justificando-as de uma forma bem interessante como podemos constatar, por exemplo, na obra A.

Figura 20 – Obra A: Abordagem do conceito de Frações Equivalentes



3 Frações equivalentes e simplificação

Observe que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma porção do retângulo.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Dizemos então que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **frações equivalentes**, ou seja, de igual valor.

Duas ou mais frações são equivalentes quando representam a mesma porção do todo.

Por exemplo:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Propriedade fundamental das frações

Esta figura representa $\frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{2}{3}$ do retângulo estão pintados.

Agora, dividimos cada terça parte em 5 partes iguais.

Da primeira para a segunda figura, veja o que aconteceu:

- o número de partes foi multiplicado por 5: passou de 3 para 15;
- o número de partes assinaladas também foi multiplicado por 5: passou de 2 para 10;
- a porção do retângulo assinalada continuou a mesma.

Tudo isso pode ser esquematizado assim:

$$\overset{\times 5}{\frac{2}{3} = \frac{10}{15}}$$

Na figura que representa $\frac{2}{3}$, poderíamos ter dividido cada terça parte em 2 partes iguais, ou 3, 4, 5, 6, ... partes iguais. Assim, veríamos que:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6};\ \frac{2}{3} = \frac{6}{9};\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12};\ \frac{2}{3} = \frac{10}{15};\ \frac{2}{3} = \frac{12}{18};\ \ldots$$

Quando multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{2}{3}$ por um mesmo número natural não nulo, obtemos uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$.

Isso vale para qualquer fração. É a propriedade fundamental das frações:

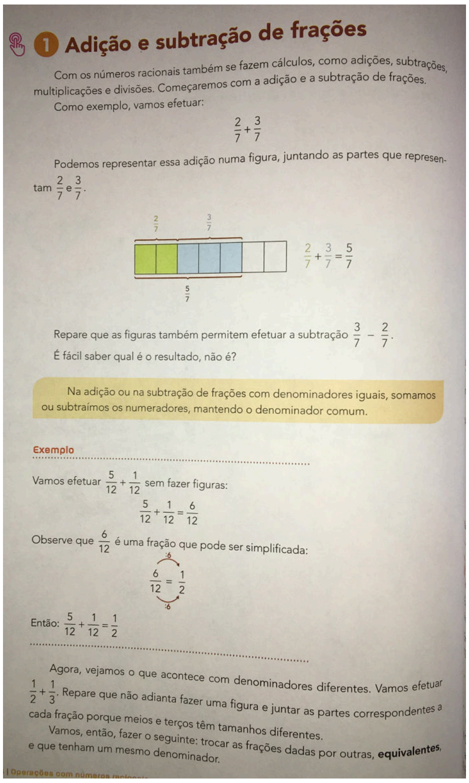
Multiplicando o numerador e o denominador de qualquer fração por um mesmo número natural, não nulo, sempre se obtém uma fração equivalente à inicial.

Por exemplo, $\frac{2}{5} = \frac{30}{75}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot 15 = 30 \\ 5 \cdot 15 = 75 \end{cases}$

Fonte: (26, 2012, p. 150)

Nas ideias apresentadas para adição de frações com denominadores iguais, também verificou-se unanimidade em relação a forma de apresentação nos livros didáticos. Todas as obras pesquisadas utilizaram as ideias geométricas para justificar o algoritmo de adição, como podemos observar na obra B, por exemplo.

Figura 21 – Obra B: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores iguais



1 Adição e subtração de frações

Com os números racionais também se fazem cálculos, como adições, subtrações, multiplicações e divisões. Começaremos com a adição e a subtração de frações.

Como exemplo, vamos efetuar:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$$

Podemos representar essa adição numa figura, juntando as partes que representam $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{7}$.

Repare que as figuras também permitem efetuar a subtração $\frac{3}{7} - \frac{2}{7}$.

É fácil saber qual é o resultado, não é?

Na adição ou na subtração de frações com denominadores iguais, somamos ou subtraímos os numeradores, mantendo o denominador comum.

Exemplo

Vamos efetuar $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}$ sem fazer figuras:

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}$$

Observe que $\frac{6}{12}$ é uma fração que pode ser simplificada:

$$\frac{6}{12}\underset{:6}{\overset{:6}{=}}\frac{1}{2}$$

Então: $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

Agora, vejamos o que acontece com denominadores diferentes. Vamos efetuar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Repare que não adianta fazer uma figura e juntar as partes correspondentes a cada fração porque meios e terços têm tamanhos diferentes.

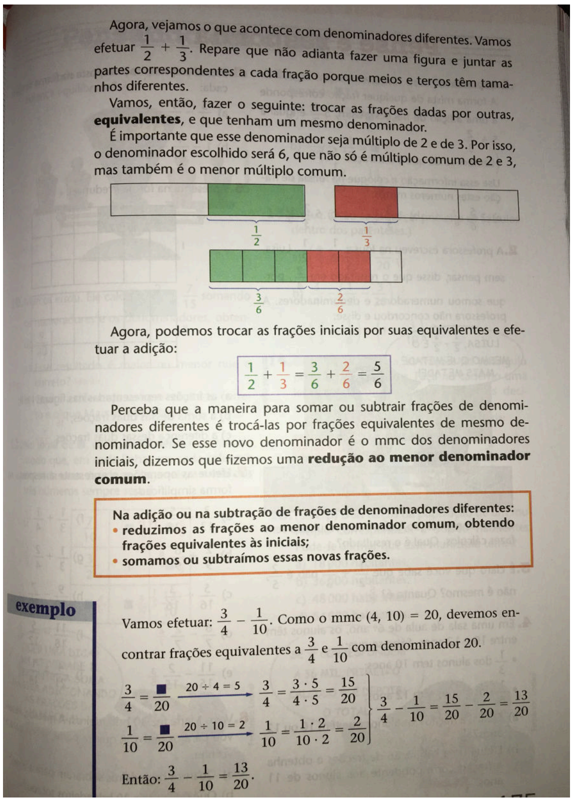
Vamos, então, fazer o seguinte: trocar as frações dadas por outras, **equivalentes**, e que tenham um mesmo denominador.

Fonte: (27, 2015, p. 178)

Ao analisarmos a adição de frações com denominadores diferentes é que notamos uma maior divergência entre as formas de abordagem nos livros didáticos.

Observamos que na obra A o autor opta por expor esse conceito utilizando as ideias de frações equivalentes, por meio de um processo geométrico (mas de forma bem resumida), e finaliza sugerindo a ideia de aplicação do MMC. Vejamos novamente a imagem a seguir.

Figura 22 – Obra A: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores diferentes



Agora, vejamos o que acontece com denominadores diferentes. Vamos efetuar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Repare que não adianta fazer uma figura e juntar as partes correspondentes a cada fração porque meios e terços têm tamanhos diferentes.

Vamos, então, fazer o seguinte: trocar as frações dadas por outras, **equivalentes**, e que tenham um mesmo denominador.

É importante que esse denominador seja múltiplo de 2 e de 3. Por isso, o denominador escolhido será 6, que não só é múltiplo comum de 2 e 3, mas também é o menor múltiplo comum.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$

Agora, podemos trocar as frações iniciais por suas equivalentes e efetuar a adição:

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}}$$

Perceba que a maneira para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes é trocá-las por frações equivalentes de mesmo denominador. Se esse novo denominador é o mmc dos denominadores iniciais, dizemos que fizemos uma **redução ao menor denominador comum**.

Na adição ou na subtração de frações de denominadores diferentes:
- **reduzimos as frações ao menor denominador comum, obtendo frações equivalentes às iniciais;**
- **somamos ou subtraímos essas novas frações.**

exemplo

Vamos efetuar: $\frac{3}{4}-\frac{1}{10}$. Como o mmc (4, 10) = 20, devemos encontrar frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}$ com denominador 20.

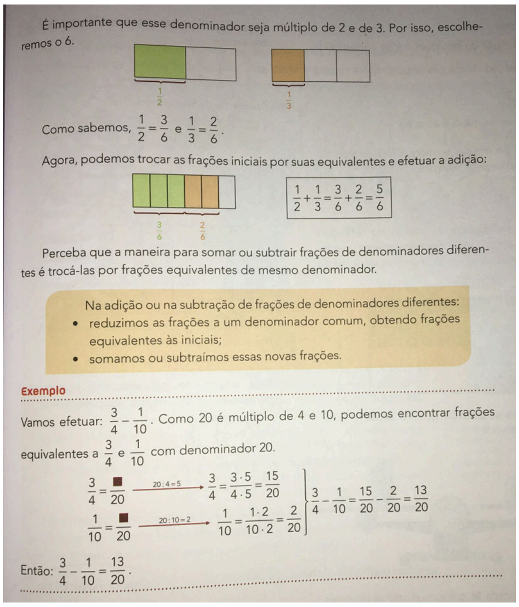
$$\frac{3}{4}=\frac{\blacksquare}{20}\xrightarrow{20\div 4=5}\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{\blacksquare}{20}\xrightarrow{20\div 10=2}\frac{1}{10}=\frac{1\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{2}{20}$$
$$\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{15}{20}-\frac{2}{20}=\frac{13}{20}$$

Então: $\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$.

Fonte: (26, 2012, p. 175)

Na obra B, a ideia apresentada pelos autores é muito semelhante com a obra A, inclusive apresentando o mesmo exemplo: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (talvez por se tratarem de obras escritas pelos mesmos autores). A única diferença é que, na obra B, os autores não especificam que o denominador (comum) utilizado deve, necessariamente, ser o menor possível. Ao final, exibem um exemplo de aplicação do conceito de subtração, utilizando um método semelhante ao uso do MMC. Vejamos a seguir.

Figura 23 – Obra B: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores diferentes



É importante que esse denominador seja múltiplo de 2 e de 3. Por isso, escolheremos o 6.

Como sabemos, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ e $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Agora, podemos trocar as frações iniciais por suas equivalentes e efetuar a adição:

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}}$$

Perceba que a maneira para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes é trocá-las por frações equivalentes de mesmo denominador.

Na adição ou na subtração de frações de denominadores diferentes:
- reduzimos as frações a um denominador comum, obtendo frações equivalentes às iniciais;
- somamos ou subtraímos essas novas frações.

Exemplo

Vamos efetuar: $\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$. Como 20 é múltiplo de 4 e 10, podemos encontrar frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}$ com denominador 20.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} = \frac{■}{20} \xrightarrow{20:4=5} \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} \\ \frac{1}{10} = \frac{■}{20} \xrightarrow{20:10=2} \frac{1}{10} = \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{2}{20} \end{array}\right\} \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{15}{20} - \frac{2}{20} = \frac{13}{20}$$

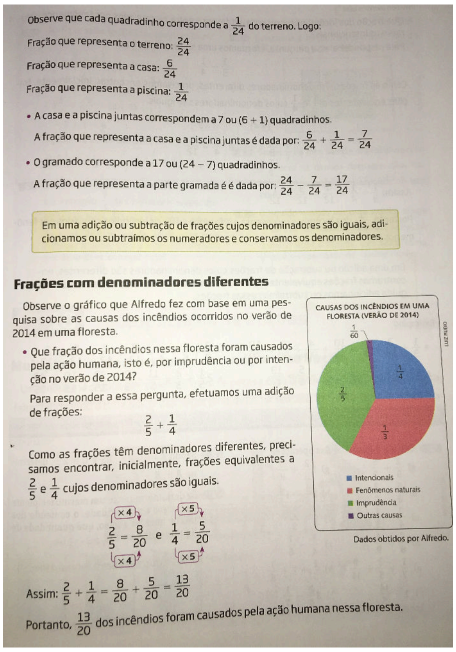
Então: $\frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20}$.

Fonte: (27, 2015, p. 179)

Isso pode até induzir os professores a utilizarem o MMC como o único método para adição de frações.

A obra C foi a que mais se aproximou do que defendemos nesse trabalho. Embora os autores não utilizem métodos geométricos na adição de frações, apresentam um modelo bastante eficaz para encontrar frações com denominadores comuns: multiplicação do numerador e denominador de cada fração (as quais estão sendo adicionadas), pelo denominador da outra. Vejamos as imagens a seguir.

