



Sociedade Brasileira de Matemática
Universidade Federal do Acre – UFAC
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Antônio Carlos Valério

Tópicos de Geometria Analítica em \mathbb{R}^2 com a Métrica d_1 : um estudo das Cônicas

RIO BRANCO

2017

Sociedade Brasileira de Matemática
Universidade Federal do Acre – UFAC
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Tópicos de Geometria Analítica em \mathbb{R}^2 com a Métrica d_1 : um estudo das Cônicas

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT no polo da Universidade Federal do Acre – UFAC, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos.

RIO BRANCO

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

V213t Valério, Antônio Carlos, 1979 -
Tópicos de geometria analítica em com a métrica: um estudo das
cônicas / Antônio Carlos Valério. – 2017.
89 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Centro de
Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT. Rio Branco, 2017.

Inclui referências bibliográficas.

Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos.

1. Geometria analítica. 2. Geometria Euclidiana. 3. Geometria – Ensino.
I. Título.

CDD: 510.92

Bibliotecária: Alanna Santos Figueiredo CRB-11º/1003



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Tópicos de Geometria Analítica em \mathbb{R}^2 com a métrica d_1 : um estudo das Cônicas

Autor (a): Antonio Carlos Valério

Orientador (a): Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PROFMAT/UFAC, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Examinado (a) por:

Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos
Orientador e Presidente - PROFMAT/UFAC

Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior
Membro Interno - PROFMAT/UFAC

Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez
Membro Externo - UNIR

Rio Branco, Acre
Dezembro de 2017

Aos meus pais Jair e Helena.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido muita força de vontade e perseverança nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos que não mediu esforços para que essa etapa fosse concluída.

Aos meus pais Antônio Jair Valério e Helena Maria Valério por terem mostrado sempre o melhor caminho em todos os momentos da minha vida.

A toda a minha família pelo apoio incondicional nos momentos que mais precisei.

Ao grande Professor Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez por ter me ajudado com a sua extraordinária competência.

Aos grandes professores e amigos Flávio Batista Simão, Adeilton Costa, Marinaldo Rodrigues e Ronaldo Chaves pelos ensinamentos durante o curso e também à espetacular professora Maria das Graças Viana de Sousa Diogo pelo aprendizado durante toda a etapa da graduação.

Ao meu grande amigo Sézani Carvalho pela dedicação e apoio irrestrito durante todas as etapas do mestrado e pela longa e sincera amizade desde o ensino médio.

Aos meus amigos de curso Carlos Maurício de Sousa, Maily Marques, Josivaldo Roque e Laudenei Codognoto que não mediram esforços para compartilharem seus conhecimentos.

Ao secretário do PROFMAT/UFAC Maricélio Rodrigues e o Professor Dr. Sérgio Brazil sempre atenciosos e prestativos em todos os momentos.

Aos meus amigos de trabalho Júlio Rocha, Carlos Brito, Rosinaldo Ramos, Tiago Trindade, Carlos Wensing que acompanharam de perto e torceram pelo meu sucesso.

À Mestra e Técnica em Assuntos Educacionais Angélica Ortiz pela enorme contribuição com a parte pedagógica do trabalho.

Enfim, a todos os que contribuíram para a minha formação e que, por ventura, não foram mencionado, a minha gratidão.

RESUMO

Este trabalho apresentou uma proposta metodológica por meio de uma forma diferente de medição no estudo da geometria analítica em especial o estudo das cônicas em \mathbb{R}^2 .

Inicialmente, foi abordado o tema utilizando a métrica Euclidiana, suas formas e contextos corriqueiramente estudados em sala de aula durante o ciclo escolar. Em seguida foi introduzido o conceito da métrica d_1 a qual consiste na soma dos módulos da diferença entre as abscissas e entre as ordenadas de pontos do plano. Demonstradas e satisfeitas todas as condições de espaço métrico foi investigado o comportamento das cônicas quando construídas com a métrica d_1 . Devido às inúmeras condições modulares presentes nas análises das cônicas na métrica d_1 , fez-se necessário aprofundar o estudo das equações e funções modulares, tópicos estes presentes nos currículos escolares. Por fim, foi realizada a comparação das cônicas em \mathbb{R}^2 sob a perspectiva das duas formas de medição: a métrica euclidiana e a métrica d_1 , cuja finalidade foi identificar as diferenças presentes nas figuras e gráficos ao serem utilizadas as distintas formas de medir.

Palavras chave: Geometria Euclidiana. Cônicas. Métrica d_1 . Circunferência. Parábola. Elipse. Hipérbole.

ABSTRACT

This paper presented a methodological proposal by a different form of measurement in the study of analytic geometry, in particular, the study of the conics in \mathbb{R}^2 .

First of all, the subject had been approached using the Euclidean metric, its forms and contexts usually studied in the classroom during the school cycle. Then the concept of the d_1 metric was introduced, which consists in the sum of the modules of the difference between the abscissas and ordinates of the points in the plane. When all the metric space conditions are satisfied and demonstrated, the demeanor of the conics when they were constructed under d_1 metric was investigated. Due to the numerous modular conditions present in the analysis of the conics in the d_1 metric, It was necessary to deepen the study of the modular equations and functions, which are inserted in the school curriculum. Finally, the conics had been compared under the perspective of the two forms of measurement: the Euclidean metric and the d_1 metric, in order to identify the differences present in the figures and graphs when the distinguished ways of measuring are used.

Keywords: Euclidean geometry. Conical. Metric d_1 . Circumference. Parable. Ellipse. Hyperbole.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Metas e Resultados do IDEB	14
Figura 2: Metas e Resultados do IDEB	14
Figura 3: Resultados médios SAEB	15
Figura 4: Projeção paralela sobre o eixo Ox	18
Figura 5: Projeção Paralela sobre o eixo Oy	19
Figura 6: Comprimento do segmento PQ	19
Figura 7: Pontos A e B no plano \mathbb{R}^2	21
Figura 8: Distâncias do ponto A ao ponto B em \mathbb{R}^2	22
Figura 9: Caminho $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow B$	22
Figura 10: Caminho $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow B$	22
Figura 11: Secção paralela à base do cone	26
Figura 12: Secção paralela apenas a uma geratriz do cone	27
Figura 13: Secção não paralela à base do cone intersectando as geratrizes	27
Figura 14: Secção com o plano cortando ambas as folhas e intersectando as duas geratrizes	27
Figura 15: O cone de Apolônio: secções cônicas	28
Figura 16: Circunferência no espaço (\mathbb{R}^2, d_E)	29
Figura 17: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E)	30
Figure 18: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com diretriz paralela ao eixo das abscissas	31
Figura 19: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com diretriz paralela ao eixo das ordenadas	32
Figure 20: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com vértice fora da origem $VF \parallel Oy$	33
Figure 21: Representação de um ponto P em coordenadas de $x'Vy'$ e xOy	33
Figura 22: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com vértice fora da origem e $VF \parallel Ox$	34
Figura 23: Representação da elipse, seus elementos e suas medidas	36
Figura 24: Relação entre as medidas dos elementos de uma elipse	37
Figure 25: Elipse com centro na origem de xOy e focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$	38
Figura 26: Elipse com centro na origem de xOy e focos $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$	38
Figura 27: Elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo Ox	39
Figura 28: Elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo Oy	39
Figura 29: Representação da hipérbole, seus elementos e suas medidas	41
Figura 30: Hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo Ox	42
Figura 31: Hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo Oy	43
Figura 32: Hipérbole com centro fora da origem e reta focal paralela ao eixo Ox	44
Figure 33: Hipérbole com centro fora da origem e reta focal paralela ao eixo Oy	44
Figura 34: Circunferência de centro C e raio r em (\mathbb{R}^2, d_1)	53
Figure 35: Circunferência de raio r e centro $O = (0,0)$ em (\mathbb{R}^2, d_1)	54
Figura 36: Circunferência com centro $O = (1,1)$ e raio $r = 2$ em (\mathbb{R}^2, d_1)	55
Figura 37: Gráfico de Γ para $x \geq 2$ e $y \geq 3$	56
Figure 38: Gráfico de Γ para $x \geq 2$ $y < 3$	56
Figura 39: Gráfico de Γ para $x < 2$ e $y \geq 3$	57
Figure 40: Gráfico de Γ para $x < 2$ e $y < 3$	57

Figure 41: Representação gráfica de Γ em (\mathbb{R}^2, d_1)	58
Figura 42: Parábola de foco $F = (0, \frac{p}{2})$ e vértice na origem em (\mathbb{R}^2, d_1)	59
Figure 43: Parábola de foco $F = (\frac{p}{2}, 0)$ e vértice na origem em (\mathbb{R}^2, d_1)	60
Figure 44: Gráfico de \wp para $x \geq 2$ e $y \geq 0$	61
Figure 45: Gráfico de \wp para $-2 \leq x < 2$ e $y \geq 0$	61
Figure 46: Gráfico de \wp para $x \geq 2$ e $y < 0$	62
Figure 47: Gráfico de \wp para $-2 \leq x < 2$ e $y < 0$	62
Figura 48: Representação gráfica de \wp em (\mathbb{R}^2, d_1)	63
Figure 49: Parábola com o vértice fora da origem em (\mathbb{R}^2, d_1)	64
Figure 50: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1)	65
Figure 51: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1)	66
Figura 52: Relação entre as medidas a, b e c de uma elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)	66
Figure 53: Gráfico de ε para $x \geq 3$ e $y \geq 0$	68
Figura 54: Gráfico de ε para $-3 \leq x < 3$ e $y \geq 0$	68
Figure 55: Gráfico de ε para $x < -3$ e $y \geq 0$	69
Figura 56: Gráfico de ε para $x \geq 3$ e $y < 0$	69
Figure 57: Gráfico de ε para $-3 \leq x < 3$ e $y < 0$	70
Figure 58: Gráfico de ε para $x < -3$ e $y < 0$	70
Figure 59: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1)	71
Figure 60: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1) , com centro fora da origem	72
Figure 61: Representação gráfica da elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) com centro fora da origem ...	73
Figure 62: Hipérbole \mathcal{H} em (\mathbb{R}^2, d_1) , com centro na origem de xOy e focos sobre o eixo x .	74
Figure 63: Hipérbole \mathcal{H} em (\mathbb{R}^2, d_1) , com centro na origem de xOy e focos sobre o eixo y .	75
Figure 64: Relação entre as medidas a, b e c de uma hipérbole \mathcal{H} no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)	75
Figure 65: Gráfico de \mathcal{H} para $-5 \leq x < 5$	77
Figure 66: Gráfico de \mathcal{H} para $-5 \leq x < 5$	78
Figure 67: Representação gráfica de \mathcal{H} em (\mathbb{R}^2, d_1)	78
Figure 68: Representação gráfica da hipérbole no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) e centro fora da origem ..	79
Figure 69: Representação gráfica da hipérbole no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) e centro fora da origem ..	80
Figura 70: Representação gráfica da circunferência Γ nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	82
Figure 71: Representação gráfica da parábola \wp nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	83
Figure 72: Representação gráfica da elipse ε nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	85
Figura 73: Representação gráfica da hipérbole \mathcal{H} nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	86

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1 ESPAÇOS MÉTRICOS E DISTÂNCIAS	17
1.1 O Conceito de Métrica e Espaço Métrico	17
1.2 A Métrica usual (ou euclidiana) no Espaço Euclidiano \mathbb{R}^2	18
1.3 A Métrica d_1 no espaço \mathbb{R}^2	21
1.4 A comparação entre as métricas euclidiana e d_1	23
2 AS CÔNICAS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA COM A DISTÂNCIA USUAL.....	25
2.1 O contexto histórico das cônicas na geometria euclidiana	25
2.2 O estudo das Cônicas no espaço (\mathbb{R}^2, d_E)	28
2.2.1 A Circunferência em (\mathbb{R}^2, d_E)	28
2.2.2 A Parábola em (\mathbb{R}^2, d_E)	30
2.3 A Elipse em (\mathbb{R}^2, d_E)	35
2.3.1 Equação Reduzida da Elipse com centro na origem de xOy	37
2.3.2 Equação Reduzida da Elipse com centro fora da origem de xOy	39
2.4 A Hipérbole em (\mathbb{R}^2, d_E)	40
2.4.1 Equação Reduzida da Hipérbole com centro na origem de xOy	41
2.4.2 Equação Reduzida da Hipérbole com centro fora da origem de xOy	43
2.5 Equação Geral das Cônicas.....	45
2.5.1 Equação geral de uma Parábola	45
2.5.2 Equação geral de uma Elipse	47
2.5.3 Equação geral de uma Hipérbole:	49
3 AS CÔNICAS NO ESPAÇO MÉTRICO (\mathbb{R}^2, d_1)	52
3.1 O estudo da circunferência no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)	53
3.2 O estudo da parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)	58
3.2.1 O estudo da parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) com vértice fora da origem	63
3.3 O estudo da elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)	65
3.3.1 Elipse com centro fora da origem	71
3.4 O estudo da hipérbole no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)	73
3.4.1 Hipérbole com centro fora da origem	79
4 COMPARAÇÕES DAS CÔNICAS EM (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	81
4.1 Circunferência em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	81

4.2 Parábola em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	82
4.3 Elipse em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	83
4.4 Hipérbole em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)	85
CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
REFERÊNCIAS	89

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática exige, por parte dos educadores, um grande empenho a fim de propiciar aos alunos práticas metodológicas diversificadas, dentre elas, variáveis antes pouco conhecidas ou pouco usuais na atualidade surgem com o objetivo de estimular o discente a buscar diferentes caminhos, pensar e enxergar fatos e formas matemáticas de uma maneira simples e objetiva. A esse respeito, Paulo Freire (1996) contribui no sentido de reforçar que o processo de ensino não se constitui como transferência de conhecimento, mas como processo de produção e construção individual e coletiva que mobiliza aspectos cognitivos, emocionais e sociais.

Nesse contexto, o educador deve proporcionar ao discente a assimilação do conteúdo e, posteriormente, deixar que ele crie possibilidades, que descubra novos caminhos dentro do processo de construção ao qual está inserido. “Nas condições de verdadeira aprendizagem, os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador igualmente sujeito do processo” (FREIRE, 1996, p. 13).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando as ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL/1999, p. 9).

Assim, o abstrato aparece como uma fundamental ferramenta no ensino-aprendizagem. Cabe ao educador adotar técnicas de ensino com as quais o aluno possa utilizar essas abstrações, correlacionando com as mais diversas aplicações da matemática do dia a dia. Uma possível forma de atrair a atenção dos alunos é apresentar esses conteúdos a partir de um contexto real que eles possam relacionar esses temas aos apresentados nos livros didáticos.

Dentre as competências e habilidades na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Médio pode-se destacar a Representação e Comunicação, competência esta a qual se espera que o aluno adquira habilidades para poder identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico adquirido, com a finalidade de aperfeiçoar sua leitura sobre a realidade em que

vive, bem como a compreensão e, em consequência disso, a capacidade em intervenção e transformação do contexto ao qual está inserido.

Além disso, a matemática é uma ciência autônoma, presente no cotidiano, mesmo que de forma implícita e que, ao longo da história, desenvolveu-se muitas vezes motivada por alguma demanda da humanidade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL/ 1999, p 25. Grifo meu.)

Dentre as várias áreas abrangidas pela matemática, destaca-se a geometria como uma poderosa ferramenta de estímulo à busca pelo conhecimento, uma vez que, além da abstração e álgebra envolvidas nos conceitos e cálculos geométricos, suas aplicações podem ser facilmente compreendidas, uma vez que o ambiente no qual estamos inseridos apresenta grande diversidade de objetos geométricos. Diante dessas características as maneiras de medir, determinar áreas, volumes, entre outras, tornam-se necessárias ao desenvolvimento humano.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL/ 1997, p 39).

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB foi criado no ano de 2007 com a finalidade de avaliar o desenvolvimento dos alunos da Educação Básica nas diversas áreas do conhecimento constantes nos currículos escolares. Embora existam alguns esforços para a melhoria do rendimento escolar como, por exemplo, o Programa Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC, o IDEB dos últimos anos tem demonstrado que a educação brasileira e o rendimento escolar dos alunos da Educação Básica estão aquém das metas almejadas. Nas figuras 1 e 2, a seguir, verifica-se que ao longo dos anos o IDEB da

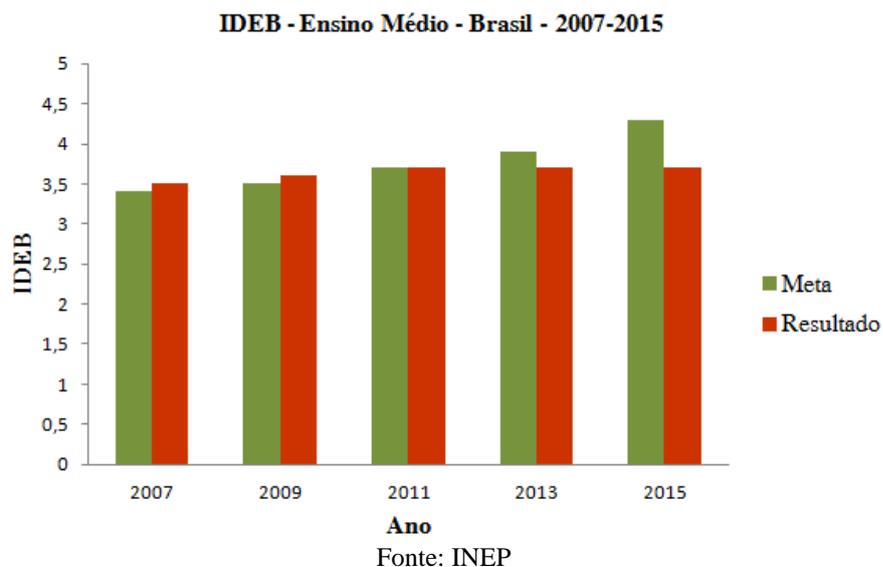
Educação Básica no Brasil tem, progressivamente, se afastado das metas desejadas, demonstrando com isso que com o passar do tempo a educação tem se tornado deficitária.

Figura 1: Metas e Resultados do IDEB

IDEB - Ensino Médio Brasil – 2007-2015		
Ano	Meta	Resultado
2007	3,4	3,5
2009	3,5	3,6
2011	3,7	3,7
2013	3,9	3,7
2015	4,3	3,7

Fonte: INEP

Figura 2: Metas e Resultados do IDEB



Além dos resultados apresentados acima, acerca do IDEB do Ensino Médio, destacam-se, ainda, os resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, especificamente na disciplina de matemática, resultados esses apresentados na figura 3, no qual é possível verificar que, temporalmente, o aprendizado desta área do conhecimento tem decrescido consideravelmente, o que provoca preocupações e motiva os profissionais da área a buscarem por alternativas para a melhoria do rendimento dos alunos e a construção de uma educação matemática consolidada.

Figura 3: Resultados médios SAEB



Fonte: Diretoria de Avaliação da Educação Básica – DAEB/INEP

Levando em consideração a importância do ensino de geometria e os resultados apresentados acerca da Educação Básica no Brasil, entendemos como relevante a proposta apresentada neste trabalho por tratar-se de uma forma diferente de medir, interpretar e representar caminhos e deslocamentos, de um jeito mais aproximado da realidade do dia a dia. Com isso, pretendemos contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem, uma vez que o tema abordado aproxima-se bastante da realidade geométrica vivenciada pelos educandos e foi escolhido por ser um assunto pouco conhecido e estudado em sala de aula, porém, de fácil compreensão.

No presente trabalho serão confrontados os caminhos corriqueiramente medidos pela métrica euclidiana, já conhecida dos estudantes, com os deslocamentos medidos por meio da métrica d_1 , que ocorrem de forma paralela aos eixos cartesianos. Nela, os resultados impressionam pela forma e diferença dos gráficos usualmente estudados em sala de aula. Isso provavelmente proporcionará aos alunos uma forma diferente de encarar os objetos geométricos, além de, possivelmente, facilitar a aprendizagem.

Aprofundar-se-á o tema ao estudo das circunferências, parábolas, elipses e hipérbolas, procurando incentivar e despertar nos discentes a busca por novas aplicações relacionadas ao seu cotidiano, além de aliar esses conhecimentos aos estudados na Geometria Euclidiana.

A ideia que prende os alunos quando vão determinar a distância entre dois pontos, na métrica usual, ou euclidiana, faz com que acabem admitindo este caminho como verdade única, sem, muitas vezes, conhecerem ou compreenderem que existem maneiras alternativas para efetuarem esse procedimento, de acordo com a análise que se deseje e as adaptações necessárias aos espaços nos quais serão realizadas essas práticas.

Para fazer uma comparação entre as duas formas de medir, na métrica Euclidiana ou na métrica d_1 , é necessário uma visão ampla do conceito de distância. É por causa dessas diferentes variantes que este trabalho possibilita que os estudantes enxerguem novos caminhos, novas formas de pensar para, assim, construírem o conhecimento.

O trabalho foi construído em quatro capítulos, sendo que no primeiro são apresentadas as noções de espaços métricos e distâncias sob a ótica da geometria analítica em \mathbb{R}^2 , com a métrica usual e, na sequência, a conceituação e utilização da métrica d_1 em \mathbb{R}^2 .

O segundo capítulo apresenta um breve histórico sobre as cônicas na geometria euclidiana com a distância usual: circunferência, parábola, elipse e hipérbole, bem como suas definições e o estudo de suas equações, sob a ótica da geometria analítica em \mathbb{R}^2 , por meio da métrica usual.

No terceiro capítulo será apresentado o estudo das cônicas: circunferência, parábola, elipse e hipérbole, no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) , sendo este, o capítulo considerado de maior relevância em relação ao tema apresentado. Apresenta-se, também, nesta etapa, a análise detalhada de funções e equações modulares, o que contribui para o enriquecimento da aprendizagem uma vez que estes assuntos estão presentes nos currículos de matemática do Ensino Médio.

No quarto capítulo são realizadas as comparações entre os lugares geométricos apresentados no segundo e terceiro capítulos, com a finalidade de demonstrar as notáveis diferenças presentes nas figuras geométricas estudadas em \mathbb{R}^2 quando utilizadas métricas diferentes, ou seja, ao ser vislumbrado, sob perspectivas distintas, o conceito de distância.

No segundo e terceiro capítulos serão consideradas apenas as cônicas com retas focais paralelas aos eixos coordenados, uma vez que o trabalho é destinado aos alunos do Ensino Médio e o currículo escolar, nesta etapa de estudos, não contempla os casos de cônicas com retas focais não paralelas aos eixos coordenados.

Neste trabalho as figuras de autoria própria foram construídas por meio da utilização do software de matemática dinâmica denominado Geogebra, versão 6.0.409.0, para Windows, cuja distribuição é livre e pode ser obtida por meio do acesso ao site <https://www.geogebra.org/download>.

1 ESPAÇOS MÉTRICOS E DISTÂNCIAS

Neste capítulo será apresentado o conceito de métrica e espaços métricos, além das definições da métrica euclidiana (métrica usual) e da métrica d_1 no espaço métrico \mathbb{R}^2 . Será demonstrado que tanto a forma euclidiana de medir e a forma d_1 de medir cumprem as condições necessárias para serem caracterizadas como uma métrica em \mathbb{R}^2 . Além disso, será realizada a comparação entre a métrica euclidiana e a métrica d_1 , com a finalidade de identificar a relação entre elas.

1.1 O Conceito de Métrica e Espaço Métrico

Para Lima (1993), uma métrica num conjunto M é uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x à y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (i) $d(x, x) = 0$;
- (ii) se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Define-se um *espaço métrico* ao par (M, d) , em que M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Exemplo 1: Considere o conjunto \mathbb{R} . Seja $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ definido por $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Nessas condições, d é uma métrica em \mathbb{R} e (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico.

