2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Equações Diofantinas Lineares na Educação Básica

Diogo Geraldo Rios [1]
Ronaldo Ribeiro Alves[2]

Resumo: O presente artigo consiste na apresentação e resolução comentada de quinze situações-problema modeladas por Equações Diofantinas Lineares de duas incógnitas. Tais situações-problema foram retiradas de variados artigos e dissertações de mestrado em Educação Matemática, bem como de livros didáticos dos Ensinos Fundamental e Médio, sendo que as sete primeiras têm sua aplicação indicada para alunos matriculados no sétimo ano (antiga sexta série) do Ensino Fundamental e as demais para alunos da segunda série do Ensino Médio. A estratégia de resolução adotada em cada uma é bastante variada e ultrapassa o método de tentativa e erro, que é usado com muita frequência nesse nível de ensino. Propõe-se fazer o levantamento e apresentar algumas questões que poderão ser trabalhadas em sala de aula pelos professores de Matemática, a fim de abordar o assunto ainda na Educação Básica. Deseja-se ressaltar também a importância dessa abordagem na Educação Básica vir acompanhada de reflexões acerca da existência ou não de soluções e a sua quantidade caso elas existam.

Palavras-chave: Equação Diofantina Linear, situação-problema, ensino de Matemática, Educação Básica.

1 Introdução

São grandes e notórias as dificuldades enfrentadas pelos professores de Matemática que lecionam na Educação Básica, em especial nas escolas públicas brasileiras, tais como, reduzida quantidade de horas/aula em cada turma em relação ao extenso conteúdo a ser lecionado; turma com grande número de alunos; alto índice de reprovação, gerando aversão à disciplina por parte dos alunos; desinteresse e apatia de uma parcela considerável de alunos; pouca dedicação e empenho às atividades dadas em aula, e, sobretudo, àquelas que são destinadas às tarefas escolares; pouco apoio da família dos discentes em se tratando das questões disciplinares de seus filhos. Quanto ao aprendizado, observa-se desde muito cedo grande dificuldade na Aritmética. Muitos alunos chegam ao sexto ano (antiga quinta série) do Ensino Fundamental sem dominar os fatos da tabuada. Sem falar, é claro, da imensa dificuldade em reconhecer

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: riosdiogo@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: ronribal@yahoo.com.br

figuras geométricas planas relativamente simples e compreender conceitos como perímetro, área e volume. Em meio a tantas dificuldades cognitivas, uma, em especial, está diretamente ligada ao processo de ensino-aprendizagem da Álgebra. Segundo Wagner Marcelo Pommer[3], no meio educacional, o ensino da Álgebra ainda constitui-se em grande problemática. Apesar do intensivo trabalho didático com algoritmos, os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio ainda possuem dificuldades e restrições no uso da ferramenta algébrica para o encaminhamento das soluções frente à situação-problema.

Normalmente a Álgebra é apresentada aos alunos do sétimo ano (antiga sexta série) do Ensino Fundamental. E, desde o início, muitos deles já apresentam grande dificuldade na compreensão dos mecanismos da mesma. Os problemas verificados pelos docentes vão desde a dificuldade dos educandos em interpretar situações-problema e expressá-las algebricamente até mesmo na resolução de equações relativamente simples, como as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

O tema Equações Diofantinas Lineares é visto por Sílvio Barbosa de Oliveira[4] como primordial na Educação Básica:

> É fundamental ressaltar que a resolução de problemas de Teoria Elementar dos Números envolve conceitos e métodos aprendidos no Ensino Básico e exigem a interpretação de seus dados. É o caso dos problemas que envolvem o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares. Esse é um assunto importante a ser trabalhado no Ensino Básico por dois motivos: primeiro, os conhecimentos relativos à resolução de equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Segundo, já existem diversas situações-problema que são acessíveis à compreensão do estudante e cujas soluções são facilitadas com o conhecimento dessa "ferramenta" de resolução de problemas. Dessa forma, justifica-se a presença do tema "equações diofantinas lineares" no Ensino Básico. (OLIVEIRA, S. B. de, 2006, p. 28).

Alguns estudos recentes apontam que pouca ou quase nenhuma atenção vem sendo dada às Equações Diofantinas Lineares na Educação Básica. Em sua dissertação de mestrado, OLIVEIRA (2006), após investigar se as Equações Diofantinas Lineares são consideradas um objeto de ensino nas propostas curriculares oficiais relativas ao Ensino Médio, diz que:

> Concluo, portanto, que não há qualquer referência ao objeto do saber "equações diofantinas lineares" feita tanto nos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) como nos PCN+ (Parâmetros Curriculares Nacionais "Mais"), ou seja, esse assunto não é considerado um objeto de ensino pelos autores desses documentos. (OLIVEIRA, S. B. de, 2006, p. 91).

Ao investigar se as Equações Diofantinas Lineares são consideradas um objeto de ensino em livros do Ensino Médio, o autor utiliza duas coleções, a saber: a coleção "Matemática: Ciência e Aplicações" da Atual Editora, cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida e a coleção "Matemática" da Editora Ática, cujo autor é Luiz Roberto Dante. A esse respeito, ele conclui que "... o objeto do saber

[3]Wagner Marcelo Pommer é mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2008) e doutor na Área de Educação pela Faculdade de Educação da USP (Campus de São Paulo) (2012). Tem experiência na área de Matemática com ênfase em Teoria Elementar dos Números e Matemática Discreta, Equação Diofantina Linear, Frações Contínuas e Números Irracionais.

[4]Sílvio Barbosa de Oliveira é mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2006). Tem experiência na área de Matemática com ênfase em Teoria dos Números, atuando principalmente nos seguintes temas: livro didático, equações diofantinas lineares, ensino médio, teoria elementar dos números e educação algébrica.

'equações diofantinas lineares' não é considerado objeto de ensino pelos autores das duas coleções analisadas".

Após essas duas conclusões, Sílvio Barbosa de Oliveira faz apontamento extremamente importante para os professores de Matemática que lecionam na Educação Básica:

> Dessa forma, dada a importância desse objeto do saber, é alarmante a pouca atenção que se tem sido dispensada pelas propostas curriculares oficiais e também pelos livros didáticos de Matemática para explorar essas potencialidades na Educação Básica. (OLIVEIRA, S. B. de, 2006, p. 93).

Nesse sentido, levando em consideração a pouca atenção que está sendo dada às Equações Diofantinas Lineares, propõe-se no presente trabalho fazer o levantamento e apresentar algumas questões que poderão ser trabalhadas em sala de aula pelos professores de Matemática, a fim de abordar o assunto ainda na Educação Básica. O que se propõe não é, obviamente, apresentar o conteúdo Equações Diofantinas Lineares com o rigor que deve ser apresentado no Ensino Superior. Contudo, deseja-se mostrar que tal conteúdo poderá ser trabalhado ainda na Educação Básica, acompanhado de reflexões acerca da existência ou não de soluções e a sua quantidade caso elas existam. Ultrapassando assim a técnica de tentativas e erros que normalmente é recomendada pelos livros didáticos e adotada pela maior parte dos professores para a resolução dessas equações nesse nível de ensino.

Para resolver as questões levar-se-á em conta, muitas vezes, um raciocínio que vai além da mera tentativa e erro. Embora esse raciocínio continue, em algumas situações, mantendo algumas práticas associadas ao método de tentativa e erro, é importante ressaltar que se trata de um processo que privilegia as restrições do domínio antes de partir para qualquer tentativa. Não se trata do que poderia se chamar de "um tiro no escuro", ou seja, tentativa e erro com valores aleatórios sem nenhum critério e sem nenhuma visão do contexto no qual a situação-problema está inserida.

2 Resolução de problemas e contextualização

Serão apresentadas algumas sugestões de atividades com o objetivo de aprofundar um pouco mais os conhecimentos sobre as Equações Diofantinas Lineares ainda no Ensino Básico. Tais atividades consistem na resolução de problemas. A opção pela resolução de problemas deve-se à concepção de que

> Com a prática da resolução de problemas nas aulas de Matemática, os alunos têm a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados. Isso porque, além de contextualizar os conteúdos estudados, por levarem os alunos a aplicar e a entender a utilidade do que aprenderam, os problemas desafiam os alunos a utilizar o raciocínio, a lógica, o cálculo mental, a estimativa, ou seja, todos os seus conhecimentos e habilidades prévios na busca de uma resolução. (GIOVANNI JÚNIOR & CASTRUCCI, 2009, p. 10).