Figura 24 – Obra C: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores diferentes



Observe que cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{24}$ do terreno. Logo:

Fração que representa o terreno: $\frac{24}{24}$

Fração que representa a casa: $\frac{6}{24}$

Fração que representa a piscina: $\frac{1}{24}$

- A casa e a piscina juntas correspondem a 7 ou (6 + 1) quadradinhos.

  A fração que representa a casa e a piscina juntas é dada por: $\frac{6}{24} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$

- O gramado corresponde a 17 ou (24 − 7) quadradinhos.

  A fração que representa a parte gramada é é dada por: $\frac{24}{24} - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$

Em uma adição ou subtração de frações cujos denominadores são iguais, adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos os denominadores.

Frações com denominadores diferentes

Observe o gráfico que Alfredo fez com base em uma pesquisa sobre as causas dos incêndios ocorridos no verão de 2014 em uma floresta.

Dados obtidos por Alfredo.

- Que fração dos incêndios nessa floresta foram causados pela ação humana, isto é, por imprudência ou por intenção no verão de 2014?

  Para responder a essa pergunta, efetuamos uma adição de frações:

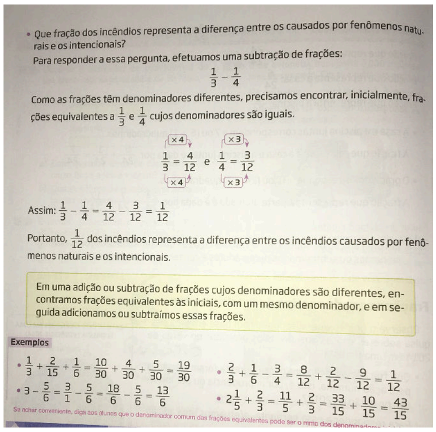
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$$

Como as frações têm denominadores diferentes, precisamos encontrar, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{2}{5} \overset{\times 4}{=} \frac{8}{20} \quad e \quad \frac{1}{4} \overset{\times 5}{=} \frac{5}{20}$$

Assim: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

Portanto, $\frac{13}{20}$ dos incêndios foram causados pela ação humana nessa floresta.



- Que fração dos incêndios representa a diferença entre os causados por fenômenos naturais e os intencionais?

  Para responder a essa pergunta, efetuamos uma subtração de frações:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Como as frações têm denominadores diferentes, precisamos encontrar, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{1}{3} \overset{\times 4}{=} \frac{4}{12} \quad e \quad \frac{1}{4} \overset{\times 3}{=} \frac{3}{12}$$

Assim: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$

Portanto, $\frac{1}{12}$ dos incêndios representa a diferença entre os incêndios causados por fenômenos naturais e os intencionais.

Em uma adição ou subtração de frações cujos denominadores são diferentes, encontramos frações equivalentes às iniciais, com um mesmo denominador, e em seguida adicionamos ou subtraímos essas frações.

Exemplos

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6} = \frac{10}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{19}{30}$
- $3 - \frac{5}{6} = \frac{3}{1} - \frac{5}{6} = \frac{18}{6} - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$
- $2\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{11}{5} + \frac{2}{3} = \frac{33}{15} + \frac{10}{15} = \frac{43}{15}$

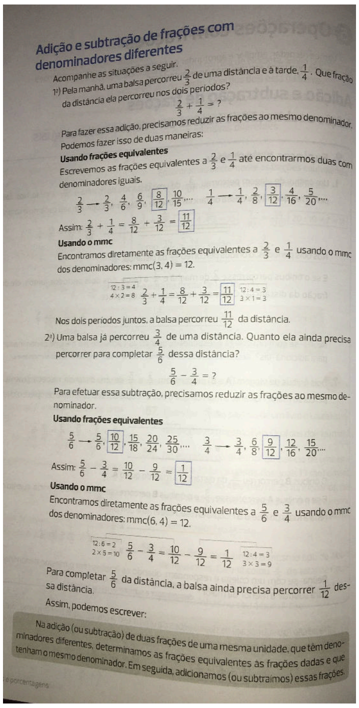
Se achar conveniente, diga aos alunos que o denominador comum das frações equivalentes pode ser o mmc dos

Fonte: (28, 2015, p. 143-144)

A única ressalva, é que, em nenhum momento, os autores justificam o modelo que estão utilizando, tampouco especificam o que deve ser feito para encontrar as frações de mesmo denominador que desejam (mesmo em explicações anteriores sobre frações equivalentes). O único fato que fica claro é que deve ser utilizado frações equivalentes.

Nas obras D e E, o método utilizado pelos autores são muito semelhantes. Expõem a adição de frações com denominadores diferentes, exclusivamente, de forma aritmética. A forma de apresentação é a substituição das frações que serão adicionadas, por frações equivalentes as mesmas. Entretanto, notamos que aplicam esse método como se fosse algo que (dependendo das frações) pode se tornar extenso e trabalhoso. Por fim, encerram o processo, valendo-se do uso do MMC (na adição de frações), como uma espécie de método prático que solucione os problemas de forma mais rápida. Vejamos as imagens a seguir.

Figura 25 – Obra D: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores diferentes



Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Acompanhe as situações a seguir.

1ª) Pela manhã, uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos?

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = ?$$

Para fazer essa adição, precisamos reduzir as frações ao mesmo denominador. Podemos fazer isso de duas maneiras:

Usando frações equivalentes

Escrevemos as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ até encontrarmos duas com denominadores iguais.

$$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \boxed{\frac{8}{12}}, \frac{10}{15}, \ldots \qquad \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \boxed{\frac{3}{12}}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \ldots$$

Assim: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$

Usando o mmc

Encontramos diretamente as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ usando o mmc dos denominadores: mmc(3, 4) = 12.

$$\begin{matrix} 12:3=4 \\ 4\times2=8 \end{matrix} \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{11}{12}} \quad \begin{matrix} 12:4=3 \\ 3\times1=3 \end{matrix}$$

Nos dois períodos juntos, a balsa percorreu $\frac{11}{12}$ da distância.

2ª) Uma balsa já percorreu $\frac{3}{4}$ de uma distância. Quanto ela ainda precisa percorrer para completar $\frac{5}{6}$ dessa distância?

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = ?$$

Para efetuar essa subtração, precisamos reduzir as frações ao mesmo denominador.

Usando frações equivalentes

$$\frac{5}{6} \longrightarrow \frac{5}{6}, \boxed{\frac{10}{12}}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \ldots \qquad \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \boxed{\frac{9}{12}}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \ldots$$

Assim: $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$

Usando o mmc

Encontramos diretamente as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$ usando o mmc dos denominadores: mmc(6, 4) = 12.

$$\begin{matrix} 12:6=2 \\ 2\times5=10 \end{matrix} \quad \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12} \quad \begin{matrix} 12:4=3 \\ 3\times3=9 \end{matrix}$$

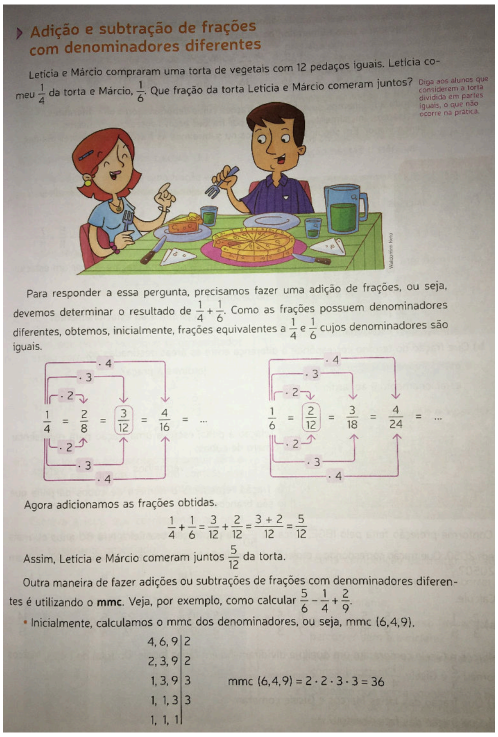
Para completar $\frac{5}{6}$ da distância, a balsa ainda precisa percorrer $\frac{1}{12}$ dessa distância.

Assim, podemos escrever:

Na adição (ou subtração) de duas frações de uma mesma unidade, que têm denominadores diferentes, determinamos as frações equivalentes às frações dadas e que tenham o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos (ou subtraímos) essas frações.

Fonte: (29, 2016, p. 178)

Figura 26 – Obra E: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores diferentes



Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Letícia e Márcio compraram uma torta de vegetais com 12 pedaços iguais. Letícia comeu $\frac{1}{4}$ da torta e Márcio, $\frac{1}{6}$. Que fração da torta Letícia e Márcio comeram juntos?

Diga aos alunos que considerem a torta dividida em partes iguais, o que não ocorre na prática.

Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma adição de frações, ou seja, devemos determinar o resultado de $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Como as frações possuem denominadores diferentes, obtemos, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \ldots \qquad \frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \ldots$$

Agora adicionamos as frações obtidas.

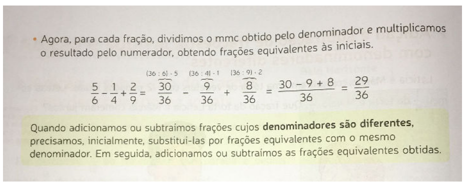
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Assim, Letícia e Márcio comeram juntos $\frac{5}{12}$ da torta.

Outra maneira de fazer adições ou subtrações de frações com denominadores diferentes é utilizando o **mmc**. Veja, por exemplo, como calcular $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9}$.

- Inicialmente, calculamos o mmc dos denominadores, ou seja, mmc (6,4,9).

$$\begin{array}{r|l} 4, 6, 9 & 2 \\ 2, 3, 9 & 2 \\ 1, 3, 9 & 3 \\ 1, 1, 3 & 3 \\ 1, 1, 1 & \end{array} \qquad \text{mmc } (6,4,9) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$



- Agora, para cada fração, dividimos o mmc obtido pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador, obtendo frações equivalentes às iniciais.

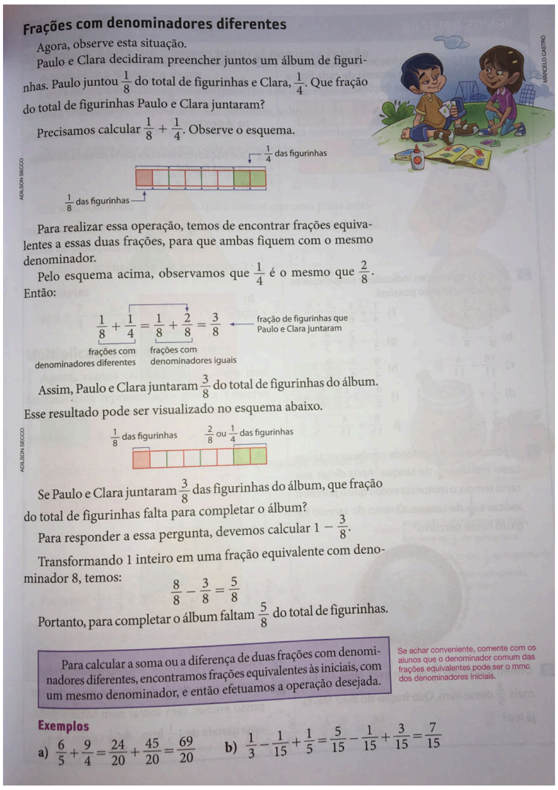
$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{\overset{(36:6)\cdot 5}{\overbrace{30}}}{36} - \frac{\overset{(36:4)\cdot 1}{\overbrace{9}}}{36} + \frac{\overset{(36:9)\cdot 2}{\overbrace{8}}}{36} = \frac{30-9+8}{36} = \frac{29}{36}$$

Quando adicionamos ou subtraimos frações cujos **denominadores são diferentes,** precisamos, inicialmente, substitui-las por frações equivalentes com o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos ou subtraímos as frações equivalentes obtidas.

Fonte: (30, 2015, p. 143-144)

No processo de adição de frações com denominadores diferentes da obra F, percebemos que os autores optam por apresentar a forma geométrica como possibilidade de solução dos problemas. Entretanto, exibem exemplos simples (fáceis de aplicar essas ideias) e não mostram como impelmentar o método para casos mais complexos, como por exemplo quando os denominadores das frações não forem múltiplos um do outro. Em seguida, apresentam exemplos aritméticos para adição, utilizando frações equivalentes, e sem explicar o algoritmo utilizado para encontrá-las. Por fim, deixam (apenas) como sugestão ao professor, valer-se também do uso do MMC.