Verificação: Dados $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tem-se:

- (i) $d(x_1, x_1) = |x_1 - x_1| = |0| = 0$;
- (ii) Se $x_1 \neq x_2$, então $\exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ tal que $x_1 - x_2 = k$, logo, $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |k| = \begin{cases} k, & \text{se } k > 0 \\ -k, & \text{se } k < 0 \end{cases}$. Em ambos os casos se tem $d(x_1, x_2) > 0$;
- (iii) $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |-1 \cdot (x_2 - x_1)| = |-1| \cdot |x_2 - x_1| = 1 \cdot |x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| = d(x_2, x_1)$;
- (iv) $d(x_1, x_3) = |x_1 - x_3| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Com os resultados acima, verificou-se que d é uma métrica em \mathbb{R} . Em consequência disso, o par (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico.

1.2 A Métrica usual (ou euclidiana) no Espaço Euclidiano \mathbb{R}^2

Em várias situações do cotidiano a geometria está presente, sendo amplamente utilizada em aplicações, desde as mais simplificadas, como orientação espacial, até aplicações mais complexas como, por exemplo, na construção civil.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes (BRASIL/2006, p 75).

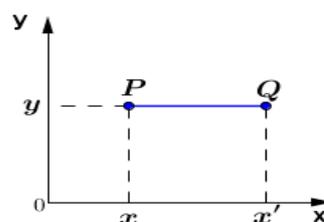
A geometria plana, estudada em \mathbb{R}^2 , tem bastante utilidade na realização de medições em regiões planas e determinação de áreas de figuras planas.

O conceito de distância euclidiana (ou distância usual) entre dois pontos P e Q em \mathbb{R}^2 , segundo Lima (2012), pode ser definido como $d_E(P, Q) = |x' - x| = \sqrt{(x - x')^2}$, se P e Q possuem ordenadas iguais; $d_E(P, Q') = |y' - y| = \sqrt{(y - y')^2}$, se P e Q possuem abscissas iguais e $d_E(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, caso P e Q possuam abscissas distintas e ordenadas distintas.

As considerações acima são facilmente demonstradas e visualizadas:

1º caso: Suponha se P e Q com ordenadas iguais: $P = (x, y)$ e $Q = (x', y)$, conforme a figura 4 a seguir:

Figura 4: Projeção paralela sobre o eixo Ox

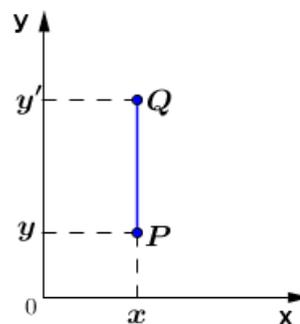


Fonte: Próprio Autor

Note que, nesta situação, a distância entre P e Q é igual à distância entre as projeções de P e Q sobre o eixo OX e, neste caso, aplica-se a distância d definida no exemplo 1, a qual representaremos, para facilitar a identificação, como d_E , ou seja, $d_E(P, Q) = |x' - x| = \sqrt{(x - x')^2}$.

2º caso: Suponha se P e Q com abscissas iguais: $P = (x, y)$ e $Q = (x, y')$, conforme a figura 2 a seguir:

Figura 5: Projeção Paralela sobre o eixo Oy

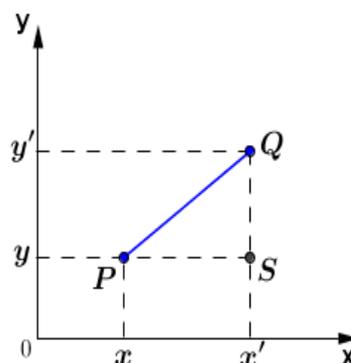


Fonte: Próprio Autor

Note que, nesta situação, a distância entre P e Q é igual à distância entre as projeções de P e Q sobre o eixo OY e, neste caso, aplica-se a distância d definida no exemplo 1, ou seja, $d_E(P, Q) = |y' - y| = \sqrt{(y - y')^2}$.

3º Caso: Suponha se P e Q com abscissas diferentes e ordenadas diferentes: $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$, conforme a figura 6 a seguir:

Figura 6: Comprimento do segmento PQ



Fonte: Próprio Autor

Note que ao considerar o ponto S , vê-se claramente que PSQ é um triângulo retângulo em S , cuja hipotenusa é o segmento PQ , enquanto que os catetos são os segmentos PS e SQ . Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abscissa, do 1º e 2º casos, segue-se que:

$$d_E(P, S) = |x' - x| = \sqrt{(x - x')^2} \quad \text{e} \quad d_E(S, Q) = |y' - y| = \sqrt{(y - y')^2}, \quad \text{o que implica que}$$

$$d_E(P, S)^2 = (x - x')^2 \quad (1) \quad \text{e} \quad d_E(S, Q)^2 = (y - y')^2. \quad (2)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PSQ da figura 3, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$d_E(P, Q)^2 = d_E(P, S)^2 + d_E(S, Q)^2.$$

Substituindo (1) e (2) na igualdade acima, tem-se:

$$d_E(P, Q)^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

Logo:

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

A equação acima deduzida é uma generalização da distância entre dois pontos quaisquer em \mathbb{R}^2 , uma vez a determinação da distância entre esses pontos, seja no 1º caso ou no 2º caso, pode ser obtida por meio dessa equação.

A distância d_E acima apresentada é uma métrica em \mathbb{R}^2 , pois, inicialmente é uma função de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ e, além disso, cumpre as condições necessárias para ser classificada como tal:

Dados $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, com $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $S = (x_3, y_3)$, dois a dois distintos, tem-se:

$$(i) \quad d_E(P, P) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

$$(ii) \quad d_E(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad \text{como } P \neq Q, \quad \text{então ao menos uma das}$$

diferenças $x_1 - x_2$ ou $y_1 - y_2$ é maior que zero, o que implica que se tem $(x_1 - x_2)^2 > 0$ ou $(y_1 - y_2)^2 > 0$. Qualquer uma das situações acarretará que $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} > 0$, ou seja, $d(P, Q) > 0$.

$$(iii) \quad d_E(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{[(-1) \cdot (x_2 - x_1)]^2 + [(-1) \cdot (y_2 - y_1)]^2} =$$

$$= \sqrt{(-1)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2 + (-1)^2 \cdot (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d_E(Q, P)$$

$$(iv) \quad [d_E(P, S)]^2 = \left[\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \right]^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 =$$

$$(x_1 - x_2 + x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2 + y_2 - y_3)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2 \cdot (x_1 - x_2) \cdot$$

$$\cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot (y_1 - y_2) \cdot (y_2 - y_3) + (y_2 - y_3)^2$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se:

$$\begin{aligned}
[d_E(P, S)]^2 &\leq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&\cdot \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \\
&[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}]^2 = [d_E(P, Q) + d_E(Q, S)]^2, \text{ o} \\
&\text{que implica que } d_E(P, S) \leq d_E(P, Q) + d_E(Q, S).
\end{aligned}$$

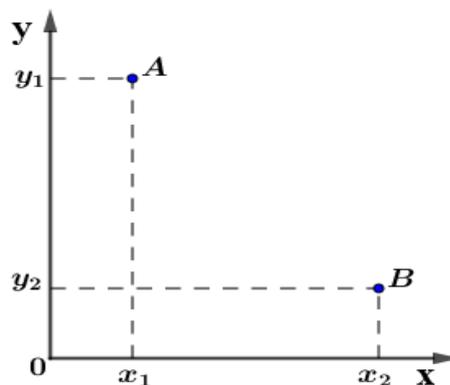
Desta forma, comprovadamente a distância d_E (euclidiana ou usual) em \mathbb{R}^2 é uma métrica e, em decorrência disso, o par (\mathbb{R}^2, d_E) é um espaço métrico.

1.3 A Métrica d_1 no espaço \mathbb{R}^2

Para Gusmão, et al. (2017), a distância d_1 , também conhecida como Geometria do Taxista, teve início na topologia com os estudos do russo Hermann Minkowski (1864-1909), sobre um conjunto de métricas diferentes e foi o precursor dos estudos de uma geometria diferenciada.

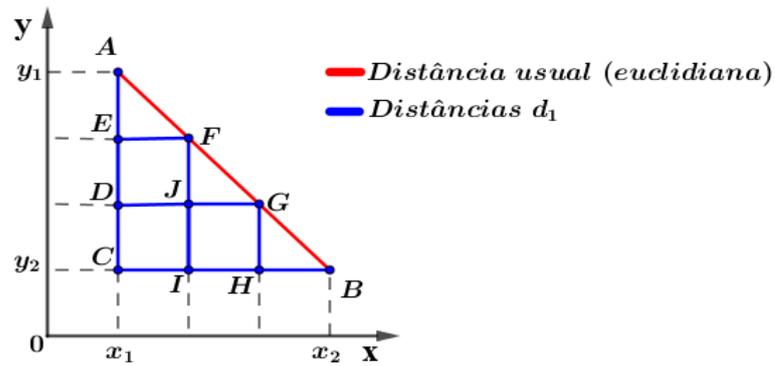
Considerada uma geometria não euclidiana, os deslocamentos na geometria do taxista se dão de forma horizontal e vertical, paralelos aos eixos ordenados. Nesta geometria, para ir de um ponto A a um ponto B , conforme a figura 7, diferente do que ocorre na geometria euclidiana onde se calcula a menor distância entre esses pontos considerando uma reta, utiliza-se a soma da variação do espaço percorrido nas direções horizontal e vertical, conforme o apresentado na figura 8:

Figura 7: Pontos A e B no plano \mathbb{R}^2



Fonte: Próprio Autor

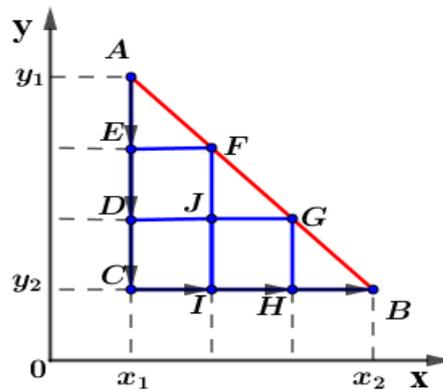
Figura 8: Distâncias do ponto A ao ponto B em \mathbb{R}^2



Fonte: Próprio Autor

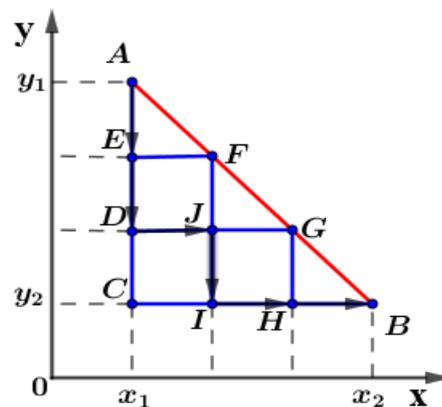
A figura 8, acima, mostra que existem vários caminhos que unem os pontos A e B e que têm a mesma distância, cujos deslocamentos se dão de forma vertical e horizontal. Na figura 9 e na figura 10 são apresentados alguns desses caminhos:

Figura 9: Caminho $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow B$



Fonte: Próprio Autor

Figura 10: Caminho $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow B$



Fonte: Próprio Autor

Em ambas as situações acima apresentadas verifica-se que, utilizando a distância d_1 para se locomover do ponto A ao ponto B foram necessárias a mesma quantidade de deslocamentos verticais e horizontais, não importando o caminho seguido. Essa verificação motiva a seguinte definição:

Definição 1: Dados $P, Q \in \mathbb{R}^2$, com $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ tem-se que a distância d_1 , entre P e Q , na geometria acima apresentada, é uma função $d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, definida por $d_1(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

A função distância d_1 assim definida possui as seguintes propriedades, para todo $P, Q, S \in \mathbb{R}^2$:

- (i) $d_1(P, P) = 0$;
- (ii) Se $P \neq Q$, então $d_1(P, Q) > 0$;
- (iii) $d_1(P, Q) = d_1(Q, P)$;
- (iv) $d_1(P, S) \leq d_1(P, Q) + d_1(Q, S)$.

Demonstração: Dados os pontos $P, Q, S \in \mathbb{R}^2$, com $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ e $S = (x_3, y_3)$, tem-se:

- (i) $d_1(P, P) = |x_1 - x_1| + |y_1 - y_1| = |0| + |0| = 0$;
- (ii) Como $P \neq Q$, então $x_1 - x_2 \neq 0$ ou $y_1 - y_2 \neq 0$, logo, por definição, tem-se que $|x_1 - x_2| > 0$ e $|y_1 - y_2| > 0$ ou $|x_1 - x_2| > 0$ e $|y_1 - y_2| = 0$ ou $|x_1 - x_2| = 0$ e $|y_1 - y_2| > 0$. Em qualquer das situações acima, tem-se $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$, o que acarreta que $d_1(P, Q) > 0$;
- (iii) $d_1(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |(-1) \cdot (-x_1 + x_2)| + |(-1) \cdot (-y_1 + y_2)| = | -1| \cdot |x_2 - x_1| + | -1| \cdot |y_2 - y_1| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d_1(Q, P)$;
- (iv) $d_1(P, S) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3| = |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| + |(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3)| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| = (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) = d_1(P, Q) + d_1(Q, S)$

Demonstradas as propriedades acima, classifica-se d_1 como uma métrica em \mathbb{R}^2 e, em decorrência disso, o par (\mathbb{R}^2, d_1) é um espaço métrico.

1.4 A comparação entre as métricas euclidiana e d_1

Apresentadas as métricas d_E , euclidiana ou usual e d_1 , resta verificar se existe alguma relação entre elas. Vejamos:

Considerando os pontos genéricos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, tem-se sempre que $|x_1 - x_2| \geq 0$ e $|y_1 - y_2| \geq 0$, donde se obtém a desigualdade a seguir:

$$|x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2| \geq 0$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por 2, obtém-se:

$$2 \cdot |x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2| \geq 2 \cdot 0 = 0$$

Adicionando $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ em ambos os membros da desigualdade, obtém-se:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot |x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2| \geq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

O que equivale a $[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]^2 \geq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

Como ambos os membros da desigualdade são maiores ou iguais a zero, é válida a operação:

$$\sqrt{[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Logo:

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Deste modo, conclui-se que $d_1(P, Q) \geq d_E(P, Q)$.

Note que a igualdade se dá quando P e Q possuírem abscissas iguais ou ordenadas iguais. Em outras palavras, tem-se $d_1 = d_E$ quando $x_1 = x_2 = x$ ou $y_1 = y_2 = y$, pois, caso $x_1 = x_2 = x$, tem-se:

$$\begin{aligned} d_1(P, Q) &= |x - x| + |y_1 - y_2| = 0 + |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \\ &= d_E(P, Q). \end{aligned}$$

De maneira análoga se demonstra a igualdade para P e Q com ordenadas iguais.

A relação entre as métricas d_1 e d_E , acima apresentada, demonstra que ao se utilizar a métrica d_1 , diferente com o que ocorre na métrica euclidiana, a menor distância entre dois pontos quaisquer de \mathbb{R}^2 nem sempre será uma reta, ocorrendo a igualdade no caso de os pontos considerados possuírem mesmas abscissas ou mesmas ordenadas.

No capítulo seguinte serão apresentadas as cônicas sob a perspectiva do espaço métrico euclidiano (\mathbb{R}^2, d_E) , suas características e suas propriedades.

2 AS CÔNICAS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA COM A DISTÂNCIA USUAL

Esta seção será destinada ao estudo das cônicas na geometria euclidiana com a distância usual no \mathbb{R}^2 . Antes, porém, será abordado um breve histórico sobre o estudo das cônicas desde Menaecmus e Euclides, os quais iniciaram esses estudos; até Apolônio, o qual introduziu e adaptou os nomes: elipse, hipérbole e parábola, utilizados na atualidade. Em geral, nas bibliografias utilizadas para o estudo de geometria analítica, a circunferência não é considerada uma cônica, muito embora possa ser obtida a partir de uma secção paralela à base de um cone, porém, dada a importância desse lugar geométrico, para fins de estudo, considerar-se-á a circunferência como uma cônica.

2.1 O contexto histórico das cônicas na geometria euclidiana

De acordo com os estudos de Boyer (2012) antes de Euclides (325a.C – 265a.C.), já eram conhecidos trabalhos sobre as cônicas. Menaecmus (380 a.C – 265 a.C) quando tentava resolver o problema da duplicação do cubo percebeu a presença de duas curvas (parábola e hipérbole) e, baseado nesses estudos, descobriu a elipse. Foi ele o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérbolas são obtidas como secções de um cone quando cortados por planos não paralelos à suas base. Mais tarde destaca-se o trabalho de Apolônio de Perga, (262-190 a. C.), o qual aprofundou os estudos das secções cônicas e nomeou as curvas obtidas por meio dessas secções. A maior parte de suas obras foram perdidas. Em 1710, Edmund Halley forneceu uma tradução para o latim de sete dos oito livros escritos por Apolônio. Segundo Boyer,

As seções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Pelo menos duas vezes nesse intervalo, tinham sido escritas exposições gerais - por Aristeu e por Euclides – mas do mesmo modo como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim também, em nível mais avançado, o Tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides (BOYER, 2012, P.113).

Antes disso, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto baseado no ângulo do vértice (agudo, reto ou obtuso). Foi Apolônio quem mostrou que não era necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone. Usando apenas um cone, poderia se obter uma elipse, uma parábola ou uma

hipérbole, dependendo da inclinação do plano à qual o secciona. Demonstrou também que não era necessário o cone ser reto. Substituiu o cone de uma só folha por um duplo, ou seja, os colocou em sentidos opostos de tal forma que seus vértices coincidam e seus eixos estejam sobre uma mesma reta. Assim, deu a definição de cone circular usada até hoje:

Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo, que não está em um mesmo plano com o ponto, de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo (BOYER, 2012, P. 114).

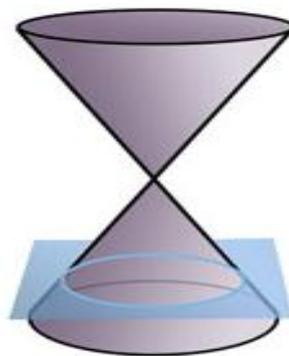
E assim foi definida a curva de dois ramos que conhecemos até hoje: a hipérbole. Atribuí-se a ele os nomes dado às curvas elipse e hipérbole pela primeira vez, adaptadas das soluções de equações quadráticas por aplicações de áreas. E deu-se, então, os nomes Ellipse e hyperbola:

Ellipses (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada), e *hiperbola* (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra parábola (uma colocação ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência (BOYER, 2012, P. 114).

Com relação ao cone considerado por Apolônio, as cônicas podem ser determinadas por meio de secções planas das seguintes maneiras:

(i) Circunferência: Por meio de uma secção paralela à base do cone a qual o plano intersecta as duas geratrizes. O que pode ser visualizado na figura 11:

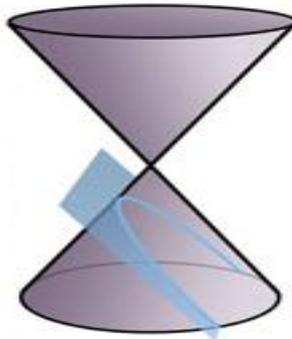
Figura 11: Secção paralela à base do cone



Disponível: <<http://www.profesordedibujo.com/images/imagenes/apuntes/curvas-conicas-secciones-cono.jpg>>

(ii) Parábola: Por meio de uma secção paralela apenas a uma geratriz, a curva obtida dessa secção é uma Parábola. O que pode ser visualizado na figura 12:

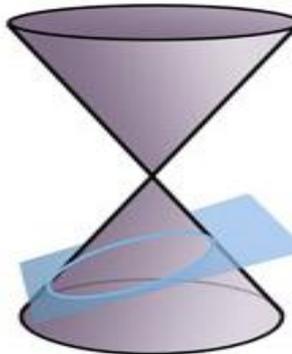
Figura 12: Secção paralela apenas a uma geratriz do cone



Disponível: <<http://www.profesordedibujo.com/images/imagenes/apuntes/curvas-conicas-secciones-cono.jpg>>

(iii) Elipse: Por meio de uma secção não paralela às bases do cone a qual o plano intersecta as duas geratrizes. O que pode ser visualizado na figura 13:

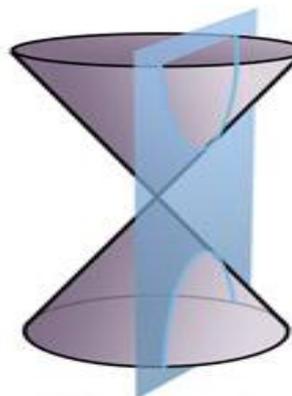
Figura 13: Secção não paralela à base do cone intersectando as geratrizes



Disponível: <<http://www.profesordedibujo.com/images/imagenes/apuntes/curvas-conicas-secciones-cono.jpg>>

(iv) Hipérbole: Por meio de uma secção a qual o plano corta ambas as folhas e intersecta as duas geratrizes. O que pode ser visualizado na figura 14:

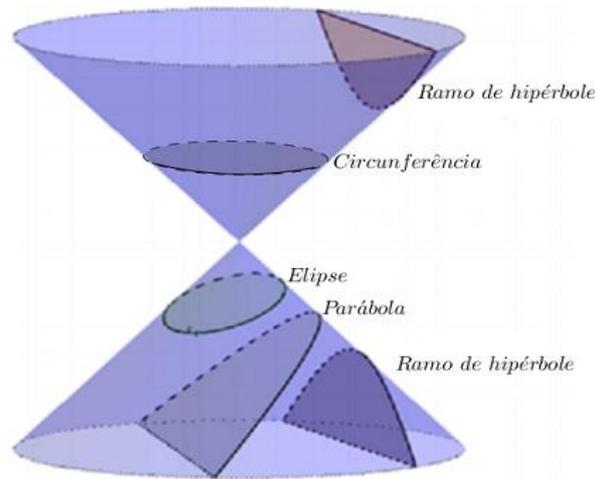
Figura 14: Secção com o plano cortando ambas as folhas e intersectando as duas geratrizes



Disponível: <<http://www.profesordedibujo.com/images/imagenes/apuntes/curvas-conicas-secciones-cono.jpg>>

As cônicas obtidas por meio dos procedimentos acima podem ser visualizadas simultaneamente na figura 15:

Figura 15: O cone de Apolônio: secções cônicas



Fonte: Sobre seções cônicas

2.2 O estudo das Cônicas no espaço (\mathbb{R}^2, d_E)

As cônicas, a partir desse momento, serão estudadas de um ponto de vista não somente geométrico, mas algébrico.

Serão consideradas como conjuntos de pontos que descrevem lugares geométricos no plano \mathbb{R}^2 e serão representadas por meio de equações que modelam, algebricamente, esses lugares geométricos. Para a realização dessas modelagens algébricas, no atual contexto, será utilizado o conceito de métrica euclidiana d_E vista em 1.2.

2.2.1 A Circunferência em (\mathbb{R}^2, d_E)

Definição 2: A circunferência é o lugar geométrico dos pontos P que equidistam de um ponto $C(x_c, y_c)$ fixo, chamado de centro da circunferência.

Dado um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a uma circunferência, a distância desse ponto ao centro $C(x_c, y_c)$, conforme visto em 1.2, será dada por:

$$d_E(P, C) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$$

Como, pela definição de circunferência, a distância de qualquer de seus pontos ao seu centro é fixa, ou seja, uma constante, então $d_E(P, C) = r$, onde r é denominado *o raio da circunferência*. Desse modo, tem-se:

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtém-se:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

que é denominada *a equação reduzida da circunferência*.