Nessas situações-problema pretende-se priorizar situações mais próximas do dia-a-dia do aluno por acreditar-se na valiosa contribuição que a contextualização tem a oferecer no processo de ensino-aprendizagem em Matemática:

> Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com os temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como a fazer conexões dentro da própria Matemática. (DANTE, 2010, p. 16).

A exemplo de COSTA (2007), adota-se neste artigo a definição de Equação Diofantina dada por COURANT e ROBBINS:

> Uma equação diofantina é uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras. Uma equação desse tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções. (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 59).

As equações do primeiro grau com duas incógnitas são apresentadas aos alunos do sétimo ano (antiga sexta série) do Ensino Fundamental. Nesse momento, muitos autores de livros didáticos aproveitam para informar aos alunos que uma equação do primeiro grau com duas incógnitas tem infinitas soluções e que cada solução da equação é um par ordenado de números.

Quanto às soluções, ensina-se que as soluções de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas podem ser encontradas atribuindo-se valores para a incógnita x (ou para a incógnita y) e, em seguida, calculando-se o valor da outra incógnita.

Dessa forma, por exemplo, para encontrar soluções da equação

$$2x + 3y = 18$$

o aluno deverá escolher valores para x, substituí-lo na equação, ficando com uma equação do primeiro grau com uma incógnita (y). Resolvendo essa equação, ele encontrará o valor de y correspondente a esse x escolhido.

- Para $x = 5$, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 + 3y &= 18 \\ 10 + 3y &= 18 \\ 3y &= 18 - 10 \\ 3y &= 8 \\ y &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Logo, o par ordenado $(5, \frac{8}{3})$ é uma das soluções dessa equação.

- Para $x = -\frac{2}{5}$, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-\frac{2}{5}) + 3y &= 18 \\ -\frac{4}{5} + 3y &= 18 \\ 3y &= 18 + \frac{4}{5} \\ \frac{15y}{5} &= \frac{90+4}{5} \\ 15y &= 94 \\ y &= \frac{94}{15} \end{aligned}$$

Logo, o par ordenado $(-\frac{2}{5}, \frac{94}{15})$ também é uma das soluções dessa equação.

Como é dada ao aluno a possibilidade de escolha de uma das incógnitas, é evidente que a maioria deles irá escolher um número natural. Tal atitude justifica-se pela facilidade em operar com números naturais e pela considerável dificuldade que os alunos de sétimo ano apresentam em operar com números racionais fracionários e decimais.

São comuns, nessa etapa, exercícios onde deseja-se saber se um dado par ordenado é ou não solução de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas. Por exemplo, verificar se o par ordenado $(-\frac{3}{4}, 8)$ é solução da equação $8x + 3y = 18$. Exercícios como este, apesar de serem desprovidos de contexto e de não terem um caráter essencialmente prático, podem ser úteis para o professor verificar o nível de intimidade de seu aluno com as operações em $\mathbb{Q}$. Além disso, pode-se verificar se o aluno compreendeu bem o significado de uma equação uma vez que, após substituir as incógnitas, o aluno irá inspecionar se chegou a uma sentença verdadeira ou falsa.

Dá-se mais atenção ao conceito de par ordenado que à procura das soluções da equação. Quase não há contextualização nesse momento. Os exercícios propostos são mais diretos e mecânicos. Isso porque a preocupação está voltada para os sistemas de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas. Somente aí as situações-problema são mais frequentes e os exercícios são mais contextualizados. São comuns situações-problema envolvendo animais bípedes e quadrúpedes em sítios, zoológicos e fazendas; motocicletas e carros em estacionamentos e concessionárias. Tais exercícios até apresentam um caráter prático conseguindo atrair a atenção de parte dos alunos. Contudo, o ideal seria que esse caráter prático fosse apresentado ainda antes. Isso evitaria que muitos alunos já tivessem perdido o interesse e o entusiasmo pelas aulas de Matemática ao iniciar o estudo dos sistemas. Dessa forma, cabe ao professor, quando abordar as equações do primeiro grau com duas incógnitas, apresentar aos alunos situações-problema que possam desafiá-los, estimulando-os a procurar, dentre as soluções (já que são infinitas), aquela ou aquelas que são mais adequadas àquele contexto. Apenas encontrar a solução não é suficiente. É necessário, além disso, ter condições de fazer uma análise crítica da mesma.

3 Sugestões de situações-problema para o sétimo ano do Ensino Fundamental

As situações-problema a seguir, retiradas de livros didáticos e artigos, serão acompanhadas de sugestões e dicas de resolução a fim de dar subsídios e, sobretudo, servir de incentivo para que os professores abordem as Equações Diofantinas Lineares ainda no Ensino Fundamental. Nelas estará presente o caso mais simples de Equações Diofantinas Lineares que é a equação algébrica com duas incógnitas,

$$\mathbf{ax + by = c}$$

onde **a**, **b** e **c** são inteiros dados, e as soluções **x** e **y** procuradas também são números inteiros. É importante ficar claro que a forma adotada para resolver cada situação-problema não é única. É apenas um caminho, dentre vários outros possíveis.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1: O problema dos aviões. Para agrupar 13 aviões em filas de 3 ou de 5, quantas filas serão formadas de cada tipo? (LA ROCQUE & PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Esse problema foi proposto por Gilda La Rocque e João Bosco Pitombeira em um artigo confeccionado a partir de atividades realizadas com professores do Ensino Médio do Rio de Janeiro. Segundo eles é um problema que pode desde muito cedo ser apresentado às crianças.

Poderá ser trabalhado ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental desde que as crianças já saibam realizar contagem. Paralelamente, o professor poderá desenvolver noções de conjuntos. Assim, numa atividade com material concreto, as crianças poderão ser desafiadas a dispor os 13 objetos (que estarão simbolizando os aviões) em filas de 3 e de 5.

Com os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, lança-se mão dos conhecimentos já adquiridos de Álgebra e forma-se a equação do primeiro grau com duas incógnitas:

$$3x + 5y = 13$$

onde: x representa a quantidade de filas com 3 aviões cada e y representa a quantidade de filas com 5 aviões cada. Sem muita dificuldade chegarão à conclusão que, para x e y inteiros e positivos, a equação apresenta uma única solução, a saber: $x = 1$ e $y = 2$.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: Mercedes vai tirar R\$ 50,00 num caixa eletrônico que tem notas de R\$ 5,00 e de R\$ 10,00. Quantas notas de cada tipo ela vai receber? (GUELLI, 2005, p.166).

Primeiramente é necessário formar uma equação com duas incógnitas (x e y), onde x representará o número de notas de R\$ 10,00 e y, o número de notas de R\$ 5,00. Assim, a equação formada será

$$10x + 5y = 50$$

É importante um esforço do professor em deixar claro para o aluno que x e y, no contexto dessa situação-problema, representam números inteiros não negativos. Além disso, é importante também que o aluno perceba que $x < 6$ (pois 6 notas de R$ 10,00 totalizam R$ 60,00, o que já ultrapassa o valor que Mercedes deseja tirar no caixa eletrônico). Feita essa observação fica mais fácil resolver o problema proposto, ainda que o método empregado seja o de tentativa e erro. É importante mencionar que, apesar de ainda ser sugerido o método de tentativa e erro nessa etapa, existe uma restrição sobre o domínio, ou seja, detecta-se uma quantidade finita de valores para x.

Resta agora atribuir à incógnita x um dos valores do conjunto finito $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e calcular o valor de y correspondente não deixando de ter em mente que somente y natural atende ao contexto.

Assim, poderemos construir a tabela:

x	$10x + 5y = 50$	y
0	$10 \cdot 0 + 5 \cdot y = 50$	10
1	$10 \cdot 1 + 5 \cdot y = 50$	8
2	$10 \cdot 2 + 5 \cdot y = 50$	6
3	$10 \cdot 3 + 5 \cdot y = 50$	4
4	$10 \cdot 4 + 5 \cdot y = 50$	2
5	$10 \cdot 5 + 5 \cdot y = 50$	0

Logo, Mercedes poderá receber: nenhuma nota de R$ 10,00 e 10 notas de R$ 5,00 ou uma nota de R$ 10,00 e 8 notas de R$ 5,00 ou duas notas de R$ 10,00 e seis notas de R$ 5,00 ou três notas de R$ 10,00 e quatro notas de R$ 5,00 ou quatro notas de R$ 10,00 e duas notas de R$ 5,00 ou cinco notas de R$ 10,00 e nenhuma nota de R$ 5,00.