Figura 27 – Obra F: Abordagem do conceito de Adição de Frações com denominadores diferentes



Frações com denominadores diferentes

Agora, observe esta situação.

Paulo e Clara decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Paulo juntou $\frac{1}{8}$ do total de figurinhas e Clara, $\frac{1}{4}$. Que fração do total de figurinhas Paulo e Clara juntaram?

Precisamos calcular $\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$. Observe o esquema.

Para realizar essa operação, temos de encontrar frações equivalentes a essas duas frações, para que ambas fiquem com o mesmo denominador.

Pelo esquema acima, observamos que $\frac{1}{4}$ é o mesmo que $\frac{2}{8}$.

Então:

$$\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{2}{8}}_{\text{frações com denominadores iguais}} = \frac{3}{8} \longleftarrow \text{fração de figurinhas que Paulo e Clara juntaram}$$

Assim, Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ do total de figurinhas do álbum.

Esse resultado pode ser visualizado no esquema abaixo.

Se Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ das figurinhas do álbum, que fração do total de figurinhas falta para completar o álbum?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular $1 - \frac{3}{8}$.

Transformando 1 inteiro em uma fração equivalente com denominador 8, temos:

$$\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Portanto, para completar o álbum faltam $\frac{5}{8}$ do total de figurinhas.

Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores diferentes, encontramos frações equivalentes às iniciais, com um mesmo denominador, e então efetuamos a operação desejada.

Se achar conveniente, comente com os alunos que o denominador comum das frações equivalentes pode ser o mmc dos denominadores iniciais.

Exemplos

a) $\frac{6}{5} + \frac{9}{4} = \frac{24}{20} + \frac{45}{20} = \frac{69}{20}$

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{1}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

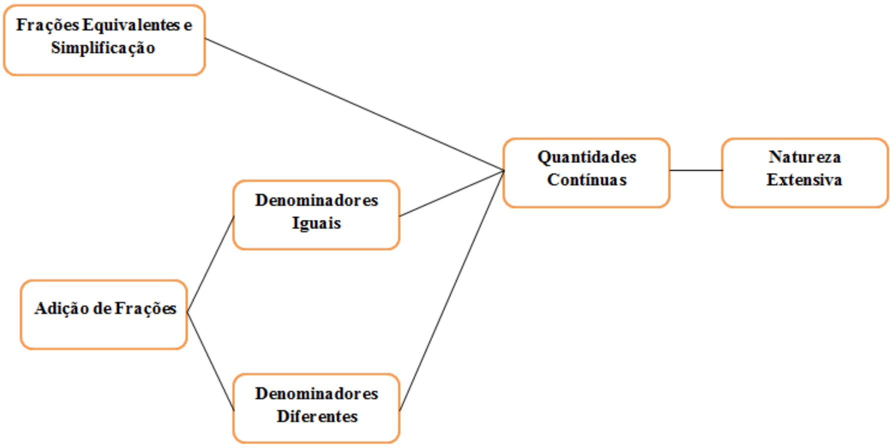
Fonte: (31, 2014, p. 157)

Quanto aos significados de fração e características das quantidades que a envolve, vemos unanimidade na abordagem dos livros didáticos. Em todas as obras analisadas, o conceito de frações equivalentes é explanado usando o significado parte-todo. Todos os autores trazem figuras divididas em partes iguais, nas quais algumas regiões estão coloridas (com cores variadas) e outras não. Sendo então caracterizadas como quantidades contínuas e extensivas.

Em relação à adição de frações (denominadores iguais e diferentes), os autores insistem em abordar o significado parte-todo, diferindo apenas em relação às situações colocadas. Alguns abordam figuras divididas em partes iguais, outros tortas, *pizzas* e queijos, bem como distâncias. Novamente, as características predominantes das quantidades são contínuas e extensivas.

Vejamos a seguir um diagrama que resume as características das abordagens supracitadas.

Figura 28 – Adição de frações nos livros didáticos: características



Fonte: elaborada pelo autor - software *Word*

4 O foco do estudo

Esta sessão constitui-se o foco do nosso trabalho: a Sequência Didática. Discorridos sobre vários assuntos que possibilitaram chegarmos até aqui, apresentamos a SD a ser desenvolvida em sala de aula.

4.1 Abordagens da adição de frações na SD

É importante ressaltar que, muitas situações do dia a dia não expõem aos estudantes, problemas significativos envolvendo números fracionários. Não compramos $\frac{3}{4}$ de dúzias de ovos, nem $\frac{3}{8}$ de uma pizza. O mais comum é a metade ou a quarta parte (de certa quantidade), meia hora,... Assim, importante contornar essa situação, explorando as formas fracionárias alternativamente. Aulas com materiais concretos, jogos, laboratório de informática, dentre outros, são bem vindos, mas é necessário um planejamento adequado para não cair no uso pelo uso. É de suma importância a escolha certa da metodologia.

Apesar de verificarmos que o conceito de frações equivalentes foram explorados em todos os livros didáticos, estes são apresentados como algo extensivo e difícil de ser utilizado para adição de frações. Alguns autores privilegiam o método de adição através do MMC, e na maioria dos casos, a opção por esse método ou o objetivo do mesmo, não é destacado. Isso provoca um enorme desânimo nos estudantes, haja vista que a divisão (operação necessária quando o MMC é utilizado), geralmente é mais trabalhosa. Assim, propomos o trabalho por meio de frações equivalentes, o qual privilegia a multiplicação, e pode tornar-se mais simples e agradável.

Vejamos como aplicá-la na situação abaixo:

João é operário e tem uma renda mensal de 2 salários mínimos. Ele gasta $\frac{1}{4}$ da sua renda com aluguel e $\frac{3}{10}$ com alimentação de sua família. Que fração de sua renda mensal João gasta com aluguel e alimentação?

Claramente a solução desse problema é o resultado da adição: $\frac{1}{4} + \frac{3}{10}$.

Assim, na busca da solução, efetuaremos os seguintes passos:

i) Encontraremos frações equivalentes às $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{10}$, e que possuam os mesmos denominadores. Para tanto, basta multiplicar o numerador e o denominador de cada uma, pelo denominador da outra. Veja:

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times10}{4\times10} = \frac{10}{40}$$

e

$$\frac{3}{10} = \frac{3 \times 4}{10 \times 4} = \frac{12}{40}$$

ii) Em seguida, substituiremos as frações pelas suas respectivas equivalências e efetuaremos a operação. Assim, temos:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} = \frac{10+12}{40} = \frac{22}{40}$$

iii) Por fim, faremos as devidas simplificações (se necessário).

$$\frac{22}{40} = \frac{22 \div 2}{40 \div 2} = \frac{11}{20}$$

Portanto, João gasta $\frac{11}{20}$ de sua renda com aluguel e alimentação.

Além de defender essa abordagem, queremos esclarecer a operação de adição com números fracionários, bem como, incentivar o seu trabalho em aplicações nas diversas áreas do conhecimento e no dia a dia. Sugerimos explorar situações como as eleições, onde vence o candidato que obter metade dos votos válidos mais um, no primeiro turno, ou a maioria simples no segundo; em mapas; em razões e proporções empregadas na música; na medicina; na física; na culinária; entre outras.

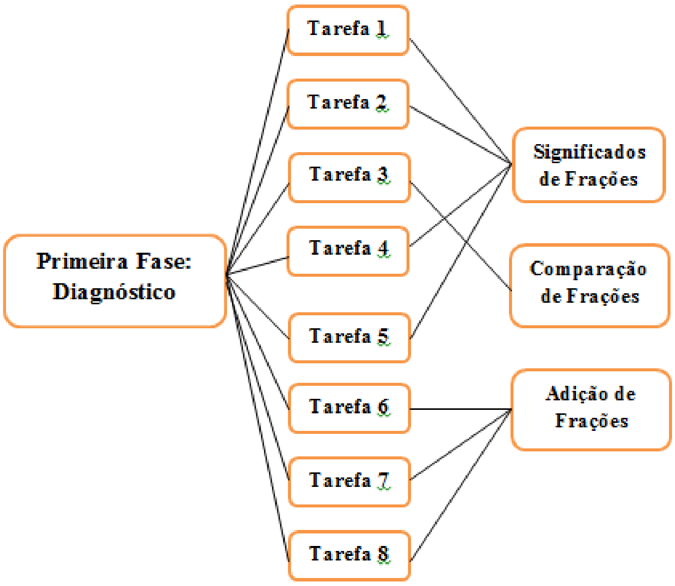
4.2 A Sequência Didática

A Sequência Didática foi organizada em 3 fases: diagnóstico, experimentação e avaliação. O tempo estimado para o desenvolvimento da SD é de 19 aulas de 50 minutos cada uma.

4.2.1 Primeira fase: Diagnóstico

O Diagnóstico é composto de 8 tarefas e objetivam verificar quais conceitos envolvendo frações os estudantes têm conhecimento. Busca-se informações sobre significados de frações, frações equivalentes, comparação de frações e adição. As tarefas 1, 2, 4 e 5 buscam indícios se os estudantes conhecem alguns dos significados de frações e se conseguem distinguí-los em um problema. A tarefa 3 trata da comparação de frações. Com as tarefas 6, 7 e 8 buscamos informações para saber se os estudantes têm conhecimento sobre adição de frações. O esquema a seguir auxilia na compreensão da orgnização do diagnóstico.

Figura 29 – Diagnóstico



Fonte: elaborada pelo autor - software *Word*

O tempo estimado para a realização do diagnóstico é de 2 aulas.

A partir do diagnóstico, elabora-se as atividades que constituem a fase da experimentação.

Para o desenvolvimento das tarefas do diagnóstico o professor-pesquisador deve:

i) Apresentar as atividades e seus objetivos;

ii) Distribuir o material necessário para o desenvolvimento das tarefas;

iii) Fazer a leitura e orientar o estudantes em relação ao desenvolvimento das tarefas;

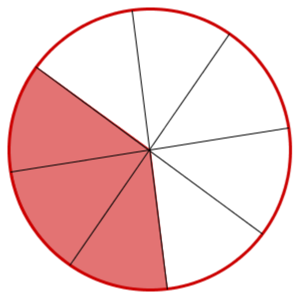
iv) Solicicitar que os estudantes anotem as respostas de cada tarefa;

v) Solicitar que apresentem suas respostas;

vi) Anotar todos os aspéctos que dizem respeito ao processo de solução das atividades pelos estudantes.

Tarefa 1: Observe a figura a seguir:

Figura 30 – Círculo



Fonte: elaborada pelo autor - software *GeoGebra*

a) Que fração do inteito representa a região pintada?

b) Que fração do inteiro representa a região não pintada?

Essa tarefa objetiva verificar se os estudantes compreendem o significado de fração como parte-todo.

A tarefa apresenta um círculo dividido em 8 partes iguais, sendo 3 delas coloridas. Trata-se do significado parte-todo, em que o círculo é uma quantidade contínua e a atividade estabelece relação entre as partes do mesmo, caracterizando-se como natureza extensiva.

Espera-se que os estudantes não tenham dificuldades em realizar essa tarefa. Entretanto, é possível que alguns ainda não tenham esse conhecimento totalmente construído, cometendo o erro de, por exemplo, escrever a fração como uma relação entre a região pintada (numerador) e a região não pintada (denominador).

Tarefa 2: Júlio é carteiro. Em certo dia, durante o período da manhã, ele entregou 7, de um total de 18 correspondências. Que fração do total de correspondências ainda falta ser entregue?

Essa tarefa também objetiva verificar se os estudantes compreendem o significado de fração como parte-todo, envolvendo agora uma situção-problema.

A tarefa trata da entrega de parte de correspondências, o que caracteriza o significado parte-todo. Como as correspondências entregues ou não, referem-se a um conjunto de objetos, podemos caracterizá-la como quantidade discreta e, além disso, a relação é estabelecida entre correspondências entregues ou não, e o total de correspondências, o que caracteriza, natureza extensiva.

Novamente, esperamos que os estudantes não tenham dificuldades em desenvolver essa tarefa. Devendo agora o professor se ater à erros de, por exemplo, escreverem a fração como uma relação entre o número de correspondências entregues (numerador) e o número de correspondências não entregues (denominador). Ou indicarem $\frac{7}{18}$ como resposta, uma vez que o número 7 aparece no problema.