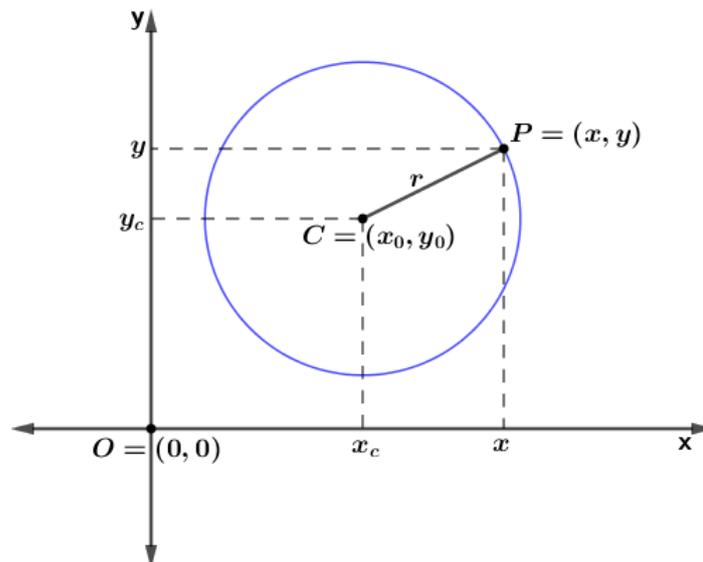
Ao se desenvolver os quadrados da equação reduzida da circunferência e agrupar os termos no 1º membro dessa equação, obtém-se uma escrita diferente para a representação algébrica de uma circunferência:

$$\begin{aligned} (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2x_c x + x_c^2 + y^2 - 2y_c y + y_c^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

A representação acima é denominada *equação geral da circunferência*.

Na figura 16 é apresentada a circunferência no espaço \mathbb{R}^2 , sendo considerada a métrica euclidiana d_E :

Figura 16: Circunferência no espaço (\mathbb{R}^2, d_E)



Fonte: próprio autor

2.2.2 A Parábola em (\mathbb{R}^2, d_E)

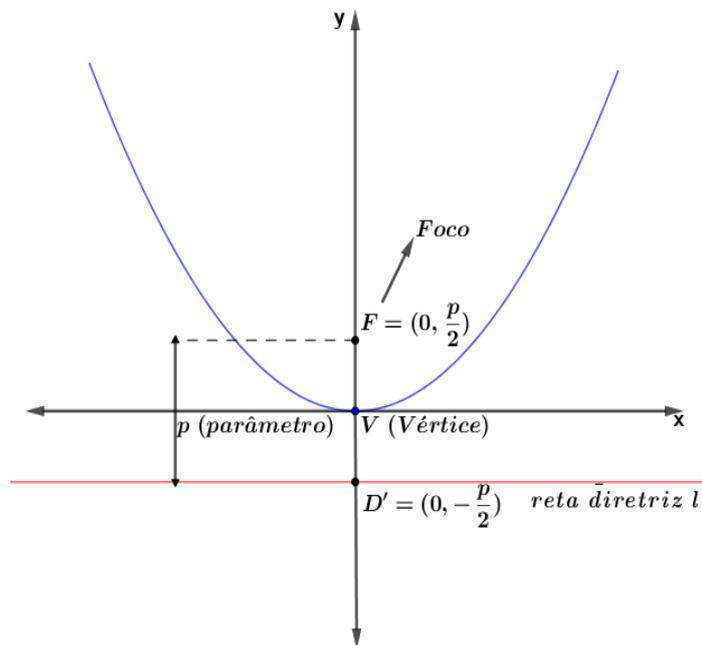
Para Delgado et al. (2013): Sejam l uma reta e F um ponto do plano não pertencente a l . A parábola P de foco F e diretriz l é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a l , ou seja:

$$P = \{P | d_E(P, F) = d_E(P, l)\}$$

Em outras palavras, parábola é o conjunto dos pontos de um plano que estão à mesma distância de um foco F e de uma reta diretriz l , com a condição de que $F \notin l$. Ou seja, é o lugar geométrico dos pontos P do plano tal que $d_E(P, F) = d_E(P, D)$, com $D \in l$.

São elementos de uma parábola: F (foco), l (reta diretriz), p (parâmetro) e V (vértice), onde $p = d_E(F, l)$. Os elementos de uma parábola são identificados na figura 17:

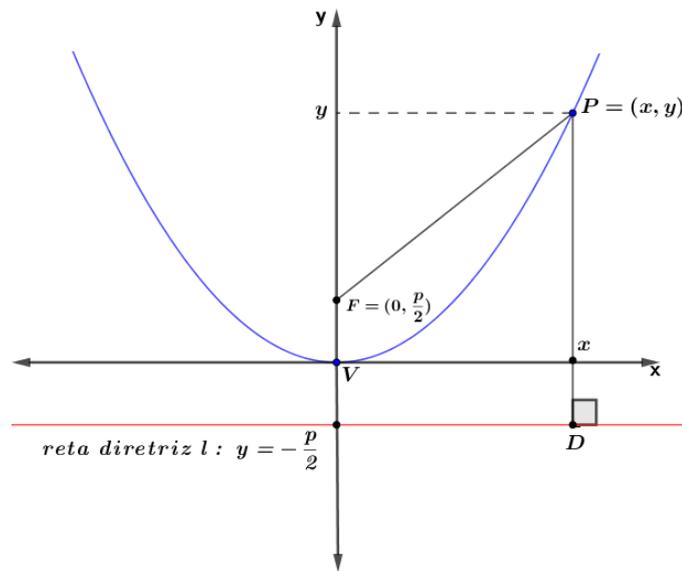
Figura 17: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E)



Fonte: Próprio Autor

2.2.2.1 Equação da parábola com vértice na origem xOy

Considerando o vértice da parábola na origem do sistema cartesiano ortogonal e o eixo das ordenadas passando pelo foco $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$, tem-se a diretriz l sendo a reta $y = -\frac{p}{2}$, conforme a figura 18:

Figure 18: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com diretriz paralela ao eixo das abscissas

Fonte: Próprio Autor

Nas condições acima apresentadas, denomina-se a *equação reduzida da parábola* ao conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfazem a condição $d_E(P, F) = d_E(P, D)$. Desta igualdade resulta que:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

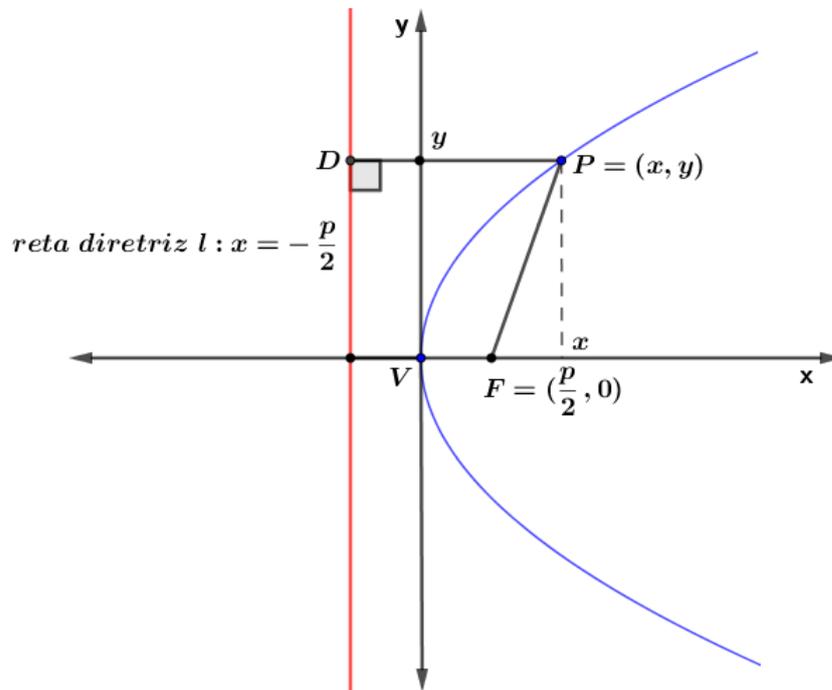
Elevando ambos os membros da equação ao quadrado e desenvolvendo as operações nos radicandos, obtém-se:

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

Donde $x^2 = 2py$.

De maneira análoga, se for considerada a parábola com vértice na origem do sistema cartesiano ortogonal e o eixo das abscissas passando pelo foco $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, tem-se a diretriz l sendo a reta $x = -\frac{p}{2}$, conforme a figura 19:

Figura 19: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com diretriz paralela ao eixo das ordenadas



Fonte: Próprio Autor

Considerando $d_E(P, F) = d_E(P, D)$, obtém-se:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

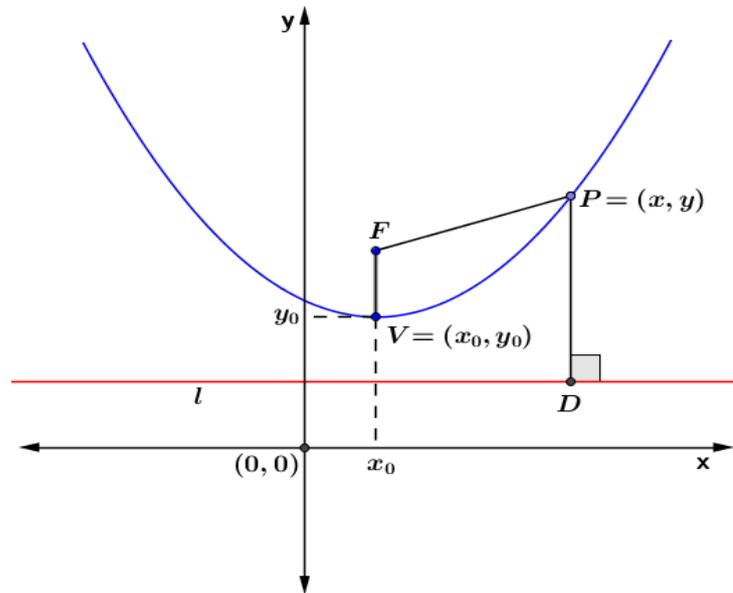
Elevando ambos os membros da equação ao quadrado e desenvolvendo as operações nos radicandos, obtém-se:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Donde $y^2 = 2px$.

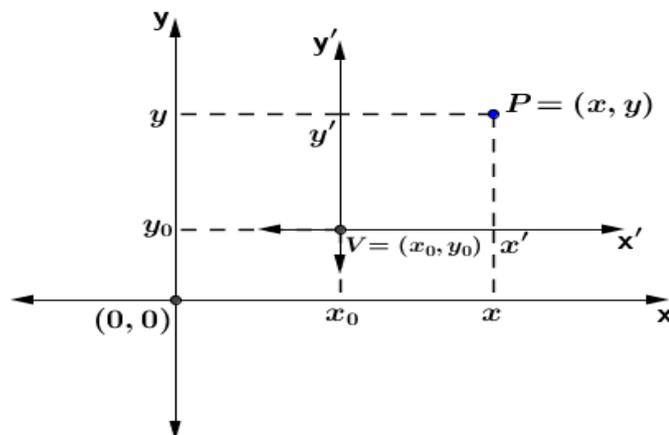
2.2.2.2 Equação da parábola com vértice fora da origem de xOy

Considere uma parábola cujo vértice seja o ponto $V = (x_0, y_0)$ não coincidente com a origem do sistema cartesiano ortogonal e o segmento VF é tal que $VF \parallel Oy$, conforme a figura 20:

Figure 20: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com vértice fora da origem $VF \parallel Oy$ 

Fonte: Próprio Autor

Considere um sistema auxiliar de eixos $Ox' \parallel Ox$ e $Oy' \parallel Oy$ com origem no vértice $V = (x_0, y_0)$. Nestas condições, a equação da parábola em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$ é dada por $(x')^2 = 2py'$. Porém, cada ponto P no sistema auxiliar $x'Vy'$ pode ser escrito com coordenadas no plano xOy , por meio de uma translação de eixos coordenados, conforme a figura 21:

Figure 21: Representação de um ponto P em coordenadas de $x'Vy'$ e xOy 

Fonte: Próprio Autor

Na figura acima se tem a seguinte relação:

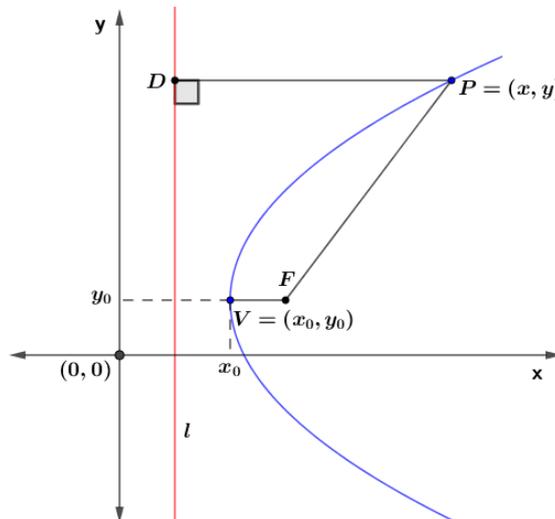
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}, \text{ donde se conclui que } x' = x - x_0 \text{ e } y' = y - y_0. \text{ Portanto, a equação}$$

da parábola com centro fora da origem do sistema cartesiano ortogonal, relativamente ao sistema xOy , será representada por:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Ao considerar uma parábola cujo vértice seja o ponto $V = (x_0, y_0)$ não coincidente com a origem do sistema cartesiano ortogonal e o segmento VF é tal que $VF \parallel Ox$, conforme a figura 22:

Figura 22: Parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_E) com vértice fora da origem e $VF \parallel Ox$



Fonte: Próprio Autor

Obtém-se a equação $(y')^2 = 2px'$, em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$, a qual, representada com coordenadas no sistema cartesiano ortogonal, pode ser escrita como $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Considerando que $VF \parallel Oy$, desenvolvendo ambos os lados da equação da parábola e isolando y , obtém-se:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 &= 2p(y - y_0) \\ x^2 - 2x_0x + x_0^2 &= 2py - 2py_0 \\ 2py &= x^2 - 2x_0x + x_0^2 + 2py_0 \\ y &= \frac{x^2}{2p} - \frac{x_0x}{p} + \frac{x_0^2}{2p} + y_0 \\ y &= \left(\frac{1}{2p}\right)x^2 - \left(\frac{x_0}{p}\right)x + \left(\frac{x_0^2}{2p} + y_0\right) \end{aligned}$$

Note que p sempre é diferente de zero.

Tomando $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2}{2p} + y_0$, a equação da parábola, representada na forma de um trinômio, é escrita como:

$$y = ax^2 + bx + c$$

A representação acima é denominada *forma explícita* da equação da parábola.

Realizando os procedimentos abaixo:

$$\begin{aligned} y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ y &= a \left[x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ y &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ y &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Considerando $m = \frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, conclui-se que:

$$y = a(x + m)^2 + k$$

A representação acima é denominada *forma canônica*.

De maneira análoga, se for considerado $VF \parallel Ox$, obtém-se $x = a'y^2 + b'y + c'$, na forma explícita, com $a' = \frac{1}{2p}$, $b' = -\frac{y_0}{p}$ e $c' = \frac{y_0^2}{2p} + x_0$, donde se deduz a forma canônica $x = a'(y + m)^2 + k'$, com $m = \frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

2.3 A Elipse em (\mathbb{R}^2, d_E)

Para Delgado et al. (2013): Uma elipse ε de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d_E(F_1, F_2) = 2c$,

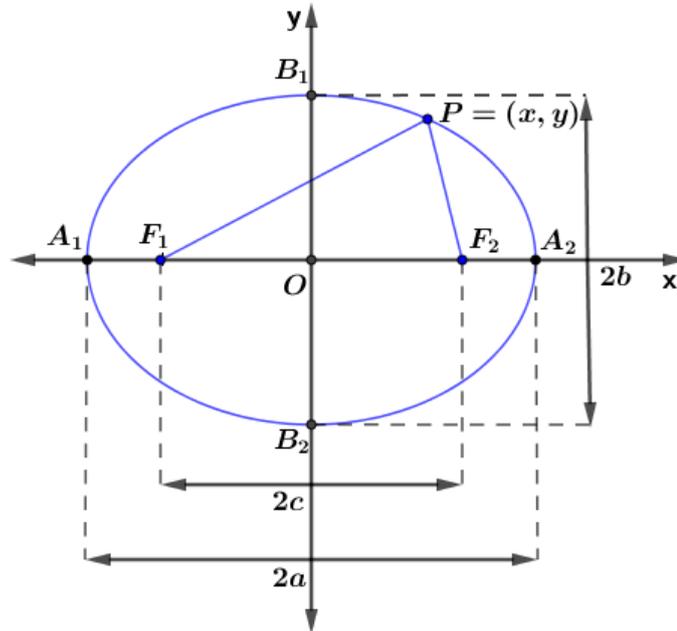
$$\varepsilon = \{P | d_E(P, F_1) + d_E(P, F_2) = 2a\}$$

Em outras palavras, elipse é o lugar geométrico de um plano onde a soma da distância de sua extremidade a dois pontos fixos (focos), que distam em $2c$, resulta em uma constante $2a > 2c$. Assim, seja $P(x, y)$ pertencente à elipse então, tem-se $d_E(PF_1) + d_E(PF_2) = 2a$. Os elementos da elipse são: os focos F_1 e F_2 , cuja distância é $d_E(F_1, F_2) = 2c$; o centro O da elipse; o eixo maior $\overline{A_1A_2}$ cuja medida é $2a$; o eixo menor $\overline{B_1B_2}$ cuja medida é $2b$.

A relação $e = \frac{c}{a}$ é denominada *excentricidade da elipse* e é um número compreendido entre 0 e 1, ou seja, $0 < e < 1$.

Os elementos de uma elipse e as medidas acima mencionadas estão representados na figura 23 a seguir:

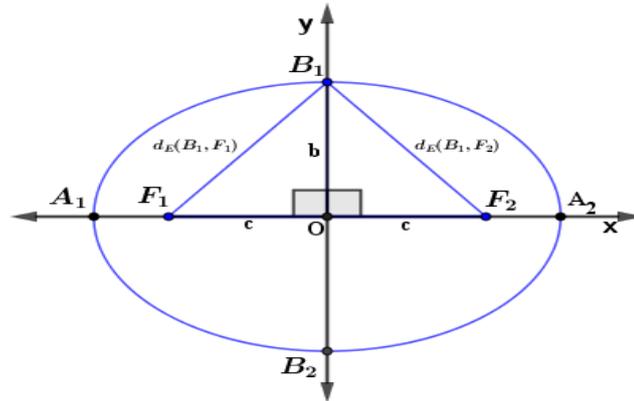
Figura 23: Representação da elipse, seus elementos e suas medidas



Fonte: Próprio Autor

Em uma elipse, tem-se a metade da medida do eixo maior $\frac{\overline{A_1A_2}}{2} = a$, a metade da medida do eixo menor $\frac{\overline{B_1B_2}}{2} = b$, a metade da distância focal $\frac{d(F_1, F_2)}{2} = c$ e, considerando os triângulos B_1OF_1 e B_1OF_2 , ambos retângulos em O e congruentes por construção, conforme a figura 24, tem-se, pelo Teorema de Pitágoras, que $[d_E(B_1, F_1)]^2 = b^2 + c^2$ e $[d_E(B_1, F_2)]^2 = b^2 + c^2$, mas, pela definição de elipse $d_E(B_1, F_1) + d_E(B_1, F_2) = 2a$ e, pela congruência dos triângulos B_1OF_1 e B_1OF_2 , tem-se $d_E(B_1, F_1) = d_E(B_1, F_2)$, donde $d_E(B_1, F_1) = a$. Portanto, em uma elipse verifica-se a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 24: Relação entre as medidas dos elementos de uma elipse



Fonte: Próprio autor

2.3.1 Equação Reduzida da Elipse com centro na origem de xOy

No sistema cartesiano ortogonal com $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ contidos nos eixos x e y , respectivamente, com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, conforme a figura 25, obtém-se a equação da elipse da seguinte forma:

Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$, diz-se que P pertencente à elipse, se e somente se, $d_E(P, F_1) + d_E(P, F_2) = 2a$.

Assim:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado e desenvolvendo as operações, tem-se:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

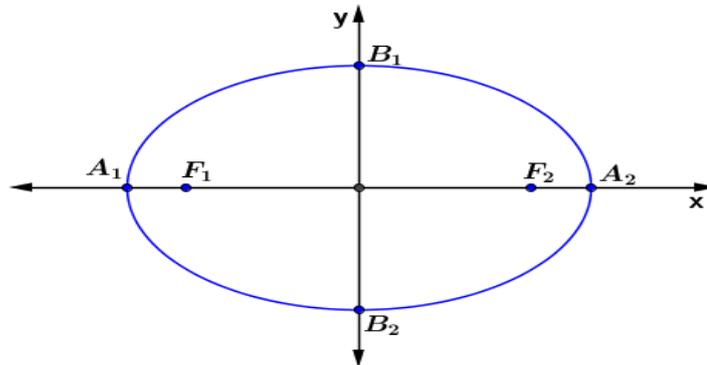
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Como a e b são não nulos, dividindo a igualdade acima por a^2b^2 , tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação acima obtida é denominada *equação reduzida da elipse*.

Figure 25: Elipse com centro na origem de xOy e focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

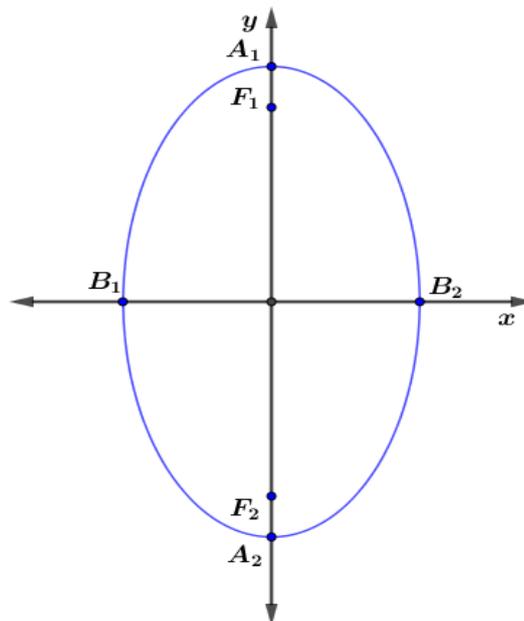


Fonte: Próprio autor

Caso $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ pertençam aos eixos y e x , respectivamente, com focos nos pontos $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$, conforme a figura 26, de maneira análoga, obtém-se a equação reduzida da Elipse, a qual será representada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Figura 26: Elipse com centro na origem de xOy e focos $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$

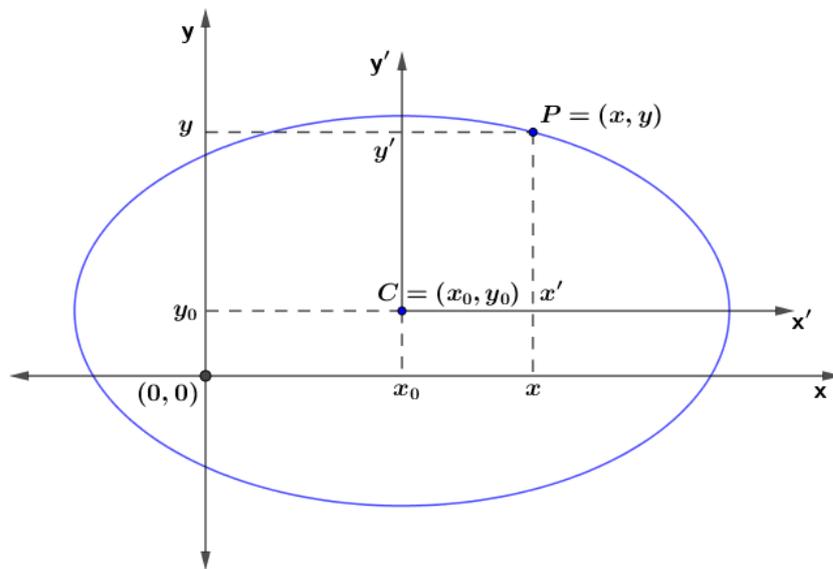


Fonte: Próprio autor

2.3.2 Equação Reduzida da Elipse com centro fora da origem de xOy

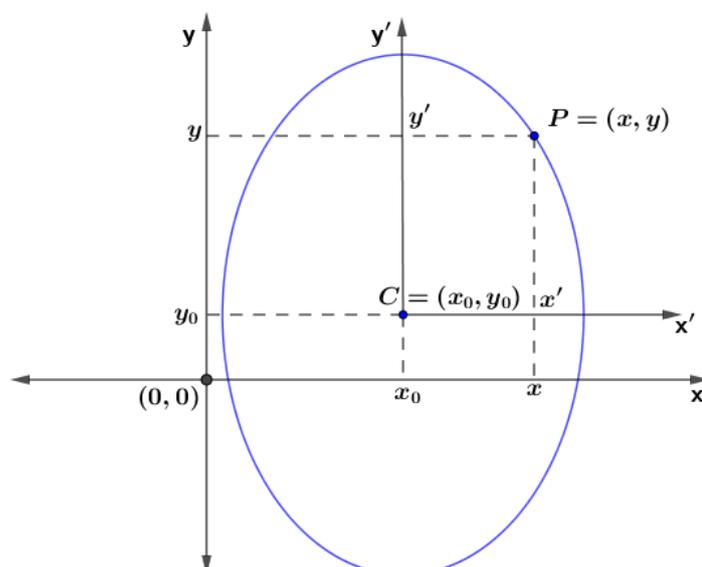
Por meio de translação de eixos coordenados, visto em 2.2.2.2, considerando o centro de uma elipse como o ponto $C = (x_0, y_0)$ fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , conforme as figuras 27 e 28, é possível representar qualquer ponto $P = (x', y')$ da elipse em relação ao sistema cartesiano ortogonal escrevendo $P = (x - x_0, y - y_0)$ onde x_0 e y_0 são as coordenadas da origem do sistema auxiliar $x'Cy'$.