O emprego de problemas envolvendo unidades monetárias constitui uma estratégia pedagógica muito eficiente. Afinal, o dinheiro faz parte do dia-a-dia do homem e desde muito cedo as crianças já o conhecem.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3: O problema das quadras. Quantas quadras de basquete e quantas de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos? (LA ROCQUE & PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Diante da reflexão de uma Equação Diofantina Linear de duas incógnitas ter ou não soluções inteiras, deve-se apresentar aos alunos o resultado do seguinte teorema: **"A Equação Diofantina Linear ax + by = c tem solução inteira se, e somente se, o máximo divisor comum de a e b dividir c"**. Não cabe nesse momento mostrar aos alunos do sétimo ano a demonstração formal de tal teorema, apenas deixar claro que a aplicação do resultado desse teorema é de fundamental importância para saber se a equação tem solução inteira. A aplicação do resultado do teorema é fácil de ser executada pelos alunos, uma vez que o conteúdo máximo divisor comum (m.d.c.) faz parte do programa de Matemática a ser trabalhado no sexto ano do Ensino Fundamental. Talvez possa haver, é claro, a necessidade de relembrar rapidamente tal conteúdo com eles.

Inicialmente deve-se informar aos alunos que o basquete e o vôlei são praticados, respectivamente, por duas equipes com 5 e 6 jogadores em cada uma. Levando-se em conta as informações acima, pode-se equacionar os elementos informados na primeira pergunta da situação-problema e obter-se a equação:

$$10x + 12y = 80$$

onde x representa a quantidade de quadras ocupadas com jogadores de basquete e y a quantidade ocupada com jogadores de vôlei. Após a simplificação chega-se à equação:

$$5x + 6y \;=\; 40 \tag{1}$$

Pelo teorema, como $m.d.c.(5, 6) = 1$ divide 40, então tem-se que a equação (1) tem solução inteira.

Note antes de tudo que x e y são números inteiros não negativos. Além disso, $y < 7$. Isolando-se x na equação, obtém-se:

$$x = 8 - \frac{6y}{5}$$

Para que x seja inteiro é preciso que $\frac{6y}{5}$ também seja, isto é, é necessário que $6y$ seja múltiplo de 5. Somente $y = 0$ e $y = 5$ atendem à essa condição. Logo, essa situação-problema tem duas soluções: $(8, 0)$ e $(2, 5)$. Em outras palavras: São exatamente 8 quadras de basquete ou 2 quadras de basquete e 5 quadras de vôlei para que 80 alunos joguem simultaneamente.

Para responder à segunda pergunta, onde a equação correspondente é:

$$10x + 12y = 77$$

basta levar-se em consideração que $m.d.c.(10, 12) = 2$. E como 2 não é um divisor de 77, conclui-se que a referida equação não terá solução inteira. Portanto, é impossível encontrar uma quantidade de quadras de basquete e de vôlei para 77 alunos jogarem simultaneamente.

Ainda nesse artigo, os autores informam que, ao propor situações-problema como as apresentadas anteriormente, a escolha dos valores dos coeficientes a, b e c da Equação Diofantina Linear $ax + by = c$ é importante não apenas para que o aluno encontre maior ou menor dificuldade nos cálculos. Tal escolha é decisiva para a existência de uma, várias ou nenhuma solução.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4: Um colecionador vai comprar com R$ 50,00 dois tipos de selos. Um custa R$ 2,00 e o outro R$ 2,50. Quantos selos de cada tipo ele pode comprar se deve adquirir ao menos um selo de cada tipo? (GUELLI, 2005, p. 167).

De início deve-se equacionar a situação-problema obtendo-se a equação

$$2 \cdot a + 2,5 \cdot b \;=\; 50 \tag{2}$$

onde a representa a quantidade de selos de custam R$ 2,00 e b representa a quantidade de selos que custam R$ 2,50. Antes de se preocupar em resolver a equação, o professor deve chamar a atenção a respeito da restrição presente na pergunta da situação-problema: “Quantos selos de cada tipo ele pode comprar se deve adquirir ao menos um selo de cada tipo?”. É a partir da devida atenção e cuidado com essa pergunta, que os alunos do sétimo ano perceberão que somente as soluções inteiras positivas deverão ser levadas em consideração. Afinal, não faz sentido falar em -2 selos ou até mesmo em 4,5 selos. Além do mais, a expressão “ao menos um” garante a exclusão imediata de se pensar na possibilidade de se comprar R$ 50,00 em selos de um só tipo.

A partir da equação

$$4a + 5b \;=\; 100 \tag{3}$$

que é equivalente à equação (2) procura-se as possíveis soluções para a situação-problema. Lembrando-se que $m.d.c.(4,5) = 1$ e 1 é divisor de 100 tem-se logo de início a valiosa informação de que a equação que modela o problema tem solução inteira. Para encontrá-la(s) pode-se, dentre outras possibilidades, observar que $b < 20$. Dessa forma, os possíveis valores de b pertencem ao conjunto finito $\{1, 2, 3, ..., 19\}$.

Isolando-se a incógnita a na equação(3) tem-se:

$$a = 25 - \frac{5b}{4}$$

Como a é um número inteiro, tem-se que $\frac{5b}{4}$ também precisa ser inteiro. Isso ocorrerá somente para valores de b que são múltiplos de 4, uma vez que $m.d.c.(5,4) = 1$.

Portanto, somente os valores 4, 8, 12 e 16 de b terão como correspondentes um valor inteiro de a. Substituindo-se esses valores de b na equação (3), encontra-se 20, 15, 10, e 5 para valores de a, respectivamente.

Assim, essa equação conta com quatro soluções distintas: $(5,16), (10,12), (15,8)$ e $(20,4)$. O colecionador pode comprar 5 selos de R$ 2,00 e 16 selos de R$ 2,50 ou 10 selos de R$ 2,00 e 12 selos de R$ 2,50 ou 15 selos de R$ 2,00 e 8 selos de R$ 2,50 ou 20 selos de R$ 2,00 e 4 selos de R$ 2,50.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 5: Tenho dois tipos de notas: de R$ 1,00 e de R$ 5,00. Quantas notas eu preciso usar para formar R$ 20,00? (GUELLI, 2005, p.167).

Equacionando-se a situação-problema acima tem-se a equação

$$x + 5y = 20 \tag{4}$$

onde a incógnita x representa a quantidade de notas de R$ 1,00 e y a quantidade de notas de R$ 5,00. Como x e y representam quantidades de notas e não há nenhuma proibição no enunciado da situação-problema quanto ao uso de um só tipo de nota, tem-se que eles representam um número inteiro não-negativo.

É visível que $y \leq 4$, pois 5 ou mais notas de R$ 5,00 ultrapassariam o valor de R$ 20,00. Assim, os possíveis valores para y seriam 0, 1, 2, 3 e 4. Substituindo-se esses valores de y na equação (4) encontra-se, respectivamente, 20, 15, 10, 5 e 0 para valores de x.

Chega-se à conclusão que essa situação-problema conta com 5 soluções. Logo, preciso usar 4 notas de R$ 5,00 ou 5 notas de R$ 1,00 e 3 notas de R$ 5,00 ou 10 notas de R$ 1,00 e 2 notas de R$ 5,00 ou 15 notas de R$ 1,00 e 1 nota de R$ 5,00 ou 20 notas de R$ 1,00.

Por tratar-se de uma situação-problema muito simples, recomenda-se sua aplicação ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesses anos são comuns atividades nas quais as crianças têm em mãos reproduções de cédulas originais e são colocadas em diversas situações simuladoras de compra e venda com troco. Trata-se de excelente oportunidade para, desde cedo, na prática, mostrar aos alunos que nem todos os problemas têm uma única solução. O aluno que desde cedo assimilar que um problema pode ter mais de uma solução provavelmente enfrentará menores dificuldades nos anos seguintes de estudo. Além disso, sua curiosidade e entusiasmo por encontrar outras respostas, saídas e/ou alternativas para situações-problema dadas, servirão de mola propulsora e garantirão seu êxito não somente no ambiente escolar,mas também no seu futuro profissional.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 6: O dono de uma loja de animais vai comprar canários, pintassilgos e coleirinhos. Ele vai pagar R$ 9,00 por pintassilgo, R$ 15,00 por coleirinho e R$ 36,00 por canário e quer gastar exatamente R$ 720,00 na compra. Quantos passarinhos de cada espécie ele vai comprar, sabendo que ele quer quantidades iguais de pintassilgos e coleirinhos, e pelo menos 20 pintassilgos e 4 canários? (GUELLI, 2005, p. 167).