Tarefa 3: Ana e Bianca recebem, por mês, a mesma quantia em dinheiro. Ana gasta $\frac{3}{4}$ do que ganha e Bianca, $\frac{2}{3}$. Quem gasta mais?

Essa tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem comparar frações.

A situação proposta traz a relação entre a quantia que Ana e Bianca gastam e o que recebem (parte-todo). Por se tratar de algo que pode ser particionado indefinidamente, refere-se a uma quantidade contínua. Além disso, a relação se estabelece entre o valor gasto e o que resta do salário (mesma natureza), e portanto, é de natureza extensiva.

Espera-se que os estudantes utilizem algum procedimento conhecido e consigam realizar a tarefa. É importante esclarecer, que essa tarefa apresenta um nível de dificuldade um pouco maior que a anterior e provavelmente uma quantidade significativa de estudantes não conseguirão desenvolvê-la. Entretanto, busca-se a apresentação de conceitos bem fundamentados ao fazerem a comparação das frações, evitando o uso de fórmulas excessivas e trabalhando com o conceito de frações equivalentes, preferencialmente mostrando duas maneiras de comparação: quando os numeradores são iguais e quando denominadores os são.

Tarefa 4: A turma do 6º ano tem 42 estudantes, dos quais $\frac{4}{7}$ são meninas.

a) Quantas são as meninas dessa classe?

b) Quantos são os meninos dessa classe?

c) Qual fração representa o número de meninos dessa classe?

Essa tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem resolver problemas em que a fração será tratada como multiplicador de uma quantidade.

Busca-se determinar uma fração (quantidade de meninos e meninas) da turma do 6º ano. Assim, trata-se do significado operador multiplicativo. As quantidades envolvidas, referem-se a um conjunto de estudantes que se divididos, reproduzem subconjuntos de mesma natureza, portanto, as quantidades são discretas. Além disso, a relação é estabeleida entre os estudantes da turma (mesma natureza) e portanto é de natureza extensiva.

Conhecendo o significado de fração como operador multiplicativo, certamente os estudantes não terão dificuldades em realizar essa tarefa, todavia, se não o conhecerem, o professor deve explorar situações para que esses conceitos possam ser construídos, preferencialmente, com uma sequência de atividades que possibilitem a construção dos cinco significados que abordamos nesse trabalho.

Tarefa 5: Para encher $\frac{2}{3}$ de uma piscina são necessários 6000 litros de água. Qual a capacidade dessa piscina?

Essa tarefa tem como objetivo verificar se os estudantes conseguem interpretar e resolver problemas nos quais a fração (que deve ser usada na resolução) não esteja explícita no enunciado.

O significado de fração abordado na situação é operador multiplicativo, haja vista que refere-se ao cálculo do $\frac{1}{3}$ necessário para encher a piscina. Além disso, a água é a quantidade envolvida e portanto, uma quantidade contínua. A relação é estabelecida entre a quantidade de água contida na piscina e a capacidade total, assim a natureza é extensiva.

Essa tarefa pode provocar dificuldades em muitos estudantes. O fato do problema apresentar a fração $\frac{2}{3}$ no enunciado, pode induzir os estudantes a calcularem $\frac{2}{3}$ de 6000 e apresentá-lo como resposta.

Tarefa 6: Lucas e Roberta compraram uma *pizza* de 8 pedaços. Sabendo que Roberta comeu $\frac{1}{4}$ da *pizza* e Lucas comeu 3 pedaços, qual a fração que indica a quantidade de pedaços que Lucas e Roberta comeram juntos?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem perceber e resolver adição de frações de denominadores iguais como solução de um problema.

A tarefa aborda dois significados de fração: operador multiplicativo, na medida em que cita que Roberta comeu $\frac{1}{3}$ da *pizza*, e relação parte-todo, na medida em que os estudantes devem relacionar a quantidade de pedaços que Lucas comeu com o total de pedaços da *pizza*. A quantidade em questão é contínua (pizza) e extensiva (relação entre pedaços que foram comidos e o total de pedaços).

Espera-se que os estudantes não tenham dificuldades em resolver esse problema. Embora seja necessário efetuar uma adição de frações, o mesmo pode ser resolvido (facilmente) se os estudantes fizerem um desenho que represente essa situação. Nesse viés, e sempre que necessário, é válido o professor enfatizar a importância dos desenhos na resolução dos problemas.

Tarefa 7: Efetue as operações com números fracionários:

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}$

Essa tarefa objetiva verificar se os estudantes têm conhecimento de algoritmos para adição de frações.

A situação exposta aborda o significação de fração como número (as frações não aparecem em um contexto, e são tratatas simplesmente como números fracionários). Além disso, não há especificidades quanto às quantidades envolvidas.

Dificilmente os estudante terão conhecimento de métodos de adição de frações, uma vez que este conceito é estudado (geralmente) no 6º ano. Nesse caso, o professor pode reservar explicações sobre esses métodos para o desenvolvimento da Sequência Didática.

Tarefa 8: Viajando de Palmas-TO à Porto Nacional-TO, Pedro percorreu o trajeto em $\frac{4}{5}$ de hora. Porém, quando fez o caminho de volta, gastou $\frac{1}{12}$ a mais do tempo que havia gasto no trajeto de ida. Quanto tempo Pedro gastou no caminho de volta? Que fração de hora indica esse tempo?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem perceber e resolver adição de frações de denominadores diferentes como solução de um problema.

O problema envolve o significado de fração operador multiplicativo, haja vista que é necessário determinar frações de hora. Além disso, a quantidade envolvida é o tempo (contínua) e a relação é estabelecida entre o tempo gasto na viagem de volta e o tempo contido em 1 hora (natureza extensiva).

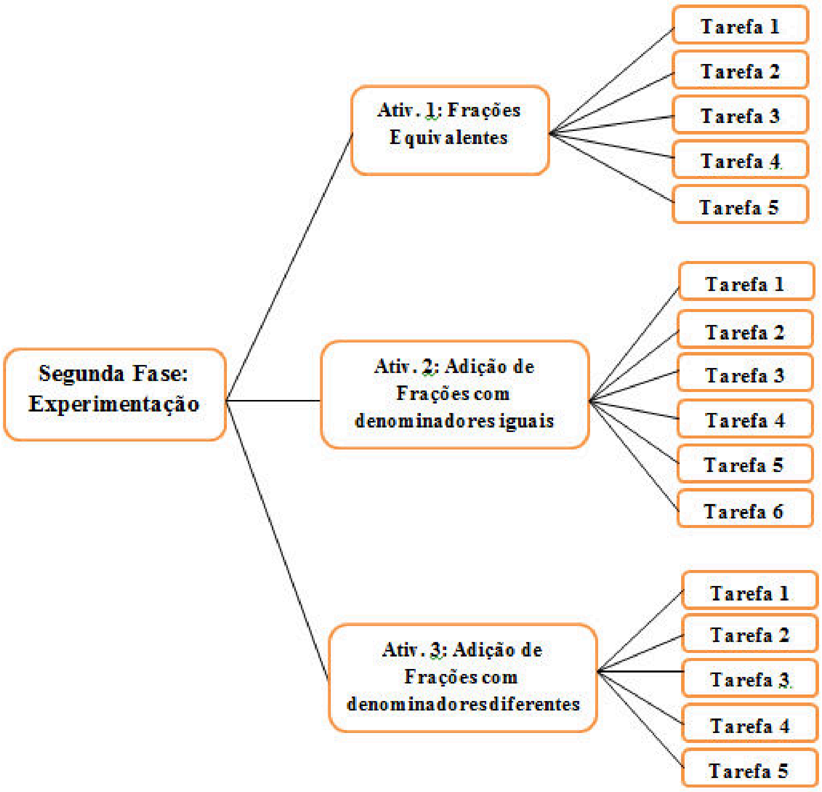
É provável que os estudantes percebam que o caminho para solucionar o problema é adição de frações, mas, dificilmente conseguirão resolvê-lo, devido ao pouco ou nenhum conhecimento sobre o assunto. Entretanto, o problema também pode ser resolvido usando o significado de fração como operador multiplicativo e se seguirem esse caminho, poderão chegar à solução.

Obs.: O teste diagnóstico é sugestivo. O professor pode elaborá-lo conforme os conceitos a serem abordados na Sequência Didática, de modo a adequá-la de acordo com os resultados obtidos.

4.2.2 Segunda fase: Experimentação

A Experimentação foi organizada em três atividades: a Atividade 1, cujo tema é *Frações Equivalentes*, contém 5 Tarefas, as quais têm como objetivo principal a compreensão do conceito de frações equivalentes. A Atividade 2, *Adição de frações com denominadores iguais*, foi organizada em 6 Tarefas, e têm como objetivo a compreensão do método de adição de frações de mesmo denominador. Nessas tarefas utilizamos o Tabuleiro de Xadrez e o Tangram, além de expor situações que envolvam diferentes significados de frações, quantidades contínuas e discretas, de natureza intensiva e extensiva. A Atividade 3, cujo tema é *Adição de frações com denominadores diferentes*, é constituída de 5 Tarefas, cujo objetivo é fazer a redução de frações a um mesmo denominador para assim adicioná-las. O esquema a seguir sintentiza esta organização.

Figura 31 – Experimentação



Fonte: elaborada pelo autor - software *Word*

4.2.2.1 Procedimento metodológico da experimentação

O professor-pesquisador deve retomar as tarefas do diagnóstico e discutir com os estudantes os processos de solução. Na continuidade, informá-los sobre o modo como será o desenvolvimento das atividades na fase de experimentação, no caso em tela, solicitar que os estudantes se organizem em equipes de até 4 integrantes a fim de que resolvam as atividades propostas e efetuem os registros dos procedimentos adotados no processo de solução. Além disso, as equipes devem se manter até a conclusão das atividades desta fase.

Constituídas as equipes, deve-se disponibilizar o material necessário para o desenvolvimento das atividades; apresentar as atividades e seus respectivos objetivos; efetuar a leitura e orientar os estudantes em relação ao desenvolvimento das tarefas; solicitar que anotem as respostas e informá-los que, após a conclusão de cada atividade, haverá um momento de socialização das equipes com a classe. O professor-pesquisador, por sua vez, deve ficar atento a tudo o que ocorre no desenvolvimento das atividades em cada uma das equipes, assim como efetuar o registro de tudo o que diz respeito ao processo de desenvolvimento das atividades pelos estudantes.

4.2.2.2 Atividade 1: Frações equivalentes

Esta atividade tem como objetivo proporcionar condições para que os estudantes compreendam o significado de frações equivalentes. Ela tem o tempo de duração estimado em 4 aulas. Para o desenvolvimento das tarefas o professor-pesquisador deverá disponibilizar aos estudantes os seguintes materiais:

i) Cartolina ou similar;

ii) Folha de Papel A_4;

iii) Lápis, Régua, Borracha e Lápis de cor;

Tarefa 1: Alex, Bernardo e Carlos ganharam uma barra de chocolate cada um. Alex dividiu a sua barra em duas partes iguais e comeu uma delas. Bernardo dividiu a sua barra em quatro partes iguais e comeu duas dessas partes. Carlos dividiu a sua barra em seis partes iguais e comeu três dessas partes.

a) Faça um desenho para representar a barra de chocolate em cada caso.

Obs.: Para efeito de comparação, é importante que os desenhos sejam feitos um abaixo do outro, ou, um ao lado do outro, dependendo da forma escolhida para fazer a divisão da barra (vertical ou horinzontal, respectivamente).

b) Que fração representa a parte da barra de chocolate que cada um comeu?

c) Quem comeu a maior quantidade de chocolate? Justifique.

d) Que outras frações representam a parte que cada um comeu?

Objetivamos que os estudantes percebam a existência de equivalências entre as barras de chocolate, bem como entre as representações numéricas, construindo assim o conceito de frações equivalentes.

Nessa tarefa, apresentamos o significado de fração parte-todo, uma vez que refere-se a parte de chocolate que foi comida por Alex, Bernardo e Carlos. Ao remeter-se a uma barra de chocolate, a quantidade caracteriza-se como contínua. Ao mesmo tempo, na medida que trata da relação entre duas quantidades de mesma natureza (parte consumida e barra de chocolate), a quantidade é extensiva.