Figura 27: Elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo Ox



Fonte: Próprio autor

Figura 28: Elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo Oy



Fonte: Próprio autor

Nas situações apresentadas nas figuras 27 e 28, obtém-se respectivamente, as equações reduzidas escritas em coordenadas do sistema auxiliar $x'Cy'$:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1$$

As quais, representadas no sistema cartesiano ortogonal xOy , serão escritas, respectivamente, como:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

As equações acima apresentadas para ambos os casos de elipses podem ser consideradas generalizações de equações para quaisquer tipos de elipses, desde que seus eixos maiores sejam paralelos ao eixo Ox ou ao eixo Oy . No caso de a elipse possuir centro coincidente com a origem do sistema cartesiano xOy , basta considerar $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

2.4 A Hipérbole em (\mathbb{R}^2, d_E)

Para Delgado et al. (2013): Uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$ menor do que a distância entre os focos $2c > 0$, ou seja:

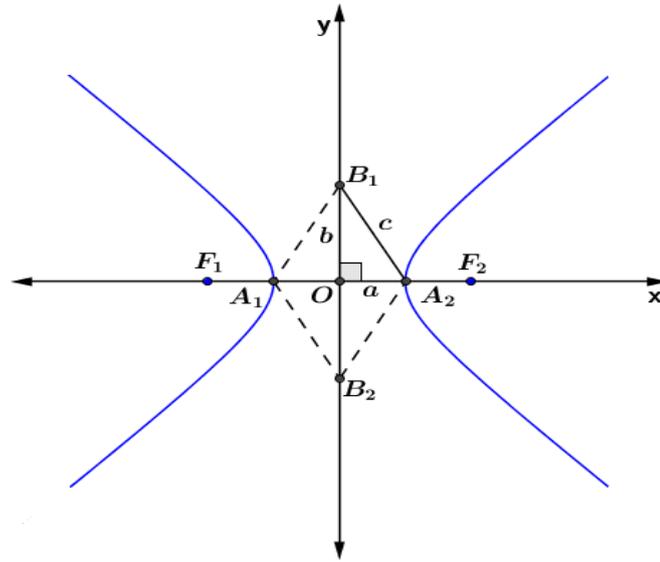
$$\mathcal{H} = \{P | d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2) = 2a\}, \quad 0 < a < c, \quad d_E(F_1, F_2) = 2c$$

Em outras palavras, uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P tais que a diferença, em valor absoluto, das distâncias a F_1 e F_2 , chamados de focos da hipérbole, é a constante positiva $2a < 2c$. Assim, se $P = (x, y)$ pertencente à hipérbole então $|d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2)| = 2a$. Os elementos da hipérbole são: os focos F_1 e F_2 , cuja distância entre eles é $d_E(F_1, F_2) = 2c$; o centro O ; o eixo real $\overline{A_1A_2}$, cuja medida é $2a$ e o eixo imaginário $\overline{B_1B_2}$, cuja medida é $2b$.

A relação $e = \frac{c}{a}$ é denominada *excentricidade da hipérbole* e, em razão de $a < c$, tem-se sempre que $e > 1$.

Os elementos de uma hipérbole e as medidas acima mencionadas estão representados na figura 29 a seguir:

Figura 29: Representação da hipérbole, seus elementos e suas medidas



Fonte: Próprio autor

Os pontos B_1 e B_2 , não coincidentes, são tais que $d_E(B_1, A_1) = d_E(B_1, A_2) = d_E(B_2, A_1) = d_E(B_2, A_2) = \frac{d_E(F_1, F_2)}{2} = c$.

Na figura 29, observa-se que o triângulo B_1OA_2 é retângulo em O e que sua hipotenusa B_1A_2 tem medida c , enquanto que seus catetos A_2O e B_1O medem, respectivamente, a e b . Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se a seguinte relação na hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2$.

2.4.1 Equação Reduzida da Hipérbole com centro na origem de xOy

No sistema cartesiano ortogonal com $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ pertencentes aos eixos x e y , respectivamente, com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, ou seja, centro na origem de xOy , conforme a figura 30, obtém-se a equação da hipérbole da seguinte forma:

Dado um ponto qualquer $P(x, y)$, diz-se que P pertencente à hipérbole, se e somente se, $|d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2)| = 2a$, o que equivale à:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado e desenvolvendo as operações, tem-se:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
 4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado e desenvolvendo as operações, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 (cx - a^2)^2 &= a^2 \cdot (x - c)^2 + a^2 y^2 \\
 c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4 &= a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 \\
 (c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 &= a^2(c^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

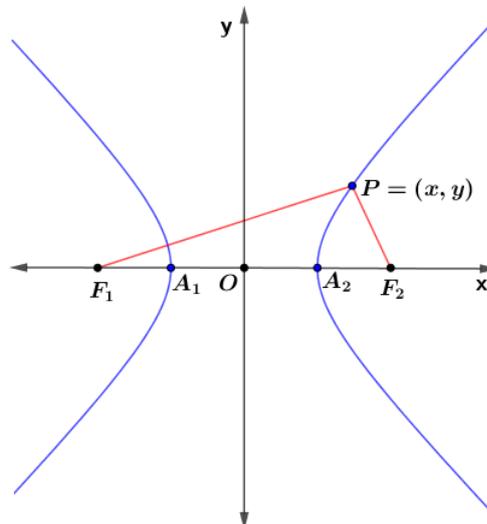
Como visto em 2.4, em uma hipérbole é válida a identidade $c^2 = a^2 + b^2$, logo, a equação acima equivale à $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Dividindo ambos os membros dessa equação por $a^2 b^2$, uma vez que esse divisor é sempre não nulo, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação acima obtida é denominada *equação reduzida da hipérbole*, quando o centro coincide com a origem de xOy e os focos sobre o eixo x das abscissas.

Figura 30: Hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo Ox

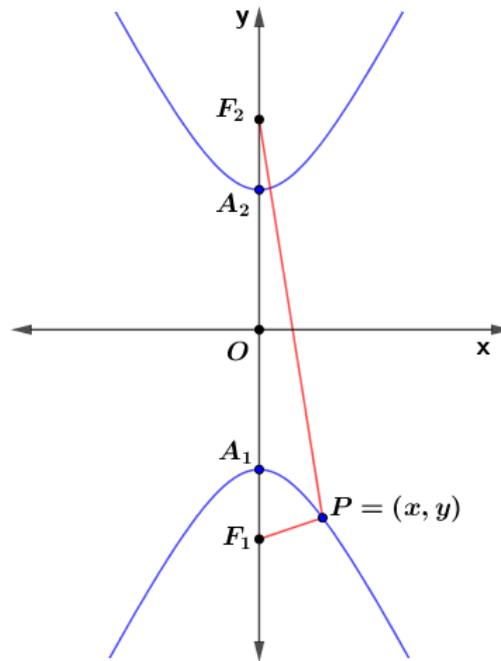


Fonte: Próprio autor

Caso $\overline{A_1 A_2}$ e $\overline{B_1 B_2}$ pertençam aos eixos y e x , respectivamente, com focos nos pontos $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$, ou seja, centro na origem de xOy , conforme a figura 31, de maneira análoga, obtém-se a equação reduzida da hipérbole, a qual será representada por:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

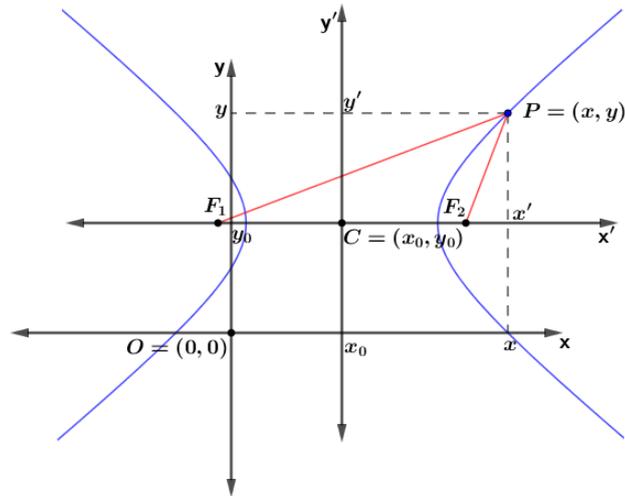
Figura 31: Hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo Oy



2.4.2 Equação Reduzida da Hipérbole com centro fora da origem de xOy

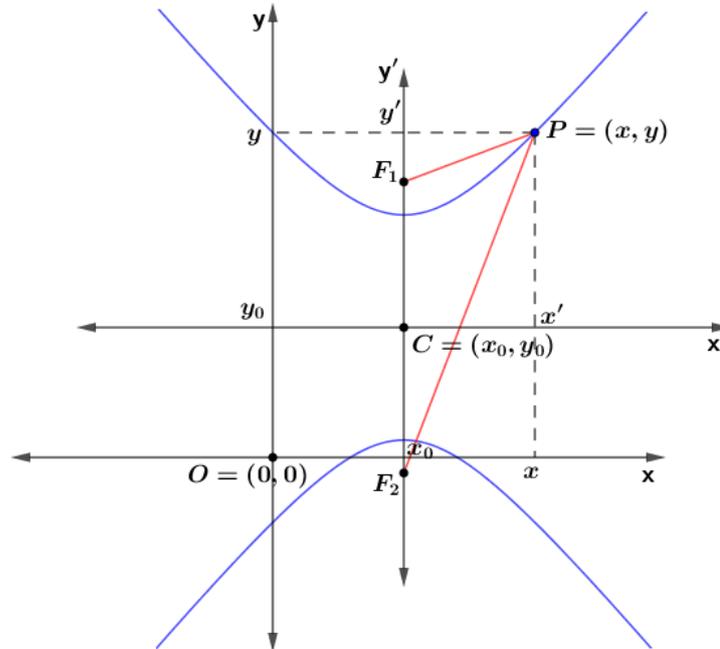
De maneira análoga ao que foi visto em 2.3.2, referente ao tópico de elipses com o centro fora da origem, sabe-se que por meio de translação de eixos coordenados, visto em 2.2.2.2, considerando o centro de uma hipérbole como o ponto $C = (x_0, y_0)$ fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , conforme as figuras 32 e 33, é possível representar qualquer ponto $P = (x', y')$ da hipérbole em relação ao sistema cartesiano ortogonal, em ambos os casos, escrevendo $P = (x - x_0, y - y_0)$, onde x_0 e y_0 são as coordenadas da origem do sistema auxiliar $x'Cy'$.

Figura 32: Hipérbole com centro fora da origem e reta focal paralela ao eixo Ox



Fonte: Próprio autor

Figure 33: Hipérbole com centro fora da origem e reta focal paralela ao eixo Oy



Fonte: Próprio autor

Nas situações apresentadas nas figuras 32 e 33, obtém-se respectivamente, as equações reduzidas escritas em coordenadas do sistema auxiliar $x'Cy'$, como sendo, respectivamente:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1$$

As quais, representadas no sistema cartesiano ortogonal xOy , serão escritas, respectivamente, como:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

As equações acima apresentadas para ambos os casos de hipérbolas podem ser consideradas generalizações de equações para quaisquer tipos de hipérbolas, desde que suas retas focais sejam paralelas ao eixo Ox ou ao eixo Oy . No caso de a hipérbole possuir centro coincidente com a origem do sistema cartesiano xOy , basta considerar $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

2.5 Equação Geral das Cônicas

A equação geral de uma cônica é dada pela expressão do 2º Grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nem todas as equações do segundo grau representam uma cônica. As curvas definidas por equações do segundo grau nas variáveis x e y são do tipo acima.

O estudo restringe-se as cônicas não degeneradas e com eixos focais paralelos a qualquer um dos eixos cartesianos.

2.5.1 Equação geral de uma Parábola

Em 2.2.2.2 foi visto que a equação geral de uma parábola \wp com a reta focal paralela ao eixo Oy é representada por:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$$

Desenvolvendo as operações e agrupando os termos no primeiro membro da equação, tem-se:

$$x^2 - 2x_0x \mp 2py + x_0^2 \pm 2py_0 = 0$$

Comparando-a com a equação geral das cônicas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Verifica-se que: $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 2p$, $F = x_0^2 \pm 2py_0$

De maneira análoga, caso o eixo focal seja paralelo ao eixo Ox , a equação da parábola é representada por:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$$

O que equivale a $y^2 - 2y_0y \mp 2px + y_0^2 \pm 2px_0 = 0$, com $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 2p$, $E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 2px_0$.

Considerando a equação geral de uma cônica, com $B = 0$, obtém-se a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e, se $A \neq 0$ e $C = 0$, a se tem $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, a qual representa um dos seguintes conjuntos:

(i) É fácil verificar que, ao se manipular algebricamente a equação acima, considerando $E \neq 0$, obtém-se:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A} \cdot \left[y + \frac{A}{E} \cdot \left(\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2}\right)\right]$$

$$\left[x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right]^2 = -\frac{E}{A} \cdot \left[y - \left(-\frac{4A^2F - AD^2}{4A^2E}\right)\right]$$

Que representa uma parábola com o eixo focal paralelo ao eixo Oy e vértice no ponto $V = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{4A^2F - AD^2}{4A^2E}\right)$.

(ii) Caso se tenha $E = 0$, obtém-se a equação $Ax^2 + Dx + F = 0$ e, determinando o valor de x , encontra-se:

$$x = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}$$

Donde se conclui que a equação representa:

- Duas retas paralelas ao eixo Oy , quando $D^2 - 4AF > 0$;
- Uma reta paralela ao eixo Oy , quando $D^2 - 4AF = 0$
- O conjunto vazio, quando $D^2 - 4AF < 0$.

De maneira análoga, as observações acima são válidas para o caso em que $A = 0$ e $C \neq 0$, considerando que:

(iii) Caso $D \neq 0$, a equação representa uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo Ox , com vértice no ponto $V = \left(-\frac{4C^2 - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right)$;

(iv) Caso $D = 0$, a equação representa:

- Duas retas paralelas ao eixo Ox , quando $E^2 - 4CF > 0$;
- Uma reta paralela ao eixo Ox , quando $E^2 - 4CF = 0$;
- O conjunto vazio, quando $E^2 - 4CF < 0$.

Em ambos os casos analisados acima, tem-se, como premissas, que $B = 0$ e $A \neq 0$ e $C = 0$ ou $A = 0$ e $C \neq 0$, donde conclui-se que, para que a equação geral de uma cônica venha ser uma parábola, tem-se, sempre que $B^2 - 4AC = 0$.

2.5.2 Equação geral de uma Elipse

Em 2.3.2, foi visto que a equação geral de uma elipse ε de centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo Ox é representada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo as operações e agrupando os termos no primeiro membro da equação, tem-se:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Comparando-a com a equação geral das cônicas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Verifica-se que $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$, $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

De maneira análoga, caso o eixo focal seja paralelo ao eixo Oy , a equação da elipse ε é representada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

O que equivale a:

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2x_0x - 2b^2y_0y + b^2y_0^2 + a^2x_0^2 - a^2b^2 = 0, \text{ com } A = a^2, B = 0, \\ C = b^2, D = -2a^2x_0, E = -2b^2y_0, F = b^2y_0^2 + a^2x_0^2 - a^2b^2.$$

Em ambos os casos, o coeficiente B é igual a zero, enquanto que os coeficientes A e C possuem mesmos sinais, isto é, $AC > 0$.

Desse modo, considerando a equação geral de uma cônica, com $B = 0$, A e C , de mesmos sinais, dividindo esta equação por AC , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} &= 0 \\ \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y &= -\frac{F}{AC} \\ \frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} &= -\frac{F}{AC} \\ \frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} &= -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2} \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{CD^2 + AE^2 - 4AFC}{4A^2C^2} \end{aligned}$$

Assim:

- Se $CD^2 + AE^2 - 4AFC = 0$, tem-se:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = 0 \Rightarrow A \cdot \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C \cdot \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0$$

Ou seja, $(x, y) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ representa um ponto do plano;

- Se $CD^2 + AE^2 - 4AFC > 0$, então tem-se uma elipse de equação

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4AFC}{4A^2C}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4AFC}{4AC^2}} = 1$$

Com centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$;

- Se $CD^2 + AE^2 - 4AFC < 0$, a equação representa o conjunto vazio, pois sabe-se que

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} \text{ é sempre maior que zero.}$$

Nota-se que, na equação geral de uma elipse, $B = 0$ e A e C possuem mesmos sinais, ou seja, $AC > 0$. Dessa forma, para as elipses com retas focais paralelas aos eixos coordenados, é válida a relação $B^2 - 4AC < 0$.

Observa-se ainda que, caso se tenha $B = 0$ e $A = C \neq 0$, a equação geral será representada por:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{A} + \frac{\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2}{A} = \frac{AD^2 + AE^2 - 4A^2F}{4A^2A^2}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{A^2D^2 + A^2E^2 - 4A^3F}{4A^2A^2}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

Nas condições acima, tem-se:

- Se $D^2 + E^2 - 4AF = 0$, a equação representa um ponto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$;
- Se $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, a equação representa uma circunferência de centro $C = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$;
- Se $D^2 + E^2 - 4AF < 0$, a equação representa o conjunto vazio, uma vez que não se pode ter $\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 < 0$.

2.5.3 Equação geral de uma Hipérbole:

Em 2.4.2 foi visto que a equação geral de uma hipérbole \mathcal{H} com reta focal paralela ao eixo Ox é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo as operações e agrupando os termos no primeiro membro da equação, tem-se:

$$b^2 \cdot (x^2 - 2x_0x + x_0^2) - a^2 \cdot (y^2 - 2y_0y + y_0^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Comparando-a com a equação geral das cônicas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Verifica-se que:

$$A = b^2, B = 0, C = -a^2, D = -2b^2x_0, E = 2a^2y_0 \text{ e } F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2.$$

De maneira análoga, caso a reta focal seja paralela ao eixo Oy , a equação da hipérbole é representada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

O que, após o desenvolvimento das operações e agrupamento dos termos no primeiro membro da equação, equivale à:

$$-a^2x^2 + b^2y^2 + 2a^2x_0x - 2b^2y_0y - a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Donde, ao ser comparada com a equação geral das cônicas, se obtém:

$$A = -a^2, B = 0, C = b^2, D = 2a^2x_0, E = -2b^2y_0 \text{ e } F = -a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2.$$

Em ambos os casos, o coeficiente B é igual a zero, enquanto que os coeficientes A e C possuem sinais opostos.

Fundamentado nas verificações acima, onde a equação geral de uma cônica é tal que $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ e $A \cdot C < 0$, suponha, sem perda de generalidade, que $A > 0$ e $C < 0$.

Desse modo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) + F = 0$$

$$\frac{Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) + F}{-AC} = 0$$

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}}{-C} - \frac{y^2 + \frac{E}{C}}{A} = \frac{F}{AC}$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C^2}}{A} = \frac{F}{AC}$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}$$

Assim:

- A equação representa uma hipérbole com centro em $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ e reta focal paralela aos eixos coordenados, se $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$.
- A equação representa duas retas concorrentes, caso se tenha $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$, cujas equações são obtidas como se segue:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = 0$$

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{A \cdot \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C}$$

$$y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{\frac{A \cdot \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C}}$$

$$y = \pm \left(x + \frac{D}{2A}\right) \cdot \sqrt{\frac{A}{-C}} - \frac{E}{2C}$$

Nota-se que, na equação geral de uma hipérbole, $B = 0$ e A e C possuem o sinais diferentes, ou seja, $AC < 0$. Dessa forma, para as hipérboles com retas focais paralelas aos eixos coordenados, é válida a relação $B^2 - 4AC > 0$.

No capítulo seguinte será realizado o estudo das cônicas, tal como apresentado no presente capítulo, porém, sob a perspectiva da métrica d_1 no espaço \mathbb{R}^2 .

3 AS CÔNICAS NO ESPAÇO MÉTRICO (\mathbb{R}^2, d_1)

Ao ser estudado cada tópico, em \mathbb{R}^2 , no capítulo anterior, foram detalhados os passos baseados nas definições de lugares geométricos, utilizando para isso a métrica euclidiana d_E .

Neste capítulo serão utilizadas as mesmas definições, considerando os mesmos lugares geométricos em \mathbb{R}^2 , porém, sob a perspectiva da métrica d_1 . Com isso, as diversas manipulações algébricas feitas na métrica Euclidiana se resumem às análises dos módulos que surgem quando aplicadas às definições em cada tópico anteriormente visto. Para isso, é essencial que se conheça a definição de módulo de um número real, ou seja, se $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}. \text{ Tal conteúdo é estudado, geralmente, no primeiro ano do ensino médio.}$$

Primeiramente, será estudada a circunferência aplicando a ideia de que a distância entre qualquer ponto $P = (x, y)$ pertencente a ela e seu centro $C = (x_c, y_c)$ (fixo) é um valor constante, raio da circunferência, ou seja: $d_1(P, C) = |x - x_c| + |y - y_c| = r$. Assim, serão analisadas as possíveis condições para que seja satisfeita essa igualdade. A representação gráfica desta figura no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) assumirá uma forma um tanto quanto curiosa, pois, nessa métrica, a distância entre dois pontos se dá por meio de deslocamentos verticais e horizontais.

Dando continuidade ao trabalho, será realizado o estudo da parábola. Nesta curva a distância entre qualquer ponto pertencente a ela, ao seu foco, é a mesma distância desse ponto à sua reta diretriz. Sob a análise de seus módulos, sua representação gráfica no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) esta curva, não diferente da anterior, apresenta-se de forma diferenciada à já conhecida representação com a métrica euclidiana.

No estudo da elipse (lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é igual à dimensão de seu eixo maior) as análises dos módulos fornecem representações gráficas, em (\mathbb{R}^2, d_1) , como formas hexagonais, quando a reta focal é paralela a qualquer um dos eixos coordenados e como formas octogonais, caso a reta focal não seja paralela aos eixos coordenados.

Por fim será realizado, o estudo da hipérbole (lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos fixos (focos) é igual à dimensão do segmento de reta formado pelos vértices sobre o eixo focal), considerando o espaço métrico em (\mathbb{R}^2, d_1) e esboçando, neste espaço, a figura obtida por meio desta aplicação.

3.1 O estudo da circunferência no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)

Sabe-se, da Geometria Euclidiana, que uma circunferência Γ é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto $C = (x_c, y_c)$ fixo, chamado de centro da circunferência.