A princípio tem-se a sensação de que o problema será resolvido por uma Equação Diofantina Linear de três incógnitas. Porém, devido à informação presente na pergunta da situação-problema de que ele (o dono da loja de animais) quer quantidades iguais de pintassilgos e coleirinhos, a solução do problema resume-se à resolução da Equação Diofantina Linear

$$24x + 36y = 720 \tag{5}$$

onde x representa o número de pintassilgos e também o número de coleirinhos e y representa o número de canários. Ainda devido à pergunta temos que $x \geq 20$ (pelo menos 20 pintassilgos) e $y \geq 4$ (pelo menos 4 canários).

A equação (5) é equivalente à equação

$$2x + 3y = 60 \tag{6}$$

Nesse momento o professor do sétimo ano terá uma boa oportunidade para rever com seus alunos conteúdos como Equações Equivalentes, além de tópicos como máximo divisor comum ($m.d.c.$).

Como a pergunta fala em pelo menos 4 canários, ou seja, 4 ou mais canários, é interessante verificar se há alguma solução para o problema com exatamente 4 canários. Ao substituir y por 4 na equação (6) obtém-se $x = 24$. Isso significa que $x = 24$ e $y = 4$ é uma solução do problema.

É natural nesse momento os alunos já partirem logo para a resposta à situação-problema uma vez que estão muito habituados a problemas com uma única solução. Cabe ao professor instigar o aluno acerca da possibilidade de outras soluções. Para direcionar a busca por outras soluções é eficiente a reflexão sobre a solução encontrada. Se o valor pago (R$ 60,00) pelos passarinhos na nova equação é fixo, ao comprar mais que 4 canários, necessariamente deve-se comprar menos que 24 pintassilgos. Alunos do sétimo ano já têm uma boa noção intuitiva de proporção e, ainda que não tenham visto a parte teórica desse conteúdo, são capazes de compreender esse raciocínio. Dessa forma, chegamos à conclusão de que $20 \leq x \leq 24$. Ou seja, os outros possíveis valores para x são os valores do conjunto $\{20, 21, 22, 23\}$. Substituindo x por cada um deles na equação (6), encontramos, respectivamente, $\frac{20}{3}, 6, \frac{16}{3}$ e $\frac{14}{3}$ para valores de y. Como apenas 6 é um número natural, acabamos de encontrar uma nova solução para a situação-problema. Logo, $x = 21$ e $y = 6$ também é solução da situação-problema. Portanto, o dono da loja de animais poderá comprar 21 pintassilgos, 21 coleirinhos e 6 canários ou 24 pintassilgos, 24 coleirinhos e 4 canários.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 7: O gerente de uma loja dispõe de R$ 7.800,00 para comprar televisores de 14 ou 21 polegadas e completar o estoque da loja. Se o televisor de 14 polegadas custa R$ 300,00, e o de 21 polegadas, R$ 975,00, quantos televisores de cada tipo ele poderá comprar, sem que sobre dinheiro? (MORI & ONAGA, 2005, p. 219).

A equação correspondente à situação-problema é

$$300p + 975g = 7800 \tag{7}$$

onde a incógnita p representa a quantidade de televisores de 14 polegadas e a incógnita g representa a quantidade de televisores de 21 polegadas.

Como os coeficientes da equação (7) são números relativamente altos, seria bastante interessante fazer a simplificação da mesma. Para isso, utiliza-se o máximo divisor comum ($m.d.c.$), conteúdo ensinado no sexto ano do Ensino Fundamental e cuja utilidade basicamente restringia-se, à época, à simplificação de algumas frações. Calculando-se o $m.d.c.(300, 975, 7800)$ encontra-se 75. Procedendo-se a simplificação da equação (7) por 75 chega-se finalmente à equação

$$4p + 13g \;=\; 104 \tag{8}$$

cujos coeficientes são bem menores.

Verifica-se que o $m.d.c.(4, 13) = 1$ e que 1 divide 104. Portanto, a equação (8) tem solução inteira. Contudo, pelo contexto "quantidade de televisores", interessam exclusivamente as soluções inteiras não-negativas. Isolando-se a incógnita p, obtém-se:

$$p = 26 - \frac{13g}{4}$$

Sabe-se também que $g < 9$ pois 9 ou mais televisores de 21 polegadas já custariam juntos mais que R$ 7.800,00.

Como p é um número inteiro, tem-se que $\frac{13g}{4}$ também precisa ser inteiro. Acontece que os números 13 e 4 são primos entre si[5]. Logo, para que o termo $\frac{13g}{4}$ represente um número inteiro é necessário que g seja múltiplo de 4. Os múltiplos naturais de 4 menores que 9 são apenas 0, 4 e 8.

Substituindo-se g por 0, 4 e 8 na equação (8) obtém-se 26, 13 e 0, respectivamente. Portanto, essa equação tem três soluções: $(0, 8), (13, 4)$ e $(26, 0)$. O gerente da loja poderá comprar 8 televisores de 21 polegadas ou 13 televisores de 14 polegadas e 4 de 21 polegadas ou 26 televisores de 14 polegadas.

4 Sugestões de situações-problema para a segunda série do Ensino Médio

O ensino dos Sistemas Lineares geralmente ocorre quando o aluno chega à segunda série do Ensino Médio. Dentre os objetivos desse objeto de ensino, pode-se destacar:

> Identificar as equações lineares. Analisar equações lineares quanto ao número de soluções. Reconhecer sistemas lineares e sistemas lineares homogêneos. Identificar soluções de sistemas lineares. Identificar soluções de sistemas lineares com variáveis definidas no conjunto dos números inteiros. Escalonar a matriz completa de um sistema linear, com base nos princípios de equivalência de sistemas. Discutir e resolver sistemas lineares, com base do escalonamento. Discutir sistemas em função dos valores de coeficientes paramétricos. Resolver problemas práticos envolvendo resolução de sistemas lineares. Analisar e resolver situações-problema que envolvam resolução de sistemas lineares. (...) (PANADÉS RUBIÓ, 2012, p. 41).

[5]Dois ou mais números naturais são chamados de primos entre si quando o máximo divisor comum deles é 1.

De início mostra-se bem rapidamente o conceito geral de equação linear. Tudo isso de forma bastante concisa, pois o objetivo está em logo apresentar os sistemas lineares para, posteriormente, classificá-los, ensinar as técnicas de resolução e encontrar a solução. Nesse momento onde fala-se rapidamente sobre as equações lineares ainda são comuns exercícios do tipo: "Identifique se a equação $2xy + 4z = 13$ é linear", ou ainda, "Verifique se o terno ordenando (1, 3, 9) é uma solução da equação linear $4x + y - 9z = 9$".

Ao introduzir o conteúdo Sistemas Lineares, Luiz Roberto Dante propõe o seguinte problema: "Em uma partida de basquete, dois jogadores marcaram juntos 42 pontos. Quantos pontos marcou cada um?".(DANTE, 2010, p. 144).

O autor forma a equação

$$x + y = 42 \tag{9}$$

e, com o objetivo de mostrar aos alunos que a referida equação apresenta mais de uma solução, estipula (sem dar detalhes sobre os critérios que o levaram à escolha) três valores distintos para x. São eles: $x = 21$, $x = 30$ e $x = 16$, encontrando $y = 21$, $y = 12$ e $y = 26$ como os respectivos correspondentes.

Após outros comentários, Dante, por fim, deixa os seguintes dizeres: "Para refletir: (...) se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $42 - \alpha \in \mathbb{N}$, dizemos que $(\alpha, 42 - \alpha)$ é a solução geral da equação $x + y = 42$." (DANTE, 2010, p. 144).