O desenvolvimento dessa tarefa prevê que os estudantes percebam a existência de diferentes formas de representação numérica para uma mesma fração. Para tanto, alvitramos a exploração da representação geométrica para que os objetivos sejam alcançados. Pode ocorrer que os estudantes façam a representação em tamanhos ou locais que impossibilitem a percepção que, em todos os casos, tratam-se de uma mesma fração, daí a necessidade de acompanhamento por parte do professor para que as escalas sejam mantidas e os desenhos sejam feitos um em sequência do outro. Além disso, alguns podem fazer as divisões horizontalmente e outros verticalmente. Isso não irá influenciar na análise, desde que, quem optar por uma ou outra forma de divisão, mantenham-na até o final da tarefa.

Tarefa 2: Seu João decidiu distribuir sua coleção de 64 bolinhas de gude entre seus 4 filhos: Antônio, Kaio, Ricardo e Júnior. Para tanto, disse a Antônio: "filho, repartirei minha coleção em 4 partes iguais e você receberá uma dessas partes". Para Kaio, disse: "filho, repartirei minha coleção em 8 partes iguais e você receberá 2 dessas partes". A Ricardo disse: "repartirei minha coleção em 16 partes iguais e você receberá 4 dessas partes". E a Júnior, o filho mais novo, disse que iria repartir a coleção em 32 partes iguais e que ele receberia 8 dessas partes.

Com base no problema, responda os itens a seguir:

a) Faça um desenho para representar cada caso.

b) Compare os desenhos do item anterior e escreva a fração que representa a quantidade de bolinhas de gude que cada um recebeu.

c) Com base nos itens anteriores, é possível afirmar se algum dos filhos recebeu uma quantidade maior de bolinhas? Quantas bolinhas cada um recebeu?

O desenvolvimento desse tarefa possibilita que os estudantes explorem o material e construam o conceito de frações equivalentes para quantidades discretas. Objetivamos que percebam a equivalência entre as quantidades de bolinhas e, com isso, a equivalência entre as frações.

A tarefa aborda o significado de fração parte-todo, haja vista que trata da quantidade de bolinhas que cada filho de Seu João irá receber, em relação ao total de bolinhas. As quantidades envolvidas são discretas, uma vez que refere a um conjunto que pode ser divido em subconjuntos de elementos com as mesmas características. Ao mesmo tempo, são de natureza extensiva (refere-se a uma relação entre quantidades de mesma natureza: bolinhas que cada filho recebe e o total de bolinhas).

Esperamos que os estudantes percebam a existência de diferentes formas para a representação de uma mesma fração, agora com um exemplo envolvendo quantidades discretas. Pode ocorrer que os estudantes façam a divisão nas partes solicitadas, e não se atentem a utilização das partes para a representação das frações, se apegando excessivamente a quantidade de bolinhas que cada parte irá conter. Isso consequentemente irá acarretar que não consigam explorar os conceitos esperados. Cabe então ao professor intervir, sempre que necessário, para que as atividades atinjam os objetivos.

Tarefa 3: Gustavo dividiu uma folha de papel A_4 em 3 partes iguais e coloriu uma delas.

a) Faça um desenho representando essa situação.

b) Que fração representa a região pintada em relação ao todo? E a região que não foi pintada em relação ao todo?

c) Divida cada uma das células do desenho ao meio. Que fração do todo a região pintada representa agora? E a região não pintada?

d) Compare os dois itens anteriores e registre os que elas têm em comum e o que têm de diferentes.

e) Se dividirmos cada uma das células do desenho do item a) em 3 partes, que fração a região pintada representa? E a região não pintada? E se de dividirmos cada célula em 4, 5 e 6 partes?

f) É possível encontrar as frações que foram representadas nos itens c) e e) apenas comparando-as com as fração do item a)? E encontrar a fração do item a) a partir das frações encontradas nos itens c) e e)? Justifique.

Essa tarefa tem como objetivo que os estudantes percebam a existêncis de algoritmos para encontrar frações equivalentes a uma fração dada, e ao mesmo tempo, compreendam que independente do valor o qual sejam multiplicados o numerador e o denominador de uma fração, encontra-se uma fração equivalente.

Exploramos novamente o significado de fração como parte-todo, haja vista que relaciona as regiões pintadas e não pintadas de uma folha. Além disso, as quantidades são contínuas (folha de papel) e extensivas (relação entre quantidades de mesma natureza: regiões pintadas e total de regiões).

Aqui cabe uma atenção especial, principalmente na maneira que os estudantes vão dispor as folhas, haja vista que as frações representadas são as mesmas, entretanto estão escrita de formas diferentes. Vale ressaltar que é importante o professor induzir os estudantes (por meio da observação geométrica) a perceberem que todas as representações numéricas referam-se à mesma fração. Após a compreensão das equivalências, o professor deve provocar a exploração das ideias de multiplicação e divisão para encontrar as frações equivalentes. Vale ressaltar que, embora esteja sendo feita uma divisão das partes da figura, a quantidade dessas partes está aumentando e por isso trabalha-se com a ideia de multiplicação para encontrar frações equivalentes. Novamente o professor deve alertar aos grupos que, caso um opte pela divisão horizontal ou vertical, deve permanecer fazendo-a até o final da tarefa.

Tarefa 4: Lucas dividiu um pacote com 720 balas em 2 partes. Ele pretende distribuir uma das partes para seus colegas e ficar com a outra.

a) Que fração do todo representa a parte do pacote que Lucas irá distribuir aos seus colegas? E a parte que ficará para si?

b) E se Lucas redividir cada uma das partes da situação inicial em 2 novas partes, que fração do todo representa a parte do pacote que Lucas distribuirá aos seus colegas? E a parte que ficará para si?

c) Compare os dois itens anteriores e registre os que eles têm em comum e o que têm de diferentes.

d) Suponha que seja redividido cada uma das partes da distribuição feita por Lucas em 3, 4, 5 e 6 novas partes. Que fração do todo representa a parte do pacote que Lucas distribuirá aos seus colegas em cada caso? E a parte que ficará para si?

e) É possível encontrar as frações que foram representadas nos itens b) e d) apenas comparando-as com a fração do item a)? E encontrar a fração do item a) a partir das frações encontradas nos itens b) e d)? Justifique.

f) Existe equivalência entre as frações? Como você definiria frações equivalentes?

g) Escreva 4 frações equivalentes a:

i)$\frac{1}{3}$

ii) $\frac{1}{4}$

iii) $\frac{8}{16}$

iv) $\frac{7}{35}$

v) $\frac{25}{625}$

vi) $\frac{18}{144}$

Explique como foram encontradas cada uma delas.

Essa tarefa tem como objetivo que os estudantes desenvolvam um método para encontrar frações equivalentes a uma fração dada.

A situação exposta apresenta o significado parte-todo (dividir um pacote de balas em 2 partes e distribuir uma delas), quantidades discretas (as balas), e extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: partes nas quais o pacote foi dividido e o total de balas).

Pelo fato dessa tarefa se assemelhar com a anterior, esperamos que os estudantes não tenham dificuldades em desenvolvê-la. Entretanto, novamente é importante que o professor fique atento para que os estudantes não dêem atenção excessiva a quantidades de balas em detrimento da quantidade de partes.

Tarefa 5: Ao realizar as Tarefas 3 e 4, vimos que é possível determinar frações equivalentes por meio de multiplicações e divisões sucessivas. Daí,

a) Dado a fração $\frac{4}{16}$, quantas frações equivalentes a esta podemos encontrar por meio de multiplicações? E por meio de divisões? E para a fração $\frac{27}{36}$?

b) Por quais números podemos multiplicar o numerador e o denominador das frações do item a)?

c) Quais números dividem (ao mesmo tempo) o numerador e o denominador das frações do item a)?

d) Existe uma quantidade limitada de frações equivalentes a uma dada fração, encontradas por meio de multiplicações? E por meio de divisões? Justifique.

e) Quais as frações irredutíveis ou totalmente reduzidas (com os menores numeradores e denominadores possíveis) equivalentes as frações do item a)? Como podemos obtê-la?

f) No item e) foi possível verificar que em alguns casos, as frações irredutíveis não são obtidas imediatamente. Existe uma maneira de reduzir o número de divisões em busca da fração irredutível? Justifique.

Essa tarefa objetiva explorar o conceito de simplificação de frações e frações irredutíveis.

A tarefa aborda o significação de fração como número (as frações não aparecem em um contexto, e são tratatas simplesmente como números fracionários). Além disso, não há especificidades quanto às quantidades envolvidas.

Ao realizar essa tarefa, provavelmente os estudantes percebam que uma maneira de encontrar a fração irredutível é por meio de divisões sucessivas, entretanto, talvez não percebam que uma outra maneira de explorar esse conceito é utilizando as ideias do máximo divisor comum entre o numerador e o denominador da fração. Cabe então ao professor instigar os estudantes para que esses conceitos sejam construídos.

4.2.2.3 Atividade 2: Adição de frações com denominadores iguais

A atividade 2 objetiva oportunizar aos estudantes a solução de problemas envolvendo adição de frações com denominadores iguais. O tempo estimado para realização dessa atividade é de 6 aulas. Para o desenvolvimento das tarefas o professor-pesquisador deve disponibilizar aos estudantes os seguintes materiais:

i) Cartolina Branca e Colorida;

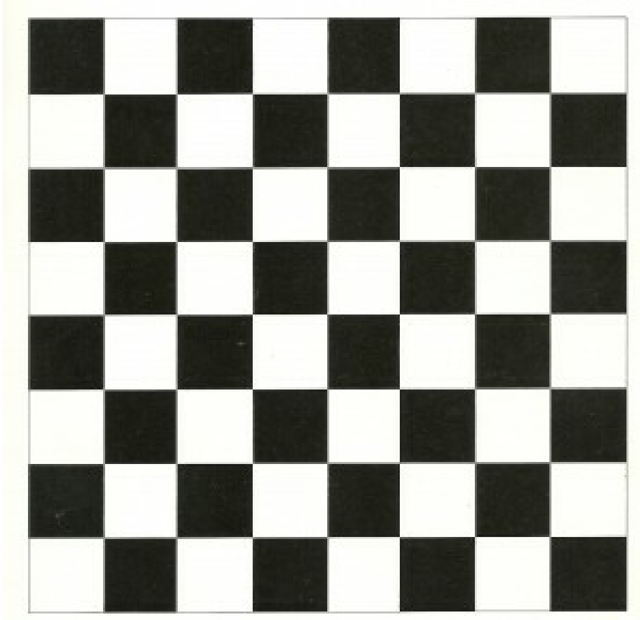
ii) Folha de Papel A_4;

iii) Lápis, Régua, Borracha e Lápis de cor ou similar;

Obs.: O professor deve orientar os estudantes na construção do Tabuleio de Xadrez e do Tangram.

Tarefa 1: Considere o tabuleiro de Xadrez a seguir.

Figura 32 – Tabuleiro de Xadrez



Fonte: elaborada pelo autor - software *Paint*

Usando as cores vermelho, azul e verde, vamos colorir as casas brancas do tabuleiro da seguinte forma: as casas vermelhas devem ser em quantidade, metade das pretas. As azuis, metade das vermelhas, e as verdes deve representar o resultado da divisão entre o número de casas pretas pelo número de casas azuis.

a) Determine o número de casas de cada umas das cores que teremos no tabuleiro.

b) Determine a fração (em relação ao todo) que representa as casas:

i) Pretas

ii) Vermelhas

iii) Azuis

iv) Verdes

v) Brancas

c) Que fração do todo representa as casas vermelhas e pretas juntas? E as azuis e verdes? E as vermelhas e brancas? E as verdes, vermelhas e azuis?

d) Se desconsideramos as casas pretas, que fração as casas vermelhas representam do restante do tabuleiro? E se retirarmos as casas brancas? E se retiramos as casas brancas e pretas?

e) Escreva uma adição de frações para representar cada uma das situações do item c), isto é, se tomarmos o caso em que foi questionado "que fração do todo representa as casas vermelhas e pretas juntas", devemos representar a fração que representa as casas vermelhas e adicioná-la a fração que representa as casas pretas. Comparando cada uma dessas adições com as respostas que você obteve no item c), qual o resultado das mesmas? Agora, comparando as adições com seus respectivos resultados, o que você pode inferir? O que aconteceu com os numeradores? E com os denominadores?