Considerando um ponto $P = (x, y)$ um ponto qualquer da circunferência Γ cujo centro é $C = (x_c, y_c)$, pela definição geométrica de circunferência, associada a métrica d_1 , tem-se que:

$$d_1(P, C) = |x - x_c| + |y - y_c| = r$$

Onde r é um valor constante, tal como na métrica euclidiana.

Da definição de módulo, tem-se que:

$$|x - x_c| = \begin{cases} x - x_c, & \text{se } x \geq x_c \\ -x + x_c, & \text{se } x < x_c \end{cases} \quad \text{e} \quad |y - y_c| = \begin{cases} y - y_c, & \text{se } y \geq y_c \\ -y + y_c, & \text{se } y < y_c \end{cases}$$

Logo, a equação da circunferência, sob a perspectiva da métrica d_1 , no espaço \mathbb{R}^2 será:

$$\begin{cases} x - x_c \geq 0, & \text{se } x \geq x_c \\ y - y_c \geq 0, & \text{se } y \geq y_c \end{cases} \Rightarrow x - x_c + y - y_c - r = 0$$

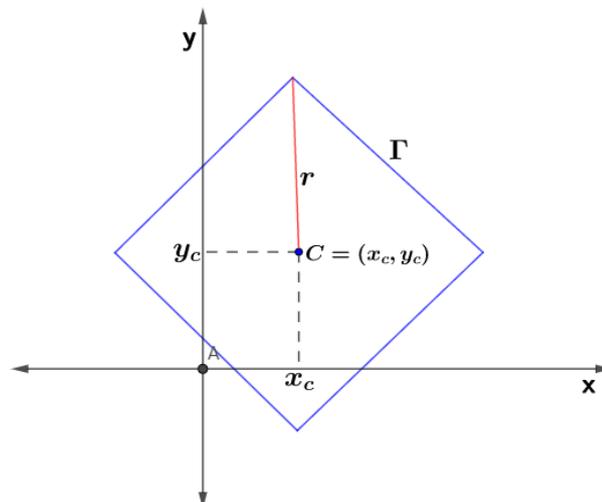
$$\begin{cases} x - x_c \geq 0, & \text{se } x \geq x_c \\ y - y_c < 0, & \text{se } y < y_c \end{cases} \Rightarrow x - x_c - y + y_c - r = 0$$

$$\begin{cases} x - x_c < 0, & \text{se } x < x_c \\ y - y_c \geq 0, & \text{se } y \geq y_c \end{cases} \Rightarrow -x + x_c + y - y_c - r = 0$$

$$\begin{cases} x - x_c < 0, & \text{se } x < x_c \\ y - y_c < 0, & \text{se } y < y_c \end{cases} \Rightarrow -x + x_c - y + y_c - r = 0$$

Para a circunferência Γ de centro $C = (x_c, y_c)$ e raio r , a representação geométrica em \mathbb{R}^2 , por meio da métrica d_1 pode ser visualizada na figura 34 a seguir:

Figura 34: Circunferência de centro C e raio r em (\mathbb{R}^2, d_1)

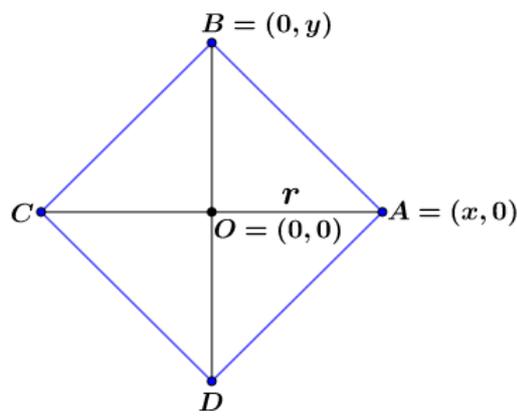


Fonte: Próprio autor

No espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_E) a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é o conhecido valor de π , cuja aproximação é $\pi \cong 3,14$, porém, ao se considerar o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) , a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, embora uma constante também, assume o valor 4.

Na figura 35 é apresentada uma circunferência de raio r bem como os procedimentos para a determinação da razão entre a circunferência e o seu diâmetro.

Figure 35: Circunferência de raio r e centro $O = (0, 0)$ em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

Na figura acima se tem:

$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = r$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$, donde se pode determinar as seguintes medidas geométricas, considerando a métrica d_1 :

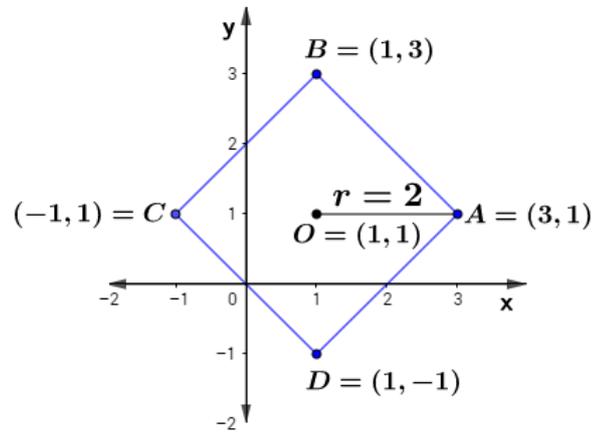
- (i) Diâmetro: $2R = \overline{AO} + \overline{BO} = [|x_1 - 0| + |0 - 0|] + [|0 - 0| + |y_1 - 0|] = |x_1| + |y_1|$
- (ii) Comprimento da circunferência = $4 \cdot \overline{AB} = 4 \cdot (|x_1 - 0| + |0 - y_1|) = 4 \cdot (|x_1| + |y_1|)$
- (iii) Razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro vale é dado por:

$$\frac{4 \cdot (|x_1| + |y_1|)}{(|x_1| + |y_1|)} = 4$$

Exemplo 2: A situação abaixo apresentada consiste na verificação numérica de que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu raio, na métrica d_1 corresponde ao valor 4.

Considerando uma circunferência de centro $O = (1,1)$ e raio $r = 2$, conforme a figura 36.

Figura 36: Circunferência com centro $O = (1, 1)$ e raio $r = 2$ em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

Analisando a figura, obtém-se:

$$d_1(A, B) = |3 - 1| + |1 - 3| = 4$$

$$d_1(B, C) = |1 + 1| + |3 - 1| = 4$$

$$d_1(C, D) = |-1 - 1| + |1 + 1| = 4$$

$$d_1(D, A) = |1 - 3| + |-1 - 1| = 4$$

Como comprimento m da circunferência é dado pela soma $x = d_1(A, B) + d_1(B, C) + d_1(C, D) + d_1(D, A)$, o que implica que $m = 16$ e o seu diâmetro n é dado por $n = 2r$, o que acarreta que $n = 4$, tem-se que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, na situação ilustrada, é igual a:

$$\frac{m}{n} = \frac{16}{4} = 4$$

Exemplo 3: Determinar a equação de uma circunferência Γ de centro $O = (2, 3)$ e raio $r = 5$, no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) e representar geometricamente esta figura em \mathbb{R}^2 .

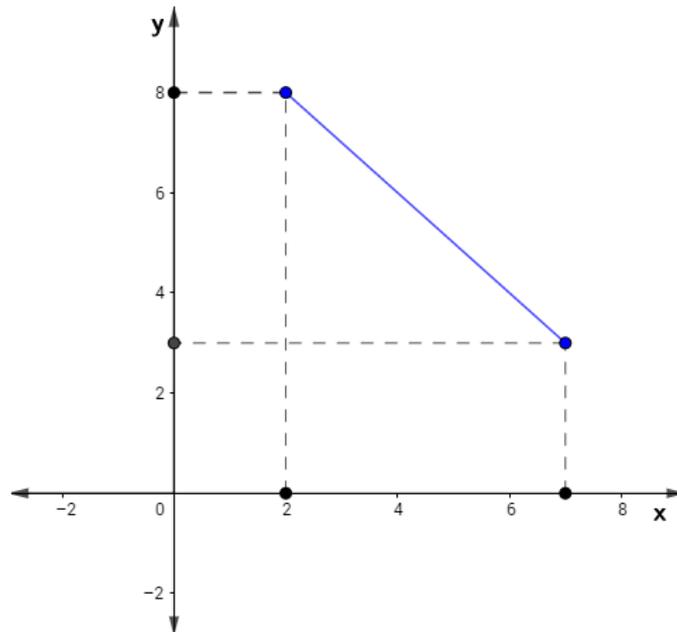
Solução: Considerando que a equação de uma circunferência no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) é dada por $|x - x_c| + |y - y_c| = r$, na situação ilustrada obtém-se a equação:

$$|x - 2| + |y - 3| = 5$$

$$\text{Como } |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{se } x < 2 \end{cases} \text{ e } |y - 3| = \begin{cases} y - 3, & \text{se } y \geq 3 \\ -y + 3, & \text{se } y < 3 \end{cases}$$

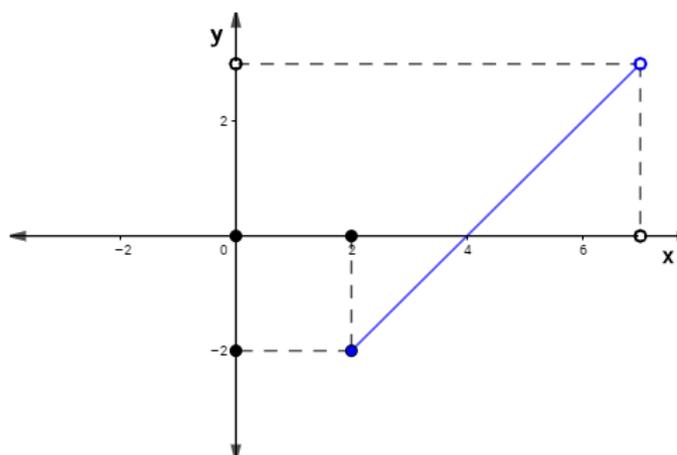
Analisando, separadamente, cada condição modular, tem-se:

(i) Para $x \geq 2$ e $y \geq 3$, tem-se $|x - 2| + |y - 3| = x - 2 + y - 3 = 5$, o que implica que $y = -x + 10$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 37.

Figura 37: Gráfico de Γ para $x \geq 2$ e $y \geq 3$ 

Fonte: Próprio autor

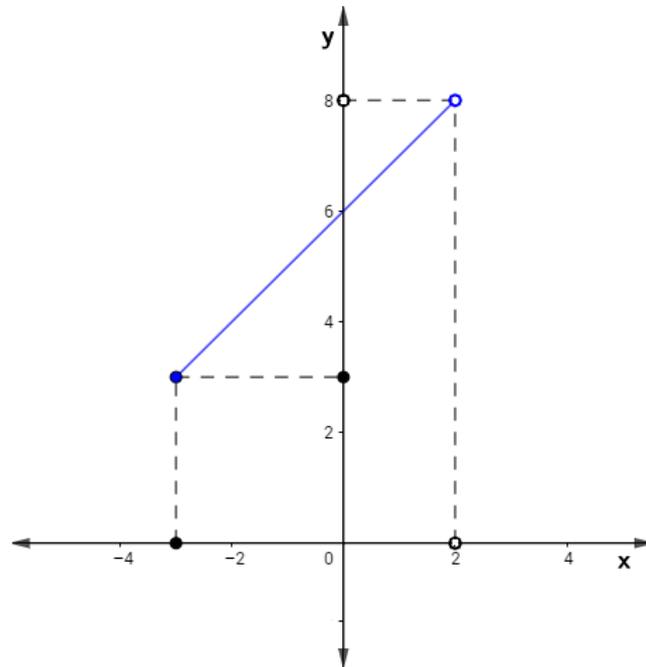
(ii) Para $x \geq 2$ e $y < 3$, tem-se $|x - 2| + |y - 3| = x - 2 - y + 3 = 5$, o que implica que $y = x - 4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 38.

Figure 38: Gráfico de Γ para $x \geq 2$ e $y < 3$ 

Fonte: Próprio autor

(iii) Para $x < 2$ e $y \geq 3$, tem-se $|x - 2| + |y - 3| = -x + 2 + y - 3 = 5$, o que implica que $y = x + 6$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 39.

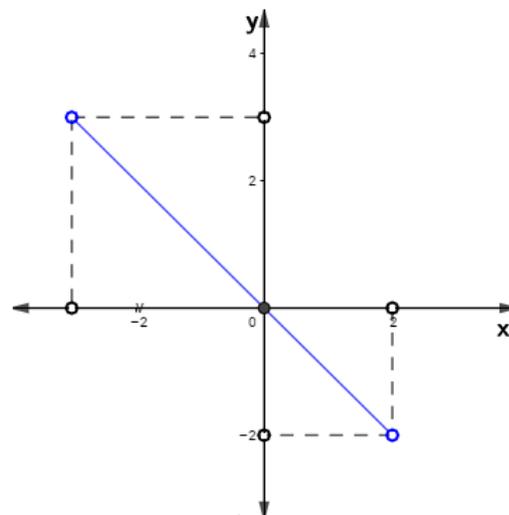
Figura 39: Gráfico de Γ para $x < 2$ e $y \geq 3$



Fonte: Próprio autor

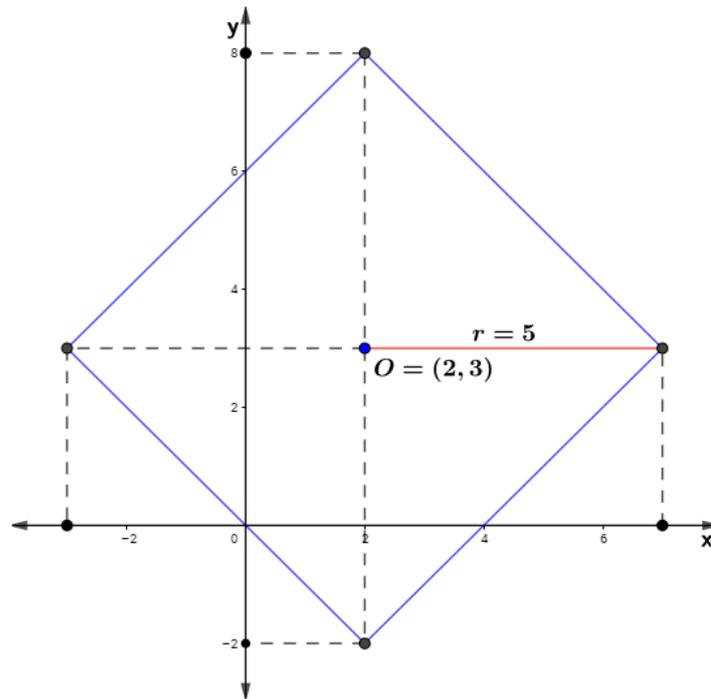
(iv) Para $x < 2$ e $y < 3$, tem-se $|x - 2| + |y - 3| = -x + 2 - y + 3 = 5$, o que implica que $y = -x$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 40;

Figure 40: Gráfico de Γ para $x < 2$ e $y < 3$



Fonte: Próprio autor

Ao serem unidos os segmentos obtidos nas análises modulares (i), (ii), (iii) e (iv) da equação da circunferência $\Gamma: |x - 2| + |y - 3| = x - 2 + y - 3 = 5$, a representação geométrica de Γ no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) pode ser visualizada na figura 41.

Figure 41: Representação gráfica de Γ em (\mathbb{R}^2, d_1) 

Fonte: Próprio autor

3.2 O estudo da parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)

Parábola é o conjunto dos pontos de um plano que estão à mesma distância de um foco F e de uma reta diretriz d , com a condição de que $F \notin d$.

Considere uma parábola \wp cujo vértice se encontra na origem de xOy e o foco pertença ao eixo das ordenadas. Sendo o foco $F = (0, \frac{p}{2})$, tem-se que a diretriz é a reta $y = -\frac{p}{2}$. Nessas condições, um ponto qualquer $P = (x, y)$ da parábola \wp tem projeção ortogonal $D = (x, -\frac{p}{2})$ sobre a diretriz d e, pela definição de parábola, associada à métrica d_1 tem-se que $d_1(P, D) = d_1(P, F)$, ou seja:

$$\begin{aligned} |x - x| + \left| y - \left(-\frac{p}{2}\right) \right| &= |x - 0| + \left| y - \frac{p}{2} \right| \\ \left| y + \frac{p}{2} \right| &= |x| + \left| y - \frac{p}{2} \right| \\ |x| &= \left| y + \frac{p}{2} \right| - \left| y - \frac{p}{2} \right| \end{aligned}$$

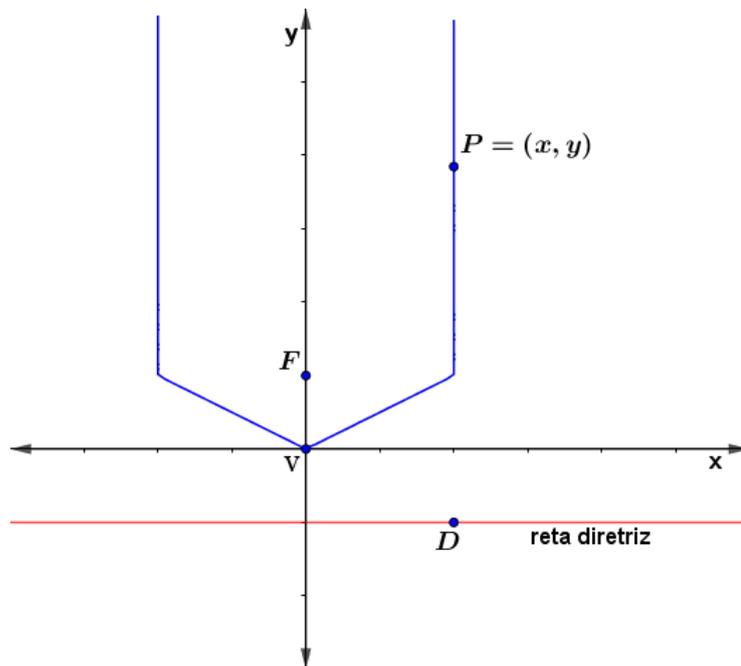
De forma análoga, quando o vértice da parábola coincide com a origem do sistema xOy e o foco pertença ao eixo das abscissas, tem-se os pontos $F = (\frac{p}{2}, 0)$ e para $P(x, y)$

pertencente a parábola \wp a projeção ortogonal de P sobre a reta diretriz d é dada por $D = \left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Nessas condições, tem-se:

$$\begin{aligned}d_1(P, D) &= d_1(P, F) \\ \left|x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right| + |y - y| &= \left|x - \frac{p}{2}\right| + |y - 0| \\ \left|x + \frac{p}{2}\right| &= \left|x - \frac{p}{2}\right| + |y| \\ |y| &= \left|x + \frac{p}{2}\right| - \left|x - \frac{p}{2}\right|\end{aligned}$$

Para a parábola \wp com foco $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e reta diretriz $d: y = -\frac{p}{2}$, a representação geométrica em \mathbb{R}^2 , por meio da métrica d_1 pode ser visualizada na figura 42 a seguir:

Figura 42: Parábola de foco $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e vértice na origem em (\mathbb{R}^2, d_1)

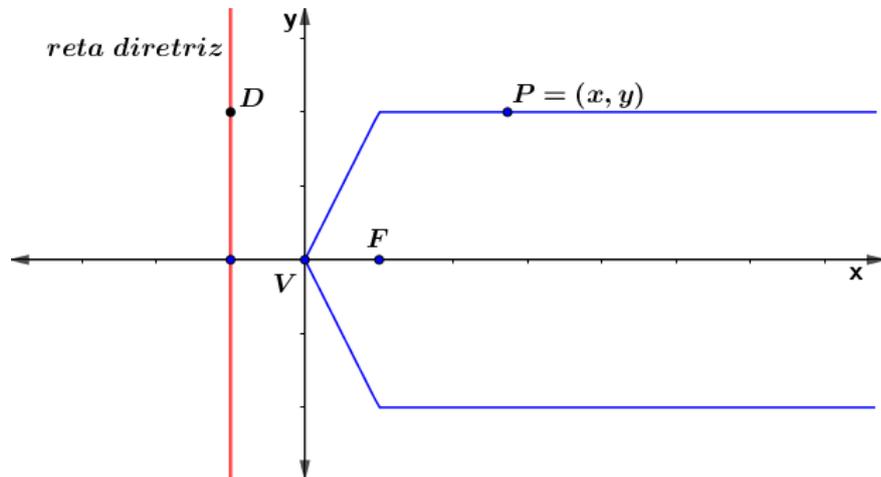


Fonte: Próprio autor

Ao visualizar a figura acima, pode parecer estranho que $d_1(P, F) = d_1(P, D)$ porém, nessa métrica, a distância é encontrada pela soma dos deslocamentos horizontais e verticais, o que justifica a aparente “diferença” ao se analisar os segmentos \overline{PF} e \overline{PD} .

Na figura 43, a seguir, tem-se uma parábola com vértice na origem e foco $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ no eixo das abscissas:

Figure 43: Parábola de foco $F = (\frac{p}{2}, 0)$ e vértice na origem em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

A seguir será dado um exemplo de aplicação, a determinação da equação de uma parábola, com vértice na origem de xOy , conhecida a reta diretriz d :

Exemplo 4: Determinar, em (\mathbb{R}^2, d_1) , a equação da parábola com vértice na origem do sistema coordenado xOy e reta diretriz $x = -2$, além de representar geometricamente esta curva em \mathbb{R}^2 .

Solução: Dado o vértice da Parábola na origem do sistema xOy , tem-se $V = (0,0)$ e a distância de V até a reta diretriz $d: x = -2$ é igual a 2, logo, $\frac{p}{2} = 2$. Desse modo tem-se $F = (2,0)$. Dado um ponto $P = (x, y)$ qualquer da curva, pela definição de parábola tem-se:

$$d_1(P, F) = d_1(P, D)$$

$$|x - 2| + |y - 0| = |x - (-2)| + |y - y|$$

$$|x - 2| + |y| = |x + 2|$$

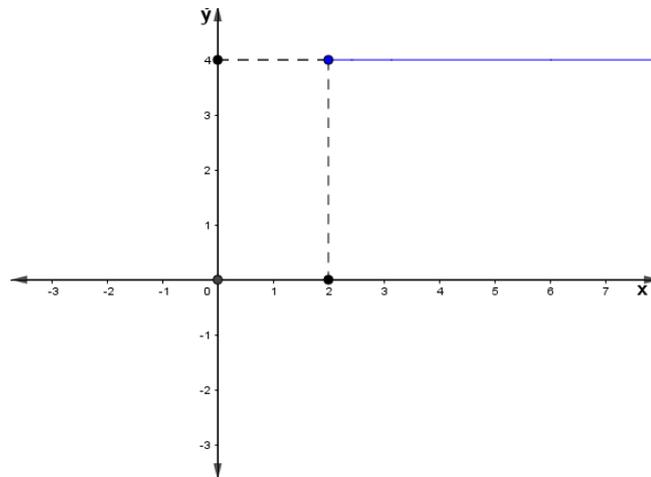
$$|y| = |x + 2| - |x - 2|$$

Como $|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{se } x < -2 \end{cases}$, $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$ e $|y| = \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -y, & \text{se } y < 0 \end{cases}$

Analisando, separadamente, cada condição modular, tem-se:

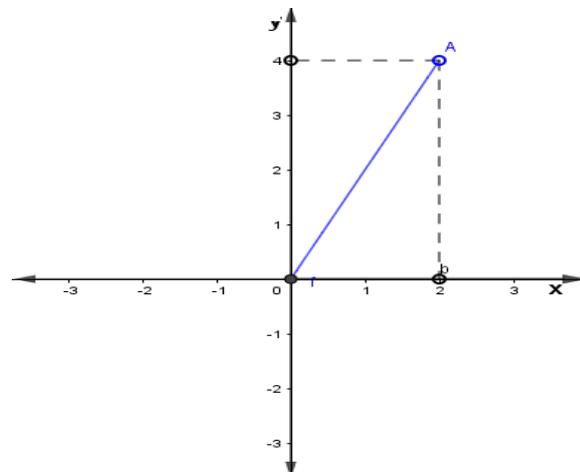
(i) Para $x \geq -2$, $x \geq 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |x - 2| = x + 2 - (x - 2) =$

$y = x + 2 - x + 2 = 4$, o que implica que $y = 4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 44.