Dessa forma, a incógnita x foi substituída por α, obtendo-se a equação $\alpha + y = 42$. Em seguida, a incógnita y foi isolada, obtendo-se $y = 42 - \alpha$. Assim, $(\alpha, 42 - \alpha)$ é uma forma generalizada de se representar as soluções da equação (9). É necessário e importante que o aluno perceba que $\alpha \in \mathbb{N}$ é menor que 43. Assim, a equação em questão terá uma quantidade finita de soluções.

É imprescindível um esforço maior dos professores ao tratar de situações-problema envolvendo equações que têm mais de uma solução. Os alunos vivenciam, no sétimo ano, um primeiro contato com as equações. E esse primeiro contato ocorre justamente com as equações de primeiro grau com uma incógnita que, desprovidas de contexto naquele momento, têm sempre uma solução. Dessa forma, após resolver exaustivamente diversas equações do primeiro grau com uma incógnita e encontrar invariavelmente uma solução, o aluno acaba por assimilar erroneamente que toda equação tem sempre uma única solução. Isso ocorre porque os alunos estão sempre em busca de modelos, numa tentativa de encontrar padrões para passar a reproduzi-los sem muita reflexão em torno. Esse conceito é geralmente levado até o nono ano (antiga oitava série) do Ensino Fundamental quando terão um contato mais intenso com as equações do segundo grau com uma incógnita. Esse é um momento de grande dilema vivido por muitos alunos. Muitos se espantam ao perceber a existência de equações com mais de uma solução.

Uma maneira de tentar amenizar esse choque vivido pelos alunos já vem sendo adotada por diversos autores de livros didáticos. Exercícios como "Resolva a equação $x+9 = 5$, sendo $U = \mathbb{N}$" servem para que o aluno reflita sobre a possibilidade de uma equação não ter solução; ou ainda, "Verifique, dentre os elementos do conjunto U = $\{1, 3, 5, 7\}$ quais são soluções da equação $x^2 - 6x + 12 = 7$". Tais atividades levam o aluno do sétimo ano a pensar que existem equações que têm mais de uma solução. Contudo, muitos professores preocupados em ensinar todo o programa, passam rapidamente por esses exercícios e, não lhes dando a devida importância, acabam não chamando a atenção dos alunos com relação a esses pontos.

A adoção, em sala de aula, pelo professor de exercícios como os citados no parágrafo anterior vai ao encontro de um trecho das orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem da Matemática para o Ensino Fundamental:

> As situações-problema apresentadas aos alunos devem ser variadas para que não se constitua a ideia de que somente é possível resolver problemas quando se tem um modelo de resolução já conhecido. Diferentes características das situações-problema precisam, portanto, ser observadas, como por exemplo: Quanto ao número de soluções: Problemas com mais de uma solução: Esse tipo de problema rompe com a crença de que todo problema tem uma única resposta, e também, de que há sempre uma maneira certa de resolvê-lo ou que, mesmo quando há várias soluções, apenas uma delas é a correta. O trabalho com problemas com duas ou mais soluções faz com que o aluno perceba que resolvê-los é um processo de investigação do qual participa como produtor do conhecimento. Problemas sem solução: Trabalhar com esse tipo de problema pode ajudar a romper com a concepção de que todo problema tem solução. Além disso, ajuda a desenvolver no aluno as capacidades de analisar, levantar hipóteses, duvidar. Problemas com apenas uma solução: Esse tipo é o mais comum e geralmente todos os dados estão expressos no enunciado. Cabe ao aluno identificar estratégias para a sua resolução e validar sua resposta. Devem ser trabalhados, mas não exclusivamente. (GIOVANNI JÚNIOR & CASTRUCCI, 2009, p. 11).

Partindo do pressuposto que os alunos da segunda série do Ensino Médio já assimilaram previamente conhecimentos e noções básicas a respeito de sequências numéricas e progressões aritméticas, tem-se uma forma alternativa e eficaz de apresentar a eles as Equações Diofantinas Lineares de duas incógnitas. Nessa abordagem, o conteúdo fica acessível ao aluno do Ensino Médio que será capaz de resolver Equações Diofantinas sem que haja a necessidade de um conhecimento mais profundo da parte teórica, o que efetivamente só ocorre em alguns cursos de nível superior.

Cada um dos problemas a seguir será resolvido utilizando como ferramenta conhecimentos de progressão aritmética. Pretende-se, ao resolvê-los, apresentar alguns apontamentos e considerações que possam ser úteis aos professores a fim de encorajá-los e dar suporte para que passem a trabalhar com mais ênfase as Equações Diofantinas Lineares também no Ensino Médio.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 8: Em um grupo de amigos, alguns têm 15 anos; os outros, 16. A soma de todas as idades é 125 anos. (PANADÉS RUBIÓ, 2012, p. 52).

a) Escolha incógnitas e traduza o problema por meio de uma equação linear.

Ao resolver esse item procure variar um pouco e escolher para incógnitas letras distintas de x e y. Essa estratégia é importante para que o aluno tenha o hábito de usar também outras incógnitas em suas equações e expressões algébricas. É comum alunos do Ensino Fundamental alegarem não saber resolver uma equação como, por exemplo, $8d + 15 = 70$. Entretanto, esses mesmos alunos resolveriam corretamente a equação $8x + 15 = 70$.

Dessa forma, escolha-se h para representar a quantidade de amigos do grupo que tem 15 anos e v para representar a quantidade deles que tem 16 anos. Logo, a equação formada será:

$$15h + 16v = 125$$

Trata-se de uma Equação Diofantina Linear de duas incógnitas.

b) A que universo numérico pertencem as incógnitas dessa equação?

A atual pergunta é um questionamento extremamente importante e oportuno. É a partir da resposta dada a ela que os alunos poderão estabelecer conjecturas a fim de terem condições de dizer algo sobre a existência ou inexistência de soluções para a equação. Para respondê-la é sempre necessário voltar ao problema e se perguntar: em que contexto a situação-problema se insere? Neste caso particular, as incógnitas representam a quantidade de amigos num grupo. É impossível pensar em - 5 amigos, ou ainda, em 3,74 amigos. Portanto, cada incógnita representará um número natural não nulo.

c) Quantas são as pessoas do grupo, por idade?

Para responder a essa pergunta, basta observar que $h < 9$. Portanto, os possíveis valores de h estão no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 8\}$. Note que a sequência $(1, 2, 3, ..., 8)$ é uma progressão aritmética de razão 1. Substituindo h por 1, 2 e 3, encontra-se, respectivamente, $v = \frac{110}{16}$, $v = \frac{95}{16}$ e $v = \frac{80}{16}$. Veja que os valores encontrados para v nessa ordem formam uma progressão aritmética de razão igual a $-\frac{15}{16}$ e que esta progressão terá também 8 termos uma vez que cada termo da mesma é correspondente de um termo na progressão (1, 2, 3, ..., 8).

Levando em consideração o que foi respondido no item (b), resta agora identificar dentre os elementos da progressão aritmética $(\frac{110}{16}, \frac{95}{16}, \frac{80}{16}, ...)$ qual é ou quais são um número natural não nulo. Feito isso, verifica-se que apenas $\frac{80}{16} = 5$ atende a essa exigência. Portanto, a situação-problema apresenta uma única solução: $h = 3$ e $v = 5$. No grupo há 3 amigos com 15 anos e 5 amigos com 16 anos.

A abordagem das Equações Diofantinas Lineares pode, nessa perspectiva, representar uma oportunidade ímpar para que os alunos possam vislumbrar uma aplicação do conteúdo: Progressão Aritmética.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 9: No jogo de basquete, as cestas podem valer 3 pontos, 2 pontos ou 1 ponto (lance livre). Encontre todas as maneiras de um time fazer 15 pontos. (Sugestão: faça uma tabela organizada). (DANTE, 2005, p. 35).

Apesar de o autor do livro, Luiz Roberto Dante, sugerir a confecção de uma tabela organizada para encontrar todas as soluções, Sílvio Barbosa de Oliveira propõe a construção da equação

$$3x + 2y + z \quad = \quad 15 \tag{10}$$

onde x, y e z indicam o número de cestas, como uma alternativa de resolução dessa situação-problema. Para Barbosa, ao analisar a resposta dada a essa questão pelo autor no manual do professor, a inexistência de justificativas para obtenção dos valores expressos na tabela parece indicar que a estratégia utilizada foi a de tentativa e erro.