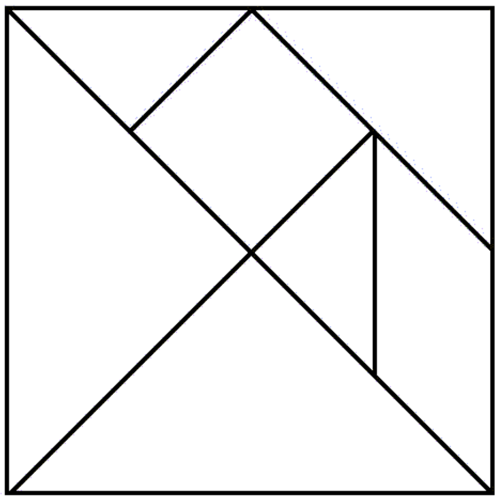
Semelhante a primeira tarefa do diagnóstico, essa traz um tabuleiro dividido em partes iguais, das quais, algumas partes são coloridas e outras não. Assim, trata-se do significado parte-todo. O tabuleiro é uma quantidade contínua e como a relação é entre as partes do mesmo, refere-se à natureza extensiva.

Espera-se que os estudantes percebam a relação entre as ideias geométricas e o algoritmo para adição de frações com denominadores iguais. E, além disso, que os mesmos, não encontrem dificuldades para estabelecer essas relações. Atentamos, entretanto, para a condução do professor em cada um dos itens, para que os objetivos sejam alcançados.

Tarefa 2: Segundo (32, 2006), o Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar, formado por sete peças com as quais é possível criar e montar cerca de 1700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas e outros;

O Tangram é formado por: um quadrado, cinco triângulos e um paralelogramo.

Figura 33 – Tangram



Fonte: elaborada pelo autor - software *Paint*

a) Tomando a menor peça do Tangram como unidade, compare-a com as demais peças, determinando quantas unidades cabem em cada uma delas. Faça marcações para que fique claro o número de unidades que cada uma possui e para facilitar respostas de indagações futuras.

b) Agora, determine quantas unidades cabem no Tangram.

c) Baseado no significado de fração como parte-todo, que fração cada uma das peças do Tangram representa em relação ao todo? Use o número de unidades que cabem em cada umas das peças para fazer essa representação.

d) Determine a fração representada pelo:

i) quadrado e um dos triângulos menores.

ii) triângulo maior e o paralelogramo.

iii) três triângulos.

iv) quadrado e triângulo maior.

d) Que fração iremos obter ao retirar:

i) Um dos triângulos maiores do Tangram?

ii) O quadrado e um dos triângulos menores?

iii) O paralelogramo e o triângulo maior?

e) Escreva uma adição para representar cada uma das situações do item anterior. Qual deve ser o resultado dessas adições? Agora, comparando as adições com seus respectivos resultados, o que você pode inferir? O que aconteceu com os numeradores? E com os denominadores?

A situação exposta objetiva estabelecer relações entre as peças do Tangram e promover a construção do conceito de adição de frações com denominadores iguais.

Essa tarefa tem as mesmas características da tarefa anterior.

É possível que os estudantes tenham dificuldades em comparar as peças, principalmente no sentido de colocá-las nas posições adequadas ou simplesmente fazendo "chutes" para que lhes sejam fornecidas as respostas. Cabe então ao professor, intervir e instigar para que consigam por si mesmo chegar às conclusões que se espera.

Tarefa 3: Consideremos agora que o Tangram da Tarefa 2 (Atividade 2) foi dividido na diagonal e que iremos utilizar somente a metade que possui a maior quantidade de peças.

Tomando novamente a menor peça como unidade responda:

a) Quantas unidades cabem em cada uma das peças que restaram?

b) Quantas unidades cabem na metade do Tangram que utilizamos?

c) Que fração do todo cada uma das peças representa agora?

d) Que fração do todo iremos obter ao retirarmos:

i) o quadrado menor?

ii) o quadrado e o paralelogramo?

iii) um triângulo e o quadrado?

iv) dois triângulos e o paralelogramo?

e) Escreva uma adição para representar cada uma das situações do item anterior. Qual deve ser o resultado dessas adições? Agora, comparando as adições com seus respectivos resultados, o que você pode inferir? O que aconteceu com os numeradores? E com os denominadores?

Nessa atividade esperamos que os estudantes percebam que o todo foi reduzido à metade, consigam particioná-lo, façam a comparação entre as peças e realizem as operações.

Essa Tarefa apresenta as mesmas características da Tarefa 1 (Atividade 2).

Provavelmente os estudantes tenham dificuldades nessa atividade, uma vez que o comando principal é "retirar peças". É possível que tentem adicionar as frações que representam as peças retiradas, ao invés daquelas que restaram. Novamente, cabe ao professor intervir e instigar para que cheguem às conclusões esperadas.

Tarefa 4: Para preparar uma jarra de refresco, Bia necessita de 1 copo de concentrado de abacaxi e 3 copos de água.

a) Que fração representa o concentrado de abacaxi em relação a mistura total? e a fração de água?

b) Que fração representa a mistura total?

c) Escreva uma adição de frações para representar o item b). Qual deve ser o resultado dessa adição? Agora, comparando a adição com seu respectivo resultado, o que você pode inferir? O que aconteceu com os numeradores? E com os denominadores?

Com essa tarefa esperamos que os estudantes apliquem as ideias de adição de frações com denominadores iguais.

A situação exposta, trata da utilização de "copos" (concentrado e água) para preparar um refresco. Assim, refere-se ao significado de fração como medida. Além disso, a água é uma quantidade contínua e a relação é estabelecida entre duas quantidades de natureza distintas (concentrado e água) e portanto, são intensivas.

Espera-se que os estudantes tenham pouca ou nenhuma dificuldade na resolução dessa tarefa. Entretanto, é possível que se apeguem excessivamente no fato de se tratar de uma jarra de refresco e esquecerem que foi usado um copo como unidade. Cabe então ao professor, cuidar para que isso seja esclarecido.

Tarefa 5: Em uma rifa foram vendidos 15 bilhetes. Marcos comprou 4 deles, Lúcia comprou 6, Guilherme comprou 3 e Giovana 2.

a) Que fração do todo representa a chance que cada um dos participantes tem de ganhar a rifa?

b) Suponhamos que Marcos e Guilherme resolvam juntar os bilhetes e dividir o prêmio (caso sejam os vencedores) e Lúcia e Giovana façam o mesmo. Quem tem mais chance de sair vencedor: Marcos e Guilherme ou Lúcia e Giovana?

c) Escreva uma adição para representar a chance de Marcos e Guilherme serem vencedores da rifa. Faça o mesmo para Lúcia e Giovana. Qual deve ser o resultado dessas adições? Agora, comparando as adições com seus respectivos resultados, o que você pode inferir? O que aconteceu com os numeradores? E com os denominadores?

Nessa tarefa temos como objetivo, a continuidade da construção das ideias de adição de frações com denominadores iguais.

Esta situação refere-se a uma rifa com 15 bilhetes, os quais foram vendidos a 4 pessoas (cada uma delas ficando uma parte dos bilhetes). Assim, trata-se do significado parte-todo. Os bilhetes são uma quantidade discreta e a relação é estabelecida entre os bilhetes que cada participante comprou e o total (natureza extensiva).

Espera-se que os estudantes confirmem o algoritmo para adição de frações com denominadores iguais, inferido nas tarefas anteriores, e sem encontrar grandes dificuldades.

Tarefa 6: No dia do lançamento de um prédio foram vendidos $\frac{3}{5}$ dos apartamentos, e no segundo dia, $\frac{1}{5}$.

a) Determine a fração que representa a venda dos apartamentos nesses dois dias, seguindo os seguintes passos:

i) Faça um desenho representando as frações num mesmo inteiro.

ii) Use o desenho para chegar a soma procurada.

b) Repita o procedimento anterior para a adição $\frac{3}{11} + \frac{5}{11}$.

c) Com base nas tarefas anteriores, como podemos resolver as adições dos itens anteriores sem utilizar desenhos?

d) Descreva um método de adição de frações de mesmo denominador.

Nessa tarefa, objetivmos formalizar o conceito de adição de frações com denominadores iguais.

As características dessa tarefa são as mesmas da tarefa anterior, isto é, significado parte-todo (fração dos apartamentos vendidos em relação ao total), quantidades discretas (número de apartamentos) e natureza extensiva (quantidades de mesma natureza).

Espera-se que os estudantes não tenham dificuldades em fazer a formalização do conceito de adição, haja vista que as tarefas anteriores apresentaram os mais variados exemplos sobre o assunto. Entretanto, isso ainda pode acontecer no momento da representação geométrica da venda dos apartamentos, uma vez que os estudantes podem fazer uma representação para cada caso. Dessa forma, é importante a intervenção do professor para que os desenhos sejam feitos no mesmo inteiro, separando cada caso apenas pelos números que representam as vendas em cada dia.

4.2.2.4 Atividade 3: Adição de frações com denominadores diferentes

A atividade 3 tem como objetivo trabalhar situações envolvendo adição de frações com denominadores diferentes. Estima-se que o tempo necessário para o desenvolvimento das tarefas dessa atividade seja 5 aulas.

O professor-pesquisador deve disponibilizar aos estudantes o seguintes materiais:

i) Folha de Papel A_4;

iii) Lápis, Caneta (azul ou preta) Régua e Borracha;

Tarefa 1: Suponhamos que na Tarefa 6 da Atividade 2 a fração que representa o número de apartamentos vendidos no primeiro dia se mantenha e no segundo dia seja $\frac{1}{3}$.

a) Faça um desenho para representar a fração dos apartamentos vendidos no primeiro dia e outro para representar a fração dos apartamentos vendidos no segundo dia.

b) É possível adicionar as frações que representam os apartamentos vendidos nesses dois dias usando os desenhos feitos no item anterior? Justifique.

c) Quais procedimentos você utilizaria para resolver a adição $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$? Em quais casos você consegue adicionar duas frações?

d) Encontre uma sequência de frações equivalentes às frações do item anterior. Alguma da frações que você encontrou possuem o mesmo denominador? Quais?

e) Agora é possível adicionar $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$? Justifique.

Tarefa 2: Suponha que Bia prepará, além da jarra de suco de abacaxi da Tarefa 4 da Atividade 2, uma jarra de suco de uva de mesma medida. Entretanto, como irá utilizar um copo com capacidade diferente, o suco irá conter 5 copos de água e 2 copos de concentrado.

a) Que fração do todo representa a quantidade de água do suco de uva?

b) Represente cada uma das jarras de suco por meio de um desenho.

c) É possível adicionar as frações que representam a quantidade de água utilizada para fazer as duas jarras de suco, usando os desenhos feitos no item anterior? Justifique.

d) Baseando-se no método utilizado na tarefa anterior, como você faria para adicionar as frações do item c)?

As tarefas 1 e 2 objetivam que os estudantes percebam que não é possível efetuar a adição de duas frações quando estas têm denominadores diferentes (ainda que utilizem representações geométricas), e levá-los a utilizar o conceito de frações equivalentes para solucionar os problemas.

As características da Tarefas 1 e 2 são as mesmas das Tarefas 5 e 4 da Atividade 2 (respectivamente).

Espera-se, com o desenrolar das tarefas (1 e 2), que os estudantes compreendam o processo de adição de frações com denominadores diferentes. Possivelmente não conseguirão responder claramente o item b) da Tarefa 1, mas, com o desenvolvimento dos demais itens, isso ficará claro em seguida.

Tarefa 3 Retorne às tarefas 1 e 2 da Atividade 1 e determine:

a) A fração que corresponde a parte que Alex e Bernardo comeram.

b) A fração que corresponde a parte que Carlos e Bernardo comeram.

c) A fração que corresponde a parte que Alex e Carlos comeram.

d) A fração que corresponde a parte que Alex, Bernardo e Carlos comeram.

e) A fração das bolinhas de gude que Antônio e Kaio ganharam.

f) A fração das bolinhas de gude que Ricardo e Júnior ganharam.

g) A fração das bolinhas de gude que Antônio, Kaio, Ricardo e Júnior ganharam.

Essa tarefa objetiva proporcionar aos estudantes a compreensão que as frações podem ser reduzidas a um mesmo denominador, de modo a facilitar o desenvolvimento das operações desejadas.

As situações apresentam as mesmas características das Tarefa 1 e 2 (Atividade 1).