Figure 44: Gráfico de \wp para $x \geq 2$ e $y \geq 0$ 

Fonte: Próprio autor

(ii) Para $x \geq -2$, $x < 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - x + 2 = x + 2 - (-x + 2) = x + 2 + x - 2$, o que implica que $y = 2x$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 45.

Figure 45: Gráfico de \wp para $-2 \leq x < 2$ e $y \geq 0$ 

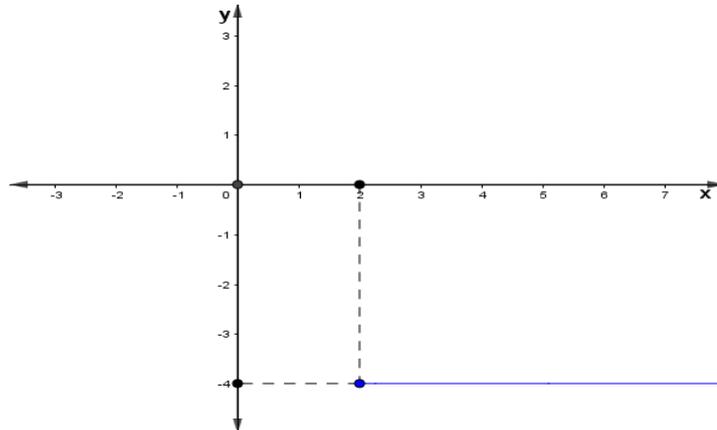
Fonte: Próprio autor

(iii) Para $x < -2$, $x \geq 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |-x + 2| = -x - 2 - (x - 2) = -x - 2 - x + 2$, o que implica que $y = -2x$. Nota-se que, para $x < -2$ e $x \geq 2$ não existe intersecção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para esse caso.

(iv) Para $x < -2$, $x < 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |-x + 2| = -x - 2 - (-x + 2) = -x - 2 + x - 2$, o que implica que $y = -4$ para $x < -2$. Mas, da condição inicial, $y \geq 0$ o que é impossível para a reta $y = -4$. De maneira análoga a anterior, não existe lugar geométrico para esse caso.

(v) Para $x \geq -2$, $x \geq 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |x - 2| = x + 2 - (x - 2) = x + 2 - x + 2 = 4$, o que implica que $-y = 4 \Leftrightarrow y = -4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 46.

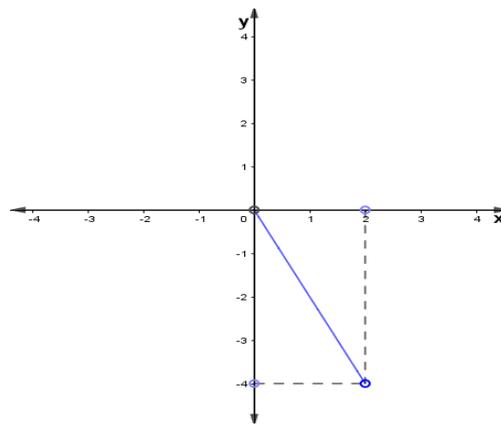
Figure 46: Gráfico de \wp para $x \geq 2$ e $y < 0$



Fonte: Próprio autor

(vi) Para $x \geq -2$, $x < 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |-x + 2| = x + 2 - (-x + 2) = x + 2 + x - 2$, o que implica que $-y = 2x \Leftrightarrow y = -2x$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 47.

Figure 47: Gráfico de \wp para $-2 \leq x < 2$ e $y < 0$



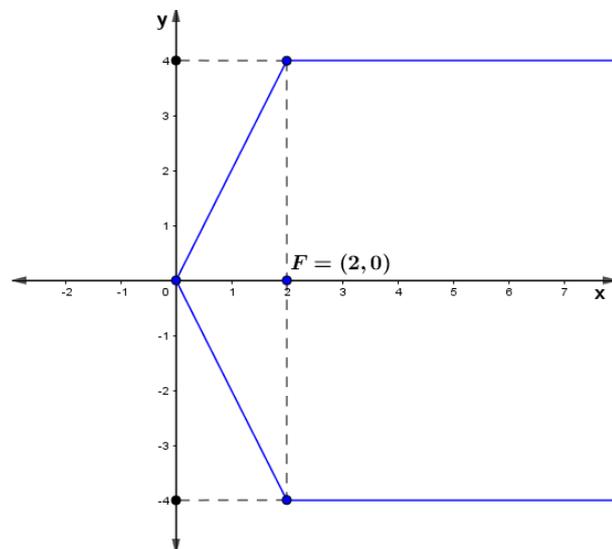
Fonte: Próprio autor

(vii) Para $x < -2$, $x \geq 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |-x - 2| - |x - 2| = -x - 2 - (x - 2) = -x - 2 - x + 2$, o que implica que $-y = -2x \Leftrightarrow y = 2x$. Da mesma forma que em (iii) para $x < -2$ e $x \geq 2$ não existe intersecção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para esse caso.

(viii) Para $x < -2$, $x < 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |-x + 2| = -x - 2 - (-x + 2) = -x - 2 + x - 2$, o que implica que $-y = -4 \Leftrightarrow y = 4$ para $x < -2$. Da mesma forma que em (iv), da condição inicial, $y < 0$ o que é impossível para a reta $y = 4$. De maneira análoga ao anterior, não existe lugar geométrico para esse caso.

Ao serem unidos os segmentos obtidos nas análises modulares (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) da equação da parábola $\wp: |y| = |x + 2| - |x - 2|$, a representação geométrica de P no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) pode ser visualizada na figura 48.

Figura 48: Representação gráfica de \wp em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

3.2.1 O estudo da parábola no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) com vértice fora da origem

Considerando $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola \wp cujo vértice é $V = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e o foco $F = (x_0, y_0 + \frac{p}{2})$, ou seja, o segmento \overline{FV} é paralelo ao eixo das ordenadas, a diretriz, em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$, é a reta $d: y'' = y_0 - \frac{p}{2}$ e a projeção ortogonal de P sobre a diretriz d é o ponto $D = (x', y_0 - \frac{p}{2})$, conforme a figura 49. Note que o vértice V está fora da origem do sistema cartesiano xOy e por isso, conforme visto em 2.2.2.2, utiliza-se um sistema auxiliar de eixos coordenados $x'Vy'$. Desse modo, é possível representar qualquer ponto $P = (x', y')$ de \wp , escrito como coordenadas de $x'Vy'$, como um ponto escrito em coordenadas de xOy , bastando para isso tomar $P = (x - x_0, y - y_0)$.

A equação da parábola da figura 49, em coordenadas do sistema auxiliar $x'Vy'$ é escrita como:

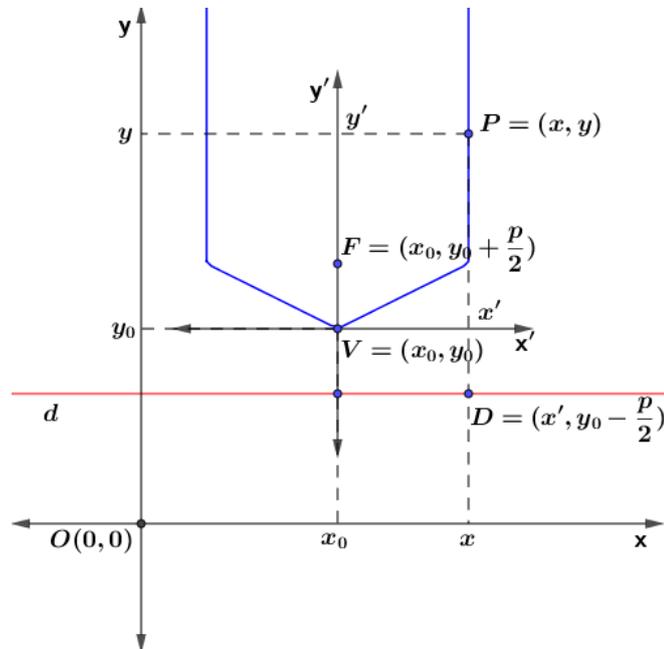
$$|x'| = \left| y' + \frac{p}{2} \right| - \left| y' - \frac{p}{2} \right|$$

A representá-la em coordenadas do sistema cartesiano ortogonal xOy , obtém-se:

$$|x - x_0| = \left| y - y_0 + \frac{p}{2} \right| - \left| y - y_0 - \frac{p}{2} \right|$$

A equação acima apresentada é uma generalização da equação da parábola com reta diretriz perpendicular ao eixo y do sistema xOy , pois, caso o vértice dessa parábola coincida com a origem do sistema cartesiano ortogonal, basta considerar $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Figure 49: Parábola com o vértice fora da origem em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

Caso $P = (x, y)$ seja um ponto qualquer de \wp cujo vértice é $V = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e o foco $F = (x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$, ou seja, o segmento \overline{FV} é paralelo ao eixo das abscissas, a diretriz, em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$, é a reta $d: y'' = x_0 - \frac{p}{2}$ e a projeção ortogonal de P sobre a diretriz d é o ponto $D = (x_0 - \frac{p}{2}, y')$, de maneira análoga à anterior, a equação \wp , representada em coordenadas do sistema auxiliar $x'Vy'$ será dada por:

$$|y'| = \left| x' + \frac{p}{2} \right| - \left| x' - \frac{p}{2} \right|$$

O que, em coordenadas do sistema cartesiano ortogonal xOy será representada por

$$|y - y_0| = \left| x - x_0 + \frac{p}{2} \right| - \left| x - x_0 - \frac{p}{2} \right|.$$

3.3 O estudo da elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)

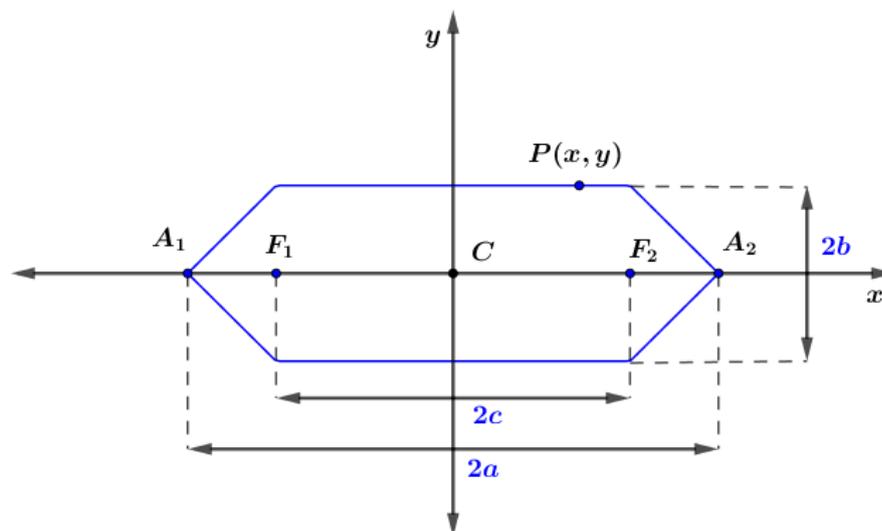
Da geometria euclidiana, elipse ε é o lugar geométrico de um plano onde a soma da distância de um ponto qualquer dessa curva a dois pontos fixos denominados focos, que distam em $2c$, resulta em uma constante $2a > 2c$.

Considerando $P = (x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse ε cujos focos estão posicionados sobre o eixo x das abscissas, a saber, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e vértices $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$, pela definição geométrica de elipse, associada a métrica d_1 em \mathbb{R}^2 , tem-se que:

$$\begin{aligned} d_1(P, F_1) + d_1(P, F_2) &= 2a \\ |x + c| + |y - 0| + |x - c| + |y - 0| &= 2a \\ 2|y| + |x + c| + |x - c| &= 2a \end{aligned}$$

Na figura 50 é apresentada a representação gráfica de uma elipse com seus elementos e suas medidas no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) .

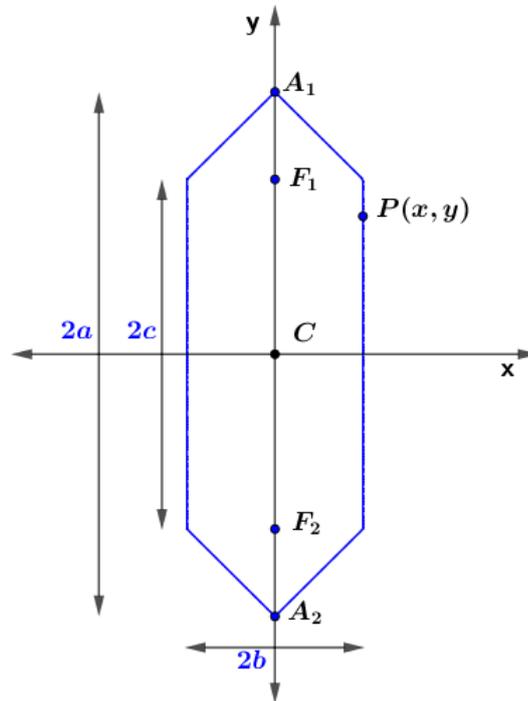
Figure 50: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

Caso os focos da elipse ε estejam posicionados sobre o eixo y das ordenadas, tem-se $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$ e os vértices $A_1 = (0, a)$ e $A_2 = (0, -a)$, conforme a figura 51.

Figure 51: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

Pela definição geométrica de elipse, associada à métrica d_1 em \mathbb{R}^2 , dado um ponto $P = (x, y) \in \varepsilon$, tem-se que equação de ε será:

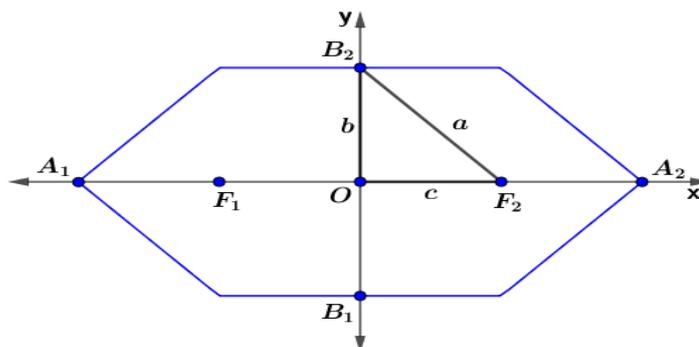
$$d_1(P, F_1) + d_1(P, F_2) = 2a$$

$$|x + 0| + |y - c| + |x - 0| + |y + c| = 2a$$

$$2|x| + |y - c| + |y + c| = 2a$$

Em uma elipse, no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) , verifica-se a relação: $a = b + c$ de acordo com a figura 52:

Figura 52: Relação entre as medidas a , b e c de uma elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

De fato, saindo de B_2 para chegar em F_2 há de se percorrer caminhos horizontais e verticais. E a distância $d_1(B_2, F_2)$ é a soma desses caminhos. Assim $d_1(B_2, F_2) = a = b + c$.

Exemplo 5: Determinar a equação da elipse ε com centro na origem, com focos $F_1 = (-3,0)$ e $F_2 = (3,0)$ e eixo menor igual a 2. Representar geometricamente esta figura no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) .

Solução: Pelas informações acima, tem-se:

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3; 2b = 2 \Rightarrow b = 1.$$

Utilizando a relação $a = b + c$ se obtém $a = 1 + 3 = 4$.

Assim, a equação desta elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) será:

$$2|y| + |x + c| + |x - c| = 2a$$

$$2|y| + |x + 3| + |x - 3| = 8$$

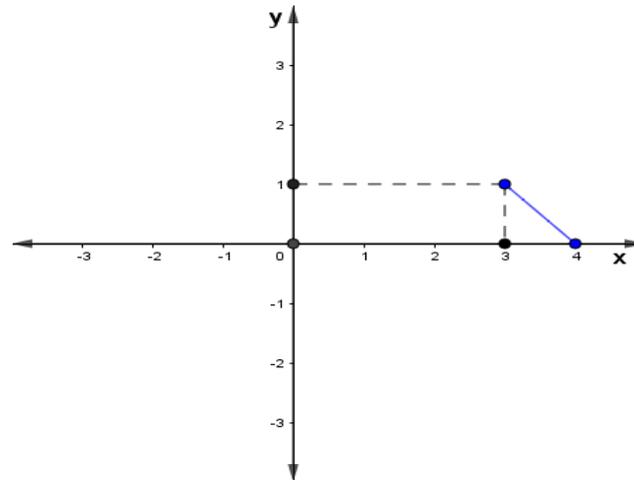
De maneira análoga ao que foi realizado com a circunferência e com a parábola, deve-se analisar todas as condições modulares na equação:

$$i) \quad \text{Como} \quad |x + 3| = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 3, & \text{se } x < -3 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3, & \text{se } x < 3 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -y, & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

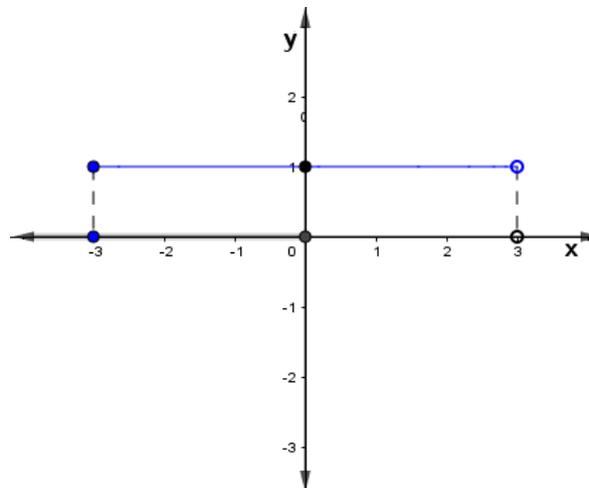
Analisando separadamente cada condição modular, tem-se:

(i) Para $x \geq -3$, $x \geq 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |x + 3| + |x - 3| = 2y + x + 3 + x - 3 = 2y + x + 3 + x - 3 = 2y + 2x = 8$, o que implica que $y = -x + 4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 53.

Figure 53: Gráfico de ε para $x \geq 3$ e $y \geq 0$ 

Fonte: Próprio autor

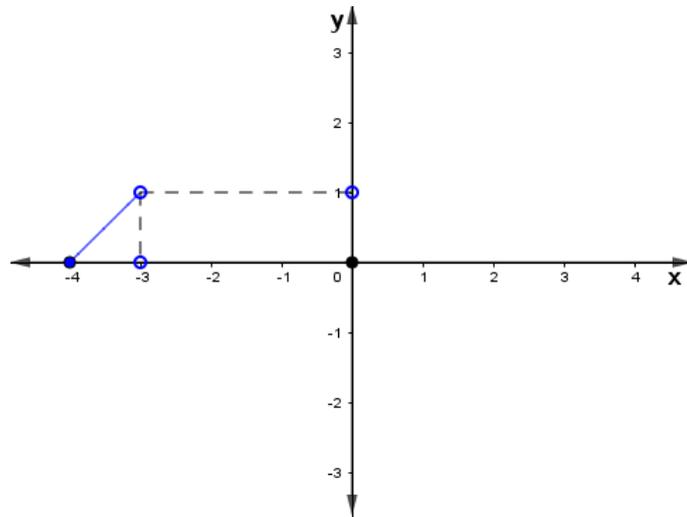
(ii) Para $x \geq -3$, $x < 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |x + 3| + |-x + 3| = 2y + x + 3 + (-x + 3) = 2y + 6 = 8$, o que implica que $y = 1$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 54.

Figura 54: Gráfico de ε para $-3 \leq x < 3$ e $y \geq 0$ 

Fonte: Próprio autor

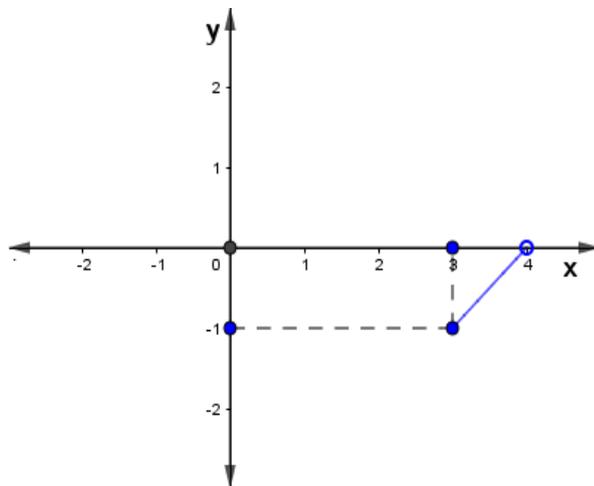
(iii) Para $x < -3$, $x \geq 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |-x - 3| + |x - 3| = 2y - x - 3 + x - 3 = 2y - 6 = 8$, o que implica que $y = 7$. Nota-se que, para $x < -3$ e $x \geq 3$ não existe intersecção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para esse caso.

(iv) Para $x < -3$, $x < 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |-x - 3| + |-x + 3| = 2y - x - 3 - x + 3 = 2y - 2x = 8$, o que implica que $y = x + 4$ para $x < -3$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 55.

Figure 55: Gráfico de ε para $x < -3$ e $y \geq 0$ 

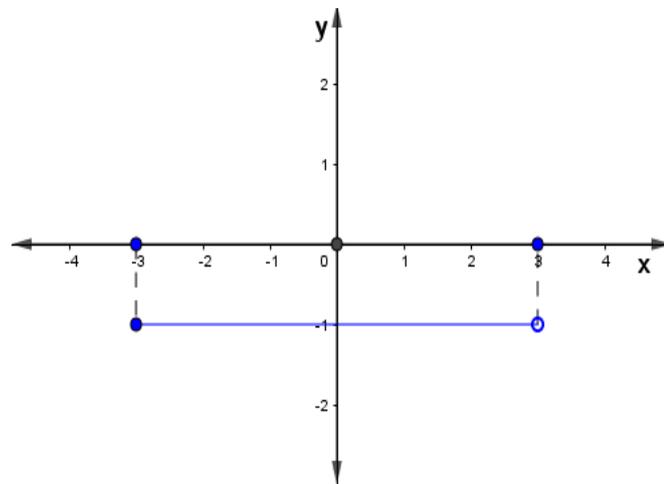
Fonte: Próprio autor

(v) Para $x \geq -3$, $x \geq 3$ e $y < 0$, tem-se $2|y| + |x + 3| + |x - 3| = -2y + x + 3 + x - 3 = -2y + 2x = 8$, o que implica que $-y + x = 4 \Leftrightarrow y = x - 4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 56.

Figura 56: Gráfico de ε para $x \geq 3$ e $y < 0$ 

Fonte: Próprio autor

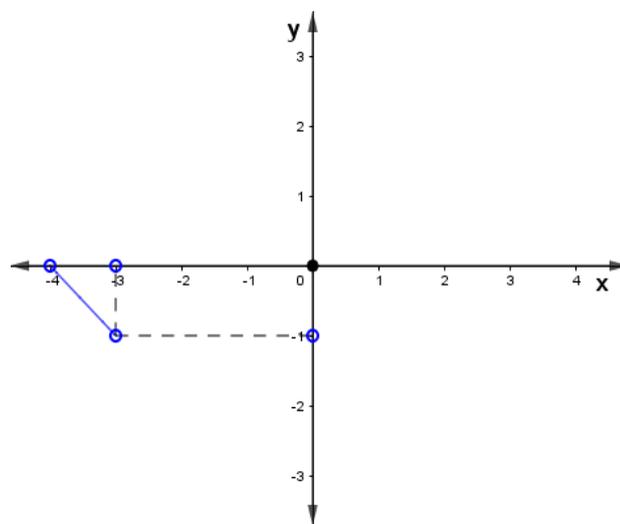
(vi) Para $x \geq -3$, $x < 3$ e $y < 0$, tem-se $2|-y| + |x + 3| + |-x + 3| = -2y + x + 3 - x + 3 = -2y + 6 = 8$, o que implica que $-2y = 2 \Leftrightarrow y = -1$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 57.