Ainda segundo a estratégia de resolução sugerida por Barbosa, inicialmente é importante observar que x, y e z são números inteiros não negativos, uma vez que representam número de cestas em um jogo de basquete. Analisando a equação (10) tem-se que $3x \leq 15$, $2y \leq 15$ e $z \leq 15$. Considerando, por exemplo, que $3x \leq 15$, obtém-se os possíveis valores para x que são 0, 1, 2, 3, 4 e 5. A opção pela inequação $3x \leq 15$ deve-se ao fato da mesma ser a que menor soluções apresenta. As inequações $2y \leq 15$ e $z \leq 15$ apresentam, respectivamente, 8 e 16 soluções, o que tornaria o desenvolvimento do processo de resolução ainda mais trabalhoso. Dessa forma, a situação-problema é descrita pela equação

$$2y + z = 15 - 3x$$

com as seguintes condições $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Fazendo a substituição de cada valor de x, obtém-se seis Equações Diofantinas Lineares de duas incógnitas:

$$2y + z = 15 \tag{11}$$

$$2y + z = 12 \tag{12}$$

$$2y + z = 9 \tag{13}$$

$$2y + z = 6 \tag{14}$$

$$2y + z = 3 \tag{15}$$

$$2y + z = 0 \tag{16}$$

Resta agora resolver cada uma delas.

Para resolvê-las deve-se levar em conta que $m.d.c.(2, 1) = 1$ e 1 é divisor de 15, de 12, de 9, de 6, de 3 e também de 0. Portanto, todas elas têm solução inteira.

Para resolver a equação (11), deve-se observar que $y < 8$, ou seja, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Substituindo-se y por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7, encontram-se, respectivamente, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, e 1 para valores de z. Assim, encontram-se oito soluções: $(0, 0, 15)$, $(0, 1, 13)$, $(0, 2, 11)$, $(0, 3, 9)$, $(0, 4, 7)$, $(0, 5, 5)$, $(0, 6, 3)$ e $(0, 7, 1)$.

Para resolver a equação (12), deve-se observar que $y < 7$, ou seja, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Substituindo-se y por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, encontram-se, respectivamente, os valores 12, 10, 8, 6, 4, 2 e 0, para valores de z. Assim, encontram-se sete soluções: $(1, 0, 12)$, $(1, 1, 10)$, $(1, 2, 8)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 5, 2)$ e $(1, 6, 0)$.

Para resolver a equação (13), deve-se observar que $y < 5$, ou seja, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Substituindo-se y por 0, 1, 2, 3, e 4, encontram-se, respectivamente, 9, 7, 5, 3, e 1 para valores de z. Assim, encontram-se cinco soluções: $(2, 0, 9), (2, 1, 7), (2, 2, 5), (2, 3, 3)$ e $(2, 4, 1)$.

Para resolver a equação (14), deve-se observar que $y < 4$, ou seja, $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Substituindo-se y por 0, 1, 2, e 3, encontram-se, respectivamente, 6, 4, 2 e 0 para valores de z. Assim, encontram-se quatro soluções: $(3, 0, 6), (3, 1, 4), (3, 2, 2)$, e $(3, 3, 0)$.

Para resolver a equação (15), deve-se observar que $y < 2$, ou seja, $y \in \{0, 1\}$. Substituindo-se y por 0 e 1, encontram-se, respectivamente, 3 e 1 para valores de z. Assim, encontram-se duas soluções: $(4, 0, 3)$ e $(4, 1, 1)$.

Para resolver a equação (16), deve-se observar que $y = 0$. Substituindo-se y por 0 encontra-se 0 para valor de z. Assim, encontra-se mais uma solução: $(5, 0, 0)$.

Portanto, há $8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 27$ maneiras de um time de basquete fazer 15 pontos.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 10: Essa situação-problema visa mencionar o artigo publicado por Edméia F. Silva (2002) na Revista da Olimpíada do Estado de Goiás, no qual a autora lembra que exemplos de Equações Diofantinas Lineares também surgem em problemas da natureza, destacando como exemplo o fato de que a molécula de oxigênio reage com a molécula de hidrogênio para produzir água.

Quando se escreve uma equação química, é importante verificar sempre se o número de átomos de cada elemento é o mesmo em ambos os lados da equação, ou seja, se ela está balanceada. Para realizar o balanceamento, temos de colocar um número (denominado coeficiente estequiométrico) antes dos símbolos. Esses coeficientes usados no balanceamento de uma equação química devem ser sempre os menores números inteiros positivos possíveis, pois não dá para imaginar $\frac{1}{2}$ molécula de algum elemento químico. Como os átomos não são alterados, o número de átomos de cada elemento do início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento no fim da reação. Ao observar a equação química $H_2 + O_2 = H_2O$, note que a quantidade de átomos de oxigênio em ambos os lados não é a mesma. No primeiro membro há dois átomos de oxigênio enquanto que no segundo membro há apenas um átomo desse mesmo elemento. Portanto, a equação $H_2 + O_2 = H_2O$ não está balanceada.

Veja como exemplo o balanceamento da equação da água.

Se os coeficientes estequiométricos forem respectivamente x, y e z, temos que:

$$xH_2 + yO_2 \quad = \quad zH_2O,$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x & = & 2z & \text{(hidrogênio)} \\ 2y & = & z & \text{(oxigênio)} \end{cases}$$

O sistema é SPI[6] e admite mais de uma solução (x, y, z), porém nos interessa a menor solução inteira. Tomando-se $y = \alpha$ na segunda equação do sistema tem-se que $z = 2\alpha$. Já pela primeira equação, substituindo-se z por 2α, tem-se que $x = 2\alpha$. Assim, a solução genérica desse sistema é $(2\alpha, \alpha, 2\alpha)$, portanto temos a menor solução inteira para $\alpha = 1$. Logo, $x = 2$, $y = 1$ e $z = 2$ e a equação balanceada é

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

.

Uma alternativa diferente de se fazer tal balanceamento surge a partir da constatação de que o sistema acima é equivalente à Equação Diofantina Linear

$$2x - 4y = 0$$

que, após simplificada, transforma-se em

$$x - 2y = 0$$

Tal equação apresenta infinitas soluções, sendo (2,1) a solução contendo os menores números inteiros positivos possíveis. Assim, $x = 2$ e $y = 1$ e como $z = 2y$ tem-se que $z = 2$. Portanto a equação balanceada é

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

Com essa situação-problema, percebe-se que uma situação simples e conhecida da Química pode ser representada por uma Equação Diofantina Linear. Portanto, o estudo das Equações Diofantinas Lineares não deve restringir-se apenas às aulas de Matemática, uma vez que o conhecimento dessas equações tem utilidade prática em outras disciplinas, em especial na Química, Física e Biologia.

[6]Sistema Possível Indeterminado

SITUAÇÃO-PROBLEMA 11: Uma revista custa R$ 19,00. Alice, que só dispõe de notas de R$ 2,00 gostaria de efetuar a compra de uma única revista. Contudo, a vendedora Elaine só tem notas de R$ 5,00. Haverá alguma possibilidade de elas efetuarem o negócio?

Equacionando-se a situação-problema chega-se à equação

$$2x - 5y \; = \; 19 \tag{17}$$

Nessa equação, x e y representam, respectivamente, a quantidade de notas de R$ 2,00 e de R$ 5,00. E justamente por representarem quantidade de notas, tem-se que, a princípio, $x \geq 0$ e também $y \geq 0$.