Novamente, espera-se que os estudantes não tenham dificuldades em realizar a tarefa. Se necessário, é importante o professor solicitar que retornem às atividades indicadas e relembrem o método utilizado para encontrar frações equivalentes.

Tarefa 4: Retorne sempre que necessário às atividades anteriores e responda:

a) Quais procedimentos você utilizaria para encontrar frações equivalentes às frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{10}$, e que possuam o mesmo denominador? Descreva esse processo. Esse método é simples ou, dependendo das frações, pode se tornar extenso? Seria interessante utilizá-lo para as adições $\frac{3}{7} + \frac{6}{41}$ ou para $\frac{4}{13} + \frac{1}{53}$? Justifique.

b) Vimos na Atividade 1, que independente do número que você multiplique o numerador e o denominador de uma fração, irá obter uma fração equivalente. Assim, o que fazer para tornar menos trabalhoso o processo de redução de frações a um mesmo denominador?

c) Sabemos que, para a multiplicação, vale a propriedade comutativa, isto é, $a \times b = b \times a$. Isso pode contribuir no processo de redução das frações a um mesmo denominador? Justifique.

d) Baseando-se na propriedade comutativa da multiplicação e no método de adição de frações com denominadores diferentes (obter denominadores iguais), qual o método mais simples para reduzirmos as frações $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{41}$ ou $\frac{4}{13}$ e $\frac{1}{53}$ a um mesmo denominador? Como isso pode ser feito?

e) Obtenha uma fração equivalente $\frac{3}{7}$ multiplicando o numerador e o denominador por 41. Agora, obtenha uma fração equivalente a $\frac{6}{41}$ multiplicando o numerador e o denominador por 7. O que as novas frações têm em comum? A partir disso, o que você pode inferir sobre redução de frações a um mesmo denominador? Aplique esse método na adição $\frac{4}{13} + \frac{1}{53}$.

f) Descreva um método de redução de frações a um mesmo denominador.

Com essa tarefa, objetivamos que os estudantes percebam a existência de um processo mais simples de redução de frações a um mesmo denominador.

A tarefa aborda o significação de fração como número (as frações não aparecem em um contexto, e são tratatas simplesmente como números fracionários). Além disso, não há especificidade quanto às quantidades envolvidas.

Esta talvez seja a tarefa na qual os estudantes terão mais dificuldades. A ideia de multiplicação dos denominadores para redução das frações ao mesmo denominador pode não ser facilmente percebido. Cabe então ao professor instigar os participantes, em cada item da tarefa, para que os objetivos sejam alcançados. Se necessário, o professor deve insistir que releiam os itens. Nesse momento cabem perguntas do tipo: o que o item afirma? o que é questionado?

Tarefa 5: Resolva as questões a seguir utilizando os conceitos construídos nas atividades anteriores:

a) Mário representou a fração $\frac{3}{4}$ na reta numérica e Felipe a fração $\frac{5}{6}$. Pedro por sua vez, deveria representar o resultado da adição $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$. Qual fração Pedro representou?

b) Dos 64 funcionários de uma empresa, $\frac{5}{8}$ têm idade inferior a 35 anos e $\frac{1}{5}$ têm idade superior a 50 anos. Quantos funcionários têm menos de 35 anos? E mais de 50? Quantos funcionários têm menos de 35 anos ou mais de 50? Que fração do todo representa os funcionários com menos de 35 e mais de 50 anos?

c) As famílias de João e Lucas saíram para comer *pizzas*. A família de João é composta de 5 pessoas e a de Lucas apenas 3. Ambas as famílias pediram uma *pizza* de 8 pedaços cada. Se em cada família a *pizza* foi dividida igualmente entre os integrantes, que fração da *pizza* de sua família João comeu? E Lucas? Que fração do todo representa a parte que João e Lucas comeram?

d) Uma prova de Triatlo (Natação, Ciclismo e Corrida) de 50km será dividida em 3 partes. Responda:

i) Se a prova for dividida em 3 partes iguais, que fração do todo representa cada uma dessas partes?

ii) Se a natação corresponde a $\frac{1}{25}$ do percurso, a corrida $\frac{2}{10}$ e o ciclismo 38km, quantos quilômetros correspondem a natação? E a corrida? Que fração do percurso representa o ciclismo? Que fração do percurso representa a natação e o ciclismo juntos? E a natação e a corrida?

e) Elabore um método para adição de frações com denominadores diferentes.

Com essa tarefa objetivamos que os estudantes utilizem as ideias aplicadas na atividade anterior, resolvam dos itens e formalizem do conceito de adição de frações com denominadores diferentes.

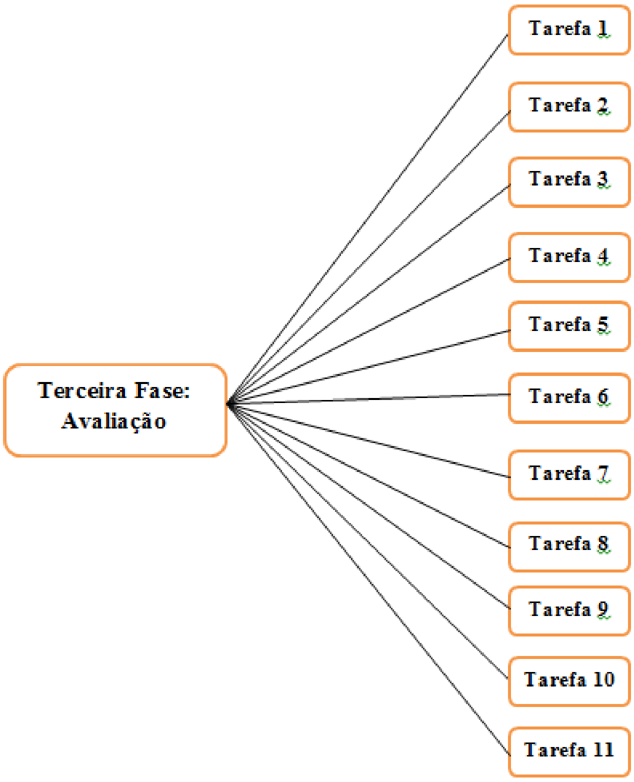
A tarefa trata-se do conceito de adição de frações em problemas envolvendo diferentes características. No item a) abordamos o significado de fração como número, uma vez que não há um contexto para que o mesmo seja compreendido (sem especificidades quanto às quantidades), no item b) operador multiplicativo (deve-se calcular uma fração do número de funcionários), quantidades discretas (número de funcionários) e natureza extensiva (quantidades de mesma natureza: relação entre os funcionários que têm uma certa idade e o total), no item c) aborda-se o significado quociente (divisão de uma pizza entre pessoas), quantidades discretas (número de pedaços de pizzas) e natureza intensiva (relação entre quantidades de natureza distinta: pizza e pessoas). O idem d) foi organizado em 2 subitens: no primeiro abordamos o significado de fração como quociente (divisão da distância em três etapas), quantidades contínuas (distância) e natureza intensiva (relação entre quantidades de natureza distinta: distância e estapas da prova); no segundo, uma mescla de operador multiplicativo (deve-se calcular frações do percurso) e parte-todo (o percurso foi dividido em partes, e cada uma delas corresponde a uma fração do total), quantidades contínuas (distância) e natureza extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: percurso correspondente a cada uma das etapas e distância total).

Espera-se que os estudantes tomem essa atividade como uma consequência da anterior e não tenham dificuldades em desenvolvê-la.

4.2.3 Terceira fase: Avaliação

A Avaliação das aprendizagens é composta por 11 tarefas e têm como objetivo verificar se os estudantes compreenderam o conceito de adição de frações. A previsão de realização das tarefas dessa fase é de 2 aulas.

Figura 34 – Avaliação



Fonte: elaborada pelo autor - software *Word*

O professor-pesquisador deve organizar a classe de modo que os estudantes resolvam as tarefas da avaliação individualmente. Além disso, deve disponibilizar as questões e acompanhar todo o processo de solução, registrando aspéctos importantes a serem tratados com os estudantes, a fim de dirimir possíveis dúvidas e/ou esclarecer situações que, por ventura, não foram suscitadas no decorrer da experimentação.

Tarefa 1: O Quilate é a razão entre a massa de ouro presente e a massa total de uma peça. A pureza do ouro é expressa pelo número de partes de ouro que compõem a barra, pepita ou joia. O ouro de um objeto, em que a cada 24 partes, 16 são de ouro e 8 são de outro metal, é de 16 quilates. Da mesma forma, uma peça em que a cada 24 partes, 10 são de ouro e 14 são de outro metal, é de 10 quilates. O ouro puro tem 24 quilates.

A senhora Magnólia comprou um colar de 18 quilates e que contém 72 pedras.

a) Se as pedras fossem separadas entre ouro puro e outro metal, quantas pedras do colar seriam de ouro puro?

b) Que fração do todo representa as pedras de ouro puro?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes compreendem os significados de frações aplicados em um problema.

A situação exposta apresenta o significado parte-todo, uma vez que refere-se a relação entre o número de pedras de ouro e o total de pedras. As quantidades são discretas (pedras de ouro), e de natureza intensiva (quantidades de natureza distintas: pedras de ouro puro e colar).

Tarefa 2: Descreva, com suas palavras, como se adiciona frações de denominadores iguais e diferentes.

A tarefa objetiva verificar se os estudantes compreenderam e conseguem expressar um método de adição de frações com denominadores iguais e diferentes.

Tarefa 3: Efetue as adições a seguir:

a) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7}$

b) $\frac{8}{5} + \frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{9} + \frac{5}{12}$

e) $\frac{3}{8} + \frac{7}{36}$

Essa tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem aplicar os métodos de adição de frações.

As frações são tratadas como números fracionários, uma vez que não é necessário um contexto para serem compreendidas.

Tarefa 4: Um ônibus percorre $\frac{3}{10}$ de uma distância pela manhã e $\frac{4}{10}$ à tarde. No dois períodos ele percorreu que fração da distância?

A tarefa objetiva resolver problemas envolvendo adição de frações de mesmo denominador.

A situação apresenta o significado operador multiplicativo (refere-se à frações de uma distância), quantidades contínuas (distância) e de natureza extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: distância percorrida em cada turno e distância total).

Tarefa 5: Três folhas de papel sulfite serão repartidas igualmente entre 4 crianças.

a) Faça um desenho e indique a divisão correspondente a essa situação.

b) Que fração do todo representa a parte que cada criança irá receber?

c) Que fração do todo representa a parte que caberá a duas dessas crianças? e a três?

Com essa tarefa obejetivamos resolver problemas envolvendo adição de frações de mesmo denominador.

A tarefa refere-se ao significado quociente, uma vez que apresenta a divisão como recurso para resolver o problema. As quantidades são contínuas (folha de papel) e de natureza intensiva (natureza distintas: papel e crianças).

Tarefa 6: Um galão de leite tem capacidade de 17 litros.

a) Quantas canecas de 2 litros são necessárias para encher o galão? E de 3?

b) Que fração representa cada caso do item anterior?

c) Que fração representa a adição das frações do item b)?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo adição de frações com denominadores diferentes.

A situação exposta apresenta o significado medida, uma vez que refere-se ao número de canecas necessárias para encher o galão. As quantidades são contínuas (leite) e de natureza extensiva (relação entre o leite que cabe no galão e o que cabe em cada caneca).

Tarefa 7: Duas vasilhas iguais com suco de acerola estão com $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ de suas capacidades. Que fração do todo representa a quantidade de suco que as duas vasilhas têm juntas?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo adição de frações com denominadores diferentes.

A situação exposta apresenta o significado operador multiplicativo (refere-se a fração de suco de acerola que cada jarra contém), quantidades contínuas (suco) e de natureza extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: parte ocupada pelo suco e capacidade total de cada jarra).

Tarefa 8: Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de combustível do seu carro abastecido e gastou $\frac{2}{3}$ desse combustível na viagem.

a) Sabendo que a capacidade do tanque é 54 litros, quantos litros ela gastou?

b) Se ao chegar em casa, Roberta verificou que gastou $\frac{1}{10}$ do combustível no deslocamento dentro da cidade, que fração representa o total de combustível gasto?

Com essa tarefa, objetivamos verificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo adição de frações com denominadores diferentes.

As características da tarefa são: significado operador multiplicativo (uma vez que deve-se calcular a fração do combustível gasto na viagem), quantidades contínuas (combustível) e de natureza extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: combustível gasto na viagem e o que havia no tanque).