Figure 57: Gráfico de ε para $-3 \leq x < 3$ e $y < 0$ 

Fonte: Próprio autor

(vii) Para $x < -3$, $x \geq 3$ e $y < 0$, tem-se $2|-y| + |-x - 3| + |x - 3| = -2y - x - 3 + x - 3 = -2y - 6 = 8$, o que implica que $-2y = 14 \Leftrightarrow y = -7$. Da mesma forma que em (iii) para $x < -3$ e $x \geq 3$ não existe intersecção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para esse caso.

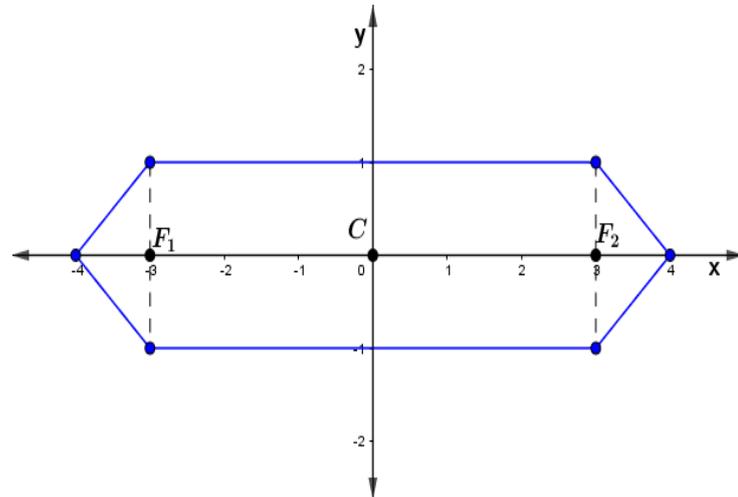
(viii) Para $x < -3$, $x < 3$ e $y < 0$, tem-se $2|-y| + |-x - 3| + |-x + 3| = -2y - x - 3 - x + 3 = -2y - 2x = 8$ o que implica que $-y - x = 8 \Leftrightarrow y = -x - 4$ para $x < -3$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 58.

Figure 58: Gráfico de ε para $x < -3$ e $y < 0$ 

Fonte: Próprio autor

Ao serem unidos os segmentos obtidos nas análises modulares (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) da equação da elipse $\varepsilon: 2|y| + |x + 3| + |x - 3| = 8$, a representação geométrica de ε no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) pode ser visualizada na figura 59.

Figure 59: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1)



3.3.1 Elipse com centro fora da origem

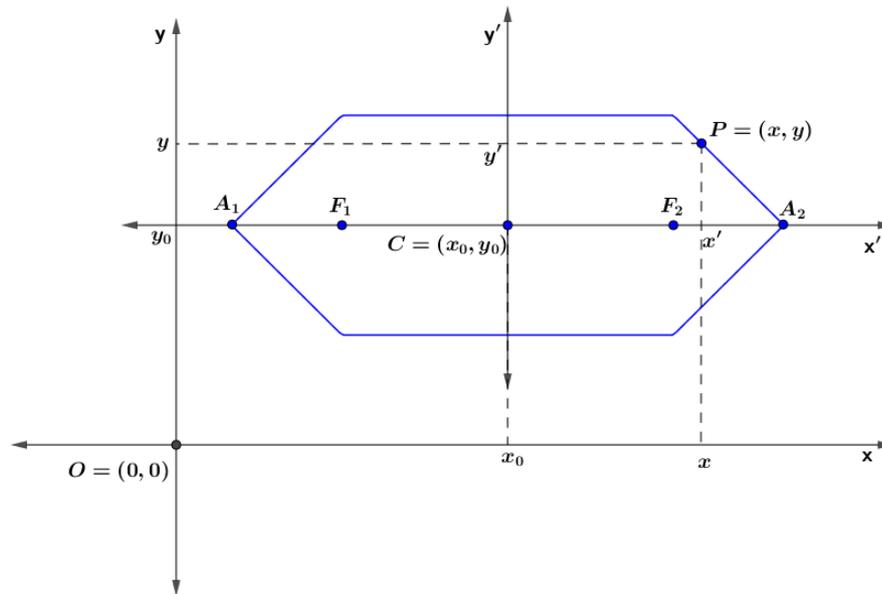
Quando estudada a elipse com centro fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , na métrica euclidiana, visto em 2.3.2, foi verificada a necessidade de se utilizar o processo de translação do centro da figura, reescrevendo sua equação em coordenadas de xOy . Na métrica d_1 , o processo não será diferente. Basta aplicar a definição de elipse agora com os devidos deslocamentos em relação à origem. Assim, por exemplo, considerando uma elipse ε com o eixo focal paralelo ao eixo x das abscissas e centro $C = (x_0, y_0)$ fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , como pode ser visualizado na figura 60, pode-se adotar o ponto $C = (x_0, y_0)$ como a origem de um sistema cartesiano auxiliar e, cada ponto P de ε , representado no sistema auxiliar $x'Cy'$ poderá ser representado também no sistema cartesiano ortogonal xOy como $P = (x - x_0, y - y_0)$.

Nessas condições, a equação de ε , que no sistema $x'Cy'$ é escrita como:

$$2|y'| + |x' + c| + |x' - c| = 2a$$

enquanto que, no sistema cartesiano ortogonal xOy , esta equação é reescrita como:

$$2|y - y_0| + |x - x_0 + c| + |x - x_0 - c| = 2a$$

Figure 60: Representação gráfica de ε em (\mathbb{R}^2, d_1) , com centro fora da origem

Fonte: Próprio autor

De maneira análoga, se ε possuir o eixo focal paralelo ao eixo y das ordenadas e centro $C = (x_0, y_0)$ fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , sua equação, escrita em coordenadas do sistema cartesiano auxiliar será:

$$2|x'| + |y' + c| + |y' - c| = 2a$$

enquanto que, no sistema cartesiano ortogonal xOy , esta equação é reescrita como:

$$2|x - x_0| + |y - y_0 + c| + |y - y_0 - c| = 2a$$

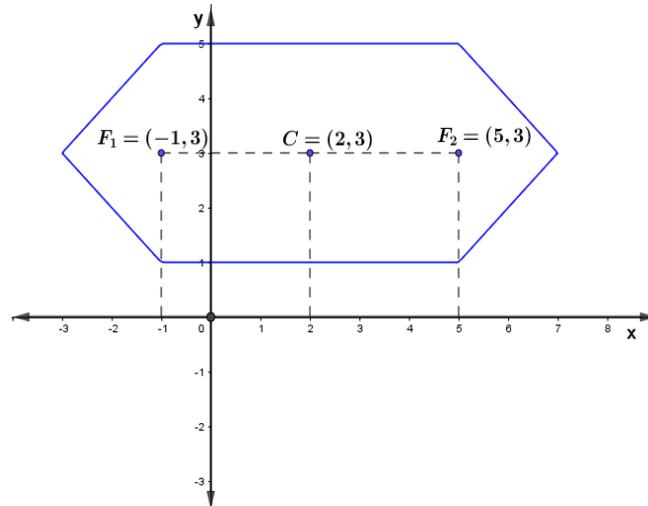
Exemplo 6: Determinar a equação de uma elipse ε de centro $C = (2,3)$, eixo maior igual a 10, paralelo ao eixo das abscissas, e eixo menor igual a 4, no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) e representar geometricamente esta figura em \mathbb{R}^2 .

Solução: Como seu eixo maior vale 10, tem-se que $2a = 10$, o que implica que $a = 5$. Sabe-se ainda que seu eixo menor vale 4, o que implica que $b = 2$. Como $a = b + c$, então, tem-se $c = a - b = 5 - 2 = 3$. Como ε possui centro $C = (2,3)$, fora da origem de xOy , sua equação é dada pelo modelo $2|y - y_c| + |x - x_c + c| + |x - x_c - c| = 2a$. Assim:

$$\varepsilon: 2|y - 3| + |x - 2 + 3| + |x - 2 - 3| = 2 \cdot 5$$

$$\varepsilon: 2|y - 3| + |x + 1| + |x - 5| = 10$$

A representação gráfica de ε no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) é apresentada na figura 61. Note que foram omitidas as análises modulares por questão de praticidade, uma vez que já é conhecida do leitor a necessidade de realizá-las semelhante ao que foi feito no caso da circunferência e da parábola.

Figure 61: Representação gráfica da elipse no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) com centro fora da origem

Fonte: Próprio autor

3.4 O estudo da hipérbole no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)

Da geometria euclidiana, hipérbole \mathcal{H} é o lugar geométrico dos pontos P tais que a diferença, em valor absoluto, das distâncias a F_1 e F_2 chamados de focos da hipérbole, é a constante positiva $2a < 2c$.

Considerando $P = (x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole \mathcal{H} cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano ortogonal e os focos e vértices estão posicionados sobre o eixo x desse sistema, a saber $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (0, a)$; pela definição de hipérbole, associada à métrica d_1 , em \mathbb{R}^2 , tem-se:

$$\begin{aligned} |d_1(P, F_1) - d_1(P, F_2)| &= 2a \\ ||x - c| + |y - 0| - (|x + c| + |y - c|)| &= 2a \\ ||x - c| - |x + c|| &= 2a \end{aligned}$$

Pelas condições modulares, obtém-se:

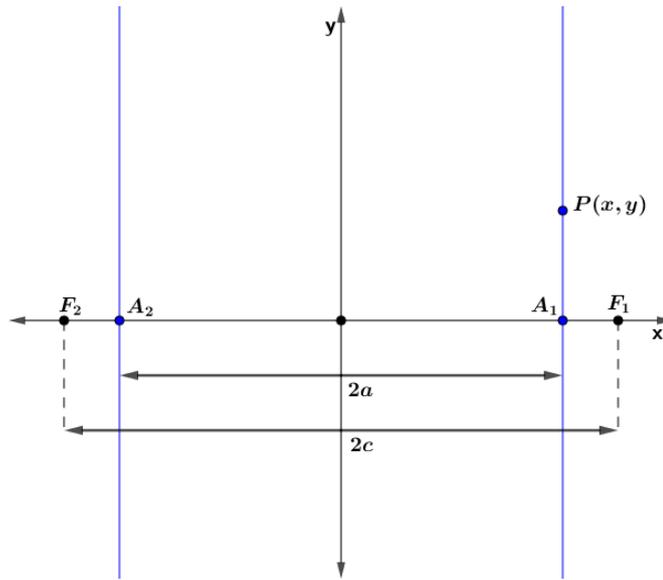
$$|x - c| - |x + c| = 2a$$

ou

$$|x - c| - |x + c| = -2a$$

A hipérbole cuja equação acima foi determinada, no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) , pode ser observada na figura 62.

Figure 62: Hipérbole \mathcal{H} em (\mathbb{R}^2, d_1) , com centro na origem de xOy e focos sobre o eixo x



Fonte: Próprio autor

Caso o centro de \mathcal{H} coincida com a origem do sistema xOy , porém os focos e vértices pertençam ao eixo das ordenadas desse sistema, conforme a figura 63, ou seja, $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, $V_1 = (0, a)$ e $A_2 = (0, -a)$, a determinação da equação da hipérbole \mathcal{H} , nestas circunstâncias, segundo a definição, será:

$$|d_1(P, F_1) - d_1(P, F_2)| = 2a$$

$$||x - 0| + |y - c| - (|x - 0| + |y + c|)| = 2a$$

$$||y - c| - |y + c|| = 2a$$

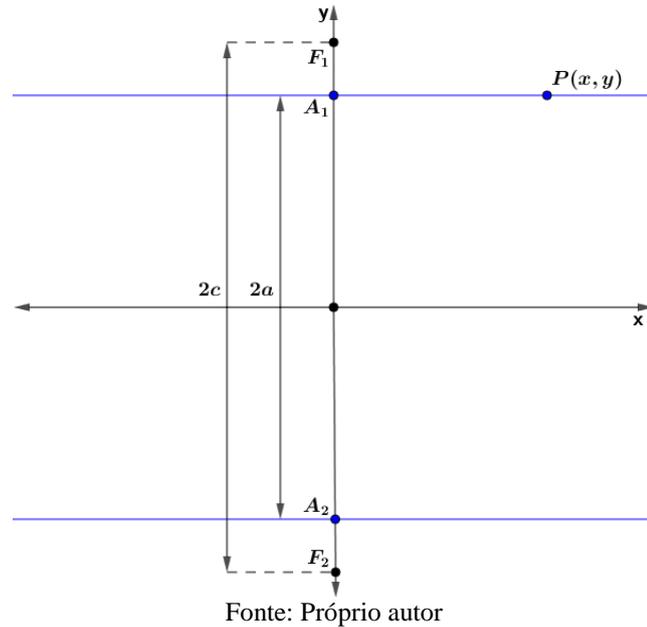
Pelas condições modulares, obtém-se:

$$|y - c| - |y + c| = 2a$$

ou

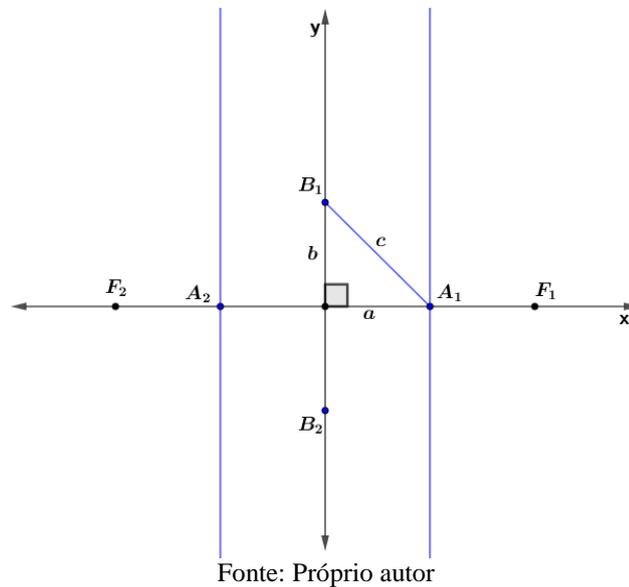
$$|y - c| - |y + c| = -2a$$

Figure 63: Hipérbole \mathcal{H} em (\mathbb{R}^2, d_1) , com centro na origem de xOy e focos sobre o eixo y



Em uma hipérbole \mathcal{H} , no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) , verifica-se a relação $c = a + b$ de acordo com a figura 64:

Figure 64: Relação entre as medidas a , b e c de uma hipérbole \mathcal{H} no espaço (\mathbb{R}^2, d_1)



De fato, sabe-se que determinando a distância de B_1 até A_1 , na métrica d_1 tem-se $d_1(B_1, A_1) = |0 - a| + |b - 0| = a + b$. Desse modo, tem-se $c = a + b$.

Exemplo 8: Determinar a equação de uma hipérbole \mathcal{H} com os focos nos pontos $F_1 = (-5,0)$ e $F_2 = (5,0)$ e eixo real igual a 8 no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) e representar geometricamente esta figura em \mathbb{R}^2 .

Solução: Como seu eixo real mede 8 unidades, então, tem-se $2a = 8$. Como os focos são $F_1 = (-5,0)$, $F_2 = (5,0)$, então, tem-se o centro da hipérbole na origem do sistema xOy e focos pertencentes ao eixo x das ordenadas. Logo, pelo visto anteriormente, a equação dessa hipérbole será dada por:

$$\mathcal{H}: \quad ||x - c| - |x + c|| = 2a$$

$$\mathcal{H}: \quad ||x + 5| - |x - 5|| = 8$$

Considerando as condições modulares:

$$\mathcal{H}: \quad \begin{cases} |x + 5| - |x - 5| = 8 \\ |x + 5| - |x - 5| = -8 \end{cases}$$

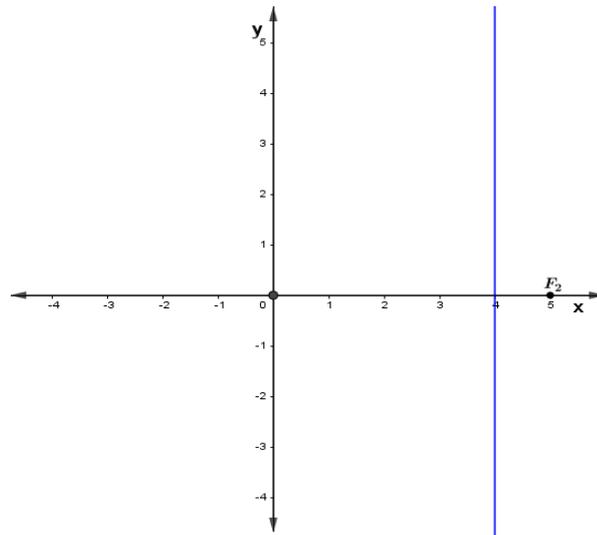
$$\text{Como } |x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{se } x \geq -5 \\ -x - 5, & \text{se } x < -5 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5, & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

Analisando, separadamente, cada condição modular, tem-se:

1ª parte: análises modulares parciais da condição $|x + 5| - |x - 5| = 8$:

(i) Para $x \geq -5$ e $x \geq 5$, tem-se $|x + 5| - |x - 5| = x + 5 - (x - 5) = x + 5 - x + 5 = 10 \neq 8$, o que implica que, nessa condição, não existem valores para x que satisfaçam a igualdade.

(ii) Para $x \geq -5$ e $x < 5$, tem-se $|x + 5| - |-x + 5| = x + 5 - (-x + 5) = x + 5 + x - 5 = 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 65.

Figure 65: Gráfico de \mathcal{H} para $-5 \leq x < 5$ 

Fonte: Próprio autor

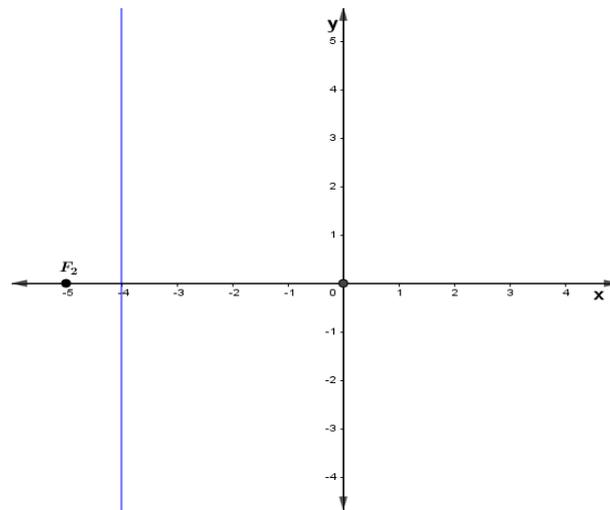
(iii) Para $x < -5$ e $x \geq 5$, tem-se $|-x - 5| - |x - 5| = -x - 5 - (x - 5) = -x - 5 - x + 5 = -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4$. Como não há intersecção para os valores de x , não existe lugar geométrico que satisfaça a igualdade.

(iv) Para $x < -5$ e $x < 5$, tem-se $|-x - 5| - |-x + 5| = -x - 5 - (-x + 5) = -x - 5 + x - 5 = -10 \neq 8$. o que implica que, nessa condição, não existem valores para x que satisfaçam a igualdade.

2ª parte: análises modulares parciais da condição $|x + 5| - |x - 5| = -8$:

(v) Para $x \geq -5$ e $x \geq 5$, tem-se $|x + 5| - |x - 5| = x + 5 - (x - 5) = x + 5 - x + 5 = 10 \neq -8$, o que implica que, nessa condição, não existem valores para x que satisfaçam a igualdade.

(vi) Para $x \geq -5$ e $x < 5$, tem-se $|x + 5| - |-x + 5| = x + 5 - (-x + 5) = x + 5 + x - 5 = 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada na figura 66.

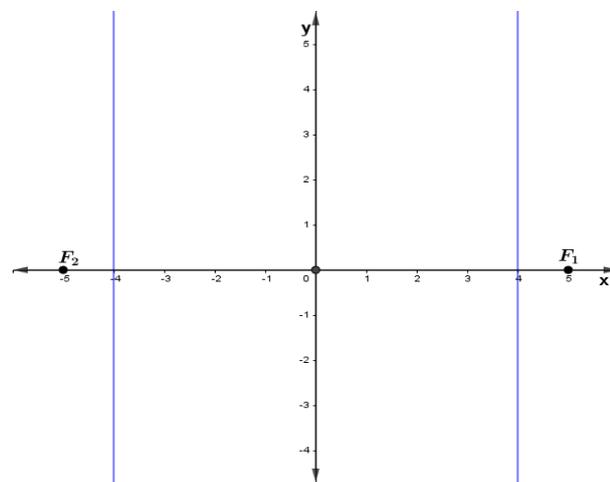
Figure 66: Gráfico de \mathcal{H} para $-5 \leq x < 5$ 

Fonte: Próprio autor

(vii) Para $x < -5$ e $x \geq 5$, tem-se $|-x - 5| - |x - 5| = -x - 5 - (x - 5) = -x - 5 - x + 5 = -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$. Como não há intersecção para os valores de x , não existe lugar geométrico que satisfaça a igualdade.

(viii) Para $x < -5$ e $x < 5$, tem-se $|-x - 5| - |-x + 5| = -x - 5 - (-x + 5) = -x - 5 + x - 5 = -10 \neq 8$. o que implica que, nessa condição, não existem valores para x que satisfaçam a igualdade.

Ao serem representados em \mathbb{R}^2 os resultados obtidos nas análises modulares (ii) e (vi) da equação da hipérbole \mathcal{H} : $||x + 5| - |x - 5|| = 8$, a representação geométrica de \mathcal{H} no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) pode ser visualizada na figura 67.

Figure 67: Representação gráfica de \mathcal{H} em (\mathbb{R}^2, d_1) 

Fonte: Próprio autor

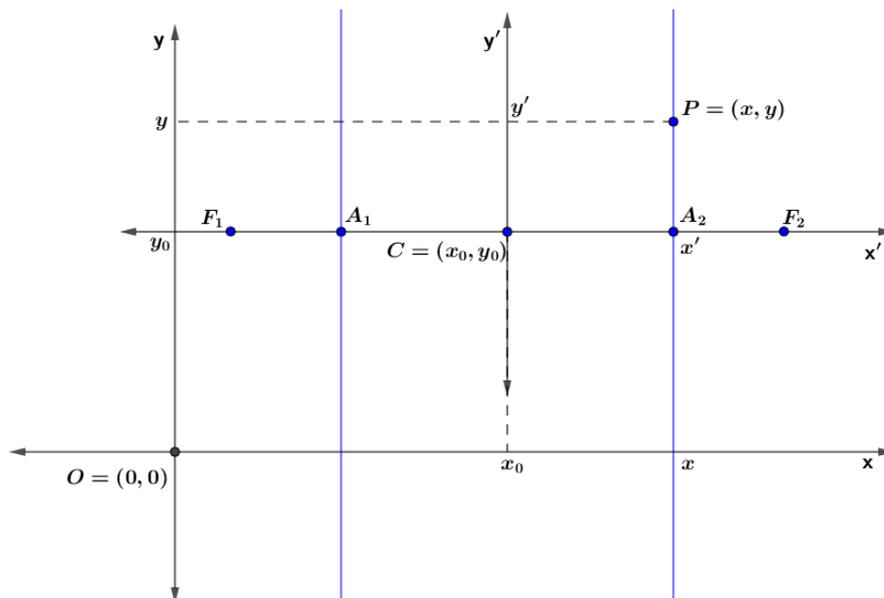
3.4.1 Hipérbole com centro fora da origem

Quando estudada a hipérbole com centro fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , na métrica euclidiana, visto em 2.4.2, verificou-se a possibilidade da utilização de um sistema auxiliar $x'Cy'$, onde, no presente caso, C representa o centro da hipérbole.