Isolando-se x na equação (17), obtém-se:

$$\begin{aligned} x &= \frac{19+5y}{2} \\ x &= \frac{18+1+4y+y}{2} \\ x &= \frac{18+4y}{2} + \frac{y+1}{2} \\ x &= 9+2y+\frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

é possível verificar-se que x só será inteiro quando y for ímpar. Assim, tomando-se 1, 3 e 5 para valores de y observa-se que os valores correspondentes de x serão, respectivamente, 12, 17 e 22. A partir dessa observação, organiza-se duas sequências numéricas: S_x e S_y, formadas pelos valores de x e y, respectivamente. Assim, S_x: $(12, 17, 22, ...)$ e S_y: $(1, 3, 5, ...)$. Se houver necessidade, encontra-se o valor de x correspondente a alguns outros valores de y. Neste momento deve-se chamar a atenção para o fato de que ambas as sequências numéricas representarem progressões aritméticas. S_x é uma progressão aritmética de razão 5, enquanto S_y tem razão 2. Dessa forma, cada par ordenado formado por termos respectivamente correspondentes de S_x e S_y constitui uma solução para a equação dada. São exemplos de soluções: (12,1),(17,3),(22,5). Portanto, essa situação-problema, teoricamente, apresenta infinitas soluções. Contudo, diante do contexto pressupõe-se que o aluno considere a menor solução. Dessa forma, para comprar a revista basta que Alice dê à vendedora 12 notas de R$ 2,00, recebendo por troco 1 nota de R$ 5,00.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 12: Adivinhar o aniversário: Propõe a uma pessoa que multiplique a data do dia do seu nascimento, por 12, e o número que indica o mês correspondente, por 31. Com a soma desses produtos é possível calcular-se a data do aniversário da dita pessoa. Se, por exemplo, ela nasceu em 09 de fevereiro, efetuar-se-ão os seguintes cálculos:$9.12 = 108; 2.31 = 62; 108 + 62 = 170$. Como se deduzirá a data do aniversário com o conhecimento dessa soma? (BARROS, 1998, p. 43).

O caráter lúdico dessa situação-problema pode representar um importante recurso didático inclusive para introduzir o conteúdo Equações Diofantinas Lineares na segunda série do Ensino Médio. Uma situação desafiadora como essa é capaz de surtir excelente efeito entre os adolescentes que, imersos num clima de competição, são capazes de se interessar cada vez mais, levantar hipóteses e testá-las a fim de "adivinhar" e responder corretamente ao desafio levantado. Num segundo plano, um pouco mais complexo talvez, tal situação-problema servirá para despertar a curiosidade de alguns alunos para verificar o porquê desse "truque" sempre funcionar, estimulando-os a buscar uma explicação para esse fato. Daí, é o momento propício para se falar das Equações Diofantinas Lineares e ensinar os métodos para resolvê-las.

Com relação ao exemplo dado na situação-problema onde pretende-se "adivinhar" o dia e o mês de nascimento de uma pessoa sabendo-se que a soma é 170, é suficiente resolver a equação

$$12d + 31m = 170$$

Nessa equação, d representa o dia e m representa o número correspondente ao mês em que a pessoa nasceu. Deve-se estar atento ao fato de $m.d.c.(12, 31) = 1$ e 1 dividir 170. Assim, a equação tem solução inteira. Além disso, d e m são números inteiros positivos tais que $d \leq 31$, pois um mês tem no máximo 31 dias e $m \leq 12$, pois no ano há 12 meses.

Nesse momento, estipula-se dois valores consecutivos para m e encontra-se os valores de d correspondentes. Recomenda-se que os valores estipulados para m estejam preferencialmente numa extremidade do conjunto {1,2,3,...,11,12}. Mas, a escolha por números consecutivos que não estejam na extremidade não significará que a resolução da situação-problema ficará inviabilizada.

Escolhendo-se os valores 1 e 2 para m, encontra-se, respectivamente, $\frac{139}{12}$ e $\frac{108}{12} = 9$ para valores de d e a situação-problema já estará resolvida, uma vez que $(9, 2)$ é a solução procurada.

Escolhendo-se os valores 12 e 11 para m, encontra-se, respectivamente, $-\frac{202}{12}$ e $-\frac{171}{12}$ para valores de d. Em seguida, elabora-se duas sequências numéricas: S_m: $(12, 11, ...)$ e S_d: $(-\frac{102}{12}, -\frac{171}{12}, ...)$. Tais sequências constituem progressões aritméticas e apresentam cada uma 12 termos. A progressão aritmética S_d tem razão $\frac{31}{12}$ e somente exibirá termos positivos a partir do oitavo termo (incluindo-o).

Considerando d_n como o enésimo termo da progressão aritmética S_d tem-se:

$$\begin{aligned}
d_n &> 0 \\
d_1 + (n-1) \cdot r &> 0 \\
-\frac{202}{12} + (n-1) \cdot \frac{31}{12} &> 0 \\
-\frac{202}{12} + \frac{31}{12} \cdot n - \frac{31}{12} &> 0 \\
\frac{31}{12} \cdot n &> \frac{202}{12} + \frac{31}{12} \\
\frac{31}{12} \cdot n &> \frac{233}{12} \\
31 \cdot n &> 233 \\
n &> \frac{233}{31}
\end{aligned}$$

Portanto, $n \geq 8$.

Falta agora procurar um número inteiro positivo a partir do oitavo termo da sequência S_d. Calculando-se, encontra-se $a_8 = \frac{15}{12}$, $a_9 = \frac{46}{12}$, $a_{10} = \frac{77}{12}$, $a_{11} = \frac{108}{12} = 9$ e $a_{12} = \frac{139}{12}$. Portanto, somente o décimo primeiro termo da sequência S_d representa um número inteiro positivo. Assim, $d = 9$ e $m = 2$, pois 2 é o décimo primeiro termo da sequência S_m. Logo, a pessoa nasceu no dia 9 de fevereiro.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 13: Uma compra de eletrodomésticos. Por R$ 5.000,00 compraram-se 100 unidades de eletrodomésticos. Os preços deles eram os seguintes:

TELEVISOR 14 POLEGADAS	R$ 500,00 cada
BATEDEIRA	R$ 100,00 cada
RÁDIO DE PILHA	R$ 10,00 cada

Quantos eletrodomésticos de cada espécie puderam ser comprados? (BARROS, 1998, p. 45).

Também nessa situação-problema tem-se, de início, a sensação de tratar-se de um exercício que envolverá três incógnitas, o que não ocorre. Note que a informação "compraram-se 100 unidades de eletrodomésticos" será fundamental para que a Equação Diofantina Linear tenha duas incógnitas.

Tomando-se t para representar a quantidade de televisores de 14 polegadas, b para a quantidade de batedeiras e de posse da informação destacada acima, conclui-se que a quantidade de rádio de pilha pode ser representada pelo binômio $100 - t - b$. A partir daí, forma-se a equação

$$500t + 100b + 10 \cdot (100 - t - b) = 5000$$

Após desenvolvê-la e simplificá-la, chega-se à equação

$$49t + 9b = 400$$

As incógnitas t e b representam quantidade de objetos, portanto tratam-se de números inteiros não negativos.

Como o $m.d.c.(49, 9) = 1$ e 1 divide 400, conclui-se que essa equação tem solução inteira. Para encontrar a solução ou as soluções, note que $t < 9$. Portanto, os possíveis valores de t estão no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 8\}$. Perceba que a sequência $(0, 1, 2, 3, ..., 8)$ é uma progressão aritmética de razão 1. Substituindo t por 0, 1 e 2, encontra-se, respectivamente, $b = \frac{400}{9}$, $b = \frac{351}{9}$ e $b = \frac{302}{9}$.

Os valores encontrados para b nessa ordem formam uma progressão aritmética de razão igual a - $\frac{49}{9}$ e que esta progressão terá também 9 termos, uma vez que cada termo da mesma é correspondente de um termo na progressão $(0, 1, 2, 3, ..., 8)$.

Falta agora identifcar, dentre os elementos da progressão aritmética $(\frac{400}{9}, \frac{351}{9}, \frac{302}{9}, ...)$, qual é ou quais são um número natural não nulo. Feito isso, verifica-se que apenas $\frac{351}{9} = 39$ atende a essa exigência. Portanto, o problema apresenta uma única solução: $t = 1$ e $b = 39$. Portanto, puderam ser comprados 1 televisor de 14 polegadas, 39 batedeiras e $100 - 1 - 39$, ou seja, 60 rádios de pilha.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 14: João é dono de uma fábrica de perfumes. Marcelo, um de seus funcionários, saiu para vender perfumes de dois tipos diferentes, A e B. O do tipo A por R$ 18,00 e o do tipo B por R$ 12,00. Marcelo volta à fábrica e entrega a João R$ 400,00 arrecadados com as vendas dos perfumes. Quantos perfumes de cada tipo foram vendidos? (COSTA, 2007. p. 44).

Esse problema pode ser modelado pela Equação Diofantina Linear

$$18x + 12y = 400$$

Simplicando-a pode-se chegar à equação

$$9x + 6y = 200 \tag{18}$$

Neste caso, é suficiente lembrar o Teorema e verificar que $m.d.c.(9, 6) = 3$ não é um divisor de 200. Portanto, a equação não tem nenhuma solução inteira. Diante desse tipo de equação (sem solução inteira) fica inviável aplicar o método de tentativa e erro. Afinal, o aluno gastaria um tempo imenso testando alguns valores em vão, não encontrando solução alguma. Logo, não é possível arrecadar exatamente R$ 400,00 com as vendas dos perfumes do tipo A e B.