Tarefa 9: Considere um dado não viciado.

a) Quantas faces ele tem?

b) Num lançamento aleatório, qual fração representa a chance de sair um número maior do que 4? E menor do que 2?

c) Qual a chance de sair um número maior do que 4 ou menor do que 2?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo adição de frações com denominadores diferentes.

A situção exposta apresenta o significado parte-todo, uma vez que relaciona uma ou mais faces do dado com o total), quantidades discretas (número de faces do dado) e de natureza extensiva (relação entre o número de faces com uma certa característica e o total de faces).

Tarefa 10: Adicionando os números $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$ que número iremos obter? Se esse número representar a quantidade de mulheres de uma cidade de 331625 habitantes, quantos homens há nessa cidade?

Essa tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo adição de frações com denominadores diferentes.

A situação exposta é organizada em duas partes: a primeira aborda o significado número, não havendo necessidade de um contexto para compreensão, e a segunda, o significado operador multiplicativo, uma vez que é necessário determinar a fração do número de habitantes que corresponde às mulheres, quantidades discretas (número de pessoas) e de natureza extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: número de homens ou mulheres e o total de habitantes).

Tarefa 11: Marcos e Gisele compraram um queijo e dividiram-no em 12 fatias iguais. Do total de fatias, Marcos comeu $\frac{2}{3}$ e Gisele $\frac{1}{4}$.

a) Que fração das fatias Marcos e Gisele comeram?

b) Quantas fatias Marcos comeu? E Gisele?

c) Quantas fatias sobraram? Que fração do todo representa essa quantidade?

A tarefa objetiva verificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo adição de frações com denominadores diferentes.

Nessa tarefa aborda-se o significado parte-todo, ao relacionar o número de fatias que Marcos e Gisele comeram com o total de partes, quantidades contínuas (queijo) e de natureza extensiva (relação entre quantidades de mesma natureza: número de fatias que cada um comeu e total de fatias).

De modo geral, espera-se que os estudantes compreendam e consigam desenvolver as tarefas dessa avaliação. Vale ressaltar que não estamos colocando a Sequência Didática como uma metodologia que irá resolver todos os problemas relacionado à adição de frações. Certamente ainda haverá estudantes com dificuldades, principalmente nas situações contextualizadas. Assim, esperamos que os casos mais direto (aqueles nos quais as operações estão explícitas no problema) sejam resolvidos facilmente e que as dificuldades sejam, no máximo, de interpretação de situações. Nesse momento, ainda é importante que o professor faça o acompanhamento junto aos estudantes para sanar possíveis dúvidas.

5 Considerações

Durante esse tempo pesquisando e estudando sobre SD, vemos esta como um campo bastante profícuo e de suma importância para o ensino de matemática, tanto assim que no próprio PROFMAT há dissertações que versam sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações, assim como do desenvolvimento de Sequências Didáticas. Dessa forma, acreditamos que esse trabalho pode contribuir como um incentivo para que outros estudos sejam desenvolvidos, principalmente sobre frações, e também possam contribuir com o ensino público.

A análise dos livros didáticos mostrou uma espécie de modelo engessado no ensino de adição de frações, e esse modelo que tem chegado aos estudantes. Como consequência e pelo que os referenciais apontaram, os resultados nas avaliações que medem o índice de desempenho não têm sido satisfatórios. Nesse sentido, se faz necessário questionar as práticas instituídas e nos debruçarmos num novo pensar e agir em relação ao ensino de frações. Não obstante, as pesquisas relativas ao uso de Sequência Didática nos proporcionou experiências e provocou discussões relacionadas às possibilidades de novas metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática, no caso em tela, das operações com frações.

O ensino de frações tem sido árduo e requer um olhar diferenciado. Ao mesmo tempo, iniciativas devem ser tomadas para que as dificuldades sejam dirimidas. Portanto, assim como nosso referencial apontou e o desenvolvimento deste trabalho confirmou, a Sequência Didática pode e deve ser usada como alternativa no ensino de matemática, agregando assim novas possibilidades ao dia a dia da sala de aula.

As características dessa dissertação deixam claro que o objetivo não é esgotar as possibilidades e nem fornecer uma receita para o ensino de adição de frações. Dado a grande variedade e abrangência das abordagens, torna-se pretencioso e complexo fazer isso ou até mesmo impossível. Nesse viés, as atividades que elaboramos são sugestivas, as mesmas podem e devem ser adaptadas de acordo com o meio em que for proposta. O que de fato queremos mostrar é que a Sequência Didática é passível de utilização como proposta de ensino de frações e que a mesma deve ser testada e ter os resultados analisados para o desenvolvimento de trabalhos futuros, bem como para ajuste do que foi pensado nas atividades deste. Não esperamos que o trabalho com Sequência Didática seja a solução para os problemas relacionados ao ensino de adição de frações, entretanto insistimos em relação à necessidade de mudanças.

É importante salientar também que o desenvolvimento de uma Sequência Didática é algo trabalhoso e difícil de ser implementado. Por se tratar de algo relativamente novo tanto para os estudantes quanto para o professor, desencadeia uma série de situações as quais são imprevisíveis. O professor certamente não estará mais na sua "zona de conforto" e se encontrará numa função diferente da que desempenha nas aulas "tradicionais". Os estudantes, acostumados a receber o conhecimento de forma pronta e acabada serão responsáveis por construí-lo e certamente terão resistência em fazê-lo. Essas e outras barreiras inerentes a inserção da Sequência Didática como proposta de ensino devem ser transpostas, umas vez que as possibilidades de aprendizagem devem superar as dificuldades em busca da construção do conhecimento

Ao longo da carreira docente, o domínio dos conteúdos e o número de horas trabalhadas pelo professor, nos faz abandonar gradativamente o ato de planejar as aulas. O planejar ao qual nos referimos é o de conhecer os estudantes, suas necessidades e bagagem conceitual, adequar os conteúdos à realidade dos mesmos, dentre outras. O que costumamos fazer é reciclar os planos de ensino de anos anteriores e adotar materiais apostilados, com a introdução de Cadernos do Professor e do Estudante (o que contribui cada vez mais para a acomodação).

Com a elaboração de SD resgatamos esse hábito tão importante para o processo de ensino e aprendizagem, o planejar. Separar um tempo para pensar cada etapa da SD, escolher os temas a serem trabalhados, bem como as estratégias didáticas que serão utilizadas, nos proporciona momentos de satisfação profissional que, somados às possibilidades do trabalho com SD, nos faz refletir sobre o proceder como professor e instiga-nos a buscarmos alternativas para a prática educativa.

Após a elaboração deste trabalho, fica como lição compreendermos que os estudantes têm responsabilidades sobre sua aprendizagem e que não podem esperar passivamente que o professor tenha todas as respostas e ofereça todas as soluções. E por meio de estratégias de ensino encadeadas (SD), os estudantes buscam estas soluções em conjunto. Além disso, o professor deixa de simplesmente transmitir conhecimento e assume o papel de criador de situações estimulantes (as Sequências Didáticas contribuem para isso) para si próprio e para os estudantes.

Reconhecemos que a Sequência Didática que propomos possui suas limitações, principalmente pelo fato da mesma não ter sido desenvolvida junto aos estudantes. Contudo, espera-se que as contribuições que trazemos possam estimular o desenvolvimento de outras pesquisas nessa linha de trabalho, de modo que possa servir como subsídio para os professores, no tocante às escolhas metodológicas voltadas para o ensino e aprendizagem de matemática.

Referências

1 ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como educar**. Porto Alegre, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 23, 24, 32 e 33.

2 FAVERO, M. H.; NEVES, R. S. P. **A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise**. In **Revista Zetetiké.** v.20, n. 37, p.35-71. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun 2012. Citado na página 17.

3 BRYANT, P.; NUNES, T. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 39.

4 DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de Professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. 2007. 313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC-SP, São Paulo, 2007. Citado na página 17.

5 VIZOLLI, I. **Registros de alunos e professores de Educação de Jovens e Adultos na solução de problemas de proporção-porcentagem**. 2006. 245 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná-UFPR, Curitiba, 2006. Citado na página 17.

6 BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: ensino de quinta a oitava séries**. Brasília, 1998. 92 pág. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.

7 VIZOLLI, I. **Registro de Representação Semiótica no Estudo de Porcentagem**. 2001. 229 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Florianópolis, 2001. Citado na página 18.

8 DANTE, L. R. **Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino de matemática**. Revista do professor de matemática. São Paulo-SP, 1987. Citado na página 19.

9 ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. **Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 3.6, p. 62-77, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

10 ALMOULOUD; S. A.; SILVA, M. J. F.; **Engenharia didática: evolução e diversidade**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

11 PANTOJA, L. F. L.; SILVA, F. H. S. **Engenharia didática: articulando um referencial metodológico para o ensino de matemática na EJA**. IX ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Belo Horizonte - MG, 18 a 21 Julho de 2007. Citado na página 21.

12 CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática**. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005. Citado na página 21.

13 ARAÚJO, D. L. **que é (e como faz) sequência didática?**. Entrepalavras. Fortaleza - ano 3, v.3, n.1, p. 322-334, jan/jul 2013. Citado na página 23.

14 SEGATE, A. **Gêneros textuais no ensino de Língua Portuguesa**. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/linhadagua/article/view/37333/40053>. Acesso em: Mar. 2017. Citado na página 23.

15 MAROQUIO, V. S. *et al.* **Sequências Didáticas como recurso na formação continuada de professores**. X Encontro Capixaba de Educação Matemática. Vitória, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 24, 29 e 30.

16 DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e para o escrito: apresentação de um procedimento**. In.: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. Gêneros orais e escritos na escola. [Tradução e organização Roxane Rojo e Glais Sales Cordeiro] Campinas, SP : Mercado de Letras, 2004, p. 95 – 128. Citado na página 24.

17 OLIVEIRA, M. M. **Formação de professores: estratégias inovadoras no ensino de ciências e matemática**. org. – Recife: UFRPE, 2012. 263 p.: il. – (Série Formação de Professores, n. 3). Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 33.

18 NETO, H. B. *et al.* **Sequência Fedathi: Uma Proposta Pedagógia Para o Ensino de Ciências e Matemática**. UFC. Fortaleza, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 28 e 33.

19 SILVA, B. A. **Contrato Didático**. In: MACHADO, Silvia Dias Alacântara. (Org.) Educação Matemática – Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC. 2008, p. 49-75. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

20 MEDEIROS, K. M. **O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE. UFPE, Recife-PE. Citado na página 31.

21 BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª edição. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 37.

22 JACOBSEN, S.; MIRANDA, H. S.; REIS, C. **A história da matemática no Egito**. Pólo Universitário – UFES, 2005. Disponível em: <http:mtuliop.googlepages.com/Egito.pdf>. Acesso em: Abr. 2017. Citado na página 36.

23 LIMA, E. L. **Números e funções reais**. SBM, 2014 (Coleção PROFMAT). Citado na página 37.

24 CAMPOS, T. M. M. **Sobre ensino e aprendizagem de frações**. XIII CIAEM - Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife - PE, 2011. Citado na página 38.

25 BRYANT, P. *et al.* **Razão e frações: representando quantidades intensivas**. In: BRYANT, Peter; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. Educação Matemática 1: números e operações numéricas. 2ª edição. São Paulo: Cortez, 2009. Citado na página 40.

26 CENTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática, Teoria e Contexto**. 1ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 44, 45, 46, 58 e 60.

27 CENTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática na Medida Certa**. 1ª edição. São Paulo: Leva, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 47, 48, 59 e 61.

28 SILVEIRA, E.; **Compreensão e Prática**. 3ª edição. São Paulo: Moderna, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 62.

29 DANTE, L. R.; **Matemática: Projeto Teláris**. 2ª edição. São Paulo: Ática, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 51, 52, 53 e 63.

30 PATARO, P. M.; SOUZA, J.; **Vontade de Saber Matemática**. 3ª edição. São Paulo: FTD, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 54, 55 e 63.

31 GAY, M. R. G. **Projeto Araribá: Matemática**. 4ª edição. Obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. São Paulo: Moderna, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 64.

32 MOTTA, I. A. R. **Tangram**. 2006. Projeto TEIA DO SABER - Programa de Formação Continuada de Professores-UNESP Campus de Guaratinguetá - Departamento de Matemática. Citado na página 80.