No estudo da hipérbole com centro fora da origem de xOy e eixo real paralelo ao eixo Ox ou ao eixo Oy , na métrica d_1 , o processo para a determinação de sua equação, nas condições mencionadas, considerará a aplicação da definição de hipérbole agora com os devidos deslocamentos em relação à origem. Assim, por exemplo, considerando uma hipérbole \mathcal{H} com o eixo real paralelo ao eixo x das abscissas e centro $C = (x_0, y_0)$ fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , como pode ser visualizado na figura 68, pode-se adotar o ponto $C = (x_0, y_0)$ como a origem de um sistema cartesiano auxiliar e, cada ponto P de \mathcal{H} , representado no sistema auxiliar $x'Cy'$ será representado também no sistema cartesiano ortogonal xOy como $P = (x - x_0, y - y_0)$, conforme visto em 2.2.2.2.

Nas condições acima apresentadas, a equação de \mathcal{H} , que no sistema $x'Cy'$ é escrita como $||x' - c| - |x' + c|| = 2a$ poderá ser representada em coordenadas do sistema cartesiano ortogonal xOy como \mathcal{H} : $||x - x_0 - c| - |x - x_0 + c|| = 2a$.

Figure 68: Representação gráfica da hipérbole no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) e centro fora da origem



Fonte: Próprio autor

De maneira análoga, se \mathcal{H} possuir o eixo real paralelo ao eixo y das ordenadas e centro $C = (x_0, y_0)$ fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy , sua equação, escrita

em coordenadas do sistema cartesiano auxiliar $x'Cy'$ será $\mathcal{H}: ||y' - c| - |y' + c|| = 2a$, a qual, transcrita para coordenadas no sistema cartesiano ortogonal xOy passará a ser representada por $\mathcal{H}: ||y - y_0 - c| - |y - y_0 + c|| = 2a$.

Exemplo 9: Determinar a equação da hipérbole \mathcal{H} com centro $C = (2,3)$, eixo real com medida 8, paralelo ao eixo coordenado Ox , e eixo imaginário com medida 2. Representar \mathcal{H} no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) .

Solução: Pelo exposto, \mathcal{H} é uma hipérbole com centro fora da origem do sistema cartesiano ortogonal xOy e eixo real paralelo ao eixo Ox . Desse modo, a equação de \mathcal{H} será dada por $\mathcal{H}: ||x - x_0 - c| - |x - x_0 + c|| = 2a$.

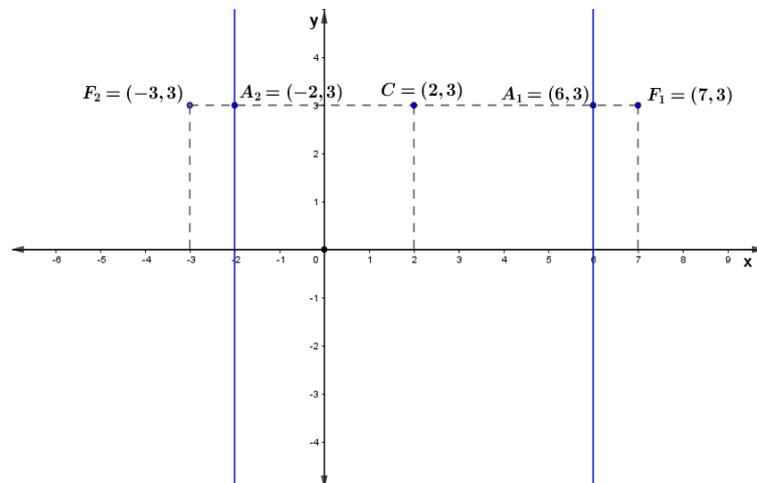
Como o eixo real tem medida 8, então, tem-se $2a = 8$, o que implica que $a = 4$. Sabendo que o eixo imaginário tem medida 2, em outras palavras $2b = 2$, tem-se que $b = 1$. Pela relação $c = a + b$, obtém-se $c = 4 + 1 = 5$. Em decorrência disto, tem-se $F_1 = (7,3)$ e $F_2 = (-3,3)$. Logo, a equação de \mathcal{H} será:

$$\mathcal{H}: ||x - 2 - 5| - |x - 2 + 5|| = 8$$

$$\mathcal{H}: ||x - 7| - |x + 3|| = 8$$

A representação gráfica de \mathcal{H} no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) é apresentada na figura 69. Note que foram omitidas as análises modulares por questão de praticidade, uma vez que já é conhecida do leitor a necessidade de realizá-las semelhante ao que foi feito no exemplo 8.

Figure 69: Representação gráfica da hipérbole no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) e centro fora da origem



Fonte: Próprio autor

4 COMPARAÇÕES DAS CÔNICAS EM (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)

O presente capítulo propõe a comparação entre as cônicas estudadas no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_E) em relação às cônicas estudadas no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) .

Para serem realizadas essas comparações, serão utilizadas, para cada tipo de cônica, as representações simultâneas no plano cartesiano ortogonal \mathbb{R}^2 , com cada curva representada nas métricas d_E e d_1 .

Por questão de praticidade, no caso das parábolas, elipses e hipérbolas, serão consideradas, respectivamente, as retas diretrizes, os eixos focais e os eixos reais, paralelos ao eixo Ox do sistema cartesiano ortogonal.

Em cada uma das cônicas apresentadas, será considerada uma aplicação particular, da qual serão construídas as equações que a representam, nas métricas d_E e d_1 , bem como a representação gráfica em \mathbb{R}^2 .

4.1 Circunferência em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)

Considere uma circunferência Γ de centro $C = (1,2)$, cujo raio tenha a medida de 4 unidades.

Pretende-se obter a equação para Γ em cada uma das métricas apresentadas nesse trabalho:

(i) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_E) :

Dado um ponto qualquer $P = (x, y) \in \Gamma$, pela definição de circunferência em (\mathbb{R}^2, d_E) , a equação de Γ será dada pelo modelo:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Logo, para o caso em questão, a equação será dada por:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

(ii) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) :

Dado um ponto qualquer $P = (x, y) \in \Gamma$, pela definição de circunferência em (\mathbb{R}^2, d_1) , a equação de Γ será dada pelo modelo:

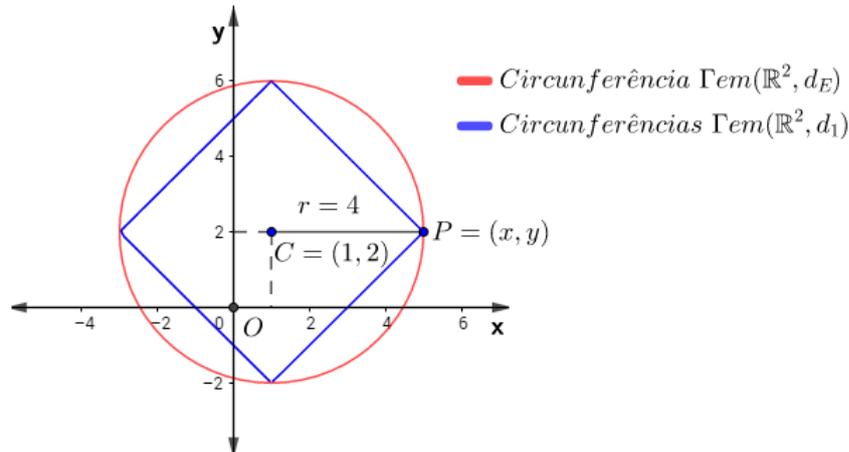
$$|x - x_c| + |y - y_c| = r$$

O qual, substituindo os valores dados, assumirá a representação algébrica:

$$|x - 1| + |y - 2| = 4$$

A representação gráfica em \mathbb{R}^2 das circunferências, em ambas as métricas consideradas, é apresentada na figura 70.

Figura 70: Representação gráfica da circunferência Γ nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

4.2 Parábola em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)

Considere uma parábola \wp de vértice $V = (2, 1)$ e foco $F = (2, 3)$.

Pretende-se obter a equação para \wp em cada uma das métricas apresentadas nesse trabalho:

(i) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_E) :

A distância do foco ao vértice é $d_E(F, V) = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = 1$, logo, $\frac{p}{2} = 1$, o que implica que $p = 2$, tem-se ainda que \overline{FV} é paralelo ao eixo y e o vértice não coincide com a origem do sistema xOy . Nessas condições:

Dado um ponto qualquer $P = (x, y) \in \wp$, pela definição de parábola em (\mathbb{R}^2, d_E) , a equação de \wp será dada pelo modelo:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Logo, para o caso em questão, a equação de \wp será dada por:

$$(x - 2)^2 = 4(y - 1)$$

(ii) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) :

A distância do foco ao vértice é $d_1(F, V) = |2 - 2| + |1 - 2| = 1$, logo, $\frac{p}{2} = 1$, o que implica que $p = 2$, tem-se ainda que \overline{FV} é paralelo ao eixo y e o vértice não coincide com a origem do sistema xOy . Nessas condições:

Dado um ponto qualquer $P = (x, y) \in \wp$, pela definição de parábola em (\mathbb{R}^2, d_1) , a equação de \wp será dada pelo modelo:

$$|y - y_0| = \left| x - x_0 + \frac{p}{2} \right| - \left| x - x_0 - \frac{p}{2} \right|$$

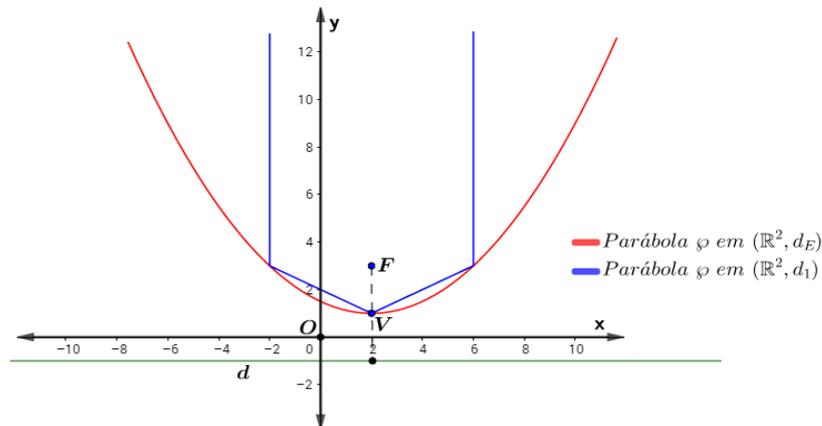
O qual, substituindo os valores dados, assumirá a representação algébrica de \wp da seguinte forma:

$$|y - 1| = |x - 2 + 1| - |x - 2 - 1|$$

$$|y - 1| = |x - 1| - |x - 3|$$

A representação gráfica em \mathbb{R}^2 das parábolas, em ambas as métricas consideradas, é apresentada na figura 71.

Figure 71: Representação gráfica da parábola \wp nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

4.3 Elipse em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)

Considere uma elipse ε de centro $C = (3, 2)$, distância focal de 8 unidades e distância entre os vértices com 10 unidades de medida. Considere ainda que a reta focal seja paralela ao eixo Ox .

Pretende-se obter a equação para ε em cada uma das métricas apresentadas nesse trabalho:

(i) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_E) :

Como a reta focal mede 8 unidades, então, tem-se que $2c = 8$, o que implica que $c = 4$. Sabe-se que o eixo focal é paralelo a Ox , deste modo, os focos possuem mesma ordenada do centro da elipse e em razão de $c = 4$, conclui-se que $F_1 = (3 - 4, 2) = (-1, 2)$ e $F_2 = (3 + 4, 2) = (7, 2)$.

Nas condições apresentadas:

Dado um ponto qualquer $P = (x, y) \in \varepsilon$, pela definição de elipse em (\mathbb{R}^2, d_E) , a equação de ε será dada pelo modelo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Sabe-se que, nessa métrica, vale a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, donde se obtém $b = 3$.

Logo, a equação de ε será:

$$\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y - 2)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

(ii) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) :

Como a reta focal é paralela ao eixo Ox , então a distância focal é a mesma nas duas métricas consideradas, conforme o visto em 1.4, desse modo, em (\mathbb{R}^2, d_1) tem-se $c = 4$. Como $C = (3, 2)$ não coincide com a origem do sistema xOy , então, nessas condições, a equação da elipse ε é dada pelo modelo:

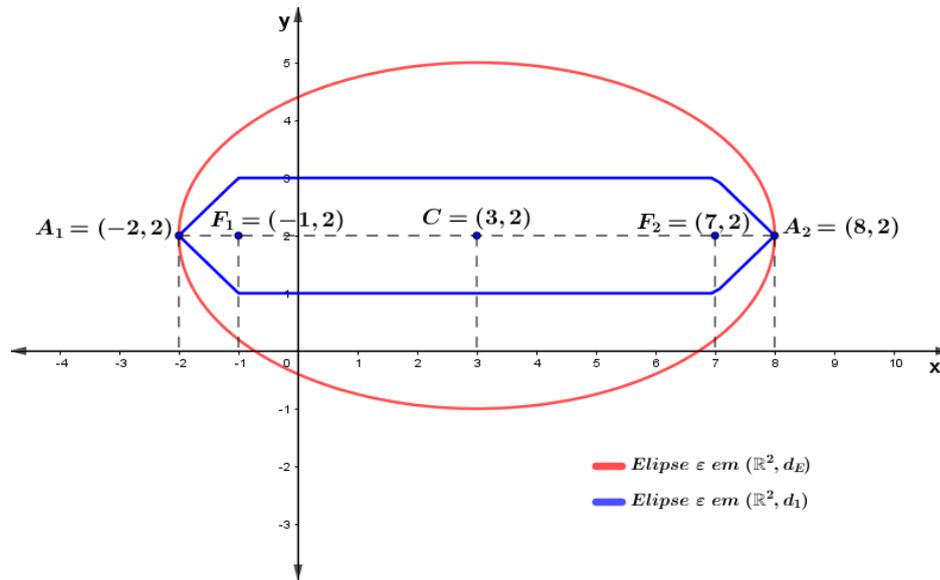
$$2|y - y_0| + |x - x_0 + c| + |x - x_0 - c| = 2a$$

O qual, substituindo os valores dados, assumirá a representação algébrica de ε da seguinte forma:

$$2|y - 2| + |x - 3 + 4| + |x - 3 - 4| = 10$$

$$2|y - 2| + |x + 1| + |x - 7| = 10$$

A representação gráfica em \mathbb{R}^2 das elipses, em ambas as métricas consideradas, é apresentada na figura 72.

Figure 72: Representação gráfica da elipse ε nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1) 

4.4 Hipérbole em (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)

Considere uma hipérbole \mathcal{H} e centro $C = (3, 2)$, eixo real de 8 unidades e distância focal de 12 unidades de medida. Considere ainda que o eixo real seja paralelo ao eixo Ox .

Pretende-se obter a equação para \mathcal{H} em cada uma das métricas apresentadas nesse trabalho:

(i) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_E) :

Como a distância focal é de 12 unidades, então se tem que $2c = 12$, o que implica que $c = 6$. Sabe-se que o eixo real é paralelo a Ox , e mede 8 unidades, ou seja, $2a = 8$, o que implica que $a = 4$. Deste modo, os focos possuem mesma ordenada do centro da hipérbole e em razão de $c = 6$, conclui-se que $F_1 = (3 - 6, 2) = (-3, 2)$ e $F_2 = (3 + 6, 2) = (9, 2)$.

Nas condições apresentadas:

Dado um ponto qualquer $P = (x, y) \in \mathcal{H}$, pela definição de hipérbole em (\mathbb{R}^2, d_E) , a equação de \mathcal{H} será dada pelo modelo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Sabe-se que, nessa métrica, vale a igualdade $c^2 = a^2 + b^2$, donde se obtém $b = 2\sqrt{5}$.

Logo, a equação de \mathcal{H} será:

$$\frac{(x - 3)^2}{4^2} - \frac{(y - 2)^2}{(2\sqrt{5})^2} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

(ii) Considerando o espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) :

Como o eixo real é paralelo ao eixo Ox , então a distância focal e o eixo real têm as mesmas medidas determinadas na métrica d_E , ou seja, medem respectivamente 12 e 8 unidades, donde se obtém $c = 6$ e $a = 4$. O centro, os focos e os vértices possuem também mesmas coordenadas do analisado no item anterior. Além disso, pelo eixo real ser paralelo ao eixo Ox e o centro não coincidir com a origem de xOy , então, nessas condições, a equação da hipérbole \mathcal{H} no espaço métrico (\mathbb{R}^2, d_1) é dada pelo modelo:

$$||x - x_0 - c| - |x - x_0 + c|| = 2a$$

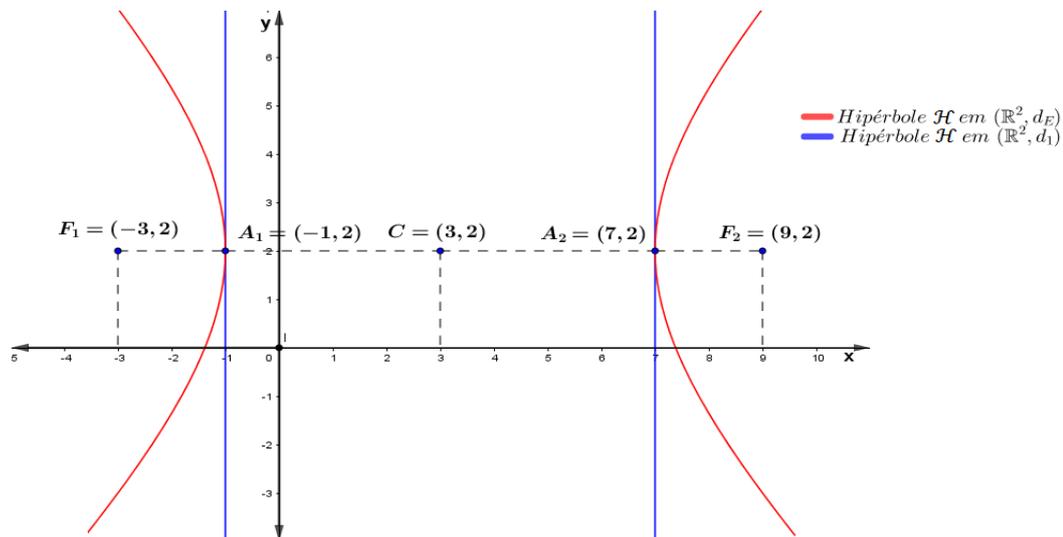
O qual, substituindo os valores dados, assumirá a representação algébrica de \mathcal{H} da seguinte forma:

$$||x - 3 - 6| - |x - 3 + 6|| = 8$$

$$||x - 9| - |x + 3|| = 8$$

A representação gráfica em \mathbb{R}^2 das hipérbolas, em ambas as métricas consideradas, é apresentada na figura 73.

Figura 73: Representação gráfica da hipérbole \mathcal{H} nos espaços (\mathbb{R}^2, d_E) e (\mathbb{R}^2, d_1)



Fonte: Próprio autor

Ao se comparar em um mesmo sistema cartesiano ortogonal, as representações gráficas das cônicas, utilizando as métricas d_E e d_1 e considerando os mesmos parâmetros, é possível perceber as notáveis diferenças geométricas existentes nessas figuras ao se utilizar conceitos distintos de medição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas são as formas de ensino com o propósito de oferecer uma educação de qualidade, eficiente, que contemple os mais diversificados currículos escolares. Tarefa não tão simples que exige um esforço diferenciado do professor, da equipe pedagógica e de toda a comunidade escolar.

Utilizar formas, conceitos e aplicações que se aproximem do cotidiano do aluno pode ser uma boa estratégia para os docentes estimularem a aprendizagem e justificar, em parte, a importância da disciplina de matemática nos currículos escolares.

Ao utilizarmos a métrica d_1 , apesar dela parecer “estranha” aos alunos, em um primeiro momento, com essa forma de medição, podemos visualizar, por exemplo, que os deslocamentos espaciais realizados por eles, no dia a dia, ao irem de casa para a escola, de casa para o trabalho ou para lazer, se aproximam bastante das distâncias calculadas no espaço (\mathbb{R}^2, d_1) , uma vez que o deslocamento entre dois pontos distintos localizados em ruas de cidades cuja área urbana é dividida em quarteirões, ocorrem de maneira similar aos deslocamentos paralelos aos eixos coordenados de um sistema cartesiano, conforme visto neste trabalho. Dessa forma, a utilização da métrica d_1 é bastante prática e corriqueira, embora para muitos soe como uma novidade.

Este trabalho não tem como objetivo substituir os livros e textos que tratam os conteúdos de geometria e quem incluem o das cônicas. A ideia é usá-lo como uma ferramenta a mais para a aprendizagem e motivação dos alunos que vão desenvolver o estudo dessas curvas. Trata-se de um estudo diferenciado, simples e que pode, inclusive, ajudar no entendimento do uso da métrica euclidiana.

Mais do que identificar, reconhecer lugares geométricos, o trabalho trouxe uma proposta pedagógica através da qual o aluno pode enxergar a matemática de outra forma, com uma nova perspectiva e particularidade, que pode, até então, ser desconhecida dele durante a educação básica. O conteúdo trabalhado de uma maneira única, apenas pela metodologia de resolução de exercícios, não tem se mostrado suficiente para que o aluno adquira habilidades e competências ao trabalhar com as cônicas, na métrica euclidiana.

É importante que o docente contextualize cada etapa e apresente o conteúdo de forma clara e objetiva, o que pode ser feito confrontando esses diferentes caminhos. Isso certamente abrirá novas discussões, incentivando os alunos a se apropriarem desses conteúdos e tomarem gosto por estudar essa parte matemática.

Do ponto de vista acadêmico, o presente trabalho pode ser relevante já que possibilita o estudo da métrica d_1 , que comumente não é usado quando estudamos as figuras geométricas em \mathbb{R}^2 . Pode, com isso, motivar e embasar novos estudos, como, por exemplo, a aplicação dessa métrica aos objetos do espaço \mathbb{R}^3 .

Por fim, destaca-se como relevante no presente trabalho, a abstração matemática contida nos conceitos abordados, uma vez que ao serem confrontadas as diferentes formas de medir distâncias e, por consequência, serem construídas e analisadas curvas por meio de métricas distintas, tal abstração poderá promover indagações sobre a existência de outras formas de medir, não abordadas neste trabalho. Também pode surgir, a partir dessas considerações, uma motivação a mais para que os alunos não se furtem de buscar novos caminhos e novas formas de enxergar a matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática** / Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Helena Castro – 3ª ed. – São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

BRASIL, IDEB/INEP. Disponível em: <<http://ideb.inep.gov.br/resultado/>>. Acesso em: 23 nov. 2017.

BRASIL, IDEB/INEP. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/saeb>>. Acesso em: 23 nov. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1999.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

DELGADO, Jorge [et al.]. **Geometria Analítica. Rio de Janeiro**. 1 ed. SBM 2013. Coleção PROFMAT.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa**. São Paulo. 25º ed. Editora Paz e Terra, 1996.

GUSMÃO, Nathan Laskoski et al. **Geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica**. Revista: EMP – Educação, matemática, pesquisa, volume 19, nº2, 2017 – PUC – SP. Disponível em; <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/30307>> Acesso em 24 nov. 2017.

IEZZI, Gelson [et al.]. **Matemática: Ciência e Aplicação**, São Paulo. 2. ed. Editora Saraiva, 2010.

KALEFF, A. M. Nascimento; R. S. – **Atividades Introdutórias às Geometrias não-Euclidianas: o exemplo da geometria do Táxi**. Boletim Gepem, Rio de Janeiro, nº 44, dezembro 2004, 11-42.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**, 5. ed. Rio de Janeiro, IMPA 2017.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e álgebra linear**, 2. ed. Rio de Janeiro, IMPA 2012.

OLIVEIRA, José Adriano dos Santos. **Sobre seções cônicas** – Dissertação de Mestrado PROFMAT – 2015.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo, M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro, SBM, 1ª ed. Coleção PROFMAT, 2012.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica** 2.ed.; São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. 2.ed.; São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.