Uma outra forma de se mostrar ao aluno que trata-se de uma equação sem solução seria trabalhar a equação (18) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3x + 2y) &= 200 \\ 3x + 2y &= \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Como x e y devem ser números inteiros, $3x$ e $2y$ também serão números inteiros, e a soma $3x + 2y$ também será um número inteiro, não podendo ser igual a $\frac{200}{3}$ que não é um número inteiro. Nessa forma alternativa de resolução leva-se em conta que um múltiplo de um número inteiro é sempre um número inteiro e também que a soma de dois números inteiros é um número inteiro. Informações essas que são acessíveis à compreensão dos alunos do Ensino Médio.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 15: Para entrar em um baile, os homens pagaram R$ 12,00, enquanto as mulheres pagaram somente R$ 8,00. Sabendo-se que foram arrecadados R$ 200,00 na portaria, quantas pessoas estiveram nesse baile?

Equacionando-se o problema, obtém-se a equação

$$12x + 8y = 200$$

que, após simplificada, transforma-se em

$$3x + 2y = 50 \tag{19}$$

Como o $m.d.c.(3, 2) = 1$ e 1 divide 50, a equação (19) terá solução inteira.

Com a certeza de que a equação tem solução inteira, deve-se então iniciar a procura por essa solução ou soluções. É importante observar que 50 é um número relativamente alto, o que dificulta bastante a resolução da equação exclusivamente pelo método de tentativa e erro. Não se pretende aqui questionar a eficácia de tal método, porém seria trabalhoso e demandaria tempo resolver essa equação por tentativa e erro. Além disso, mesmo após encontrar algumas soluções, o aluno nunca teria certeza se havia encontrado todas ou não.

Dessa forma propõe-se a resolução da equação (19) levando-se em conta o algoritmo de Euclides:

1	2	
3	2	1
1	0	

Assim, tem-se que 3 - 2 = 1. Multiplicando-se essa igualdade pelo número 150, obtém-se

$$3.50 + 2.(-50) = 50$$

Logo, $(50, -50)$ é uma solução particular dessa equação e $(50 + 2k, -50 - 3k)$, com k inteiro, constitui uma solução geral.

Sabe-se que, diante do contexto em o que o problema está inserido, apenas as soluções inteiras não negativas dessa equação interessam. Daí, formam-se as seguintes inequações $50 + 2k \geq 0$ e $-50 - 3k \geq 0$. Da primeira vem que $k \geq -25$ e da segunda, $k \leq -\frac{50}{3}$, donde encontra-se que $k \in \{-25, -24, -23, ..., -17\}$. A partir desses valores inteiros para k, obtém-se 9 soluções distintas para essa Equação Diofantina Linear. São elas: $(0, 25)$, $(2, 22)$, $(4, 19)$, $(6, 16)$, $(8, 13)$, $(10, 10)$, $(12, 7)$, $(14, 4)$ e $(16, 1)$.

Esse mesmo problema poderia ser resolvido de uma outra forma um tanto quanto diferente da anterior, caso se tivesse o objetivo de enfatizar também conhecimentos relativos às progressões aritméticas. Após verificar-se pelo Teorema que a Equação Diofantina Linear tem solução inteira, estipula-se de preferência o menor valor para x dentro do contexto. No caso, $x = 0$. Em seguida, encontra-se, via equação, o valor de y correspondente a $x = 0$ e também a $x = 1$, que é o próximo número inteiro depois do zero. Para $x = 0$ tem-se $y = 25$ e para $x = 1$ tem-se $y = 23,5$.

Com esses valores de x forma-se uma sequência S_x: (0, 1, ...) e com os valores de y forma-se outra sequência S_y (25; 23,5; ...). A primeira sequência constitui uma progressão aritmética de razão 1 e a segunda uma progressão aritmética de razão - 1,5. Cada par ordenado formado por termos correspondentes da sequência S_x e S_y nessa ordem constitui uma solução em potencial para a Equação Diofantina. Como trata-se de um contexto onde somente interessam números inteiros, fica-se apenas com os pares formados a partir de termos de ordem ímpar. São eles: $(0, 25)$, $(2, 22)$, $(4, 19)$, $(6, 16)$, $(8, 13)$, $(10, 10)$, $(12, 7)$, $(14, 4)$ e $(16, 1)$.

5 Considerações Finais

Após o relato feito sobre a pouca atenção que vem sendo dispensada às Equações Diofantinas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio e a apresentação de cada uma das situações-problema que compõe o corpo do trabalho, espera-se que o objetivo de sensibilizar professores desse segmento de ensino quanto à importância desse conteúdo tenha sido alcançado. Além do mais, deseja-se que as estratégias adotadas para a resolução de cada uma sirvam para incentivar os professores de Matemática a pesquisar o assunto e a buscar outras estratégias para abordar tal conteúdo, a fim de consolidar seu ensino e aprendizado ainda na Educação Básica.

6 Agradecimento

Quero expressar a minha gratidão a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

A DEUS, por me iluminar nos momentos difíceis permitindo que eu concluísse este trabalho.

Especialmente ao professor Ronaldo Ribeiro Alves pela orientação competente, pela paciência extrema e necessária, por sua dedicação e, acima de tudo, por acreditar na conclusão deste trabalho.

Aos professores Juan Valentín Mendoza Mogollón e Nilton César da Silva que, participando da banca de qualificação, contribuíram de modo significativo para o delineamento e conclusão deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), pela contribuição para a minha formação.

Aos colegas de Mestrado pelo convívio, amizade e ajuda. Em especial, às amigas Alcione Aparecida de Oliveira Moura e Ana Lúcia Camarano Resende que tão bem me acolheram em seus lares ao longo de horas de estudo em grupo e preparação para as provas.

À minha família, em especial, minha irmã Cíntia, pelo apoio e amor incondicionais dedicados a mim, durante toda a minha vida.

Às professoras Maria Emília Aparecida de Assis, Vivia Aparecida da Silva Reis e Viviane Cristina Almada de Oliveira por esclarecimentos e observações importantes acerca da proposta de redação do trabalho.

À Secretaria Municipal de Educação de São João del-Rei pela liberação dos trabalhos para que pudesse cursar o Mestrado.

Por fim, à CAPES, pelo fornecimento da bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário à realização deste trabalho.

Referências

BARROS, A. F. S. **Equações diofantinas e suas aplicações**. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Estadual do Sudeste da Bahia, Vitória da Conquista, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: SEMT/MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COSTA, E. S. da **Equações diofantinas lineares e o professor do ensino médio**. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?**. Tradução de: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática**. Volume 1. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. Volume 2. São Paulo: Ática, 2010. Cf. Manual Pedagógico do Professor - Parte geral.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. 7º ano. Ed. Renovada. - São Paulo: FTD, 2009. - (Coleção a conquista da matemática). Cf. Orientações para o professor.

GUELLI, O. **Matemática: Uma aventura do pensamento**. 6ª série. São Paulo: Ática, 2ª Ed., 2005.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2ª. Ed. 2011. (Coleção do Professor de Matemática).

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: Ideias e Desafios**, 6ª série. São Paulo: Saraiva, 14ª Ed. Reform., 2005.

OLIVEIRA, S. de A. **Uma exploração didática das equações diofantinas lineares de duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em Matemática**.

2010. 115f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

OLIVEIRA, S. B. de **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. 2006. 102f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PANADÉS RUBIÓ, A. **Matemática**. 2ª série: ensino médio, livro 1. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2012. (Coleção Pitágoras). Cf. Capítulo 3.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares: um desafio motivador para alunos do ensino médio**. 2008. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares: um tema articulador de estratégias no ensino básico**. In Caderno pedagógico, Lajeado, v. 9, nº 1, p. 137-154, 2012.

ROCQUE, G. L., PITOMBEIRA, J. B. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. In Revista do Professor de Matemática v. 19, p. 39-47, 1991.

SILVA, E. F. **Equações Diofantinas Lineares**. Revista da Olimpíada, nº. 3, p. 110-118, 2002.